Il principio di minima azione

Il principio di minima azione

Il principio di minima azione lascia sempre gli studenti meravigliati.

Racconta Richard Feynmann nel libro "Letture di Fisica" che durante le scuole medie superiori il suo insegnante di fisica gliene parlò dicendo che trovava la cosa davvero entusiasmante.

Da allora Richard Feynmann continuò a pensare a questo principio e parte della fisica da lui sviluppata pose le radici in questo principio stesso.

Di seguito riporto quello che l'insegnante di Feynmann raccontò al suo allievo sperando che tutti gli studenti restino incantati come il grande fisico americano.

Consideriamo un punto materiale che al tempo t_1 si trova nella posizione P_1 e al tempo t_2 passa per la posizione P_2.

Supponiamo inoltre che sia soggetto ad esempio ad un potenziale V.

Allora tra tutte le traiettorie possibili quella effettivamente percorsa dal punto materiale è quella che minimizza la grandezza data dall'integrale da t_1 a t_2 della grandezza $L = \frac{1}{2} m v^2 - V(x)$.

In un modo un po' fantasioso potremmo dire che la natura seleziona tutte le possibili traiettorie percorribili dal punto per spostarsi da P_1 al tempo t_1 e raggiungere P_2 al tempo t_2

e sceglie il percorso tale che

$$\int_{t_1}^{t_2} L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m v^2 - V(x) \right) dt \text{ è minimo.}$$

Principio di minima azione per una particella puntiforme

Consideriamo una lagrangiana $\mathcal{L}\left(q_i(t); \frac{d\, q_i(t)}{dt}\right) = \mathcal{L}\left(q_i(t); q_{i,t}\right)$ e calcolo il minimo per l'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i ; q_{i,t})\, dt$$

q_i $i = 1 - n$ = gradi libertà del sistema.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,t}} \delta q_{i,t} \right] dt = 0$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,t}} \delta \frac{d q_i}{dt} \right] dt = 0$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,t}} \frac{d\, \delta q_i}{dt} \right] dt = 0$$

integrando per parti il II Termine

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,t}} \frac{d\, \delta q_i}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,t}}\right)\delta q_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,t}}\, \delta q_i\right)$$

Poiché tutte le traiettorie passano per gli stessi punti P_1 e P_2 la variazione $\delta q_i = 0$ agli estremi di integrazione è nulla quindi è nullo il Terzo Termine.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\delta q_i - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,t}}\right)\delta q_i\right] dt = 0$$

Da cui si ricavano le equazioni differenziali del moto

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,t}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1 — n\ .$$

Se si sostituisce a $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 - U(x, y, t)$

e si considerano le coordinate generalizzate

$q_1 = x \quad q_2 = y \quad q_3 = z$

$\dot{q}_1 = v_x \quad \dot{q}_2 = v_y \quad \dot{q}_3 = v_z$

si ottengono le equazioni di Newton

$$\frac{d}{dt}(m v_i) = -\frac{\partial U}{\partial x_i} = F_i$$

Il grande vantaggio di utilizzare le equazioni di Lagrange anziché quelle di Newton è dovuto alla libertà di scegliere le coordinate generalizzate in funzione dei vincoli del sistema in modo da semplificare la soluzione del sistema stesso.

Basta scrivere il valore corretto dell'energia cinetica e potenziale in funzione delle coordinate.
Ciò è possibile purché non ci siano attriti e forze dissipative.

6 bis

Inoltre le equazioni permettono di descrivere anche un sistema di più particelle libere o legate tra di loro da un potenziale.

Leggi di conservazione di una particella puntiforme

1) Conservazione dell'Hamiltoniana o dell'energia meccanica.

Considero la grandezza

$$H = q_{i,t} \frac{\partial L}{\partial q_{i,t}} - L$$

$$\frac{dH}{dt} = q_{i,t,t} \frac{\partial L}{\partial q_{i,t}} + q_{i,t} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_{i,t}} - \frac{dL}{dt} =$$

$$= \cancel{q_{i,t,t} \frac{\partial L}{\partial q_{i,t}}} + q_{i,t} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_{i,t}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} q_{i,t} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial q_{i,t}} q_{i,t,t}} =$$

$$= q_{i,t} \left(\underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_{i,t}} - \frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\overset{\downarrow}{\overset{!!}{0}}} \right)$$

(equazioni di Lagrange)

Se $L = \frac{1}{2} m v^2 - U$

$$\begin{cases} q_i = x_i \\ \dot{q}_i = v_i = q_{i,t} \end{cases}$$

$$H = v_i \; m v_i - \frac{1}{2} m v^2 + U =$$

$$= m v^2 - \frac{1}{2} m v^2 + U = \frac{1}{2} m v^2 + U$$

corrisponde all'energia meccanica che si conserva durante il moto.

2) Conservazione della quantità di moto per una particella libera.

Se la lagrangiana non possiede il termine potenziale cioè stiamo parlando di una particella puntiforme libera allora.

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q})$ la lagrangiana dipende solo dalle derivate delle coordinate generalizzate che compaiono nell'espressione dell'energia cinetica.

Essendo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ possiamo scrivere le equazioni

$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,t}} = 0$ cioè la quantità di moto

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,t}} = \text{costante}.$$

$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad q_{i,t} = v_i$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} = m v_i = \text{costante}.$$

3) Conservazione del momento angolare per una particella soggetta ad un moto centrale.

Se la particella è soggetta ad una forza centrale cioè diretta sempre verso un punto fisso allora la Lagrangiana sarà indipendente per ragioni di simmetria rispetto ad una rotazione ϕ intorno a tale centro.
Se si scrive l'energia cinetica in funzione delle coordinate polari ρ e ϕ allora $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$

e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,t}} =$ costante

In coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos\phi \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho}\cos\phi - \rho \operatorname{sen}\phi\,\dot{\phi} \\ \dot{y} = \dot{\rho}\operatorname{sen}\phi + \rho\cos\phi\,\dot{\phi} \end{cases}$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2\cos^2\phi + \rho^2\operatorname{sen}^2\phi\,\dot{\phi}^2 \cancel{- 2\rho\dot{\rho}\cos\phi\operatorname{sen}\phi\,\dot{\phi}}$$

$$+ \dot{\rho}^2\operatorname{sen}^2\phi + \rho^2\cos^2\phi\,\dot{\phi}^2 \cancel{+ 2\rho\dot{\rho}\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,\dot{\phi}}$$

$$= \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m\rho^2\dot{\phi} = m\rho\,\rho\dot{\phi} = m\vec{r}\times\vec{v} = \vec{M}$$

avendo indicato con $\vec{r}$ la posizione della particella

con $\vec{v}$ la velocità e con

$\vec{M}$ il prodotto vettoriale $m\vec{r}\times\vec{v} = \vec{r}\times\vec{p}$