# Scattering di Klein Gordon

# Scattering di una particella di Klein Gordon



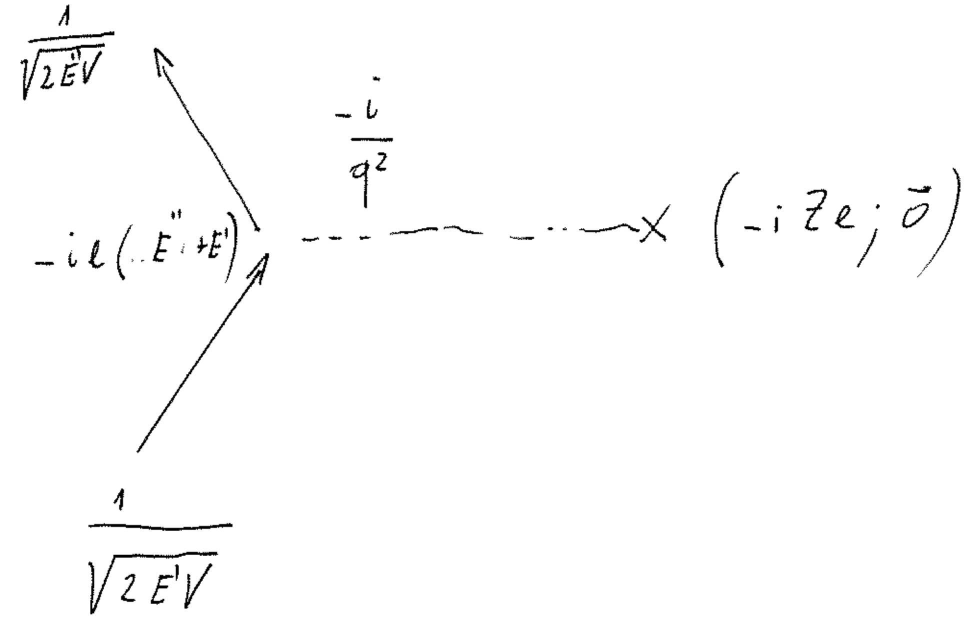
Considero ora lo scattering di una particella di Klein Gordon da un centro di carica infinitamente pesante e verifico la congruenza con la formula di Rutherford per valori non relativistici.

1) Essendo la carica fissa non è possibile considerare la conservazione delle componenti della quantità di moto prima e dopo l'urto ma soltanto la componente $\phi$ cioè l'energia.

2) Per la carica fissa vale la conservazione dell'energia prima e dopo l'urto da cui si ricava la conservazione dell'energia prima e dopo l'urto della particella incidente.

Alla corrente di transizione della particella fine sostituisco la corrente di transizione classica

$\vec{J} = (-iZe;\ \vec{0})$




Il grafico va poi moltiplicato per $(2\pi)\,\delta(E''-E')$

$$\langle \phi_f | S^{(1)} | \phi_i \rangle = \frac{1}{2V\sqrt{E''E'}} \underbrace{(2\pi)\,\delta(E''-E')\left[\frac{Ze^2}{q^2}(E''+E')\right]}_{M}$$

La probabilità di transizione per unità di tempo tra due stati discreti vale

$$W = \langle \phi_f | S^{(1)} | \phi_i \rangle^2 \frac{1}{T}$$

Ricordando che

$$\left[(2\pi)\,\delta(E''-E')\right]^2 = T\, 2\pi\, \delta(E''-E')$$

$$W = \frac{1}{4V^2 E'' E'} \left[\frac{Ze^2}{q^2}\,(E''+E')\right]^2 2\pi\, \delta(E''-E')$$

Per avere la transizione tra due continui occorre moltiplicare per la densità di stati

$$\frac{V\, d^3 p''}{(2\pi)^3}$$

La sezione d'urto è definita come la probabilità per unità di tempo di transizione diviso il flusso di particelle incidenti.

Tale flusso vale $\dfrac{v_{relativa}}{V}$

Poiché $\vec{p} = \left(\dfrac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = (E ; \vec{p}) \Rightarrow \vec{v} = \dfrac{\vec{p}}{E}$

In definitiva

$$\frac{v_{relative}}{V} = \frac{p'}{E'V}$$

$$d\sigma = W \frac{V}{v_{rel}} \frac{V\, d^3 p''}{(2\pi)^3}$$

Sostituisco e integrando in $dE''$

1) $$W = \frac{1}{4V^2 E'' E'} \left[ \frac{Z e^2}{q^2} (E''+E') \right]^2 2\pi\, \delta(E''+E')$$

2) $$\frac{V}{v_{rel}} = \frac{V E'}{p'}$$

$$\frac{d^3 p''}{(2\pi)^3} = \frac{4\pi\, p''^2\, dp''}{(2\pi)^3} \sin\theta\, d\theta = \frac{p''^2\, dp''\, d\Omega}{(2\pi)^3}$$

poiché $E^2 - p^2 = mc^2$ differenziando $E\,dE = p\,dp$

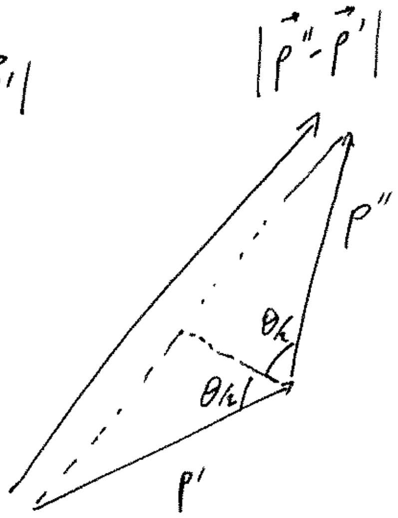
3) $$\frac{V d^3 p''}{(2\pi)^3} = V p'' \frac{E''\, dE''\, d\Omega}{(2\pi)^3}$$

## $\boxed{\text{Integrand in } dE''}$

$$\delta(E''+E') = 1 \qquad q = |\vec{p}\,'' - \vec{p}\,'|$$

$$E'' = E' \qquad p'' = p'$$

$$q = 2p' \sin\frac{\theta}{2}$$




1) $$W = \frac{1}{4V^2E'^2}\left[\frac{Ze^2}{q^2} \quad 2E'\right]^2 2\pi$$

2) $$\frac{V}{v_{rel}} = \frac{VE'}{p'}$$

integrand in $dE''$

3) $$\frac{V d^3 p''}{(2\pi)^3} \to \frac{Vp'E'}{(2\pi)^3}\, d\Omega$$

$$d\sigma = \frac{1}{\cancel{4}\cancel{V^2}\cancel{E'^2}} \frac{Z^2e^4}{q^4} \cancel{4} E'^2 \cancel{2\pi} \frac{\cancel{V}\cancel{E'}}{\cancel{p'}} \frac{\cancel{V}\cancel{p'}\cancel{E'}\, d\Omega}{(2\pi)^{\cancel{3}\,2}}$$

$$d\sigma = \frac{Z^2e^4}{q^4} E'^2 \frac{d\Omega}{(2\pi)^2}$$

$$d\sigma = \frac{Z^2 e^4 E'^2 \, d\Omega}{(2\pi)^2 \left(2 p' \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^4} = \frac{Z^2 e^4 E'^2 \, d\Omega}{(2\pi)^2 \, 16 \, p'^4 \left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^4}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4 E'^2}{(2\pi)^2 \, 16 \, p'^4 \left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^4}$$

per ritrovare la formula di Rutherford

consideriamo che $\vec{v}_0 = \dfrac{\vec{p}}{E}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{(2\pi)^2 \, 16 \, p'^2 \, v_0^2 \left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^4}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 e^4}{4\pi^2 \, 16 \, m_0^2 \, v_0^4 \left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^4} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{Z e^2}{4\pi m_0 v_0^2}\right)^2 \frac{1}{\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^4} \, d\Omega$$

(7)

Nel caso la particella incidente non sia un protone ma una particella α aggiungi nella formula

$z = 2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4}\left(\frac{zZe^2}{4\pi m_0 v_0^2}\right)^2 \frac{1}{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4} \, d\Omega$$

dove $z = 2$ (per particelle α)

$Z = 79$ (atomi d'oro)