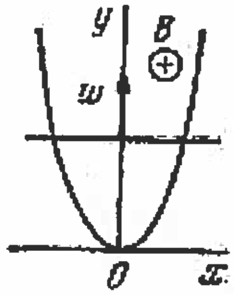
Questionario MIUR (parte 1)

QUESTIONARIO

1. Una spira a forma di parabola di equazione $y = ax^2$ è immersa in un campo magnetico uniforme B perpendicolare al piano xy della parabola. All'istante $t = 0$ una barretta inizia a traslare lungo la parabola partendo dal suo vertice con accelerazione costante come indicato in figura. Determinare la forza elettromotrice indotta sulla spira in funzione della y.



2. La posizione di una particella varia con il tempo secondo l'equazione:

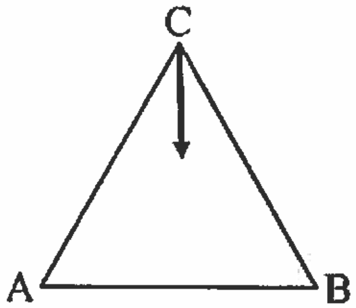
   $x = \alpha t(1 - \beta t)$, dove α e β sono due costanti, con $\beta > 0$.

   Determina:

   a) la velocità e l'accelerazione della particella in funzione del tempo;
   b) l'intervallo di tempo necessario alla particella, che parte dall'origine, per ritornare nell'origine e lo spazio percorso in questo intervallo di tempo.

3. Tre cariche puntiformi di valore q sono poste ai vertici del triangolo equilatero ABC, i cui lati misurano 1m.

   a) Determina l'energia potenziale del sistema.
   b) La carica collocata in C viene spostata verso il segmento AB lungo la perpendicolare ad AB; traccia il grafico dell'andamento dell'energia potenziale del sistema in funzione della distanza della carica dal segmento AB.



4. Un punto materiale si muove nel piano xy secondo la legge oraria:

$$x = a \cdot sen(\omega t), y = a(1 - cos(\omega t)),$$

   con a e ω costanti positive. Determina la distanza del punto dall'origine al tempo $t = \tau$ e le direzioni dei vettori velocità e accelerazione all'istante $t = 0$.

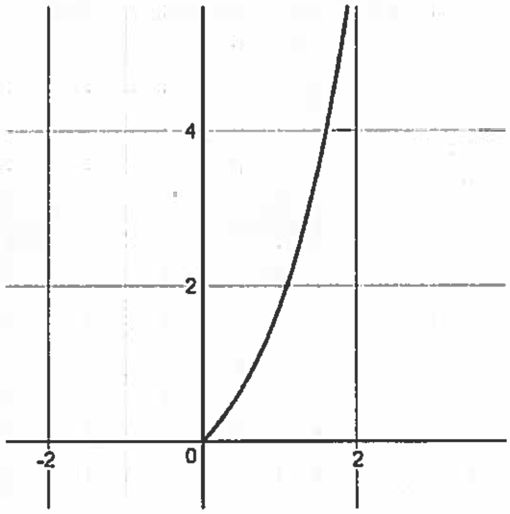
5. Un elettrone si muove, partendo da fermo, in un campo elettrico uniforme di intensità $E = 10\,{}^{kV}/_{cm}$. Descrivi il procedimento che adotteresti per determinare l'istante in cui l'energia cinetica dell'elettrone sarà uguale alla sua energia a riposo.

6. Quanto tempo impiegherà un'onda sonora a percorrere la distanza l tra i punti A e B se la temperatura dell'aria tra di essi varia linearmente da $T1$ a $T2$? Tieni presente che la velocità di propagazione nell'aria varia in funzione della temperatura secondo la legge:

$$v = a\sqrt{T}$$

dove a è una costante.

7. Il grafico riportato nella figura seguente potrebbe rappresentare l'andamento della velocità con cui una carica puntiforme si allontana per repulsione elettrostatica da un'altra carica puntiforme, fissa, di eguale segno? Motiva la tua risposta.



8. Un punto si muove lungo l'asse x secondo la legge:

$$x = a \cdot sen^2\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$$

con a costante positiva. Determina:

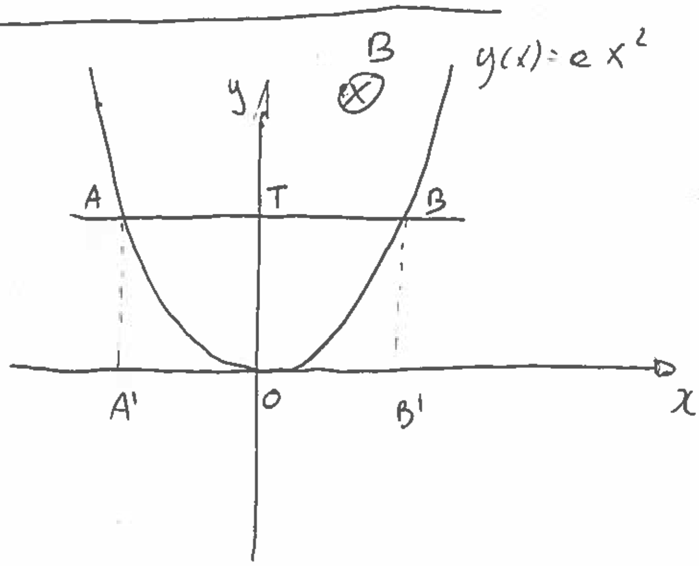
a) l'ampiezza e il periodo di oscillazione;

b) l'istante t in cui il punto raggiunge per la prima volta la massima distanza dall'origine.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Prove di fisica proposte dal MIUR

Questionario n° 1



B = campo magnetico uniforme entrante nel foglio.

Dalla II equazione di Maxwell

$$f.e.i = -\frac{d\,\phi(\vec{B})}{dt}$$

l'area della spira AOB vale

$$A(\widehat{AOB}) = 2A(\widehat{TOB})$$

$$A(\widehat{TOB}) = A(OB'BT) - A(\widehat{OBB'})$$

$$A(\widehat{OBB'}) = \frac{1}{2}\int_0^y a x^2\,dx = \left[\frac{1}{2}\,a\,\frac{x^3}{3}\right]_0^y = \frac{1}{6}\,a\,y^3$$

$$A(OB'BT) = \overline{OB'} \times \overline{B'B} =$$

$$\overline{B'B} = y$$

$$\overline{OB'} = \sqrt{\frac{y}{e}}$$

$$A(OB'BT) = y^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{e}}{a}$$

$$A(TOB) = y^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{a}}{e} - \frac{1}{6} e y^3$$

$$A(AOB) = 2 y^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{e}}{e} - \frac{1}{3} e y^3$$

$$\phi(\vec{B}) = B \cdot A(AOB) = 2 B y^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{e}}{e} - \frac{1}{3} B e y^3$$

$$f.e.i = \frac{d\,\phi(\vec{B})}{dt} =$$

Il moto della barra imposto è $y(t) = \frac{1}{2} K t^2$

dove K è l'accelerazione costante imposta.

$$y(t) = \frac{1}{2} K t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y(t)}{K}}$$

$$\dot{y}(t) = Kt = K\sqrt{\frac{2y(t)}{K}} = \sqrt{2Ky(t)}$$

$$f.e.i = \frac{d\,\phi(\vec{B})}{dt} =$$

$$= \left[2B\frac{\sqrt{e}}{e} \frac{d}{dy}\left[y(t)\right]^{\frac{3}{2}} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{3} Be \frac{d}{dy}\left[y(t)\right]^{3} \frac{dy}{dt} \right]$$

$$= \cancel{2}B\frac{\sqrt{a}}{a} \frac{3}{\cancel{2}}\left[y(t)\right]^{\frac{1}{2}} \dot{y}(t) - \frac{1}{\cancel{3}} Be \cancel{3}\left[y(t)\right]^{2} \dot{y}(t)$$

$$= 3B\frac{\sqrt{e}}{e} \left[y(t)\right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{2Ky(t)} - Be\left[y(t)\right]^{2} \sqrt{2Ky(t)}$$

$$= 3B\frac{\sqrt{e}}{e}\, y(t) \sqrt{2K} - Ba\, y(t)^{\frac{5}{2}} \sqrt{2K}$$

$$= 3B\frac{\sqrt{e}}{e} \sqrt{2K}\, y(t) - Be\sqrt{2K}\, y(t)^{\frac{5}{2}}$$

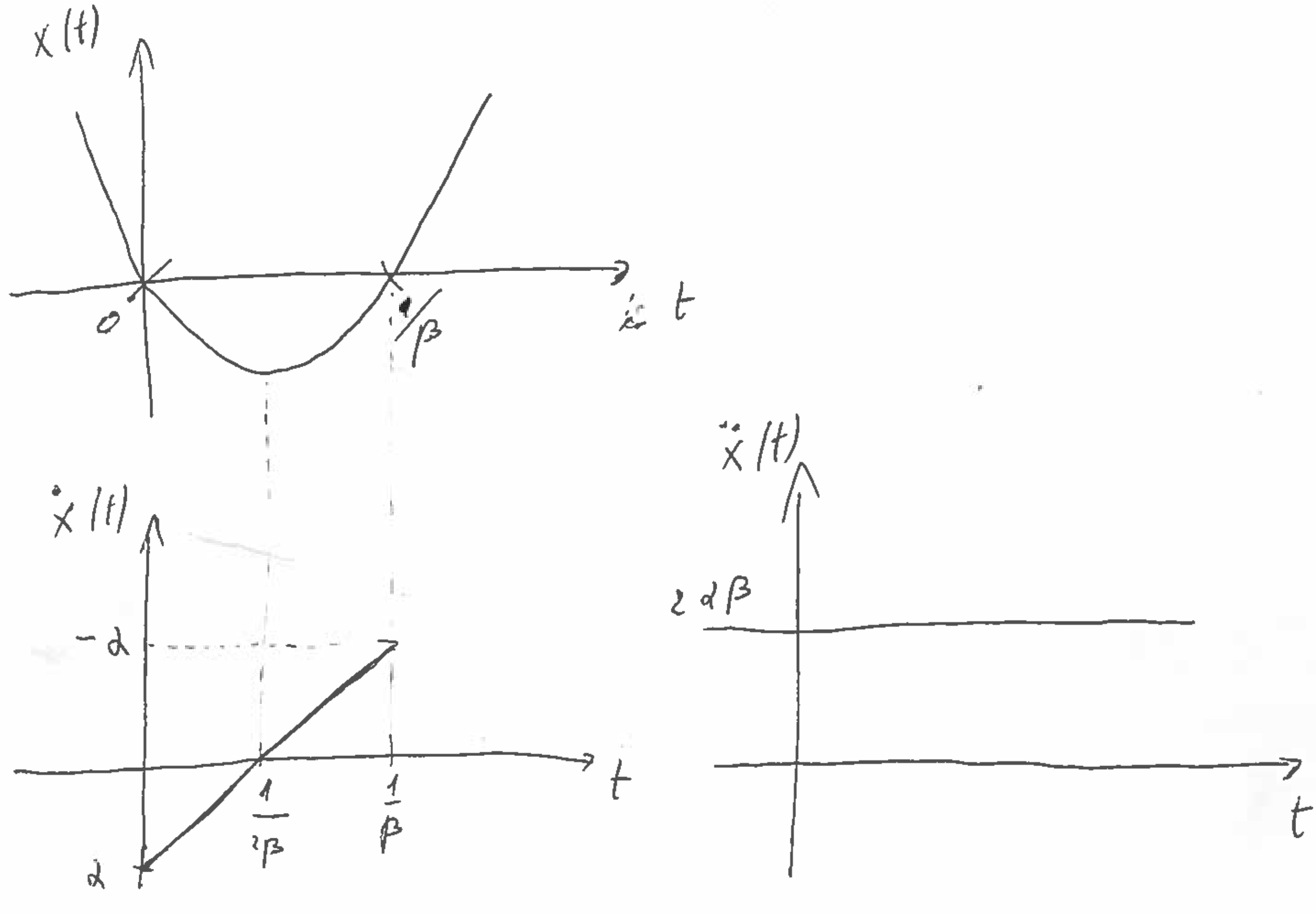
$$\boxed{\text{Questionario n}^\circ 2}$$

$$x(t) = \alpha t - \alpha\beta t^2 \qquad \beta > 0$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = \alpha - 2\alpha\beta t =$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -2\alpha\beta$$

$$\boxed{1 \text{ caso } \alpha < 0}$$



Il tempo percorso per ritornare all'origine

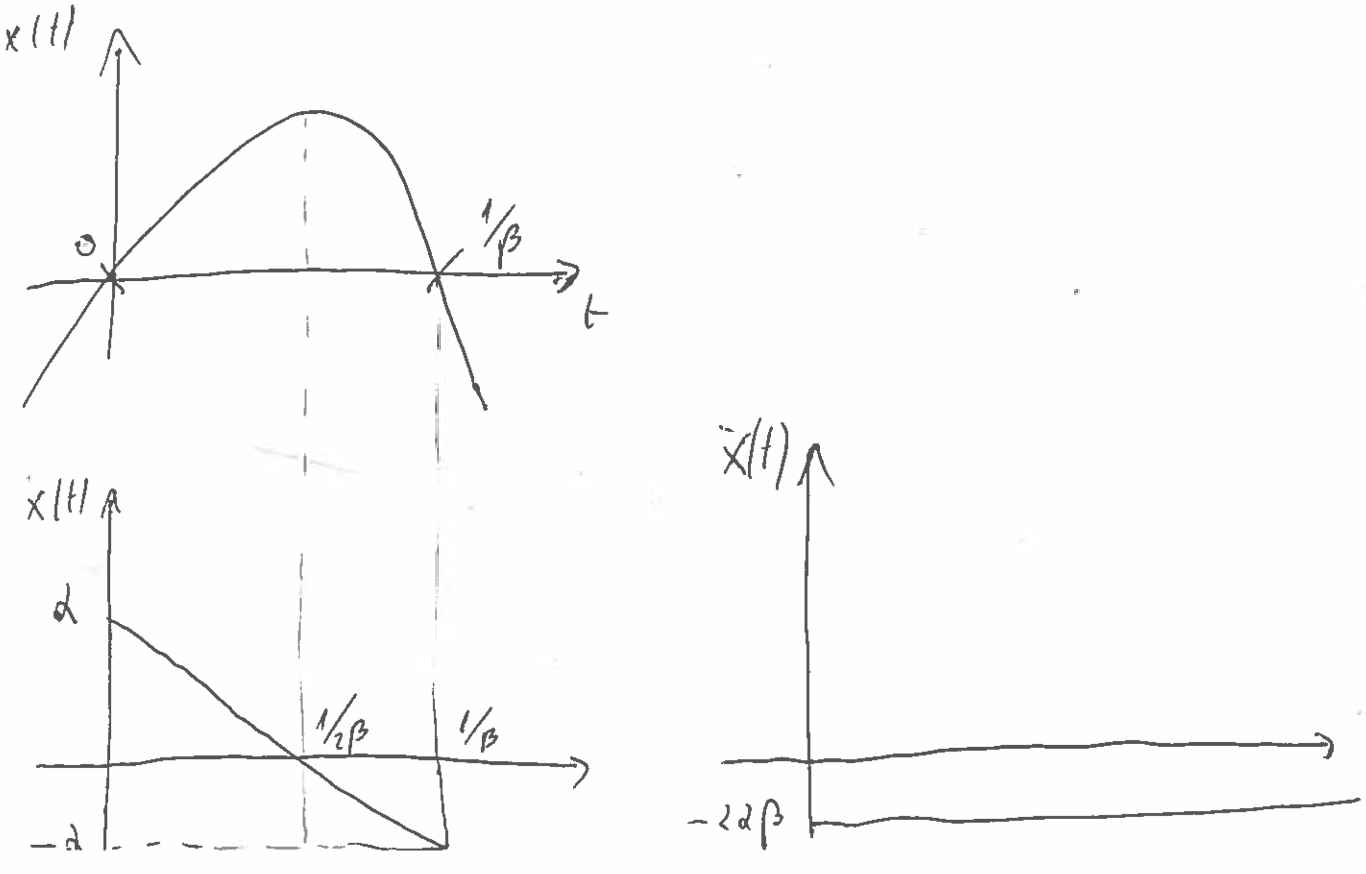
è $t = \frac{1}{\beta}$.

Lo spazio percorso vale $x\left(\frac{1}{2\beta}\right) =$

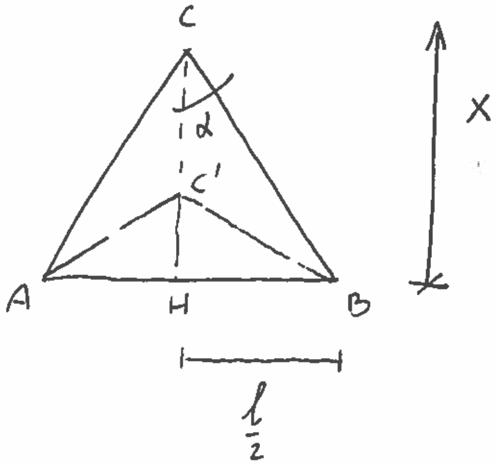
$$= \alpha\left(\frac{1}{2\beta}\right) - \alpha\beta\left(\frac{1}{2\beta}\right)^2 = \frac{\alpha}{2\beta} - \alpha\cancel{\beta}\frac{1}{4\beta^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\alpha}{\beta}$$

$\boxed{2 \text{ caso } \alpha > 0}$



Questionario N°3



Sulla carica in C ipotizzando vincolata a muoversi lungo l'asse x agisce una forza

$$F_x = \frac{2 \cdot qq \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r = \overline{C'B}$$

$$r \cos\alpha = x$$

$$r = \sqrt{x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$F_x = \frac{2 \cdot qq\, x}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2 \cdot qq\, x}{\left(x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Grafichiamo $F(x)$

$$\frac{dF_x}{dx} = 0$$

$$\frac{2qq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\left(x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} - x\frac{3}{\cancel{2}}\left(x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\cancel{2}x}{\left(x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^3}$$

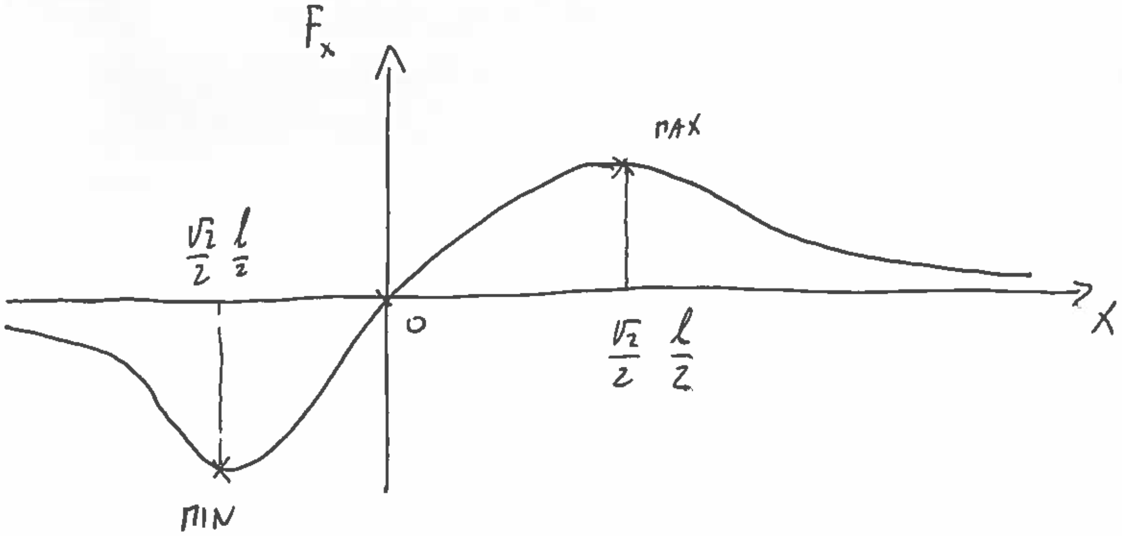
$$\frac{2qq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^3}$$ è sempre positivo

$$\underbrace{\left(x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{sempre positivo}} \left[\left(x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right) - 3x^2\right] = 0$$

$$-2x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

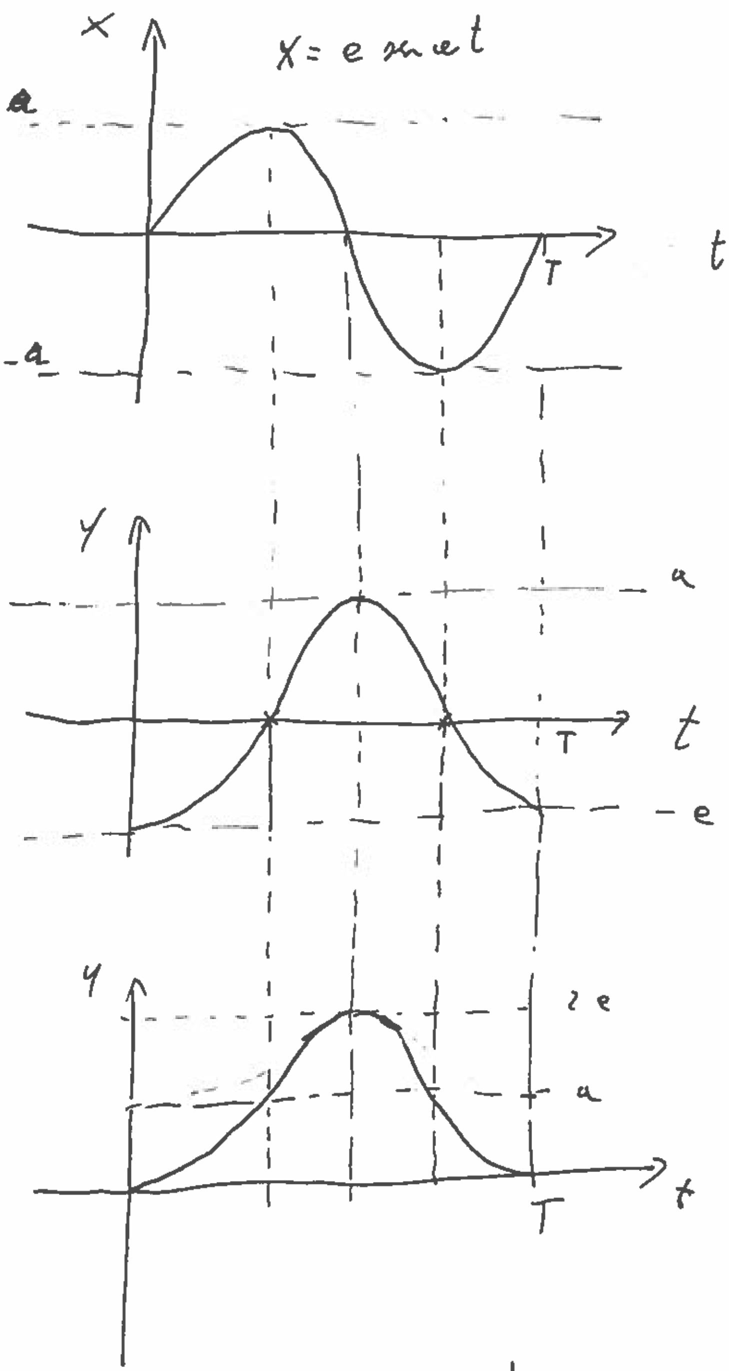
$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}\,l}{4}$$



Se la carica è vincolata a muoversi lungo l'asse x l'origine è un punto di equilibrio instabile.

Infatti se mi sposto di poco dalla posizione 0 verso destra $F_x > 0$ e la carica tende ad allontanarsi. Se mi sposto di poco dalla posizione 0 verso sinistra $F_x < 0$ e la carica tende ad allontanarsi.

Questionario N° 4



$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$y = -e\cos\omega t$$

$$y = e - e\cos\omega t$$

$$\begin{cases} x = a \,\text{sen}\, \omega t \\ y = e - a\cos\omega t \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \omega a \cos\omega t \\ \dot{y} = a\omega \,\text{sen}\, \omega t \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 e \,\text{sen}\, \omega t \\ \ddot{y} = e\omega^2 \cos\omega t \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\underbrace{e^2 \text{sen}^2\omega t}_{} + e^2 + \underbrace{a^2\cos^2\omega t}_{} - 2ae\cos\omega t}$$

$$r = \sqrt{2e^2 - 2e^2\cos\omega t} = e\sqrt{2(1-\cos\omega t)}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau=0) = \omega e \\ \dot{y}(\tau=0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x}(\tau=0) = 0 \\ \ddot{y}(\tau=0) = a\,\omega^2 \end{cases}$$

Al tempo $\tau = 0$

la velocità ha la direzione positiva dell'asse x

e vale ωe

l'accelerazione ha la direzione positiva

dell'asse y e vale $e\omega^2$.

Questionario n°5

L'energia relativistica dell'elettrone vale

$$E = \frac{m_0 C^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}}}$$

Ricavo la velocità in funzione dell'energia

$$E^2 = \frac{m_0^2 C^4}{\left(1 - \frac{v^2}{C^2}\right)}$$

$$E^2 - E^2 \frac{v^2}{C^2} = m_0^2 C^4$$

$$E^2 - m_0^2 C^4 = E^2 \frac{v^2}{C^2}$$

$$\frac{C^2}{E^2}\left(E^2 - m_0^2 C^4\right) = v^2$$

$$v = C\sqrt{\left(1 - \frac{m_0^2 C^4}{E^2}\right)} \quad \text{con } E = m_0 C^2 + \Delta V x$$

$m_0c^2 = 0.511\ MeV = 0.511 \times 10^6\ eV$

Il campo elettrico vale $E_{elett} = 10\ K\ V/cm$

pertanto il potenziale $\Delta V = 10 \times 10^2\ KeV/m = 10^6\ eV/m$

$E = m_0c^2 + \Delta V x$

Il potenziale $\Delta V x = m_0 c^2$ per $x = \frac{m_0 c^2}{\Delta V} = 0.511\ m$

Grafico la velocità

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{(m_0c^2 + \Delta V x)^2}\right)} \qquad \text{per } x \in [0; 0.511\ m]$$

$c = 2.99 \times 10^8\ m/s$

$$v = c\sqrt{\left(1 - \frac{m_0^2 c^4}{(m_0c^2 + m_0c^2)^2}\right)} = c\sqrt{\left(1 - \frac{\cancel{m_0^2 c^4}}{4\cancel{m_0^2 c^4}}\right)} = \sqrt{\frac{3}{4}}\ c$$

$$t = \int_0^{x=0.511} \frac{dx}{v} \simeq \int_0^{x=0.511} \frac{dx}{c}\left(1 + \frac{(m_0c^2)^2}{2E^2}\right)$$

$$E = m_0c^2 + \Delta V x$$

$$t = \int_0^{x=0.511} \frac{dx}{c} + \int_0^{x=0.511} \frac{1}{c} \frac{(m_0c^2)^2}{2(m_0c^2 + \Delta V x)^2} dx$$

$$t = \frac{0.511}{c} + \int_0^{x=0.511} \frac{1}{2c} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta V}{m_0c^2} x\right)^2} dx$$

$$\frac{\Delta V}{m_0c^2} = \frac{1}{0.511}$$

$$t = \frac{0.511}{c} + \int_0^{x=0.511} \frac{1}{2c} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{0.511} x\right)^2} dx$$

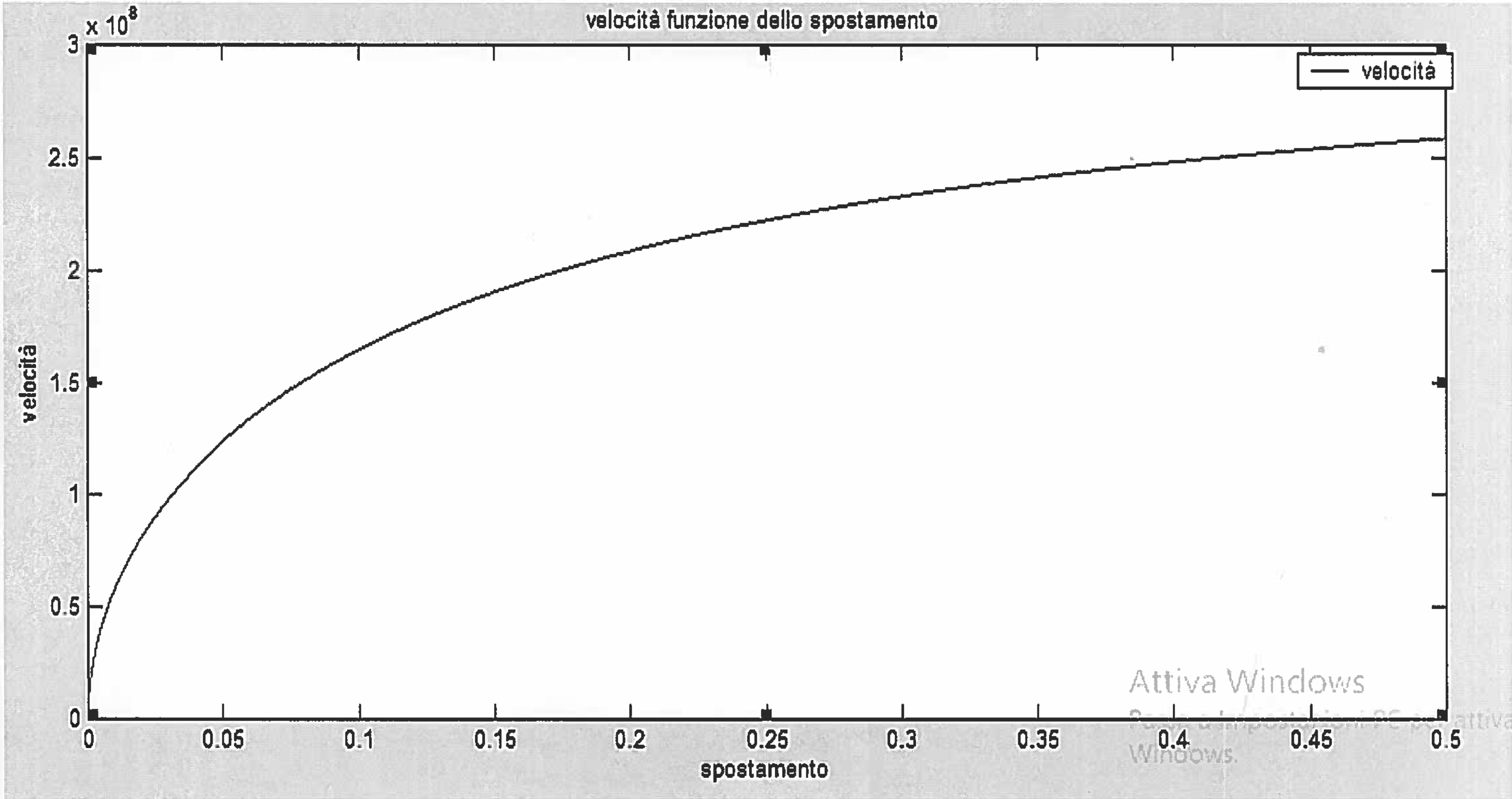
$$t = \frac{0.511}{c} + \int_0^{x=0.511} \frac{1}{2c} \frac{0.511}{\left(1 + \frac{x}{0.511}\right)^2} d\left(1 + \frac{x}{0.511}\right)$$

$$t = \frac{0.511}{c} + \left[\frac{0.511}{2c}\left(1 + \frac{x}{0.511}\right)^{-1}\right]_{x=0.511}^{0}$$

$$t = \frac{0.511}{c} + \frac{0.511}{2c}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{X}{0.511}\right)}\right]_{x=0.511}^{X=0}$$

$$t = \frac{0.511}{c} + \frac{0.511}{2c}\left[1 - \frac{1}{2}\right] = \frac{0.511}{c} + \frac{0.511}{4c} =$$

$$= \frac{5 \times 0.511}{4c} = \frac{0.6388}{c} \quad \text{sec.}$$



velocità funzione dello spostamento
x 10^8
velocità
spostamento
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
velocità
Attiva Windows

$\boxed{\text{Questionario n° 6}}$

$$T(x) = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)x}{l} \qquad v = a\sqrt{T(x)}$$

$$t = \int_0^l \frac{1}{v}\, dx$$

$$t = \int_0^l \frac{1}{e\sqrt{T(x)}}\, dx = \int_0^l \frac{1}{e\sqrt{T_1 - \frac{(T_1-T_2)x}{l}}}\, dx$$

$$t = \int_0^l \frac{1}{e\sqrt{T_1 - \frac{(T_1-T_2)x}{l}}} \quad \frac{1}{\frac{(T_1-T_2)}{l}} \quad d\,\frac{(T_1-T_2)\,x}{l}$$

$$t = \int_0^l - \frac{1}{a\sqrt{T_1 - \frac{(T_1-T_2)x}{l}}} \quad \frac{l}{(T_1-T_2)} \quad d\left(T_1 - \frac{(T_1-T_2)\,x}{l}\right)$$

$$t = \int_0^l -\frac{l}{e(T_1-T_2)}\left[\left(T_1 - \frac{(T_1-T_2)x}{l}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} d\left(T_1 - \frac{(T_1-T_2)x}{l}\right)$$

$$t = \frac{1}{2}\frac{l}{e(T_1-T_2)}\left[\frac{T_1-(T_1-T_2)x}{l}\right]^{1/2}\Bigg|_0^l$$

$$t = \frac{1}{2e}\frac{l}{(T_1-T_2)}\sqrt{T_2} - \frac{1}{2e}\frac{l}{(T_1-T_2)}\sqrt{T_1}$$

Questionario N° 7

Considero la funzione potenziale tra le due cariche

$$U = \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0 (x+d)}$$

Applico la conservazione dell'energia meccanica ipotizzando che $v(x=0) = \phi$

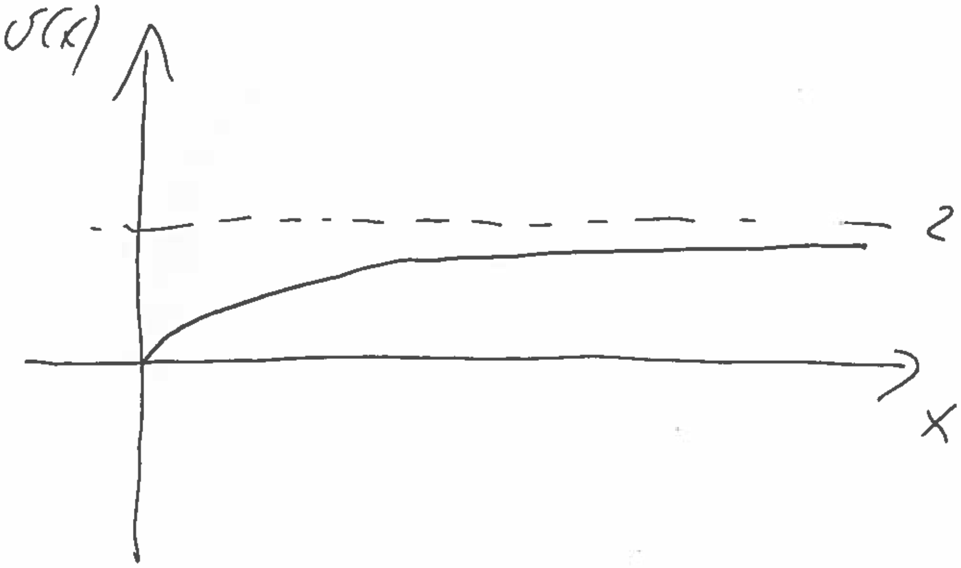
$$\frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0 d} = \frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0 (x+d)} + \frac{1}{2} m v(x)^2$$

$$\frac{2q^2}{4\pi \varepsilon_0 m d} - \frac{2q^2}{4\pi \varepsilon_0 (x+d) m} = v(x)^2$$

$$\sqrt{\frac{2q^2}{4\pi \varepsilon_0 m} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{(x+d)} \right)} = v(x)$$

Se $\sqrt{\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 m d}} = 2$

il grafico di $v(x)$ vale



$\boxed{\text{Questionario n° 8}}$

Poiché $sen(x) \in [-1;1]$

$sen^2(x) \in [0,1]$

l'ampiezza a $sen^2\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$ vale 2a

Disegno $sen\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$

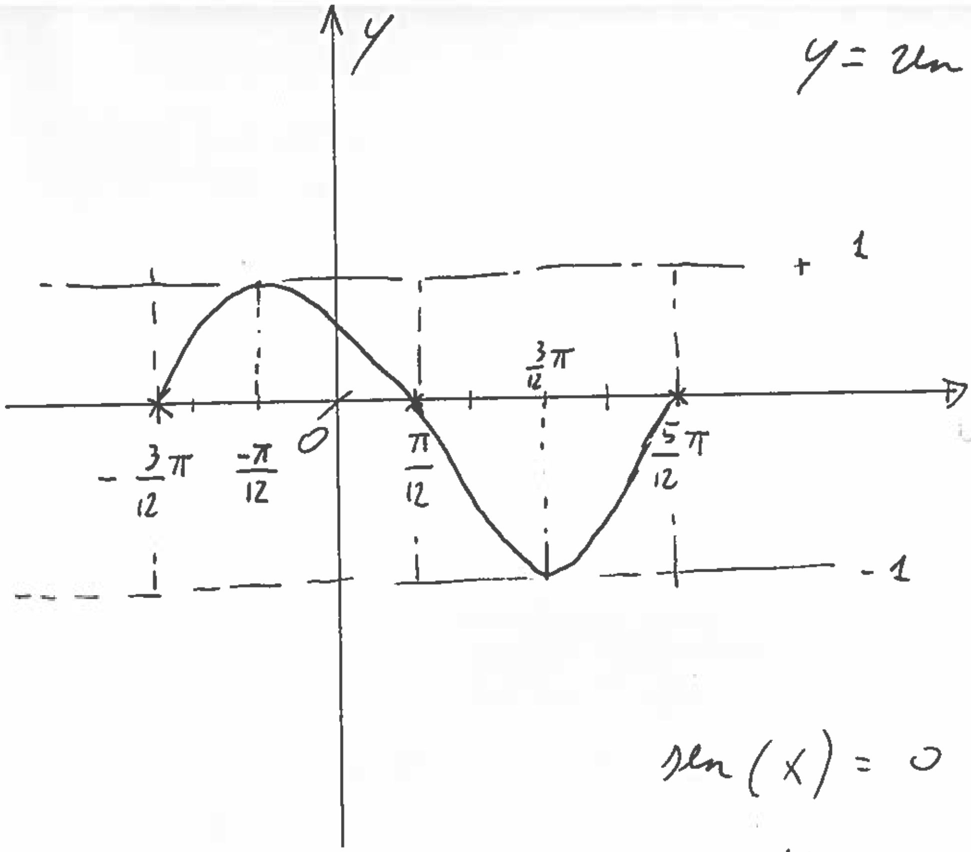
$$sen\left(3T - \frac{\pi}{4}\right) = sen\left(-\frac{\pi}{4} + K2\pi\right)$$

$$3T - \cancel{\frac{\pi}{4}} = -\cancel{\frac{\pi}{4}} + 2K\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{3} K \qquad K = 1,2,3 \dots n$$

$$T = \frac{8}{12}\pi$$

$y = \operatorname{sen}\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$



$t \in \left[-\frac{3}{12}\pi ; \frac{5}{12}\pi\right]$

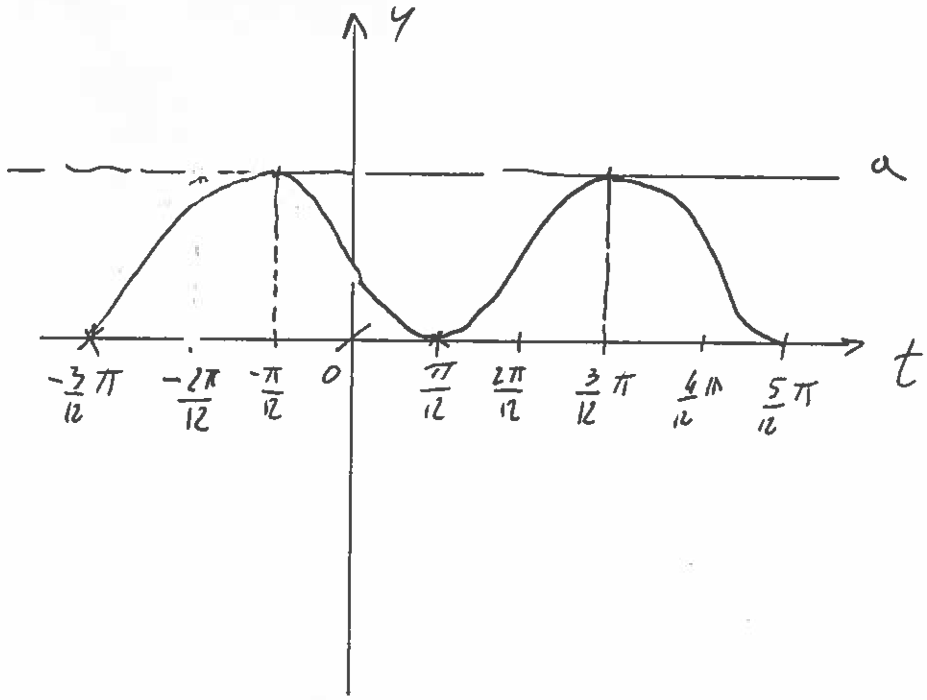
$\operatorname{sen}(x) = 0$

$x = K\pi \qquad K = 0, 1, 2$

$K = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3t - \frac{\pi}{4} = 0 \\ t = \frac{\pi}{12} \end{cases}$

$K = 1 \Rightarrow \begin{cases} \pi = 3t - \frac{\pi}{4} \\ t = \frac{5\pi}{4 \times 3} = \frac{5}{12}\pi \end{cases}$

$K = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2\pi = 3t - \frac{\pi}{4} \\ \frac{\cancel{9}^{3}\pi}{4 \times \cancel{3}} = t = \frac{9}{12}\pi \end{cases}$



$y = a \sin^2\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$

$t \in \left[-\frac{3}{12}\pi ; \frac{\pi}{12}\right]$

La periodicità è $\frac{4}{12}\pi$

l'ampiezza a

l'istante t in cui il punto raggiunge per la prima volta la massima distanza dall'origine vale

$t = -\frac{\pi}{12}$