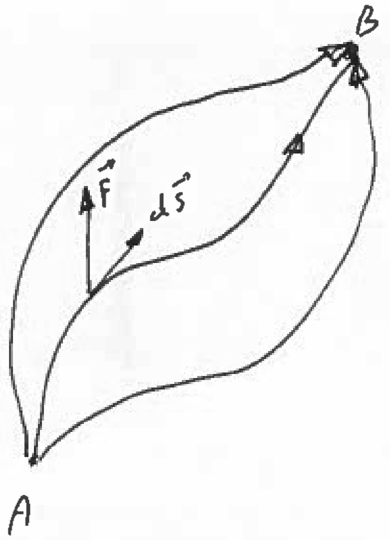
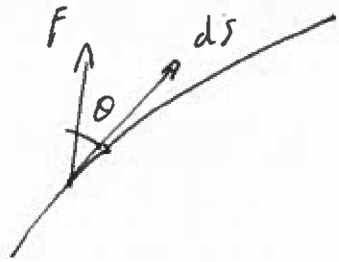
Forze conservative e conservazione dell'energia meccanica

Una forza $\vec{F}$ si dice conservativa se il lavoro fatto per portare un corpo da un punto A ad un punto B non dipende dal percorso seguito ma solo dalle posizione del punto iniziale e finale.





$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = \int_A^B F\, ds \cos\theta$$

$\vec{F}$ è conservativa $\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = L_{AB}$

è indipendente dal percorso scelto

$\vec{F}$ è conservativa $\iff$ $\oint \vec{F}\, d\vec{s} = 0$

$\vec{F}$ è conservativa $\iff$ $\text{rot} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

Se $\vec{F}$ è conservativa è possibile definire

un potenziale U t.c.

$$L_{AB} = U_A - U_B = -\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = -\int_A^B F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

da cui
$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \qquad \vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot U$$

Conservazione dell'energia meccanica

$$L_{AB} = U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = -\int_A^B \vec{F}\, \frac{d\vec{s}}{dt}\, dt = -\int_A^B \vec{F}\, \vec{v}\, dt$$

$$L_{AB} = -\int_A^B m\, \frac{d\vec{v}}{dt}\, \vec{v}\, dt = -\int_A^B m\, \vec{v}\, d\vec{v} = -\int_A^B \frac{m}{2}\, dv^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} m v_A^2$$

Si indica con $\frac{1}{2} m v^2$ l'energia cinetica E_c

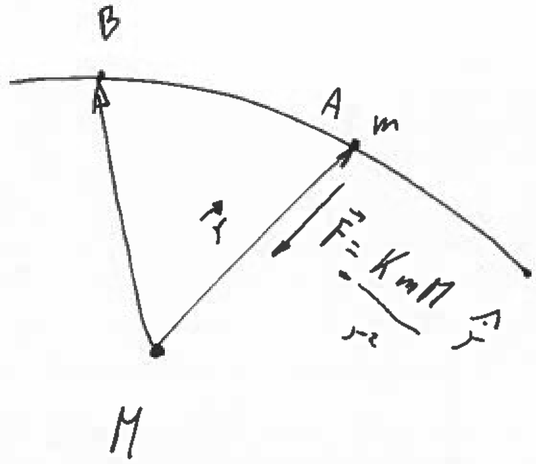
se la forza è conservativa vale la conservazione dell'energia meccanica

$U_B + E_c^{(B)} = U_A + E_c^{(A)}$ dove l'energia cinetica è la somma del potenziale e dell'energia cinetica.

Esempi di forze conservative

Ogni forza centrale è conservativa.

Una forza è centrale se è sempre diretta verso un punto fisso. Un esempio è la forza gravitazionale supposta una massa fissa o la forza attrattiva-repulsiva di due cariche elettriche supposta una carica fissa.



$\hat{r}$ = versore del raggio che definisce la posizione di m rispetto a M.

$$U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = +\int_A^B \frac{KmM}{r^2}\, \hat{r}\, d\vec{s}$$

scompongo lo spostamento $d\vec{s}$ in una componente parallela al raggio $\hat{r}$ $ds_{\parallel}$ e in una componente ortogonale a $\hat{r}$ $ds_{\perp}$.

$$U_B - U_A = \int_A^B \frac{KmM}{r^2}\, \hat{r}\, ds_{\parallel} + \int_A^B \frac{KmM}{r^2}\, \hat{r}\, ds_{\perp}$$

il secondo termine è nullo perché lo spostamento è ortogonale alla forza.

$$U_B - U_A = \int_A^B \frac{KmM}{r^2}\, \hat{r}\, ds_{\parallel} = \int_A^B \frac{KmM}{r^2}\, dr = -\left[\frac{KmM}{r}\right]_A^B$$

$$U_B - U_A = -\frac{KmM}{r_B} + \frac{KmM}{r_A}$$

$$\boxed{U = -\frac{KmM}{r}}$$

Verifichiamo che la forza gravitazionale è conservativa dimostrando che $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

$$\vec{F} = \frac{1}{r^2}\hat{r} = -\frac{1}{r^3}(x,y,z) = -(x,y,z)\frac{1}{\left[(x^2+y^2+z^2)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} ; \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} ; \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$F_z = -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right) = -z\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cancel{2}y =$$

$$= +3zy(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$F_y = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

7)

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = -y\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cancel{2}z = 3yz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$-\frac{\partial F_y}{\partial z} = -3yz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$$

analogamente

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0$$

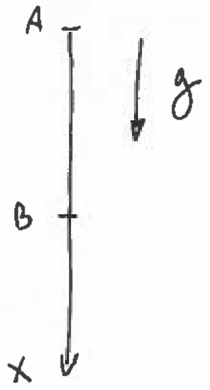
Potenziale per cariche elettriche puntiformi

Analogamente a quanto visto per la forza gravitazionale il potenziale fra due cariche elettriche puntiformi (con una firma) vale:

$$V = \frac{-|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$ se la forza tra le cariche è attrattiva

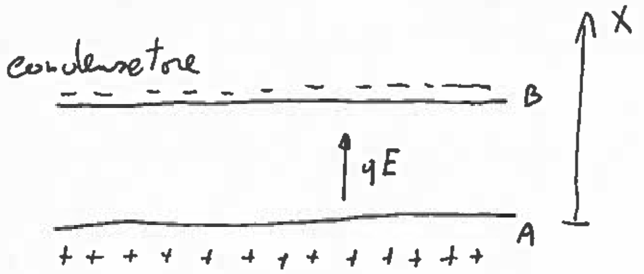
$$V = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$ se la forza tra le cariche è repulsiva.

Potenziali per forze costanti



$$V_B - V_A = -\int_A^B g\,dx = -g(x_B - x_A)$$

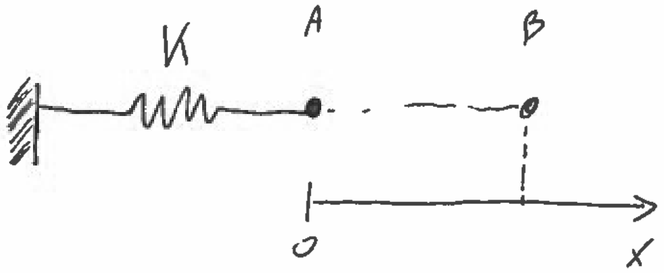
$$V = -g\,x$$



$$V_B - V_A = -\int_A^B qE\,dx = -qE(x_B - x_A)$$

$$q\,\Delta V = -qEx$$

Potenziale per forza elastica



$$\boxed{F = -Kx}$$

La forza elastica per una molla vale $F = -Kx$ dove K è la costante elastica e x è lo spostamento dalla posizione di equilibrio.

$$V_B - V_A = -\int_A^B -Kx\,dx = \frac{Kx_B^2}{2} - \frac{Kx_A^2}{2}$$

$$\boxed{V = \frac{Kx^2}{2}}$$

Equazioni di Lagrange dalla conservazione dell'energia

Partendo dalle equazioni di Newton

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

A questo punto consideriamo uno spostamento virtuale δx_i cioè uno spostamento che non è necessariamente effettivo ma è compatibile con i vincoli del sistema.

Possiamo scrivere

$$m \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta \dot{x}_i}{\delta t}\right) \delta x_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \delta x_i$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}_i^2\right)\delta x_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i$$

Indicando con la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i) = T - U$$

con T = energia cinetica e

U = energia potenziale

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i) = \frac{\partial \mathcal{L}(x_i, \dot{x}_i)}{\partial x_i}$$

Con l'utilizzo delle equazioni di Lagrange si svincolano le equazioni dalle coordinate cartesiane.

Solitamente si indica con $\theta_1 - \theta_2 - \theta_n$ le variabili che definiscono i gradi di libertà del sistema con $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_N$ le loro derivate

rispetto al tempo e si scrivono le

equazioni del moto

$$\mathcal{L}(\theta_1 - \theta_N; \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_N) = T - V$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i}$$