Traslazioni, rotazioni ed evoluzioni temporali

Traslazioni, rotazioni ed evoluzioni temporali

1) Traslazione spaziale del Ket di stato.

Considero un Ket di stato definito da una funzione $\psi(x)$ e applico l'operatore traslazione spaziale infinitesimo così definito

$$T(\Delta x) = \left(1 - i\,\hat{p}_x \frac{\Delta x}{\hbar}\right) \qquad \text{con } \hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$T(\Delta x)\,|\alpha\rangle = \left(1 - i\,\hat{p}_x \frac{\Delta x}{\hbar}\right)\psi(x) = \psi(x) - \Delta x \frac{\partial}{\partial x}\psi(x) =$$

$$= \psi(x) - \Delta x \frac{\psi(x) - \psi(x-\Delta x)}{\Delta x} = \psi(x - \Delta x)$$

L'operatore $T(\Delta x)$ trasla la funzione di stato di una quantità infinitesima Δx nel verso positivo dell'asse x.

E' possibile ora definire una traslazione finita come composizione di N traslazioni infinitesime ognuna di un valore infinitesimo $\frac{\bar{x}}{N}$.

$$T(\bar{x}) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - i\hat{p}_x \frac{\bar{x}}{N\hbar} \right)^N = \exp\left(-i\hat{p}_x \frac{\bar{x}}{\hbar} \right)$$

Se il Ket di stato è scritto come autofunzioni di $\hat{p}_x$ mediante le trasformate di Fourier.

$$\psi = \int c(p_x)\, e^{\frac{i p_x x}{\hbar}}\, dp_x$$ allora la traslazione spaziale assume la forma semplice

$$\exp\left(-i p_x \frac{\bar{x}}{\hbar} \right)$$ e

$$T(\bar{x})\,\psi(x) = \int c(p_x)\, e^{\frac{i p_x (x - \bar{x})}{\hbar}}\, dp_x$$

2) Evoluzione Temporale del Ket di stato.

In modo analogo si può definire l'operatore di evoluzione temporale infinitesimo

$$U(\Delta t) = \left(1 - i\frac{\hat{H}\Delta t}{\hbar}\right)$$

e l'operatore di evoluzione temporale finito come composizione di N traslazioni infinitesime.

$$U(\bar{t}) = \exp\left(-i\hat{H}\frac{\bar{t}}{\hbar}\right)$$

l'operatore evoluzione temporale trasla le funzione di stato avanti nel tempo di un valore $\bar{t}$.

Se il Ket di stato è scritto come somma delle autofunzioni dell'operatore $\hat{H}$, ad esempio nel caso dell'atomo di idrogeno

$$\psi = \sum_i{}' F_n(r)\, Y(\theta,\phi)_{l,m}$$

l'evoluzione temporale assume la forma

semplice

$$U(\bar{t})\,\psi(x) = \sum_i F_n(r)\,Y(\theta,\phi)_{l,m}\; e^{-i\frac{H_i \bar{t}}{\hbar}}$$

dove H_i sono i valori discreti assunti dall'energia del

sistema.

3) Rotazione del Ket di stato.

Infine si può definire l'operatore di rotazione infinitesimo

$D(\Delta\phi) = \left(1 - \frac{i\,\Delta\phi}{\hbar}\hat{L}_z\right)$ e l'operatore di rotazione finito come composizione di N rotazioni infinitesime.

$D(\bar{\phi}) = \exp\left(-i\,\frac{\hat{L}_z\,\bar{\phi}}{\hbar}\right)$

Se il Ket di stato è scritto come somma delle autofunzioni dell'operatore $\hat{L}_z$, ad esempio per l'atomo d'idrogeno dove $\hat{L}_z$ commuta con $\hat{H}$ ed entrambi gli operatori hanno le stesse autofunzioni,

$\psi = \sum_i F_n(r)\, Y(\theta,\phi)_{l,m}$

la rotazione assume la forma semplice

$$D(\bar{\phi})\,\psi = \sum_i' F_n(r)\, Y(\theta,\phi)_{l,m}\, \exp\left(-\frac{i L_z}{\hbar}\bar{\phi}\right)$$