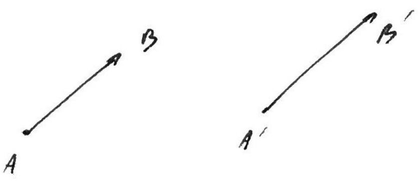
Vettori

Un vettore $\underline{v}$ è un segmento orientato libero definito da:

1) direzione retta contenente il vettore
2) intensità lunghezza del vettore
3) senso.



Due vettori sono equipollenti se hanno la stessa direzione (appartengono alla stessa retta o a rette parallele), lo stesso verso e la stessa intensità.

La classe di equipollenza S è l'insieme dei vettori aventi la stessa direzione intensità e verso.

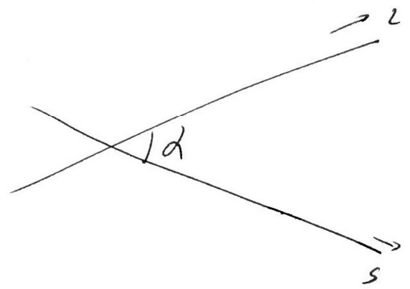
Esiste un isomorfismo tra i vettori liberi V e le classi di equipollenza.

$f: V \to S$

I vettori liberi sono individuati da 3 parametri

vettori applicati 4 parametri (origine).

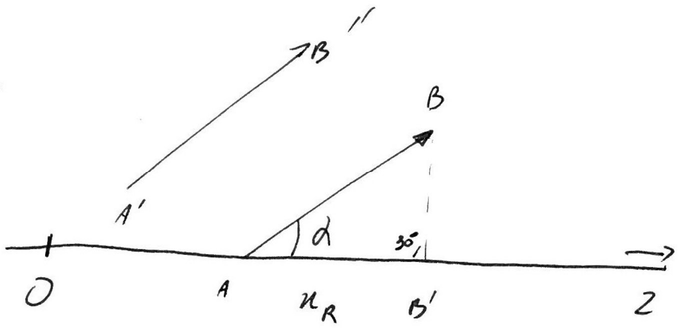
*) Angolo compreso tra due rette orientate



$0 \le \alpha \le \pi$

*) Proiezione di un vettore su una retta

$\underline{u}$ r



B − A = vettore rappresentante di $\underline{u}$

$u_r = \pm AB'$ segno positivo se B' segue A secondo il verso di r.

Se A'B'' è equipollente ad AB

$u_{r'} = u_r$.

fissata un'origine O

$u_r = x_{B'} - x_A$ oppure

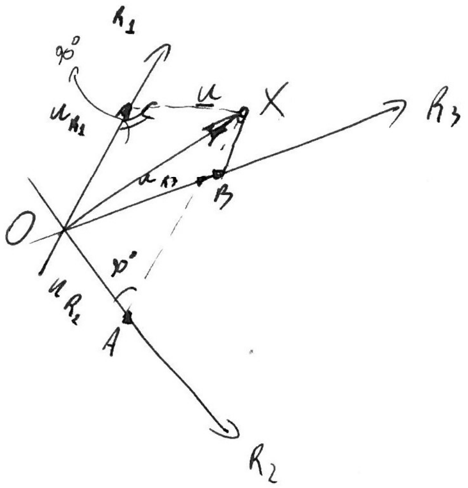
$u_r = |\overrightarrow{AB}| \cos\alpha$

1) Condizione necessaria affinché $\underline{u} = \underline{v}$ è che $u_R = v_R$

2) Condizione necessaria e sufficiente affinché $\underline{u} = \underline{v}$

$u_{R_i} = v_{R_i}$ $\quad i = 1\ 2\ 3$

$R_1, R_2\ R_3$ = 3 rette orientate non complanari.



I 3 piani ortogonali a R_2 passanti per A, R_3 passante per B R_1 passanti per C individuano un punto X.

Il vettore X − O è il vettore cercato.

*) Multiplicazione vettore e un numero reale

$f: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$

$(a, \underline{u}) \longrightarrow \underline{v}$

$a\underline{u} = \begin{cases} a) \text{ \underline{modulo} } |a|\,u & u = \text{modulo di } \underline{u} \\ b) \text{ \underline{direzione} quella di } \underline{u} \text{ se } a > 0 \text{ altrimenti l'opposta} \\ c) \text{ \underline{verso} quello di } \vec{u}. \end{cases}$

Proprietà

$(a \cdot b)\,\underline{u} = a\,(b\,\underline{u})$

$1\,\underline{u} = \underline{u}$

$-1\,\underline{u} = -\underline{u}$ → vettore opposto ad $\underline{u}$

$\underline{u} \longrightarrow u_R$

$a\underline{u} \longrightarrow a\,u_R$.

*) Condizione necessaria e sufficiente affinché due vettori siano paralleli

$\underline{u} \parallel \underline{v} \iff \exists\, m \in \mathbb{R}$ t.c. $\underline{u} = m\underline{v}$

a) se i vettori sono paralleli

$\text{vers}\,\underline{u} = \pm\, \text{vers}\,\underline{v}$

$$\begin{cases} \text{vers}\,\underline{u} = \underline{u} \cdot \dfrac{1}{u} \\ \text{vers}\,\underline{v} = \underline{v} \cdot \dfrac{1}{v} \end{cases}$$

$$\underline{u} \cdot \frac{1}{u} = \pm\, \underline{v} \cdot \frac{1}{v}$$

$$\underline{u} = \underbrace{\pm \frac{u}{v}}_{m}\, \underline{v}$$

b) se $\underline{u} = m\underline{v}$ $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono paralleli per definizione di prodotto tra un vettore e uno scalare.

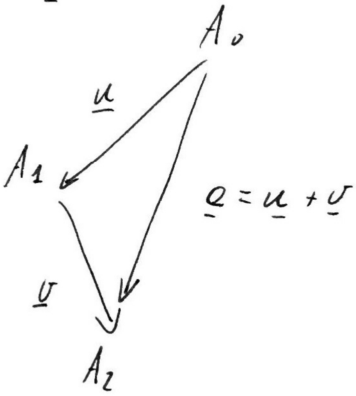
Somma di due vettori (regola del parallelogramma)

$$+ : V \times V \to V$$

$$: (\underline{u}, \underline{v}) \to \underline{a}$$

$\underline{u}$ = (rappresentato da) $A_1 - A_0$

$\underline{v} = A_2 - A_1$



$$\underline{a} = (A_1 - A_0) + (A_2 - A_1) = A_2 - A_0$$

$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{u}_i \implies \underline{R}_t$ (proiezione di R sulla retta t) $= \sum_{i=1}^{n} u_{ti}$

*) propietà associativa

$$(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$$

*) propietà commutativa

$$\underline{u}+\underline{v} = \underline{v}+\underline{u}$$

*) propietà distributiva rispetto alla somma di vettori e
alla somma di scalari

$$m(\underline{u}+\underline{v}) = m\underline{u}+m\underline{v}$$

$$(m+n)\underline{v} = m\underline{v}+n\underline{v}$$

*) Esistenza elemento neutro $\underline{o}$ t.c.

$$\underline{u}+\underline{o} = \underline{o}+\underline{u} = \underline{u}$$

*) Esistenza dell'opposto

$$\forall \underline{u} \in V \ \exists -\underline{u} \text{ t.c. } \underline{u}+(-\underline{u}) = 0$$

L'operazione di somma rende lo spazio dei vettori liberi
un gruppo abeliano

L'operazione di somma e di prodotto per uno scalare lo rende uno spazio vettoriale.

Uno spazio vettoriale è una struttura algebrica sulla quale è stata definita l'operazione di somma che rende i vettori un gruppo abeliano e l'operazione di prodotto per uno scalare.

*) Vettori l. indipendenti

I vettori $v_1 — v_n$ sono l. indipendenti se

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v}_i = 0 \iff \alpha_i = 0 \quad i=1 — n$$

I vettori $v_1 — v_n$ sono l. dipendenti se

$$\exists \alpha_i \neq 0 \qquad \sum_{i=1} \alpha_i \underline{v}_i = 0$$

*) Se i vettori sono l. indipendenti un vettore non può essere espresso come somma degli altri vettori

se i vettori sono l dipendenti e $\alpha_j \neq 0$ $\underline{v}_j$ è esprimibile come combinazione lineare degli altri vettori

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + — + \alpha_j \vec{v}_j + — + \alpha_n \vec{v}_n = 0 \qquad \vec{v}_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} \vec{v}_1 — -\frac{\alpha_n}{\alpha_j} \vec{v}_n$$

*) La dimensione di uno spazio vettoriale è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti di tale spazio.

Se uno spazio vettoriale V ha dimensione n, n vettori linearmente indipendenti formano una base di V.

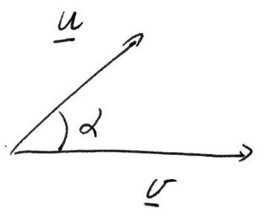
*) Ogni vettore $v \in V$ è esprimibile in modo <u>univoco</u> come combinazione lineare degli n vettori.

prodotto scalare •

$\bullet : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

$(\underline{u}, \underline{v}) \longrightarrow \alpha$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = u\, v \cos \widehat{u v} =$



$= u\, v_u = v\, u_v$

↳ proiezione di v sulla retta orientata $\vec{u}$

*) propietà commutativa

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$

*) $\underline{u}\,(\underline{a}_1 + \dots + \underline{a}_n) = \underline{u} \sum_{i=1}^{n} \underline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{u}\, \underline{e}_i = (\underline{u}\, \underline{e}_1 + \dots + \underline{u}\, \underline{e}_n)$

Dim

$\underline{u} \sum_{i=1}^{n} \underline{a}_i = u \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{a}_i \right)_u = u \sum_{i=1}^{n} a_{iu} = \sum u\, a_{iu} = \sum \underline{u} \cdot \underline{a}$

*) $(\alpha\, \underline{u}) \cdot \underline{v} = \underline{u}\,(\alpha\, \underline{v}) = \alpha\,(\underline{u}\, \underline{v})$

$(\alpha\, \underline{u})(\beta\, \underline{v}) = (\beta\, \underline{u})(\alpha\, \underline{v}) = (\alpha \beta)\, \underline{u}\, \underline{v}$

Propietà distributiva.

Base ortonormale

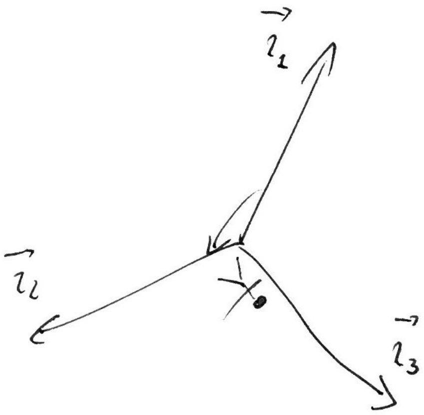
l_1, l_2, l_3

$$\underline{l}_i \cdot \underline{l}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

Kronecker

*) Sistema levogiro

Tre rette orientate $\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3$ non complanari che si intersecano in un punto O formano un sistema di riferimento levogiro



se un osservatore personificato dalla retta $\vec{l}_3$ vede $\vec{l}_1$ ruotare di un angolo $0<\alpha<\pi$ per sovrapporsi in direzione e verso a $\vec{l}_2$ in senso antiorario.

Siano $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3$ una sostituzione di classe pari è una permutazione d'ordine pari dei vettori.

$\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3$

pari

$\vec{z}_2, \vec{z}_1, \vec{z}_3$

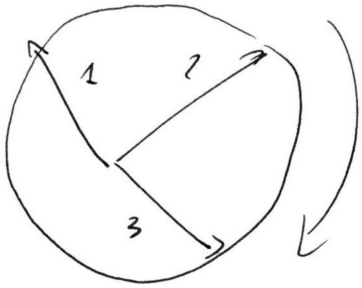
$\vec{z}_1, \vec{z}_3, \vec{z}_2$

dispari

$\vec{z}_3, \vec{z}_2, \vec{z}_1$

$\vec{z}_2, \vec{z}_1, \vec{z}_3$

sostituzione circolare



1 2 3

2 3 1

3 1 2

Una sostituzione circolare o una sostituzione pari non altera la classe (levogira o destrogira) della terna.

*) prodotto vettoriale

$\underline{u}_1, \underline{u}_2$

$$\times : V \times V \longrightarrow V$$

$$: (\underline{u}_1, \underline{u}_2) \longrightarrow \underline{u}_3 \in V$$

$$\underline{u}_1 \times \underline{u}_2 = \underline{u}_3$$

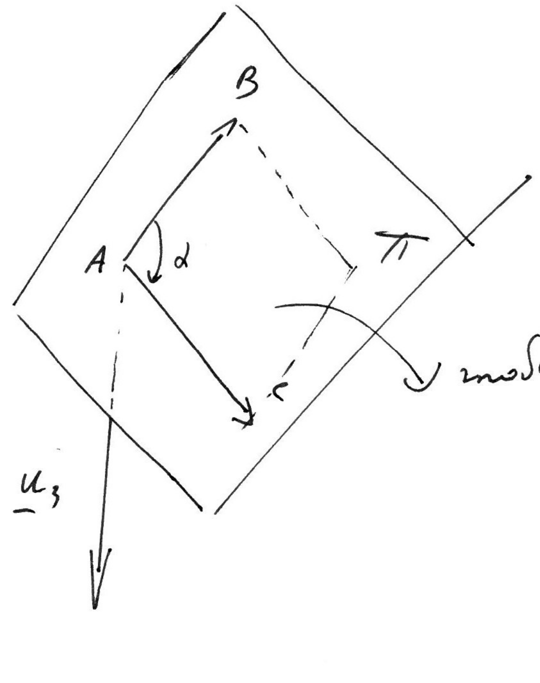
1) $|\underline{u}_3| = u_1 \cdot u_2 \operatorname{sen} \underline{u}_1 \hat{\ } \underline{u}_2$

2) direzione = ortogonale ad entrambi i vettori

3) verso tale che $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ sia levogira.

$\underline{u}_1 = B - A$

$\underline{u}_2 = C - A$



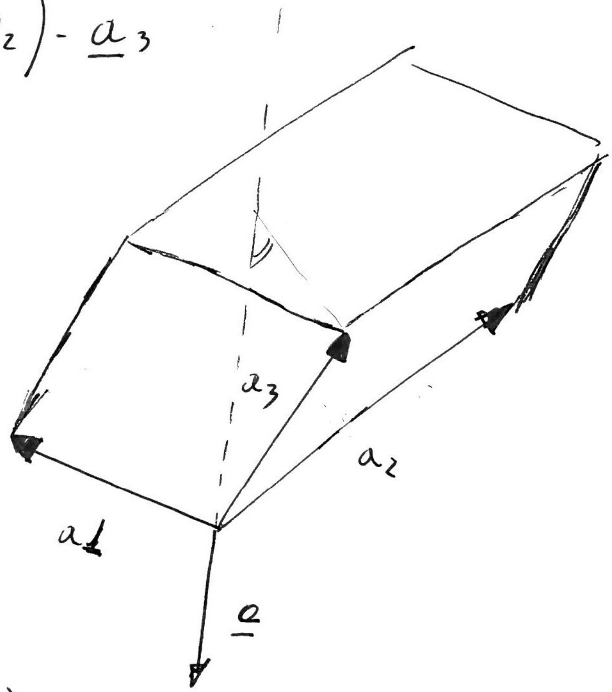
modulo $\underline{u}_3$ = area parallelogramma.

*) $\underline{u}_1 \times \underline{u}_2 = - \underline{u}_2 \times \underline{u}_1$ (non vale la proprietà commutativa).

*) prodotto misto.

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$

$(\underline{a}_1 \times \underline{a}_2) \cdot \underline{a}_3$



$(\underline{a}_1 \times \underline{a}_2) \cdot \underline{a}_3 = \underline{a} \cdot \underline{a}_3 =$ $\quad a =$ area base.

$= a \cdot a_{3a}$ $\quad a_{3a}$ = proiezione di a_3 sulla perpendicolare alla base (altezza parallelepipedo)

$|(\underline{a}_1 \times \underline{a}_2) \cdot \underline{a}_3| = V(a_1 a_2 a_3)$ con il segno positivo

se $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ è un sistema levogiro.

$\underline{a}_1 \times \underline{a}_2 \cdot \underline{a}_3 = \underline{a}_2 \times \underline{a}_3 \cdot \underline{a}_1 = \underline{a}_3 \times \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2$

Propietà del prodotto vettoriale

* Propietà distributiva

Osservazione

$$\underline{u} = \underline{v} \iff \underline{u} \cdot \underline{a} = \underline{v} \cdot \underline{a} \quad \forall \underline{a} \in V$$

$\underline{u} \cdot \underline{a} = \underline{v} \cdot \underline{a} \quad \forall \underline{a} \in V$ è vero in particolare per

tre versori non complanari $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\underline{u} \cdot \underline{a}_1 & = & u_{a_1} & \quad & \underline{u} \cdot \underline{a}_2 & = & u_{a_2} & \quad & \underline{u} \cdot \underline{a}_3 = u_{a_3} \\
\| & & \| & & \| & & \| & & \| \qquad \| \\
\underline{v} \cdot \underline{a}_1 & = & v_{a_1} & & \underline{v} \cdot \underline{a}_2 & = & v_{a_2} & & \underline{v} \cdot \underline{a}_3 = u_{a_3}
\end{array}$$

$$u_{a_i} = v_{a_i} \quad i = 1, 2, 3 \implies \underline{u} = \underline{v}.$$

*) proprietà distributiva

$\underline{u}_1, \underline{u}_2 \text{ —— }, \underline{u}_n$

$$\underline{u} \times \sum_{i=1}^{n} \underline{u}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{u} \times \underline{u}_i$$

$$\left(\underline{u} \times \sum_{i=1}^{n} \underline{u}_i\right) \cdot \underline{a} = \underline{a} \times \underline{u} \cdot \sum_{i=1}^{n} \underline{u}_i = \underline{a} \times \sum_{i=1}^{n} \underline{u} \cdot \underline{u}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underline{a} \times \underline{u} \cdot \underline{u}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \underline{u} \times \underline{u}_i\right) \cdot \underline{a}$$

*) $(m\,\underline{u}) \times \underline{v} = \underline{u} \times m\,\underline{v}$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{u}_i \times \sum_{j=1}^{n} \beta_j \underline{v}_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \underline{u}_i \times \beta_j \underline{v}_j$$

*) non vale la proprietà associativa

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} \neq \underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c})$$

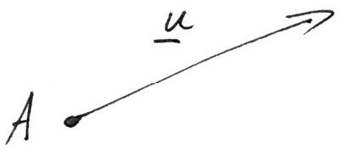
$$\parallel$$

$$(\underline{c} \cdot \underline{a})\underline{b} - (\underline{c} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{a} \neq (\underline{a} \cdot \underline{c})\,\underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{c}$$

vettore applicato

$(A, \underline{u})$ $\quad A \in \mathcal{E}$ (spazio euclideo)

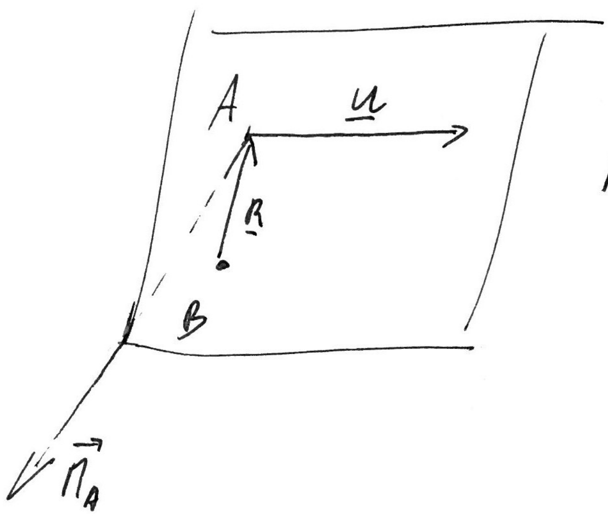
$\underline{u} \in V$ (spazio vettori liberi)



*) Momento di un vettore applicato rispetto ad un polo.

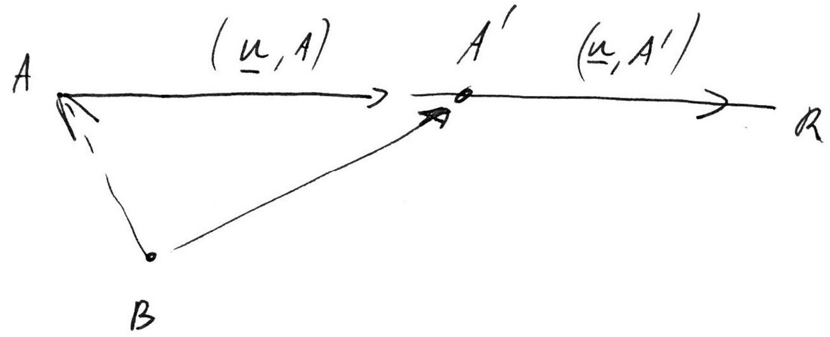
B (polo) $\quad \vec{M}_B = (A - B) \times \underline{u} = \underline{R} \times \underline{u}$

↳ vettore libero



$\vec{M}_A = \underline{R} \times \underline{u}$

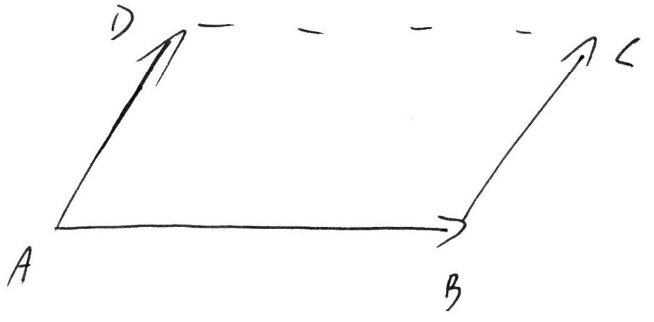
*) Spostando il vettore $\underline{u}$ lungo la retta r il vettore $\vec{\Pi}$ non cambia



$$\vec{\Pi}_B = (A-B) \times \underline{u} = \left[(A-A') + (A'-B)\right] \times \underline{u}$$

$$= \underbrace{(A-A') \times \underline{u}}_{=0} + (A'-B) \times \underline{u}$$

Propietà formali nell'uso dei vettori.



si considera l'uguaglianza come un'uguaglianza algebrica con le lettere = numeri.

$D - A = C - B$ si ricava

$A - D = B - C$ (moltiplicando per -1)

$D - C = A - B$ etc...

$\underline{u} = B - A$

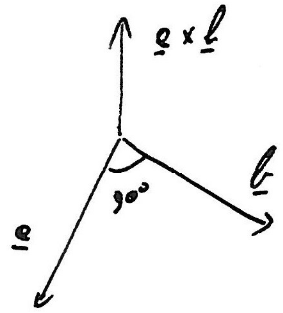
$\underline{u} + A = B$

$\underline{u} + A =$ estremo rappresentativo di A tramite $\underline{u}$

(Traslazione di A tramite $\underline{u}$).

*) Calcolare le soluzioni dell'equazione vettoriale nella variabile $\underline{u}$

$$\underline{u} \times \underline{a} = \underline{b} \qquad (\underline{a} \cdot \underline{b} = 0 \, , \; \underline{b} \neq 0)$$



il vettore $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{a}$ è parallelo a $\underline{b}$

esiste $\lambda^* \in \mathbb{R}$ t.c. $\underbrace{\lambda^* (\underline{a} \times \underline{b})}_{\to \, \underline{u}} \times \underline{a} = \underline{b}$

$$\lambda^* \left[(\underline{a} \cdot \underline{a}) \cdot \underline{b} - \underbrace{(\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{a}}_{= 0} \right] = \underline{b}$$

$$\lambda^* \left[a^2 \underline{b} \right] = \underline{b}$$

$$\lambda^* a^2 = 1 \qquad \lambda^* = \frac{1}{a^2}$$

Una soluzione dell'equazione è

$$\underline{u}^* = \frac{\underline{a} \times \underline{b}}{a^2}$$

Se $\underline{u}^* = \dfrac{\underline{a} \times \underline{b}}{a^2}$ è soluzione anche

$\underline{u}^* + \lambda \underline{a}$ è una soluzione infatti

$$(\underline{u}^* + \lambda \underline{a}) \times \underline{a} = (\underline{u}^* \times \underline{a}) + \cancel{\lambda \underline{a} \times \underline{a}} = \underline{b}$$

Tutte le soluzioni del tipo $\underline{u} = \dfrac{\underline{a} \times \underline{b}}{a^2} + \lambda \underline{a}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

sono soluzioni dell'equazione

(semplice infinità di soluzioni).

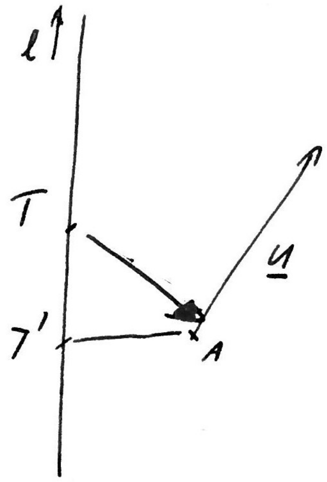
*) Momento assiale

I parte

Sia $(A, \underline{u})$, $T \in \mathcal{T}$

$$\vec{M}_T = (A-T) \times \underline{u}$$

considero una retta orientata r



$(r, \underline{u})$

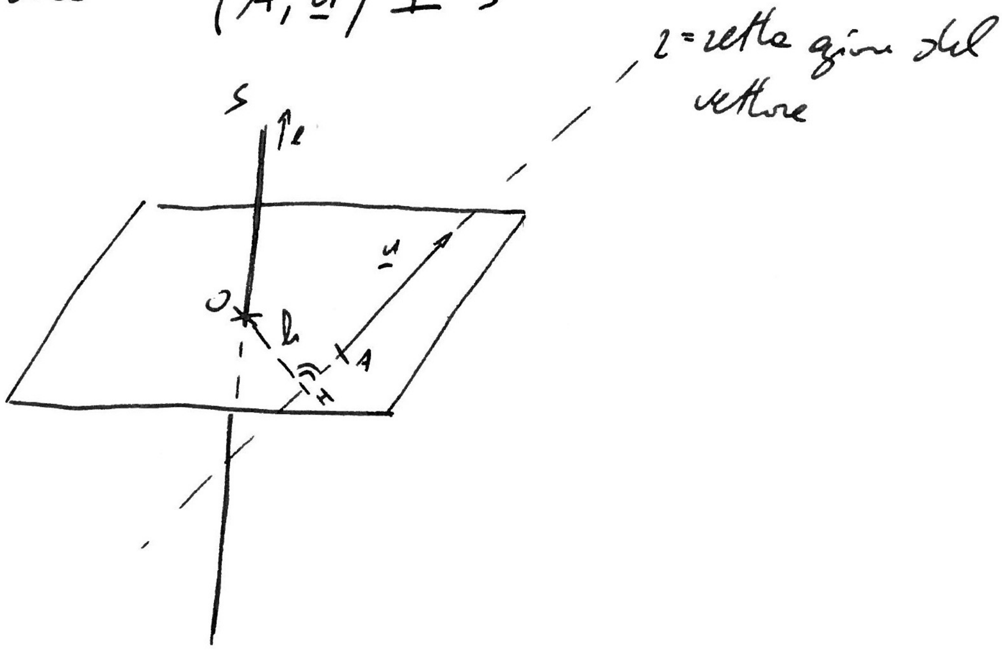
$$\underline{M}_T \cdot \underline{e} = (A-T) \times \underline{u} \cdot \underline{e}$$

(momento assiale è indipendente dalla scelta di $T \in r$).

$$\underline{M}_T \cdot \underline{e} = \left[(A-T') + (T'-T) \right] \times \underline{u} \cdot \underline{e} =$$

$$= (A-T') \times \underline{u} \cdot \underline{e} + \underbrace{(T'-T) \times \underline{u} \cdot \underline{e}}_{\overset{\shortparallel}{0}} = \underline{M}_{T'} \cdot \underline{e} = M_r$$

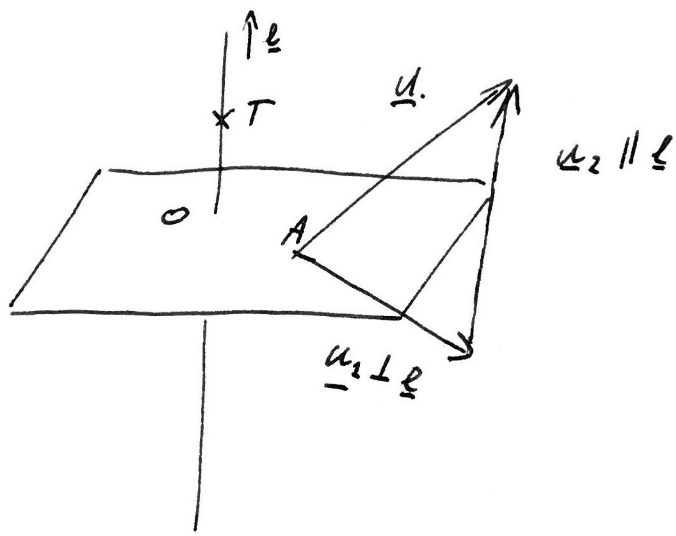
*/ caso particolare $(A, \underline{u}) \perp s$



$$M_s = (H-O)\times \underline{u}\cdot \underline{e} = \pm\, h\, u\, 1$$

positivo o negativo x la terna è levogira o meno.

*/



$$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{u}$$

$$M_s = (A-T)\times\underline{u}\cdot\underline{e} = (A-T)\times[\underline{u}_1+\underline{u}_2]\,\underline{e} =$$

$$= (A-T)\times\underline{u}_1\cdot\underline{e} + \cancel{(A-T)\times\underline{u}_2\cdot\underline{e}} = (A-T)\times\underline{u}_1\cdot\underline{e}$$

$$\left\{ (A_i, \underline{v}_i) \right\}_{i=1 \ldots n}$$

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i$$

$$\underline{M}_T = \sum_{i=1}^{n} (A_i - T) \times \underline{v}_i$$

1) caso particolare $A_i = A$

$$\underline{M}_T = \sum_{i=1}^{n} (A - T) \times \underline{v}_i = (A-T) \times \sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i = (A-T) \times \underline{R}$$

*) Teorema di Varignon (il momento di un insieme di vettori applicati in A è pari al momento del vettore risultante).

$$M_T = \sum_{i=1}^{n} (A_i - T) \times \underline{u}_i$$

$$M_{T'} = \sum_{i=1}^{n} (A_i - T') \times \underline{u}_i$$

$$M_T - M_{T'} = \sum_{i=1}^{n} (A_i - T - A_i + T') \times \underline{u}_i = \sum_{i=1}^{n} (T' - T) \times \underline{u}_i =$$

$$= (T' - T) \times \sum_{i=1}^{n} \underline{u}_i$$

$$M_T = M_{T'} + (T' - T) \times \vec{R}$$

*) il momento calcolato rispetto ad un polo T è pari al momento calcolato rispetto al polo T' più il momento della risultante dei vettori applicata in T' rispetto al polo T.

*) Condizione sufficiente affinché il momento non vari è che $R = 0$

È il caso di una coppia di forze.

(la condizione è anche necessaria).

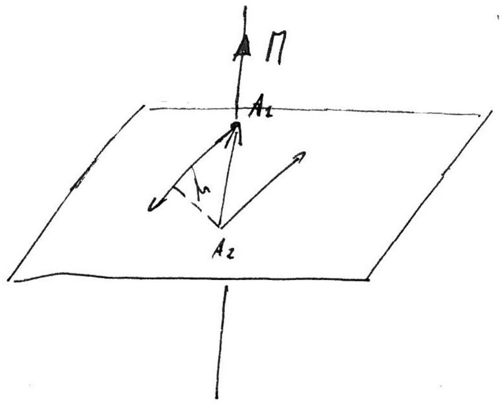
$$\{(A_1, \underline{u}_1), (A_2, \underline{u}_2)\} \qquad \underline{u}_1 = \underline{u}_2 \qquad \underline{R} = \underline{u}_1 - \underline{u}_1 = 0$$

coppie

$$\underline{M}_T = (A_1 - T) \times \underline{u}_1 + (A_2 - T) \times \underline{u}_2 = (A_1 - T) \times \underline{u}_1 + (A_2 - T) \times (-\underline{u}_1) =$$

$$= [(A_1 - T) - (A_2 - T)] \times \underline{u}_1 = (A_1 - A_2) \times \underline{u}_1$$

*) il vettore è indipendente dal polo scelto

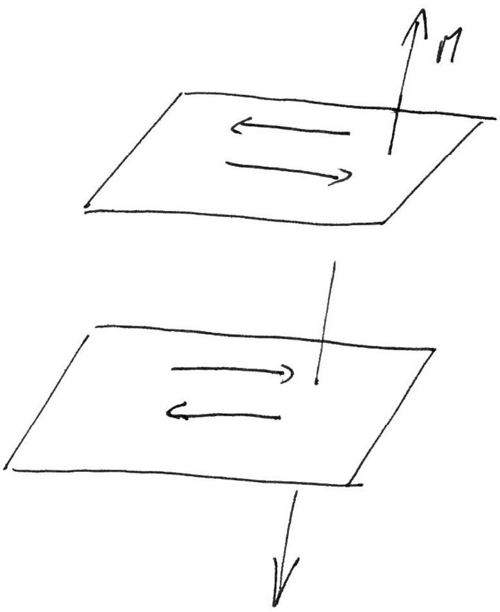


$$M_T = |A_1 - A_2|\, u_1 \operatorname{sen} (\widehat{A_1 - A_2)\, u_1} = u_1 h \qquad h = \text{braccio della coppia}$$

Il verso del momento è quello che vede la terna

$(A_1 - A_2)$, $\underline{u}_1$, M levogira

*) Per determinare il verso del momento è possibile applicare il metodo della vite o della mano destra



*) Il momento di una coppia (di vettori $\neq \underline{0}$) è nullo se e solo se $h=0$.

*) Probleme

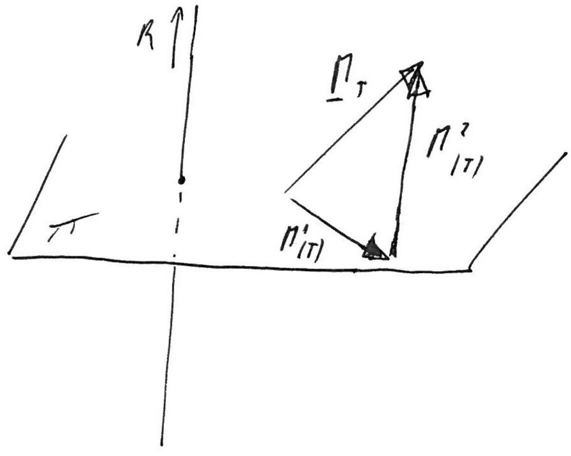
Dato il vettore $\underline{M}$, determinare una coppia che ha come momento $\underline{M}$.

$$M = u_1 h$$

$u_1 = \dfrac{M}{h}$, il verso del vettore u_1 e della coppia è quello stabilito dalla mano destra

*) $\Sigma' \{(A_i, \underline{u}_i)\}_{i=1 \dots n}$

$$\underline{M}_T - \underline{M}_{T'} = (T' - T) \times \underline{R} \quad (\perp R)$$



solo il componente normale a R ($\in \pi$) concorre alla differenza del momento

*) affinché il momento sia invariante $(T' - T)$ deve essere parallelo a $\vec{R}$.

*) Posto $\underline{R} \neq 0$ determinare il luogo di punti K tale che $\vec{M}_K$ è parallelo a $\vec{R}$.

$$\vec{M}_K = \lambda \vec{R}$$

fisso un polo qualunque O

$$\underline{M}_K = \underline{M}_O + (O-K) \times \underline{R} = \lambda \underline{R}$$

$$(K-O) \times \underline{R} = \underline{M}_O - \lambda \underline{R}$$

equazione vettoriale del tipo

$$\underline{u} \times \underline{e} = \underline{b}$$

ammette soluzione se e solo se

$$\underline{R} \cdot (\underline{M}_O - \lambda \underline{R}) = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \underline{R} \cdot \underline{M}_O = \lambda R^2$$

$$\underline{M}_K = \lambda \underline{R} = \left(\frac{\underline{R} \cdot \underline{M}_O}{R^2} \right) \vec{R}$$

$$K-O = \frac{\underline{R} \times (\underline{M}_O - \lambda \underline{R})}{R^2} + t\underline{R}$$

$$K-O = \frac{\underline{R} \times \underline{M}_O}{R^2} + t\underline{R} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$K = \left[O + \frac{\underline{R} \times \underline{M}_O}{R^2} \right] + t\underline{R} = H + t\underline{R}$$ (retta parallela a $\underline{R}$ passante per H).

Il luogo geometrico è detto asse centrale del sistema dei vettori applicati considerati.
È una retta parallela al risultante

*) $K = H + t\underline{R}$

$$H = O + \frac{\underline{R} \times \underline{M}_O}{R^2}$$

$$\underline{M}_K = \lambda \underline{R} \qquad \lambda = \frac{\underline{R} \cdot \underline{M}_O}{R^2}$$

La quantità $\underline{R} \cdot \underline{M}_T$ non varia al variare del polo T;
è detta invariante scalare I.

$$I' = \underline{R} \cdot \underline{M}_{T'}$$

$$I = \underline{R} \cdot \underline{M}_T = \underline{R} \cdot [\underline{M}_{T'} + (T' - T) \times \underline{R}] = \underline{R}\, \underline{M}_{T'}$$

$$\underline{M}_K = \lambda \underline{R} = \frac{I}{R^2} \underline{R}$$

*) il momento calcolato rispetto all'asse centrale è il momento avente modulo minore.

Se K è un punto appartenente all'asse centrale

$$\underline{M}_T = \underline{M}_K + (K-T) \times \underline{R}$$

$$M_T^2 = (M_K + (K-T) \times \underline{R})^2 = M_K^2 + [(K-T) \times \underline{R}]^2 + \underbrace{2\,\underline{M}_K [(K-T) \times \underline{R}]}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ poiché } M_K \parallel R}$$

$$M_T^2 = M_K^2 + \underbrace{[(K-T) \times \underline{R}]^2}_{\hookrightarrow \text{ quantità non negativa}}$$

*) Sistemi di vettori applicati <u>equivalenti</u>.

<u>Def</u>

$$\Sigma \equiv \{(A_i, \underline{u}_i)\}_{i=1 \dots n} \qquad \Sigma' \equiv \{(B_j, \underline{v}_j)\}_{j=1 \dots m}$$

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{u}_i \qquad , \quad \underline{M}_T = \sum (A_i - T) \times \underline{u}_i$$

$$\underline{R}' = \sum_{j=1}^{m} \underline{v}_j \qquad \underline{M}'_T = \sum (B_j - T) \times \underline{v}_j$$

i due sistemi sono equivalenti se

$$\underline{R} = \underline{R}' \quad e \quad \underline{M}_T = \underline{M}'_T \qquad \forall T \in \mathcal{E}_3$$

I criterio di equivalenza dei vettori applicati

$$\Sigma \equiv \Sigma' \iff \underline{R} = \underline{R}' \, , \quad \underline{M}_O = \underline{M}'_O \quad \text{con } O \text{ fisso.}$$

(la condizione è necessaria è evidente)

viceversa

$\underline{R} = \underline{R}'$, la I condizione è verificata

$$\left.\begin{aligned} \underline{M}_T &= \underline{M}_O + (O-T) \times \underline{R} \\ \underline{M}'_T &= \underline{M}'_O + (O-T) \times \underline{R}' \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \underline{M}_T = \underline{M}'_T$$

<u>II criterio di equivalenza</u>

Due sistemi sono equivalenti se e solo se esistono H_i $i=1,2,3$ punti non allineati tali che $\underline{M}_{H_i} = \underline{M}'_{H_i}$

la condizione è necessaria è evidente

<u>viceversa</u>

$$\underline{M}_{H_1} = \underline{M}_{H_2} + (H_2 - H_1) \times \underline{R}$$

$$\underline{M}'_{H_1} = \underline{M}'_{H_2} + (H_2 - H_1) \times \underline{R}'$$

$$\underline{M}_{H_i} = \underline{M}_{H_j} + (H_j - H_i) \times \underline{R}$$

$$i \neq j$$

$$\underline{M}'_{H_i} = \underline{M}'_{H_j} + (H_j - H_i) \times \underline{R}'$$

$$(H_j - H_i) \times (\underline{R} - \underline{R}') = 0$$

1) $H_j \neq H_i$ per ipotesi

2) $H_j - H_i$ non può essere parallelo a $(R - R')$ essendo H_1, H_2, H_3 non allineati

pertanto $\underline{R} - \underline{R}' = 0$ cioè $\underline{R} = \underline{R}'$

*) Se due sistemi sono equivalenti hanno lo stesso asse centrale e viceversa.

$$\Sigma \{A, \underline{v}_i\}_{i=1 \dots n} \qquad \Sigma' = \{A, \underline{R}\} \quad \underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{v}_i$$

sono equivalenti

infatti $\underline{M}_A = 0 \qquad \underline{M}'_A = 0.$

*) Σ è un sistema di vettori applicati equivalente a 0 (o equilibrato) se

$\underline{R} = 0$

$\underline{M}_T = 0 \qquad \forall T \in \mathcal{E}_3$

*) $\{(A_1, \underline{v}_1), (A_2, \underline{v}_2)\}$ condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia equilibrato è che sia una coppia di braccio nullo.

$0 = \underline{R} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \Rightarrow \underline{v}_1 = -\underline{v}_2 \qquad \underline{M} = 0 \Rightarrow b = 0$

*) $\Sigma \equiv \{(A_1, \underline{u}_1)(A_2, \underline{u}_2), (A_3, \underline{u}_3)\}$

condizione necessaria ma non sufficiente affinché

il sistema sia equilibrato è che le rette di azione dei 3

vettori siano complanari e, se si intersecano si intersechino

nello stesso punto.

ip Σ è equilibrato Th. r_1, r_2, r_3 s'intersecano in un solo punto.

$A_i \in r_i \quad i = 1,2,3 \quad r_i =$ rette di azione dei 3 vettori

Si devono annullare i momenti rispetto a 3 punti non paralleli.

Rispetto al polo A_1

$(A_2 - A_1) \times \underline{u}_2 + (A_3 - A_1) \times \underline{u}_3 = 0$ (il momento di $\underline{u}_1 = 0$)

$(A_2 - A_1) \left[(A_2 - A_1) \times \underline{u}_2 + (A_3 - A_1) \times \underline{u}_3 \right] = 0$

$(A_2 - A_1)(A_3 - A_1) \times \underline{u}_3 = 0$

$\underline{u}_3$ appartiene al piano di A_1, A_2, A_3

Ripetendo la dimostrazione calcolando il momento rispetto a A_2 e A_3 si ottiene che

$\underline{u}_2$ è complanare a A_1, A_2, A_3

$\underline{u}_3$ " " "

*) $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ sono complanari.

Se $r_1 \cap r_2 = O$ $\quad M_1$ rispetto a $O = 0$

M_2 rispetto a $O = 0$

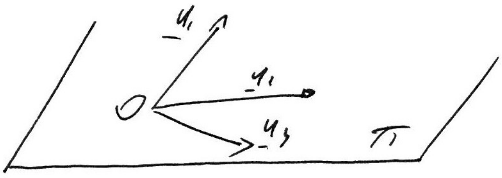
$\Downarrow$

M_3 rispetto a $O = 0$ essendo $\sum_{i=1}^{3} M_i = 0$

$(A_3 - O) \times \underline{u}_3 = 0$

$(A_3 - O) \parallel \underline{u}_3 \qquad r_3$ passa per O.

*) non vale il viceversa



i 3 vettori appartenenti al piano π ... s'intersecano in O ma non sono equilibrati essendo $\underline{R} \neq 0$.

*) Problema   Dato il sistema di vettori applicati

$\Sigma \equiv \{(A_1, \underline{u}_1) — (A_n, \underline{u}_n)\}$ avente risultante $\underline{R}$

determinare un sistema di 3 vettori equivalente al primo.

$\Sigma' \equiv \{(T,\underline{R}) + \text{coppia}\}$ coppia $\{(T,\underline{u}), (B,-\underline{u})\}$

occorre determinare una coppia avente $M'_T = M_T$

$\underline{R}' = \underline{R} + \underline{u} - \underline{u} = \underline{R}$

$u \cdot h = M_T$ $h = \dfrac{M_T}{u}$.

*) Un sistema di vettori applicati ha invariante scalare nullo se e solo se può essere equivalente o a un opportuno vettore applicato o a una opportuna coppia.

a)

$$\Sigma \text{ è equivalente } \begin{cases} \text{opportuna coppia} \\ \text{o} \\ \text{opportuno vettore} \end{cases} \Longrightarrow I = \underline{R} \cdot \underline{M}_T = 0$$

se il sistema è equivalente a una coppia $\underline{R} = 0$

se è equivalente a un solo vettore $\underline{M}_T = 0$ (se calcolato nel punto di applicazione del vettore)

b) $\mathcal{I} = \underline{R} \cdot \underline{M}_T = 0 \quad \forall T$

$R \neq 0$ $\quad \underline{M}_{M} = \dfrac{\mathcal{I}\,\underline{R}}{R^2} = 0$ il momento del sistema

calcolato rispetto ad un punto dell'asse centrale è nullo.

Un vettore avente direzione dell'asse centrale e pari

$\underline{R}$ è equivalente al sistema dato

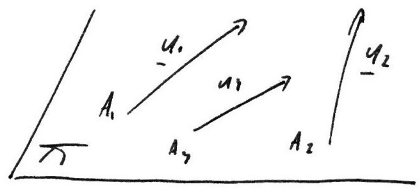
$R = 0$ il sistema è equivalente a una sola coppia.

*) Un sistema avente lo stesso punto di applicazione A

ha invariante nullo

$\underline{M}_A = 0$

*) Un sistema di vettori applicati complanari ha invariante nulla.

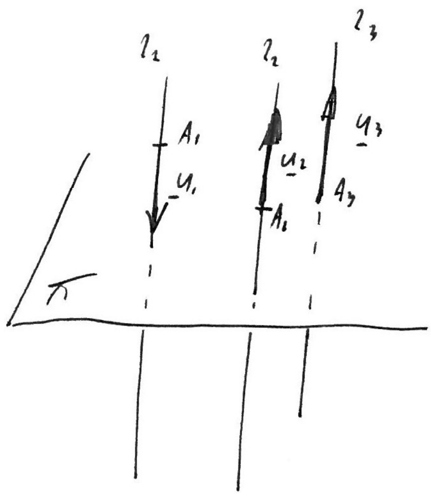


$$\underline{I} = \underline{R} \cdot \underline{M}_T$$

$T \in \pi$ $\quad\underline{M}_T$ è ortogonale a π

$\underline{R} \parallel \pi \qquad \underline{R} \cdot \underline{M}_T = 0$

*)



$r_1 \parallel r_2 \parallel r_3$

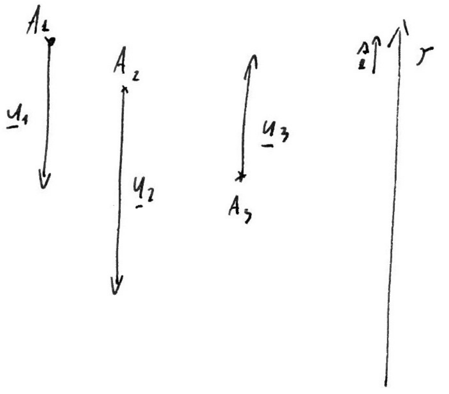
$\underline{M}_T$ è ortogonale a r_1, r_2, r_3 e appartiene a π

$\underline{R} \perp \pi$

$\underline{I} = 0.$

*) Considero un sistema di vettori paralleli

$$\Sigma' \equiv \{(A_i, \underline{u}_i)\}_{i=1 \dots n}$$



Definisco $\quad f_i = \underline{u}_i \cdot \underline{e}$

$$f_i = \pm u_i$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad \underline{R} = \sum_{i=1}^{n} \underline{u}_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \underline{e} = f \underline{e}$$

*) Proposizione

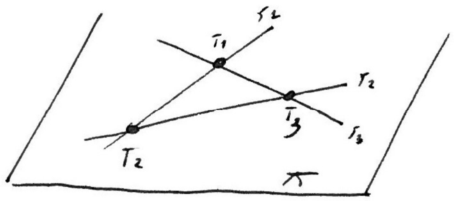
Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema di vettori paralleli sia equilibrato è

$$M_{r_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

dove r_1, r_2, r_3 sono tre rette appartenenti a un piano $\pi \parallel r$

(r = retta direzione dei vettori)

1) Se il sistema è equilibrato $\Rightarrow M_{r_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$



Poiché il sistema è equilibrato

$\underline{M}_{T_1}, \underline{M}_{T_2}, \underline{M}_{T_3} = 0$ allora si avrà che

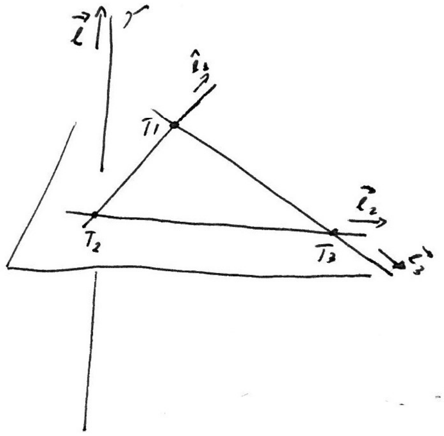
$$M_{r_1} = \underline{M}_{T_1} \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\overline{T_1 T_2}} = 0$$

$$M_{r_2} = \underline{M}_{T_2} \frac{(T_3 - T_2)}{\overline{T_3 T_2}} = 0$$

$$M_{r_3} = \underline{M}_{T_3} \frac{(T_3 - T_1)}{\overline{T_1 T_3}} = 0$$

2) Viceversa la condizione è anche sufficiente

Infatti se



$$\mathcal{M}_{r_1} = \underline{M}_{T_1} \cdot \vec{e}_1 = 0$$

$$\mathcal{M}_{r_2} = \underline{M}_{T_1} \cdot \vec{e}_3 = 0$$

$\underline{M}_{T_1} \cdot \vec{e} = 0$ essendo il momento ortogonale alla direzione dei vettori.

Poiché le proiezioni di $\underline{M}_{T_1}$ rispetto a tre rette non complanari sono nulle necessariamente $\underline{M}_{T_1} = 0$

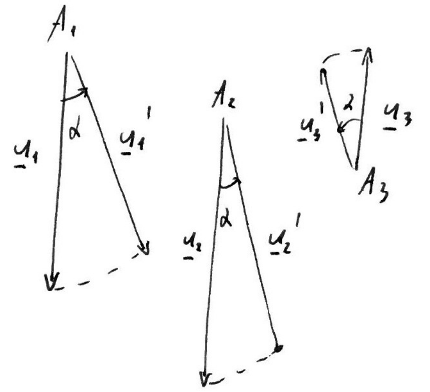
Analogamente $\underline{M}_{T_2} = \underline{M}_{T_3} = 0$ e il sistema è equivalente a zero.

*)

Considero un sistema di vettori paralleli

$\Sigma_i \equiv \{(A_i, \underline{u}_i)\}_{i=1 \dots n}$ avente $\underline{R} \neq 0$ e un sistema di vettori sempre paralleli ottenuti dalla rotazione intorno al punto di applicazione di ciascun vettore di un angolo α.

$\Sigma'_i \equiv \{(A_i, \underline{u}'_i)\}_{i=1 \dots n}$



Il sistema $\Sigma_i \equiv \{(A_i, \underline{u}_i)\}$ è equivalente a $\Sigma_p \equiv \{(C, \underline{R})\}$ mentre il sistema $\Sigma'_i \equiv \{(A_i, \underline{u}'_i)\}$ è equivalente a $\Sigma'_p \equiv \{(C', \underline{R}')\}$.

(Ciò è possibile essendo i vettori paralleli e $\underline{R} \neq 0$).

I vettori applicati $(C, \underline{R})$ e $(C', \underline{R}')$ si troveranno rispettivamente sugli assi centrali di Σ e Σ'

$$\underline{M}_C = 0$$

$$\underline{M}_C = \sum_i (A_i - C) \times \underline{u}_i = \sum_i (A_i - C) \times f_i \underline{e} =$$

$$= \sum_i f_i \underline{e} \times (C - A_i) = \underline{e} \times \sum_i f_i (C - A_i) = 0$$

Se impongo che $\underline{e} \times \sum_i f_i (C - A_i) = 0$ al variare di $\underline{e}$ in V ottengo il punto C di applicazione di tutti i vettori equivalenti ai sistemi ottenuti ruotando il sistema Σ di angoli uguali. Tale punto si dice baricentro.

$$\sum_i f_i (C - A_i) = 0$$

$$\sum_i f_i \left[(C - O) - (A_i - O) \right] = 0$$

$$f (C - O) = \sum_i f_i (A_i - O)$$

$$C - O = \frac{1}{f} \sum_i f_i (A_i - O)$$

analogamente

$$C' - O = \frac{1}{f'} \sum_i f'_i (A_i - O)$$

poiché $f = f'$ e $f_i = f'_i$ risulta

$C = C'$

*) L'asse centrale del sistema di vettori paralleli Σ e Σ' s'interseca in un punto C chiamato centro del sistema di vettori applicati paralleli.

I due assi formeranno tra loro un angolo α dovendo essere paralleli rispettivamente a R e R'.

*) I due sistemi

$$\Sigma \equiv \{(A_i, m\underline{u}_i)\}_{i=1 \ldots n} \text{ e}$$

$$\Sigma \equiv \{(A_i, \underline{u}_i)\}_{i=1 \ldots n}$$ hanno lo stesso centro.

*) proprietà distributiva di C = baricentro.

$$\Sigma' \equiv \{(A_1, \underline{u}_1), \ldots (A_r, \underline{u}_r), \ldots (A_n, \underline{u}_n)\} \quad R \neq 0$$

sia $\Sigma'_p \equiv \{C', \underline{R}'\}$ il vettore equivalente al sistema

$$\{(A_1, \underline{u}_1), \ldots, (A_r, \underline{u}_r)\}$$

determiniamo la relazione tra $C'-O$ e $C-O$

$$C'-O = \frac{1}{f'} \sum_i' f_i' (A_i - O) \qquad f_i' = f_i$$

$$C-O = \frac{1}{f} \sum' f_i (A_i - O) = \frac{1}{f} \left[\sum_{i=1}^{r}{}' f_i (A_i - O) + \sum_{i=r+1}^{n}{}' f_i (A_i - O) \right] =$$

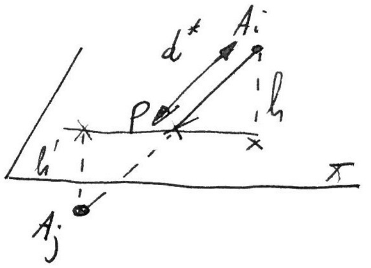
$$= \frac{1}{f} \left[\sum_{i=1}^{r}{}' f_i' (A_i - O) + \sum_{i=r+1}^{n}{}' f_i (A_i - O) \right] =$$

$$= \frac{1}{f} \left[f'(C'-O) + \sum_{i=r+1}^{n}{}' f_i (A_i - O) \right].$$

*) Piano Diametrale

Un sistema di vettori paralleli Σ'_p ammette un piano diametrale π se tutti i vettori di Σ'_p sono raggruppabili in due coppie $(A_i, \underline{u}_i), (A_j, \underline{u}_j)$ tali che ad ogni punto A_i corrisponde un punto A_j

$A_i - A_j \parallel \vec{e}$ (vettore direzione del sistema)



$d^*(A_i, \pi) = d^*(A_j, \pi) \quad (\Rightarrow h = h')$

$\underline{u}_i = \underline{u}_j \qquad$ (Se $\vec{e} \perp \pi$ π è un piano di simmetria per Σ'_p)

*) ogni sistema avente un piano diametrale ha centro su tale piano.

$C = (x_1^{(c)}, x_2^{(c)}, x_3^{(c)}) \qquad A_i = (x_{1i}^{(A)}, x_{2i}^{(A)}, x_{3i}^{(A)})$

$(C - O) = \frac{1}{f} \sum_i f_i (A_i - O)$ $\qquad$ Se suppongo O = origine degli assi e pongo il piano diametrale il piano x, y avrò

$x_i^{(c)} = \frac{1}{f} \sum_j f_j x_{ij}^{(A)}$ in particolare $x_3^{(c)} = \frac{1}{f} \sum_j f_j x_{3j}^{(A)} = 0$

poiché ad ogni vettore $(A_i, \underline{u}_i)$ posso associare $(A_j, \underline{u}_j)$ tale che $f_i x_{3i} = - f_j x_{3j}$.

*) Coppie vettori paralleli

$$\Sigma_p \equiv \{(A_1, \underline{u}_1), (A_2, \underline{u}_2)\} \qquad \underline{u}_1 + \underline{u}_2 \neq 0$$

$$(C-O) = \frac{1}{f}\left[(A_1-O)f_1 + (A_2-O)f_2\right] \quad \text{in particolare se } C \equiv O$$

$$\underline{0} = \frac{1}{\cancel{f}}\left[(A_1-C)f_1 + (A_2-C)f_2\right]$$

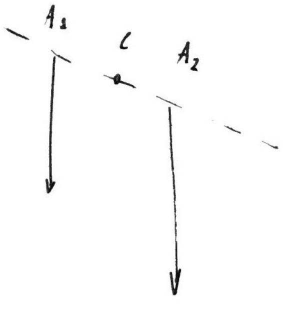
$$(A_1-C)f_1 = -(A_2-C)f_2$$

$$(A_1-C) = -(A_2-C)\frac{f_2}{f_1}$$

1) se $\underline{u}_2$ e $\underline{u}_1$ sono equiversi $\frac{f_2}{f_1} > 0$

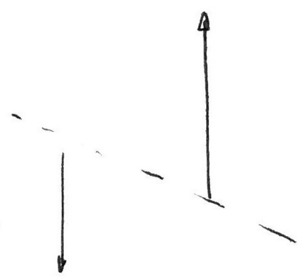
(A_1-C) e (A_2-C) hanno verso opposto

C è interno al segmento A_1, A_2.



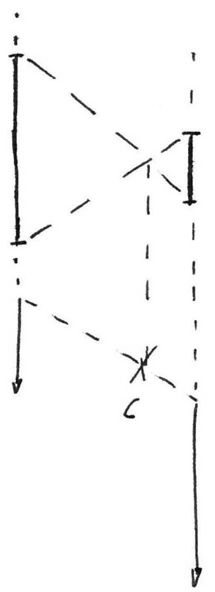
2) Se $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ non sono equiversi $\frac{f_2}{f_1} < 0$ il punto C è

esterno al segmento $\overline{A_1 A_2}$

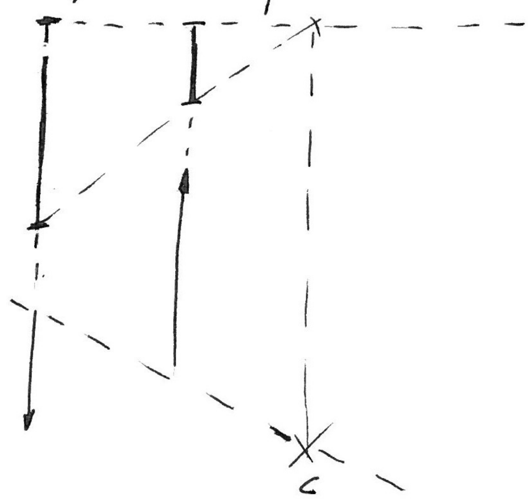


*) $\frac{\overline{A_1 C}}{\overline{A_2 C}} = \pm \frac{u_2}{u_1}$

$\underline{u}_1, \underline{u}_2$ = equiversi



$\underline{u}_1, \underline{u}_2$ non equiversi

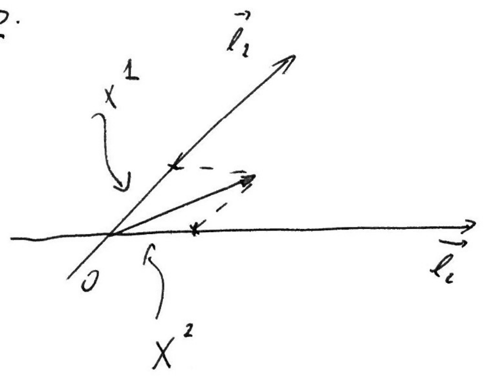


*) $\mathcal{E}_3 V_3$ $\{O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

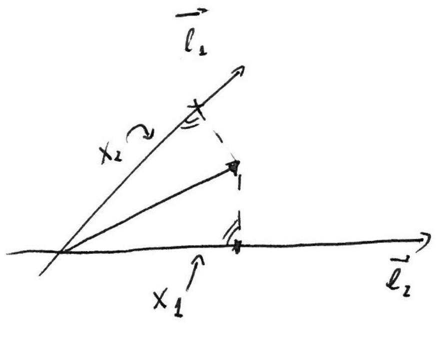
X^i = componenti controvarianti $\underline{X} = X^i \underline{e}_i$

X^i = componenti covarianti $X_i = \underline{X} \cdot \underline{e}_i$

es.



componenti controvarianti



componenti covarianti

* <u>Spazio euclideo affine Tridimensionale $\mathcal{E}_3, V$</u>

Spazio vettoriale metrico su cui è stata definita una distanza

$d : (\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_3) \to \mathbb{R}^+$ e su cui è possibile definire l'insieme

delle isometrie $H = \{ \alpha : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3 \mid d(A,B) = d(\alpha(A), \alpha(B)) \; \forall A, B \in \mathcal{E}_3 \}$.

*) l'insieme H delle isometrie è un gruppo rispetto all'operazione di composizione

*) Un sottogruppo di H (V_3) è detto delle traslazioni ed è un gruppo abeliano.

*) $\underline{u}, \underline{v} \in V_3$

$$(\underline{u} + \underline{v})(A) = \underline{u}(\underline{v}(A))$$

*) È definito un prodotto scalare $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ t.c.

$$[d(A, \underline{u}(A))]^2 = \underline{u} \cdot \underline{u} = u^2$$

Localizzazione

Sia $\mathcal{B}$ un corpo naturale $X_i \in \mathcal{B}$ le particelle costituenti $\mathcal{B}$

$P : \mathcal{B} \to \mathcal{E}_3$ $\quad$ P: iniettiva (incomprimibilità della materia)

$P(X) = P \in \mathcal{E}_3$

(P, m) è un punto materiale cioè una particella di massa m localizzata

$\{(P_i, m_i)\}_{i=1 \dots n}$ $\quad$ $\sum_{i=1}^{n} m_i =$ massa totale sistema

è un sistema materiale discreto.

Un corpo $\mathcal{B}$ si dice rigido se

$\forall\, P_i, P_j \in \mathcal{L}$ (insieme delle localizzazioni) e $\forall\, X_s, X_q \in \mathcal{B}$

si ha che $d(P_i(X_s), P_i(X_q)) = d(P_j(X_s), P_j(X_q))$

Il corpo naturale $\mathcal{B}$ si dice continuo se

$P(\mathcal{B}) = \Omega$ è un aperto connesso di $\mathcal{E}_3$ e la frontiera

di Ω appartiene a C^1.

Se $\mathcal{C} \leq \mathcal{B}$ $\quad P(\mathcal{C}) = \Omega(\mathcal{C})$ sottoinsieme di Ω

definisco massa di $\Omega(\mathcal{C}) = \Delta M(\mathcal{C}) = \int_{\Omega(\mathcal{C})} \rho(P)\, dV$

$\rho(P)$ = funzione continua

Per il teorema della media integrale $\exists \bar{P} \in \Omega(\mathcal{C})$ tale che

$$\rho(\bar{P}) = \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{\Delta M(\mathcal{C})}{\Delta \Omega(\mathcal{C})}$$ passando al limite

$$\lim_{\Delta\Omega \to 0} \frac{\Delta M(\mathcal{C})}{\Delta \Omega(\mathcal{C})} = \rho(\bar{P})$$ = densità puntuale.

$\rho(P)$ = densità puntuale $= \dfrac{dm}{d\Omega}$

→ massa elementare

→ volume elementare.

*) <u>Baricentro</u>

$P(B) = \{P_i, m_i\}_{i=1 \dots n}$

Consideriamo i sistemi $\{(P_i, m_i \underline{u})\}_{i=1 \dots n}$ al variare di $\underline{u}$ in V_3.

Il centro di tali sistemi indipendente da $\underline{u}$ viene detto baricentro del sistema $\{P_i, m_i\}$.

G = baricentro

$$(G-O) = \frac{1}{f} \sum_i f_i (A_i - O) = \frac{1}{mu} \sum_i m_i u (P_i - O) =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_i m_i (P_i - O)$$

*) Se il sistema B è continuo il baricentro G sarà

$$(G-O) = \frac{1}{m} \int_{\Omega(B)} \rho(P)(P-O)\,dV$$

$$m = \int_{\Omega(B)} \rho(P)\,dV$$

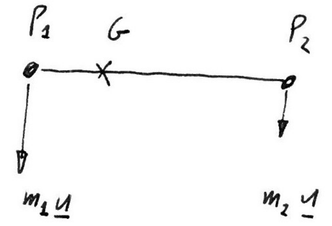
in particolare se ρ è costante cioè B è un corpo a densità uniforme

$$(G-O) = \frac{1}{\rho V} \rho \int_{\Omega(B)} (P-O)\,dV$$ il baricentro dipende solo

dalla forma del corpo e non dalla sua distribuzione di massa.

*) Baricentro del sistema

$\Sigma \quad \{(P_1, m_1), (P_2, m_2)\}$



$$G - O = \frac{m_1 (P_1 - O) + m_2 (P_2 - O)}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{\overline{GP_1}}{\overline{GP_2}} = \frac{m_2}{m_1}$$

*) Additività del centro di massa

Dato il sistema $\{(P_1, m_1) —— (P_n, m_n)\}$ lo divido in due sottosistemi $\Omega_1(B)$, $\Omega_2(B)$. Il baricentro del sistema è equivalente al baricentro del sistema

$\{(G_1, m_1), (G_2, m_2)\}$ dove G_i è il baricentro del sottoinsieme $\Omega_i(B)$ e m_i è la sua massa totale $i=1,2$.

$$G_1 - O = \frac{1}{m_1} \sum_{i}^{r} m_i (P_i - O)$$

$$G_2 - O = \frac{1}{m_2} \sum_{i=r+1}^{n} m_i (P_i - O)$$

$$G - O = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \, (P_i - O) =$$

$$= \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{r} m_i \, (P_i - O) + \sum_{i=r+1}^{n} m_i \, (P_i - O) \right) =$$

$$= \frac{1}{m} \left(\frac{m_1}{m_1} \sum_{i=1}^{r} m_i (P_i - O) + \frac{m_2}{m_2} \sum_{i=r+1}^{n} m_i \, (P_i - O) \right) =$$

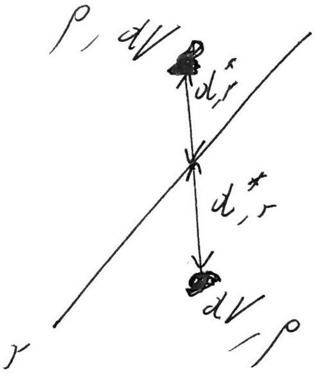
$$= \frac{1}{m} \left(m_1 \, (G_1 - O) + m_2 \, (G_2 - O) \right).$$

Un sistema discreto $\Sigma\{m_i, P_i\}$ ammette un piano Simmetrale se ad ogni punto $\{m_i, P_i\}$ posso associare un punto $\{m_j, P_j\}$ t.c. $m_i = m_j$ e $d^*(P_i, \pi) = d^*(P_j, \pi)$

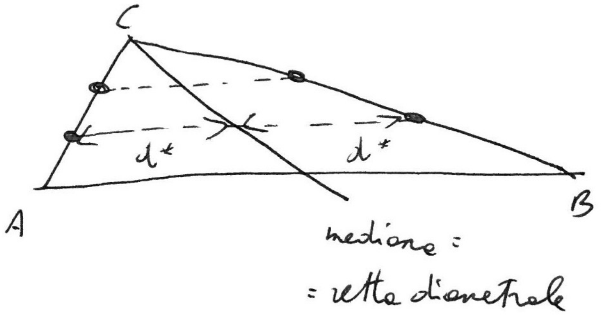
Un sistema continuo ammette un piano Simmetrale se ad ogni volume infinitesimo dV posto a ~~una~~ d^* da π posso associare un altro volume infinitesimo posto alla stessa d^* da π avente la stessa densità

Il centro di un sistema che ammette un piano diametrale si trova su tale piano

Analogamente è definibile una retta Simmetrale

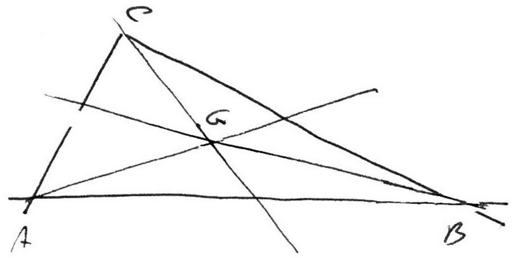


Baricentro di un triangolo

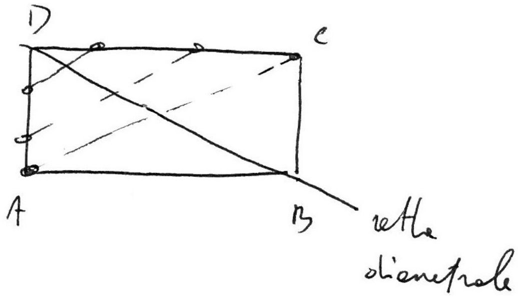


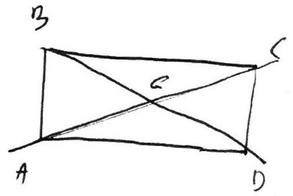
Il baricentro di un triangolo è l'intersezione delle tre mediane.

Ciò vale anche per un triangolo la cui massa è distribuita superficialmente

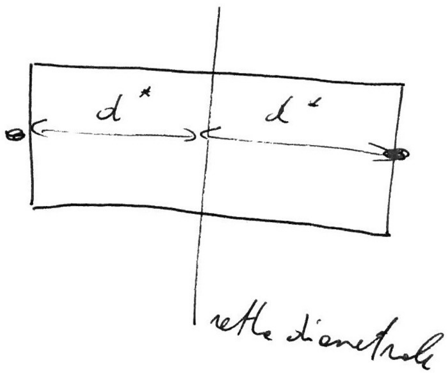


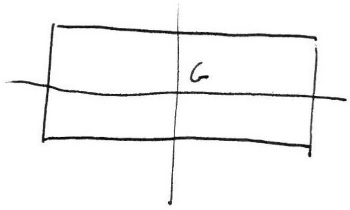
Baricentro di un quadrato





oppure





Cinematica

La cinematica studia il moto dei corpi indipendentemente dalle cause che determinano il moto stesso.

Ogni moto avviene in un sistema spazio-temporale occorre pertanto descrivere matematicamente tale sistema.

Nell'ambito della meccanica classica lo spazio viene descritto dallo spazio metrico euclideo affine tridimensionale.

In tale spazio l'insieme delle isometrie

$$H = \{ \alpha : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \text{ invertibili t.c. } d(P,Q) = d(\alpha(P), \alpha(Q)) \ \forall P,Q \in \mathcal{E} \}$$

godono delle seguenti proprietà:

1) H è un gruppo rispetto all'operazione di composizione

2) Esiste un sottogruppo di H detto delle traslazioni V abeliano rispetto all'operazione di composizione

3) Esiste un'operazione di moltiplicazione scalare $\lambda : \mathbb{R} \times V \to V$ che rende V uno spazio vettoriale.

4) Esiste un prodotto scalare tale che $d(P, \underline{u}(P))^2 = \underline{u} \cdot \underline{u} \ \ \forall (P, \underline{u})$.

*) Sulla base delle osservazioni dell'omogeneità del tempo (non esistono istanti di tempo privilegiati) è possibile rappresentarlo tramite la retta orientata $\mathbb{R}$.

Poiché il moto è un concetto relativo occorre fissare una terna levogira $\{O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ rispetto alla quale si descrive il moto di un corpo. (sistema di riferimento)

Ogni punto $P \in \mathcal{E}$ può essere individuato in modo univoco dalle componenti (x_1, x_2, x_3) del vettore $\underline{v}$ t.c. $\underline{v}(O) = P$

$$\underline{v} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$$

*) Chiamiamo osservatore un sistema di riferimento solidale con un corpo rigido insieme con un sistema di misura del tempo (orologio).

*) La posizione di un punto X è definita dalla localizzazione

di X $\quad P = \hat{P}(X)$ in particolare si definisce

$I \subset \mathbb{R}$ l'intervallo temporale in cui è definito il moto

$$\hat{P} : I \to \mathcal{E} \qquad (\text{fissato } X)$$
$$: t \in I \to \hat{P}(t) \qquad \text{localizzazione di } X \text{ al variare di } t.$$

La funzione $P = \hat{P}(t)$ è equivalente alla funzione

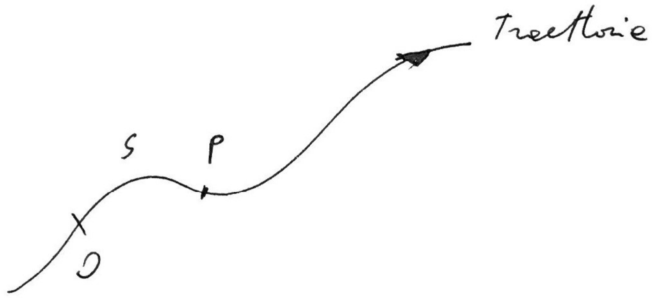
vettoriale $\quad \underline{x}(t) = \hat{P}(t) - O \quad$ può essere descritta

attraverso le funzioni componenti

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

*) La funzione $P = \hat{P}(t)$ descrive perfettamente il moto del corpo al variare del tempo.

È possibile inoltre determinare la traiettoria del punto indipendentemente dalla variabile temporale introducendo la funzione $P = \hat{P}(s)$



dove s detta ascissa curvilinea è pari alla lunghezza dell'arco $\widehat{OP}$ secondo il verso orientato della curva.

La funzione $s = \hat{s}(t)$ detta legge oraria assegna la variabilità di P sulla traettoria in funzione del tempo.

*) velocità scalare

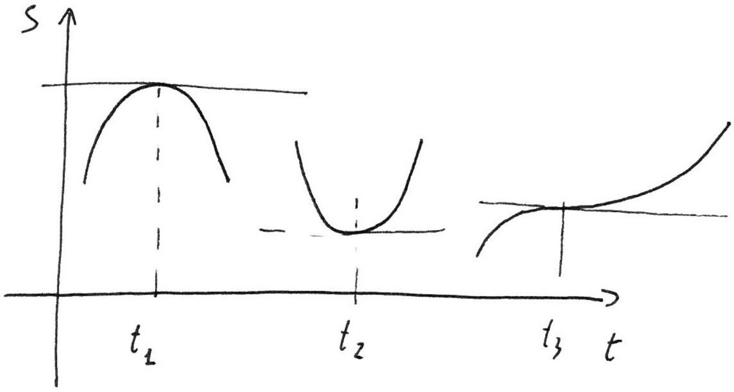
Sia $s = \hat{s}(t)$ la legge oraria del moto

$$v(t) \stackrel{def}{=} \frac{d\hat{s}(t)}{dt} = \dot{s}$$

Se $\dot{s} > 0$ il moto è detto diretto se

$\dot{s} < 0$ il moto è retrogrado

$\dot{s} = 0$ c'è un istante di arresto



1)
$s(t)$ presenta un massimo inversione diretto $\to$ retrogrado

2)
$s(t)$ presenta un minimo inversione retrogrado $\to$ diretto

3)
$s(t)$ presenta un flesso diretto, arresto, diretto.

Se $v(t) =$ costante il moto è detto uniforme su traiettorie varie

$s = vt + v_0$

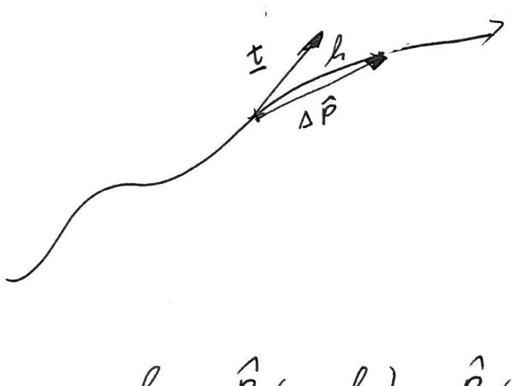
*/ <u>velocità vettoriale</u>

$$\underline{v}(t) \stackrel{def}{=} \frac{d\hat{P}(t)}{d(t)}$$

$$\underline{v}(t) = \dot{x}_1(t)\,\underline{e}_1 + \dot{x}_2(t)\,\underline{e}_2 + \dot{x}_3(t)\,\underline{e}_3$$

$$P = \hat{P}(\hat{s}(t))$$

$$\underline{v}(t) = \frac{d\hat{P}(s)}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\hat{P}(s)}{ds} \cdot \dot{s}$$



$$\frac{d\hat{P}(s)}{ds} = \lim_{h \to 0} \frac{\hat{P}(s+h) - \hat{P}(s)}{h}$$ al tendere di $h \to 0$

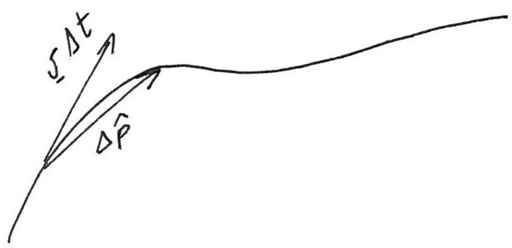
il vettore $\Delta\hat{P}$ tende ad essere tangente alla curva con il senso della stessa.

Inoltre il suo modulo sarà pari a 1 essendo la corda un infinitesimo dello stesso ordine dell'arco.

$\underline{v}(t) = \dot{s}\,\underline{t}$.

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = \underline{v}$$

$d\hat{P} = \underline{v}\, dt$ $\qquad$ $d\hat{P}$ è detto spostamento elementare



$\Delta\hat{P} \simeq \underline{v}\,\Delta t$ in un intorno molto piccolo di t.

se $\underline{v}$ è costante il moto è rettilineo uniforme.

*) accelerazione

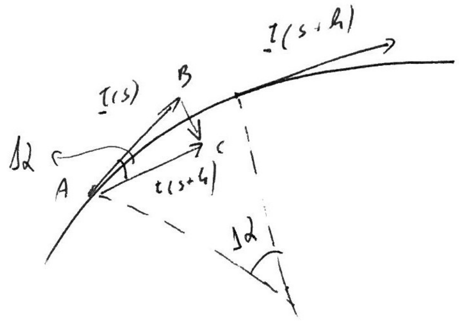
$$\underline{a}(t) \stackrel{def}{=} \frac{d\,\underline{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\hat{P}(t)}{dt^2}$$

$$\underline{a}(t) = \ddot{x}_1\,\underline{e}_1 + \ddot{x}_2\,\underline{e}_2 + \ddot{x}_3\,\underline{e}_3$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s}\,\underline{t})}{dt} = \frac{d\dot{s}}{dt}\,\underline{t} + \frac{d\underline{t}}{dt}\,\dot{s} = \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s}\,\frac{d\underline{t}}{dt} =$$

$$= \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s}\,\frac{d\underline{t}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\,\underline{t} + \dot{s}^2\,\frac{d\underline{t}}{ds}$$

prendiamo in considerazione il termine $\frac{d\underline{t}}{ds} = \lim_{h\to 0} \frac{\underline{t}(s+h) - \underline{t}(s)}{h}$



1) poiche $t(s) = t(s+h)$ il triangolo ABC è isoscele, al tendere di $\Delta\alpha \to 0$ l'angolo $A\hat{B}C \to \frac{\pi}{2}$ il vettore $\frac{d\underline{t}}{ds}$ è normale al vettore $\underline{t}(s)$ con verso orientato all'interno della curva

Considero ora $\lim_{h \to 0} \frac{|\underline{t}(s+h) - \underline{t}(s)|}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{|\Delta \underline{t}|}{|h|}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{|\Delta \underline{t}|}{\Delta \alpha} \cdot \frac{\Delta \alpha}{|h|}$

$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta \alpha}{|h|} = \frac{1}{\rho}$ ρ: raggio di curvatura = raggio del cerchio osculatore

$\lim_{h \to 0} \frac{|\Delta \underline{t}|}{\Delta \alpha} = \lim_{\Delta \alpha \to 0} \frac{2t \operatorname{sen} \frac{\Delta \alpha}{2}}{\Delta \alpha} = \lim_{\Delta \alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{\Delta \alpha}{2}}{\frac{\Delta \alpha}{2}} = 1$

Pertanto il modulo del vettore $\frac{d\underline{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}$

$\frac{d\underline{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \underline{n}$

$\underline{a} = \ddot{s} \, \underline{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \underline{n}$ la I componente = accelerazione tangenziale

II componente = " " normale o centripeta.

*) Se l'accelerazione Tangenziale è nulla

$\ddot{s}=0 \Rightarrow \dot{s}$ è costante il moto è uniforme su traettoria varia.

Se è nulla l'accelerazione centripeta $\frac{\dot{s}^2}{\rho}\underline{n}=0$ o si ha

un istante di arresto oppure $\rho \to \infty$ la traettoria è

rettilinea.

Se $\underline{a}=\underline{a}_n+\underline{a}_t=0$ il moto è rettilineo uniforme.

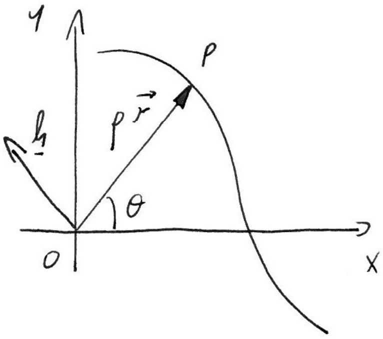
Il moto si dice <u>accelerato</u> se $\frac{d\dot{s}}{dt}>0$

equivalente a $\frac{d\dot{s}^2}{dt}=2\dot{s}\ddot{s}>0$ $\left\{\begin{array}{l}\dot{s}\\ \ddot{s}\end{array}\right.$ hanno lo stesso segno

Il moto si dice <u>ritardato</u> se $\frac{d\dot{s}}{dt}<0$ $\left\{\begin{array}{l}\dot{s}\\ \ddot{s}\end{array}\right.$ hanno segni opposti.

*) Moti piani

Consideriamo il moto di un punto lungo un piano e introduciamo un nuovo sistema di coordinate dette polari (ρ, θ)



θ = anomalie = $\widehat{e_1 (P-O)}$

$\rho = \overline{OP}$

Il moto di un punto è ben descritto date le funzioni scalari $\rho = \hat{\rho}(t) \qquad \theta = \hat{\theta}(t)$

Eliminando la variabile t $\rho = \hat{\rho}(\theta)$ fornisce l'equazione della traettoria del punto P.

$$(P-O) = \rho \vec{r} \qquad (\vec{r} = \text{versore}\,(P-O))$$

$$\underline{v} = \frac{d\,(P-O)}{dt} = \frac{d\,\rho\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\vec{r} + \rho\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\vec{r} + \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \dot{\rho}\vec{r} + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{r}}{d\theta}$$

Consideriamo il versore $\underline{h}$ ortogonale a $\underline{r}$

$$\begin{cases} \underline{r} = \cos\theta\, \underline{l}_1 + \operatorname{sen}\theta\, \underline{l}_2 \\ \underline{h} = -\operatorname{sen}\theta\, \underline{l}_1 + \cos\theta\, \underline{l}_2 \end{cases}$$

si verifica facilmente che $\dfrac{d\vec{r}}{d\theta} = -\operatorname{sen}\theta\, l_1 + \cos\theta\, l_2 = \underline{h}$

Possiamo pertanto scrivere $\underline{v} = \dot{\rho}\,\vec{r} + \rho\dot{\theta}\,\underline{h}$

La velocità di un punto P espressa in coordinate polari

si può scomporre in due termini: $\begin{cases} \underline{v}_r = \dot{\rho}\,\vec{r} & \text{velocità radiale} \\ \underline{v}_\theta = \rho\dot{\theta}\,\underline{h} & \text{velocità trasversa.} \end{cases}$

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2}$$

L'espressione dell'accelerazione in coordinate polari si ottiene derivando la velocità rispetto al tempo

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \ddot{\rho}\,\vec{r} + \dot{\rho}\dot{\theta}\,\frac{d\vec{r}}{d\theta} + \dot{\rho}\dot{\theta}\,\vec{h} + \rho\ddot{\theta}\,\vec{h} + \rho\dot{\theta}^2\,\frac{d\vec{h}}{d\theta}$$

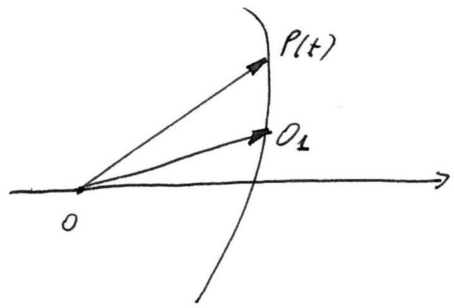
osservando che $\frac{d\vec{h}}{d\theta} = -\vec{r}$ otteniamo

$$\underline{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{r} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\,\vec{h}$$

il primo termine è detto accelerazione radiale $\underline{a}_r$, il secondo termine che può essere scritto anche $\underline{a}_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\,\vec{h}$ è detto accelerazione trasversa.

Velocità areale o areolare

Consideriamo un generico moto piano



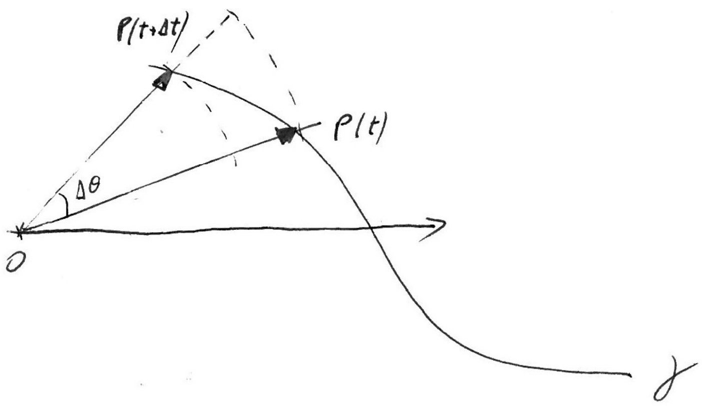
Fissato un punto O_1 sulla traiettoria indico con $A(t)$ l'area spazzata dal vettore $P-O$.

Def

Velocità areolare $\dot{A}$

Chiamiamo velocità areolare $\dot{A}$ del punto P rispetto al polo O la derivata temporale della funzione $A(t)$.

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A(t+\Delta t) - A(t)}{\Delta t}$$



$$\frac{1}{2}\rho^2(t+\Delta t)\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \leq \frac{\Delta A}{\Delta t} \leq \frac{1}{2}\rho^2(t)\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

passando al limite

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\rho^2(t)\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2(t)\dot{\theta}$$

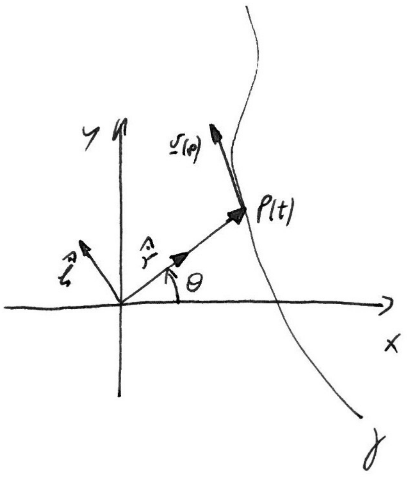
*) $(P, \underline{v}_P)$

$$\underline{M}_o = (P-O)\times\underline{v}_P(t) = \rho\vec{r}\times(\dot{\rho}\vec{r}+\rho\dot{\theta}\vec{h}) = \rho^2\dot{\theta}\,\vec{r}\times\vec{h} =$$

$$= \rho^2\dot{\theta}\,\underline{e}_3 = 2\dot{A}\,\underline{e}_3$$ $\underline{e}_3$ = versore normale al piano del moto

$$\begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ x_1 & x_2 & 0 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & 0 \end{vmatrix} = \underline{e}_3(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1)$$

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1).$$



$$\underline{v}_P = \dot{\rho}\,\underline{r} + \rho\dot{\theta}\,\underline{\ell}_2$$

$$\underline{a}_P = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\underline{r} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\,\underline{\ell}_2$$

$$A = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}$$

$$\vec{\ell}_3 = \vec{\ell}_1 \times \vec{\ell}_2 = \underline{r} \times \underline{\ell}_2$$

$$\dot{A}(t)\,\underline{e}_3 = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}\,\underline{e}_3$$

Moti centrali

Def.

Un moto è detto centrale se verifica la condizione:

Fissato $O \in \mathcal{E}_3$ $\quad \underline{a}_P(t) \parallel (P - O) \quad \forall\, t \in I \subseteq \mathbb{R}^+$

Il punto O è detto centro del moto.

Teorema

Ogni moto centrale è piano e la velocità areolare rispetto al centro del moto è costante. (vale il viceversa).

1) Consideriamo un moto centrale

$$(P-O) \times \underline{a}_P(t) = 0$$

$$\|$$

$$\frac{d}{dt}\left[(P-O) \times \underline{v}_P(t)\right] = 0$$

$$(P-O) \times \underline{v}_P(t) = (\text{costante})\ \underline{K}$$

il moto si svolge in un piano ortogonale a $\underline{K}$.

$$\underline{M}_O \quad (P(t), \underline{v}_P(t)) = \text{costante}$$

$$\underline{M}_O = \rho \underline{r} \times (\dot{\rho} \underline{r} + \rho \dot{\theta} \underline{h}) = \rho^2 \dot{\theta}\, \underline{e}_3 = \underline{K}$$

$$\dot{A}\, \underline{e}_3 = \frac{1}{2} \underline{K} = \text{costante}.$$

$\rho^2 \dot{\theta} = \pm K$ a seconda che il moto avvenga nel verso delle θ crescenti o meno.

$K = 2\dot{A}$ è detta costante delle aree.

2) viceversa supponiamo che il moto abbia velocità areale costante allora è centrale pertanto piano.

$$a_\theta = \frac{d(\rho^2\dot{\theta})}{dt} = \frac{d(2\dot{A})}{dt} = 0$$

Oss

K = costante delle aree $= 0 \iff$ il moto è rettilineo.

1) $K = \rho^2\dot{\theta} = 0 \qquad \frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad \theta$ = costante (il moto è rettilineo)

2) il moto è rettilineo θ = costante $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = 0 \implies$ $K = 0$.

Pb) Conosciute la costante delle aree K e la traettorie $\rho = \rho(\theta)$ determinare il moto.

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = K$$

$$\rho^2 d\theta = K dt$$

$$\frac{1}{K}\int_0^\theta \rho^2 d\theta = t$$ ho determinato $t = t(\theta)$ la funzione che lega il tempo all'anomalia

$$\begin{cases} \rho = \hat{\rho}(\theta) \\ \theta = \hat{\theta}(t) \end{cases}$$ equazione del moto.

*) <u>Formule di Binet</u>

Permette di determinare l'equazione differenziale che lega l'accelerazione radiale con la traiettoria $\rho(\theta)$ conosciuta la costante delle aree.

$$\underline{a}_r = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\underline{r} \qquad \pm K = \rho^2\dot{\theta}$$

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \pm\frac{K}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta} = \mp K\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{d\rho}{d\theta} =$$

$$= \mp K\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{d\theta}\cdot\dot{\theta} = -\frac{K^2}{\rho^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

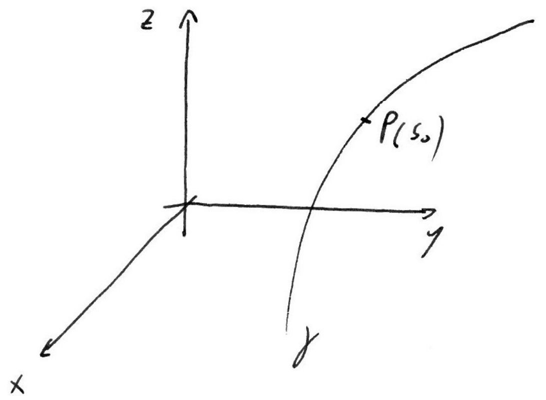
$$\rho^2\dot{\theta} = \pm K$$

$$\dot{\theta} = \pm\frac{K}{\rho^2}$$

$$\rho\dot{\theta}^2 = \cancel{\rho}\frac{K^2}{\rho^{\cancel{4}\,3}}$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\frac{K^2}{\rho^2}\left[\left(\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\right)\right]$$ Formule di Binet.

Moto uniforme



$\dot{s}_0$ = costante

(velocità scalare costante)

Per determinare l'equazione del moto risolvo l'equazione differenziale

$$\dot{s} = \dot{s}_0$$

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}_0$$

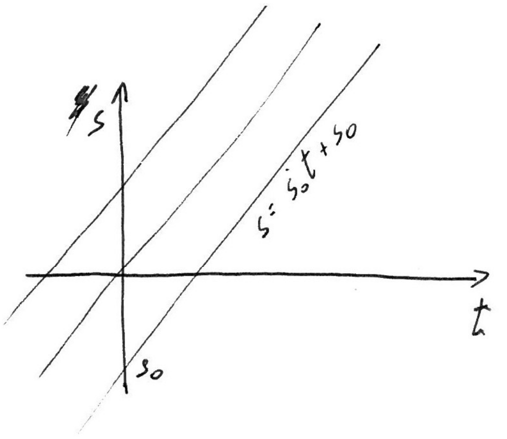
$ds = \dot{s}_0 \, dt$ integrando

$$s = \dot{s}_0 t + \text{costante}$$

la costante si determina dalle condizioni al contorno

$$s(0) = s_0$$

$$s(t) = \dot{s}_0 t + s_0$$

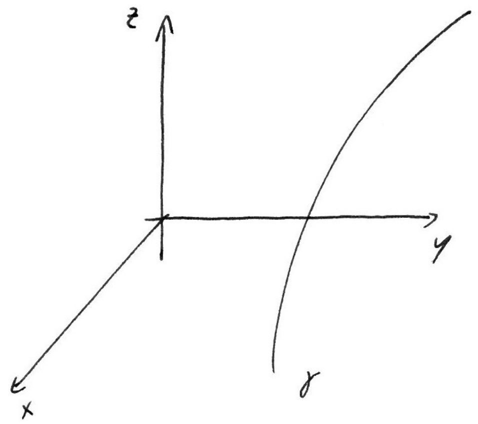


espressione scalare

I moti uniformi assegnate traiettoria e velocità scalare sono una semplice infinità

$$s(t) = \dot{s}_0 t + K.$$

*) Moto uniformemente vario



$\ddot{s}_0$ = costante
(accelerazione tangenziale costante).

L'equazione oraria si ottiene risolvendo l'equazione differenziale

$$\ddot{s} = \ddot{s}_0$$

$$\frac{d\dot{s}}{dt} = \ddot{s}_0 \text{ (costante)}$$

$d\dot{s} = \ddot{s}_0 \, dt$ integrando

$\dot{s} = \ddot{s}_0 t +$ costante ~~la~~ costante si determina dalle condizioni al contorno.

$$\dot{s}(t) = \ddot{s}_0 t + \dot{s}(0)$$

$$\frac{ds}{dt} = \ddot{s} t + \dot{s}(0)$$

$ds = (\ddot{s}_0 t + \dot{s}(0))\, dt$ integrando

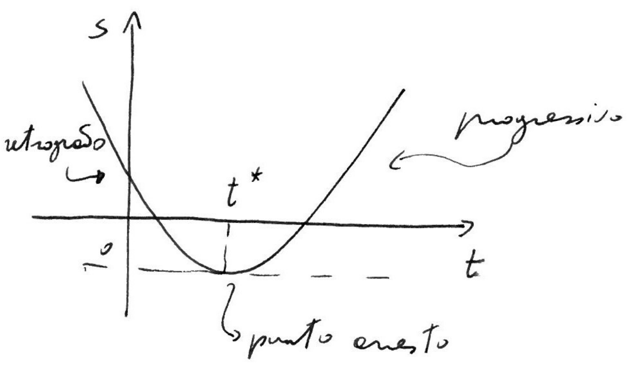
$s = \frac{1}{2}\ddot{s}_0 t^2 + \dot{s}_0 t +$ costante   dalle condizioni al contorno

$s(t) = \frac{1}{2}\ddot{s}_0 t^2 + \dot{s}_0 t + s_0$

I moti uniformemente vari sono ∞^2.

Uno e uno solo soddisfa le condizioni al contorno $\begin{cases} \dot{s}(0) = \dot{s}_0 \\ s(0) = s_0 \end{cases}$

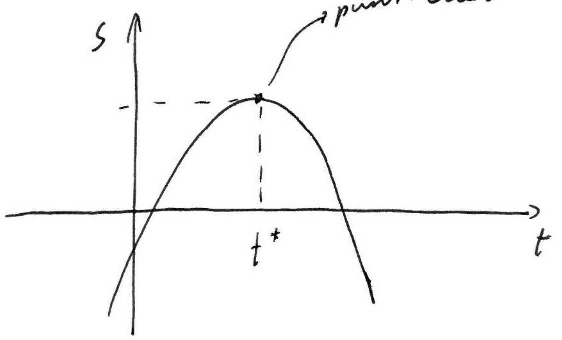
1) $\ddot{s} > 0 \qquad s(t) = \frac{1}{2}\ddot{s}_0 t^2 + \dot{s}_0 t + s_0$



$t < t^*$ moto retrogrado

$t > t^*$ moto progressivo

2) $\ddot{s} < 0$



$t < t^*$ il moto è progressivo

$t > t^*$ il moto è retrogrado

$$\dot{s}(t^*) = \ddot{s}_0 t^* + \dot{s}_0 = 0$$

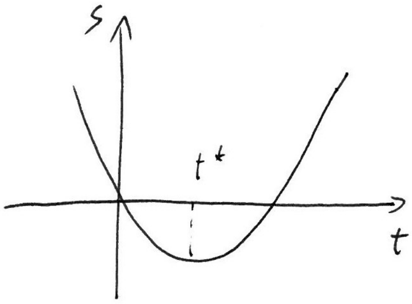
$$t^* = -\frac{\dot{s}_0}{\ddot{s}_0}$$

*) Il moto si dice accelerato se $\dot{s}\ddot{s} > 0$

$$\dot{s}(t) = \ddot{s}_0 t + \dot{s}_0 \qquad t^* = -\frac{\dot{s}_0}{\ddot{s}_0}$$

$$\dot{s}(t) = \ddot{s}_0 t - \ddot{s}_0 t^* = \ddot{s}_0 (t - t^*)$$

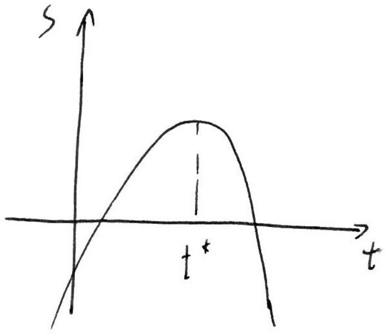
$$\dot{s}\ddot{s} = \ddot{s}_0^2 (t - t^*) > 0 \iff t > t^*$$



$t < t^*$ moto retrogrado ritardato

$t = t^*$ punto arresto

$t > t^*$ progressivo accelerato.



$t < t^*$ moto progressivo ritardato

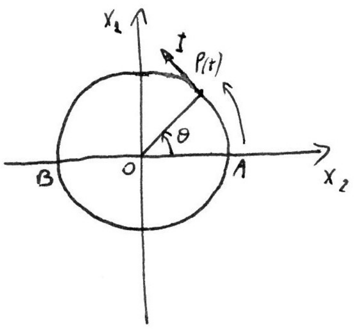
$t = t^*$ punto arresto

$t > t^*$ moto regressivo accelerato.

Moto circolare

Def.

Il moto di un punto P è detto circolare se la sua traiettoria è una circonferenza o un suo arco, quando inoltre la velocità scalare $\dot{s}$ è costante il moto è detto circolare ed uniforme.



$$\underline{v} = \dot{s}\,\underline{t}$$

$$\underline{a} = \ddot{s}\,\underline{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\,\underline{n}$$

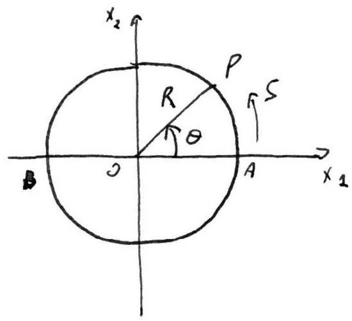
*) **Def**

Un punto P si muove di moto periodico con periodo T se l'equazione oraria $s = \hat{s}(t)$ è periodica di periodo T cioè

$$\hat{s}(t+T) = \hat{s}(t).$$

*) Il moto circolare uniforme, se $\dot{s} = v_0$ si ha che

$$T = \frac{2\pi R}{v_0}$$



$\dot{s} = v_0$ costante

$$s = v_0 t + s_0$$

$$\underline{a} = \frac{\dot{s}^2}{R}\underline{n} = -\frac{\dot{s}^2}{R^2}(P-O)$$

$$s = R\theta \implies \begin{cases} \dot{s} = R\dot{\theta} = R\omega \\ \ddot{s} = R\ddot{\theta} \end{cases}$$

$\omega = \dot{\theta}$ = velocità angolare

Se v_0 costante allora anche $\dot{\theta} = \omega$ è costante $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$

$$s = R\dot{\theta}_0 t + R\theta_0$$

$\underline{a} = -\omega_0^2 (P-O)$ il moto circolare ed uniforme è un moto centrale.

$\dot{\theta} = \dot{\theta}_0$ = costante

$$\theta(t) = \dot{\theta}_0 t + \theta_0$$

La funzione $\theta(t)$ è periodica di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi R}{v_0}$

L'inverso del periodo $\nu = \frac{\omega_0}{2\pi}$ è detta frequenza.

*) È possibile definire una velocità angolare vettoriale

$\vec{\omega} = \dot{\theta}\, \underline{b}$ $\qquad \underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}$

allora

$\underline{v} = \underline{\omega} \times (P - O)$

Def

Un moto rettilineo è chiamato oscillatorio armonico se

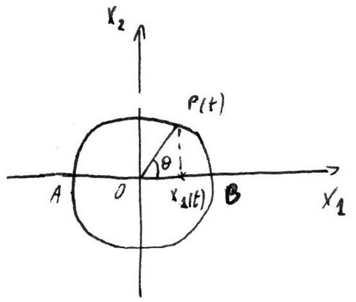
l'equazione oraria è data da:

$s(t) = C \cos(\omega t + \gamma)$ $\qquad C$ = ampiezza oscillazione

ω = pulsazione

γ = fase iniziale

*) Consideriamo un moto circolare uniforme e sia $x_1(t)$ la proiezione del punto P sull'asse x_1



$$x_1(t) = R\cos\theta = R\cos(\dot{\theta}_0 t + \theta_0)$$ il moto è oscillatorio armonico.

$$\dot{x}_1(t) = -\dot{\theta} R \,\text{sen}\,\theta = -R\dot{\theta}_0 \,\text{sen}(\dot{\theta}_0 t + \theta_0)$$

$$\ddot{x}_1(t) = -\dot{\theta}^2 R\cos\theta = -R\dot{\theta}_0^2 \cos(\dot{\theta}_0 t + \theta_0) = -\dot{\theta}_0^2 x_1$$

*) Se $x_1(t)$ descrive il tratto $\overline{AB}$ si dice che ha compiuto una oscillazione semplice.

Se $x_1(t)$ percorre due volte il diametro AB tornando in A si dice che ha compiuto un'oscillazione completa.

La velocità è massima nello O mentre in A e in B vi sono punti d'arresto.

L'accelerazione è nulla nello O è massima in A e in B.

Considero due moti armonici M e M' aventi la stessa pulsazione $\dot{\theta}_0$ ma diversi per la fase iniziale θ_0 e θ_0'.

Considero $|\Delta\theta| = |\theta_0' - \theta_0|$

se $|\Delta\theta| = 0$ M e M' sono in accordo di fase

se $|\Delta\theta| \neq 0$ M e M' hanno un ritardo di fase di $|\Delta\theta|$ radianti.

Il ritardo di fase può essere misurato anche in secondi

$\Delta\theta = \omega\Delta t$ $\qquad |\Delta t| = \dfrac{|\Delta\theta|}{\omega} = \dfrac{|\Delta\theta| T}{2\pi}$

Nel moto circolare uniforme

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\theta = R\cos(\dot{\theta}_0 t + \theta_0) \\ x_2 = R\sin\theta = R\sin(\dot{\theta}_0 t + \theta_0) = R\cos(\dot{\theta}_0 t + \theta_0 - \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Se il moto di T è circolare uniforme i moti armonici rispettivi sono in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ rad. cioè di $\frac{1}{4}T$

Teorema

Ogni moto armonico di pulsazione ω (con ampiezza e fase arbitrarie) deve soddisfare l'equazione differenziale

$$\ddot{s} = -\omega^2 s \qquad \text{e viceversa.}$$

*) abbiamo dimostrato che per un moto armonico di pulsazione ω $\ddot{s} = -\omega^2 s$, facciamo vedere che vale il viceversa.

Risolviamo l'equazione differenziale $\ddot{s} = -\omega^2 s$

l'integrale generale è combinazione lineare di due soluzioni particolari essendo l'equazione differenziale di secondo ordine.

$$X_1(t) = a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}$$

dalle formule di Eulero

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i \operatorname{sen} \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i \operatorname{sen} \omega t$$

otteniamo

$$\cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

L'integrale generale può essere posto nella forma

$$x_2(t) = c_1 \cos\omega t + c_2 \operatorname{sen}\omega t$$

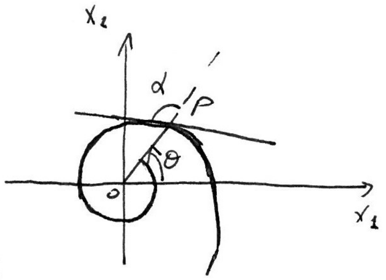
ponendo $\begin{cases} c_1 = A\cos\alpha \\ c_2 = -A\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} c_1^2 + c_2^2 = A^2 \\ \frac{c_2}{c_1} = -\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$

$$x_2(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

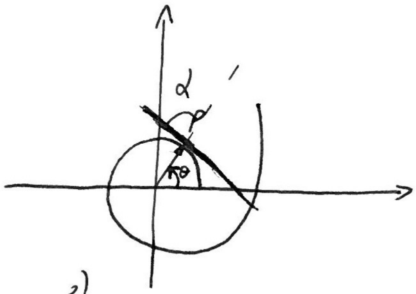
Tutte le soluzioni sono moti armonici di pulsazione ω.

*) Oscillazione armonica smorzata

$\rho = \bar{\rho}\, e^{\theta \cot g \alpha}$ equazione parametrica della spirale logaritmica.



1)



2)

$\rho = \overline{PO}$

$\theta = (P-O)\widehat{\ } x_1$

$\alpha = (P-O)\widehat{\ } \underline{t}$ = costante

Se α ottuso $\Rightarrow \cot g \alpha < 0$ pertanto $\rho \to 0$ quando $\theta \to +\infty$ (1)

Se α acuto $\Rightarrow \cot g \alpha > 0$ pertanto $\rho \to 0$ quando $\theta \to -\infty$ (2)

*) <u>Def</u>

Un moto si dice armonico smorzato se soddisfa l'equazione

$s = A e^{-\tau t} \cos(\omega t + \gamma)$ τ = costante di smorzamento.

<u>Oss</u>

Il moto armonico smorzato non è periodico.

*) Sia P_1 la proiezione del punto $P(\theta)$ della spirale logaritmica condotta su x_1, se $\theta(t)$ è una funzione lineare il moto di P_1 è armonico smorzato.

$\theta = \dot{\theta}_0 t + \theta_0 = \omega t + \theta_0$

$x_1 = \rho \cos\theta = \bar{\rho} e^{(\omega t + \theta_0)\cot g \alpha} \cos(\omega t + \theta_0) =$

$= \underbrace{\bar{\rho} e^{\theta_0 \cot g \alpha}}_{K} e^{\omega t \cot g \alpha} \cos(\omega t + \theta_0)$

$-\omega \cot g \alpha = h > 0$

$x_1 = K e^{-h t} \cos(\omega t + \theta_0)$

$$x_1(t) = K e^{-ht}\cos(\omega t+\theta_0)$$

$$\dot{x}_1(t) = -Kh e^{-ht}\cos(\omega t+\theta_0) - K\omega e^{-ht}\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta_0) =$$

$$= -h x_1(t) - K\omega e^{-ht}\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta_0)$$

$$\ddot{x}_1(t) = -h\dot{x}_1(t) - K\omega^2 e^{-ht}\cos(\omega t+\theta_0) + Kh\omega e^{-ht}\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta_0) =$$

$$= -h\dot{x}_1(t) - \omega^2 x_1(t) + Kh\omega e^{-ht}\,\mathrm{sen}(\omega t+\theta_0) =$$

$$= -h\dot{x}_1(t) - \omega^2 x_1(t) - h^2 x_1(t) - h\dot{x}_1(t) =$$

$$\ddot{x}_1 + 2h\dot{x}_1 + (\omega^2+h^2)x_1 = 0 \qquad (*)$$

Ogni moto armonico smorzato deve soddisfare l'equazione differenziale (*). Viceversa l'insieme delle soluzioni di (*) rappresenta i moti armonici di pulsazione ω.

Determino le soluzioni dell'equazione differenziale

$$\ddot{x}_1 + 2h\dot{x}_1 + (h^2+\omega^2)x_1 = 0$$

$$x = e^{\lambda t} \quad \text{(soluzione particolare)}$$

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$$
$$\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2h\lambda e^{\lambda t} + (h^2+\omega^2)e^{\lambda t} = 0 \quad \forall t$$

$$e^{\lambda t}\left[\lambda^2 + 2h\lambda + h^2 + \omega^2\right] = 0$$

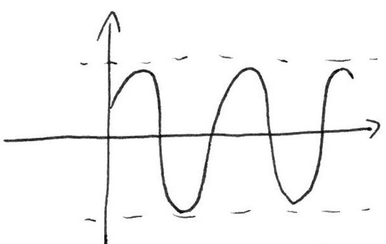
$$\lambda^2 + 2h\lambda + (h^2+\omega^2) = 0$$

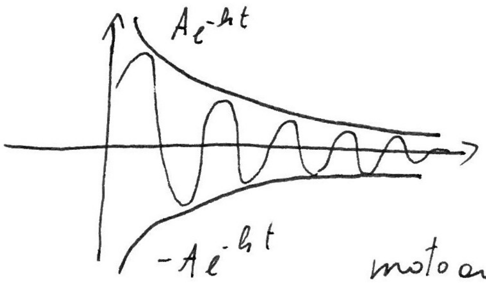
$$\lambda = -h \pm \sqrt{\cancel{h^2} - \omega^2 - \cancel{h^2}}$$

$$\lambda = -h \pm i\omega$$

integrale generale $\quad x = a_1 e^{(-h+i\omega)t} + a_2 e^{(-h-i\omega)t}$

$$x = e^{-ht}\left(a_1 e^{i\omega t} + a_2 e^{-i\omega t}\right) = Ae^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0)$$


moto armonico



moto armonico smorzato.

Moti rigidi

Un corpo $\mathcal{B}$ si dice rigido se comunque presi due punti $X_i, X_j \in \mathcal{B}$ e due localizzazioni P_r, P_s risulta che

$$d\left(P_r(X_i), P_r(X_j)\right) = d\left(P_s(X_i), P_s(X_j)\right)$$

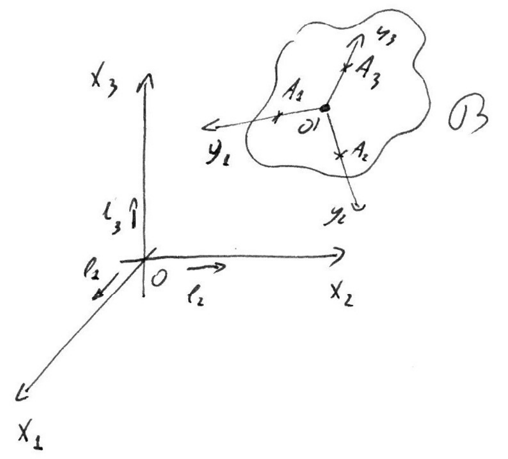
Un moto si dice rigido se comunque fissati due punti $r, s \in \mathcal{B}$ risulta che $d\left(P_r(t), P_s(t)\right) = \text{costante}$

P_r = localizzazione del punto r

P_s = localizzazione del punto s.

Proposizione

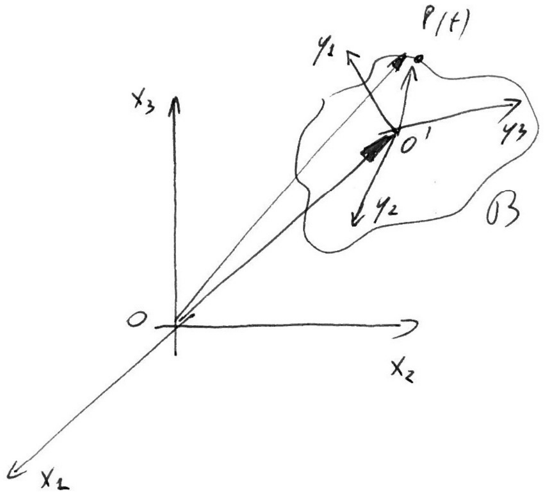
La posizione di ogni punto del corpo rigido risulta individuata una volta nota la configurazione della terna (O', y_1, y_2, y_3) (ortonormale destra) solidale con il corpo $\mathcal{B}$.



La terna (O', y_1, y_2, y_3) ortonormale destra è solidale con il corpo $\mathcal{B}$ se comunque scelto un punto $y \in \mathcal{B}$ le sue coordinate rispetto a (O', y_1, y_2, y_3) non variano con il tempo.

$\vec{J}_{i\,[i=1,2,3]}$ = versori direzione delle rette y_i $(i=1,2,3)$

$$\begin{cases} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \\ \vec{J}_i \cdot \vec{J}_j = \delta_{ij} \end{cases}$$



$$(P-O)=(P-O')+(O'-O)$$

$$x_1(t)\,\underline{e}_1+x_2(t)\,\underline{e}_2+x_3(t)\,\underline{e}_3=y_1\,\vec{j}_1(t)+y_2\,\vec{j}_2(t)+y_3\,\vec{j}_3(t)+x_1^{(O')}(t)\,\underline{e}_1+$$
$$+x_2^{(O')}(t)\,\underline{e}_2+x_3^{(O')}(t)\,\underline{e}_3$$

(y_1,y_2,y_3) = coordinate del punto P rispetto alla terna $(O';y_1,y_2,y_3)$.

moltiplicando per $\underline{e}_1$

$$x_1(t)=y_1\,\vec{j}_1(t)\,\vec{e}_1(t)+y_2\,\vec{j}_2(t)\,\vec{e}_1(t)+y_3\,\vec{j}_3(t)\,\vec{e}_1(t)+x_1^{(O')}(t)$$

Chiamo $\alpha_{hk}=\vec{j}_k\,\vec{e}_h$ (coseno direttore dell'asse y_k su x_h)

$$x_h(t)=y_i\,\alpha_{hi}+x_h^{(O')}(t)$$

Se indico con A la matrice $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ dei coseni direttori

così definite

$$A_{ij} = \alpha_{ij}$$

$$X_p - X_{o'} = YA \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$ componenti di P rispetto a (O', y_1, y_2, y_3)

$$\left(\vec{X}_p - \vec{X}_{o'}(t)\right) = \sum_{h,k} \alpha_{hk}(t)\, \underline{e}_h \otimes \underline{e}_k (\vec{y}) = \sum_{h,k} (\alpha_{hk}\, \vec{y}\, \underline{e}_k)\, \underline{e}_h =$$

$$= \sum_{h,k} \alpha_{hk}\, y_k\, \underline{e}_h$$

La matrice $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = A$ rappresenta la matrice cambiamento di base

da $\mathcal{B}' = \{O', y_1, y_2, y_3\}$ e $\mathcal{B} = \{O, x_1, x_2, x_3\}$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{pmatrix} \qquad \alpha_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{J}_j$$

L'i-esimo vettore riga della matrice A rappresenta le coordinate del...

versore $\vec{e}_i$ scritto rispetto alla terna $\{\vec{J}_1, \vec{J}_2, \vec{J}_3\}$

l'i-esimo vettore colonna rappresenta le coordinate del versore $\vec{\xi}_i$ scritto rispetto alla terna $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

Oss

La matrice cambiamento di base tra due basi ortonormali è una matrice unitaria $\quad {}^tA \cdot A = A\,{}^tA = Id \quad$ cioè $\quad {}^tA = A^{-1}$

$$({}^tA \cdot A)_{ij} = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih}\, \alpha_{jh}$$

$\sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih}\, \alpha_{jh}$ è il prodotto scalare standard dei vettori riga A_i, A_j

nel nostro caso $\quad \sum_{h=1}^{3} \alpha_{ih}\, \alpha_{jh} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \qquad \alpha_{ih}\, \alpha_{jh} = \underline{e}_i \cdot \underline{\xi}_h \; \underline{e}_j \cdot \underline{\xi}_h = \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j$

$$({}^tA \cdot A)_{ij} = \delta_{ij} = Id \, .$$

*) $\operatorname{Det} A = \operatorname{Det} {}^tA = \operatorname{Det} A^{-1} = \dfrac{1}{\operatorname{Det} A} \qquad$ se A è unitaria $\implies \operatorname{Det} A = \pm 1$

Se A_i, A_j sono i vettori colonna i-esimo e j-esimo $\quad A_i \cdot A_j = \delta_{ij}$

Se A_i, A_j sono i vettori riga $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ " $\quad$ "

*) Il moto di un corpo rigido è determinato dall'equazione

$$x_h(t) = c_h(t) + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{hk}(t)\, y_k \qquad P=(y_1,y_2,y_3) \text{ in } \{O', \vec{J}_1, \vec{J}_2, \vec{J}_3\}$$

$$P=(x_1,x_2,x_3) \text{ in } \{O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$$

$$(O'-O) = (c_1,c_2,c_3) \text{ in } \{O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$$

Per determinare univocamente il moto rigido di un corpo B occorrono i valori dei 9 coseni direttori al variare di t e le tre coordinate di $(O'-O)$ in $\{O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$

Ricordando però che $\sum_n \alpha_{in}\alpha_{jn} = \delta_{ij}$ fornisce sei equazioni scalari di tipo quadratico concludiamo che bastano 6 funzioni indipendenti per determinare univocamente il moto rigido.

*) Moto traslatorio

Def

Il moto di un corpo si dice traslatorio se

$$\vec{P}(t) - \vec{Q}(t) = \text{costante vettoriale} = \vec{P}(t_0) - \vec{Q}(t_0) \quad \text{al}$$

variare di P, Q.

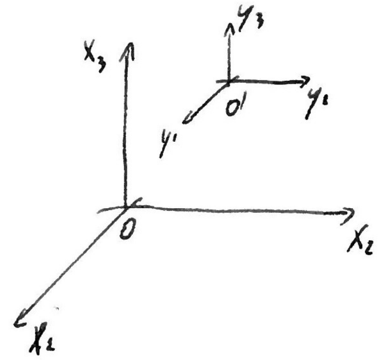
Se in un moto traslatorio conosco $P(t_0)$, $Q(t_0)$ e la traiettoria del punto P, è possibile ricavare la traiettoria γ' del punto Q.

La posizione del punto Q all'istante t $\vec{Q}(t)$ sarà infatti pari a $\vec{P}(t) + (Q(t_0) - P(t_0)) = \vec{P}(t) + \underline{u}$.

*) In un moto traslatorio i versori $\vec{J}_1, \vec{J}_2, \vec{J}_3$ della terna solidale al corpo $\mathcal{B}$ sono costanti.

Consideriamo il caso in cui gli assi y_1, y_2, y_3 siano paralleli rispettivamente a x_1, x_2, x_3

$$x_h(t) = c_h(t) + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{hk}^{(t)} y_k$$



$$\begin{cases} \alpha_{ii} = 1 \\ \alpha_{ij} = 0 \quad i \neq j \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_d$$

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1(t) + y_1 \\ x_2(t) = c_2(t) + y_2 \\ x_3(t) = c_3(t) + y_3 \end{cases}$$

Un moto traslatorio è univocamente determinato se si conoscono tre parametri funzioni del tempo t.

Derivando rispetto al tempo otteniamo:

$$\begin{cases} v_1(t) = v_1^{(O')}(t) \\ v_2(t) = v_2^{(O')}(t) \\ v_3(t) = v_3^{(O')}(t) \end{cases}$$

cioè

$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}(t)$ oppure $\underline{v}_Q(t) = \underline{v}_{O'}(t)$

*)

In un moto traslatorio la velocità di ciascun punto del corpo varia solo al variare del tempo, non della posizione.

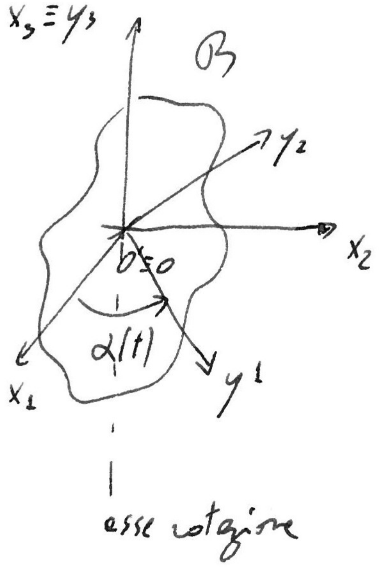
*) Se la velocità $\underline{v}$ è costante anche nel tempo il moto è uniforme.

Moto rotatorio

Un moto di un corpo $\mathcal{B}$ rispetto ad un sistema di riferimento $\{O, x_1, x_2, x_3\}$ si dice rotatorio se due punti del corpo $\mathcal{B}$ restano fissi. Poiché il corpo $\mathcal{B}$ è rigido ogni punto dell'asse passante per O e O' è fisso. Tale asse è detto di rotazione.

*) Il moto rotatorio di un corpo rigido è determinato da una sola funzione temporale $\alpha(t)$.

Scegliamo le terne $\{O, x_1, x_2, x_3\}$ e $\{O', y_1, y_2, y_3\}$ come in figura



$$X_h = C_h + \sum_{k=1}^{3} \alpha_{hk}\, y_k \qquad C_h = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

$$X_h = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{hk}(t)\, y_k$$

$\underline{\alpha_{11}} = \cos \widehat{x_1 y_1} = \cos\alpha$; $\underline{\alpha_{12}} = \cos \widehat{x_1 y_2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$; $\underline{\alpha_{13}} = \cos \widehat{x_1 y_3} = 0$

$\underline{\alpha_{21}} = \cos \widehat{x_2 y_1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$; $\underline{\alpha_{22}} = \cos \widehat{x_2 y_2} = \cos\alpha$; $\underline{\alpha_{23}} = \cos \widehat{x_2 y_3} = 0$

$\underline{\alpha_{31}} = \cos \widehat{x_3 y_1} = 0$; $\underline{\alpha_{32}} = \cos \widehat{x_3 y_2} = 0$; $\underline{\alpha_{33}} = \cos \widehat{x_3 y_3} = 1$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\operatorname{sen}\alpha, & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha, & \cos\alpha, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1 \cos\alpha(t) - y_2 \operatorname{sen}\alpha(t) \\ x_2(t) = y_1 \operatorname{sen}\alpha(t) + y_2 \cos\alpha(t) \\ x_3(t) = y_3 \end{cases}$$

*) Il moto di un qualsiasi punto del corpo rigido in moto rotatorio è circolare.

Quadrando e sommando le prime due equazioni

$$\begin{cases} x_1^2(t) + x_2^2(t) = y_1^2 + y_2^2 = R^2 \\ x_3 = y_3 = \text{costante} \end{cases}$$

Tale equazione, intersezione di un cilindro con un piano ortogonale alle generatrici dello stesso, è una circonferenza.

Derivando rispetto al tempo l'equazione oraria

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -y_1\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta - y_2\,\dot{\theta}\cos\theta = -\dot{\theta}\,x_2 \\ \dot{x}_2(t) = y_1\dot{\theta}\cos\theta - y_2\,\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta = \dot{\theta}\,x_1 \\ \dot{x}_3(t) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{v}_P(t) = \dot{x}_1\,\underline{e}_1 + \dot{x}_2\,\underline{e}_2 + \cancel{\dot{x}_3\,\underline{e}_3}$$

*) Nel moto rotatorio la velocità di ogni punto è ortogonale all'asse di rotazione.

$$\underline{v}_P(t) = -\dot{\theta}\,x_2\,\underline{e}_1 + \dot{\theta}\,x_1\,\underline{e}_2 = \dot{\theta}\left[x_1\,\underline{e}_2 - x_2\,\underline{e}_1\right]$$

osservando che

$$\begin{cases} \underline{e}_1 = -\underline{e}_3 \times \underline{e}_2 \\ \underline{e}_2 = \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 \end{cases}$$

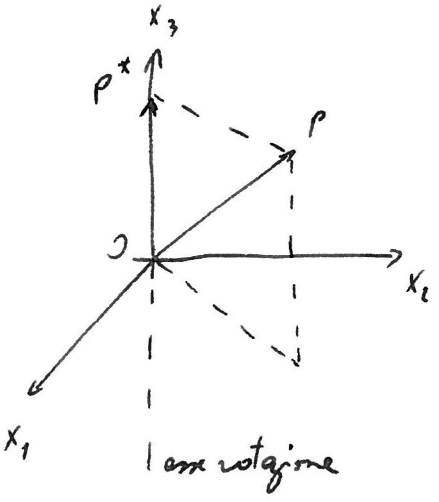
$$\underline{v}_P(t) = \dot{\theta}\,\underline{e}_3 \times \left(x_1\,\underline{e}_1 + x_2\,\underline{e}_2\right)$$

$\dot{\theta}\,\underline{e}_3 = \dot{\theta}\,\underline{\varsigma}_3 = \underline{\omega}(t)$ è detta velocità angolare

Se $\underline{\omega}$ non varia con il tempo il moto è uniforme.

$$\underline{v}_P(t) = \underline{\omega}(t) \times (P - P^*) = \underline{\omega}(t) \times (P - O)$$

P^* = proiezione di P sull'asse di rotazione.



$$\underline{v}_P(t) = \underline{\omega}(t) \times \left[(P - O) - (P^* - O) \right] = \underline{\omega}(t) \times (P - O)$$

$$\underline{v}_P(t) = -M_P \quad (O, \underline{\omega})$$

$$\underline{v}_P(t) = \dot{s}\,\underline{t} = R\dot{\theta}\,\underline{T} \qquad R = \overline{PP^*}$$

*) La velocità di ogni punto dell'asse di rotazione è nulla

$(P - P^*) = 0$.

Moto di rotazione

Def

Un moto si dice di rotazione se esiste una retta dello spazio solidale che mantiene sempre lo stesso orientamento.

*) 1 caso particolare (moto rototraslatorio)

Moto di un corpo rigido che si muove in modo che una retta solidale col corpo scorre su una retta fissa.

$$(O'-O) = (0, 0, c_3(t))$$

L'equazione del moto è

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1 \cos\theta - y_2 \operatorname{sen}\theta \\ x_2(t) = y_1 \operatorname{sen}\theta + y_2 \cos\theta \\ x_3(t) = y_3 + c_3(t) \end{cases}$$

La traiettoria di un generico punto P è una curva appartenente alla superficie di un cilindro avente come asse la retta a orientamento fisso e raggio $\overline{PP^*}$.

$$\underline{v}_P(t) = \dot{x}_1\,\underline{e}_1 + \dot{x}_2\,\underline{e}_2 + \dot{x}_3\,\underline{e}_3 = \underline{\omega} \times (P - P^*) + \underbrace{\dot{c}_3(t)\,\underline{e}_3}_{\underline{v}_{O'}(t)}$$

$$\underline{v}_P(t) = \underline{\omega} \times (P - P^*) + \underline{v}_{O'}(t)$$

<u>Oss</u>

Se un punto Q appartiene all'asse ad orientamento fisso

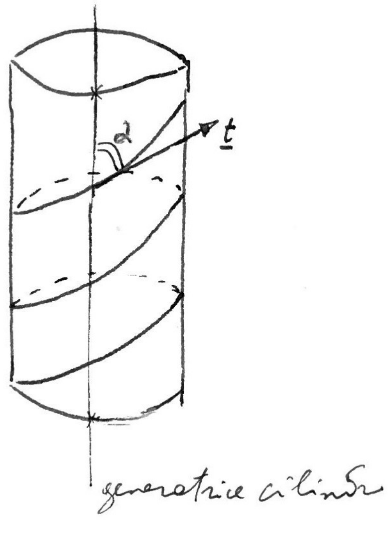
$Q - Q^* = 0$

$\underline{v}_Q(t) = \underline{v}_{O'}(t)$ *) ogni punto dell'asse a orientamento fisso ha la stessa velocità $\underline{I}(t)$.

2° caso particolare

Moto elicoidale.

Il moto di un punto P si dice elicoidale se avviene su una traettoria appartenente alla superficie di un cilindro avente come asse la retta ad orientamento fisso e raggio $\overline{PP^*}$ e tale che l'angolo formato dalla traettoria stessa con le generatrici del cilindro resti costante.



$$\underline{v}_P(t) = \underline{T}(t) + \underline{\omega} \times (P - P^*)$$

$$|v_P|^2 = T^2(t) + \omega^2 \overline{PP^*}^2$$

$$|\underline{v}_P \, \underline{e}_3| = T(t)$$

$$|\underline{v}_P| \, |\cos\alpha| = T(t) \qquad \cos\alpha = e$$

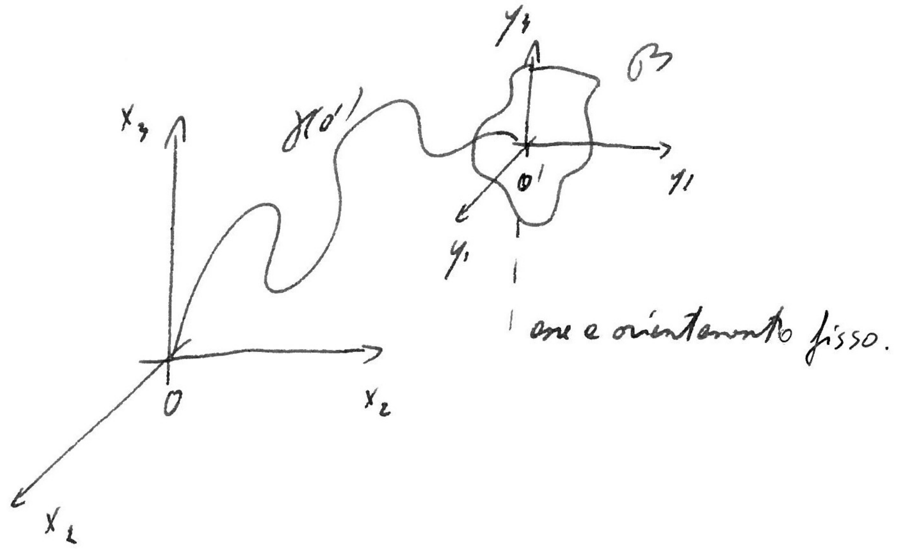
$$a = \frac{T(t)}{|v_P|} = \frac{T(t)}{\sqrt{T^2(t) + \omega^2 \overline{PP^*}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{T^2} \overline{PP^*}^2}}$$

essendo $\overline{PP^*}$ costante e sarà costante se e solo se $\frac{\omega}{T}$ costante

Il moto è elicoidale se e solo se $\frac{\omega}{T}$ = costante.

Il moto si dice elicoidale uniforme se $\begin{cases} \omega \text{ costante} \\ T \text{ costante.} \end{cases}$

*) In generale nel moto di rotazione la velocità di O' non è parallela a una retta fissa ma descrive una traiettoria nello spazio



L'equazione del moto diviene

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1 \cos\theta - y_2 \operatorname{sen}\theta + c_1(t) \\ x_2(t) = y_1 \operatorname{sen}\theta + y_2 \cos\theta + c_2(t) \\ x_3(t) = y_3 + c_3(t) \end{cases}$$

Derivando rispetto al tempo

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = -y_1\dot\theta \operatorname{sen}\theta - y_2\dot\theta\cos\theta + \dot c_1(t) \\ \dot x_2(t) = y_1\dot\theta\cos\theta - y_2\dot\theta\operatorname{sen}\theta + \dot c_2(t) \\ \dot x_3(t) = \dot c_3(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = -\dot\theta\left[x_2(t) - c_2(t)\right] + \dot c_1(t) \\ \dot x_2(t) = \dot\theta\left[x_1(t) - c_1(t)\right] + \dot c_2(t) \\ \dot x_3(t) = \dot c_3(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = -\dot\theta\, y_2(t) + \dot c_1(t) \\ \dot x_2(t) = \dot\theta\, y_1(t) + \dot c_2(t) \\ \dot x_3(t) = \dot c_3(t) \end{cases}$$

$$\underline{v}_P(t) = \dot\theta\left[y_1(t)\underline{e}_2 - y_2(t)\underline{e}_1\right] + \underbrace{\dot c_1(t)\underline{e}_1 + \dot c_2(t)\underline{e}_2 + \dot c_3(t)\underline{e}_3}_{\underline{v}_{O'}(t)}$$

$$\underline{v}_P(t) = \dot\theta\left[y_1(t)\underline{e}_3\times\underline{e}_1 + y_2(t)\underline{e}_3\times\underline{e}_2\right] + \underline{v}_{O'} =$$

$$= \dot\theta\,\underline{e}_3 \times \left[y_1(t)\underline{e}_1 + y_2(t)\underline{e}_2\right] + \underline{v}_{O'}$$

$$= \underline{\omega} \times (P - O') + \underline{v}_{O'}$$

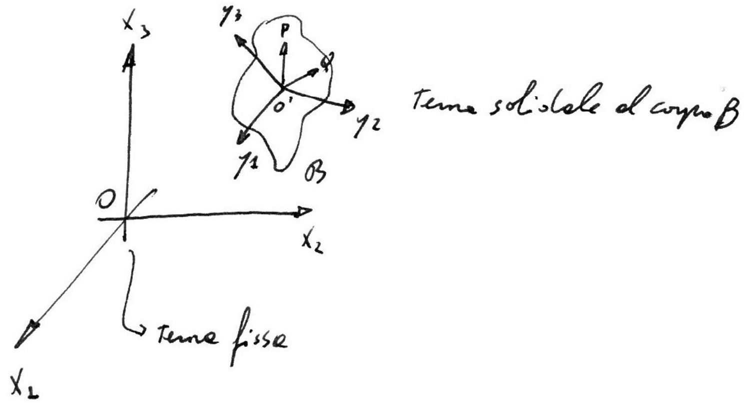
*) La velocità di un punto P in un moto rototraslatorio è nota se si conosce $\underline{\omega}$ e la velocità di un punto Q.

$$\underline{v}_Q(t) = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega}(t) \times (Q - O')$$

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega}(t) \times (P - O')$$

$$\underline{v}_P - \underline{v}_Q = \underline{\omega}(t) \times (P - Q)$$

Riassumendo



*/

Un moto si dice rigido se verifica la condizione $|P(t) - Q(t)| = \text{costante}$ al variare di P e $Q \in P_t(B) = \{\text{insieme delle localizzazioni del corpo } B\}$

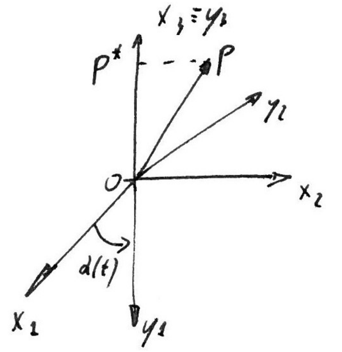
$$\underline{X}(t) = \underline{C}(t) + \underset{\sim}{A}(t)\,\underline{Y}$$

$$x_h(t) = c_h(t) + \sum_{i}^{3} \alpha_{hi}(t)\, y_i$$

$\underset{\sim}{A}^T = \underset{\sim}{A}^{-1}$; A è una matrice ortogonale $A_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{j}_j$ occorrono 6 parametri per descrivere il moto.

*/ Se $\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}(t)$ $\forall P \in P_t(B)$ allora il moto si dice traslatorio; se $\underline{v}_P$ è anche costante nel tempo il moto è traslatorio uniforme.

*) Un moto si dice rotatorio se esiste un asse del corpo B fisso rispetto alla terna $\{O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$



ogni punto del corpo B percorre una circonferenza di raggio PP^* o un suo arco.

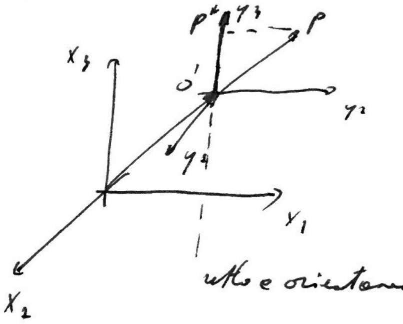
Basta un parametro α per descrivere il moto

$\underline{v}_P(t) = \underline{\omega} \times (P - P^*)$ $\qquad\qquad$ $\underline{\omega} = \dot{\alpha}(t)\, \underline{e}_3$

tutti i punti dell'asse hanno velocità nulla.

*) Un moto di rotazione soddisfa l'equazione del moto

$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P - O')$



Un caso particolare presente

$\underline{v}_{O'} \parallel \underline{\omega}$ allora la traiettoria

descritta da ogni punto è una superficie del cilindro di raggio $\overline{PP^*}$.

(moto rototraslatorio)

Se $\dfrac{\underline{\omega}}{T}$ = costante $\qquad$ T = velocità di un generico punto dell'asse di rotazione

il moto è elicoidale ; se $\begin{cases} \omega = \text{costante} \\ \tau = \text{costante} \end{cases}$ elicoidale uniforme.

*) <u>Atto di moto</u>

Per atto di moto di un corpo $\mathcal{B}$ all'istante t^*, s'intende il campo delle velocità dei punti del corpo $\mathcal{B}$ in tale istante.

$$\left\{P(t^*), v_P(t^*)\right\}_{P \in P_t(\mathcal{B})}$$

1) Un atto di moto è traslatorio all'istante t^* se in tale istante tutti i punti hanno la stessa velocità

$A = \left\{P(t^*), \underline{v}_P(t^*)\right\}$ $\underline{v}_P(t^*)$ costante al variare di P in $P_{t^*}(\mathcal{B})$.

Se considero un moto traslatorio uniforme dello stesso corpo $\mathcal{B}$ che verifica in ogni istante t per tutti i punti del corpo $\underline{v}_P(t) = \underline{v}_P(t^*)$, Tale moto si dice essere tangente nell'istante t^* al moto generico del corpo rigido $\mathcal{B}$ avente all'istante t^* atto di moto traslatorio.

*) Due moti rigidi sono tangenti nell'istante t^* se in quell'istante hanno lo stesso stato cinetico.

2) Un atto di moto è rotatorio nell'istante t^* se c'è in tale istante una retta nello spazio solidale avente velocità nulla.

La velocità di un generico punto all'istante t^* sarà

$$v_P(t^*) = \underline{\omega}(t^*) \times (P - O')$$

Considero un moto rotatorio uniforme $\Pi^{\omega t}$ avente $\underline{\omega}(t) = \underline{\omega}(t^*)$. $\Pi^{\omega t}$ è tangente nell'istante t^* al moto considerato.

Oss

Atto di moto è traslatorio in ogni istante $\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}$ il moto è traslatorio

Atto di moto è rotatorio in ogni istante $\overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ moto è rotatorio

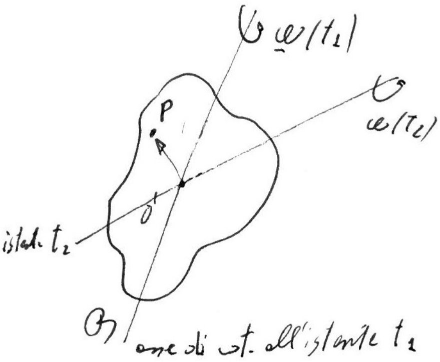
$$\underline{v}_P(t^*) = \underline{\omega}(t^*) \times (P - O')$$

Non è detto che la direzione di $\underline{\omega}$ sia costante come nel moto rotatorio.

Considero il moto di un corpo rigido avente un punto fisso O' la velocità di un generico punto P di $\mathcal{B}$

$\underline{v}_P = \underline{\omega}(t) \times (P - O')$ con $\underline{\omega}$ variabile nel tempo,

il moto non è rotatorio mentre l'atto di moto è rotatorio in ogni istante t^*.



Il punto P descrive una superficie della sfera di centro O' e raggio $\overline{PO'}$.

s) Atto di moto

Un atto di moto si dice rotatorio all'istante t^* se in tale istante la velocità di un generico punto $P \in \mathcal{B}$ vale $\underline{v}_P(t^*) = \underline{v}_Q(t^*) + \underline{\omega}(t^*) \times (P-Q)$ $\underline{\omega} \parallel \underline{I}$

Se $\underline{v}_Q(t^*)$ e $\underline{\omega}(t^*)$ sono paralleli, l'atto di moto si dice elicoidale poiché è possibile determinare un moto elicoidale uniforme tangente al moto del corpo $\mathcal{B}$ nell'istante t^*.

Teorema

Ogni atto di moto di un corpo rigido $\mathcal{B}$ è della forma $(*)$

$\underline{x}(t) = \underline{c}(t) + \underset{\sim}{A}(t)\,\underline{y}$ derivando

$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}(t) + \dot{\underset{\sim}{A}}(t)\,\underline{y}$

Poiché $\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{A}^t = \underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{A}^t\,\underset{\sim}{A}$

$\underset{\sim}{A}^t(\underline{x} - \underline{c}) = \underset{\sim}{A}^t\,\underset{\sim}{A}\,\underline{y} = \underline{y}$

$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}(t) + \dot{\underset{\sim}{A}}\,\underset{\sim}{A}^t(\underline{x} - c)$

$\underline{x} = P - O$

$\underline{c} = O' - O$

$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}(t) + \dot{\underset{\sim}{A}}\,\underset{\sim}{A}^t(P - O')$

osservo che

$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{A}^t = \underset{\sim}{I}$ derivando rispetto al tempo

$\dot{\underset{\sim}{A}}\,\underset{\sim}{A}^t + \underset{\sim}{A}\,\dot{\underset{\sim}{A}}^t = 0$

$\dot{\underset{\sim}{A}}\,\underset{\sim}{A}^t = -(\underset{\sim}{A}\,\dot{\underset{\sim}{A}}^t) = -(\dot{A}\,\underset{\sim}{A}^t)^t$

$(\dot{\underset{\sim}{A}} A^t)$ è una matrice emisimmetrica, esiste ed è unico $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ t.c.

$$(\dot{\underset{\sim}{A}} A^t)\, \underline{u} = \underline{\omega} \times \underline{u}$$

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P - O') \quad (*)$$

$\underline{\omega}(t)$ è detto vettore assiale della matrice emisimmetrica

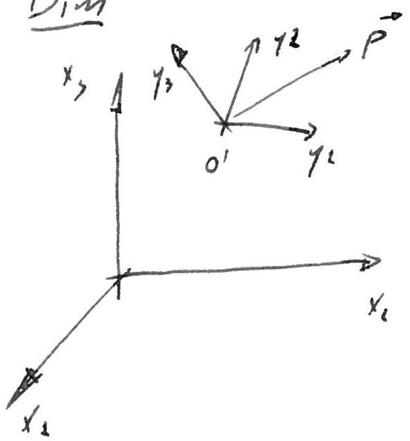
*) Per determinare l'equazione di un moto rigido occorrono tre parametri della matrice $(\dot{\underset{\sim}{A}} \underset{\sim}{A}^t)$ e $\dim(V)$ e 3 parametri posizione del vettore $\underline{c} = (O' - O)$.

Formule di Poisson

Se $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$ è una terna di versori ortogonale variabile col tempo allora esiste un vettore $\underline{\omega}$ funzione del tempo tale che

$$\frac{d}{dt}\vec{j}_h(t) = \underline{\omega}(t) \times \underline{j}_h(t) \qquad h=1,2,3.$$

Dim



Qualunque sia il moto della terna $\{O', \vec{j}_1\, \vec{j}_2\, \vec{j}_3\}$ vale per un punto P solidale a tale terna

$$(P-O) = (O'-O) + (P-O') \qquad \text{derivando e ricordando che}$$

$$(P-O') = \sum_{i=1}^{3} y_i\, \vec{j}_i(t)$$

$$\underline{v}_P = \underline{v}_{O'}(t) + \sum_{i=1}^{3} y_i \frac{d\vec{j}_i}{dt}$$

Inoltre

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}(t) + \underline{\omega} \times (P - O')$$

$$\begin{cases} \underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}(t) + \sum_{i=1}^{3} y_i \dfrac{d \vec{J}_i}{dt} \\ \underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}(t) + \underline{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} y_i \vec{J}_i \end{cases}$$

sottraendo membro a membro

$$\sum_{i=1}^{3} y_i \dot{\vec{J}}_i - \underline{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} y_i \vec{J}_i = 0 \qquad \begin{cases} \forall \vec{J}_i \text{ ortonormale} \\ \forall P \text{ solidale} \end{cases}$$

$$y_1 (\dot{\underline{J}}_1 - \underline{\omega} \times \underline{J}_1) + y_2 (\dot{\underline{J}}_2 - \underline{\omega} \times \underline{J}_2) + y_3 (\dot{\underline{J}}_3 - \underline{\omega} \times \underline{J}_3) = 0$$

$$\forall y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}^3$$

Considero $y_1 \neq 0$, $y_2 = y_3 = 0$

$$\dot{\underline{J}}_1 = \underline{\omega} \times \underline{J}_1$$ analogamente

$$\frac{d \vec{J}_k}{dt} = \underline{\omega} \times \vec{J}_k \, . \quad \text{(Formule di Poisson)}$$

È evidente che dalle formule di Poisson si ottiene

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}(t) + \sum_{i=1}^{3} y_i \frac{d\vec{J}_i}{dt} =$$

$$= \underline{v}_{O'}(t) + \sum_{i=1}^{3} y_i \left[\underline{\omega} \times \vec{J}_i\right] = \underline{v}_{O'}(t) + \underline{\omega} \times \sum_{i=1}^{3} y_i \vec{J}_i =$$

$$= \underline{v}_{O'}(t) + \underline{\omega} \times (P - O')$$

*) Oppure $\underline{u} = (P - O')$ $\qquad \frac{d\underline{u}}{dt} = \underline{v}_P - \underline{v}_{O'} = \underline{\omega} \times (P - O') = \underline{\omega} \times \underline{u}$

in particolare $\frac{d\underline{J}_i}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{J}_i \quad i = 1, 2, 3.$

Teorema di Mozzi

L'atto di moto di un corpo rigido risulta essere sempre di rotazione , in particolare il Teorema di Mozzi permette di affermare che l'atto di moto è elicoidale, cioè esiste un moto elicoidale uniforme tangente a tale moto.

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-O')$$

$\underline{v}_{O'}(t) = v_{O'}^{\parallel}(t) + v_{O'}^{\perp}(t)$ rispetto al vettore $\underline{\omega}$

poiché $\underline{\omega} \cdot \underline{v}_{O'}^{\perp} = 0$ l'equazione

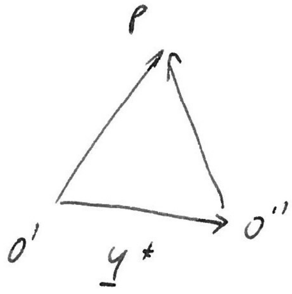
$\underline{u} \times \underline{\omega} = \underline{v}_{O'}^{\perp}$ ammette soluzione

Sia $\underline{u}^*$ una soluzione particolare, anche

$\underline{u}^* + \lambda \underline{\omega}$ sarà soluzione dell'equazione.

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}{}^{\parallel}(t) + \underline{u}^* \times \underline{\omega}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P - O')$$

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}{}^{\parallel}(t) + \underline{\omega}(t) \times \left[(P - O') - \underline{u}^*\right]$$



$\times\; O'' = O' + \underline{u}^*$

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}{}^{\parallel}(t) + \underline{\omega}(t) \times \left[P - O''\right]$$

Poiché anche $\underline{u}^* + \lambda \underline{\omega}$ è soluzione dell'equazione $\underline{u} \times \underline{\omega} = \underline{v}_{O'}{}^{\perp}$ si ha

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O'}{}^{\parallel}(t) + \underline{\omega}(t) \times \left[P - \tilde{O}''\right]$$

dove $\tilde{O}'' = O' + \underline{u}^* + \lambda \underline{\omega} = O'' + \lambda \underline{\omega}$ è un punto della retta parallela a $\underline{\omega}$ passante per O''

Tale retta viene detta asse di Mozzi.

Se $\tilde{O}''$ è un punto dell'asse di Mozzi

$$\underline{v}_{\tilde{O}''} = \underline{v}_{O'}''(t) + \underline{\omega}(t) \times [\tilde{O}'' - \tilde{O}''] = \underline{v}_{O'}''(t)$$

la sua velocità è pari a $\underline{v}''_{\cdot}(t)$

Poiché

$\{O \in \mathcal{E}\}$

$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_O''(t) + \underline{\omega}(t) \times [P - O]$ si deduce che

in un generico istante t^* un qualunque moto rigido è tangente ad un moto elicoidale uniforme.

In particolare se $\underline{\omega} = 0$ l'atto di moto è traslatorio; se $v_O''(t) = 0$ l'atto di moto è rotatorio.

$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_{O''} + \underline{\omega} \times (P - O'')$ O'' punto dell'asse di Mozzi

$\underline{v}_P \, \underline{\omega} = \underline{v}_{O''} \, \underline{\omega} = \pm v_{O''} \omega = \text{invariante} = I$

$I = 0$

1) $\underline{v}_{O''} = 0$ l'atto di moto è rotatorio

2) $\underline{\omega} = 0$ l'atto di moto è traslatorio

es

Considero il moto di un corpo ad un punto fisso Ω

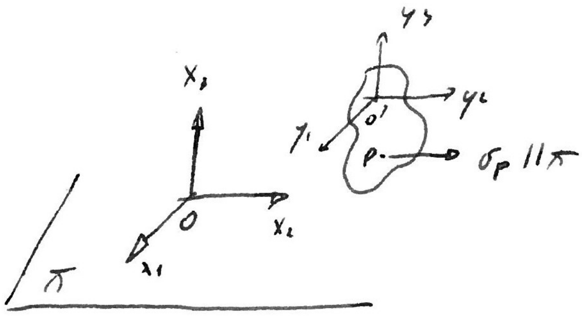
$I = \underbrace{\underline{v}_\Omega}_{=0} \, \underline{\omega} = 0$

l'atto di moto è rotatorio.

*) Moto rigido piano - . . . . .

<u>Def</u>

Le velocità di tutti i punti del sistema sono parallele a un piano fisso π.



Se P e Q sono due punti di $\mathcal{B}$

$$v_P(t) - v_Q(t) = \underline{\omega}(t) \times (P-Q)$$

$$v_P(t) - v_Q(t) = \underline{a}(t) \parallel \pi \implies \underline{\omega}(t) \perp \pi$$

$$\underline{v}_P(t) = v_O^{\parallel}(t) + \underline{\omega} \times (P-O) \qquad O = \text{punto asse di Mozzi}$$

$$v_O^{\parallel}(t) = 0$$ essendo le velocità di ogni punto ortogonali a $\underline{\omega}$

$\underline{v}_P(t) = \underline{\omega} \times (P - O)$

$\omega = 0$ l'atto di moto è traslatorio parallelo al piano π

$\omega \neq 0$ l'atto di moto è rotatorio.

*) accelerazione

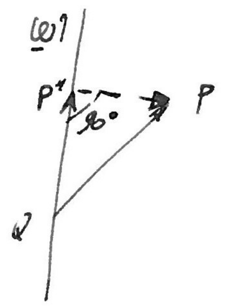
$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_Q(t) + \underline{\omega}(t) \times (P - Q)$$

$$\underline{a}_P(t) = \frac{d\underline{v}_P}{dt}$$

$$\underline{a}_P = \underline{a}_Q + \dot{\underline{\omega}} \times (P - Q) + \underline{\omega} \times (\underline{v}_P - \underline{v}_Q) =$$

$$= \underline{a}_Q + \dot{\underline{\omega}} \times (P - Q) + \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times [P - Q]] =$$

$$= \underline{a}_Q + \dot{\underline{\omega}} \times (P - Q) + \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times [P - P^*]]$$



P^* = proiezione di P sul vettore $\underline{\omega}$

$$\underline{a}_P = \underline{a}_Q + \dot{\underline{\omega}} \times (P-Q) + \cancel{(\underline{\omega} \cdot (P-P^*))\,\underline{\omega}} - \omega^2 (P-P^*)$$

Se $\dot{\underline{\omega}}(t) = 0$ cioè la velocità angolare è costante

$\underline{a}_Q = 0$ la velocità di un punto di $\mathcal{B}$ è costante

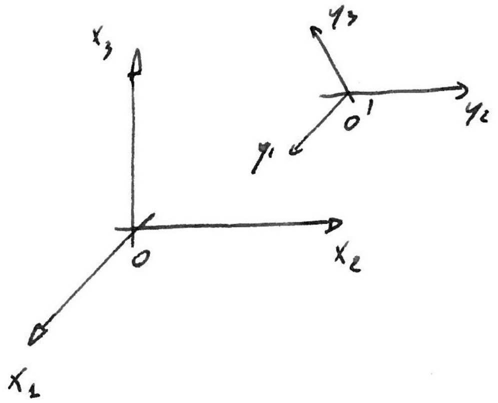
$\underline{a}_P = -\omega^2 (P-P^*)$ il moto è circolare uniforme.

$$\underline{v}_P = \underline{v}_{O'} + \sum_i \dot{\underline{J}}_i\, y_i$$

$$\underline{a}_P = \underline{a}_{O'} + \sum_i \ddot{\underline{J}}_i\, y_i$$

$$\sum_i y_i\, \ddot{\underline{J}}_i = \dot{\underline{\omega}} \times (P-Q) - \omega^2 (P-P^*)$$

*) Moto di un punto P rispetto a due sistemi $\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}'_3$ in moto rigido tra loro.



* Si assume in meccanica classica che se A B sono due punti generici $d(A,B)$ in $\mathcal{E}_3$ = $d(A,B)$ in $\mathcal{E}'_3$ inoltre il tempo t in $\mathcal{E}$ è invariante rispetto al moto in entrambi i sistemi.

Chiamo $\mathcal{E} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sistema di riferimento fisso

$\mathcal{E}' = (O', \vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3)$ " " mobile,

assoluto il moto di P rispetto a $\mathcal{E}$

relativo il moto di P rispetto a $\mathcal{E}'$.

$$P(t)-O=(P(t)-O'(t))+(O'(t)-O)$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i(t)\,\underline{e}_i=\sum_{i=1}^{3} y_i(t)\,\vec{\xi}_i(t)+\sum_{i=1}^{3} c_i(t)\,\underline{e}_i$$ derivando rispetto al tempo

$$\vec{v}_P^{\,(a)}(t)=\underbrace{\sum_i \dot{y}_i(t)\,\vec{\xi}_i(t)}_{\vec{v}_P^{\,(r)}(t)}+\underbrace{\sum_i y_i(t)\,\dot{\vec{\xi}}_i(t)+\sum_i \dot{c}_i(t)\,\underline{e}_i}_{\vec{v}_P^{\,(\tau)}(t)}$$

$\vec{v}_P(t)^{(r)}$ = velocità relativa (velocità istantanea del punto P rispetto alla terna mobile)

$\vec{v}_P^{\,(\tau)}(t)$ = velocità di trascinamento (atto di moto di un punto solidale a $\mathcal{E}_3'$ occupante la stessa posizione di P nell'istante considerato).

$$\underline{v}_P^{(a)}(t) = \sum_i \dot{y}_i(t)\,\vec{\xi}_i(t) + \sum_i y_i(t)\,\dot{\vec{\xi}}_i(t) + \sum_i \dot{c}_i(t)\,\underline{e}_i$$

$$\underline{a}_P^{(a)}(t) = \sum_i \ddot{y}_i(t)\,\vec{\xi}_i(t) + \sum_i \dot{y}_i(t)\,\dot{\vec{\xi}}_i(t) + \sum_i \dot{y}_i(t)\,\dot{\vec{\xi}}_i(t) +$$

$$+ \sum_i y_i(t)\,\ddot{\vec{\xi}}_i(t) + \sum_i \ddot{c}_i(t)\,\underline{e}_i$$

$$\underline{a}_P^{(a)}(t) = \sum_i \ddot{y}_i(t)\,\vec{\xi}_i(t) + \sum_i \ddot{c}_i(t)\,\underline{e}_i + \sum_i y_i(t)\,\ddot{\vec{\xi}}_i(t) + 2\sum_i \dot{y}_i(t)\,\dot{\vec{\xi}}_i$$

$$\underline{a}_P^{(a)}(t) = \sum_i \ddot{y}_i(t)\,\vec{\xi}_i(t) + \sum_i \ddot{c}_i(t)\,\underline{e}_i + \sum_i y_i(t)\,\ddot{\vec{\xi}}_i(t) + 2\omega \times \sum_i \dot{y}_i(t)\,\vec{\xi}_i(t)$$

(formula di Poisson)

$$\underline{a}_P^{(a)}(t) = \underline{a}_P^{(r)}(t) + \underline{a}_P^{(\tau)}(t) + \underbrace{2\omega \times \vec{v}^{(r)}(t)}_{}$$

↳ accelerazione di Coriolis.

* Nel caso i due sistemi $\mathcal{E}_s$ e $\mathcal{E}_s'$ si muovessero di moto traslatorio

$$\underline{v}_P^{(a)}(t) = \underline{v}_P^{(r)}(t) + \underline{v}_{O'}(t)$$

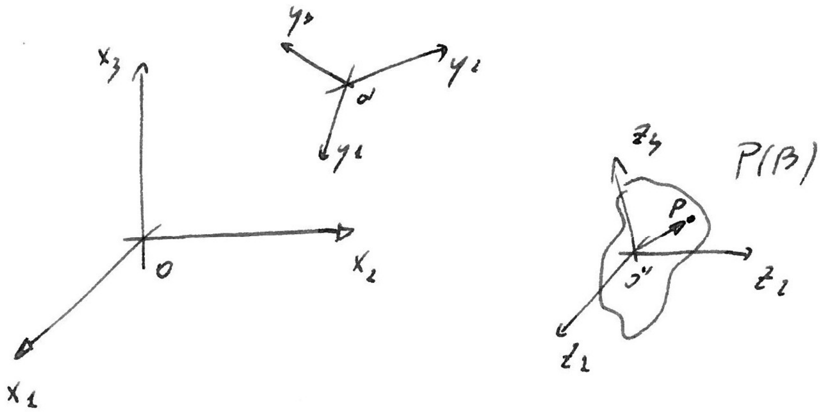
inoltre $\omega = 0$ quindi:

$$\underline{a}_P^{(a)}(t) = \underline{a}_P^{(r)}(t) + \underline{a}_P^{(\tau)}(t) = \underline{a}_P^{(r)}(t) + \underline{a}_{O'}(t)$$

Se il moto è traslatorio uniforme $\vec{v}_{O'}(t)$ = costante

$$\underline{a}_{O'}(t) = 0$$

Le accelerazioni nei due sistemi coincidono.



$$\underline{v}_P^{(a)} = \underline{v}_{O''}^{(a)}(t) + \underline{\omega}_a(t) \times (P-O'')$$

$$\underline{v}_P^{(r)} = \underline{v}_{O''}^{(r)}(t) + \underline{\omega}_r(t) \times (P-O'')$$

$$\underline{v}_P^{(\tau)}(t) = \underline{v}_{O''}^{(\tau)}(t) + \underline{\omega}_\tau \times (P-O'')$$

$$\underline{v}_P^{(\tau)}(t) = \left[\underline{v}_{O''}^{(a)}(t) - \underline{v}_{O''}^{(r)}(t)\right] + (\underline{\omega}_e - \underline{\omega}_r) \times (P-O'')$$

(espressione ottenuta considerando che $v_P^{(\tau)}(t) = \underline{v}_P^{(a)}(t) - v_P^{(r)}(t)$

Sottraendo membro a membro le ultime 2 equaz.

$$0 = (\underline{\omega}_\tau - \underline{\omega}_e + \underline{\omega}_r) \times (P-O'') \qquad \forall P$$

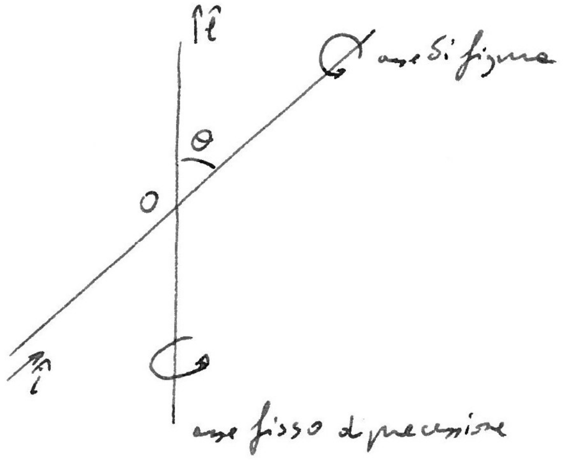
$$\underline{\omega}_T - \underline{\omega}_e + \underline{\omega}_r = 0$$

$$\underline{\omega}_e = \underline{\omega}_r + \underline{\omega}_T$$

La velocità angolare del corpo $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{E}$ è pari alla velocità angolare di tale corpo in $\mathcal{E}'_3$ più la velocità angolare di $\mathcal{E}'_3$ in $\mathcal{E}_3$.

Moti rigidi ad un punto fisso (moti di precessione)

Un moto ad un punto fisso si dice essere di precessione se esiste un asse solidale al corpo (asse di figura) che forma un angolo θ costante con un asse fisso (asse di precessione)



il punto O appartiene al corpo rigido ed è fisso.

$\underline{e}\,\underline{i} = \cos\theta = \text{costante}$

$\underline{e} \cdot \dfrac{d\underline{i}}{dt} = 0$ applicando la formula di Poisson

$\dfrac{d\underline{i}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{i}$

$\underline{e} \cdot \underline{\omega} \times \underline{i} = 0$ (i 3 vettori sono complanari)

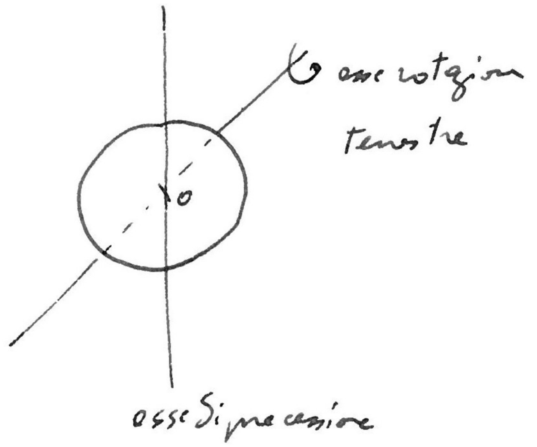
posso scomporre ω in due vettori uno parallel a $\underline{i}$ e uno a $\underline{e}$.

$\underline{\omega} = \underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2 = \gamma \, \underline{e} + \nu \, \underline{i}$

*) In un moto di precessione la velocità angolare ha una componente parallela all'asse di precessione e una componente parallela all'asse di figura.

Viceversa se un corpo B ha una velocità angolare $\underline{\omega}$ che può essere scomposta in una componente parallela ad un asse fisso e una componente parallela ad un asse solidale al corpo che interseca l'asse fisso in un punto O anch'esso fisso; allora l'angolo formato dai due assi è costante e il moto è di precessione

*) Un particolare moto di precessione è quello terrestre



La terra descrive un giro completo intorno all'asse di precessione in 26'000 anni.

Una conseguenza di tale moto è l'inversione delle stagioni ogni 13'000 anni.

*) <u>Moti rigidi piani</u>

I moti rigidi piani sono caratterizzati dal fatto che le velocità di ogni punto P del corpo in moto è parallela a un piano fisso π.

*) In un moto rigido piano l'atto di moto è o rotatorio o traslatorio.

Se l'atto di moto è rotatorio si chiama centro istantaneo di rotazione $C(t)$ l'intersezione tra l'asse istantaneo di rotazione e il piano π.

$$\underline{v}_P(t) = \underline{\omega} \times (P - C(t))$$

*) La velocità di trascinamento di $C(t)$ è nulla.

*) La velocità assoluta di $C(t)$ è solitamente diversa da zero poiché il punto $C(t)$ varia posizione

$\underline{v}_P(t^*) = \underline{\omega}(t^*) \times (P - C(t))$

$\underline{v}_P \perp (P - C(t))$ segue che $P - C(t)$ è ortogonale alle traettorie di ogni punto $P \in \mathcal{B}$.

In particolare se D e $B \in \pi$

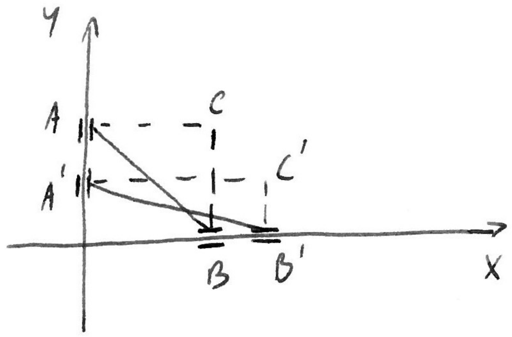
$v_D(t^*) = \underline{\omega}(t^*) \, \overline{DC}(t^*)$

$v_B(t^*) = \underline{\omega}(t^*) \, \overline{BC}(t^*)$

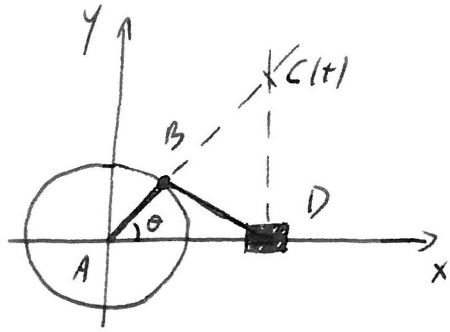
$$v_D(t^*) = \frac{\overline{DC}(t^*)}{\overline{BC}(t^*)} \, v_B(t^*)$$

*) $\overline{AB}$ è un'asta rigida con A e B libere. Si sconnere lungo gli assi.

La posizione di $C(t)$ è facilmente calcolabile



*)



B e circonferenza

$$v_B = \dot{\theta}\, \overline{AB}$$

$$v_B = \omega\, \overline{BC(t)}$$

ω = velocità angolare moto piano

$$v_D = \omega\, \overline{DC(t)}$$

$$v_D = v_B \frac{\overline{DC(t)}}{\overline{BC(t)}} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{DC(t)} \cdot \dot{\theta}}{\overline{BC(t)}}$$

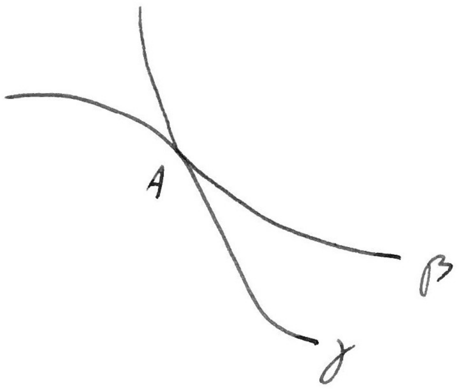
*) <u>moto di rotolamento</u> (particolare moto piano)

Sia γ una curva fissa appartenente al piano π e

β una curva appartenente al piano mobile solidale

Si dice che β rotola su γ se le due curve hanno

in ogni istante un punto e la tangente in comune.



Se la curva β ruota senza strisciare su γ allora

$$\frac{\Delta s^{(e)}}{\Delta t} = \frac{\Delta s^{(r)}}{\Delta t} \quad \text{poiché la tangente è in comune}$$

$$\underline{v}^{(e)} = \underline{v}^{(r)}$$

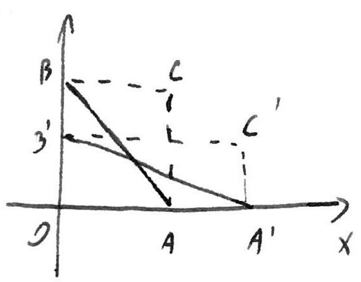
La velocità di trascinamento del punto A è nulla.

Vale il viceversa.

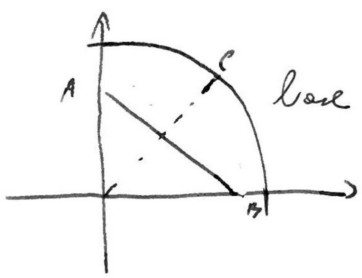
*) Considero un generico moto piano e sia (O, x_1, x_2, x_3) il sistema solidale al piano π fisso e (O, y_1, y_2, y_3) solidale al corpo in moto.

Si definisce <u>base</u> la traettoria descritta dal centro istantaneo $C(t) \in \pi$ rispetto al sistema fisso; si dice <u>rulletta</u> la traettoria descritta dal centro istantaneo $C(t) \in \pi$ rispetto al sistema mobile.

*) Considero il moto piano precedente

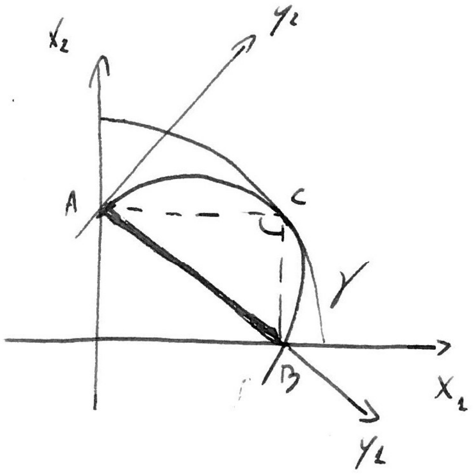


Osservo che $\overline{OC} = \overline{OC'}$ entrambe diagonali di lunghezza $|\overline{BA}|$.



Per determinare la rulletta basta osservare che

BA forma con $C(t)$ sempre un angolo di $90°$



γ = Base

β = rulletta

*) Durante il moto la rulletta rotola senza strisciare sulla base.

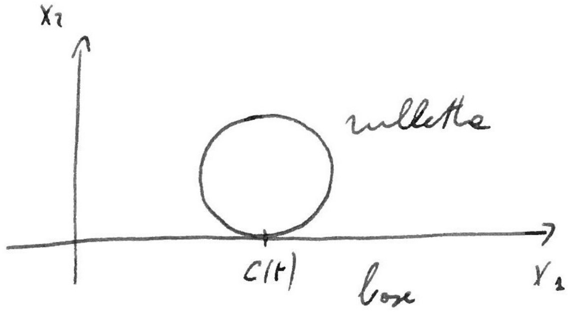
La rulletta e la base hanno infatti sempre il punto $C(t)$ in comune inoltre $\underline{v}_C^{(\tau)} = 0$ la velocità di trascinamento di $C(t)$ è nulla.

Osserv.

La base e la rulletta sono le uniche due curve solidali ai due sistemi che rotolano senza strisciare.

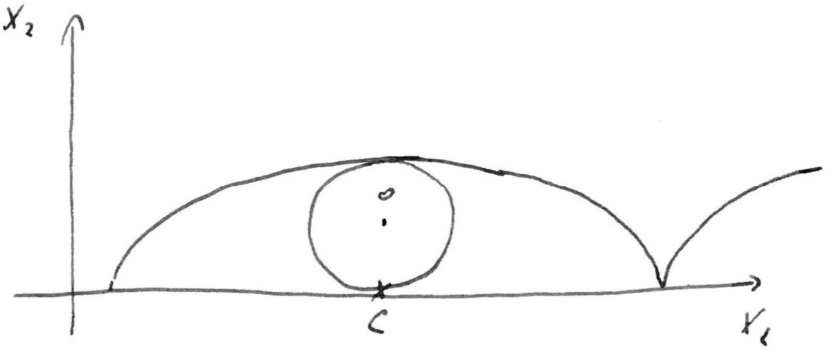
Infatti se esistessero altre due curve solidali ai due sistemi che rotolano senza strisciare e in contatto in un punto $B \neq C$ allora $\underline{v}_B^{(r)}(t) = 0$ in contraddizione con l'equazione $\underline{v}_P(t) = \underline{\omega} \times (P - C(t))$.

*) Disco che rotola senza strisciare su una guida rettilinea



Necessariamente le due curve saranno rispettivamente la base e la rulletta e il punto di contatto l'asse istantaneo di rotazione.

Il moto di un generico punto P appartenente alla circonferenza descriverà una traiettoria cicloidale.



Tale traiettoria risulta evidente se si considera che $\dot{P}$ deve essere in ogni punto ortogonale a $(P-C)$ e che il centro istantaneo $C(t)$ si sposta al variare del tempo lungo l'asse x_2.

*) Dinamica dei sistemi

La dinamica studia il moto di corpo in relazione alle cause che determinano tale moto.

È necessario definire nuove grandezze quali la massa e la forza.

La massa è un ente fisico legato alla quantità di materia associata al corpo, è un ente primitivo quindi privo di definizione, può essere rappresentata matematicamente da una grandezza scalare sempre positiva. La massa gode della proprietà di additività inoltre in meccanica classica non dipende da altre grandezze cinematiche.

La forza è un'azione atta a modificare lo stato di moto o di quiete di un corpo.
Per forze assolute s'intendono le azioni tra due corpi indipendentemente dall'osservatore.
La forza viene rappresentata da un vettore applicato $(P, \vec{F})$.

*) La dinamica si basa su 3 leggi:

1) Esiste un sistema di riferimento detto inerziale rispetto al quale un punto isolato (un punto di massa non nulla posto a distanza molto grande dagli altri per cui l'azione di questi sul corpo può ritenersi trascurabile) permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.
(Legge formulata da Galileo Galilei).

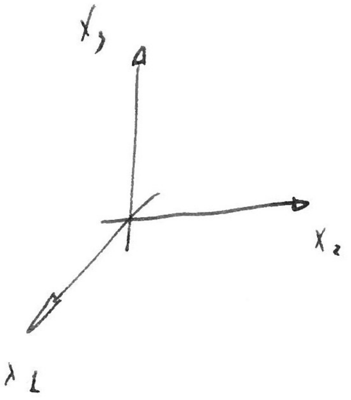
Newton considerò come sistema di riferimento inerziale quello delle stelle fisse; con buona approssimazione anche un sistema solidale alla terra può essere considerato inerziale.

1/ In meccanica classica il tempo è un invariante rispetto alle altre grandezze cinematiche; un moto periodico permette una misura del tempo.
Noi adoperiamo come criterio di misurazione del tempo il moto della terra intorno al suo asse (giorno) e tutti i suoi sottomultipli.

2/ In un sistema inerziale il moto di un corpo soddisfa l'equazione $\vec{F} = m\vec{a}$ dove con $\vec{F}$ si indica la somma delle forze esercitate sul singolo corpo dall'esterno.

In generale la forza $\vec{F}$ agente su un singolo punto la cui influenza sull'ambiente esterno è trascurabile è un'espressione della forma $\vec{F}(\vec{P}(t), \dot{\vec{P}}(t), t) = \vec{F}$ cioè $\vec{F}$ è una funzione della posizione e della velocità del punto, inoltre è funzione anche del tempo che tiene conto della variazione dell'ambiente esterno.

In coordinate cartesiane



$$\begin{cases} F_{x_1} = m\ddot{x}_1 = F(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) \\ F_{x_2} = m\ddot{x}_2 = F(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) \\ F_{x_3} = m\ddot{x}_3 = F(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1\ \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) \end{cases}$$

In un sistema di N punti materiali le forze esercitate sull'i-esimo punto è una funzione $F_i(t) = F_i(\vec{x}_1 - \vec{x}_N, \dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_N, t)$.

*) Il moto di un generico punto P deve soddisfare l'equazione differenziale $m\ddot{P} = F(P(t), \dot{P}(t), t)$

Il problema fondamentale della dinamica consiste nel determinare l'equazione del moto del corpo P una volta note le funzioni F.

In pratica consiste nel risolvere l'equazione differenziale

$\mathcal{F}(\ddot{P}, \dot{P}, P, t) = 0$ sotto ampie ipotesi di regolarità di $\mathcal{F}$ (i fenomeni naturali soddisfano tali condizioni), l'insieme delle soluzioni è ∞^6.

Uno e uno solo è il moto che soddisfa l'equazione fissate le condizioni iniziali $\vec{P}(t_0) = \vec{P}_0$ $\dot{\vec{P}}(t_0) = \dot{\vec{P}}_0$.

Il problema inverso che consiste nel determinare $\vec{F}$ note l'equazione del moto è relativamente più semplice.

3) Consideriamo un sistema di punti materiali

$$\{(P_s, m_s)\}_{s=1-N}$$

Se un punto P_r esercita una forza $\vec{F}_{sr}$ sul punto P_s allora il punto P_s eserciterà una forza $\vec{F}_{rs} = -\vec{F}_{sr}$ sul punto P_r.

*) Consideriamo la mutua azione tra due corpi 1, 2

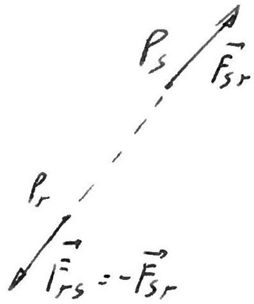
$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2 \qquad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0 \qquad \text{in modul}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$ il rapporto tra le masse è inversamente proporzionale al rapporto tra le accelerazioni.

*) $\left\{ (P_s, m_s) \right\}_{s \in [1,N]}$



La mutua azione tra due punti del sistema è una coppia di braccio nullo.

Generalmente la forza agente su un singolo punto P_s del sistema è diversa dal vettore nullo

$$\vec{F}_s = \sum_{r=1}^{N} \vec{F}_{sr}$$

La risultante delle forze agenti in un sistema di punti materiali è sempre nulla

$\vec{F}^{(i)} = \vec{R}^{(i)} = \sum_{s,r=1}^{N} \vec{F}_{sr} = 0$ annullandosi le forze a due a due.

Il momento delle forze di un sistema S i punti materiali rispetto ad un polo O vale

$$\underline{M}_O^{(i)} = \sum_{r,s=1}^{N}{}' (P_r - O) \times \vec{F}_{rs} = 0$$

infatti i momenti si annullano due a due

$$(P_r - O) \times \vec{F}_{rs} + (P_s - O) \times \vec{F}_{sr} =$$

$$= (P_r - O) \times \vec{F}_{rs} + (O - P_s) \times \vec{F}_{rs} = (P_r - P_s) \times \vec{F}_{rs} = \underline{0}$$

vettori paralleli.

*) Equilibrio di un punto materiale

Si dice che un punto P è in equilibrio nella posizione P_0 se abbandonato con velocità nulla vi rimane indefinitamente.

$P(t_0) = P_0$

$v_0 = \dot{P}(t_0) = 0$

$P(t) = P_0 \quad \forall t \in [0, t^*]$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto P sia in equilibrio è che $\vec{F}(P_0, 0, t) = 0 \quad \forall t$

1) Supponiamo che il punto sia in equilibrio

$m\ddot{P} = \vec{F}(P(t), \dot{P}(t), t)$

$\dot{P}(t) = 0 \quad \forall t \implies \ddot{P} = 0$

$P(t) = P_0 \quad \forall t$

$0 = \vec{F}(P_0, 0, t)$

2) Supponiamo che $\vec{F}(P_0, 0, t) = \underline{0} \Rightarrow P$ è in equilibrio.

Poiché $\vec{F}(P_0, 0, t) = 0 \qquad m\ddot{P} = 0$

l'equazione del moto $P(t) = P_0 \quad \forall t \in [0, t^*]$ soddisfa

l'equazione differenziale $m\ddot{P} = 0$

Inoltre le condizioni iniziali $\begin{cases} P(t_0) = P_0 \\ \dot{P}(t_1) = 0 \end{cases}$ fanno sì che

tale soluzione sia unica. Il corpo effettivamente è in

equilibrio.

* <u>Vincoli</u>

Un punto materiale si dice libero se può assumere qualsiasi posizione dello spazio non legato a alcun vincolo.

Il vincolo è un ostacolo al moto del punto.

Considero un corpo $\mathcal{B}$

La localizzazione di $\mathcal{B}$ $P(\mathcal{B})$ fornisce tutte le possibili configurazioni di $\mathcal{B}$ nello spazio euclideo $\mathcal{E}_3$.

Se $\mathcal{B}$ è vincolato non tutte le configurazioni di $\mathcal{B}$ sono ammissibili.

In generale un vincolo può essere interno o esterno.

Un vincolo <u>interno</u> è del tipo strutturale, è determinato dalla natura del corpo stesso.

Un esempio di vincolo interno è la distanza costante tra due punti qualsiasi di un corpo rigido.

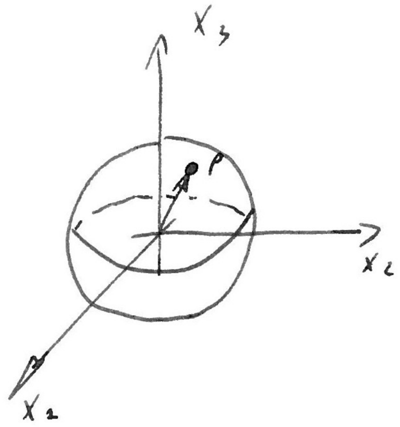
Un vincolo è <u>esterno</u> se è determinato dalla presenza di altri corpi

*) Un vincolo solitamente è espresso da una disequazione

$$\psi(\underline{x}^1 \ldots \underline{x}^N, \dot{\underline{x}}^1, \ldots \dot{\underline{x}}^N, t) \geq 0$$

$\underline{x}^i$ = posizione dell'iesimo punto materiale

$\dot{\underline{x}}^i$ = velocità " "



Supponiamo che il punto materiale P sia costretto a restare internamente alla sfera di raggio R.

La superficie sferica fornisce un vincolo al moto di P.

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2$ (il punto P non può occupare una posizione esterna alla sfera).

Se la superficie della sfera avesse raggio variabile il vincolo dipenderebbe anche dal tempo

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R(t)$.

Vincoli indipendenti dal tempo sono detti <u>scleronomi</u>;

vincoli dipendenti dal tempo <u>reonomi</u>.

Un vincolo si dice poi <u>olonomo</u> se dipende solo dalle posizioni $\underline{x}^1 — \underline{x}^n$ e dal tempo t.

Un vincolo dipendente anche dall'atto di moto $\dot{x}_1 — \dot{x}_N$ è detto <u>anolonomo</u>.

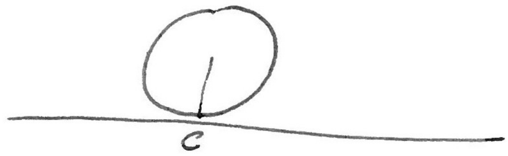
Un vincolo è <u>bilaterale</u> se è rappresentato da un'equazione $\varphi(\dots) = 0$, è <u>unilaterale</u> se è rappresentato da una disuguaglianza $\varphi(\dots) \geq 0$.

In meccanica relativistica tutti i corpi hanno un vincolo anolonomo, infatti tutti i corpi hanno necessariamente un vincolo nelle loro velocità (non possono superare c).

In meccanica classica i vincoli anolonomi sono limitati.

A volte i vincoli sono solo apparentemente anolonomi, consideriamo il caso del moto senza strisciare di una circonferenza su una guida rettilinea.

Sembrerebbe che il vincolo sia anolonomo poiché si impongono delle condizioni alle velocità ad es. $\vec{v}_c = 0$.



In effetti questa e altre condizioni sulle velocità dei punti della sfera sono condizioni che scaturiscono dal vincolo olonomo $\varphi(P_{(s)}, t)$.

*) Un vincolo anolonomo può essere espresso dalla funzione

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha_s(\underline{x}_1 — \underline{x}_N, t)\dot{\underline{x}}_s + \alpha_0(\underline{x}_1, — \underline{x}_N, t) = 0 \quad (*)$$

il vincolo è realmente anolonomo se non esiste nessuna funzione $F(\underline{x}_1, — \underline{x}_N, t) =$ costante la cui derivata rispetto al tempo fornisce la $(*)$.

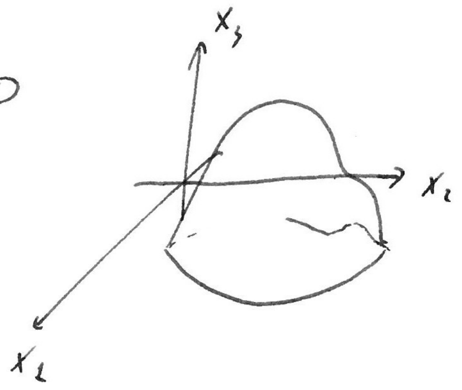
*) Gradi di libertà di un sistema

Considero un sistema costituito da N punti materiali.

Il grado di libertà del sistema rappresenta il numero di parametri indipendenti che occorre fissare per determinare la posizione.

Poiché ogni punto materiale ha 3 gradi di libertà, il grado di libertà del nostro sistema è 3N.

Se un punto materiale è vincolato a muoversi su una superficie $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$



Tale equazione fa sì che i gradi di libertà del sistema siano 2.

Se il punto è vincolato a muoversi su una curva posso fissare un'ascissa curvilinea e determinare la posizione del punto al variare di 1 solo parametro.

Il grado di libertà è in questo caso 1.

Nel caso il vincolo sia reonomo, cioè variabile con il tempo, i gradi di libertà restano gli stessi onde si varia il dominio della funzione vincolare φ.

*)

Considero un sistema di N punti materiali, la configurazione del sistema è nota se si conosce $q=(\vec{x}_1 — \vec{x}_N)$

$$\vec{X}_i=(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Un vincolo olonomo bilaterale sarà una funzione del tipo $\varphi(\lambda_1, \lambda_2 — \lambda_\ell, t)=0 \qquad \ell=3N$

Supponiamo che vi siano più vincoli

$\psi_h(\lambda_1 — \lambda_\ell, t) = 0 \quad h = 1 — r$ posso determinare

la matrice Jacobiana
$$\begin{bmatrix} \frac{\delta \psi_1}{\delta \lambda_1} & — & \frac{\delta \psi_1}{\delta \lambda_\ell} \\ | & & \\ \frac{\delta \psi_r}{\delta \lambda_1} & — & \frac{\delta \psi_r}{\delta \lambda_\ell} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{\ell \times r}$$

Se il rango della matrice è pari a r allora tutti i vincoli sono indipendenti.

Se il grado di libertà del sistema privo di vincoli è $\ell = 3N$ fissati gli r vincoli indipendenti il grado di libertà sarà $p = \ell - r$

p parametri linearmente indipendenti vengono detti coordinate lagrangiane.

Affinché venga assicurato il moto del sistema $r < \ell$.

Se i vincoli

$\psi_e(\lambda_1 - \lambda_l, t) \geq 0$ sono unilaterali $(e = 1 - r')$

il grado di libertà del sistema resta l anche se

restringono il dominio di $q = (\vec{x}_1 - \vec{x}_n)$.

*) <u>Reazioni vincolari</u>

L'esperienza mostra che qualsiasi sia il vincolo a cui un punto materiale P è soggetto è sempre possibile sostituire il vincolo stesso con una forza applicata a P senza che si alteri lo stato di moto o di quiete di P.

La forza che si sostituisce al vincolo si chiama <u>reazione vincolare</u>, le forze diverse dalle reazioni vincolari <u>forze attive</u>.

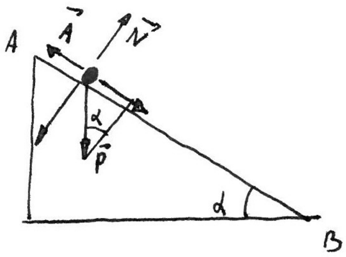
*) Un punto vincolato si muove come se fosse un punto libero soggetto alle reazioni vincolari oltre che alle forze attive.

$m\ddot{\underline{P}} = \underline{F}(P, \dot{P}, t) + \phi(t)$ $\underline{\phi}(t)$ = reazione vincolare

Proiettate sugli assi

$m\ddot{x}_i = F_{x_i}(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) + \underline{\phi}_{x_i}$ $i = 1, 2, 3.$

*) Esperienze di Coulomb Morin



il punto materiale P è disposto su un piano inclinato, è soggetto alla forza peso e alla reazione vincolare.

Se il punto vincolato è in equilibrio il piano esplica una reazione vincolare che bilancia le due componenti della forza peso

$\vec{\phi} = \vec{A} + \vec{N}$ $\vec{A}$ = reazione tangenziale, attrito radente

$\vec{N}$ = reazione normale

$A = mg \operatorname{sen} \alpha$

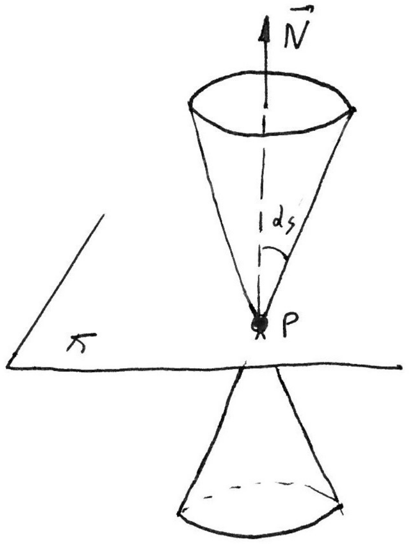
$N = mg \cos \alpha$

I fatti sperimentali mostrano che finchè $\alpha \leq \alpha_s < \frac{\pi}{4}$ il punto materiale è in equilibrio

$$\frac{A}{N} = tg\,\alpha \leq tg\,\alpha_s = f_s$$

$tg\,\alpha_s = f_s < 1$ è detto coefficiente di attrito statico.

$A \leq f_s N$



chiamo cono di attrito il cono rotondo avente l'asse coincidente con la normale alla superficie e la semiapertura coincidente con un angolo non maggiore di α_s.

Dalla relazione $A \leq tg\,\alpha_s N$ deduciamo che una superficie σ può esplicare sul punto materiale P ad essa appoggiato tutte e sole le reazioni vincolari non esterne alla falda del cono di attrito del semispazio su cui è posto P.

Se il punto P è vincolato a restare sulla superficie σ allora le reazioni vincolari esplicabili da σ sono tutte quelle non esterne alla falda del cono.

Considero il moto di un punto materiale costretto

a stare su una curva γ.

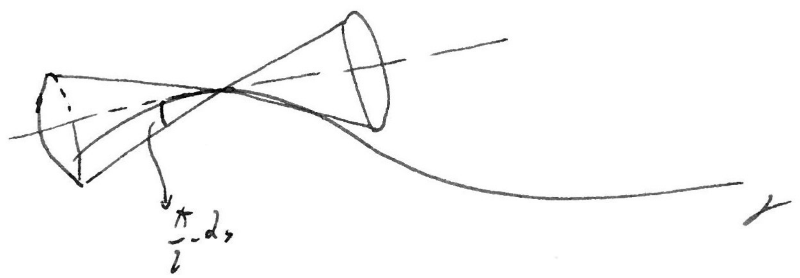
Costruisco il cono circolare avente come asse

la tangente alla curva e semiapertura l'angolo

$\frac{\pi}{2} - \alpha_s$.

Tutte le sollecitazioni esplicabili dalla curva γ

sono non interne al cono considerato.



Se la reazione coincide con la generatrice del cono cioè

$A = f_s N$ $\quad$ A è detto attrito di primo distacco.

*) Se un punto materiale è vincolato a una superficie liscia $\alpha_s = 0$ le reazioni esplicabili dal vincolo sono solo quelle normali alla superficie.

*) Se un punto materiale è vincolato a una curva γ liscia le reazioni esplicabili dal vincolo sono tutte le normali alla curva stessa.

*) Considero il caso di un punto materiale in moto su una superficie σ con velocità relativa $v_P^{(r)}$.

Vale la relazione

$A = f_D \, N$ $\qquad$ f_D = coefficiente di attrito dinamico

$f_D < f_s$

$\text{vers}\,\underline{A} = -\,\text{vers}\,\underline{v}_P^{(r)}$

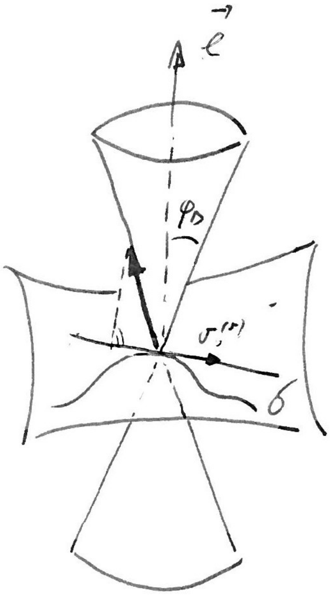
$\underline{N} = N\,\underline{e}$ $\qquad$ $\underline{e}$ = versore normale alla superficie

(se il punto è poggiato sulla superficie)

$\underline{N} = \pm N\,\underline{e}$

(se il punto è vincolato a restare su tale superficie).

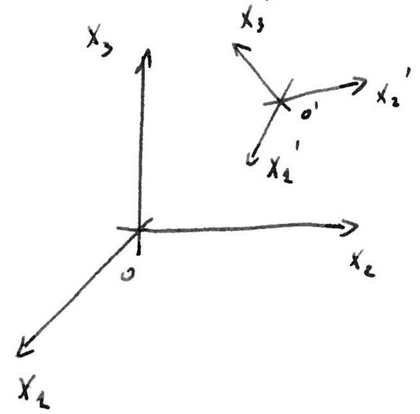
$$\frac{A}{N} = f_D$$



La reazione vincolare che una superficie σ esplica su un punto P in moto con velocità relativa $v^r_{(P)}$ sulla superficie stessa appartiene alla generatrice del cono d'attrito dinamico che si proietta sulla tangente alla traiettoria descritta dal punto P dalla parte opposta al verso della velocità.

Se la superficie è liscia la reazione vincolare è normale alla superficie.

*) Equazioni fondamentali della Dinamica rispetto ad un sistema di riferimento qualsiasi.



$$m\underline{\ddot{P}} = \underline{F}(P,\dot{P},t) + \underline{\phi}$$

Per assegnare il moto dello spazio solidale a ξ_3' rispetto a ξ_3 basta conoscere $\underline{\omega}_\tau(t)$ e $\underline{v}_{O'}(t)$

$$\underline{v}_P^{(\tau)} = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega}_\tau \times (P-O') .$$

ricordando che $\underline{a}_P^{(a)} = \underline{a}_P^{(r)} + \underline{a}_P^{(\tau)} + \underline{a}_P^{(c)}$ si può scrivere l'equazione fondamentale della Dinamica

$$m\left(\underline{a}_P^{(r)} + \underline{a}_P^{(\tau)} + \underline{a}_P^{(c)}\right) = \underline{F}\left(P, \underline{v}_P^{(r)} + \underline{v}_P^{(\tau)}, t\right) + \underline{\phi}$$ da cui

$$m\underline{a}_P^{(r)} = \underline{F}(P, \underline{v}_P^{(r)} + \underbrace{\underline{v}_P^{(T)}}_{\text{funzione nota}}, t) + \phi - m\underline{a}_P^{(T)} - m\underline{a}_P^{(C)}$$

equazione del moto rispetto ad un sistema di riferimento non galileiano.

$ma_P^{(T)}$ = forza di trascinamento

$ma_P^{(C)}$ = forza complementare o di Coriolis.

Se il moto di $\mathcal{E}'$ è traslatorio uniforme $\begin{cases} ma_P^{(T)} = 0 \\ ma_P^{(C)} = 0 \end{cases}$

$$m\underline{a}_P^{(r)} = \underline{F}(P, \underline{v}_P^{(r)}, t) + \phi$$

l'equazione del moto è indipendente dal moto della terna.

*) Sono galileiani tutti i sistemi di riferimento di moto traslatorio uniforme rispetto ad un sistema galileiano.

Se chiamo con $\underline{F}' = \underline{F}(P, \dot{P}, t) - m\underline{a}_P^{(\tau)} - m\underline{a}_P^{(c)}$

ottengo

$$m\underline{a}_P^{(r)} = \underline{F}' + \underline{\phi}$$

Nel caso sia noto il moto della terna non inerziale

$\underline{F}'(P, \dot{P}, t)$ $\qquad$ $P, \dot{P}$ posizione e velocità di P nel sistema non inerziale.

$\underline{F}'(P, \dot{P}, t)$ è il risultante delle forze attive sia effettive che apparenti.

Un punto materiale è in equilibrio in $\mathcal{E}'$ se

$\vec{F} - m\underline{a}_P^T + \underline{\Phi} = 0$ l'equazione si ricava da quella generale considerando che

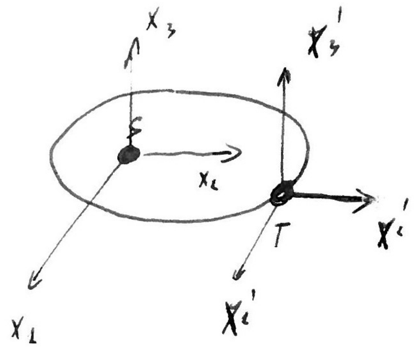
$\underline{a}_P^{(r)} = 0$ $\underline{a}_P^{(c)} = 2\underline{\omega}_T \times \underline{v}_r = 0$

essendo $\underline{v}_r = 0$.

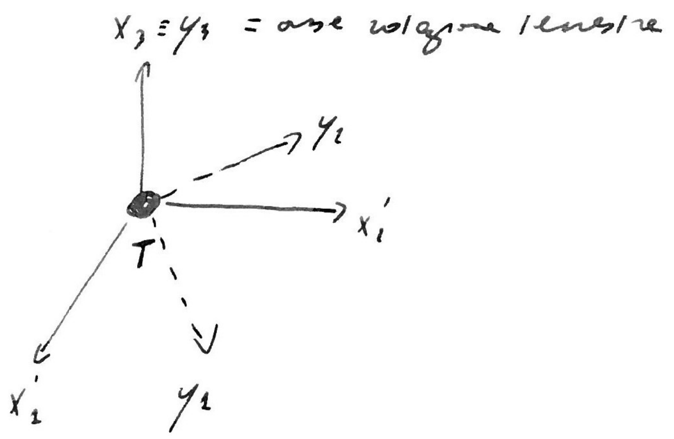
Un punto materiale P è in equilibrio in $\mathcal{E}'$ se e solo se il vincolo è in grado di fornire una forza

$\underline{\phi} = -\underline{F} + m\underline{a}_T$

*) Considero un sistema di riferimento incentrato nel sole e orientato con le stelle fisse (sistema di rif. inerziale) e un sistema di riferimento con centro nella terra e orientato con gli assi paralleli al sistema inerziale.

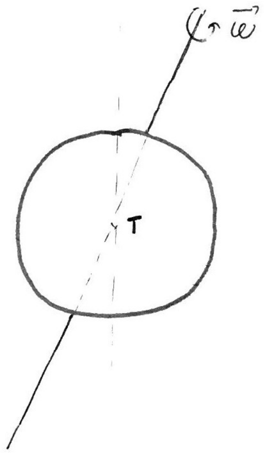


Il moto della terna mobile è traslatorio rispetto alla terna fissa inoltre poiché $\vec{\sigma}_T$ può essere considerata in un lasso di tempo relativamente piccolo uniforme il moto della terna mobile sarà traslatorio uniforme.
Tale terna può essere considerata inerziale.



Una terna solidale alla terra ruota intorno al sistema inerziale con velocità angolare $\underline{\omega}_T = \frac{2\pi}{24 ore} = 7\cdot 10^{-5} \frac{rad}{s}$

(abbiamo trascurato il moto di precessione della terra)



$$\underline{\omega}_T = 7\cdot 10^{-5}\, sec^{-1}$$

$$\underline{a}_r = -\underline{\omega}_T^2 (P-P^*)$$

$$\underline{a}_c = \underline{\omega}_T \times \underline{v}_r$$

*/ Forza gravitazionale in un sistema solidale alla terra.

Essendo la densità della terra ρ_M una funzione del raggio (la densità è costante ad una distanza finita r dal centro della terra) si dimostra che la forza esercitata da un punto materiale e la terra è equivalente alla forza gravitazionale esercitata dal punto stesso e da un punto materiale di massa M_T (massa Terrestre) posto nel centro della terra T.

$$\underline{A} = \text{forza gravitazionale} = -f \frac{m M_T}{R^3} (P - T)$$

Nel sistema di riferimento terrestre un punto libero soggetto alla forza gravitazionale avrà un'equazione del moto della forma

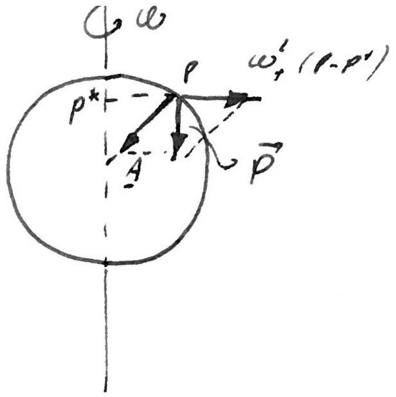
$$m a_P^{(r)} = \underline{A} + \underline{F} + m\omega_T^2 (P-P^*) - 2m\underline{\omega}_T \times \underline{v}_P^{(r)}$$

Un punto materiale soggetto alla sola forza peso è in equilibrio nel sistema di rif. solidale alla terra se

$$0 = \underline{A} + \underline{\psi} + m\omega_T^2 (P-P^*)$$

$$\underline{\psi} = -\underline{A} - m\omega_T^2 (P-P^*) = + f\frac{m M_T}{R^3}(P-T) - m\omega_T^2 (P-P^*)$$

Il peso $\vec{P} = -\underline{\psi}$ è la forza che deve essere equilibrata affinché il corpo sia in equilibrio



$$\vec{P} = m\vec{g}$$

$$\vec{g} = -f\frac{M_T\,(P-T)}{R^3} + \omega_T^2\,(P-P^*)$$

La forza peso $\vec{P} \leq \vec{A}$

$\vec{P} = \vec{A}$ ai poli, sono $P = P^*$.

*) L'equazione del moto di un punto P soggetto alla gravità terrestre è (nel sistema terrestre)

$m\underline{a}_p = \vec{P} + \vec{F} - 2m\,\omega_T \times \underline{v}_p$ se $\underline{v}_p$ cioè la velocità del punto P rispetto al sistema solidale alla terra è trascurabile $m\underline{a}_p = \vec{P} + \vec{F}$.

Lavoro elementare di una forza

Sia $(\underline{F}, P)$ una forza applicata nel punto P,

si definisce lavoro elementare della forza P

$dL = \vec{F} \cdot dP$ dove $dP = \underline{v}\, dt$ è lo spostamento

infinitesimo del punto soggetto alla forza $\vec{F}$.

$dL = F\,|dP| \cos\alpha$

*) Il lavoro elementare dL è pari al modulo della forza per lo spostamento elementare nella direzione della forza stessa oppure dL è pari al prodotto del modulo dello spostamento per la componente della forza lungo tale spostamento.

$\alpha < 0$ $dL > 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{il lavoro si dice motore e} \\ F \text{ forza motrice} \end{array} \right.$

$\alpha > 0$ $dL < 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{il lavoro si dice resistente e} \\ F \text{ forza resistente.} \end{array} \right.$

*) Considera una forza F che dipende solo dalla posizione del punto (forza posizionale)

$$F(P) \qquad F(x_1, x_2, x_3)$$

Se esiste una funzione $U(x_1, x_2, x_3)$ tale che

$$\begin{cases} \dfrac{\delta U}{\delta x_1} = F_{x_1} \\ \dfrac{\delta U}{\delta y_1} = F_{y_1} \\ \dfrac{\delta U}{\delta z_1} = F_{z_1} \end{cases}$$

si dice che la forza deriva dal potenziale $U(x_1, x_2, x_3)$

$$\frac{\delta U}{\delta x_i} = F_{x_i} \qquad \underline{F} = \nabla U = \mathrm{grad}\, U.$$

In tal caso abbiamo

$$dL = \vec{F}(P)\, dP = F_{x_1}\, dx_1 + F_{x_2}\, dx_2 + F_{x_3}\, dx_3 =$$

$$= \frac{\delta U}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta U}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta U}{\delta x_3} dx_3 = dU \text{ (differenziale di } U)$$

Il differenziale dL è un differenziale esatto cioè esiste una funzione $U(x_1, x_2, x_3)$ t.c. $dL = dU$.

Viceversa se dL è un differenziale esatto

$$dL = F_{x_1} dx_1 + F_{x_2} dx_2 + F_{x_3} dx_3 = dU = \frac{\delta U}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta U}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta U}{\delta x_3} dx_3$$

la forza deriva dal potenziale U e si ha

$$\nabla U = \vec{F}.$$

*) Condizione necessaria e sufficiente affinché $\vec{F} = \nabla U$ è che

$$dL = \vec{F}\, dP = dU$$

Se $dL = \sum_{i=1}^{3} \frac{\delta U}{\delta x_i} dx_i = dU$

$L = U + cost.$

*) Ogni forza centrale deriva da un potenziale U.

$\underline{F} = \pm F(\rho) \frac{(P-O)}{\rho} \qquad \rho = \overline{PO}$

$$dL = \pm F(\rho) \frac{(P-O)}{\rho} d(P-O) = \pm \frac{1}{2} F(\rho) \frac{1}{\rho} d(P-O)^2 =$$

$$= \pm \frac{1}{2} F(\rho) \frac{1}{\rho} d\rho^2 = \pm F(\rho) d\rho = \pm d\left(\int F(\rho) d\rho\right) = dU$$

Si ricava che

$U = \int F(\rho) d\rho$

Se considero il caso della forza di attrazione Newtoniana

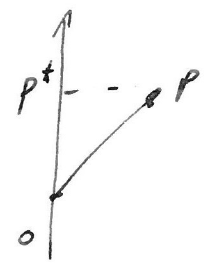
$$F = -\frac{GMm}{\rho^2}$$

$$U = -GMm \int \frac{1}{\rho^2}\, d\rho = \frac{GMm}{\rho} + \text{costante}$$

*) La forza peso deriva da un potenziale U.

Basta dimostrare che la forza di trascinamento

$\underline{F} = m\,\omega_T^2 (P-P^*)$ deriva da un potenziale U.



$$dL = \underline{F}\, dP = m\omega_T^2 (P-P^*)\, d(P-O) =$$

$$= m\,\omega_T^2 (P-P^*)\, d\left[(P-P^*) + (P^*-O)\right] =$$

$$= \cancel{m\omega_T^2 (P-P^*)\, d(P^*-O)} + m\,\omega_T^2 (P-P^*)\, d(P-P^*)$$

$$= \frac{m\omega_T^2}{2}\, d(P-P^*)^2 = dU$$

$V = \frac{1}{2} m \omega_T^2 (P - P^*)^2 + cost.$

*) Integrale curvilineo.

Siano $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ le equazioni parametriche del moto

di un punto P soggetto ad una forza F dipendente

dalla sola posizione.

Dall'equazione parametrica del moto posso ricavare

la legge oraria $s = s(t)$ e ancora $t = t(s)$

$(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) = \dot{s}^2(t))$

facendo un cambiamento di variabile $t \to s$ nelle

equazioni cartesiane del moto ottengo

$\begin{cases} x = \varphi(s) \\ y = \psi(s) \\ z = \chi(s) \end{cases}$

$$L = \int F_x(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))\,dx + F_y(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))\,dy + F_z(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))\,dz =$$

$$= \int F_x \frac{dx}{ds}\cdot ds + F_y \frac{dy}{ds}\cdot ds + F_z \frac{dz}{ds}\,ds =$$

$$= \int_{s_i}^{s_f} \left[F_x(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))\,\dot{\varphi}(s) + F_y(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))\,\dot{\psi}(s) + F_z(\varphi(s),\psi(s),\chi(s))\,\dot{\chi}(s)\right] ds$$

(tale integrale prende il nome di integrale curvilineo, è un integrale nella sola variabile s).

Il lavoro espresso dall'integrale curvilineo non dipende dall'equazione oraria con cui si percorre una traiettoria ma solo dall'arco di traiettoria percorso.

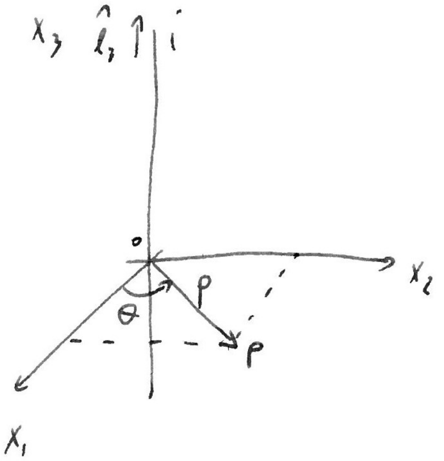
Se la forza deriva da un potenziale U uniforme (un potenziale U si dice uniforme se assume in un punto (x_1, x_2, x_3) dello spazio sempre lo stesso valore) allora

$\int dL = \int dU = U_f - U_i$ inoltre se il punto P descrive un cammino chiuso il lavoro è nullo.

Si dice in questo caso che la forza è conservativa o che $\oint \vec{F}\, d\vec{s} = 0$ (la circuitazione di $\vec{F}$ è nulla).

Esempio di potenziale non uniforme

Considero un filo infinito attraversato da corrente elettrica i.



Dalla legge di Biot-Savart il campo magnetico $\underline{B}$ generato in un punto P vale

$$\underline{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho^2} \vec{l}_3 \times (P-O)$$

Se $\underline{u} = \text{vers}\,(P-O)$

$$B = \frac{\mu_0 i \, \vec{l}_3 \times \rho \underline{u}}{2\pi\rho^{\cancel{2}}}$$

in coordinate polari

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\theta \\ x_2 = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\underline{l}_3 \times \underline{u} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \end{vmatrix} = (-\text{sen}\,\theta, \cos\theta, 0)$$

$$\underline{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\rho}\left(-\text{sen}\,\theta\, \underline{l}_1 + \cos\theta\, \underline{l}_2\right)$$

$$\operatorname{Tg}\theta = \frac{x_2}{x_1}$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{\delta\theta}{\delta x_1} = \frac{1}{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}\left(-\frac{x_2}{x_1^2}\right) = -\frac{\cancel{x_1^2}}{x_1^2+x_2^2}\cdot\frac{x_2}{\cancel{x_1^2}} =$$

$$= -\frac{\rho \operatorname{sen}\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta} = -\frac{\cancel{\rho}\operatorname{sen}\theta}{\rho^{\cancel{2}}}$$

$$\frac{\delta\theta}{\delta x_2} = \frac{1}{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}\left(\frac{1}{x_1}\right) = \frac{x_1^{\cancel{2}}}{x_1^2+x_2^2}\cdot\frac{1}{\cancel{x_1}} = \frac{\cancel{\rho}\cos\theta}{\rho^{\cancel{2}}}$$

$$\underline{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\rho}, \frac{\cos\theta}{\rho}\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{\delta\theta}{\delta x_1}, \frac{\delta\theta}{\delta x_2}\right)$$

$\frac{\mu_0 i}{2\pi}\theta$ è la funzione potenziale di $\underline{B}$ tuttavia

tale potenziale non è uniforme

$$\oint \underline{B}\, dP = \int dL = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi}\theta = \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{2\pi}}\mu_0 i$$ le circuitazioni diverse da zero.

*) Lavoro di una forza $\underline{F}(P,\dot{P},t)$

Siano $\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ y_1 = y_1(t) \\ z_1 = z_1(t) \end{cases}$ le equazioni parametriche del moto del punto soggetto alla forza F

$$L = \int_{P_0}^{P_1} \underline{F}(P,\dot{P},t)\, dP = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}(P,\dot{P},t) \frac{dP}{dt}\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \Big[F_{x_1}(x_1 -, \dot{x}_1 - t)\dot{x}_1 + F_{x_2}(x_1 -, \dot{x}_1 - t)\dot{x}_2 +$$

$$+ F_{x_3}(x_1 -, \dot{x}_1 -, t)\dot{x}_3 \Big] dt$$

Nel caso più generale il lavoro dipende anche dalle equazioni del moto di P.

Teorema della quantità di moto per un punto materiale

Si definisce quantità di moto del punto P il vettore

$m\vec{v}_p(t)$

$m\underline{a}_p = \underline{F}(P,\dot{P},t)$ essendo la massa costante nel tempo

$$\frac{d(m v_p)}{dt} = F(P,\dot{P},t)$$

*) La derivata rispetto al tempo della quantità di moto di un punto materiale è pari al risultante di tutte le forze effettive e apparenti agenti su tale punto.

$$\int_{t_0}^{t_1} d(m v_p) = m v_p(t_1) - m v_p(t_0) = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} F(P,\dot{P},t)\,dt}_{I\ =\ \text{impulso elementare}}$$

*) La variazione della quantità di moto di un punto P nell'intervallo di tempo (t_0, t_1) è uguale all'impulso

relativo allo stesso intervallo di tempo della forza totale agente sul punto.

Teorema del momento della quantità di moto per un punto materiale

Il momento della quantità di moto di un punto P rispetto ad un polo O è il vettore

$$(P-O)\times m\vec{v}_P(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left[(P-O)\times m\vec{v}_P(t)\right] = \left(\underline{v}_P(t)-\underline{v}_O(t)\right)\times m\vec{v}_P(t) + (P-O)\times m\,\vec{a}_P(t) =$$

$$= -m\,\underline{v}_O(t)\times \underline{v}_P(t) + (P-O)\times m\vec{a}_P(t)$$

Se il polo O è fisso

$$\frac{d}{dt}\left[(P-O)\times m\vec{v}_P(t)\right] = (P-O)\times m\,\underline{a}_P(t) = (P-O)\times \underline{F}(P,\dot{P},t)$$

*) La derivata temporale del momento della quantità di moto di P rispetto ad un polo fisso O è pari al momento delle forze agenti su P.

<u>Integrali primi di un moto centrale</u>

Rispetto ad un polo fisso O

$$\frac{d}{dt}\left[(P-O)\times m\underline{v}_P\right]=(P-O)\times\underline{F}$$

$$m\frac{d}{dt}\left[(P-O)\times\underline{v}_P\right]=(P-O)\times\underline{F}$$

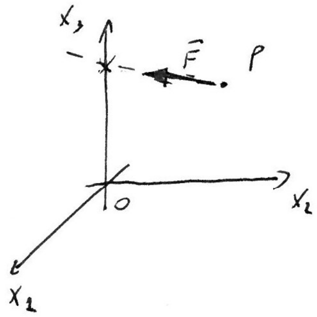
$$(P-O)=(x_1,x_2,x_3)$$

$$\underline{v}_P=(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)$$

$$\underline{F}=(F_{x_1},F_{x_2},F_{x_3})$$

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ F_{x_1} & F_{x_2} & F_{x_3} \end{Vmatrix}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{d}{dt}\left(x_2\dot{x}_3 - x_3\dot{x}_2\right) = x_2 F_{x_3} - x_3 F_{x_2} \\[2ex] m\dfrac{d}{dt}\left(x_3\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3\right) = x_3 F_{x_1} - x_1 F_{x_3} \\[2ex] m\dfrac{d}{dt}\left(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1\right) = x_1 F_{x_2} - x_2 F_{x_1} \end{cases}$$



Nel caso in cui la forza $\vec{F}$ sia sempre complanare ad una retta fissa (es. l'asse x_3), il momento di tale forza rispetto all'asse x_3 $M_{x_3} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1\right) = 0$$

$$x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 = \text{costante}$$

Tale equazione differenziale del primo ordine prende il nome di integrale primo del moto.

$x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1$ rappresenta il doppio della velocità areale della proiezione del punto P sul piano $x_3 = 0$

*) Se la forza agente su un punto P è sempre complanare ad una retta r allora la velocità areale della proiezione del punto P su un piano ortogonale a r è costante.

*) Se la forza è costantemente rivolta verso un polo O allora

$$x_i \dot{x}_j - x_j \dot{x}_i = K_i \quad i \neq j = 1, 2, 3 \quad \text{(integrale delle aree)}$$

la velocità areale del punto è costante.

Teorema delle forze vive per un punto materiale

Chiamo energia cinetica di un punto materiale

$$T = \frac{1}{2} m v_P^2$$

$$dT = \frac{1}{2} m \, d(v_P^2) = \frac{1}{2} m \, d(\underline{v}_P \cdot \underline{v}_P) = \frac{1}{2} m \underline{v}_P \, d\underline{v}_P + \frac{1}{2} m \underline{v}_P \, d\underline{v}_P =$$

$$= m \underline{v}_P \, d\underline{v}_P = m \underline{a}_P \underline{v}_P \, dt = m \underline{a}_P \, dP$$

$$m \underline{a}_P = \underline{F}(P, \dot{P}, t)$$

$$dT = \underline{F} \, dP = dL$$

$$dT = dL^{(e)} + dL^{(v)}$$

*) La variazione di energia cinetica di un punto materiale coincide con il lavoro compiuto da tutte le forze agenti sul punto.

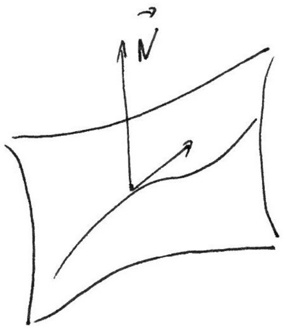
*) Il lavoro elementare delle forze complementari

$m\underline{a}_c = 2m\,\underline{\omega}_T \times \underline{v}$ è nullo

$$dL^{(c)} = 2m\underline{\omega}_T \times \underline{v}\; dP = 2m\underline{\omega}_T \times \underline{v} \cdot \underline{v}\, dt = 0$$

Se il sistema di riferimento è quello terrestre la variazione di energia cinetica del punto corrisponde al lavoro fatto dalle forze peso (è incluso anche il lavoro delle forze di trascinamento), da tutte le forze attive e dalle reazioni vincolari.

Il lavoro delle reazioni vincolari si annulla non solo se il punto è libero ma anche se è vincolato a restare su una superficie fissa e liscia.



$$dL^{(v)} = \phi\, dP = \underline{\phi}\, v_P\, dt = 0$$ essendo $\underline{\phi} \perp \underline{v}_P$

se il vincolo non è fisso

$$v_P = v_r + v_T$$

$$dL^{(v)} = \cancel{\underline{\phi}\, v_r\, dt} + \underline{\phi}\, v_T\, dt \neq 0 .$$

*) <u>Integrale dell'energia</u>

Considero il moto di un punto P ~~su~~ di un vincolo liscio e fisso soggetto a forze conservative

$d T = d L^{(a)} = d U$

$d T - d U = d (T - U) = 0$

$T - U =$ costante $\qquad -U =$ energia potenziale

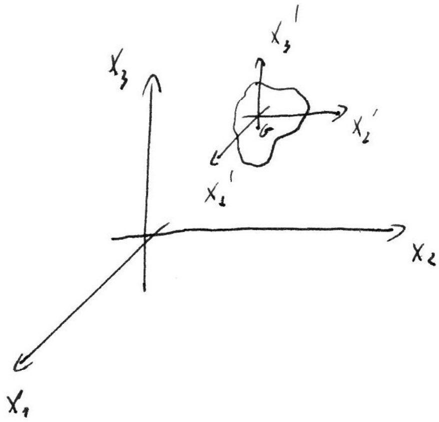
$\frac{1}{2} m \dot{P}^2(t) - U(P) =$ costante $= \frac{1}{2} m \dot{P}_0^2 - U(P_0)$

(integrale primo del moto).

Sistema di punti materiali

Sia $S = \{(P_s, m_s)\}|_{s=1 - N}$ un sistema di punti materiali

e $G - O = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{N} (P_s - O) m_s$ il baricentro di tale sistema



$\mathcal{E}'$ è una terna avente come origine il baricentro G e in moto traslatorio rispetto al sistema di riferimento fisso.

Se il sistema di punti materiali è rigido il moto di S rispetto a $\mathcal{E}'$ risulta moto intorno al baricentro, tale moto è sferico cioè rigido con un punto fisso G.

In tal caso

$$\underline{v}_{P_s} = \underline{v}'_{P_s} + \underline{v}^{(\tau)}_{P_s}$$

$$\underline{v}^{(\tau)}_{P_s} = \underline{v}_G \qquad \forall s = 1 - N$$

*) La quantità di moto d'un sistema di punti materiali è pari alla quantità di moto del punto massa (m, G).

$$\underline{Q}' = m \underline{v}_G' = \underline{0}$$

*) La quantità di moto di S nel sistema solidale al baricentro è nulla

Definisco momento delle quantità di moto di S rispetto a un polo O

$$\underline{K}_O = \sum_{s=1}^{N} (P_s - O) \times m_s \underline{v}_{P_s}$$

$$\underline{K}_O' = \sum_{s=1}^{N} (P_s - O) \times m_s \underline{v}_{P_s}'$$ è il momento delle quantità di moto calcolato rispetto al sistema baricentrale.

*) Nel sistema baricentrale il momento delle quantità di moto di S non dipende dal polo scelto.

$$K'_O = K'_Q + (Q-O) \times \underbrace{\sum_{s=1}^{n} m_s \underline{v}'_{P_s}}$$

Q' = quantità di moto di S nel sistema baricentrale $= 0$

$$K_O = \sum_{s=1}^{N} (P_s - O) \times m_s \underline{v}_s = \sum_{s=1}^{N} (P_s - O) \times m_s (\underline{v}'_{P_s} + \underline{v}_G) =$$

$$= \underbrace{\sum_{s=1}^{N} (P_s - O) \times m_s \underline{v}'_{P_s}}_{\overset{\shortparallel}{K'_O}} + \underbrace{\sum_{s=1}^{n} (P_s - O) \times m_s \underline{v}_G}_{\overset{\shortparallel}{(G-O) \times m \underline{v}_G}}$$

momento del baricentro rispetto al polo O.

*) Il momento delle quantità di moto di S rispetto ad un polo O è pari al momento delle quantità di moto di S calcolate nel polo O rispetto al sistema

baricentrale più il momento della quantità di moto rispetto al polo o del baricentro se in esso fosse concentrata la massa del sistema.

*) Il momento della quantità di moto di S calcolato rispetto al baricentro ($G = O$) nel sistema fisso coincide con il momento della quantità di moto di S nel sistema baricentrale.

$$K_G = K'$$

Teorema di Koenig

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \underline{v}_{ps}^2$$

energia cinetica del sistema di punti materiali nel moto assoluto.

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \underline{v}'^2_{ps}$$

energia cinetica del sistema di punti materiali nel sistema baricentrale.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \underline{v}_{ps}^2 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \left(\underline{v}'_{ps} + \underline{v}_G \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s v'^2_{ps} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s v_G^2}_{= \frac{1}{2} m v_G^2} + \underbrace{\sum_{s=1}^{N} m_s \underline{v}'_{ps} \underline{v}_G}_{= Q' = 0}$$

$Q' = 0$ quantità di moto di S nel sistema baricentrale

*) L'energia cinetica di S nel moto assoluto è pari all'energia cinetica di S nel sistema baricentrale più l'energia cinetica del baricentro se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema.

Equazioni cardinali della dinamica nella I forma

Sia $\{P_s, m_s\}_{s=1 - N}$ un sistema di punti materiali

Indichiamo $\vec{F}_s^{(i)}$ il risultante delle forze interne

(mutue forze esplicate tra i punti del sistema stesso) e con

$\vec{F}_s^{(e)}$ il risultante delle forze esterne (forze attive, apparenti, fittizie, vincolari) agenti sul punto P_s.

$$m_s a_s = F_s^{(i)} + F_s^{(e)}$$

$m_s a_s - \vec{F}_s^{(e)} = F_s^{(i)}$ Poiché il sistema $\{P_s, F_s^{(i)}\}_{s=1 - N}$

è equilibrato, anche il sistema $\{P_s, m_s a_s - \vec{F}_s^{(e)}\}_{s=1 - N}$

sarà equilibrato pertanto

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{s=1}^{n} (m_s a_s - \vec{F}_s^{(e)}) = 0 \\ \displaystyle\sum_{s=1}^{n} (P_s - O) \times \left[m_s \underline{a}_s - \vec{F}_s^{(e)} \right] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^{n} m_s \underline{a}_s = \sum_{s=1}^{n} \vec{F}_s^{(e)} = \underline{R}^{(e)}(\vec{P}_1 - \vec{P}_n, \vec{v}_{P_1} - \vec{v}_{P_n}, t) \\ \sum_{s=1}^{n} (P_s - O) \times m_s \underline{a}_s = \sum_{s=1}^{n} (P_s - O) \times \vec{F}_s^{(e)} = \underline{M}^{(e)}(\vec{P}_1 - \vec{P}_n, \vec{v}_{P_1} - \vec{v}_{P_n}, t) \end{cases}$$

(equazioni cardinali della dinamica nella I forma).

Tali equazioni vettoriali non sono sufficienti a descrivere l'equazione del moto del sistema di punti materiali poiché nulla dicono sulle forze interne e quindi sulle caratteristiche fisiche del sistema stesso.

Tuttavia se il sistema è rigido (6 gradi di libertà) esse sono sufficienti a descrivere il moto del sistema fissate le condizioni iniziali.

Equazioni cardinali della dinamica nella seconda forma

Consideriamo il sistema di punti materiali

$$\{P_s, m_s\}_{s=1 \ldots N}$$

$$\underline{Q} = \sum_{s=1}^{n} m_s \underline{v}_s$$

$$\frac{d\underline{Q}}{dt} = \sum_{s=1}^{n} m_s \frac{d\underline{v}_s}{dt} = \sum_{s=1}^{n} m_s \underline{a}_s = \underline{R}^{(e)}$$

$$\frac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^{(e)}$$ (I eq. cardinale della dinamica nella II forma)

$$\frac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^{(e)} = m\ddot{\underline{G}}$$

*) Il baricentro di un sistema di punti materiali si muove come se avesse massa uguale a quella di tale sistema e soggetto alla risultante delle forze esterne.

Se $\underline{R}^{(e)}(\underline{G}, \dot{\underline{G}}, t)$ cioè la risultante delle forze esterne dipende solo dalla posizione del baricentro e dalla sua velocità allora l'equazione della forza esterna risultante è sufficiente a descrivere il moto del baricentro.

*) Se il sistema è isolato cioè $\underline{R}^{(e)} = 0$

$$m\ddot{\underline{G}} = 0 \qquad \dot{\underline{G}} = \text{costante} = \underline{G}_0$$

$$\underline{G}(t) = \underline{v}_G^{(0)} t + \underline{G}_0$$

Il moto del baricentro è rettilineo uniforme e nessuna azione interna al sistema può modificare tale stato.

Considero un Sistema S i punti materiali soggetto a un risultante $\underline{R}^{(e)} = 0$.

Supponiamo che una parte del sistema venga espulsa

(G', m') = punto massa parte restante

(G'', m'') = punto massa parte espulsa

$m = m' + m''$ = massa totale sistema

G = baricentro del sistema totale.

$(G-O)m = m'(G'-O) + m''(G''-O)$ derivando rispetto al tempo

$m\underline{v}_G = m'\underline{v}_{G'} + m''\underline{v}_{G''}$

$\underline{v}_{G'} = \frac{m}{m'}\underline{v}_G - \frac{m''}{m'}\underline{v}_{G''}$

La velocità del baricentro di tutto il sistema $\underline{v}_G$ resta costante ma la velocità $\underline{v}_{G'}$ può variare al variare di $\underline{v}_{G''}$.

In tal modo può essere pilot~~ata~~ un'astronave in assenza di forze esterne.

Le forze interne sono rappresentate dalla mutua azione dei punti massa (G'', m'') e (G', m') e $(\underline{G}'', \underline{F})$ corrisponde la reazione $(\underline{G}', -\underline{F})$

I veicoli a reazione sfruttano proprio l'azione della parte espulsa sul sistema.

* Se la risultante delle forze esterne è della forma $\underline{R}^{(e)}(G, \dot{G}, t)$ allora $m\underline{a}_G = \underline{R}^{(e)}$, il moto del baricentro è univocamente determinato;

se $\underline{R}^{(e)}(P_1 - P_N, v_{P_1} - v_{P_N}, t)$ il moto del baricentro può variare al variare delle forze interne.

Consideriamo il caso di un paracadutista, la $\underline{R}^{(e)}$ è data dalla forza peso più la forza di attrito dell'aria che varia secondo la struttura del paracadute e quindi dipende dal moto dei punti del sistema (paracadute + uomo); è possibile tramite forze interne modificare la posizione del paracadute nell'aria e quindi far variare il moto del centro di massa.

Nel caso il paracadute si trovasse nel vuoto l'unica forza esterna sarebbe la forza peso; il moto del centro di massa non potrebbe variare applicando forze interne. È questo il motivo per cui alcuni fenomeni quali il volo degli uccelli o dei rivoli ed elica non possono avvenire nel vuoto.

*) II equazione cardinale della dinamica nella II forma.

$$\{P_s, m_s\}_{s=1 - N}$$

Il momento delle quantità di moto vale

$$\underline{K}_0 = \sum_{s=1}^{N} (P_s - O) \times m_s \underline{v}_{ps}$$

$$\frac{d\underline{K}_0}{dt} = \sum_{s=1}^{N} (v_{ps} - v_0) \times m_s \underline{v}_{ps} + \sum_{s=1}^{N} (P_s - O) \times m_s \underline{a}_{ps} =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} - v_0 \times m_s \underline{v}_{ps} + \underline{M}_0^{(e)} = - v_0 \times \underline{Q} + \underline{M}_0^{(e)}$$

$$\frac{d\underline{K}_0}{dt} = - v_0 \times \underline{Q} + \underline{M}_0^{(e)}$$ (II eq. cardinale della dinamica)

Se il polo O è fisso oppure $O = G$

$$\frac{d\underline{K}_0}{dt} = \underline{M}_0^{(e)}$$

*) Lavoro di un sistema di punti materiali

$$\{(P_s, \underline{F}_s)\}_{s=1 — N}$$

Il lavoro elementare dL del sistema vale

$$dL = \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s \, d\underline{P}_s$$

Supponiamo che le sollecitazioni esterne siano posizionali

$$\underline{F}_s \Big(\underbrace{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}}_{\vec{P}_1}, \text{———}, \underbrace{x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)}}_{\vec{P}_N} \Big) \qquad s = 1 — N$$

Si dice che $\underline{F}$ deriva da un potenziale se esiste

una funzione $U(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)} \text{———} x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, x_3^{(N)})$ tale che

$$\begin{cases} F_1^{(s)} = \dfrac{\delta U}{\delta x_1^{(s)}} \\ F_2^{(s)} = \dfrac{\delta U}{\delta x_2^{(s)}} \\ F_3^{(s)} = \dfrac{\delta U}{\delta x_3^{(s)}} \end{cases} \qquad s = 1 — N$$