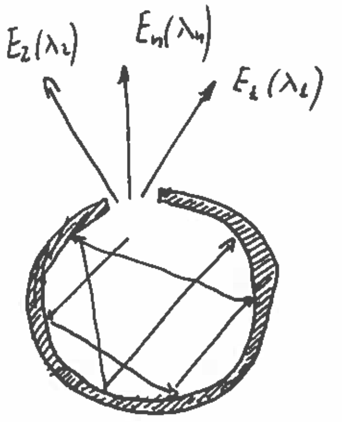
Dal corpo nero ai quanti di luce

Dal corpo nero ai quanti di luce

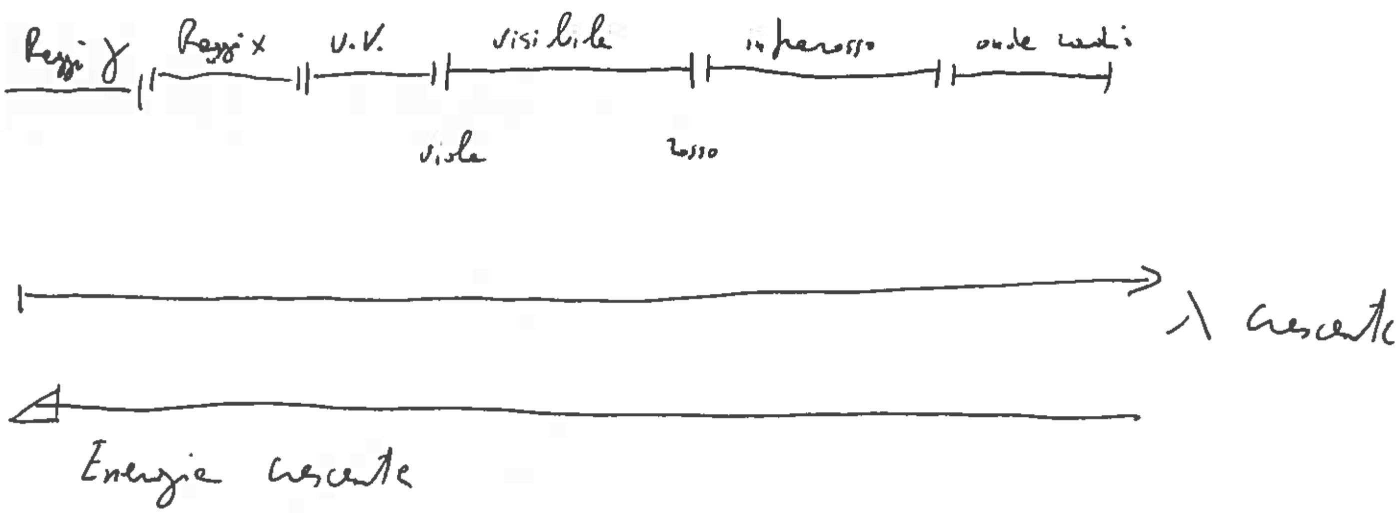


Per corpo nero s'intende un corpo che assorbendo le onde elettromagnetiche per tutte le lunghezze d'onde λ dello spettro si porta ad una temperatura T di equilibrio.

Dal corpo nero vengono emesse onde elettromagnetiche che hanno intensità diverse al variare della lunghezza d'onda λ e della temperatura T di equilibrio.

Si vuole determinare la funzione

$E(\lambda)$ tale che $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E(\lambda)\, d\lambda$ rappresenta l'energia emessa dal corpo nero nel range di lunghezze d'onda $\lambda_1 \to \lambda_2$



Fino ai primi anni del 900 utilizzando le ipotesi classiche che le onde elettromagnetiche trasportassero valori continui di energia proporzionale al quadrato del campo elettrico e che per ogni valore di λ l'onda associata fosse vista come un oscillatore di frequenza $f = \frac{c}{\lambda}$.
Portarono a formulare dei modelli in contrasto

con la realtà.

Infatti per valori di λ bassi (ultravioletto) il modello presentava un numero di oscillatori talmente alto che l'energia emessa in questo range (calcolata utilizzando la legge di ripartizione dell'energia di Boltzmann) tendeva all'infinito.

Fu Max Plank che formulando un'ipotesi del tutto nuova riuscì a costruire un modello matematico perfettamente coincidente con la realtà

$\boxed{\text{Ipotesi di Plank}}$

Le onde elettromagnetiche sono composte da quanti di luce con energia discreta dipendente dalla frequenza secondo la legge

$$\boxed{E_n = nhf = nh\frac{c}{\lambda} = nh\frac{1}{T} = nh\frac{\omega}{2\pi} = n\hbar\omega}$$

dove h è detta costante di PlanK e vale

$$h = 6.626\times10^{-34}\ \mathrm{J\,s}.$$

Fissata una certa frequenza f o equivalentemente una lunghezza d'onda $\lambda = \frac{c}{f}$ il corpo nero presenterà dei quanti di energia (detti fotoni) con valori discreti di energia.

N_0 = numero di quanti a energia 0

N_1 = numero di quanti a energia hf

N_2 = numero di quanti a energia $2hf$

$\vdots$

N_n = numero di quanti a energia nhf

Secondo la legge di equipartizione di energia di Boltzmann

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{e^{-\frac{2hf}{KT}}}{e^{-\frac{hf}{KT}}} = e^{-\frac{hf}{KT}}$$

in generale

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = e^{-\frac{hf}{KT}} = x$$

il valore medio dell'energia relativo alla frequenza f

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} E_i N_i}{\sum_{i=0}^{\infty} N_i}$$

$$\langle E \rangle = \frac{N_0 E_0 + N_1 E_1 + N_2 E_2 + N_3 E_3 + \dots}{N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + \dots}$$

$$\langle E \rangle = \frac{N_0 E_0 + x N_0 E_1 + x^2 N_0 E_2 + x^3 N_0 E_3 + \dots}{N_0 + x N_0 + x^2 N_0 + x^3 N_0 + \dots}$$

$$\langle E \rangle = \frac{x N_0 h f + 2x^2 N_0 h f + 3x^3 N_0 h f + \dots}{N_0 + x N_0 + x^2 N_0 + x^3 N_0 + \dots}$$

$$\langle E \rangle = \frac{h f x \left(1 + 2x + 3x^2 + \dots\right)}{\left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right)}$$

indichiamo con $S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

la grandezza al numeratore può essere scritta

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 =$$

$$\begin{array}{lllll} S = 1 + & x + & x^2 + & x^3 + & \dots \\ + & & & & \\ Sx = & x + & x^2 + & x^3 + & \dots \\ + & & & & \\ Sx^2 = & & x^2 + & x^3 + & \\ + & & & & \end{array}$$

$$\langle E \rangle = \frac{h f x S (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)}{S} = h f x \left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right)$$

p

Ricorda la serie geometrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} X^i = \frac{1}{1-X} \qquad \text{se} \quad -1 < X < 1$$

$$\langle E \rangle = \frac{hf\,X}{1-X} = \frac{hf\,e^{-\frac{hf}{kT}}}{1-e^{-\frac{hf}{kT}}}$$

moltiplicando per $e^{\frac{hf}{kT}}$

$$\langle E \rangle = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}}-1}$$

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

$$\langle E \rangle = \frac{hc}{\lambda\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1\right)}$$

$$\langle E \rangle = \frac{hc}{\lambda\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1\right)}$$

Considero ora un corpo nero a forma sferica di raggio unitario.

La relazione che lega il numero di stati emessi alla lunghezza d'onda è $n = \frac{1}{\lambda}$.

I possibili modi per coprire la sfera sono

$$4\pi n^2 dn$$

$$4\pi \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 d\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$E = \int_{\frac{1}{\lambda}=0}^{\frac{1}{\lambda}=\infty} \langle E \rangle \, 4\pi \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 d\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Considerando che gli stati raddoppiano per la polarizzazione della luce

$$E = \int_{\frac{1}{\lambda}=0}^{\frac{1}{\lambda}=\infty} \langle E \rangle \frac{8\pi}{\lambda^2} \left(-1\right) \lambda^{-2}\, d\lambda$$

$$E = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{8\pi\, h c}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1\right)}\, d\lambda$$

(a)

$\boxed{\text{Studiare il grafico}}$

$$E(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda k T}} - 1\right)}$$

con $\lambda \in [0, \infty)$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 8\pi hc > 0 \\ \alpha_2 = \dfrac{hc}{kT} > 0 \end{cases}$$

$$E(\lambda) = \frac{\alpha_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{\alpha_2}{\lambda}} - 1\right)}$$

$$\boxed{\lim_{\lambda \to 0} E(\lambda) = 0}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\alpha_1}{\lambda^5 \left(e^{\frac{\alpha_2}{\lambda}} - 1\right)} =$$

considero $z = \frac{1}{\lambda}$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\alpha_1 z^5}{e^{\alpha_2 z} - 1} \simeq \lim_{z \to 0} \frac{\alpha_1 z^5}{\alpha_2 z} = 0$$

$$\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} > 0 \Rightarrow \frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^{-5}\left(e^{\frac{\alpha_2}{\lambda}} - 1\right)^{-1}\right] > 0$$

$$-5\lambda^{-6}\left(e^{\frac{\alpha_2}{\lambda}} - 1\right)^{-1} + \lambda^{-5}(-1)\left(e^{\frac{\alpha_2}{\lambda}} - 1\right)^{-2}(-1)\lambda^{-2}\alpha_2 e^{\frac{\alpha_2}{\lambda}} > 0$$

moltiplicando per $\lambda^7 \left(e^{\frac{\alpha_2}{\lambda}} - 1\right)^2 \alpha_2^{-1} e^{-\frac{\alpha_2}{\lambda}}$

$$-5\lambda\left(e^{\frac{\alpha_2}{\lambda}}-1\right)\alpha_2^{-1}\, e^{-\frac{\alpha_2}{\lambda}}+1>0$$

$$\lambda < \frac{\alpha_2\, e^{\frac{\alpha_2}{\lambda}}}{5\left(e^{\frac{\alpha_2}{\lambda}}-1\right)}$$

Calcolo il valore che annulla la derivata prima

$$\lambda_{max}\, 5\left(e^{\frac{\alpha_2}{\lambda_{max}}}-1\right) = \alpha_2\, e^{\frac{\alpha_2}{\lambda_{max}}}$$

$$\frac{\cancel{5\lambda_{max}}}{\cancel{5\lambda_{max}}}\, e^{\frac{\alpha_2}{\lambda_{max}}} - \frac{\cancel{5\lambda_{max}}}{\cancel{5\lambda_{max}}} = \frac{\alpha_2\, e^{\frac{\alpha_2}{\lambda_{max}}}}{5\lambda_{max}}$$

$$e^{\frac{\alpha_2}{\lambda_{max}}} - 1 = \frac{\alpha_2\, e^{\frac{\alpha_2}{\lambda_{max}}}}{5\lambda_{max}}$$

posto $\frac{\alpha_2}{\lambda_{max}} = x$

$$e^{x} - 1 = \frac{1}{5}\, x\, e^{x}$$

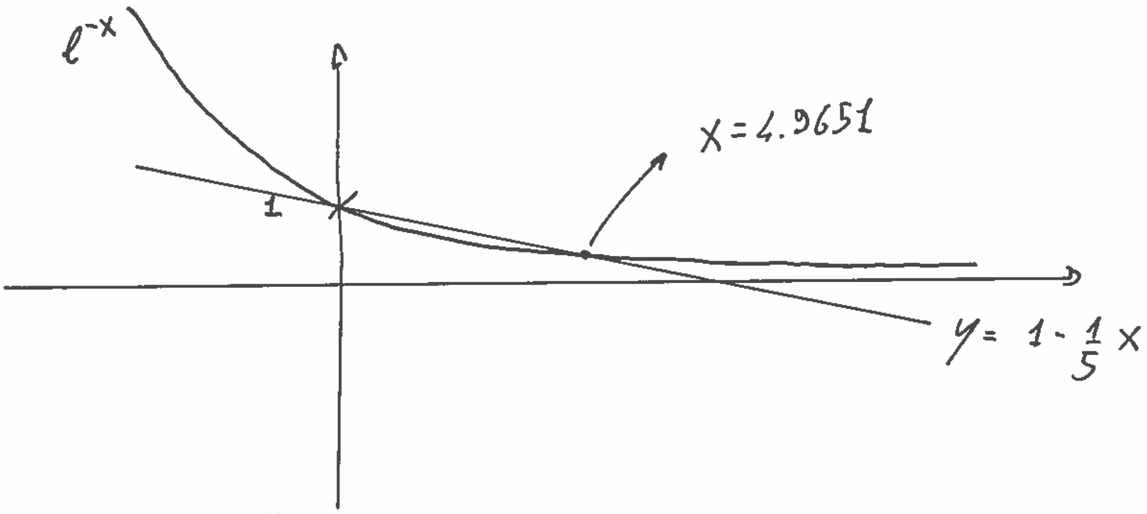
dividendo per e^{x}

c

$$1 - \frac{1}{e^{x}} = \frac{1}{5}x$$

$$1 - e^{-x} = \frac{1}{5}x$$

$$\boxed{e^{-x} = 1 - \frac{1}{5}x}$$



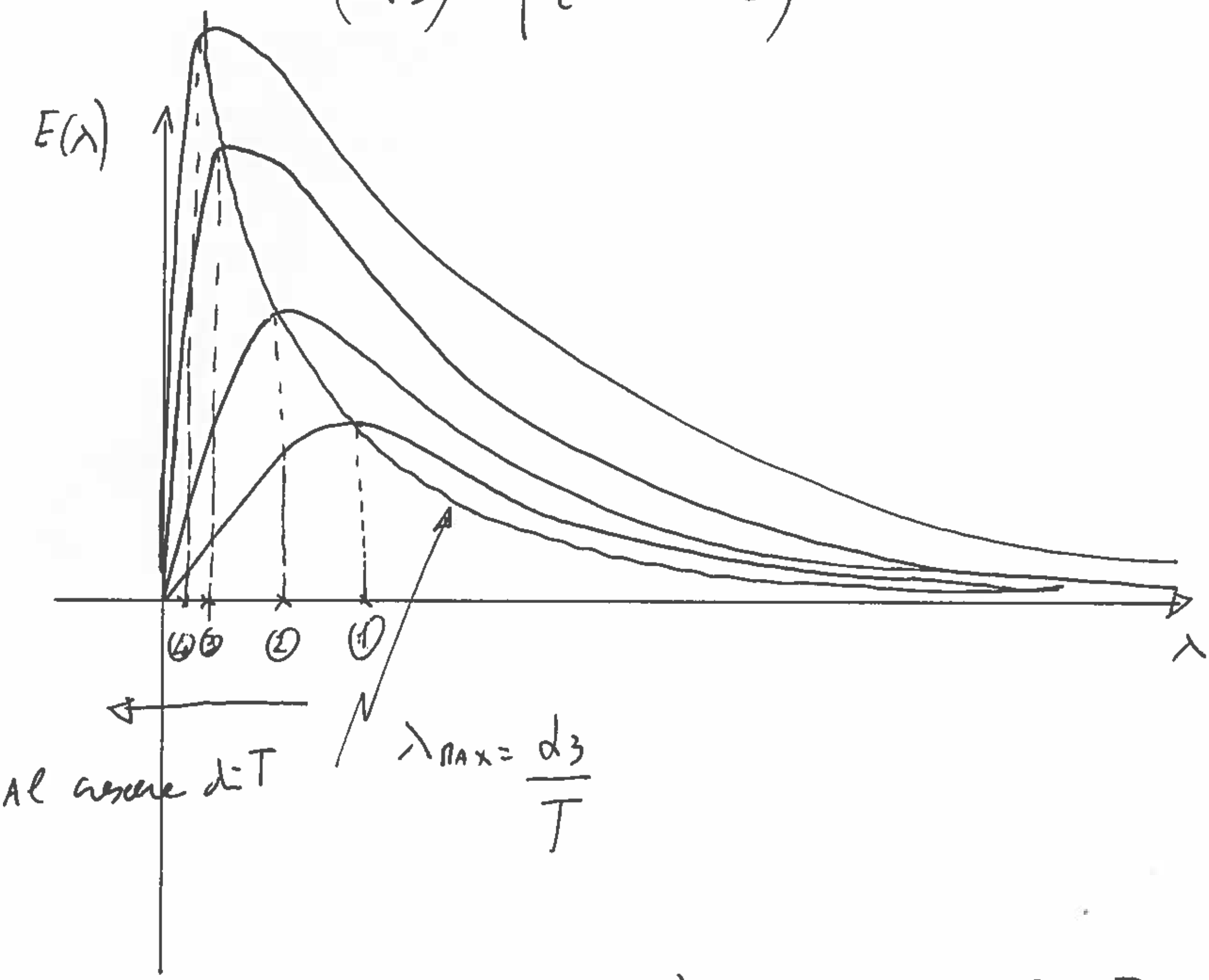
$$X = \frac{\alpha_2}{\lambda_{max}} = \frac{hc}{kT\lambda_{max}} = 4.9651$$

$$\boxed{T\lambda_{max}} = \frac{hc}{k \times 4.9651} = 2.8978 \times 10^{-3}\ mK = \alpha_3$$

d

$$E(\lambda_{max}) = \frac{8\pi hc}{\left(\frac{d_3}{T}\right)^5 \left(e^{\frac{hc}{\frac{d_3}{\cancel{T}} K \cancel{T}}} - 1\right)}$$

$$= \frac{8\pi hc\, T^5}{(d_3)^5 \left(e^{\frac{hc}{d_3 K}} - 1\right)}$$



$T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < \ldots T$

(1) $= \lambda_{max}\ (T = T_1)$

(2) $= \lambda_{max}\ (T = T_2)$

(3) $= \lambda_{max}\ (T = T_3)$

(4) $= \lambda_{max}\ (T = T_4)$

Al crescere della temperatura il picco si sposta verso lunghezze d'onda λ minori secondo la legge di Wien

$$\begin{cases} \lambda_{max} T = c_3 \\ c_3 = 2.8978 \times 10^{-3}\ mK \end{cases}$$

mentre cresce il picco $E(\lambda)$ con la quinta potenza della temperatura.

f

Valutare l'integrale

$$\int_0^\infty E(\lambda)\, d\lambda = \int_0^\infty \frac{8\pi h c}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda KT}} - 1\right)}\, d\lambda$$

poniamo $x = \frac{hc}{\lambda KT} \Rightarrow \frac{\lambda^5 (KT)^5}{(hc)^5} = \frac{1}{x^5}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda^5} = \frac{x^5 (KT)^5}{(hc)^5}$$

$$\int_0^\infty \frac{8\pi h c\, x^5 (KT)^5}{(hc)^5 (e^x - 1)}\, d\,\frac{hc}{KTx} =$$

$$= \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{8\pi h c\, x^5 (KT)^{\cancel{5}\,4}}{(hc)^{\cancel{5}\,4} (e^x - 1)} (-1)\, x^{-2} \frac{\cancel{hc}}{\cancel{KT}}\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{x=\infty} \frac{(KT)^4\, 8\pi h c}{(hc)^4 (e^x - 1)}\, x^3\, dx = \frac{(KT)^4\, 8\pi h c}{(hc)^4} \int_{x=0}^{x=\infty} \frac{x^3}{(e^x - 1)}\, dx$$

(9)

l'integrale $\int_{x=0}^{x=\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$

è convergente e vale $\frac{\pi^4}{15}$

$$\int_0^\infty E(\lambda) d\lambda = \frac{\pi^4}{15} \left(\frac{kT}{hc}\right)^4 8\pi hc$$

l'energia diffusa su tutte le lunghezze d'onda

è proporzionale a T^4 secondo la legge di

Stefan - Boltzmann.