Ampiezze di transizione

Ampiezza di transizione

La grandezza $\langle \phi_f | S | \phi_i \rangle$ è detta ampiezza di transizione e il suo quadrato indica la probabilità di transizione dallo stato iniziale ϕ_i allo stato finale ϕ_f.

Lo stato iniziale ϕ_i soggetto ad un potenziale può essere approssimato considerando lo sviluppo della serie di Dyson.

Indichiamo con $\phi_i^{(0)}$ la particella libera

con $\hat{S}^{(1)} \phi_i^{(0)} = \phi_i^{(1)}$ l'approssimazione del primo ordine della serie di Dyson.

Tornando a

$$\langle \phi_f | S^{(1)} | \phi_i \rangle = \int \phi_f^{*(0)} \tilde{V} \phi_i^{(0)} d^4x$$

Ricordando l'espressione di $\tilde{V}$

$$\langle \phi_f | S^{(1)} | \phi_i \rangle = -ie \int \phi_f^* \left(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu \right) \phi_i \, d^4x$$

integrando per parti il primo termine

$$= -ie \int -\left(\partial_\mu \phi_f^*\right) A^\mu \phi_i + \phi_f^* A^\mu \left(\partial_\mu \phi_i\right) d^4x$$

$$= -ie \int \left[\phi_f^* \left(\partial_\mu \phi_i\right) - \left(\partial_\mu \phi_f^*\right) \phi_i \right] A^\mu \, d^4x$$

posto $J_\mu = ie \left[\phi_f^* \left(\partial_\mu \phi_i \right) - \left(\partial_\mu \phi_f^* \right) \phi_i \right]$

$$\langle \phi_f | S^{(1)} | \phi_i \rangle = -\int J_\mu A^\mu \, d^4x$$

Riscriviamo ora le grandezze

$$\phi_f = \frac{e^{-i\vec{p}''\vec{x}}}{\sqrt{2VE''}} \qquad \phi_f^* = \frac{e^{i\vec{p}''\vec{x}}}{\sqrt{2VE'}}$$

$$\phi_i = \frac{e^{-i\vec{p}'\vec{x}}}{\sqrt{2VE'}} \qquad \partial_\mu \phi_f^* = \frac{i p''_\mu \, e^{i\vec{p}''\vec{x}}}{\sqrt{2VE''}}$$

$$\partial_\mu \phi_i = \frac{-i p'_\mu \, e^{-i\vec{p}'\vec{x}}}{\sqrt{2VE'}}$$

$$J_\mu = ie\left[\frac{e^{i\vec{p}''\vec{x}}}{\sqrt{2VE''}}\left(\frac{-ip'_\mu e^{-i\vec{p}'\vec{x}}}{\sqrt{2VE'}}\right) + \frac{-ip''_\mu e^{i\vec{p}''\vec{x}}}{\sqrt{2VE''}} \frac{e^{-i\vec{p}'\vec{x}}}{\sqrt{2VE'}}\right]$$

$$= \frac{e}{\sqrt{2VE'}\sqrt{2VE''}} (p'+p'')_\mu \, e^{-i(\vec{p}'-\vec{p}'')\vec{x}}$$

Ritornando all'espressione dell'ampiezza di transizione

$$\langle \phi_f | S^{(1)} | \phi_i \rangle = -ie \int \frac{A^\mu \quad (p' + p'')_\mu}{\sqrt{2VE'}\sqrt{2VE''}} e^{-i(\vec{p}' - \vec{p}'')\vec{x}} d^4x$$

Se $A^\mu(x) = A^\mu(q)\, e^{-i\vec{q}\vec{x}}\, d^4q$

$$\langle \phi_f | S^{(1)} | \phi_i \rangle = -ie \int A^\mu(q) \frac{1}{\sqrt{2VE'2VE''}} (p'+p'')_\mu \, e^{-i(\vec{q}+\vec{p}'-\vec{p}'')\vec{x}} d^4x\, d^4q$$

integrando in d^4x

$$\langle \phi_f | S^{(1)} | \phi_i \rangle = -ie \int \frac{A^\mu(q)}{\sqrt{2VE'2VE''}} (p'+p'')_\mu \, \delta(\vec{q}+\vec{p}'-\vec{p}'')\, d^4q$$

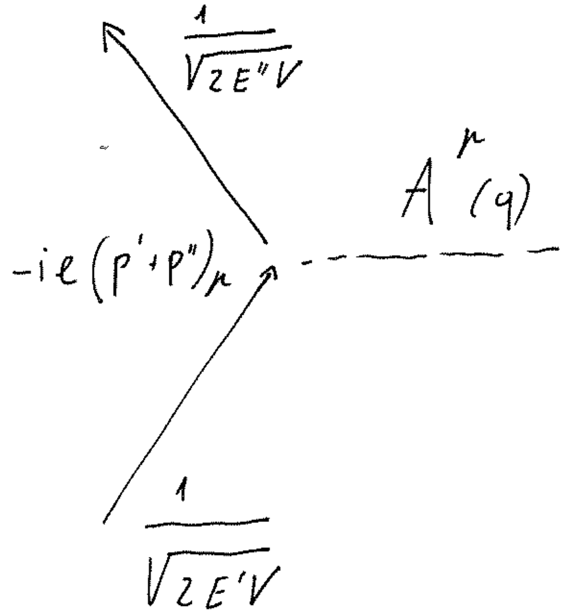
La delta di Dirac rappresenta l'equilibrio

al nodo

$$\vec{p}'' = \vec{q} + \vec{p}'$$

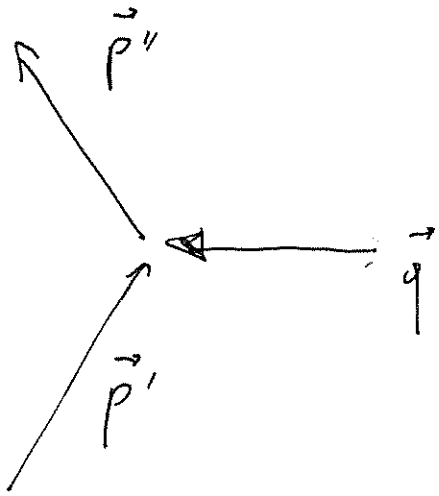
Rappresentazione grafica di

$$\langle \phi_i | S^{(1)} | \phi_f \rangle$$



+

Bilancio quantità di moto al nodo



$$\vec{p}'' = \vec{p}' + \vec{q}$$

2) Approssimazione al secondo ordine

L'equazione si scrive

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^{(2)} + m^2 \phi^{(2)} = \tilde{V} \phi^{(1)}$$

con $\phi^{(1)} = \tilde{V} \phi_i^{(0)}$

La funzione $\phi^{(2)}$ si calcola con il metodo di Green.

Si cerca una soluzione dell'equazione

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = \delta^4(\vec{x} - \vec{y})$$

dove $\delta^4(\vec{x} - \vec{y})$ è la delta di Dirac.

Tale soluzione è detto propagatore e vale

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{e^{-i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})}}{(q^2-m^2)} \, d^4q$$

La soluzione dell'equazione

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^{(2)} + m^2 \phi^{(2)} = \tilde{V}(x)\,\tilde{V}(y)\,\phi_i^{(0)}$$

sarà

$$\phi^{(2)} = \int \tilde{V}(x)\,\tilde{V}(y)\,G(\vec{x}-\vec{y})\,\phi_i^{(0)}\,d^4x\,d^4y$$

Scriviamo ora l'espressione al secondo ordine

$$\langle\phi_f|S^{(2)}|\phi_i\rangle = \int \frac{\phi_f^*\,\tilde{V}(x)\,e^{-i\vec{q}\vec{x}}\,e^{i\vec{q}\vec{y}}\,\tilde{V}(y)\,\phi_i^{(0)}}{(q^2-m^2)}\,d^4x\,d^4y\,d^4q$$

$$\langle\phi_f|S^{(2)}|\phi_i\rangle = \int \frac{1}{(q^2-m^2)}\,A^\mu(x)\,J_\mu(x)\,A^\mu(y)\,J_\mu(y)\,d^4x\,d^4y\,d^4q$$

dove

$$J_\mu(x) = \frac{e}{\sqrt{2VE''}} (p''+q)_\mu \, e^{-i(\vec{q}-\vec{p}'')\vec{x}}$$

$$J_\mu(y) = \frac{e}{\sqrt{2VE'}} (p'+q)_\mu \, e^{-i(\vec{p}'-\vec{q})\vec{y}}$$

Scrivo poi

$$A^\mu(x) = A^\mu(q') \, e^{-i\vec{q}'\vec{x}} \, d^4q'$$

$$A^\mu(y) = A^\mu(q'') \, e^{-i\vec{q}''\vec{y}} \, d^4q''$$

$$\langle \phi_f | S^{(2)} | \phi_i \rangle = e^2 \int \frac{1}{(q^2-m^2)} \frac{A^\mu(q')}{\sqrt{2VE'}} (p''+q)_\mu \, e^{-i(\vec{q}'+\vec{q}-\vec{p}'')\vec{x}}$$

$$\frac{A^\mu(q'')}{\sqrt{2VE''}} (p'+q)_\mu \, e^{-i(\vec{q}''-\vec{q}+\vec{p}')\vec{y}} \qquad d^4q\, d^4q'\, d^4q''\, d^4x\, d^4y$$

integrando in d^4x e d^4y

$$\langle \phi_f | S^{(2)} | \phi_0 \rangle = e^2 \int \frac{1}{(q^2 - m^2)} \frac{A^\mu(q') A^\mu(q'')}{\sqrt{2VE' 2VE''}}$$

$$(p'' + q)_\mu \, (p' + q)_\mu \quad (2\pi)^4 \delta(\vec{q}' + \vec{q} - \vec{p}'')$$

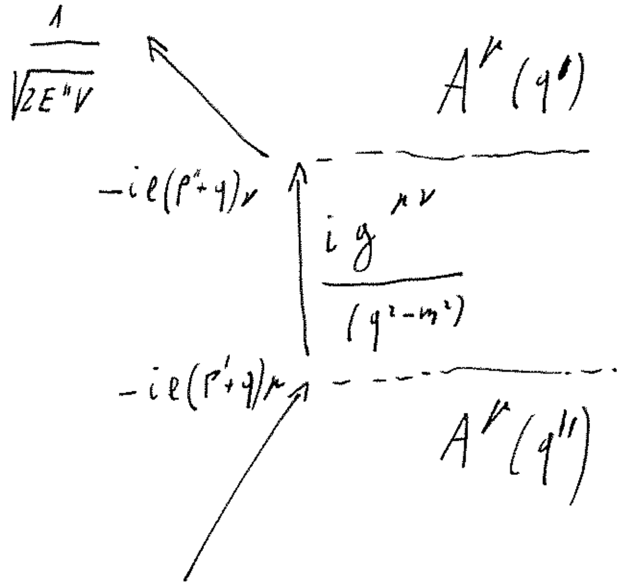
$$(2\pi)^4 \delta(\vec{q}'' - \vec{q} + \vec{p}') \, d^4q' \, d^4q'' \, d^4q$$

Le due delte di Dirac rappresentano l'equilibrio della quantità di moto ai due nodi

$$\vec{p}'' = \vec{q}' + \vec{q}$$

$$\vec{q} = \vec{q}'' + \vec{p}'$$

Rappresentazione grafica di $\langle \phi_i | S^{(1)} | \phi_f \rangle$

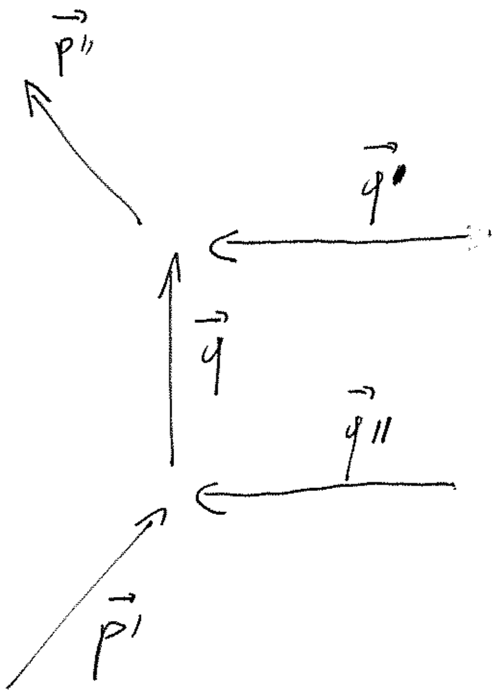


$$+ (2\pi)^4 \delta(\vec q + \vec q' - \vec p'')\,(2\pi)^4 \delta(\vec p' - \vec q + \vec q'')$$

$$d^4q'\, d^4q''\, d^4q$$

+

Bilancio quantità di moto ai due nodi



$$\delta(\vec q + \vec q' - \vec p'')$$

$$\delta(\vec p' - \vec q + \vec q'')$$

$$\Downarrow$$

$$\vec p'' = \vec q' + \vec q$$

$$\vec q = \vec p' + \vec q''$$