Equazioni di Klein Gordon

Equazione di Klein Gordon

In analogia a quanto proposto da Schrodinger Klein Gordon propose un'equazione per una particella scalare relativistica.

Di seguito si usa una convenzione per cui nelle equazioni la costante di Plank ... $\hbar$ è posta pari a 1 e anche la velocità della luce c.
Questa convenzione semplifica l'espressione delle equazioni basta avere poi l'accortezza di aggiungere $\hbar$ o c alle soluzioni facendo un'analisi dimensionale.

In analogia a quanto visto per l'equazione di Schrodinger per una particella libera valgono le relazioni:

$$\begin{cases} p_x \phi = -i \dfrac{\partial}{\partial x} \phi \\ p_y \phi = -i \dfrac{\partial}{\partial y} \phi \\ p_z \phi = -i \dfrac{\partial}{\partial z} \phi \\ E \phi = i \dfrac{\partial}{\partial t} \phi \end{cases}$$

Considerando l'equazione dell'energia relativistica

$$m_0^2 = E^2 - p^2 = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2$$

$$m_0^2 \phi = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - m_0^2 \phi = 0}$$

Una soluzione della particella libera è della forma

$$\phi = A\, e^{-i\vec{p}\vec{x}}$$

dove la costante A si ottiene normalizzando la funzione J^0 su un volume V

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2EV}}\, e^{-i\left(Et - p^i x^i\right)}$$

Di seguito si userà spesso la notazione indicando con $\vec{p}\,\vec{x}$ il prodotto scalare tra un vettore covariante e un vettore controvariante a 4 componenti

$$\vec{p} = \left(E, p^x, p^y, p^z\right) \qquad \vec{x} = \left(t, x, y, z\right)$$

$$\vec{p}\,\vec{x} = p_i\, x^i = E - p^1 x - p^2 y - p^3 z$$