Successioni e Serie numeriche

Successioni

Def.

Una successione è una funzione che associa ogni numero naturale ad un numero reale

es. l'insieme dei numeri pari

$a_n = 2n = 0; 2; 4$

l'insieme dei numeri dispari

$a_n = 2n+1 = 1; 3; 5$

Modi di esprimere una successione:

1) x enumerazione $0; 3; 6 \dots$ (multipli di 3)

2) mediante espressione analitica $a_n = 3n$

3) rappresentazione ricorsiva

Consiste nel formulare il I termine della successione e una relazione che lega il termine a_n a quello precedente.

$\boxed{\text{Successioni limitate}}$

Una successione è <u>limitata superiormente</u> se

$\exists M$ t.c. $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Una successione è <u>limitata inferiormente</u> se

$\exists m$ t.c. $a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Una successione è <u>limitata</u> se

$\exists M ; \exists m$ t.c. $m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Successioni monotone

Def.

Una successione è monotone crescente se $a_{n+1} > a_n$

Una successione è monotone decrescente se $a_{n+1} < a_n$

Proprietà delle successioni monotone

Una successione monotone crescente e limitata superiormente è convergente cioè esiste
$\lim_{n \to \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

Una successione monotone decrescente e limitata inferiormente è convergente cioè esiste
$\lim_{n \to -\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

Una successione monotone crescente illimitata
è convergente a $+\infty$

Una successione monotone decrescente illimitata
è convergente a $-\infty$

Limite di una successione

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

$\forall M \quad \exists\, p_n$ t.c. $a_n > M \quad \forall\, n > (p_n)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, p_\varepsilon$ t.c. $|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall\, n > p_\varepsilon$

Progressione aritmetica

Def.

La progressione aritmetica è una successione numerica in cui la differenza tra ogni termine e il precedente è costante.

1) Def. ricorsiva

$a_0 = 0$

$a_n - a_{n-1} = d$ $\qquad$ d: ragione della progressione

$n=0 \quad a_0 = 0$

$n=1 \quad a_1 - a_0 = d$

$n=2 \quad a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d = a_0 + \underbrace{d + d}_{2d}$

$n=3 \quad a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = a_0 + \underbrace{d + d + d}_{3d}$

2) Def. analitica

$a_n = a_0 + n d$

$\boxed{\text{Convergenza di una successione geometrica}}$

Consideriamo $\lim_{n\to\infty} a_n = q^{n-1} a$ $\qquad \boxed{q \neq 0 \quad q \neq 1}$

$\boxed{q > 1}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_1 > 0 \\ -\infty & \text{se } a_1 < 0 \end{cases}$

$\boxed{-1 < q < 1 \quad (q \neq 0)}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ con la particolarità che per $-1 < q < 0$ la successione è alternata convergente a 0.

$\boxed{q < -1}$ non esiste il limite e la successione è alternata tra valori positivi e negativi.

$\boxed{\text{Progressione geometrica}}$

Una progressione geometrica è una successione geometrica quando il quoziente tra un termine e il precedente è pari a q con $q \neq 0$.

1) Def. ricorsiva

$$a_1 = a$$
$$a_n = q\, a_{n-1}$$

$n = 1 \quad a_1 = a$

$n = 2 \quad a_2 = q a_1 = q a$

$n = 3 \quad a_3 = q a_2 = q q a = q^2 a$

$\vdots$

2) Def. analitica

$$a_n = q^{n-1} a$$

Principio di induzione

Data una proposizione $P(n)$ se

1) $P(k)$ = vera per un certo k

2) $P(n)$ vera $\Longrightarrow$ $P(n+1)$ vera

allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq k$

Serie numeriche

Def.

Data una successione a_n si definisce serie numerica la somma dei suoi termini

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \text{———} + a_n$$

1) Una serie è convergente se esiste

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

2) Una serie è divergente positivamente se

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = +\infty$$

3) Una serie è divergente negativamente se

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = -\infty$$

4) Una serie è indeterminata se non è né convergente né divergente.

Serie geometrica

Si definisce serie geometrica la serie generata dalla successione geometrica

$$a_n = q^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \text{——} + q^n$$

Dimostriamo per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{q^n - 1}{q-1}$$

1) La proposizione è vera per $n=1$

$$\sum_{k=1}^{1} q^{k-1} = \frac{q^1 - 1}{q-1} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$q^0 = 1$$

2) Supponiamo che sia vera per n

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{q^{n}-1}{q-1}$$

$\Downarrow$? dimostriamo che ciò implica sia vera per n+1

$$\sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + q^{n}$$

|| per ipotesi

$$\frac{q^{n}-1}{q-1} + q^{n} = \frac{q^{n}-1+q^{n}(q-1)}{(q-1)}$$

$$= \frac{\cancel{q^{n}}-1+q^{n+1}-\cancel{q^{n}}}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Convergenza della serie geometrica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

1) $q \geq$ il limite fa $+\infty$ e la serie diverge

2) $-1 < q < 1$ $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{1-q}$

3) $q \leq -1$ è indeterminata e non esiste il limite.