Limiti

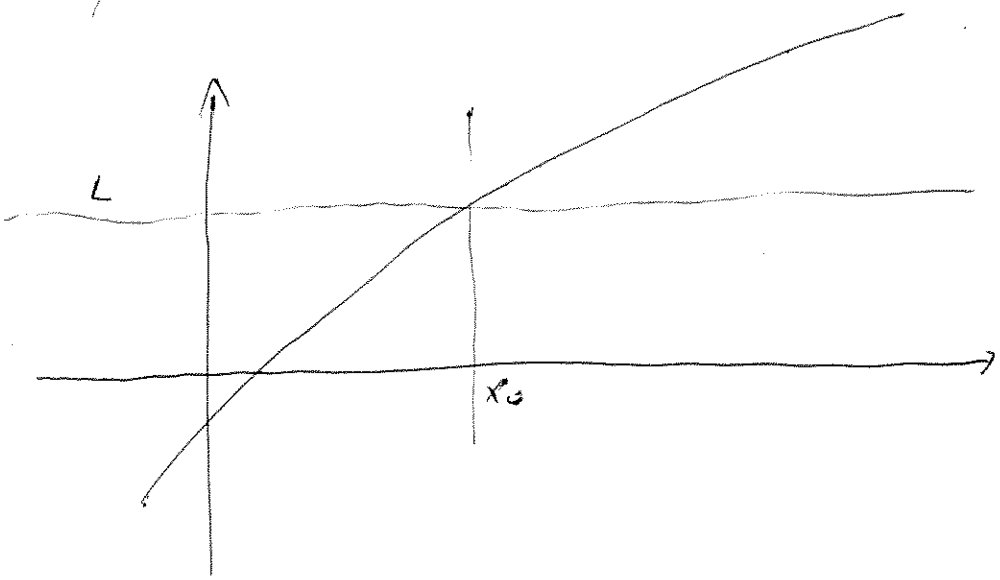
Definizione di limiti

1) $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$

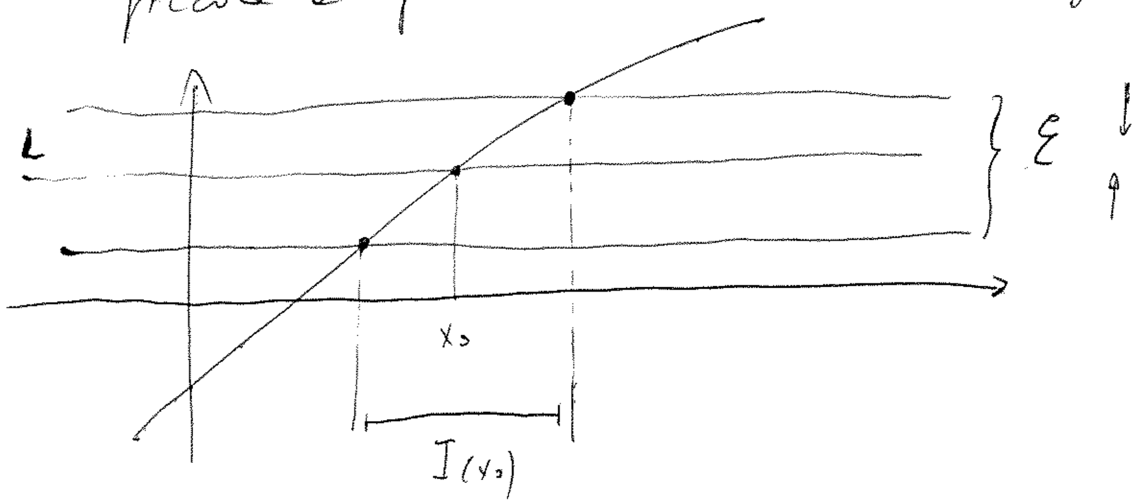
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, I(x_0)$ t.c. $|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in I(x_0)$

eccetto al più x_0

a) Disegno il grafico e definisco $L \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$



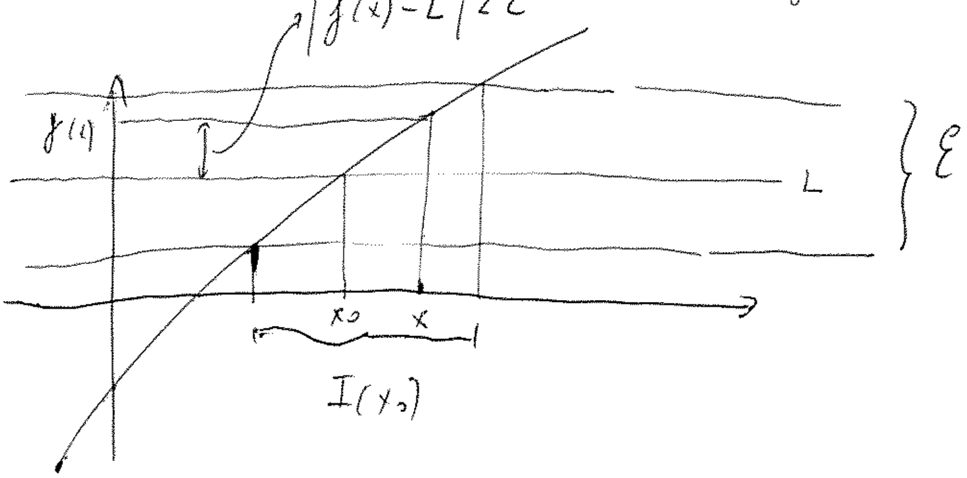
b) Disegno una fascia intorno a L di dimensioni ε piccola a piacere e definisco $I(x_0)$ funzione di ε



c) Verifico che per tutti i punti all'interno dell' $I(x_0)$ $\quad |f(x) - L| < \varepsilon$

cioè

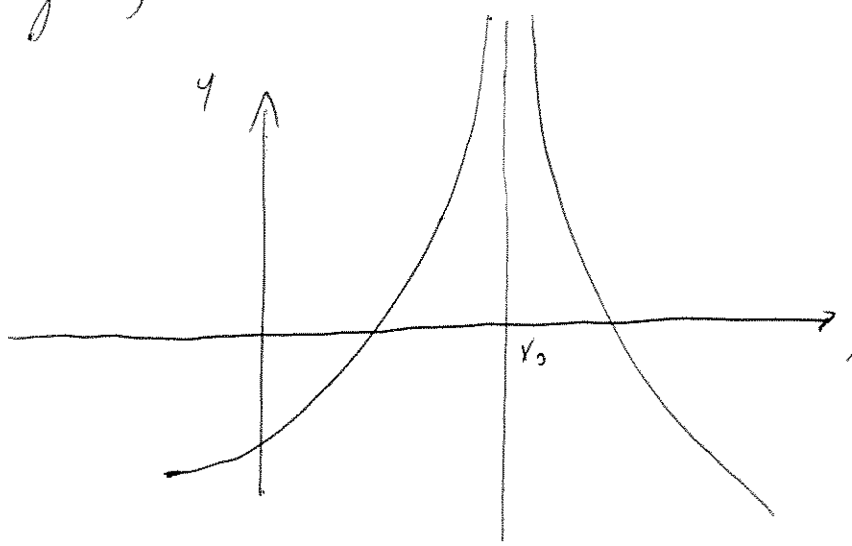
$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$



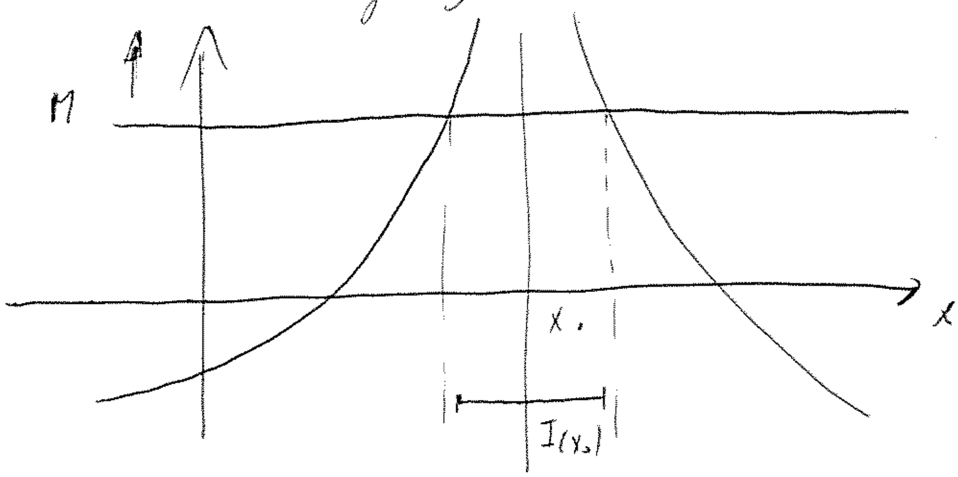
2) $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$ (b)

$\forall M > 0 \ \exists \ I(x_0) : f(x) > M \quad \forall x \in I(x_0)$ eccetto al più x_0.

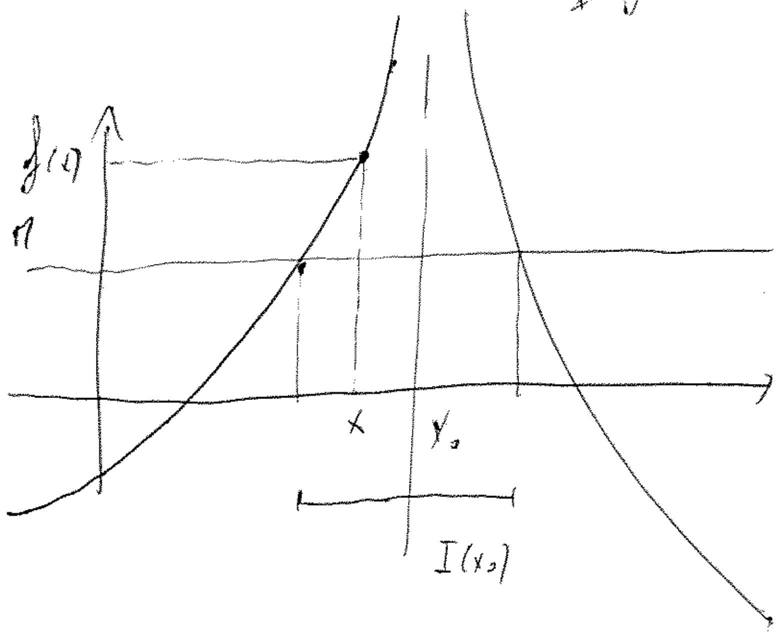
a) Disegno il grafico e definisco x_0 dove la funzione tende all'∞



b) Definisco un valore di M grande a piacere e ricavo $I(x_0)$ funzione di M



c) Verifica che per tutti i punti all'interno dell' $I(x_0)$ $f(x) > M$

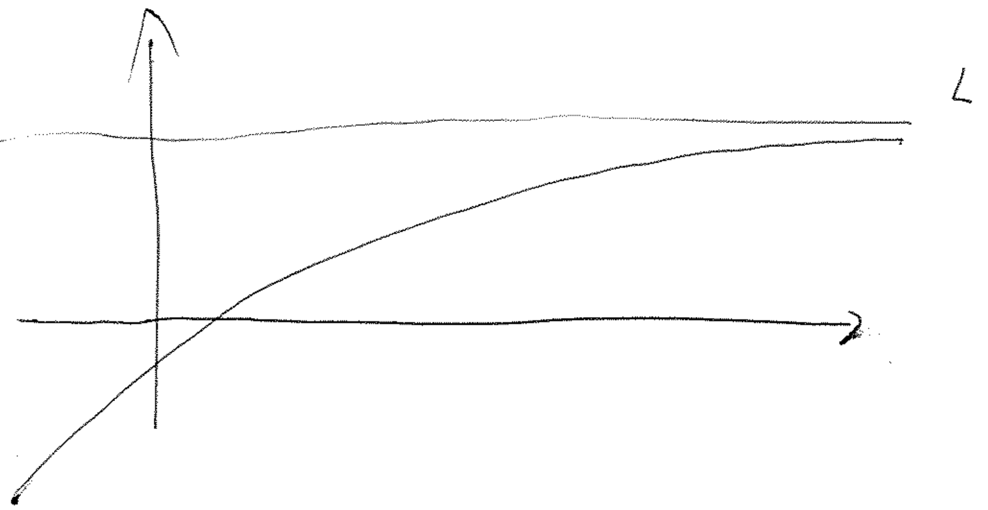


C

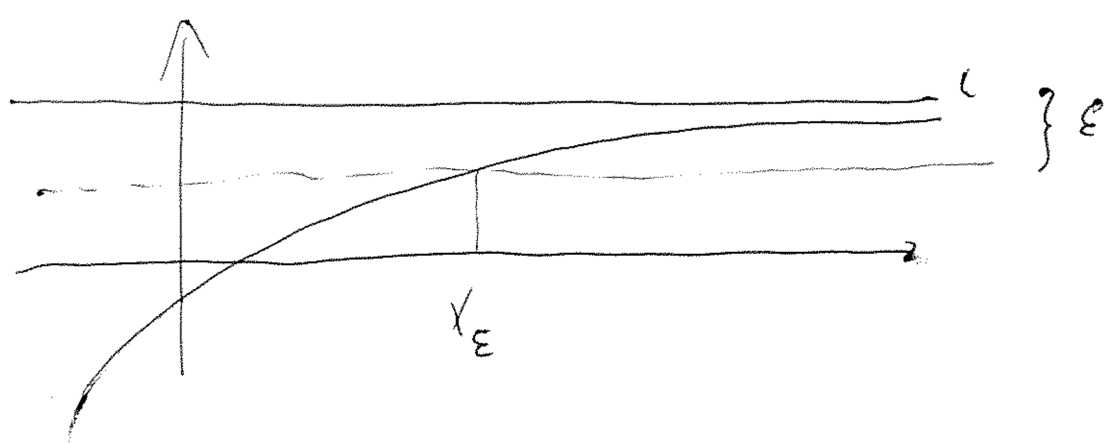
3) $\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = L}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x_\varepsilon \ \text{t.c.} \ \forall x > x_\varepsilon \ |f(x) - L| < \varepsilon$$

a) Disegno il grafico e definisco il valore di L a cui tende all'infinito

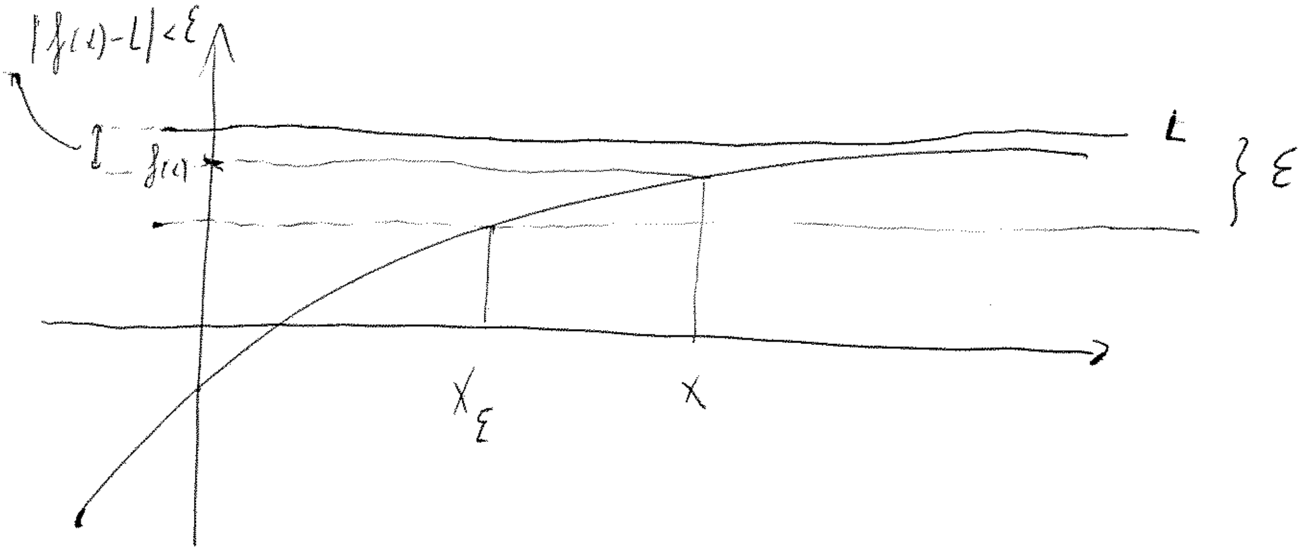


b) Definisco una fascia ε a cavallo di L piccola a piacere e individuo X_ε



c) Verifica graficamente che $\forall x > x_\varepsilon$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

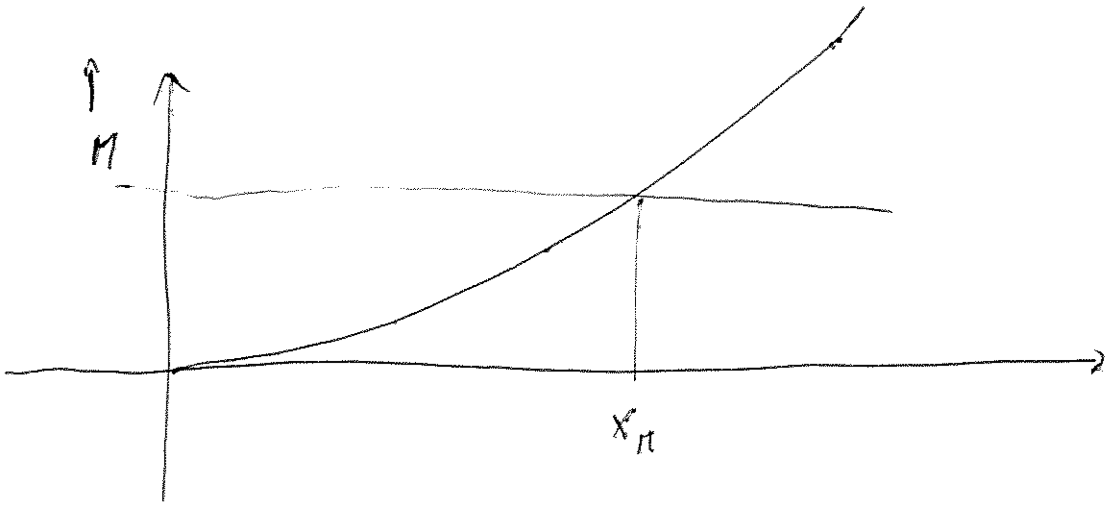


d

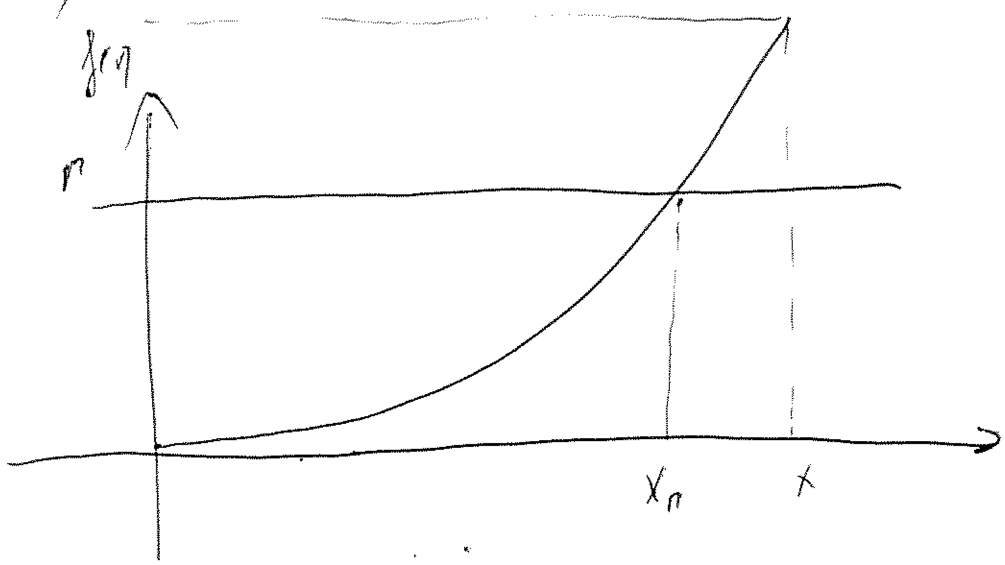
4) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\forall M > 0 \ \exists X_M$ t.c. $\forall x > X_M \quad f(x) > M$

a) Disegno il grafico che tende all'infinito per $x \to \infty$ e definisco M grande e piccolo e X_M



b) Verifico graficamente che per $x > x_M$ $f(x) > M$



Limiti notevoli

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x} = 1$
$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = \log_e e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \qquad \alpha,\beta > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\beta}{b^x} = 0 \qquad \beta > 0 \quad b > 1$$

Per $\alpha,\beta > 0$ e $a, b > 1$

Tendenze all'infinito

$$(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x$$

Sostituzione degli infinitesimi

Se $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ con $\lambda \neq 0$ $\lambda \in \mathbb{R}$

è possibile nel calcolare il limite per $x \to 0$ sostituendo $f(x)$ con $\boxed{\lambda\, g(x) + o(x)}$

dove $o(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a x cioè $\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$

Forme indeterminate dei limiti sono 7

$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $+\infty-\infty$; 1^{∞} ; 0^{0} , ∞^{0} , $\infty \cdot 0$

La forma 0^{∞} non è indeterminata ma vale 0