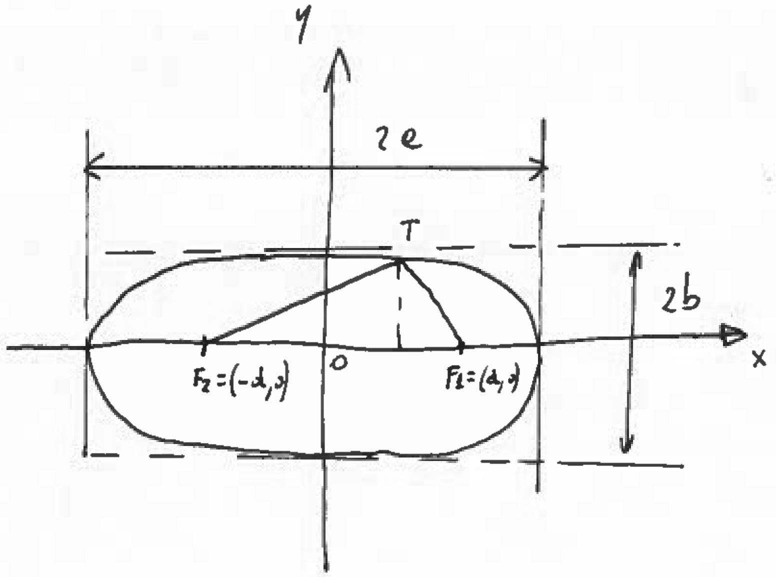
e

Equazione ellissi in coordinate cartesiane, sferiche e orbite di pianeti

L'ellissi è il luogo dei punti del piano che hanno la stessa distanza da due punti detti fuochi.



$$\overline{TF_1}+\overline{TF_2} = \text{costante} = 2a$$

$$d=\sqrt{a^2-b^2}$$

Equazione dell'ellisse

$$\sqrt{(x+d)^2+y^2} = 2a - \sqrt{y^2+(d-x)^2}$$

$$(x+d)^2+y^2 = 4a^2+y^2+(d-x)^2-4a\sqrt{y^2+(d-x)^2}$$

$$(x+d)^2 + y^2 = 4a^2 + y^2 + (d-x)^2 - 4e\sqrt{y^2+(d-x)^2}$$ b

$$\cancel{x^2}+\cancel{d^2}+2dx+\cancel{y^2} = 4a^2+\cancel{y^2}+\cancel{d^2}+\cancel{x^2}-2xd-4a\sqrt{y^2+(d-x)^2}$$

$$\cancel{4}a^2-\cancel{4}dx = \cancel{4}a\sqrt{y^2+(d-x)^2}$$

$$a^2-dx = a\sqrt{y^2+(d-x)^2}$$

$$a^4+d^2x^2-2e^2dx = a^2(y^2+d^2+x^2-2dx)$$

$$a^4+d^2x^2-\cancel{2a^2dx} = a^2y^2+a^2d^2+a^2x^2-\cancel{2a^2dx}$$

$$a^4+d^2x^2 = a^2y^2+a^2d^2+e^2x^2$$

$$d^2 = e^2-b^2$$

$$e^4+(e^2-b^2)x^2 = a^2y^2+a^2(e^2-b^2)+e^2x^2$$

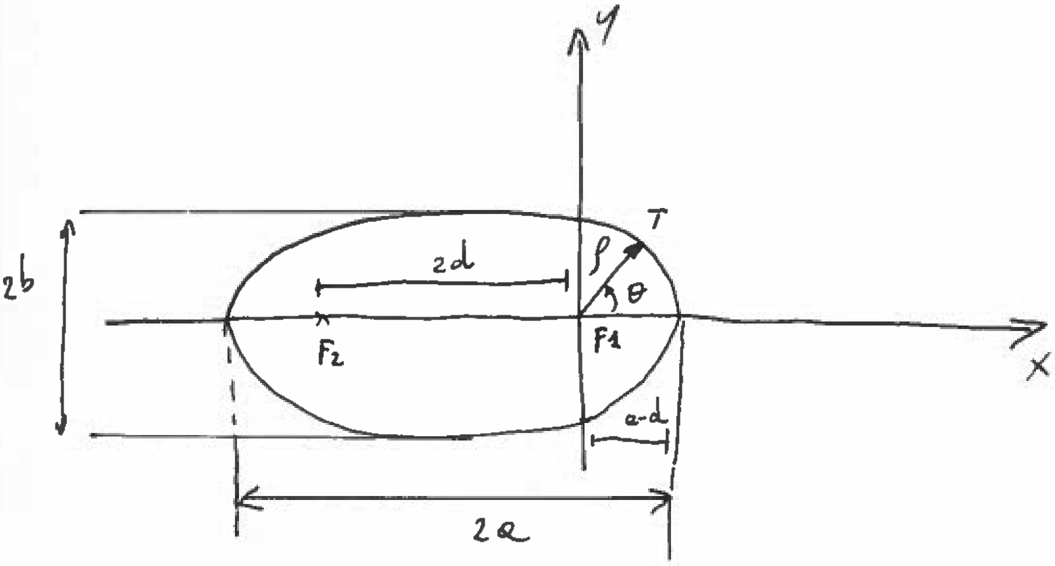
$$\cancel{a^4}+\cancel{e^2x^2}-b^2x^2 = e^2y^2+\cancel{e^4}-e^2b^2+\cancel{e^2x^2}$$

$$a^2y^2+b^2x^2 = a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{e^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

c

Equazione dell'ellissi con centro in uno dei fuochi in coordinate sferiche



Equazione dell'ellisse

$$\rho + \sqrt{(\rho\cos\theta + 2d)^2 + \rho^2\sin^2\theta} = \text{costante} = K$$

$$\sqrt{(\rho\cos\theta + 2d)^2 + \rho^2\sin^2\theta} = K - \rho$$

$$\cancel{\rho^2\cos^2\theta} + 4d^2 + 4d\rho\cos\theta + \cancel{\rho^2\sin^2\theta} = K^2 + \cancel{\rho^2} - 2K\rho$$

$$4d\rho\cos\theta + 2K\rho = K^2 - 4d^2$$

$$K = 2a$$

d

$$k d \rho \cos\theta + k a \rho = k a^2 - k d^2$$

$$\rho(d\cos\theta + a) = a^2 - d^2 = (a-d)(a+d)$$

$$\rho\left(\frac{d}{a}\cos\theta + 1\right) = \frac{(a-d)(a+d)}{a}$$

$$\frac{d}{a} = \epsilon$$

$$\rho(\epsilon\cos\theta + 1) = (a-d)\left(1 + \frac{d}{a}\right) = (a-d)(1+\epsilon)$$

Si dimostra che $(a-d)(1+\epsilon) = p$ = perielio

$$\rho(\epsilon\cos\theta + 1) = p$$

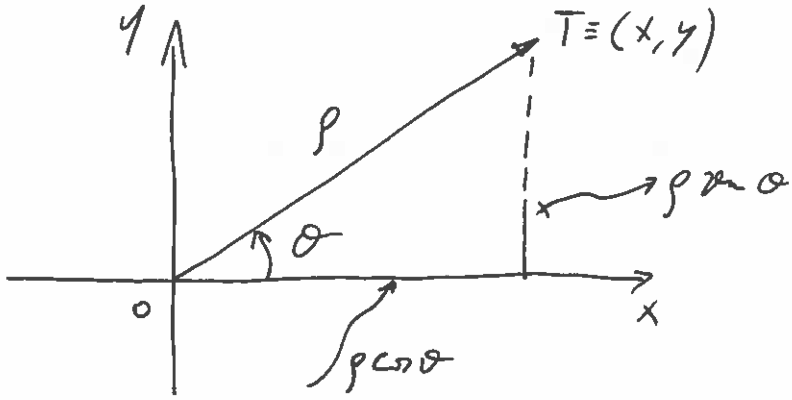
$$\boxed{\rho = \frac{p}{\epsilon\cos\theta + 1}}$$

p = perielio

Equazioni di Lagrange per il moto dei pianeti sotto l'attrazione gravitazionale del sole

Ipotizzando la massa solare molto maggiore rispetto alla massa del pianeta in orbita possiamo supporre che durante il moto il sole resta fermo e la forza gravitazionale è diretta sempre verso un punto fisso definito dalla posizione del sole.

Consideriamo l'origine delle coordinate sferiche la posizione del sole.



In coordinate sferiche la velocità del punto T vale

$$\frac{d}{dt}(T-O) = \frac{d}{dt}(\rho\cos\theta;\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{d}{dt}\left[\rho(\cos\theta;\ \mathrm{sen}\,\theta)\right]$$

$$= \frac{d}{d\rho}\left[(T-O)\right]\dot\rho + \frac{d}{d\theta}\left[(T-O)\right]\dot\theta = (\cos\theta;\ \mathrm{sen}\,\theta)\dot\rho + \rho(-\mathrm{sen}\,\theta;\ \cos\theta)\dot\theta$$

$$v^2 = \left(\dot\rho\cos\theta - (\mathrm{sen}\,\theta)\dot\theta;\ \dot\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + (\cos\theta)\dot\theta\right)^2 =$$

$$= \dot\rho^2\cos^2\theta + \rho^2(\mathrm{sen}^2\theta)\dot\theta^2 \cancel{- 2\dot\rho\dot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta} + \dot\rho^2\,\mathrm{sen}^2\theta + \rho^2(\cos^2\theta)\dot\theta^2 \cancel{+ 2\dot\rho\dot\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}$$

$$= \dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2\right)$$

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}m\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2\right) + \frac{\alpha}{\rho}$$

Le equazioni di Lagrange si scrivono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

dove q_i sono i due gradi di libertà del sistema θ e ρ.

La lagrangiana del sistema risulta simmetrica rispetto ad una rotazione θ intorno al punto fisso O (posizione del sole). Per il teorema di Noether ad ogni invarianza si conserva una grandezza.

Nel nostro caso $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ quindi si conserva la grandezza $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \text{costante} = M_z$ (4)

detta momento angolare.

$$\boxed{M_z = m\rho^2\dot{\theta}}$$

Inoltre poichè il potenziale non varia con il tempo si conserva l'energia meccanica

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{\alpha}{\rho} = \text{costante}}$$

Sostituendo il momento angolare nell'energia

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\theta}^2 - \frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\frac{M_z^2}{m\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho}$$

da cui $\frac{2E}{m} = \dot{\rho}^2 + \frac{M_z^2}{m^2\rho^2} - \frac{2\alpha}{m\rho}$

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\alpha}{\rho}\right) - \frac{M_z^2}{m^2\rho^2}}$$

$$\frac{M_z}{m\rho^2} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\rho}\,\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{M_z}{m\rho^2} = \frac{d\theta}{d\rho}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\alpha}{\rho}\right) - \frac{M_z^2}{m^2\rho^2}}$$

$$d\theta = \frac{M_z}{\rho^2}\,\frac{1}{\sqrt{2mE + 2m\frac{\alpha}{\rho} - \frac{M_z}{\rho^2}}}\,d\rho$$

Si può dimostrare che l'integrale vale

$$\theta = \arccos\frac{\frac{M_z}{\rho} - \frac{m\alpha}{M_z}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M_z^2}}} = \arccos\left\{\frac{\frac{M_z}{\rho}\,M_z/m\alpha - 1}{\sqrt{\frac{2\cancel{m}E M_z^2}{m^{\cancel{2}}\alpha^2} + \underbrace{\frac{\cancel{m^2\alpha^2}}{\cancel{M_z^2}}\,\frac{\cancel{M_z^2}}{\cancel{m^2\alpha^2}}}_{=1}}}\right\}$$

ricordando le formule dell'ellisse

$$\frac{p}{\rho} = 1 + \epsilon\cos\theta \qquad \cos\theta = \left(\frac{p}{\rho} - 1\right)\frac{1}{\epsilon}$$

$$\cos\theta = \frac{p-\rho}{\rho\,\epsilon} = \frac{p/\rho - 1}{\epsilon}$$

Uguagliando

$$\begin{cases} p = \dfrac{M_z^2}{m\alpha} \\ \epsilon = \sqrt{\dfrac{2EM_z^2}{m\alpha^2}+1} \end{cases}$$

Ricordando anche l'espressione dell'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\frac{M_z^2}{m\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho}$$

Si ricava che se

$$E = \frac{1}{2}\frac{M_z^2}{m\rho^2} - \frac{\alpha}{\rho} \qquad \dot{\rho} = 0$$ è un punto

di svolta della traettoria in cui la funzione $\rho(t)$ da crescente diventa decrescente o viceversa.

Se esiste un solo punto $\overline{\text{in cui}}^{\,\rho_{min}}$ $\dot{\rho} = 0$ e $\rho > \rho_{min}$ allora il moto della particella è infinito.

Se esistono due limiti ρ_{max} e ρ_{min} in cui $\dot{\rho}=0$ (m)

Il moto è finito e la traiettoria giace interamente in una corona limitata dalle circonferenze ρ_{max} e ρ_{min}. Ciò non significa che la traiettoria sia necessariamente una curva chiusa. ~~Affinché ciò avvenga~~ Potrebbe infatti descrivere una serie di ellissi che ruotano intorno al fuoco ~~due grandi~~ senza mai avere una periodicità.

Dall'equazione

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2E\Pi_z^2}{m\alpha^2}+1}$$

si ricava che l'eccentricità è nulla per

$$\frac{2E\Pi_z^2}{m\alpha^2} = -1$$

$$E = -\frac{m\alpha^2}{2\Pi_z^2}$$ il moto resta confinato ad un'ellissi se $E<0$ e $E > -\frac{m\alpha^2}{2\Pi_z}$.

Per $E > 0$ il moto delle particelle

sarà infinito

Le tre leggi di Keplero

Le tre leggi di Keplero vennero formulate sulla base di osservazioni astronomiche sul moto dei pianeti, vennero poi dimostrate in base al modello matematico della gravitazione universale formulato da Newton nei "Principia".

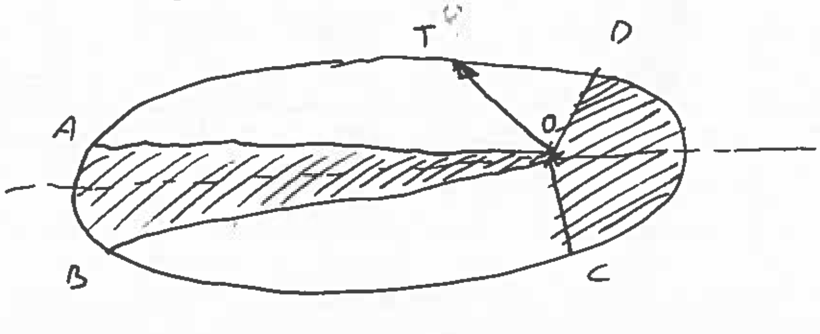
Le tre leggi di Keplero sono le base per il passaggio dal sistema Tolemaico che vedeva la terra fissa al centro dell'universo al sistema copernicano che vuole il sole fisso e i pianeti in orbite intorno ad esso.

I legge di Keplero

L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, il cui sole occupa uno dei due fuochi.

II legge di Keplero

Il segmento che unisce il centro del sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.



(1)

La II legge di Keplero dice praticamente che la velocità areolare è costante

Deriva direttamente dalla conservazione del momento angolare.

$$M_z = (\vec{T}-O) \times \vec{v} = (T-O)\, v \operatorname{sen}\theta = \text{costante}$$

θ = angolo formato dalla velocità (tangente alla traiettoria) e il raggio vettore $(T-O)$.

La grandezza $(T-O)\, v \operatorname{sen}\theta\, \Delta t = \rho\, v \operatorname{sen}\theta\, \Delta t$ rappresenta l'areola tracciata dal settore posizione divisa 2.

$$(T-O)\, \frac{\Delta S}{\Delta t} \operatorname{sen}\theta\, \Delta t = \rho\, \Delta S \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\dot{A}$$

La conservazione del momento angolare deriva

direttamente dal fatto che la forza gravitazionale è una forza centrale.
Come conseguenza della conservazione della velocità areolare il pianeta rallenta quando si allontana dal sole.

III legge di Keplero

I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo delle loro distanze medie dal sole.

$$T^2 = \frac{a^3}{K}$$

K = costante
T = periodo rivoluzione
a : semiasse maggiore.

La III legge di Keplero si può facilmente dimostrare per un'orbita circolare

in questo caso $a = R$

$$F_G = \frac{\alpha}{R^2}$$

$$\begin{cases} F_c = m\,\omega^2 R \\ \text{forza centrifuga} \end{cases}$$

all'equilibrio

$$\frac{\alpha}{R^2} = \frac{K\,M_{sole}\,\cancel{m_{pianeta}}}{R^2} = \cancel{m_{pianeta}}\,\omega^2 R$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K\,M_{sole}}{R^3}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

T = periodo rivoluzione

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{K\,M_{sole}}{R^3}$$

$$T^2 = \frac{K\,M_{sole}}{4\pi^2}\,R^3 = K'\,R^3$$