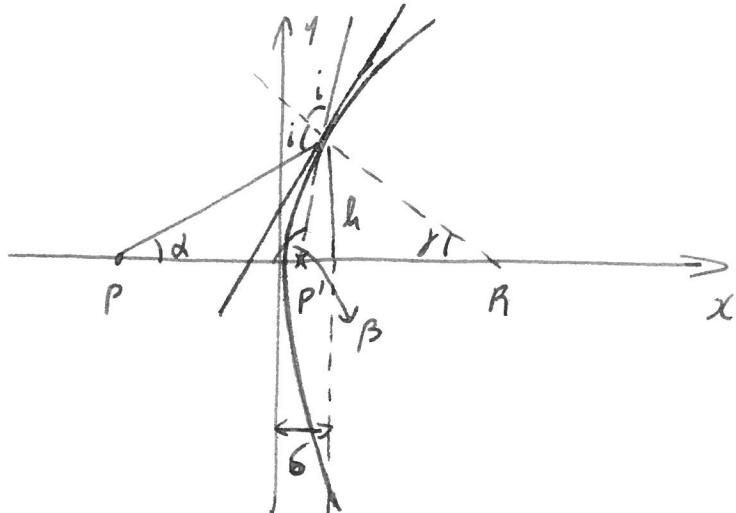


Immagini virtuali in uno specchio concavo.



$$\beta = \gamma + i$$

$$i = d + \gamma$$

$$\beta = d + 2\gamma$$

$$\frac{h}{p+\delta} = \operatorname{tg} \alpha \quad \frac{h}{\delta-p'} = \operatorname{tg} \beta \quad \frac{h}{R-\delta} = \operatorname{tg} \gamma$$

Se  $\alpha, \beta, \gamma$  sono piccoli:

$$\frac{h}{p+\delta} = \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha \quad \frac{h}{\delta-p'} = \beta \quad \frac{h}{R-\delta} \approx \gamma$$

$$\frac{h}{|S-p'|} = \frac{h}{|p+\delta|} + \frac{z h}{|R-\delta|}$$

$$S = R(1 - \cos \gamma) \quad \text{Se } \gamma \text{ è sufficientemente piccolo}$$

$\gamma \rightarrow 0 \quad \epsilon \delta \rightarrow 0$

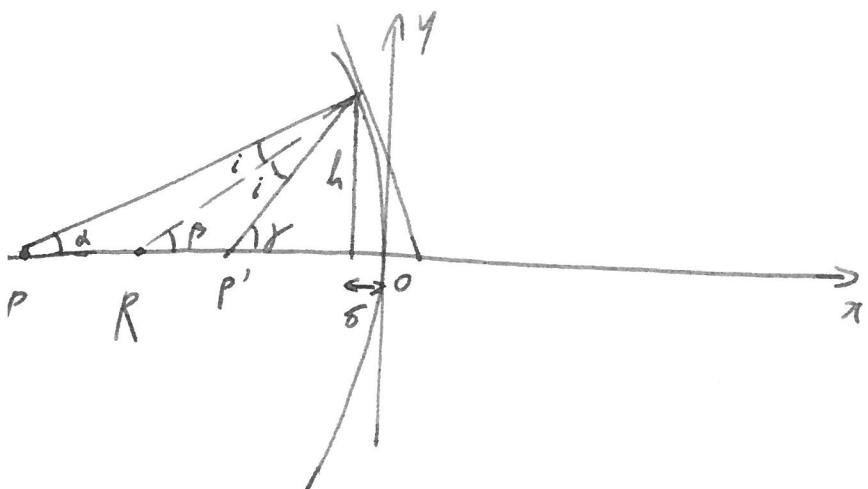
$$\frac{h}{p'} = \frac{h}{P} + \frac{z h}{R} \quad \text{cioè}$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{P} + \frac{z}{R} \quad \begin{aligned} &\text{l'immagine è anastigmatice} \\ &\text{per angoli di incidenza i piccoli:} \end{aligned}$$

Piché  $P$  e  $R$  sono lunghezze quindi positive

$p' > 0$  (uno spazio convesso dove  
immagini virtuali).

## Specchio concavo



$$d + i = \beta$$

$$\beta + i = \gamma$$

$$d + \gamma - \beta = \beta$$

$$d + \gamma = 2\beta$$

$$\frac{h}{|P - \delta|} = t_{\gamma} \alpha \quad \frac{h}{|R - \delta|} = t_{\gamma} \beta \quad \frac{h}{|P' - \delta|} = t_{\gamma} \gamma$$

per  $i \rightarrow 0 \quad \delta \rightarrow 0 \quad \epsilon$

$$\frac{h}{|P - \delta|} \simeq \alpha \quad \frac{h}{|R - \delta|} \simeq \beta \quad \frac{h}{|P' - \delta|} \simeq \gamma$$

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = \frac{2}{R}$$

Se per convenzione si assume che lo specchio  
conca ha raggio di curvatura negativo e  
che  $P'$  è negativo e sinistro di  $\sigma$

si ottiene la terna equazione dello specchio  
conca,

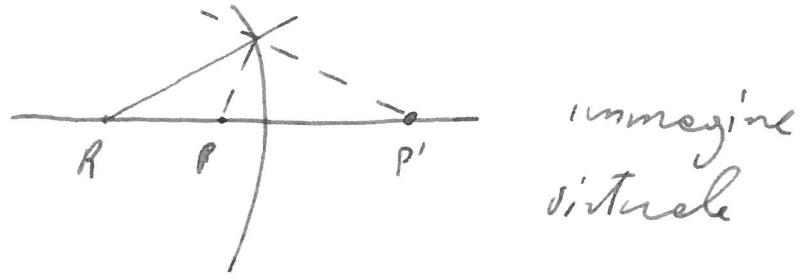
$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{P} + \frac{2}{R}$$

Se  $P < \frac{R}{2}$        $P' > \sigma$  (a destra di  $\sigma$ ) l'immagine è  
sinistra.

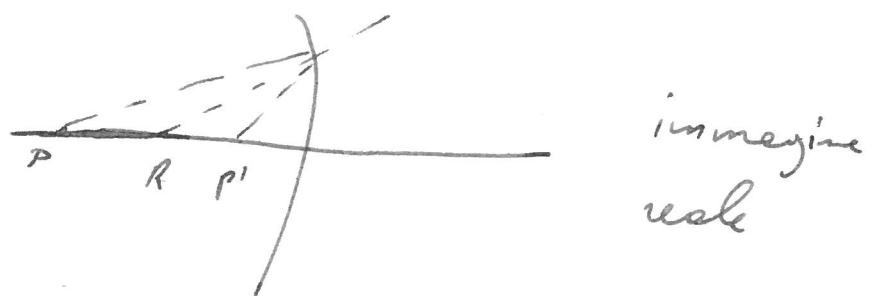
$$\text{Se } P = \frac{R}{2} \quad P' = +\infty$$

Se  $P > \frac{R}{2}$      $P' < \sigma$  l'immagine è reale

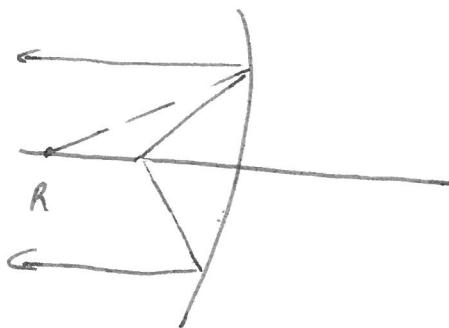
$$1) P < \frac{R}{2}$$



$$2) P > \frac{R}{2}$$



$$3) P = \frac{R}{2}$$



i raggi s'incurvano  
parallelamente e convergono  
all'infinito.

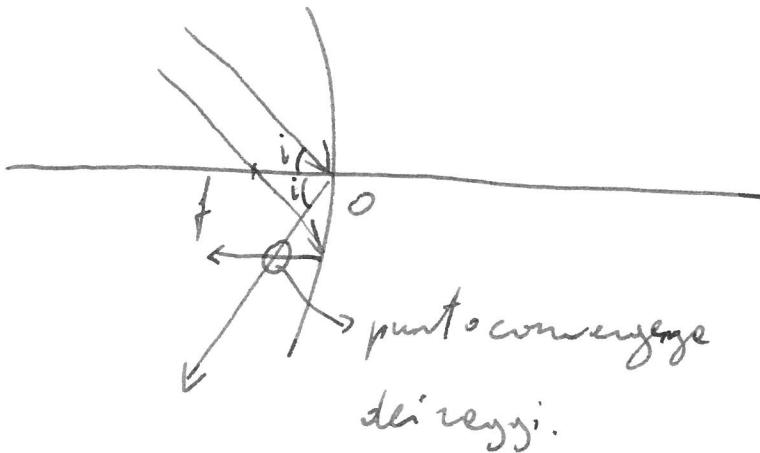
Viceversa se ho un fascio di raggi paralleli all'asse  
e uno specchio concavo tali raggi convergono

$$\text{in } \frac{R}{2} = f \text{ (fuoco)}$$

Equazione degli specchi

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{P} + \frac{1}{f}$$

Considera un fascio di raggi paralleli e uno specchio concavo.



Il punto di convergenza dei raggi può essere visto come l'intersezione dei due raggi caratteristici: uno presente per l'altro per il fuoco.

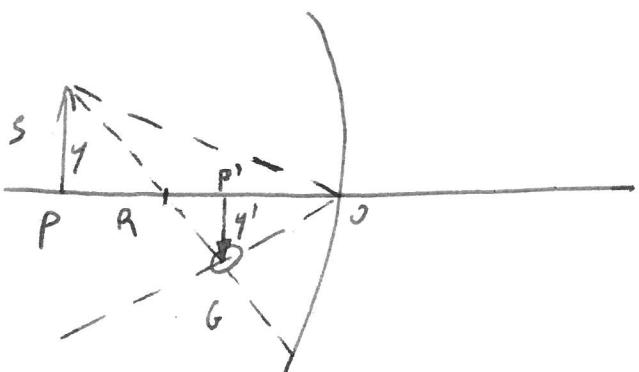
Per angoli i molti più col l'ascina del fuoco  
risulta essere le stesse del punto di convergenza  
dei raggi.

L'ordinata  $y$  è tale che  $\frac{y}{f} = t_{g_i}$  -

$$y = f t_{g_i} = f_i$$

## Ingrandimenti delle immagini

Considero una sorgente luminosa costituita da un segmento come in figura.



Suppongo che gli angoli di incidenza del segmento luminoso siano sufficientemente piccoli da avere un'immagine enastigmetica.

Dall'intersezione di due raggi caratteristici determino l'immagine del vertice del segmento luminoso e quindi l'immagine di tutto il segmento.

Dalle similitudine dei triangoli  $s^1_0$ ;  $a^1_0$

Oteniamo che  $m = \frac{y'}{y} = \frac{p'}{p}$  (inversione  
laterale dello specchio).

Le stesse relazioni vale per gli specchi

conveni tenersi conto che  $p' > 0$  se

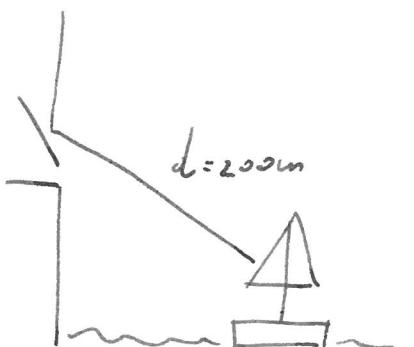
l'immagine è virtuale,  $p' < 0$  se l'immagine è reale.

risulta essere negativo per le immagini reali

(l'immagine è capovolta) mentre risulta essere positivo

per le immagini virtuali (l'immagine non è capovolta)

Famosa è la leggenda di Archimede che incendiò con uno specchio le navi delle truppe dei Greci.

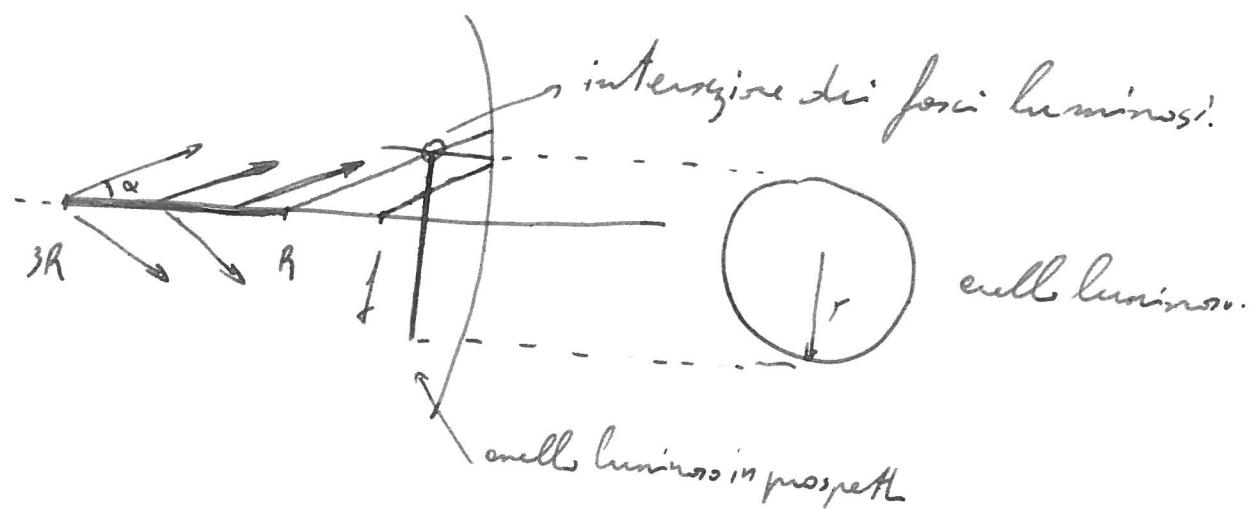


Se  $d=200\text{m}$ , il raggio di curvatura di tale specchio dove essere  $R=2d=400\text{m}$ .

Una delle più moderne applicazioni degli specchi è come rivelatore di particelle.

Se un fascio di particelle supera la velocità della luce (ciò è possibile in un dielettrico essendo  $v_{luce} < c$ ) emette onde luminose

formando un cono con angolo di semiespansione  
 del cono in figura.



Per regioni di simmetria le convergenze dei  
 raggi formerà una circonferenza luminosa.

$$r = f\alpha = \frac{R}{2} \alpha$$

Supponiamo  $\alpha = 6^\circ = 0.1 \text{ rad.}$

le circonferenze luminose saranno  $R \alpha \pi$

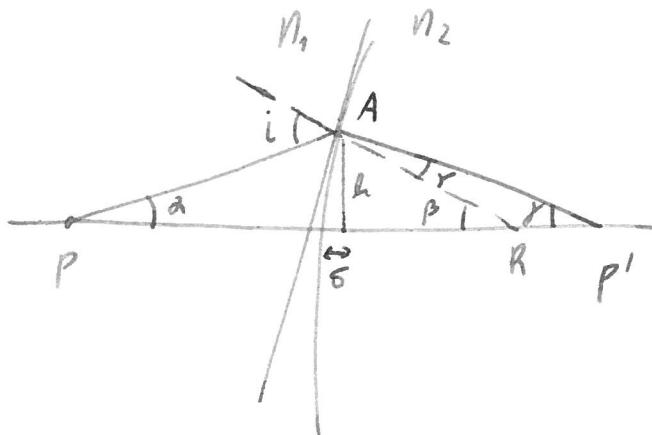
Supponendo che i raggi luminosi vengano  
 totalmente riflessi allora le circonferenze  $\pi$

risulterà più luminosa delle coniche  
essendo le sue misure inferiori al fascio  
di partecelle di lunghezza ch.

$$\frac{I'}{I} = \frac{2R}{R_{\text{d}\sigma}} = 6.4$$

Le incoperte è 6.4 volte più luminose delle  
single coniche.

## Rifrazione nelle lenti concave e convexe



Applicando il teorema dei seni al triangolo

$$\Delta_{PAP}$$

$$\frac{P+R}{R} = \frac{\sin(\pi-i)}{\sin \alpha} = \frac{\sin i}{\sin \alpha}$$

Applicando il teorema dei seni a  $\Delta_{RAP'}$

$$\frac{P'-R}{R} = \frac{\sin r}{\sin \beta}$$

$$\frac{P+R}{P'-R} = \frac{\sin i}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{p + \delta}$$

$$\tan \beta = \frac{h}{p' - \delta}$$

per i molti piccoli  $\delta \approx 0$

$$\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} \approx \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{P}{P'} \quad \text{pertanto}$$

$$\frac{P + R}{P' - R} = \frac{n_2}{n_1} \frac{P}{P'} \quad \text{da cui si ricava}$$

$$\frac{n_2}{P} + \frac{n_2}{P'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$



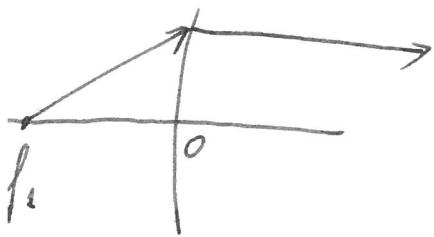
Per le lenti concave vale lo stesso

relazione tenuta conto del segno di  $R$  e  $P'$

Dalle relazioni sulle lenti si può riscontrare  
quelle degli specchi considerando  $n_2 = n_1$ .

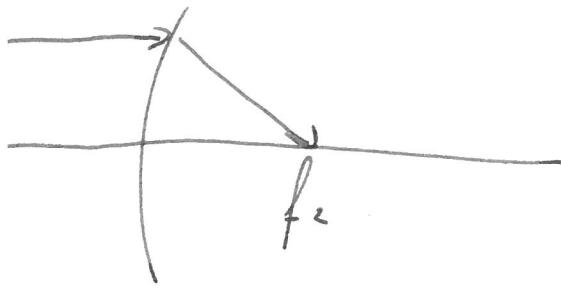
Nel caso delle superfici rifrangenti si  
possono definire due diversi punti focali.

Il punto focale principale  $f_1$  è tale che  
l'immagine reale va all'infinito. ( $p'_{f_1} = \infty$ )



$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Il punto focale secondario  $f_2$  è  
l'immagine di un punto posto all'infinito.



$$P = \infty$$

$$\frac{n_2}{f_2} : \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Sostituendo nell'equazione per le Lentì concave

$$\frac{n_1}{P} + \frac{n_2}{P'} : \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{f_2}$$

ma  $\frac{n_2}{f_2} = \frac{n_1}{f_1}$  pertanto  $n_2 = \frac{n_1 f_2}{f_1}$

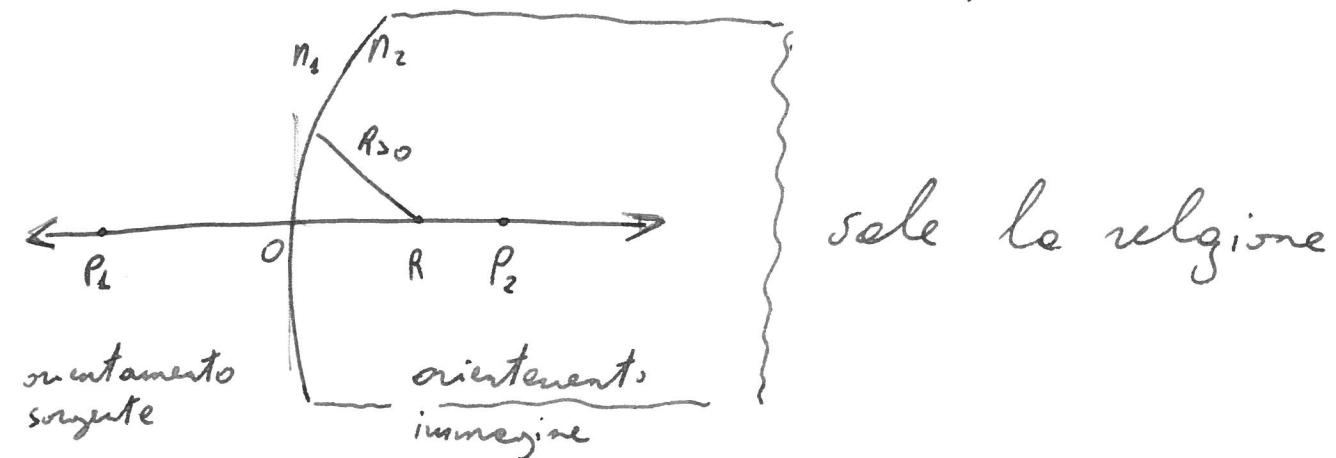
$$\frac{n_1}{P} + \frac{1}{P'} \cdot \frac{n_1 f_2}{f_1} = \frac{n_1}{f_1}$$

$$\frac{f_1}{P} + \frac{f_2}{P'} = 1$$

Il rapporto tra  $P$  e  $P'$  (sorgente e immagine) è funzione di due soli parametri. Tuttavia è possibile far varire tale rapporto modificando  $n_1, n_2$  e  $R$ .

Ciò significa che è possibile realizzare lenti differenti aventi lo stesso rapporto tra  $P$  e  $P'$ .

\*) Abbiamo visto che per un distretto sferico



$$\frac{n_1}{P_1} + \frac{n_2}{P_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

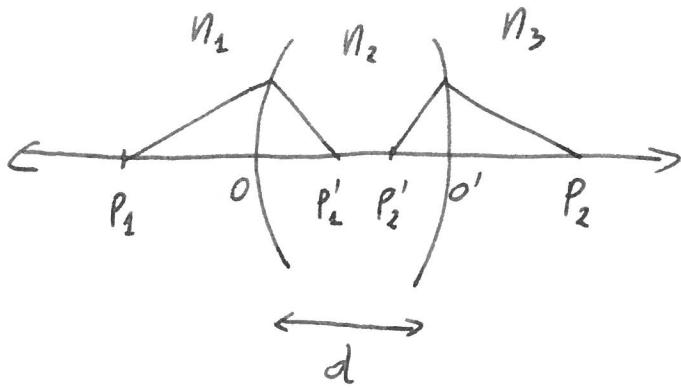
Considerando il verso orientato per le sorgenti e le immagini come in figura e  $R > 0$  per le lenti convexe  $R < 0$  per quelle concave.

Se  $P_2 > 0$  l'immagine sarà reale e

$P_2 < 0$  l'immagine sarà virtuale.

Lenti sottili

Consideriamo lente come in figura



Salvo le relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n_1}{P_1} + \frac{n_2}{P_1'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \\ \frac{n_2}{P_2'} + \frac{n_3}{P_2} = \frac{n_3 - n_2}{R_2} \end{array} \right.$$

Se \$P\_2\$ è l'immagine di \$P\_1\$    \$P\_1' = P\_2'\$ pertanto

$$P_2' = d - P_1'$$

sostituendo nel sistema determino \$P\_1 = f(P\_2)\$

Nel caso di  $\ll p_1'$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{p_1'} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} \\ -\frac{n_2}{p_1'} + \frac{n_3}{p_2} = \frac{n_3 - n_2}{R_2} \end{array} \right.$$

---

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_3}{p_2} = \frac{n_2 - n_1}{R_1} + \frac{n_3 - n_2}{R_2}$$

Nel caso particolare in cui le lenti siano poste nel moto  $n_1 = n_3 = 1$

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{n_2 - 1}{R_1} - \frac{n_2 - 1}{R_2} = (n_2 - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = (n_2 - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} = \frac{1}{f}$$

Una lente in aria sottile i caratterizzate da un solo punto focale.

$$\frac{1}{f} = \text{distanza} = D \quad [D] = m^{-1}$$

## Lenti convergenti:

Le lenti convergenti sono caratterizzate dall'essere  
una lunghezza focale positiva

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

le lenti convergenti possono essere

biconvexe



$$R_1 > 0 \quad R_2 < 0$$

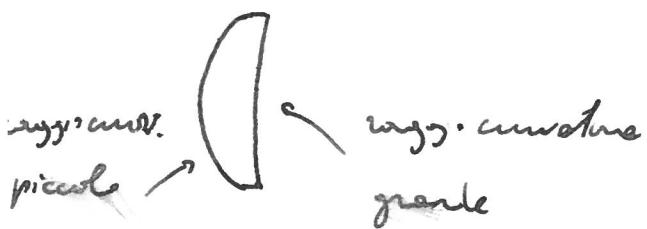
pianconvessa



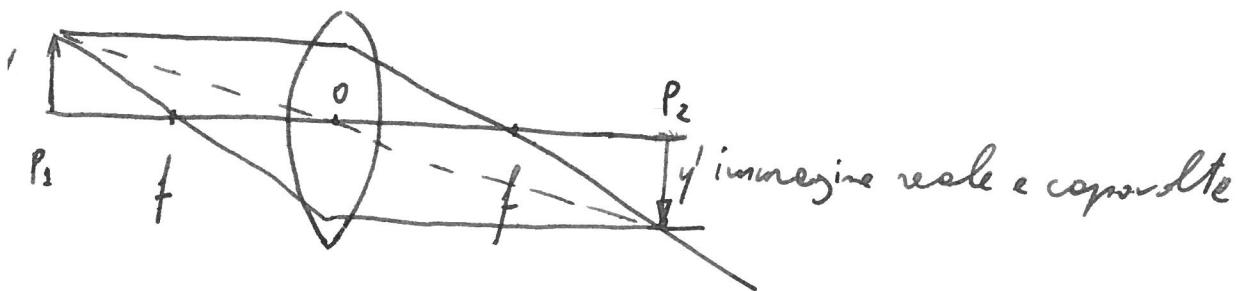
$$R_1 > 0 \quad R_2 = \infty$$

$$R_1 = \infty \quad R_2 < 0$$

oppure  $R_1 > 0, R_2 > 0$  ma  $R_1 < R_2$



Ingrandimenti lente convergente



vede la relazione  $m = \frac{y'}{y} = -\frac{P_2}{P_1}$

se  $P_2 = P_1$  (immagine reale capovolta con  $m = -1$ )

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} = \frac{1}{P} = \frac{1}{f}$$

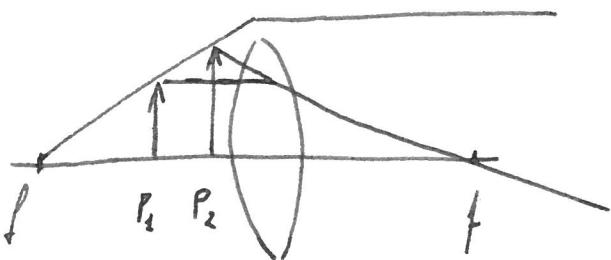
la sorgente si trova a distanza  $> f$ .

Se  $P_1$  avesse (la sorgente si allontana dal fuoco)

$P_2$  si avvicina al fuoco (al limite  $P_1 = +\infty$   $P_2 = f$ )

l'immagine si rimpicciolisce.

Se le sorgenti si trovano a distanza minore di



si avrà solo un'immagine virtuale non capovolta.

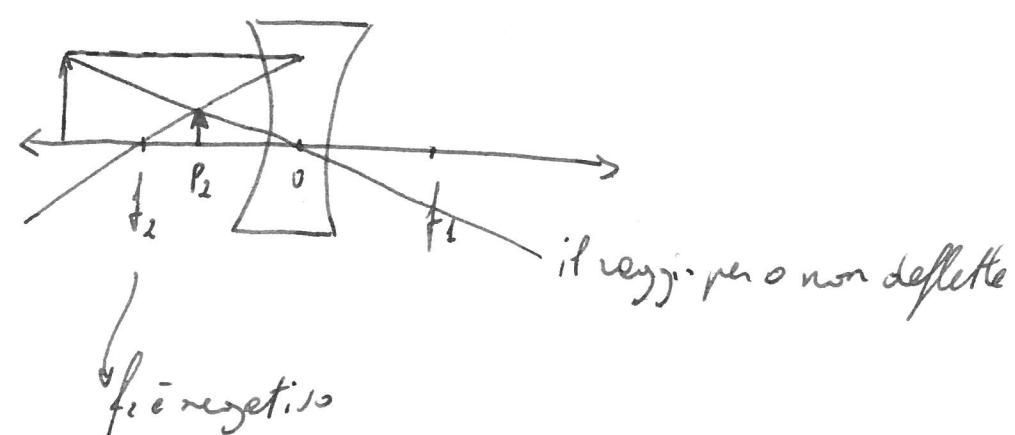
(A differenza delle immagini reali le immagini virtuali non possono essere rese su uno schermo).

## Lenti divergenti

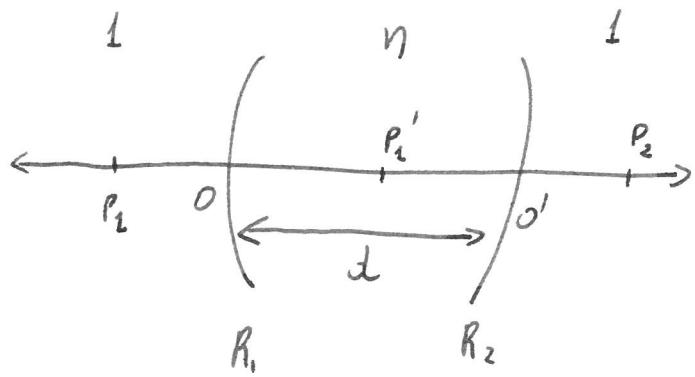
Le lenti divergenti sono caratterizzate dall'avere distanze focale negative  $f < 0$

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} = \frac{1}{f} \quad (< 0)$$

Poiché  $P_1 > 0$  una lente divergente genera solo immagini virtuali  $P_2 < 0$



## Lenti: spese



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{P_1} + \frac{n}{P_1'} = \frac{n-1}{R_1} \\ \frac{n}{d-P_1'} + \frac{1}{P_2} = \frac{1-n}{R_2} \end{array} \right.$$

$$\frac{n}{P_1'} = \frac{n-1}{R_1} - \frac{1}{P_2} = \frac{(n-1)P_2 - R_1}{R_1 P_2}$$

$$P_1' = \frac{n R_1 P_2}{(n-1)P_2 - R_1}$$

$$\frac{n}{d - \frac{nR_1P_1}{(n-1)P_1 - R_1}} + \frac{1}{P_2} = \frac{1-n}{R_2} \quad (1)$$

Riordino che per un obiettivo speciale

$$\frac{P_1}{P_1} + \frac{P_2}{P_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$f_1'$  = distanza focale <sup>(1)</sup> I lente  $n_1 = 1$   $n_c = n$

$$\frac{1}{f_1'} = \frac{n-1}{R_1}$$

$f_2'$  = distanza focale <sup>(2)</sup> II lente  $n_1 = n$   $n_c = 1$

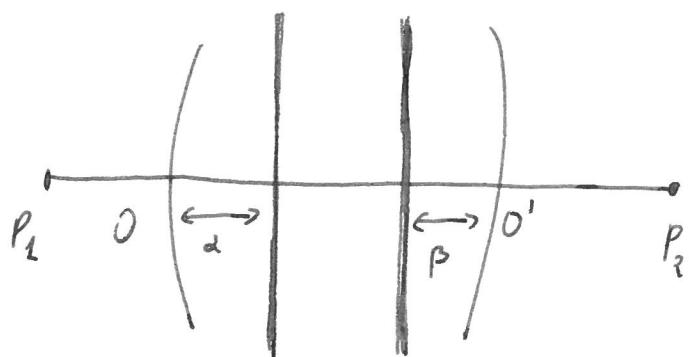
$$\frac{1}{f_2'} = \frac{1-n}{R_2}$$

Sostituendo nella (2) si ottiene una relazione

$$P_2 = f(P_1, n, f_1, f_2, \alpha)$$

chiamiamo piani principali delle lente qui  
piani tali che misure  $P_1$  e  $P_2$  debbono valere

la relazione  $\frac{1}{P'_1} + \frac{1}{P'_2} = \frac{1}{F}$  F = foco lente  
doppie.



$$P'_1 = P_1 + \alpha$$

$$P'_2 = P_2 + \beta$$

I valori di  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $F$  possono essere determinati considerando che devono coincidere le relazioni

$$P_2 = f(P_1, n, f_1, f_1', \alpha)$$

$$\frac{1}{P_1 + \alpha} + \frac{1}{P_2 + \beta} = \frac{1}{F} \quad \text{per ogni } P_1 \neq P_2.$$

Se indiciamo con  $F_1$  la distanza delle sorgenti da  $O$  immodo che  $P_1 = \infty$  e  $F_2$  il punto in cui converge una sorgente luminosa posta all'infinito, si può dimostrare che i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  sono tali che  $F_1 + \alpha = F_2 + \beta = F$

Dell'engine (1) ricava

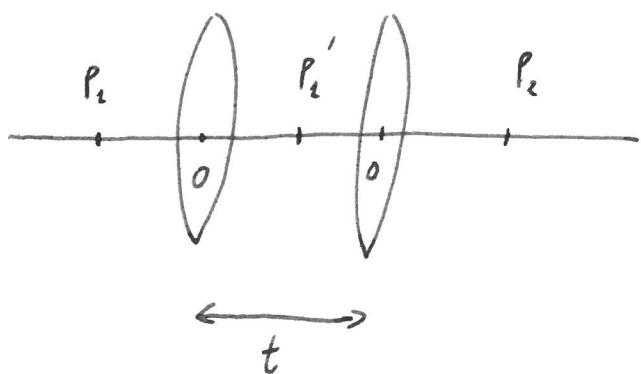
$$F_2 = \frac{nf_1 f_2 - d f_2}{n(f_1 + f_2) - d} = \frac{nf_1 f_2}{\Delta} - \frac{d f_2}{\Delta}$$

$$\bar{f}_1 = \frac{nf_1 f_2 - d f_1}{n(f_1 + f_2) - d} = \frac{nf_1 f_2}{\Delta} - \frac{d f_1}{\Delta}$$

$$F = \frac{nf_1 f_2}{\Delta} \quad \alpha = \frac{d f_1}{\Delta} \quad \beta = \frac{d f_2}{\Delta}$$

Sistema di lenti sottili ellissoidi lungo un  
asse

Considera il caso di due lenti sottili ellissoidi



per la prima lente vale la relazione

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P'_1} = \frac{1}{f_1} \quad \text{per la seconda lente}$$

$$\frac{1}{t - P'_1} + \frac{1}{P_2} = \frac{1}{f_2}$$

ottengo lo stesso risultato. Ora noto per due  
lenti spesse.

L'equazione delle lenti sarà

$$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} = \frac{1}{F} \quad \text{se } F = \text{fuoco sistema}$$

$$F = \frac{f_1 f_2}{\Delta} \quad \Delta = f_1 + f_2 - t$$

rispetto ai piani principali

$$\alpha = \frac{t f_1}{\Delta} \quad \beta = \frac{t f_2}{\Delta}$$

valuteremo la relazione

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - t}$$

la relazione

$\frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} = \frac{1}{F}$  è detta forma gaussiana delle lenti.

Se riferiamo le distanze  $P_1$  e  $P_2$  ai punti focali

$$x_1 = P_1 - F$$

$x_2 = P_2 - F$  si ottiene la forma newtoniana delle lenti:

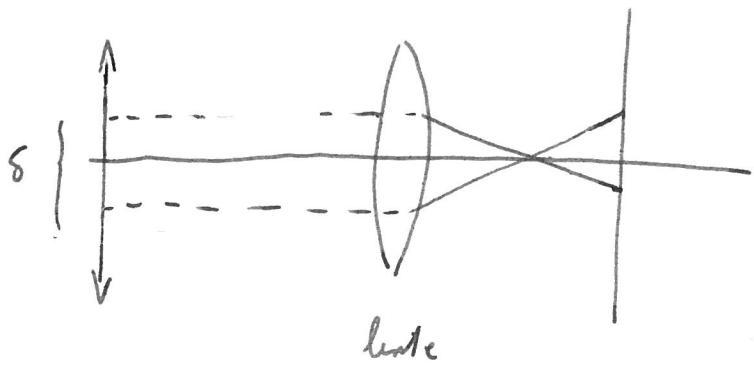
$$x_1 x_2 = F^2$$

## Alenazione

Si parla di alenazione quando l'immagine generata dal di là delle lente non conserva le stesse caratteristiche della sorgente ma risulta spezzata o distorta.

Le alenazioni sono generate dal fatto che una sorgente puntiforme ha un'immagine puntiforme solo se i raggi sono parassitici, cioè hanno angoli d'incidenza e di rifrazione molto piccoli; in caso contrario l'immagine della sorgente puntiforme è una macchia spezzata.

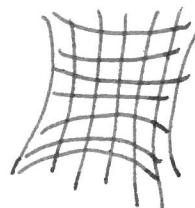
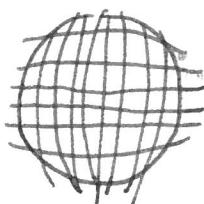
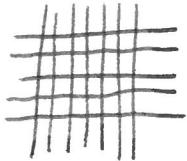
Consideriamo una sorgente a forme di segmento e uno schermo che raccolge l'immagine.



La maggior parte dei raggi uscenti da un punto, compreso nelle fascie 5 sono paralleli pertanto l'immagine di tutto il segmento S risulta essere nitida e non distorta. I raggi provenienti da un punto esterno al segmento S non sono paralleli pertanto le porzioni esterne del segmento risultano essere distorte e spezzate.

Tale elenzione è detta sferica.

sorgente

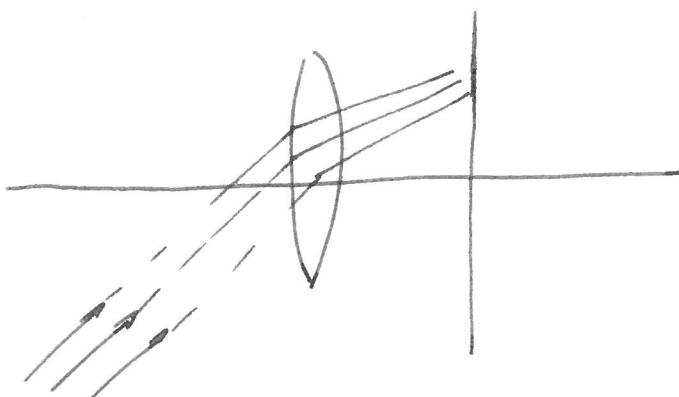


) Distorsione

eventuali immagini distorte ed "bordi".

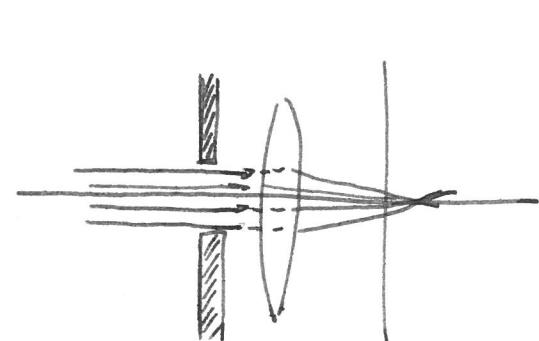
Un diverso tipo di elenzione è detto conica.

Un fascio di raggi paralleli inclinati rispetto all'asse generano un'immagine sfocata.

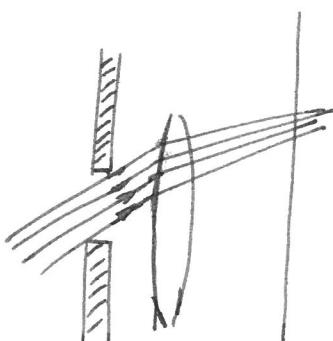


Per correggere l'aberrazione sferica è possibile pone un diaframma davanti alla lente in modo da impedire il passaggio dei raggi non paralleli.

Tale accorgimento non corregge il secondo tipo di aberrazione.

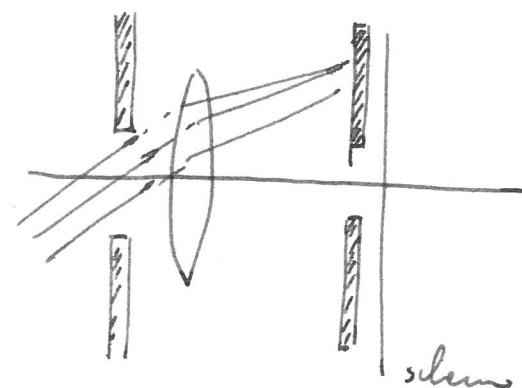


diaframma



il cono non è conetto

Per correggere la seconda aberrazione occorre pone un diaframma anche sullo schermo.



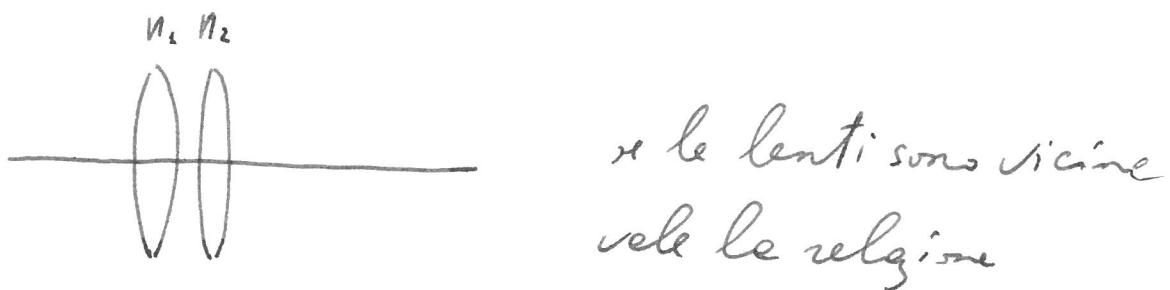
Un altro tipo di aberrazione è dovuta al fatto che l'indice di rifrazione  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  varia al variare delle frequenze delle onde elettromagnetiche restanti i diversi colori dello spettro del visibile ripercorrono in modo diverso generando un'immagine non nitida.

È una misura dei dipoli che si orientano in un dielettrico in modo opposto al campo determinato da un campo elettrico  $E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$   $E_0$  = campo elettrico nel vuoto.

Al varcare delle frequenze delle onde elettromagnetiche i dipoli non riconoscono più il campo, restano medianente fermi.

$$\epsilon_r \rightarrow 1$$

In modo per evitare tale tipo di aberrazione  
è quello di usare un filtro in modo da realizzare  
una luce monocromatica oppure con un  
opportuno sistema di lenti.



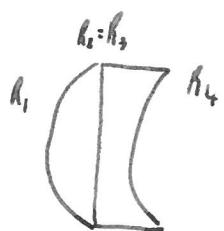
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = (n_1 - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n_2 - 1) \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)$$

$$\Delta \left( \frac{1}{f} \right) = \Delta n_1 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \Delta n_2 \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) = 0$$

imposto che il fuoco delle lente non sia al  
verso di  $n_1$  e  $n_2$ , cioè al verso dell'indice

di rifrazione nel I e nel II dielettrico e cause delle diverse frequenze di diverse colori dell'ottica.

Possiamo fissare  $R_2$  e  $R_3$ , ad esempio  $R_2 = R_3 = \infty$  in modo che le lenti coincidano evitando dispersione per riflessione.



$$O = \frac{\Delta n_1}{R_1} \frac{1}{h_1} - \frac{\Delta n_2}{R_4} \frac{1}{h_4}$$

$$\text{Se } n_1 = 1.80 \quad \Delta n_1 = 0.06 \quad F = 100 \text{ mm}$$

$$n_2 = 1.60 \quad \Delta n_2 = 0.02$$

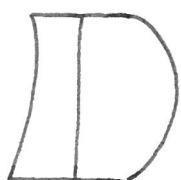
Ricavo  $\frac{1}{R_4} = \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} \cdot \frac{1}{R_1}$  e lo sostituisco nell'equazione del fuoco

$$(n_2 - 1) \frac{1}{R_1} - (n_2 - 1) \frac{\Delta n_1}{\Delta n_2} \cdot \frac{1}{R_1} = \frac{1}{F}$$

$$\Delta n_2 (n_1 - 1) \frac{1}{R_1} - (n_2 - 1) \Delta n_1 \frac{1}{R_1} = \frac{\Delta n_2}{f}$$

$$R_1 = \frac{F}{\Delta n_2} \left( \Delta n_2 (n_1 - 1) - \Delta n_1 (n_2 - 1) \right) = -100 \text{ mm}$$

$$R_4 = -33 \text{ mm}$$



le lente più avvenente sono usate anche ellissoidi.

consistere un altro sistema per coneggere  
 l'elungazione cronetica per variazioni di  
 di indici di rifrazione piccoli.

considero due lenti sottili aventi lo stesso  
 indice di rifrazione e poste ad una distanza d.

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

impongo che l'ellisse elongazione  
 nulla al variare di  $f_1$  e  $f_2$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial f_1} df_1 + \frac{\partial F}{\partial f_2} df_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial f_1} : \frac{f_2(f_1 + f_2 - d) - f_1 f_2}{d^2} = \frac{f_2(f_2 - d)}{d^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial f_2} : \frac{f_1(f_1 + f_2 - d) - f_1 f_2}{d^2} = \frac{f_1(f_1 - d)}{d^2}$$

le benti: hanno lo stesso indice di rifrazione,  
inoltre vale

$$\frac{1}{f_1} = (n-1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\frac{1}{f_2} = (n-1) \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right)$$

differenzando rispetto a n otteniamo

$$\begin{aligned} df_1 &= e f_1 du \\ df_2 &= a f_2 du \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} d\left(\frac{1}{f_1}\right) = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) du = \frac{1}{f_1(n-1)} du \\ -\frac{1}{f_1^2} df_1 = \frac{1}{f_1} \frac{1}{n-1} du \\ df_1 = -f_1 \frac{1}{n-1} du = +f_1 e du \end{array} \right.$$

imponendo che  $dF = 0$

$$f_2 f_1 (f_2 - d) - f_1 f_2 (f_1 - d) = 0$$

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

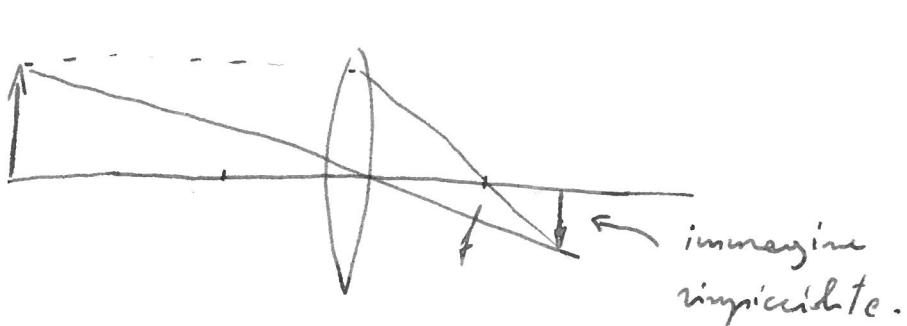
Se le due lenti sono uguali affinché risulti  
l'elenuzione Cromatica devono essere  
poste a distanza  $d = f$

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{f^2}{f} = f.$$

## Strumenti ottici

Consideriamo una lente convergente.

Se la sorgente luminosa è molto lontana dal fuoco la lente funziona da obiettivo di una macchina fotografica poiché fa convergere l'immagine -



macchina  
fotografica

Se la sorgente è vicina al fuoco la lente funziona da obiettivo di un proiettore

2) proiettore



3) lente di ingrandimento.

sorgente tra il fuoco e la lente

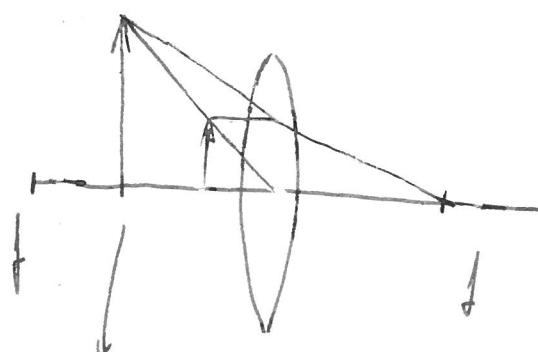
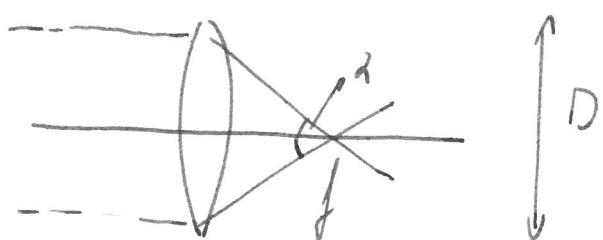


immagine  
virtuale ingrandita.

## Mealine fotografiche

L'obiettivo delle mealine fotografiche permette di creare un'immagine riempicciolita che impressione le pellicole.



Si dice rapporto focale il valore  $\frac{f}{D}$

D: lunghezza focale

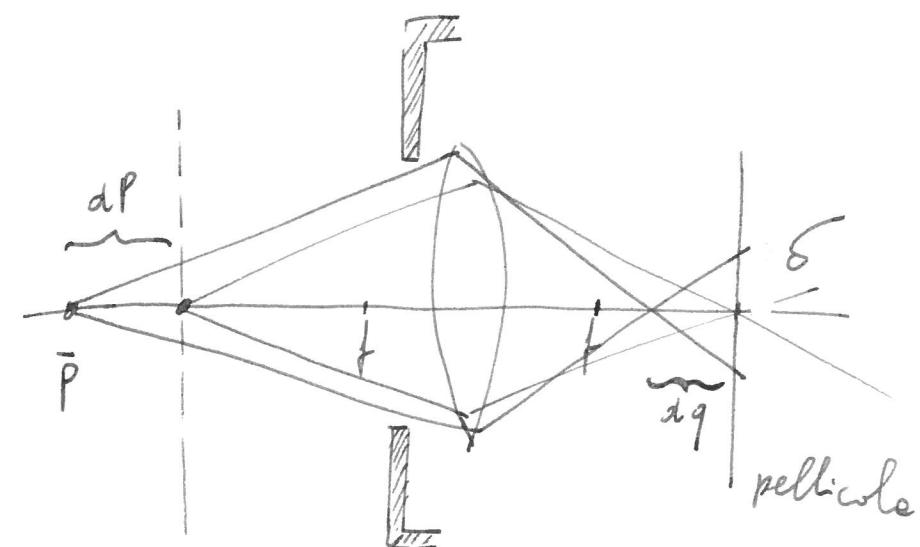
il rapporto focale  $\frac{f}{D} \approx \text{costante}$  è inversamente

proporzionale all'angolo e quindi alle

luce che impressione la pellicola.

Regolando l'obiettivo delle macchine fotografiche è possibile mettere a fuoco una determinate zone.

In tal caso la pellicola si trova nella posizione in cui converge l'immagine delle zone da si desidera fotografare e che si è messo a fuoco.



p: piano foco

In punto più lontano o più vicino all'obiettivo  
rispetto al piano messo fuoco risulterà spett.  
(l'immagine del punto  $\bar{P}$  sulla pellicole è  
anastigmatico, è una mealnè su un punto).

Per profondità di campo s'intende l'intervallo  
delle distanze  $d_P$  per cui è possibile ottenere  
sulla pellicole svariate immagini nitide.  
metto in relazione  $d_P$  con  $d_g$  = distanza del  
punto di convergenza dell'immagine

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$q = \frac{Pf}{P-f}$$

$$dq = \frac{f(P-f) - Pf}{(P-f)^2} dp = \frac{f^2}{(P-f)^2} dp \approx \frac{f^2}{P^2} dp$$

essendo  $P \gg f$  (immagine lontana del fuoco)

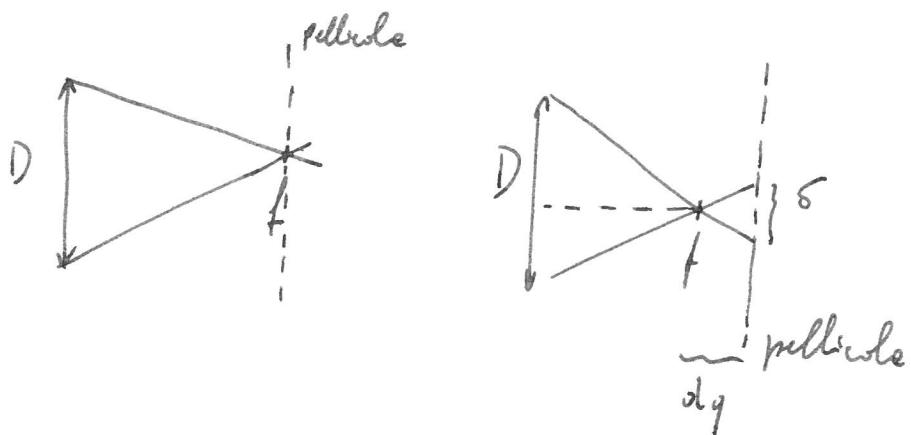
Se indichiamo  $S$  il cerchio di minima confusione  
 cioè la minima dimensione consentita al  
 cerchio immagine delle sorgente puntiforme  
 affinché tale sorgente risulti sufficientemente  
 hitabile

veloce reazione

$$\frac{\delta}{D} \approx \frac{dq}{f}$$

○ } D = lunghezza  
lente

(considere approssimativamente tutti i punti convergono ad una distanza pari a f)



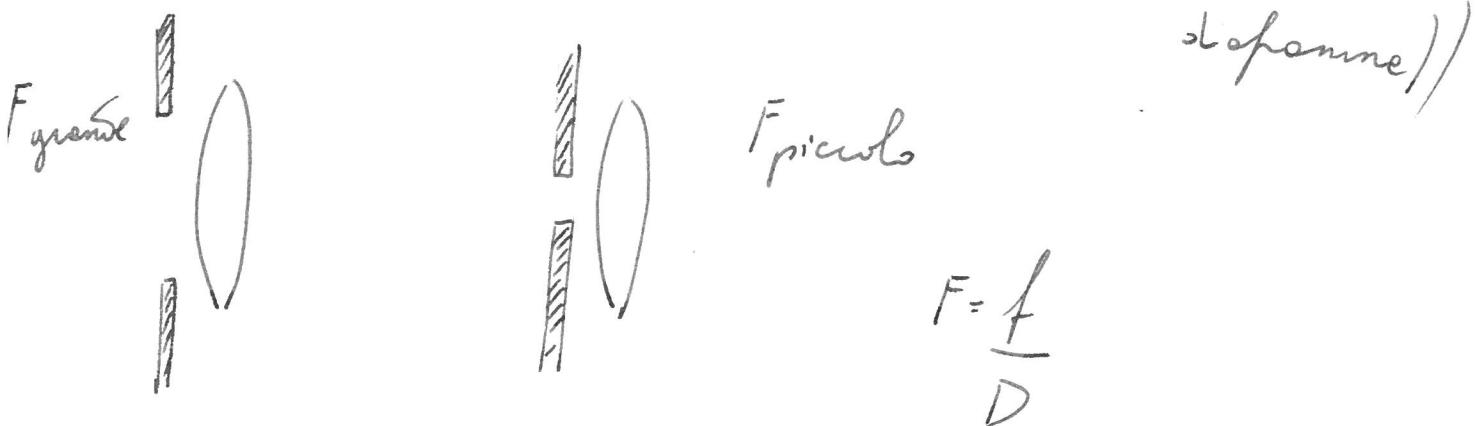
$$\frac{\delta}{D} = \frac{f^2}{P^2} \frac{dP}{f}$$

$$dP = \frac{f}{D} \delta \frac{P^2}{f^2} = F \delta \frac{P^2}{f^2}$$

dp: zone messe a fuoco è proporzionale

a  $F$ : rapporto focale (per mettere a fuoco

una vasta zone occorre un  $F$  piccolo (si stringe il campo)



e proporzionale al quadrato delle distanze

P-

\* Per fotografare un alto ( $P$  piccolo)

occorre un dispiegno piccolo affinché

il  $p$  sia sufficientemente grande -

53

## Equazione delle lenti: in forma Gaussiana

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f}$$

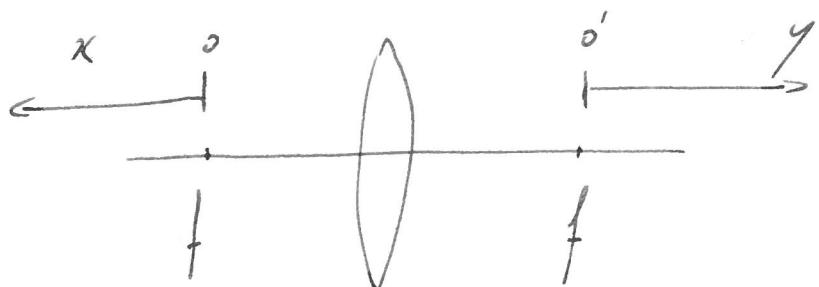
( $p_1, p_2$  = distanze delle sorgenti e dell'immagine dei punti principali)

Se gli indici di rifrazione delle sostanze in cui è immersa la lente sono diversi a destra e a sinistra della lente stessa vale:

$$\frac{l_1}{p_1} + \frac{l_2}{p_2} = 1$$

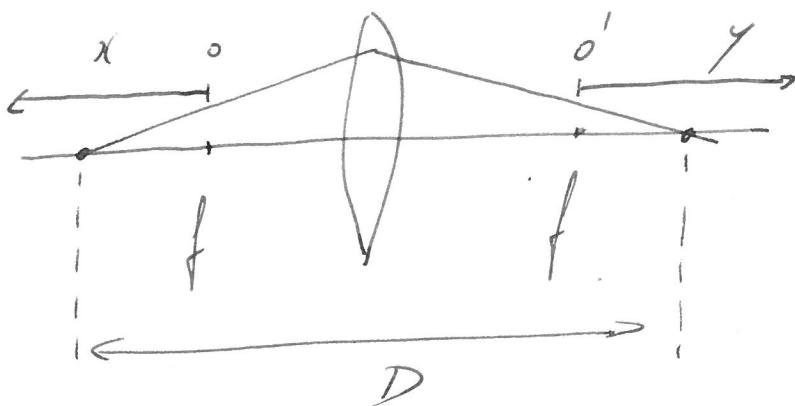
## Equazione delle lenti: in forma Newtoniana

$$xy = f^2 \text{ nel I caso}$$



$$xy = f_1 f_2 \text{ nel II caso}$$

Pb) Determ une lentille convergente de distance focale  $f$  déterminer quel est la distance  $D$  telle une source lumineuse et le son imaginaire n'ont pas fusion.



$$D = p_1 + p_2 = 2f + x + y$$

$$\text{vole } xy = f^2 \quad y = \frac{f^2}{x}$$

$$D = x + \frac{f^2}{x} + 2f$$

$$\frac{dD}{dx} = 0 = -\frac{f^2}{x^2}$$

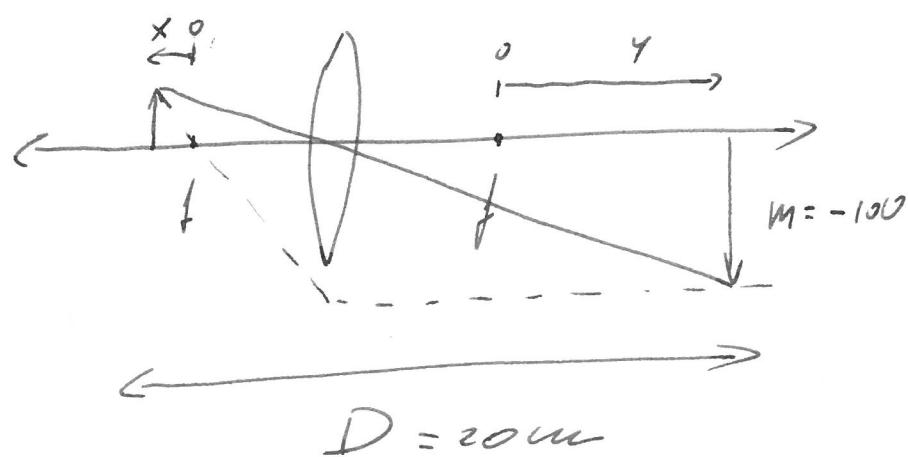
$$x = f, y = f \quad D = 4f$$

In tali condizioni l'ingrandimento sarà  $m = -1$ .

### Proiettore

Supponiamo di voler un ingrandimento  $m = -100$  e di avere a disposizione una sola di lunghezza  $D = 20\text{cm}$  determiniamo:

- 1) le distanze focale delle lenti che servirebbero; le distanze  $x, y$  delle pellicole e dell'immagine ingrandite dei rigetti: proietti.



Volgono le relazioni:

$$\begin{cases} xy = f^2 \\ m = -\frac{f}{x} \\ D = x + y + 2f \end{cases}$$

$$m = -\frac{y + f}{x + f} \quad \text{nel proiettore (vedi figura)}$$

$x$  è trascurabile rispetto a  $f$  mentre  
 $f$  è trascurabile rispetto a  $y$

$$m = -\frac{y}{f} = -\frac{f}{x}$$

Ottengo un sistema di 3 equazioni nelle  
incognite  $x, y, f$ .

Risolviendo tale sistema

$$f = -D \frac{m}{(m-1)^2} > 0 \quad (\text{essendo } m \text{ negativo})$$

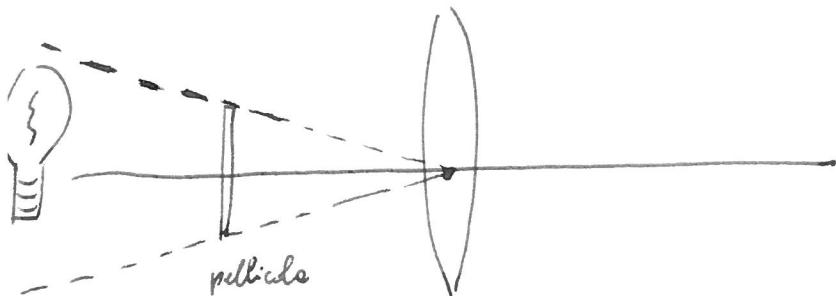
$$f \approx 0.196 \text{ m} = 19.6 \text{ cm} \quad (\text{la lente è convergente})$$

$$x = -\frac{f}{m} = \frac{0.196}{100} = 2 \text{ mm} \quad (\text{le pelli cole sono molt. vicine al fuoco}).$$

Nel caso l'immagine risulta sfocata muovendo la lente è possibile mettere a fuoco le ragioni.

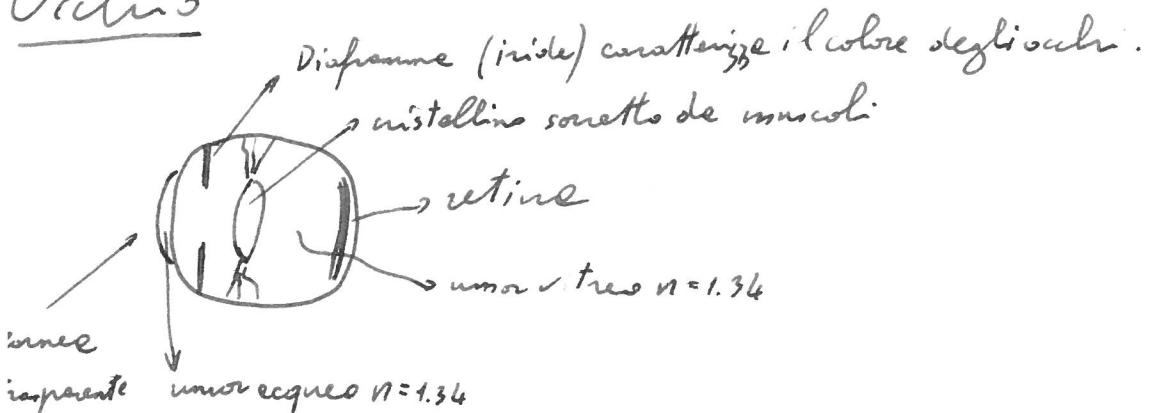
Un problema che sorge è quell di illuminare le pellicole con una luce intensa ( $\nu m = -100$  la luminosità della proiezione sarà  $\frac{1}{100}$  delle luci che attraversano le pellicole) senza che il filamento luminoso venga proiettato insieme alle immagini.

Per ovviare a questi inconvenienti basta far convergere il fascio luminoso che attraversa le pellicole nel centro delle lenti come in figura.

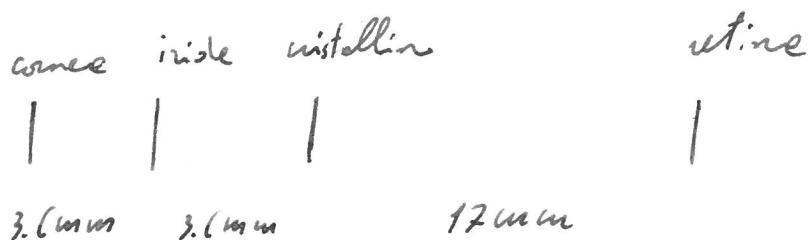


Le macchine fotografiche e il proiettore generano immagini reali; l'occhio genera invece anche le immagini virtuali.

### Occhio



mistellino       $R=10\text{mm}$        $R=-6\text{mm}$



l'indice di rifrazione del cristallino è ovviamente  
dissimo da quelli dell'aria e vitrea.

$N_{\text{cristallino}} = 1.44$  inoltre tale valore cresce  
dalle periferie al centro in modo da coneggere  
le aberrazioni sfociole  
(essendo le lenti molto piccole i raggi non  
sono paralleli).

Il cristallino ha la funzione di far convergere  
i raggi luminosi sulla retina.

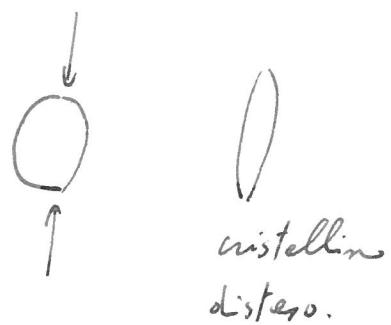
Valendo la relazione  $\frac{1}{P} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$  e dovranno  
essere  $-q$  costante (distanza cristallino retina)

il vescere di  $P$  (immagini lontane) deve

essere  $f$  (fuoco della lente) -

Ciò avviene quando i muscoli che sottraggono il cristallino si rilassano permettendo una distensione dello stesso cristallino, un aumento del raggio di curvatura e quindi di  $f$ .

Viceversa per vedere un oggetto vicino occorre diminuire le distanze focale. Ciò è pernesso dalla pressione esercitata dai muscoli sul cristallino -



Le minime distanze per cui un oggetto è

distinguibile varie seconde le età.

$d_o = 7$  cm per un bambino

$d_o = 25$  cm intorno ai 20 anni

$d_o = 2$  m altri: 60 anni

Le malattie più frequenti delle viste sono:

Le mioopi gli oggetti lontani vengono messi a fuoco prima delle retine

Per curarla occorrono lenti divergenti

- 2) ipermetropie è il contrario delle miopie, le immagini vicine vengono messe a fuoco dopo le retine, ciò è dovuto all'inabilità dei muscoli e comprenere sufficientemente il cristallino. Si correge con lenti convergenti.
- 3) astigmatismo Una sorgente luminosa puntiforme viene vista come una mezzaluna
- 4) deltorismo insensibilità ad alcuni colori.

Strumenti ottici che generano immagini virtuali

Ingrandimento angolare.

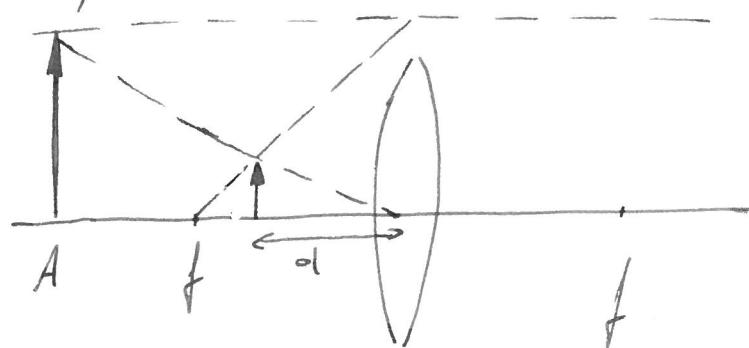
Si definisce ingrandimento angolare di un oggetto di lunghezza  $y$ , il rapporto fra  $y$  e la distanza  $d$ .

$$d' = \frac{y}{d}$$

Misurare ingrandimento possibile per l'occhio umano è  $d_0 = \frac{y}{d_0}$   $d_0$  = minima distanza per cui l'occhio umano distingue gli oggetti.

## Lente d'ingrandimento.

Consideriamo una lente convergente e poniamo le sorgenti a destra del fuoco molto vicino ad esso (v. figura)



Ponendo l'aulio e contattando la lente  
trovi l'immagine virtuale A.

Se  $y$  è la lunghezza dell'oggetto l'ingrandimento si calcola così  $\frac{y}{f} = \lambda$

(considerando  $d \approx f$  e la similitudine dei triangoli) 65

Il rapporto tra l'ingrandimento angolare con le lenti e ad occhio nudo è

$$M = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{d_o}{f}$$

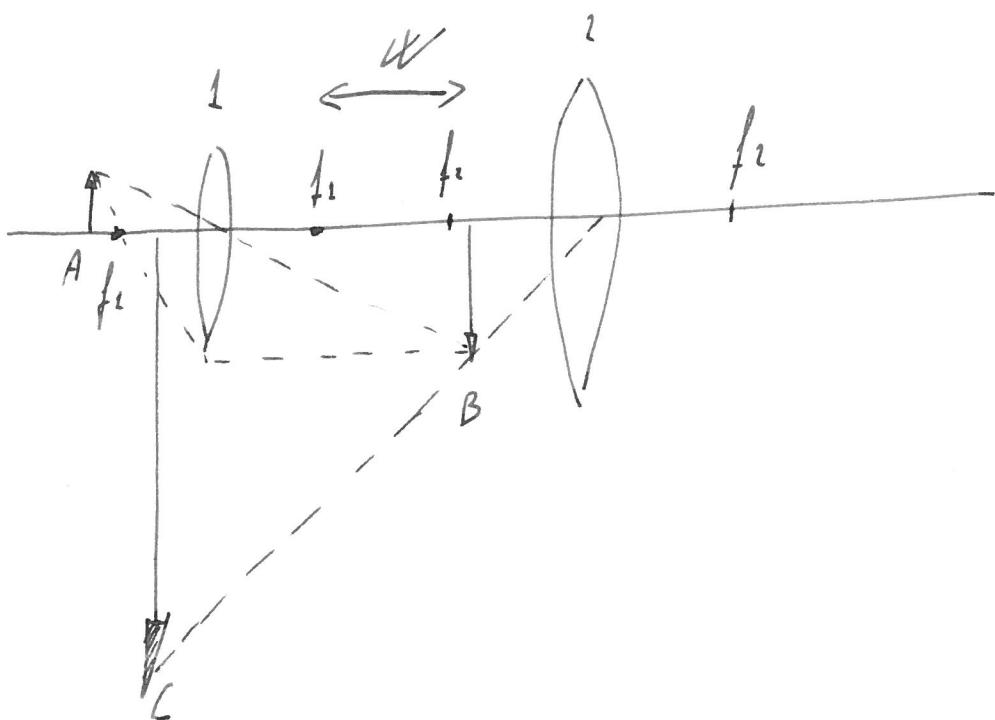
L'ingrandimento M è tanto più forte quanto minore è f.

Tuttavia per f molto piccole si incontra nel problema delle aberrazioni.

Pertanto con una sola lente non è possibile ottenere forti ingrandimenti.

## Microscopio ottico

Il microscopio ottico è un sistema formato da due lenti convergenti che permette forti ingrandimenti.



Pongo l'oggetto A a sinistra del fuoco  $f_1$  (molto vicino),

ottengo un'immagine B ingrandita e capovolta.

E ponendo  $f_2$  (fuoco della seconda lente) a sinistra di B me molto vicina a tale punto

Otengo un'immagine virtuale e il cui  
ingrandimento angolare risulta -

$$\frac{D}{c} = m D$$

$m$  = ingrandimento lineare delle I lente,

$D$  = ingrandimento angolare delle II lente detta  
oculare.

$$D_c = \frac{q}{P} \frac{d_o}{f_2}$$

$P \approx f_1$     $q = f_1 + W \approx W$  (essendo  $f_1$  trascurabile  
rispetto a  $W$ )

$$D_c = \frac{W}{f_1} \frac{d_o}{f_2}$$

$\underbrace{\phantom{W}}_{\begin{array}{l} \rightarrow \\ \text{ingrandi-} \\ \text{mento} \\ \text{oculare} \end{array}}$     $\underbrace{\phantom{f_2}}_{\begin{array}{l} \rightarrow \\ \text{ingrandi-} \\ \text{mento} \\ \text{oculare} \end{array}}$

$\star$   
ingrandi-  
mento  
oculare

L'ingrandimento dell'obiettivo è dell'ordine di  
10-100 volte, quell dell'oculare 225 volte.

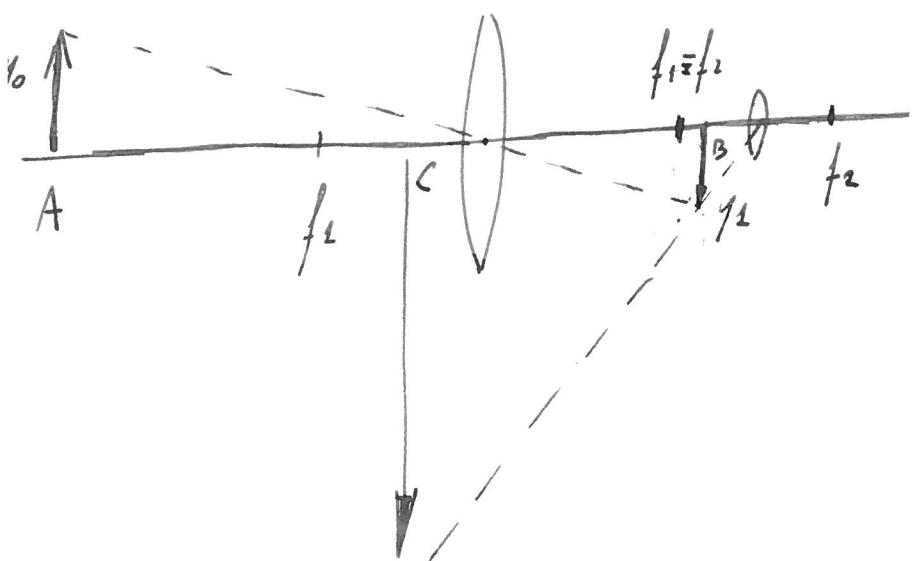
Sarà ottenere un ingrandimento di 2500 volte.

Poiché l'occhio non distingue oggetti dell'  
ordine di  $10^{-3}$  m con un microscopio si possono  
vedere oggetti aventi la dimensione del micron  
( $10^{-6}$  m) cioè della lunghezza d'onda del  
visibile.

Oggetti più piccoli delle lunghezze d'onda  
dell'ottica non possono essere visti da  
microscopi più potenti per il problema  
della diffrazione.

## Telescopi

Il Telescopio è uno strumento ottico costituito da due lenti che permettono di ingrandire un oggetto lontano.



Una sorgente lontana A forma un'immagine capovolta B in prossimità del fuoco -

Se f<sub>1</sub> coincide con f<sub>2</sub> B si trova a destra di f<sub>2</sub> perciò si genera - una immagine virtuale

L'ingrandimento angolare ed oculare sono  
 reale  $d_o = \frac{y_o}{P} = \frac{y_1}{f_2}$  (considerando la  
 similitudine dei triangoli)

L'ingrandimento angolare dell'immagine virtuale  
 reale

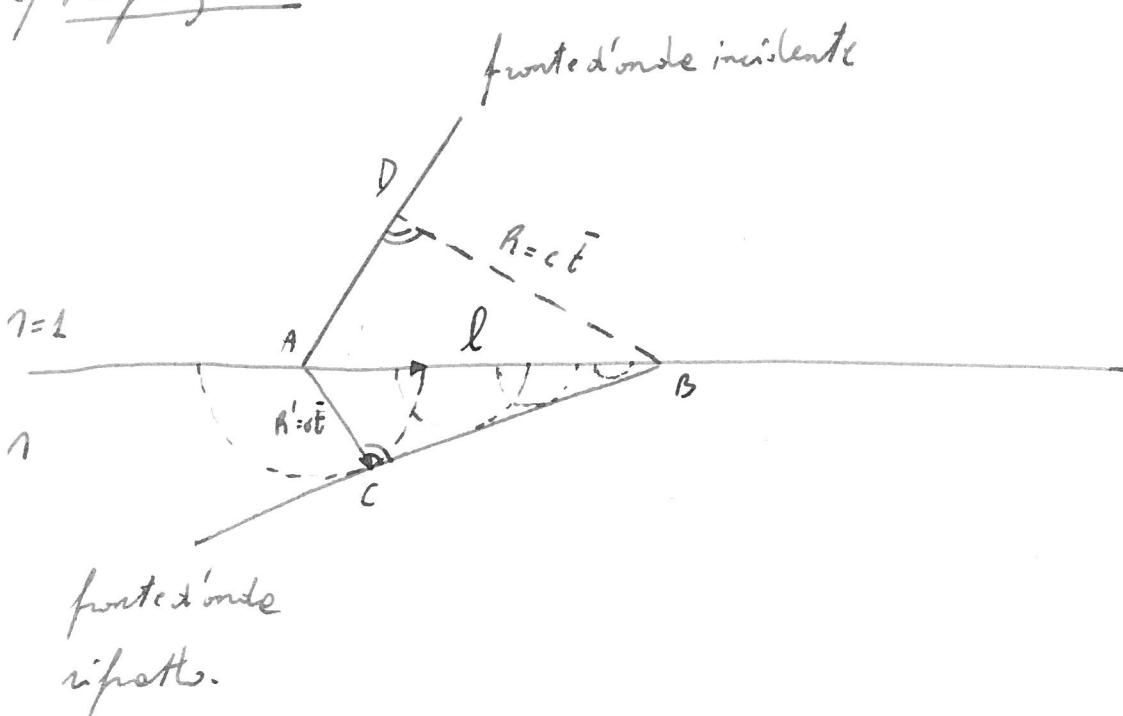
$$d_1 = \frac{y_1}{f_1} \quad D = \frac{d_1}{d_o} = \frac{f_1}{f_2}$$

Un problema che nasce per costruire un binocolo  
 i legati alle distanze delle due lenti:  $f_1 + f_2$   
 che deve essere relativamente breve e dall'  
 immagine che risulta essere invertita.

incidente l'onda genererà le reazioni nulli.  
L'inviluppo determina il fronte d'onda rifless.

Dell'ugualanza dei triangoli  $AOB$  e  $A'H'B$  risulta  
 $\hat{OBA} = \hat{AHB}$ , tali angoli sono rispettivamente  
l'angolo incidente, l'angolo rifless.

## 2) Ripiegare



$$R' = vt = l \sin \hat{A'BC} = l \sin r$$

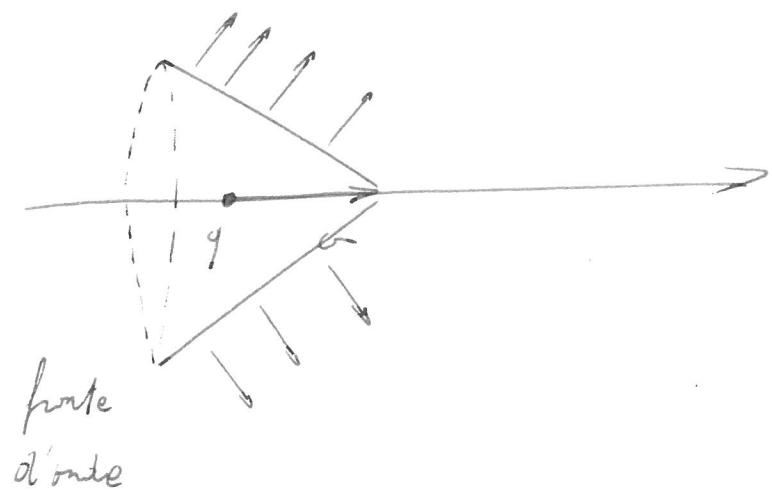
$$R = ct = l \sin \hat{BA'D} = l \sin i$$

$$r = \text{angolo riflett.}$$

$$i = \text{angolo incidente}$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v}{c} = \frac{\ell}{n\ell} = \frac{1}{n}$$

È possibile spiegare con il principio di Huyghens perché una corrente in moto in un mezzo con velocità maggiore di quella delle luce in tale mezzo produce produce un fronte d'onda come in figura (effetto Cerenkov)

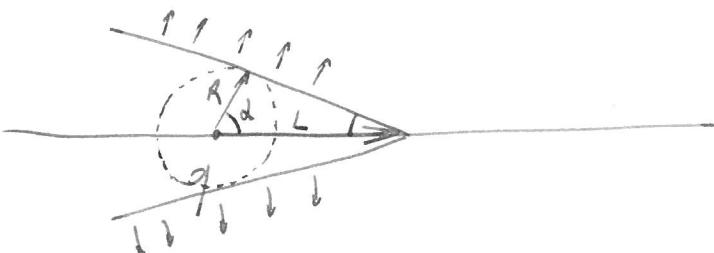


L'omonimo fenomeno si verifica

sulla superficie di un legno quando una

nave si muove con velocità superiore a  
quelle delle onde lasciando dietro di sé  
le tipiche scie; oppure quando la vela  
supererà la velocità del suono -

inviluppo conico



$$L = v \Delta t \quad v = \text{velocità partecelle}$$

$$R = \frac{c}{n} \Delta t$$

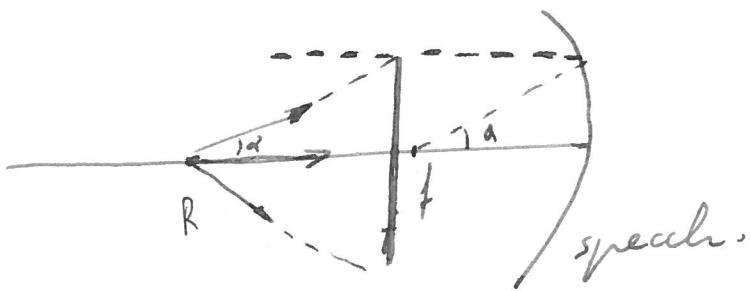
$$\cos \alpha = \frac{R}{L} = \frac{c}{nv}$$

$\alpha = 0$  e  $v = \frac{c}{n}$  la velocità della luce nel  
mezzo è la stessa delle partecelle

$d_{\text{max}} \text{ per } C = V$  (le velocità delle particelle egualis le velocità della luce nel vuoto)

$$\cos \alpha = \frac{1}{n}$$

Con uno specchio è possibile far convergere le onde luminose prodotte dalle particelle in moto e ottenere così un riscontro di particelle



l'onda  
luminosa

luminosa focalizza il raggio  $f_2$

$V_{ts}$  d'è possibile risalire alle velocità delle  
verticelle.

Tss La verice in noto quale onde luminose  
possono essere gli atomi del nebulosa stellare.

## Fenomeno dell'interferenza

Consideriamo un punto dell' spazio attraversato contemporaneamente da due onde elettromagnetiche il cui campo elettrico è rispettivamente  $\vec{E}_1$  ed  $\vec{E}_2$ .

In tale punto si genererà un'onda elettromagnetica risultante avendo un campo elettrico

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

L'intensità dell'onda risultante cioè il modulo del vettore Poynting è proporzionale a  $E^2$  cioè a  $(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2$ .

Senza perdere di generalità possiamo supporne i due campi delle forme

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \cos(\omega t)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \cos(\omega' t + \varphi)$$

Nel caso particolare in cui  $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$

( $\omega = \omega'$     $\varphi = \pi$ ) l'intensità dell'onda risultante  $I = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2$  è nulla.

Nel caso in cui  $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$

$I = 4 E^2$ : l'intensità dell'onda risultante è 4 volte l'intensità delle singole onde.

Nel caso in cui  $\omega \neq \omega'$  (le due sorgenti non sono coerenti) è il caso più diffuso in

(es. 2 lampadine accese) essendo  
relativamente difficile misre due sorgenti  
luminose avanti le stesse frequenze si ottiene

$$I = \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

medendo nel tempo  $\int_0^T \cos \omega_1 t \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi) dt = 0$

pertanto il termine  $2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$  risulta essere nullo.

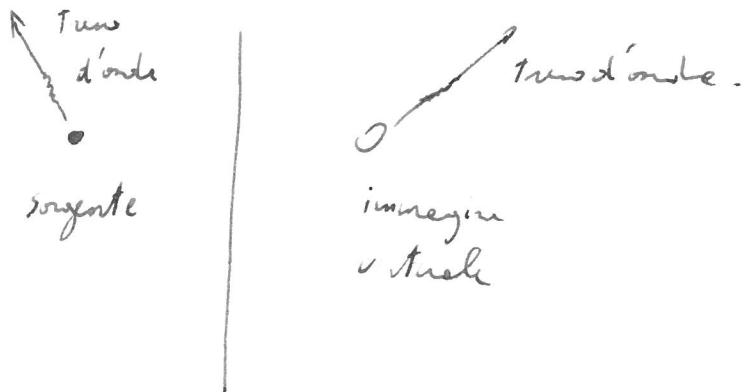
l'intensità dell'onda risultante - per esse  
somme delle intensità delle singole  
onde.

Una sorgente luminosa genera onde elettromagnetiche quando gli elettroni che  
essa stessa emette ritornano nelle proprie  
orbite lasciando andare un quantitativo di energia  
detto fotone.

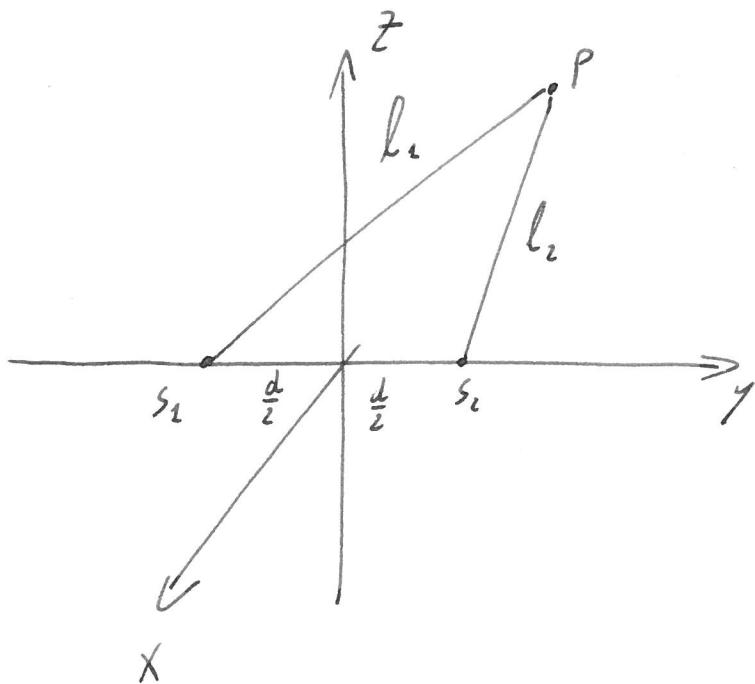
Il percorso da un'orbita all'altra avviene in  
circa  $10^{-8} \sim 10^{-10}$  sec pertanto la lunghezza  
del tronco d'onda creato è dell'ordine di  
 $c \cdot 10^{-8} \sim 10^{-10} = 3\text{ cm} \sim 3\text{ m}$ .

Il susseguirsi continuo di queste oscillazioni  
determina onde elettromagnetiche aventi  
una lunghezza d'onda e corrispondentemente

Un modo per creare due sorgenti coerenti cioè  
due sorgenti di emissioni contemporanee  
sentite onde eventi le stesse lunghezze d'onda e  
la stessa spettro. è quello di confrontare  
una sorgente luminosa e le sue immagini  
virtuali o altre immagini virtuali generate  
dalle stesse sorgente.



Consideriamo due sorgenti coerenti poste ad una distanza  $d$ .



$$\Delta l = l_1 - l_2 = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 + z^2} =$$

$\rightarrow 2m \frac{\lambda}{2}$   
 $\rightarrow (2m+1) \frac{\lambda}{2}$

$$m = 0, 1, 2, \dots \in \mathbb{N}$$

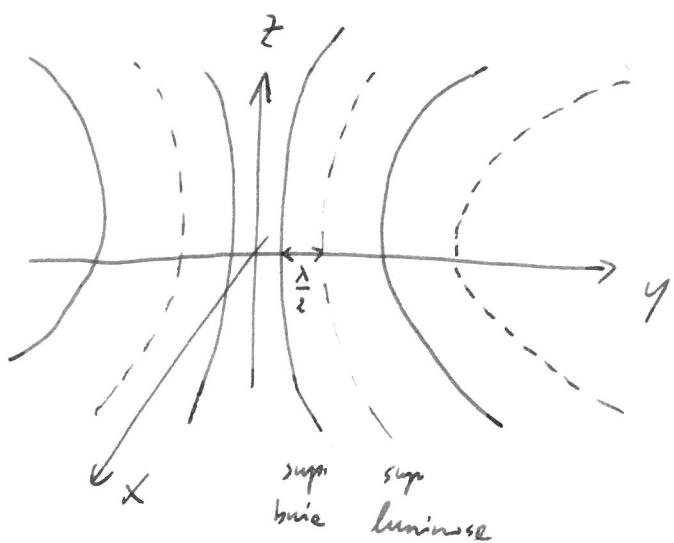
nel I caso  $\Delta l = m\lambda$  i campi elettrici generati

nel punto P dalle 2 sorgenti sono uguali e rettangoli

se le medesime intensità luminose;

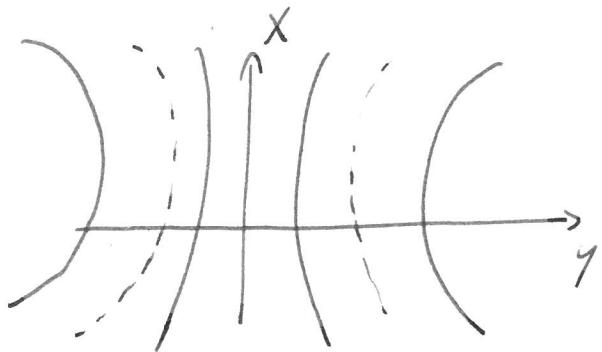
nel 2 caso la differenza fra i due periodi è  
 pari a  $m\lambda + \frac{\lambda}{2}$  in tal caso i due campi  
 sono spaziali e pertanto si annullano.

Le due ragioni sono ineludibile, nel I caso  
 l'ineludibile rappresenta la superficie luminosa,  
 nel II caso  $I = 0$  la superficie luce.

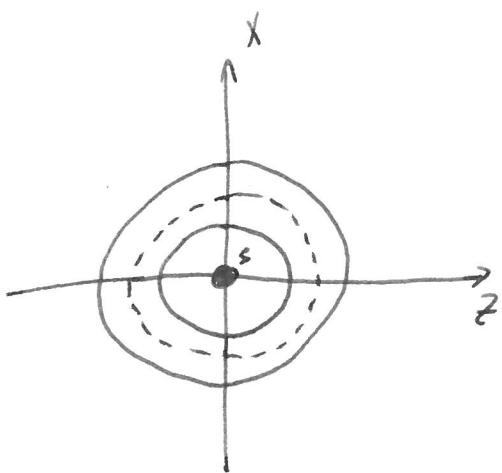


Si ponga un piano ortogonale all'asse Z Hengs

in susseguarsi si iperbole luminosa e luce come  
in figure



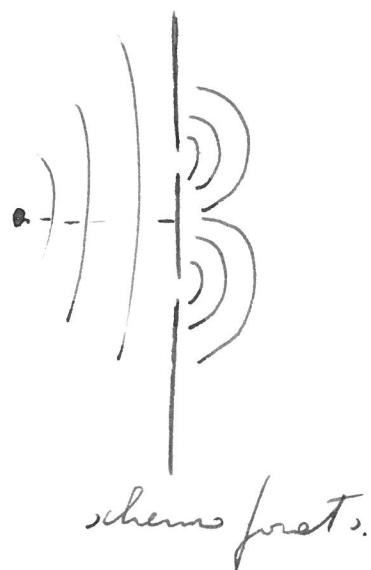
Se pongo un piano ortogonale all'asse y ottengo  
un susseguarsi di circonference



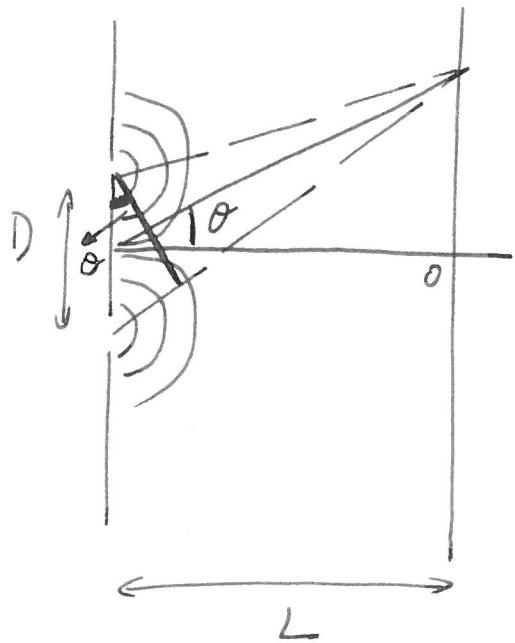
Nel caso la luce non è monosimmetica lo lunghezza  
d'onda di ogni colore è differente (le zone d'ombra di un  
colore possono essere di luce per un altro) il fenomeno non è  
più visibile.

Un altro modo per creare una sorgente coerenti è quello di pone una sorgente luminosa dietro un disco fusto.

Per il principio di Huyghens, due foci composti e loro solle come due sorgenti di onda luminose coerenti tra loro.



Supponiamo di porsi uno schermo parallelemente a quell'asta, come in figura.



Se suppongo che  $L \gg d$

$$\Delta L = d \operatorname{sen} \theta = 2m\frac{\lambda}{2} \quad (\text{con massime luminosità})$$

Approssimativamente; due angoli indicati con  $\theta$  in figura sono uguali.

$$y = L \operatorname{tg} \theta \approx L \operatorname{sen} \theta$$

Le righe luminose che compiono sulla scherm  
sono distanziate di  $\Delta y = \frac{L m \lambda}{d}$   $m=0, 1, \dots, eN$ .

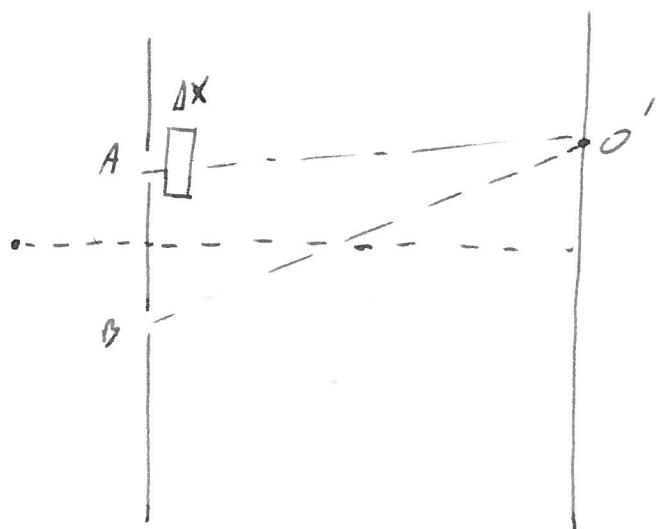
Se  $\lambda = 0.5\text{ }\mu\text{m}$  (visuale)

$$d = 1\text{ mm} \quad L = 1\text{ m} \quad \Delta y = 0.5\text{ mm}$$

Nel caso in cui la sorgente non è posta al  
centro di due fili la sorgenti colerent:  
risulteranno sfocate. I punti di luce e ombre  
non coincideranno con il caso precedente.

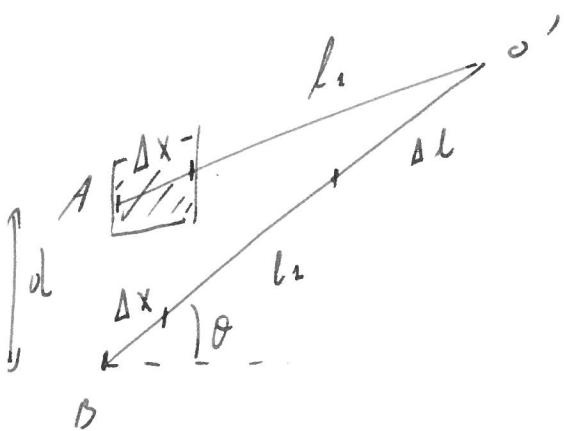


Supponiamo ora di avere davanti ad una stelle  
due sorgenti coerenti: una lamine di un materiale  
disperso  $\Delta x$



Poiché sulla stessa si forma il punto luminoso  
entro dei cerchi concentrici di cui e' curvi grandi  
il tempo impiegato dalle due onde per percorrere  
i tratti  $\bar{AO}'$  e  $\bar{BO}'$  sono uguali e poiché le  
velocità dell'onda diminuisce nell'altre vere  
il mezzo disperso  $\Delta x$ , per compiere lo stesso

delle I onde il tratto  $\bar{OB}$  sarà meggiore di  $\bar{OA}$ .



$$\frac{\Delta x}{v} + \frac{l_2}{c} = \frac{\Delta x}{c} + \frac{l_1}{c} + \frac{\Delta l}{c}$$

$$V = \frac{c}{n}$$

$$\Delta x_n = \Delta x + \Delta l = \Delta x + d \operatorname{sen} \theta$$

\*) si ha il massimo centrale quando il cammino ottico dei due raggi è uguale.

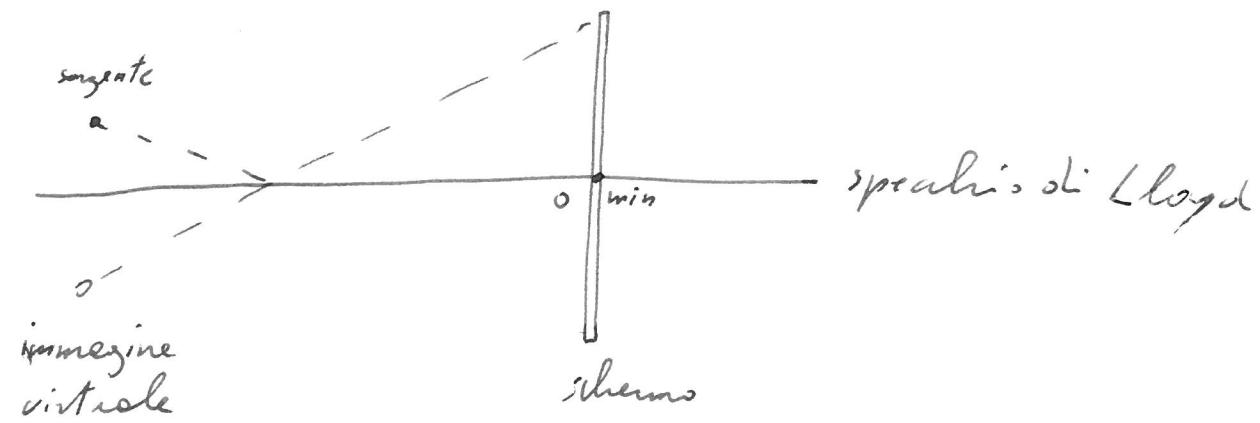
$$\Delta x_{(n-1)} = d \operatorname{sen} \theta$$

quando il cammin ottico dei due raggi è uguale.

noto il coefficiente di rifrazione del mezzo  $n$  e l'angolo  $\theta$  è possibile ricavare la spessore  $\Delta x$  oppure viceversa calcolare  $n$  o  $\theta$ .

## Esercizio di Lloyd

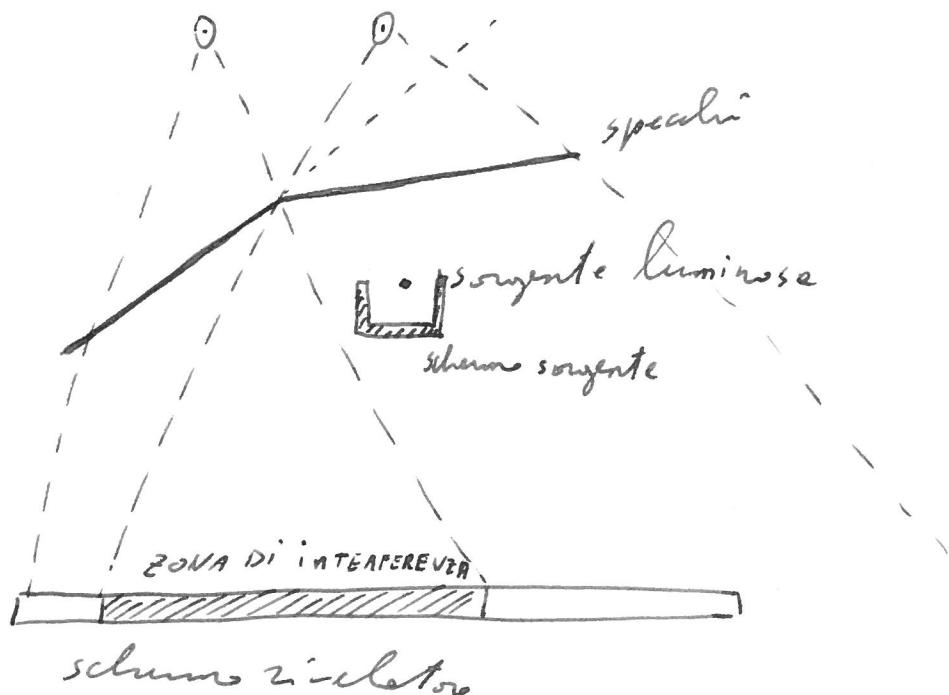
L'esercizio di Lloyd consiste nell'osservazione delle figure di rifrazione prodotte da un'immagine reale e virtuale su uno schermo.

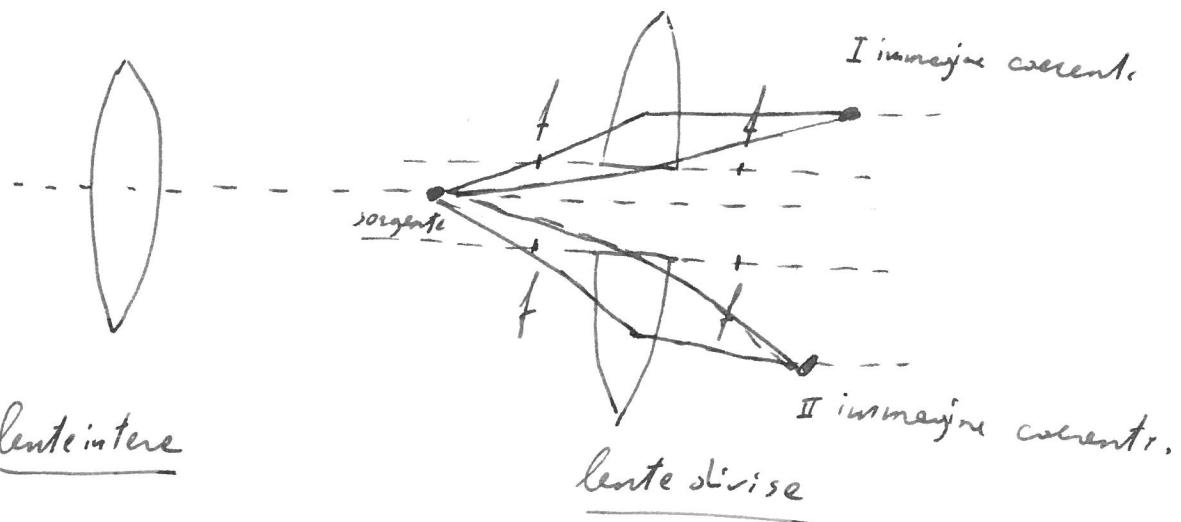


Sullo schermo si vede che i punti di minima d'intensità luminosa risultano invertiti rispetto alle sorgenze fatte con due sorgenti coerenti.

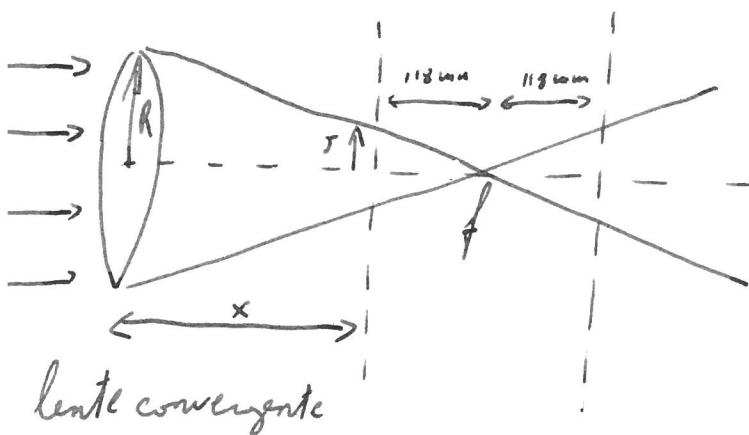
L'illusione perde il campo elettrico riflesso cambiando verso. Ciò è un esperimento di T.

Un modo per creare sorgenti coerenti: è quell  
di avere una superficie riflettente come in figura  
*immagini virtuali*





Pb)



La lente fa convergere i raggi solari su un foglio. Si calcola  
posta distanza reale  $x$ .

Spesso che la lente è di 8 dm²,

$S = 4.5 \cdot 10^5 \frac{W}{m^2}$  è il limite di combustione della carta

$\hat{s}_0 = 1.12 \cdot 10^7 \frac{W}{m^2}$  la potenza emessa dal sole in  $m^{-2}$ .

Determinare la minima distanza  $x$  affinché  
la carta si bruci.

$$f = \frac{1}{8} m = 125 \text{ mm}$$

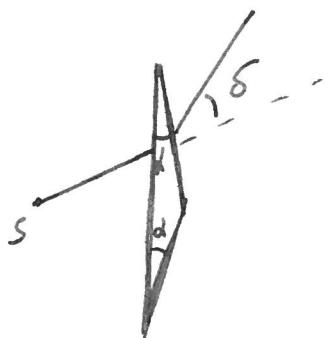
$$\text{la carte si brucia se } \frac{R^2 f}{r^2 f} > \frac{s}{s_0}$$

$$\frac{R}{r} : \frac{f}{f-x}$$

$$\frac{f}{f-x} > 20 \quad f > 20f - 20x$$

$$x > f - \frac{f}{20} = 125 - \frac{125}{20} = 118.75 \text{ mm}$$

Considera un prisma avente l'angolo molto piccolo



$\theta'$  = angolo riflesso

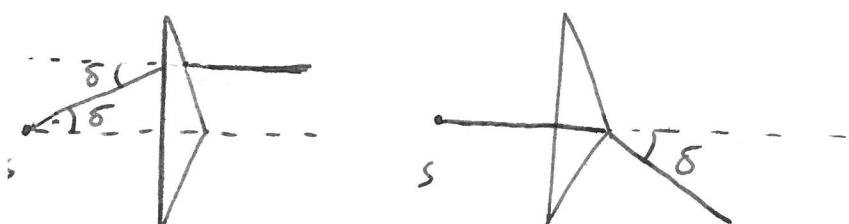
$\theta$  = angolo incidente

Se indica con  $\delta$  l'angolo formato tra il raggio incidente e il raggio riflesso vale

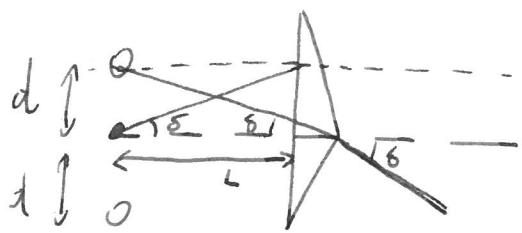
$$\delta = \theta_1 + \theta_2 - (\underbrace{\theta'_1 + \theta'_2}_{\alpha}) = \theta_1 \frac{\theta'_1}{\theta'_1} + \theta_2 \frac{\theta'_2}{\theta'_2} - \alpha =$$

$$= \theta'_1 n + \theta'_2 n - \alpha = n(\theta'_1 + \theta'_2) - \alpha = nd - \alpha = d(n-1)$$

In tal condizioni  $\delta$  è costante



dei due raggi primari disegnati c'è la  
posizione dell'immagine virtuale

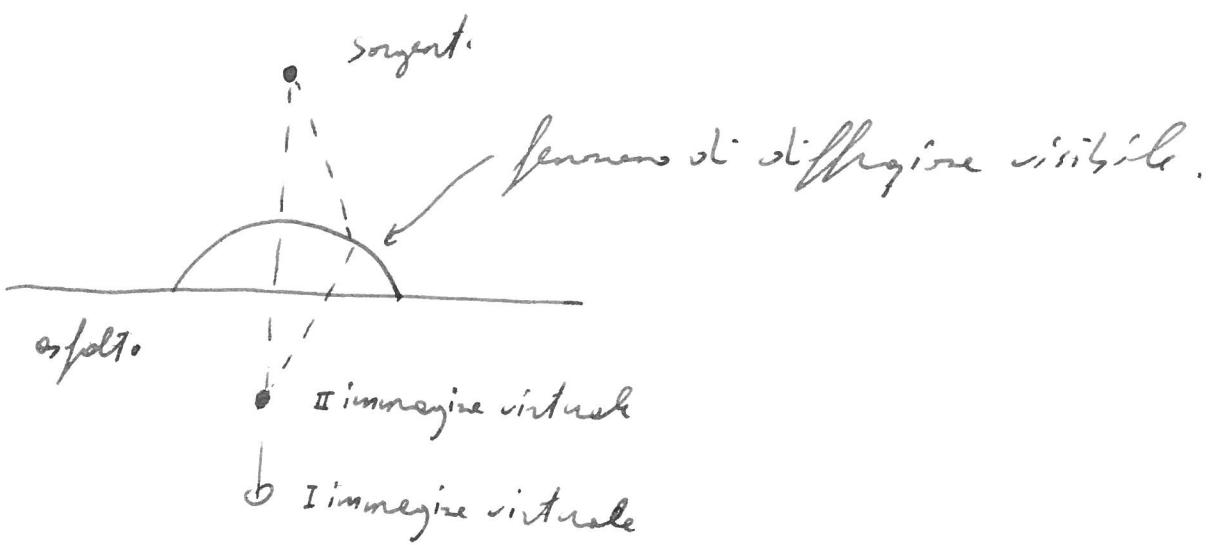


$$d = L \operatorname{tg} \delta = L d(n-1)$$

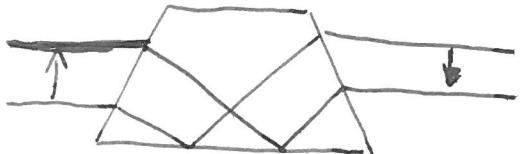
\* Un fenomeno assai frequente di interferenze luminose che genera figure di diffrazione è quell di una mezzaluna di benzina che cade sull'asfalto generando quelle tipiche figure colorate.

Più è stretto il fott de l'asfalto la graticola di benzina genera due sorgenti coerenti immaginari una sorgente stessa. Tali sorgenti creano un fenomeno di diffrazione visibile nalle p3

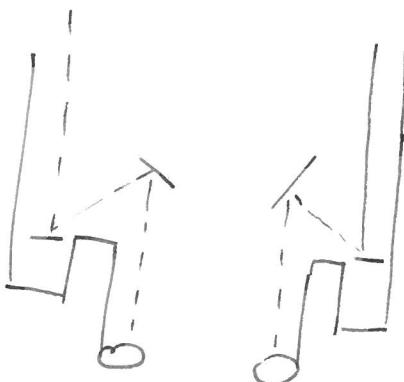
superficie delle bolle di benzina.



A disperendo opportuni prismi (v. figure)  
è possibile invertire l'immagine.



Una serie di prismi  
penetra lo  
volume le dimensioni



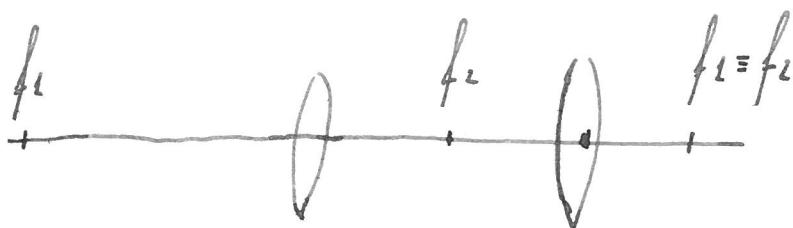
del binocolo consentono lunghezze f. + f.

## Oculari

Gli oculari sono molto importanti per la costruzione di cannocchiali e microscopi; hanno il compito di creare l'immagine virtuale di un oggetto posto dopo il fuoco.

Per coneggere i problemi di aberrazione chromatica solitamente si usano due lenti convergenti poste ad una distanza  $d = \frac{f_1 + f_2}{2}$ .

L'oculare di Huygens è costituito da due lenti convergenti tali che  $f_1 = 3f_2$      $d = 2f_2$



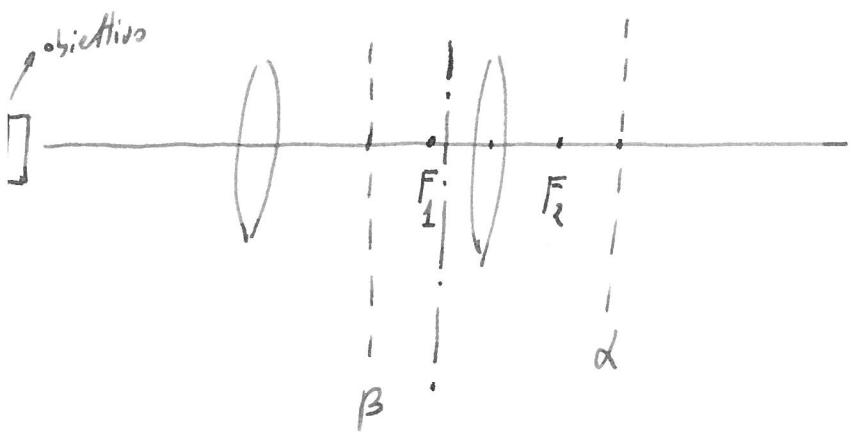
È così possibile ridurre l'elaborazione comatica.

Determina il fuoco  $F$  del sistema per trovare il punto in cui deve cadere l'immagine affinché si veda quella ritratta.

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{3}{2} f_2 \quad \text{i punti principali}$$

$$d = \frac{df_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{6f_2^2}{2f_2} = 3f_2$$

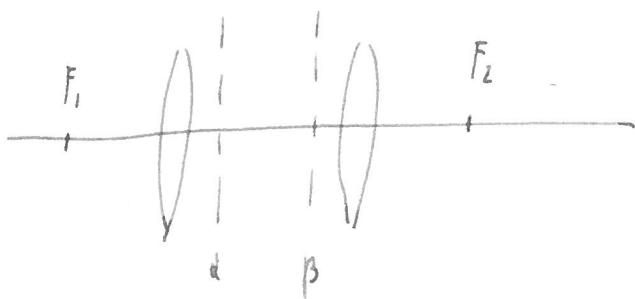
$$\beta = \frac{2f_2}{2f_2} = f_2$$



... piano in cui deve cadere l'immagine ingrandita dell'oggetto, affinché l'oculare formi l'immagine virtuale.

Se l'oggetto ha un ingrandimento di  $100 \times$  ponendo nel piano indicato una scala graduata a 5 mm ottengo, confrontandole con l'oggetto ingrandito, una scala di misure reale di  $\frac{5 \text{ mm}}{100}$  cioè dell'ordine del micron.

Consideriamo un oculare costituito da due lenti di focali  $f_1 = f_2 = f$  poste ad una distanza  $d = \frac{2}{3}f$  (l'elargione cronetica è corretta solo in parte se  $d \neq f$  ma bisogna tenere conto che il fuco del sistema non è interno alle due lenti).



## Principio di Huyghens

Se conosce il fronte dell'onda all'istante  $t$ , per determinare il fronte d'onda all'istante  $t + \Delta t$  suppongo che ogni punto del fronte d'onda si comporti come una sorgente di onde elettromagnetiche. Il fronte d'onda all'istante  $t + \Delta t$  è l'inviluppo delle onde elettromagnetiche generate da ogni singolo punto.



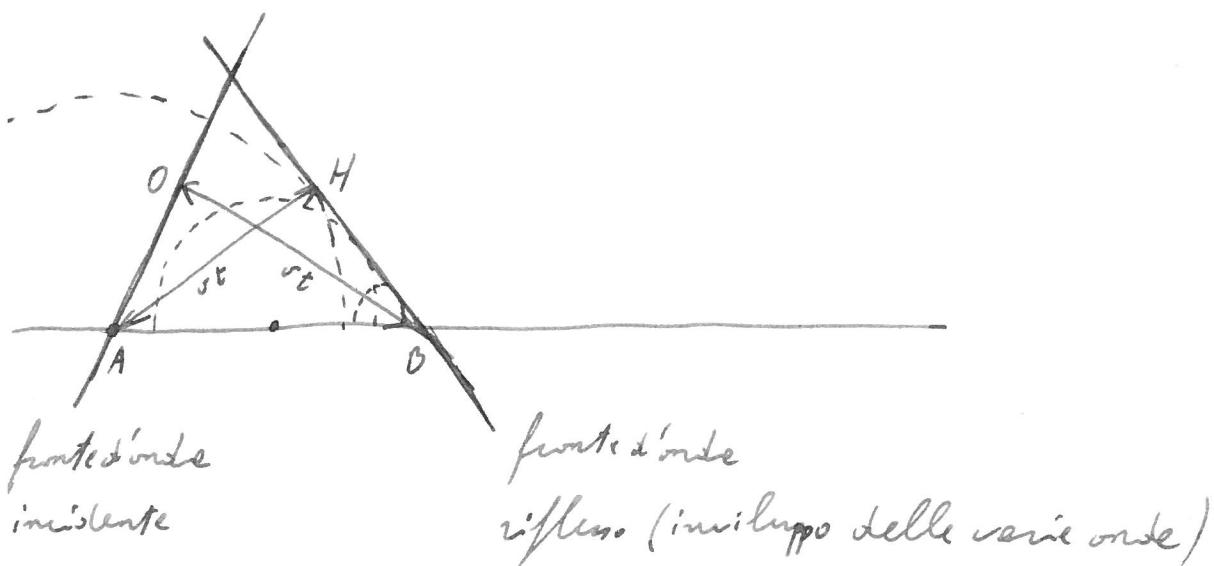
inviluppo delle  
onde generate da ogni  
punto.

fronte d'onda  
all'istante  $t$

\*) si suppone nulla l'onda regresiva.

Con il principio di Huyghens è possibile spiegare il fenomeno della riflessione e delle rifrazione.

### Il fenomeno riflessione



Il punto A colpito dall'onda incidente si comporta come una sorgente creando un'onda circolare che ha raggi  $r\bar{t}$  quando il fronte d'onda incidente ha percorso il tratto  $\bar{OB} = r\bar{t}$ .

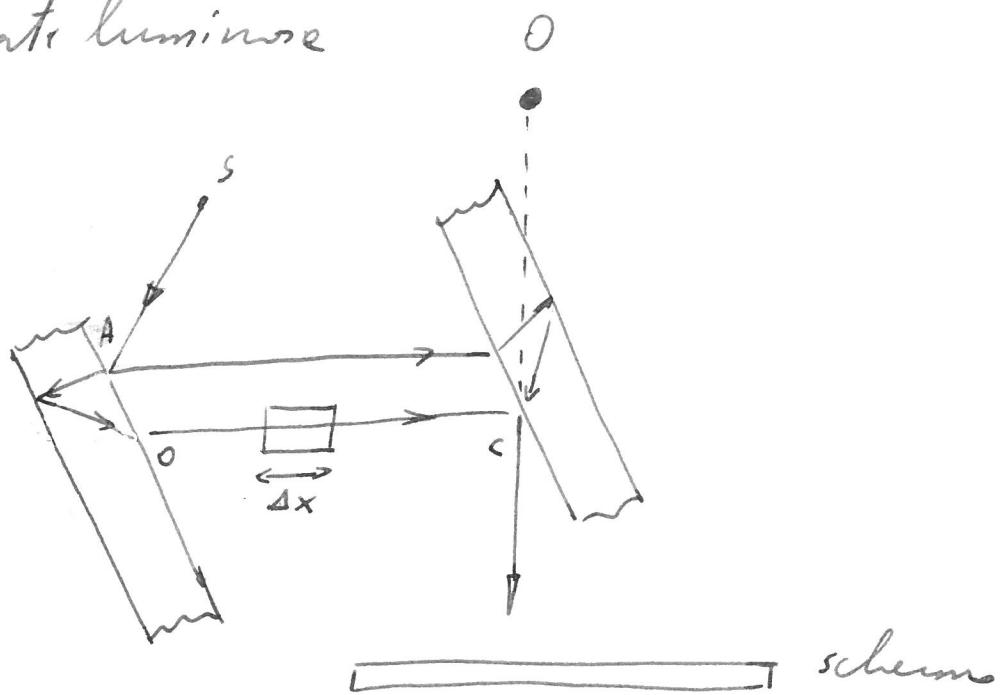
Nel tempo  $\bar{t}$  ogni punto del tratto  $AB$  avrà creato 2 sue volte un'onda circolare di raggi inferiori a  $r\bar{t}$ . Nel punt. B appena toccato dal fronte

L' studio delle varie figure d'interferenze  
può essere utile per misure molto precise.

Il seguente strumento permette di calcolare con  
estrema precisione l'indice di rifrazione  $n$  dell'  
aria.

$$n = 1.000273.$$

Consistono due specchi come in figura e una  
sorgente luminosa



Se i due specchi sono uguali il reaggio incidente

in A emergerà in C secondo i due diversi percorsi  
e tale regg. genererà due sorgenti virtuali  
della il II specchio.

Supponiamo di posare sul percorso del regg.  
oc un cilindro in cui si è fatto del moto spinto.

Sull'Schema si avrà una precisa figura d'  
interferenze.

Se facciamo entrare nel cilindro progressivamente  
arie il percorso ottico del regg. oc emergerà  
e emergerà anche la figura d'interferenza.

Ogni volta che il centro dell'aria d'interferenza  
passerà dalla luce → aria → luce il percorso  
ottico del regg. oc sarà aumentato di  $\lambda$

lunghezze dell'onda elettromagnetica adoperato.

Quando il cilindro sarà completamente riempito.

d'aria

$$\underbrace{nL - 1}_\text{per uno} L = \underbrace{N\lambda}_\text{per uno stile}$$

numbers of volte entro (luce  $\rightarrow$  luminescenza)

otti o cilindri      cilindri con il  
con aria            motospint.

$$n = \frac{N\lambda}{L} + 1$$

Se  $L = 10 \text{ cm}$        $N = 55$  frange.

## Interferometri ed esperienze di Michelson

Con il termine etere s'intendeva denominare

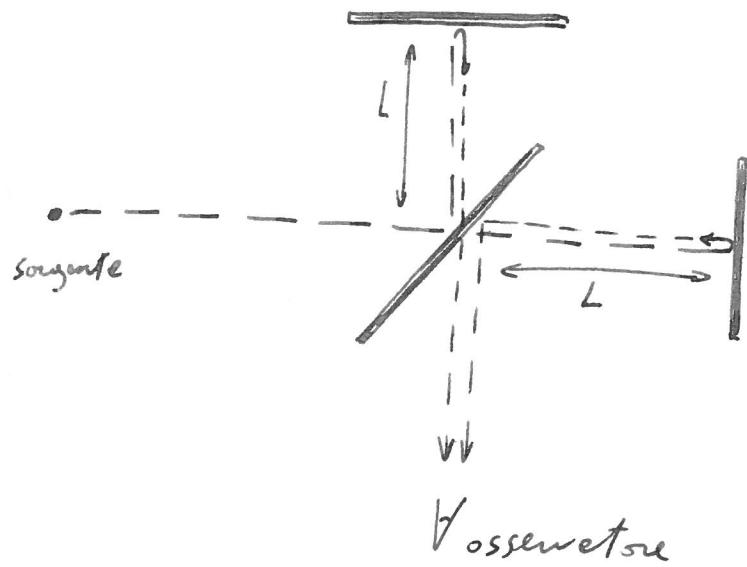
l'immaginario supporto alle propagazione delle onde elettromagnetiche.

Poiché la luce si propaga nello spazio l'etere doveva essere poco denso inoltre doveva essere molto rigido per poter permettere le trasmissioni di onde trasversali (caratteristiche contestate troppo).

Inoltre si supponeva l'etere fisso (sistema di riferimento inerziale assoluto).

L'esperienza di Michelson richiede l'inesistenza dell'etere.

L'interferometro di Michelson è schematizzato in figura.

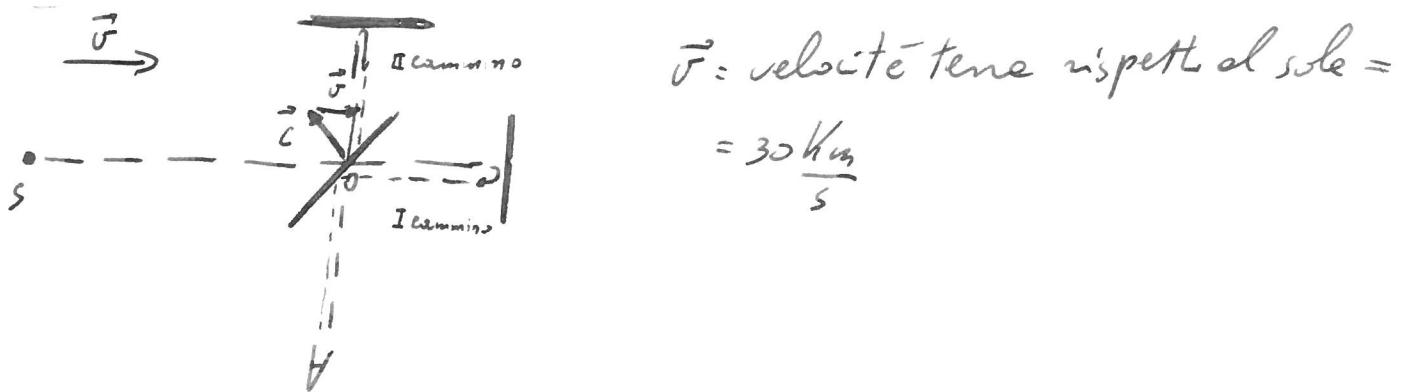


il raggio delle sorgenti luminose s percorre due tratti diversi (riflessi degli specchi) e arriva all'osservatore. Se tali raggi vengono reattri da uno schermo genereranno figure d'interferenza diverse al variare del percorso ottico dei due raggi.

Supponiamo che le distanze dei due specchi L siano uguali se dalla sorgente parte

il reygo luminoso i due reygi generati percorrono  
il cammino nello stesso tempo se il sistema è  
solidale all'etere, percorrono il cammino in  
tempi diversi se l'esperimento viene fatto in un  
sistema che si muove con velocità  $\vec{v}$  rispetto  
all'etere.

Facendo l'esperimento sulle teme  $\vec{v}$  considerate  
con le velocità delle teme rispetto al sole  
cioè di circa  $30 \frac{\text{Km}}{\text{s}}$ .



1° cammino

$$T_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{L(2c)}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

2° cammino

$$T_2 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2 + v^2}} = \frac{2L}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

se chiamano  $\frac{v}{c} = \beta$

$$\Delta T = \frac{2L}{c} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{c^2}}}{1 - \frac{\beta^2}{c^2}} \right) = \frac{2L}{c} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta^2} \right)$$

$\beta$  è molto piccolo

Posso trascurarlo ed abbreviare e sviluppare  
a serie di Taylor  $\sqrt{1-\beta^2} \approx \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)$

$$\Delta T = \frac{\chi L}{c} \frac{\beta^2}{\chi}$$

Una differenza di tempo così piccola non può  
essere rilevata da nessuno strumento usato per  
la misurazione delle lunghezze mentre può essere  
rilevata da un interferometro.

Se ruoto l'interferometro la velocità  $\vec{v}$   
combinata portante la differenza di tempo

dei due cammini dovrebbe risultare uguale nelle figure d'interferenza.

Tutti gli esperimenti fatti mostravano che le figure d'interferenza erano sempre uguali. Si conclude che l'etere era inesistente e le velocità delle luci una costante in ogni sistema di riferimento inerziale.

Per questo si detto il valore di  $c + v$  è sempre uguale a  $c$ .

È possibile supporre che la legge di composizione delle velocità non è più vera -

La composizione di due velocità

$v_1 \oplus v_2 \neq v_2 + v_1$  è una legge simmetrica

rispetto a  $v_1$  e  $v_2$  che per piccole velocità,,

vicina alle somme, tale da verificare

$$v_1 \oplus c = c$$

$$v_1 \oplus v_2 = f(v_1, v_2) (v_1 + v_2)$$

$$v_1 \oplus c = c = f(v_1, c) (v_1 + c)$$

$$f(v_1, c) = \frac{c}{v_1 + c} \quad \text{non è simmetrica rispett}$$

a  $v_1, c$  diviso per  $c^2$  numeratore e denominatore

$$f(v_1, c) = \frac{1}{1 + \frac{v_1 c}{c^2}} \quad \text{è simmetrica rispett}$$

$$\text{e } v_1, v_2 \text{ a } f(v_1, v_2) = \frac{1}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad \text{inoltre per}$$

$v_1$  e  $v_2$  piccole  $f(v_1, v_2) \approx 1$  e forse ad essere  
verificate le leggi di composizione delle velocità-  
gibiliene.

## Teoria della relatività rispetto

Trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni galiliane tra due sistemi  
di riferimento inerziali

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t = t' \end{array} \right.$$

non sono sufficienti spiegare alcuni fenomeni;

in particolare l'elettrodinamica di Maxwell

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

risulta avere soluzioni

diveinte, a perimetro di conduttori el contorno, in

due sistemi di riferimento inerti si contraddicono ad un importante principio della fisica.

Le equazioni di Galileo devono essere sostituite con le "trasformazioni di Lorentz" che, per velocità relativamente piccole assumono forma simile a quelle galiliane.

$$\begin{cases} x' = A(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = B(t - \alpha x) \end{cases}$$

Ora occorre determinare le incognite  $A$ ,  $B$ ,  $\alpha$

sapendo che per  $v \ll c$   $B \rightarrow 1$   $\alpha \rightarrow 0$

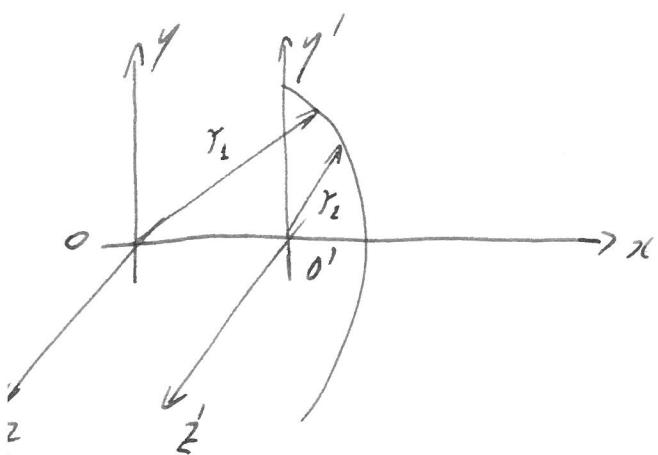
Secondo due principi fondamentali:

- 1) le leggi della fisica sono uguali in due sistemi di riferimento inerti
- 2) la velocità della luce è costante in ogni sistema di riferimento ineriale.

Consideriamo un sistema di riferimento fermo o in un sistema di riferimento ineriale che è in moto traslatorio uniforme rispetto al primo.

Supponiamo che un fascio di luce venga emesso quando le due origini coincidono proprio dal punto  $O \equiv O'$ .

$t=0$  i sistemi coincidono, viene emesso fascio luminoso.



per il I sistema di riferimento il fronte d'onda sferico avrà equazione al tempo  $t$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 = r_1^2 \quad (1)$$

Per il secondo sistema

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 = r_2^2 \quad (2)$$

(la velocità delle luce è costante nei due sistemi).

Considerando le equazioni di Lorentz coi parametri da determinare  $A, B, \alpha$  e sostituendole nelle II equazione

$$A^2(x^2 + \sigma^2 t^2 - 2x\sigma t) + y^2 + z^2 = c^2 B^2(t^2 + \alpha^2 x^2 - 2\alpha x t)$$

$$x^2(A^2 - c^2 B^2 \alpha^2) + y^2 + z^2 - 2xt[A\sigma - c^2 B \alpha] = t^2(c^2 B^2 - A^2 \sigma^2)$$

confrontando queste relazioni con le (1) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} A^2 - c^2 B^2 \alpha^2 = 1 \\ A^2 \sigma - c^2 B^2 \alpha = 0 \\ c^2 B^2 - A^2 \sigma^2 = c^2 \end{cases}$$

da questo sistema di equazioni in 3 incognite si ricava

$$A^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad \beta = \frac{v}{c} < 1$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma$$

$$\beta = A = \gamma$$

$$\alpha = \beta/c$$

Trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c}x\right) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}x'\right) \end{cases}$$

Per velocità anche di proli ordini di grandezza inferiori quelle della luce gli

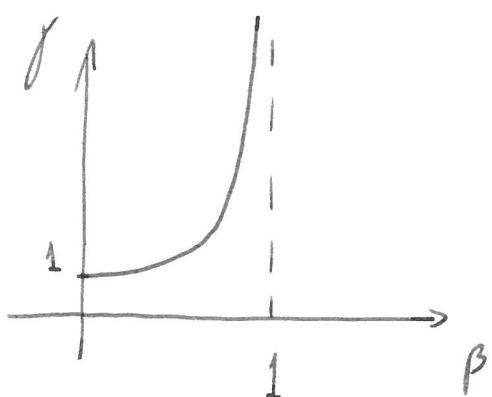
effetti sono trascurabili.

effetti delle trasformazioni di Lorentz sono inleventi.

$$v = \text{velocità elettrone} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\beta = 10^{-2} \quad / \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-10^{-4}}} \approx \frac{1}{1-\frac{1}{2}10^{-4}} \approx 1 + 5 \cdot 10^{-5}$$

$$\alpha = \frac{10^{-2}}{3 \cdot 10^8} = 0.3 \cdot 10^{-10} \quad \alpha \approx 0 \quad \gamma \approx 1 \quad \text{gli effetti sono inleventi.}$$



\* Composizione delle velocità.

Dalle trasformazioni di Lorentz è possibile ricavare le leggi sulla composizione delle velocità già viste in modo Siano precedentemente.

$V$  = velocità trascinamento.

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad dx = \gamma dx' + V \gamma dt'$$
$$dt = \gamma dt' + \gamma \frac{V}{c^2} dx'$$

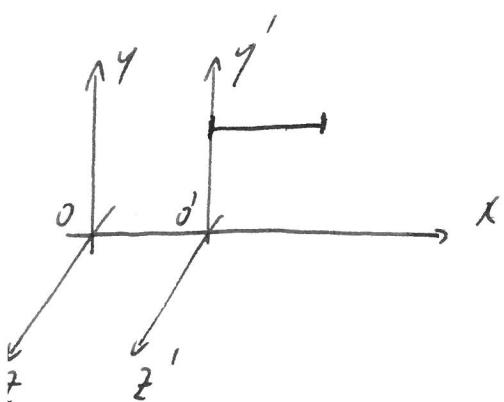
$$v_x = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \gamma \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}}$$

legge composizione delle velocità  $v'_x$  e  $V$ .

Anche le componenti  $v_y$  e  $v_z$  subiscono una trasformazione nei sistemi di riferimento

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(dt' + \frac{Vdx'}{c})} = \frac{v_y'}{\gamma(1 + \frac{Vv_x'}{c^2})}$$

\* / Contrazione delle lunghezze.



Considera una luce solistata al sistema

$\{o', x', y', t'\}$ . Se misura le lunghezze

delle lune in tale sistema avrà

$$l_o = \lambda x'$$

per misurare le lunghezze delle lune  
nel sistema  $\{0, x, y, z\}$  occorre soltanto  $\Delta x$   
(estremi delle lune) nello stesso istante  $\Delta t = 0$

$$\Delta x' = L_0 = \gamma(\Delta x + \frac{\beta}{c} st) = \gamma \Delta x$$

$$L_0 = \gamma L$$

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad L < L_0 \quad \text{le distanze si accorciavano.}$$

\*) Dilatazione del tempo.

Supponiamo che nel sistema di riferimento  $\{0', x', y', z'\}$  avvenga un evento periodico  
in un punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  in un intervallo di  
tempo  $\Delta t'$ .

Quindi  $\Delta t = \gamma(\Delta t' + \frac{\beta}{c} \Delta x') = \gamma \Delta t'$

Risulterà  $t \rightarrow t'$  cioè nel sistema di riferimento  $\{0, x, y, z\}$  l'evento sarà durato più tempo.

L'allungamento del tempo è stato misurato anche sperimentalmente.

Alcune particelle (muoni) hanno vite medie di  $2.2 \cdot 10^{-6}$  sec e poi decadono ( $\gamma \rightarrow e^+ \nu \bar{\nu}$ )  
Se tali particelle vengono emesse, rispetto al sistema di laboratorio le loro vite resteranno grandi la velocità si avvicina a c.

## Effetto Doppler relativistico

Consideriamo una sorgente di onde (ad esempio sonore) in moto rigetto ad un osservatore  $P$  e al  
nodo di propagazione delle onde (aria).

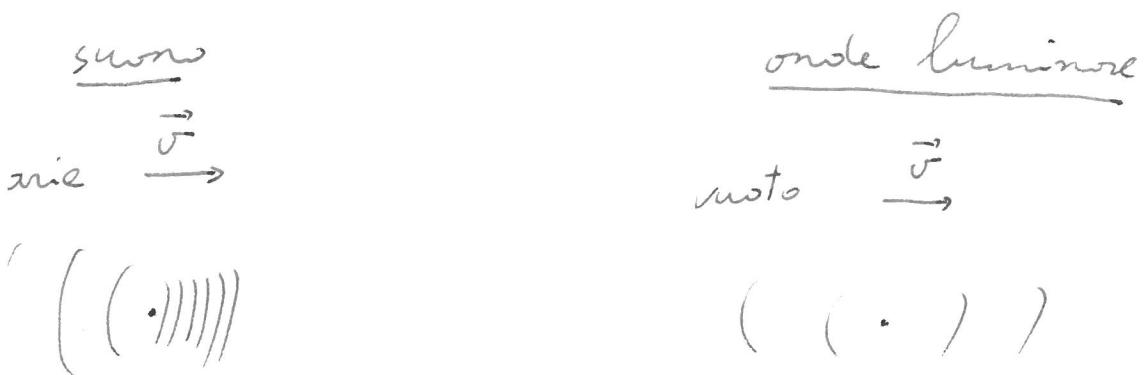
A causa del moto della sorgente l'osservatore  $P$  ascolterà suoni con frequenza diversa al  
rispetto delle sorgenti della sorgente.

Il suono contiene toni. Tale effetto è detto  
effetto Doppler - (l'uomo distingue suoni da  $20-20000\text{Hz}$ )

Consideriamo una sorgente luminosa in moto  
con velocità  $\vec{v}$ .

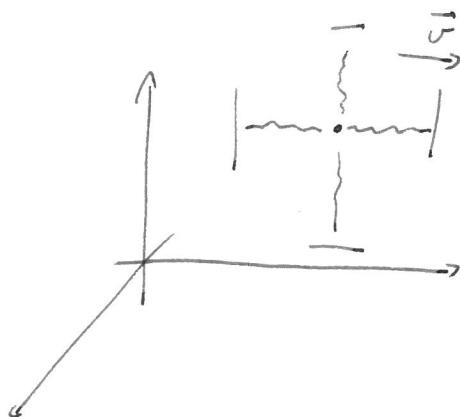
A differenza delle onde sonore un osservatore

solidale con la sorgente sarà investito da onde di lunghezza propria cioè a destra che a sinistra della sorgente.



Le lunghezze d'onda della luce emessa dalla sorgente sarà nel sistema ad esse solidale

$$\lambda_0 = \frac{c \Delta t_0}{v_0 \Delta t_0}$$



Nel sistema fermo  $\lambda = \frac{(c + v) \Delta t}{v \Delta t}$

ma  $v \Delta t$ : numero di regioni è uguale  
ne due sistemi =  $v_0 \Delta t$ .

$$\lambda = \frac{(c + v) \Delta t}{v_0 \Delta t_0} \quad \text{poiché } \Delta t = \gamma \Delta t_0.$$

$$\lambda = \frac{(c + v) \gamma}{v_0} = \lambda_0 \gamma (1 + \beta)$$

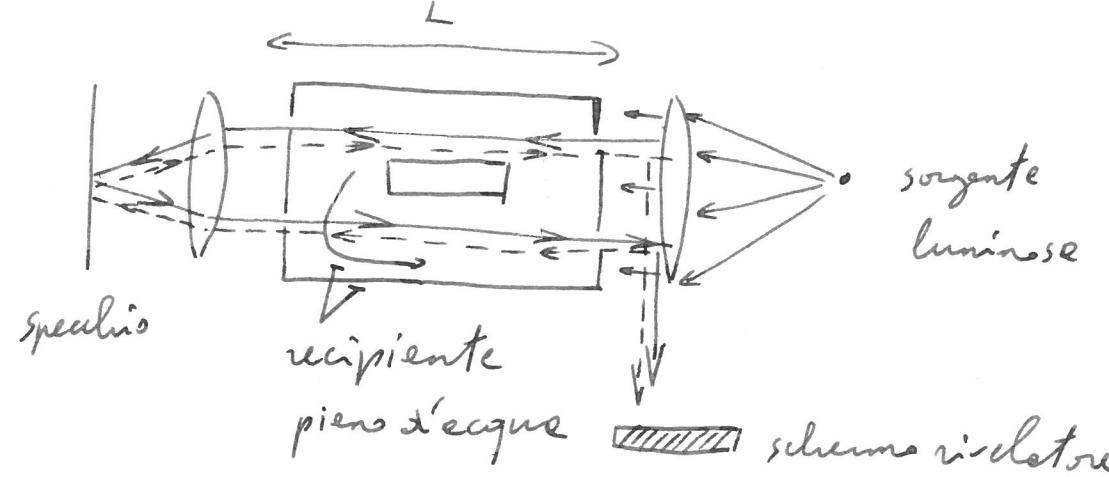
(classicamente  $\gamma = 1$ )

L'effetto Doppler permette di misurare  
anche le velocità delle stelle rispetto alle  
Terre.

$v_{\text{rel}}$ , l'effetto di emissione  
dalle  
regioni luminose che avvengono nelle  
stelle (trasformazione di idrogeno in elio)

rimo osservare le tale spette venne a  
risalire alle vaste delle stelle la  
determinare tale variazione.

## Epreseenze di Fresnel



Se nel recipiente l'acqua è ferma i due raggi  
(intero — e tratteggiato ---) percorrono lo stesso  
tragitto pertanto viene raccolta una particolare  
figura d'interferenza.

Supponiamo si fa circolare acqua nel  
recipiente con una velocità  $V$ .

Le onde luminose giungono spostate  
di un tempo che uccide la interferenza

meccanica risultò essere

$$\Delta T = 2L \left( \frac{1}{c-V} - \frac{1}{c+V} \right) = 2L \left( \frac{1}{\frac{c}{n}-V} - \frac{1}{\frac{c}{n}+V} \right) = 2L \left( \frac{1}{\frac{c}{n}(1-\frac{Vn}{c})} - \frac{1}{\frac{c}{n}(1+\frac{Vn}{c})} \right)$$

poiché  $V \ll \frac{c}{n}$

$$\Delta T = 2L \frac{n}{c} \left( 1 + V \frac{n}{c} - \left( 1 - V \frac{n}{c} \right) \right) = 2L \frac{n}{c} 2V \frac{n}{c}$$

$$\Delta T = \frac{4L}{c^2} V n^2$$

Consideriamo invece le composizioni delle velocità in meccanica relativistica

$$2L \left( \frac{1}{\left( \frac{c}{n}-V \right) \frac{1}{1-\frac{cV}{nc^2}}} - \frac{1}{\left( \frac{c}{n}+V \right) \frac{1}{1+\frac{cV}{nc^2}}} \right) = 2L \left( \frac{\frac{1-cV}{nc^2}}{\left( \frac{c}{n}-V \right)} - \frac{\frac{1+cV}{nc^2}}{\frac{c}{n}+V} \right).$$

$$= 2L \left( \frac{n}{c} \left( 1 + \frac{Vn}{c} \right) \left( 1 - \frac{cV}{nc^2} \right) - \frac{n}{c} \left( 1 - \frac{Vn}{c} \right) \left( 1 + \frac{cV}{nc^2} \right) \right) =$$

$$= \frac{4L n^2 V}{c^2} + 2L \left[ \left( \frac{n}{c} + \frac{Vn^2}{c^2} \right) \left( -\frac{cV}{nc^2} \right) - \left( \frac{n}{c} - \frac{Vn^2}{c^2} \right) \left( \frac{cV}{nc^2} \right) \right]$$

$$= \frac{4L n^2 V}{c^2} + 2L \left[ -2 \frac{V}{c^2} \right] = \frac{4L n^2 V}{c^2} - 4L \frac{V}{c^2} \frac{n^2}{h^2} =$$

$$= \frac{4L V n^2}{c^2} \left( 1 - \frac{1}{h^2} \right)$$

si osservi che al limite di  $n=1$  (esperimento Michelson) i due raggi emessi nello stesso tempo come per l'esperimento di Michelson.

Se considero due sistemi di riferimento inerziali  
 in moto l'uno rispetto all'altro con velocità  $\vec{v}$ ,  
 salgono le relazioni

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

Definisco quadriettore il vettore

$$\overset{\Rightarrow}{S} = (x, y, z, i c t) \quad i = \sqrt{-1}$$

Tale quadriettore ha le proprietà che

$$\overset{\Rightarrow}{S} \cdot \overset{\Rightarrow}{S} = \overset{\Rightarrow}{S}' \cdot \overset{\Rightarrow}{S}'$$

I quadriettori formano lo spazio cronotopo.

di Minkowski se hanno le proprietà sottoste.

Dunque  $\vec{s} \cdot \vec{s} = \vec{s}' \cdot \vec{s}'$  equivale dire che  
per il vettore  $s = (A_x, A_y, A_z, A_t)$  vengono le  
trasformazioni di Lorentz e viceversa

$$\begin{cases} A_x = \gamma (A'_x + \beta A'_t) \\ A_y = A'_y \\ A_z = A'_z \\ A_t = \gamma (A'_t + \beta A'_x) \end{cases} \quad \beta = \frac{\nu}{c}$$

$(dx, dy, dz, c dt)$  è un quadriettore, moltiplicato  
a quadriettore per uno scalare  $\rightarrow$  tempo  
essere un quadriettore.

$\left( \frac{dx}{dt_0}, \frac{dy}{dt_0}, \frac{dz}{dt_0}, \frac{dt}{dt_0} \right) \in \mathcal{A}$  spazio Minkowski

$$dt_0 = \frac{1}{\gamma} dt$$

$\left( \gamma \frac{dx}{dt}, \gamma \frac{dy}{dt}, \gamma \frac{dz}{dt}, \gamma \right) \in \mathcal{A}$

$(m_0 \gamma \vec{v}, m_0 \gamma) \in \mathcal{A}$

Se  $m_0$  è la massa a riposo, cioè la massa  
di un corpo misurata nel sistema di riferimento  
in cui esso è fermo  $m_0 \vec{v}$  è la quantità  
di moto posseduta dal corpo se si muove con  
velocità  $\vec{v}$  rispetto ad un sistema di riferimento  
fisso.

Per tal motivo si dice con  $m_0 \gamma = m$  la  
massa effettiva di un corpo.

al crescere delle velocità la massa va tende all'infinito. Ciò è anche evidente dal fatto che u non puote così fornire energia ad un corpo perché superare le velocità della luce  $T = \frac{1}{2} m v^2$

Definisce quindi il Minkovsky delle quantità di mt.

$$\vec{P} (\vec{m}, \gamma m) \quad m = j m_0$$

\* ) Per le trasformazioni di Lorentz

$$m'v' = \gamma(m'v' + \beta m'c) \quad \text{Se nel sistema } \{0', x', y', z'\} \text{ la}$$

m'ne è ferme

$$m'v' = \gamma \beta m_0 c$$

$$m' = \gamma \beta m_0$$

La II legge della dinamica continua e valere  
relativisticamente

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

$$W = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \vec{v} = m \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} + v^2 \frac{dm}{dt} = \frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} + v^2 \frac{dm}{dt}$$

$$\text{considero } \frac{dm}{dt} = m_0 \frac{d\gamma}{dt} = m_0 \frac{d\gamma}{dv^2} \cdot \frac{dv^2}{dt}$$

$$\frac{d\gamma}{dv^2} = \frac{d}{dv^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{1}{2} \gamma^{-\frac{3}{2}} \left( -\frac{1}{c^2} \right)$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0}{2c^2} \gamma \cdot \frac{dv^2}{dt}$$

ricavo  $\frac{du}{dt}$  e sostituisco in  $W$

$$W = \left( \frac{m_0}{c} \cdot \frac{sc^2}{m_0 c^2 s^2} + u^2 \right) \frac{dm}{dt}$$

$$W = \left[ c^2 \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right) + s^2 \right] \frac{dm}{dt} = c^2 \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dL}{dt} = c^2 \frac{dm}{dt} \quad \text{integrand}$$

$$T_f - T_i = c^2 (m - m_0) \quad T = \text{variazione di energia delle particelle}$$

Se alle particelle viene fornita una energia  $\Delta T$ , che in eserc. si mese

$$\Delta m = \frac{\Delta T}{c^2}$$

L'aumento di velocità delle particelle è data dalla relazione

$$\Delta T = m_0 c^2 (\gamma - 1) \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\beta = \frac{v}{c}$$

al limite classico  $\frac{v}{c} \ll 1$

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2$$

$$\Delta T = m_0 c^2 \frac{1}{2} \beta^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Il termine  $m_0 c^2 = E_0$  viene detta energia d'riposo delle particelle.

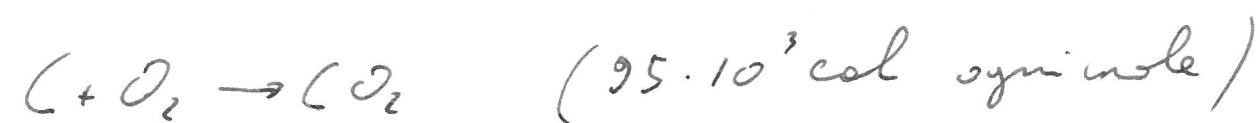
$E_0$  rappresenta l'energia che il corpo

potrebbe spingere se tutte le masse si trasformasse in energia.

Con l'ausilio delle nozioni relativistiche si modifica il principio di conservazione delle masse e dell'energia:

in un qualsiasi processo non conservativo separatamente le masse e l'energia ma una parte dell'una può trasformarsi nell'altra.

Considero la reazione esotermica



l'energia sganciata comporta una

diminuzione di mese di  $\text{CO}_2$  rispetto a  $\text{C} + \text{O}_2$ .

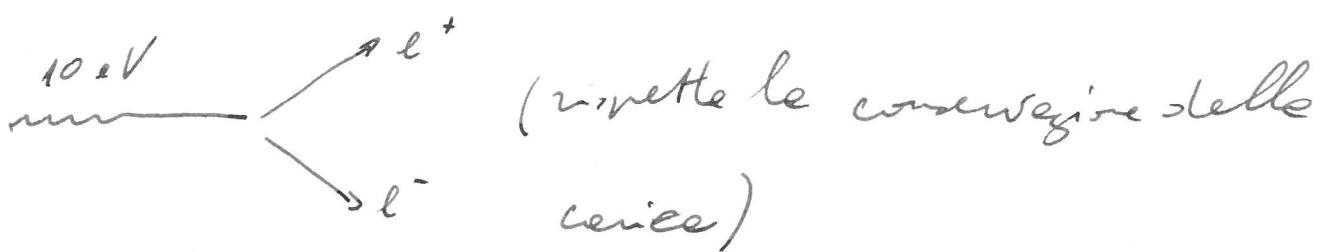
$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$  è inlivente.

Le trasformazioni di una piccolissime quantità  
di metale potrebbe generare energie estremamente  
elevate.

Fortunatamente le mese non si trasformano  
facilmente in energie dovendo in ogni processo  
rispettare anche altri principi quali le  
conservazione delle carica, delle quantità  
di moto, etc...

Nelle fissione nucleare  $1 \times 1000$  delle mese  
siano trasformati in energie, nelle fusioni

È possibile creare dell'energia materie, ad esempio delle onde elettromagnetiche possono generare elettroni e antielettroni



Vivere la materia si annichilisce con l'antimateria trasformandosi in energia.

L'energia totale di una particella vale

$$E = m_0 \gamma c^2$$

$$p = m_0 \gamma v = m_0 \gamma \beta c$$

Si ricava

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$$

Se una particella ha massa zero nulla

(fotoni)  $E = pc$

$$\text{e } E = h\nu c$$

Avendo maggiore necessariamente alle velocità  
delle luce.

163

## Trasformazioni relativistiche dei campi elettrici e magnetici

Osserviamo che a differenza delle masse le cariche sono quantizzate, inoltre è un invarianto relativistico.

Se infatti anche per la carica si tiene come per le masse le leggi  $q = \gamma q_0$  considerando che

in 1 g di idrogeno ci sono  $3 \cdot 10^{23}$  atomi (e quindi

elettroni) e che la velocità degli elettroni è

di  $10^6$  m/s ( $\beta = 10^{-2}$ ) si avrebbe una

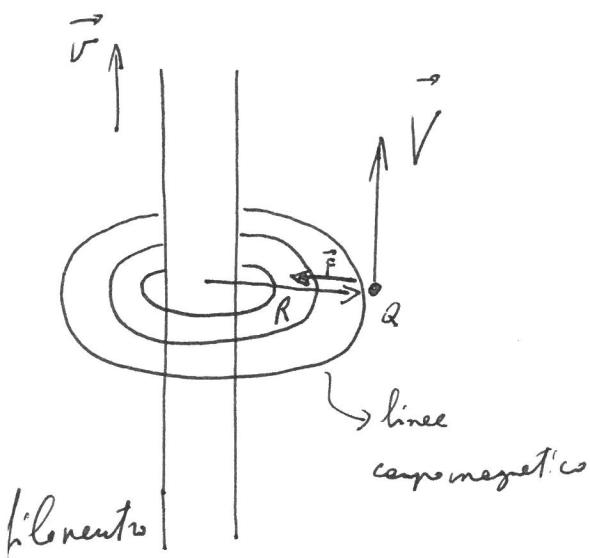
variazione di carica dell'ordine di

$$e \cdot 3 \cdot 10^{23} \gamma = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 10^{-2}}} \approx$$

$$\approx 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{23} \left(1 - \frac{10^{-4}}{2}\right) = \gamma j_0 \quad 165$$

la variazione di carica Sq. è dell'ordine del Coulomb pertanto gli elettroni collauderanno repulsamente sui nuclei.

### Paradosso dell'elettrostatica classica



$\vec{v}$  = velocità conica  $q+$  in moto nel filo

$\vec{V}$  = velocità conica  $\vec{V} \parallel \vec{v}$

Per le leggi di Bio e Savart il paesaggio di corrente nel filo determina un campo magnetico  $B_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R}$

La carica  $Q$  è soggetta ad una forza avente il

verso indicato dalla figura e intensità  $F = \frac{QV_0 i}{2\pi R}$

Supponiamo di porci nel sistema solido alle cerice (sistema anch'esso invariabile).

Poiché d'risulta essere ferme esse non risentono dell'azione di slan campo magnetico, inoltre essendo il filo neutro il campo elettrico è nulla pertanto le cerice restano in quiete.

Considerando il problema del punto di vista relativistico nei due sistemi invariabili è possibile definire l'ineguaglianza dell'accelerazione a cui è soggette le cerice d'ogni sistema e cui è soggetto nei due sistemi.

Nel sistema in cui le cerice sono ferme, infatti, il campo elettrico risulterebbe diverso da zero - 164

Posso ponere il campo elettrico e magnetico in funzione della densità di corrente

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \quad \lambda = \frac{\rho V}{l} = \rho S = \rho^+ S + \rho^- S$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad i = N q v S = \rho^+ v S$$

$\rho = \frac{Q}{V}$  ponendo da un sistema di riferimento ad un altro occorre considerare il quadrettore

$\vec{j} = \rho^+ \vec{S}$  e adoperare le trasformazioni

relativistiche

## Trasformazioni relativistiche dei campi elettrici e magnetici

Posto  $\vec{B} = \omega \vec{A}$

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

(si suppone dir  $\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ ) si ottengono le  
equazioni di Maxwell

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -c^2 \mu_0 \rho$$

Tali equazioni possono essere scritte anche nelle forme

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\square V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ricordando che  $\vec{j} = \rho \vec{v}$  e che

$(\gamma \vec{v}, \gamma c)$  è un quadritore massimale

il quadritore  $\vec{\tilde{j}} = (\gamma \rho_0 \vec{v}, \gamma \rho_0 c) = \rho_0 \vec{v}$

Se considero il quadritore potenziale

vettore  $\vec{A} = (\vec{A}, V_c)$   $V$  = potenziale scalare

le equazioni di Maxwell possono essere

scritte nelle forme

$$\square \vec{A} = -\rho_0 \vec{j}$$

(le II componenti di  $\vec{A}$  forniscono le II equazioni).

Se  $\vec{M}$  è un quadriettore di Minkowski si può dimostrare  
che anche  $\vec{M}'$  lo è.

$\square \vec{M}'$  è un quadriettore se  $\vec{I}'$  è vicina.

Poiché solo la relazione

$\square \vec{A} = \gamma_0 \vec{j}'$  e  $\vec{j}' \in \mathcal{I}'$  anche  $\vec{A}'$  è un quadriettore  
dell'spazio di Minkowski. Vengono per  $\vec{A}'$  le  
trasformazioni di Lorentz:

$$A'_x = \gamma \left( A_x - \beta \frac{V}{c} \right)$$

$$A'_y = A_y$$

$$A'_z = A_z$$

$$\frac{V'}{c} = \gamma \left( \frac{V}{c} - \beta A_x \right)$$

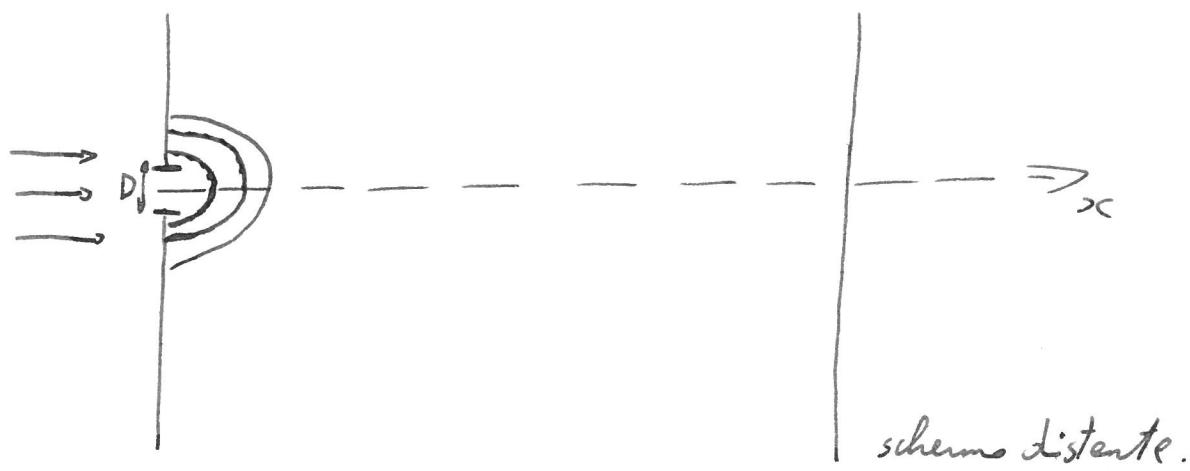
## la diffrazione

Per diffrazione si intende l'effetto di interferenza determinato dalla presenza di un'apertura o di un ostacolo sul percorso di un'onda luminosa.

Già nel diciassettesimo secolo si osservò che la luce presente attraverso fori raccolte su uno schermo genera una macchia cui bordi sono costituiti da frange concentriche. Tale fenomeno mette in crisi le teorie corpuscolari delle luci sostenute da Newton mentre è ben spiegato dal comportamento ondulatorio delle luci.

## Diffrizione di Fraunhofer

Se lo schermo su cui è realizzata le linee  
è molto distante dal foro in modo che  
l'onda incidente può essere considerata piena  
significativa di fenomeni di diffrazione di Fraunhofer.

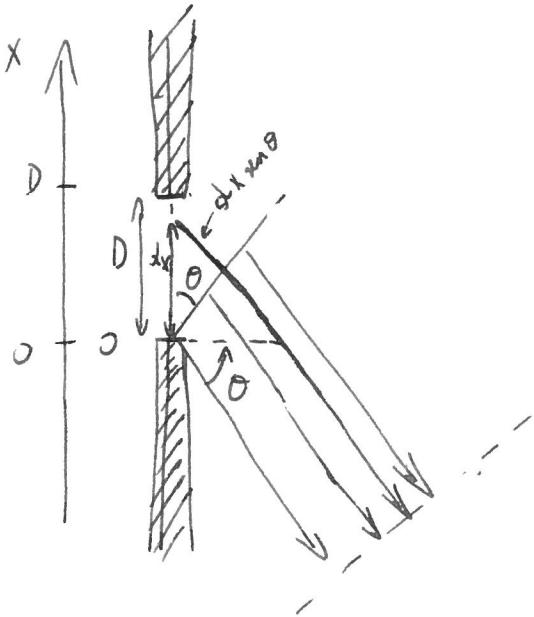


Per il principio di Huyghens del foro  $D$   
parte un'onda luminosa i cui raggi hanno  
anche inclinazioni diverse da zero rispetto all'asse  $x$



Consider il fronte d'onda generato dai raggi che formano un angolo  $\theta$  con l'asse  $x$ .

Il campo elettrico di tale fronte d'onda può essere visto come la somma dei contributi dei campi elettrici dei vari raggi che risulteranno spostati tra loro poiché ognuno di essi percorre un cammino diverso.



$$dE = \frac{E_0 dx \cos(\omega t - \Delta x)}{D}$$

$$\Delta x = x \sin \theta \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$dE = \frac{E_0 dx \cos(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \theta)}{D}$$

$$E = \int_0^D dE = \int_D \frac{E_0 \cos(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \theta)}{D} dx$$

$$\text{pongo } y = e^{xt} - 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin \theta$$

$$dy = -\frac{2\pi \sin \theta}{\lambda} dx$$

$$E = -\frac{E_0 \lambda}{D 2\pi v_{no}} \quad \left\{ \begin{aligned} \cos dy &= \frac{E_0}{D 2\pi v_{no}} \left[ v_{ny_0} - v_{ny_1} \right] \\ y_0 & \\ y_1 & \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{E_0 \lambda}{D 2\pi v_{no}} \cdot 2 \sin \left( \frac{y_0 - y_1}{2} \right) \cos \left( \frac{y_0 + y_1}{2} \right)$$

$$y_0 = e^{xt} \quad (x=0)$$

$$y_1 = e^{xt} - 2\pi \frac{D}{\lambda} \sin \theta$$

$$E = \frac{E_0 \lambda}{D 2\pi v_{no}} 2 \sin \left( \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda} \right) \cos \left( xt - \frac{\pi D \sin \theta}{\lambda} \right)$$

L'intensità del fronte d'onda è proporzionale  
a  $E^2$  medieto nel tempo

$$\text{pongo } z = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta$$

$$E = \frac{E_0}{z} \sin z \cos(\omega t - z)$$

$$\bar{E}^2 = \frac{\bar{E}_0^2}{z^2} \sin^2 z \cos^2(\omega t - z)$$

$$\text{medieto nel tempo } \cos^2(\omega t - z) = \frac{1}{2}$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{\bar{E}_0^2}{2z^2} \sin^2 z = I_0 \frac{\sin^2 z}{z^2}$$

L'intensità del campo è nulla se

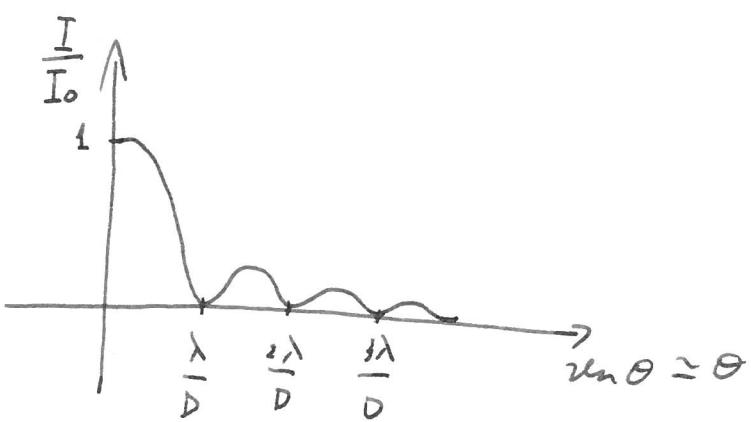
$$z = n\pi \quad n = 1, 2, \dots, \in \mathbb{N}$$

$$\text{cioè se } \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta = n\pi$$

$\sin \theta = \frac{\lambda n}{D}$  (se  $\theta$  può essere approssimato  
 con  $\theta$  essendo  $\frac{\lambda}{D}$  generalmente piccolo)

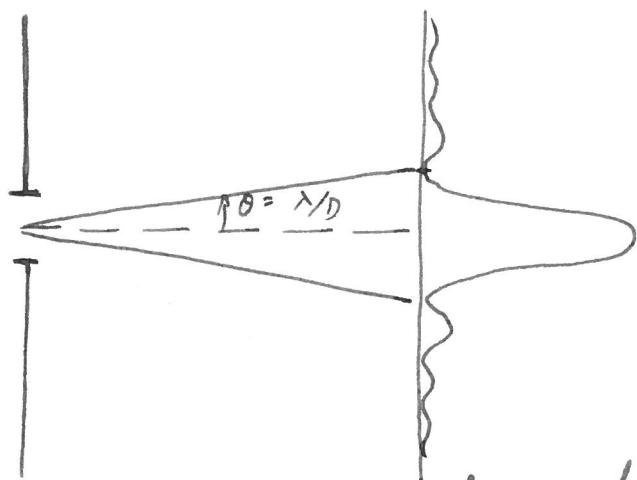
Per  $\sin \theta = 0$   $z = \infty$ , ha una forma  
 indeterminata

$$\langle E^2 \rangle = I_0 \frac{\sin^2 z}{z^2} = I_0$$



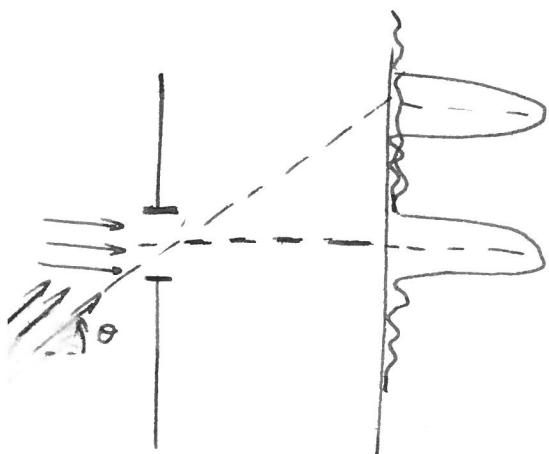
I picchi sono compresi tra due zeri di  $\frac{I}{I_0}$

L'intensità cala notevolmente al  
 crescere di  $\theta$  e può praticamente considerarsi  
 nulla concentrata nel suo di semipermea  $\theta = \frac{\lambda}{D}$ .



si ha il fenomeno di diffrazione.

Consideriamo due fasci di onde aventi tre loro un' inclinazione  $\theta$



Si formeranno due fenomeni di diffrazione; i due picchi centrali sono separati da una distanza  $Ax$ .

Se i due picchi principali si trovano a distanza maggiore di  $\frac{\lambda}{D}$  si dice che le due fasi sono risolubili cioè è possibile distinguere le due immagini d'interferenza.

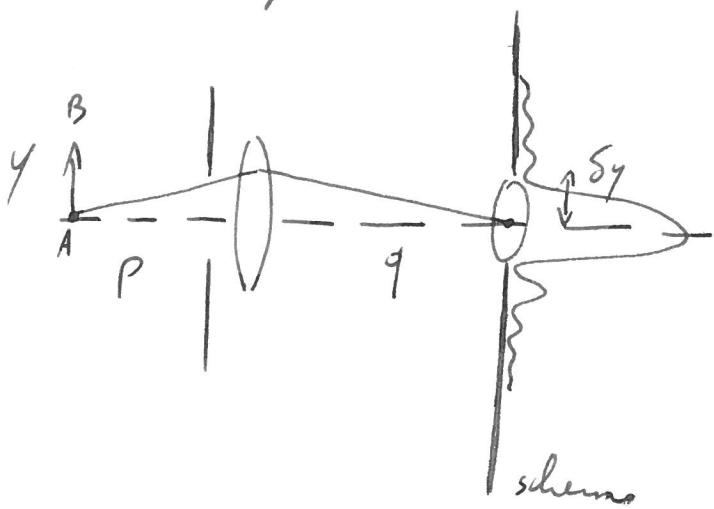
## Diffruzioni circolari

Nel fenomeno di rifrazione studiato precedentemente la fenditura è di forma rettangolare; in caso di fenditure circolari il primo minimo nelle figure di diffrazione di Fraunhofer ha una semicavità angolare tale che

$$\sin \theta = 0.6 \frac{\lambda}{R} -$$

Se i raggi che attraversano la fenditura vengono molti de una lente si ottiene in uno schermo posto alle distanze piccole le figure d'interferenza ottenute rispetto le regole della rifrazione di

Fraunhofer.



Consideriamo una sorgente luminosa posta a distanza  $p$  dalla lente, per quanto detto sulla diffrazione il punto  $A$  del segmento luminoso proietta un'immagine a forma circolare (base del principio principale delle figure d'interferenza)

il raggio  $dy = q \tan \theta \approx q \theta = q \cdot c \frac{\lambda}{R}$ ;

il segmento  $y$  sarà un ingrandimento lineare

$$\frac{y'}{y} = \frac{q}{p}$$

l'immagine  $y'$  sarà nitida e distinta se  $y' > S_y$   
cioè se l'immagine del segmento luminoso  
supererà le figure d'interferenza del punto A.

$$d.o.c \frac{\lambda}{R} < y \frac{\lambda}{p}$$

$$y > 0.6 \frac{\lambda}{R} p$$

La diffrazione pose un limite agli ingrandimenti  
dei microscopi; oggetti aventi lunghezze  
dell'ordine di  $\lambda$  non possono essere visti  
proprio a causa delle interferenze.

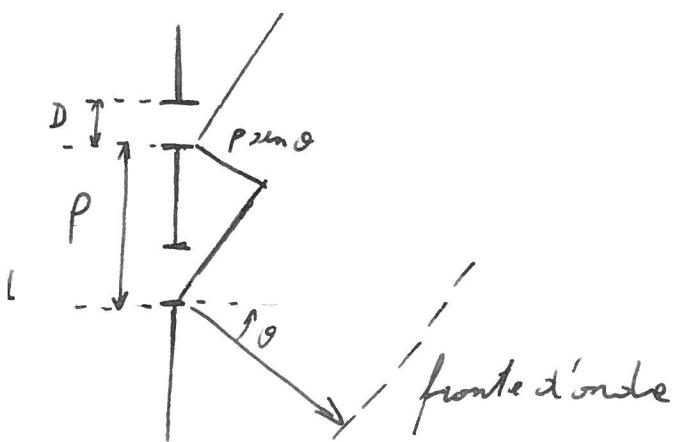
Nell'ultimo caso il mistellino ha  
raggio  $R = 1.5 \text{ mm}$  e distanza  $P = 2500 \text{ mm}$

(distanza di massimo ingrandimento enibile  
per l'occhio umano) il problema delle  
diffrazioni si riscontra per oggetti di  
lunghezza inferiore a  $0.6 \frac{\lambda}{R} P = 500 \mu\text{m}$   
(gli oggetti molto più grandi non sono visibili  
ed occhio nudo per altri motivi).

A distanze molt. gradi ad esempio  $1.5 \text{ Km}$   
l'occhio umano non distingue altre fer-  
me poste a distanze di  $1.5 \text{ m}$  l'una dall'altra me-  
diante la diffrazione: come un'unica sorgente e cause

## Diffrizione di Fraunhofer nel caso di due fenditure

$p = \text{passo reticol.}$



Il valore del campo elettrico del fronte d'onda che forma un angolo  $\theta$  con il passo delle fenditure è dato dalla somma dei campi elettrici determinati dalle I fenditure  $E_1 = E_0 \frac{\sin z}{z} \cos(\omega t - z)$  e del campo elettrico delle II fenditure spesato di  $\frac{2\pi p \sin \theta}{\lambda}$ ;  $E_2 = E_0 \frac{\sin z}{z} \cos(\omega t - z - \frac{2\pi p \sin \theta}{\lambda})$

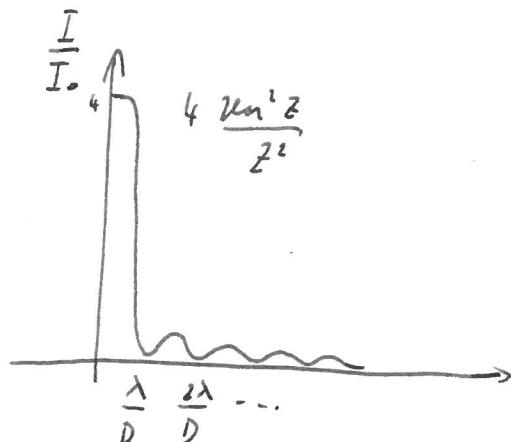
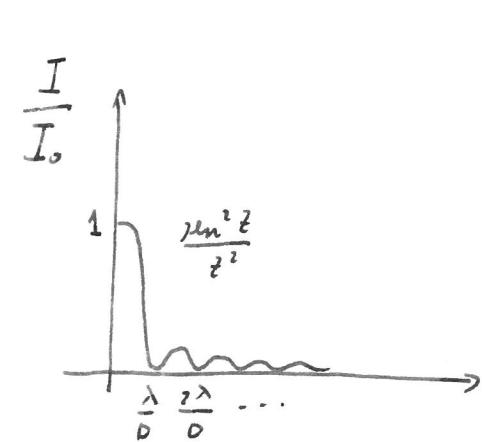
$$E_1 = E_0 \frac{v_m z}{z} \cos(\omega t - z)$$

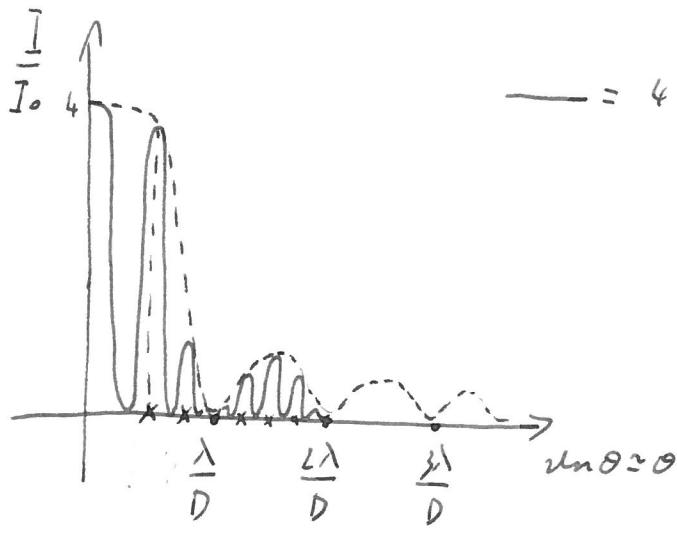
$$E_2 = E_0 \frac{v_m z}{z} \cos\left(\omega t - z - \frac{2\pi p v_m \theta}{\lambda}\right) \quad z = \frac{\pi D}{\lambda} v_m \theta$$

$$E_1 + E_2 = E_0 \frac{v_m z}{z} z \cos \frac{\pi p v_m \theta}{\lambda} \cdot \cos\left(\omega t - z - \frac{\pi p v_m \theta}{\lambda}\right)$$

$$I(\theta) = \langle E_1 + E_2 \rangle^2 = \frac{E_0^2}{2} \cdot 4 \frac{v_m^2 z}{z^2} \cos^2 \frac{\pi p v_m \theta}{\lambda} =$$

$$= 4 I_0 \frac{v_m^2 z}{z^2} \cos^2 \frac{\pi p v_m \theta}{\lambda}$$





$$= 4 \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2} \cos^2 \frac{\pi p \sin \theta}{\lambda}$$

$$\cos^2 \frac{\pi p \sin \theta}{\lambda} = 1 \quad \text{e}$$

$$\frac{p \sin \theta}{\lambda} = n \quad \text{cioè} \quad \sin \theta = \frac{n \lambda}{P}$$

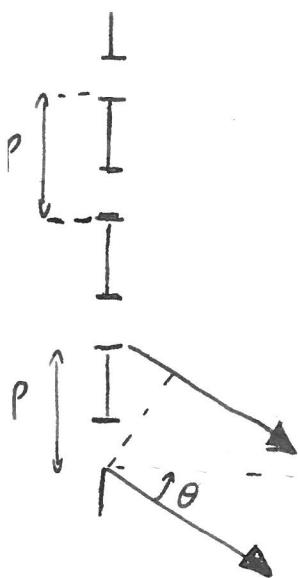
$x$  = massimi delle fessure  
per  $\sin \theta = \frac{n \lambda}{P}$ .

$P > D$  per costruzione.

Per  $\theta = 0$  l'intensità risulta essere 4 volte più forte dell'intensità di una sola fenditura; tuttavia in media l'intensità risulterà essere sei e mezzo volte l'intensità di una singola fenditura (l'energia totale si conserva).

## Reticolo di diffrazione

Consideriamo un reticolo avente passo  $p$  e  $N$  fenditure



Il fronte d'onda generato dalle  $n$ -esime fenditure sarà campo elettrico  $E_n = E_0 \frac{un^2}{z} \cos\left(\omega t - z - \frac{2\pi n p \sin \theta}{\lambda}\right)$

dove  $\frac{2\pi n p \sin \theta}{\lambda}$  rappresenta l'sfasamento del fronte d'onda dell' $n$ -esima fenditura rispetto alle fenditure con  $n=0$ .

Il campo elettrico del fronte d'onda risultante sarà

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} E_n$$

Usando il simbolismo dei numeri complessi

$$E_n = E_0 \frac{v_{en} z}{z} e^{i(\omega t - z - 2\pi n p \frac{v_{en} \theta}{\lambda})} =$$

$$= E_0 \frac{v_{en} z}{z} e^{i(\omega t - z)} e^{-i 2\pi n p \frac{v_{en} \theta}{\lambda}}$$

$$\text{ponendo } \varphi = \pi p \frac{v_{en} \theta}{\lambda}$$

$$E_n = E_0 \frac{v_{en} z}{z} e^{i(\omega t - z)} e^{-i 2n\varphi}$$

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} E_0 \frac{v_{en} z}{z} e^{i(\omega t - z)} e^{-i 2n\varphi} = E_0 \frac{v_{en} z}{z} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega t - z) - i 2n\varphi}$$

$$= E_0 \frac{v_{en} z}{z} \frac{1 - e^{-i 2N\varphi}}{1 - e^{-i 2\varphi}}$$

Usando il simbolismo degli immaginari l'E uale solo

$$E = E_0 \frac{\sin t}{z} \left| \left| \frac{1 - e^{-izN\varphi}}{1 - e^{izN\varphi}} \right| \right| \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I = \langle E^2 \rangle = \frac{E_0^2}{z^2} \frac{\sin^2 t}{z^2} \frac{(1 - e^{-izN\varphi})(1 - e^{izN\varphi})}{(1 - e^{-izN\varphi})(1 - e^{izN\varphi})} =$$

$$= I_0 \frac{\sin^2 t}{z^2} \frac{(2 - e^{izN\varphi} - e^{-izN\varphi})}{(2 - e^{izN\varphi} - e^{-izN\varphi})} =$$

$$= I_0 \frac{\sin^2 t}{z^2} \frac{\left(1 - \frac{e^{izN\varphi} + e^{-izN\varphi}}{2}\right)}{\left(1 - \frac{e^{izN\varphi} + e^{-izN\varphi}}{2}\right)} = I_0 \frac{\sin^2 t}{z^2} \frac{(1 - \cos 2N\varphi)}{(1 - \cos 2\varphi)} =$$

$$= I_0 \frac{\sin^2 t}{z^2} \frac{\sin^2 N\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

Per  $N=2$  si risulta il risultato precedente.

$\frac{\sin^2 N\varphi}{\sin^2 \varphi}$  è indeterminato quando  $\varphi = n\pi$  cioè

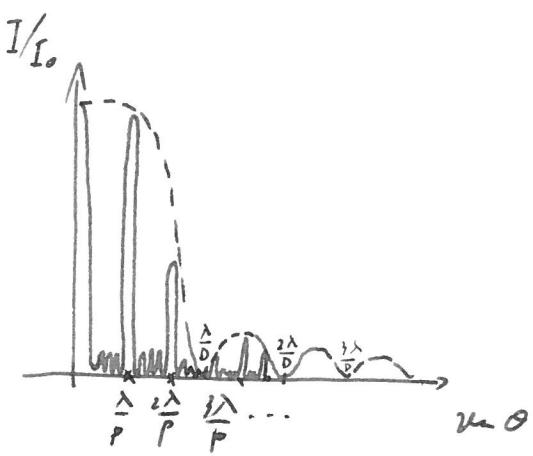
quando  $\frac{t \operatorname{punto}}{\lambda} = n\pi \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{n\lambda}{P}$ .

Derivando  $\frac{2 \sin N\varphi \cos N\varphi N}{2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi} = \frac{N \operatorname{sen} 2N\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi}$ ;

derivando ancora  $\frac{2N^2 \operatorname{cos} 2N\varphi}{2 \operatorname{cos} 2\varphi}$  tende a  $N^2$  quando  $\varphi$  tende a 0.

Neipunti  $\operatorname{sen} \theta = \frac{n\lambda}{P} \quad I = I_0 N^2 \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z^2}$

Il grafico  $I/I_0$  risulta essere



le distanze angulari tra due picchi risultano essere

$$\Delta \text{ang} \theta = \Delta \theta = \frac{\lambda}{P}$$

Un reticolò di diffrazione può essere usato per determinare, dalle figure d'interferenza, le lunghezze d'onda delle luce incidente e, salvo le caratteristiche del reticolò.

Affinché si possa osservare una buona figura d'interferenza occorre che il primo

minimo della funzione  $N \frac{u^2 e^{-\lambda t}}{z^2}$  cioè  $\frac{\lambda}{D}$

sia sufficientemente spostato a destra in modo da contenere numerosi picchi.

In pratica D deve essere piccolo (le penultime stelle).

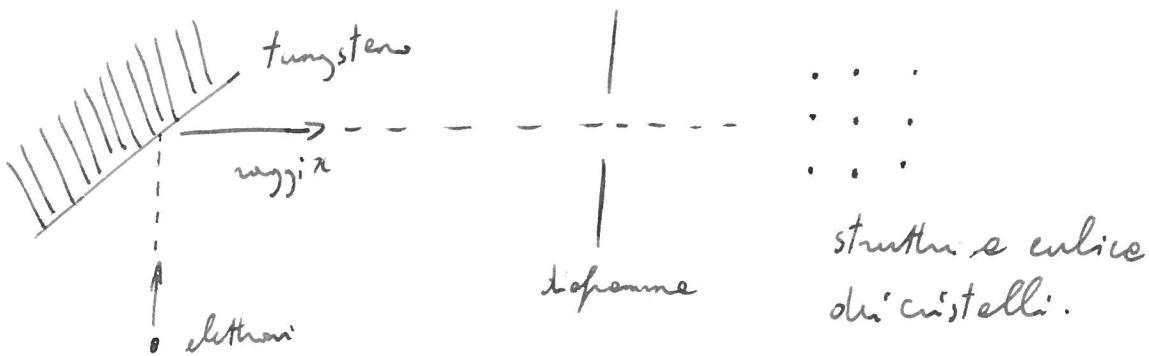
## La diffrazione nei cristalli

I cristalli sono caratterizzati dall'essere una struttura regolare.

Le interazioni fra i cristalli e i raggi x  
l'onda elettromagnetica le cui lunghezze  
d'onda è confrontabile con le misure atomiche  $\text{\AA}$ ) e  
le relative figure d'interferenza permettono  
di studiare la struttura del cristallo e  
di conoscere le lunghezze d'onda dei raggi x  
oppure di determinare tali lunghezze  
d'onda nota la struttura del cristall.

Il primo a studiare le interazioni tra i raggi X e i cristalli fu il fisico inglese Bragg.

I raggi X possono essere generati eccitando un metallo presente ad esempio il tungsteno.

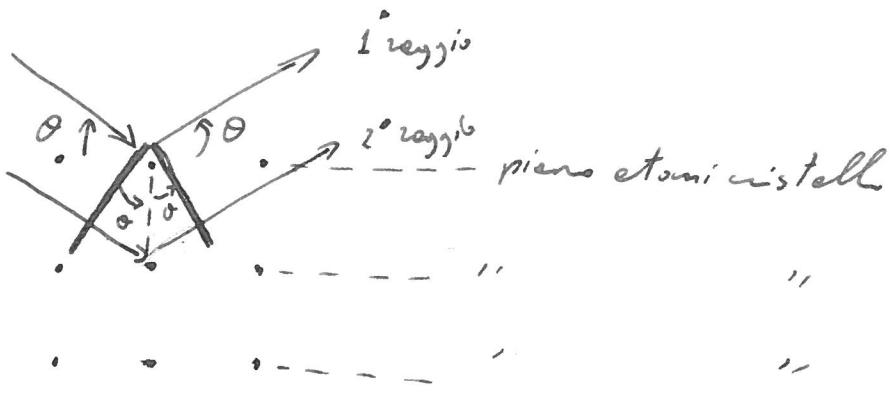


$10^5 V$  — diff. potenziale caricae elio.

filamenti riscaldati.

### \* Reticoli in riflessione

I raggi X incidenti sulla struttura cristallina; i piani costitutivi degli atomi del cristallo emettono alcune frequenze e le riflettono comportandosi come sorgenti oscillanti.



(si osserva che essendo le lunghezze d'onda dei raggi "perpendicolari all'  $\vec{A}$  normale dei raggi" filtre nelle strutture cristalline).

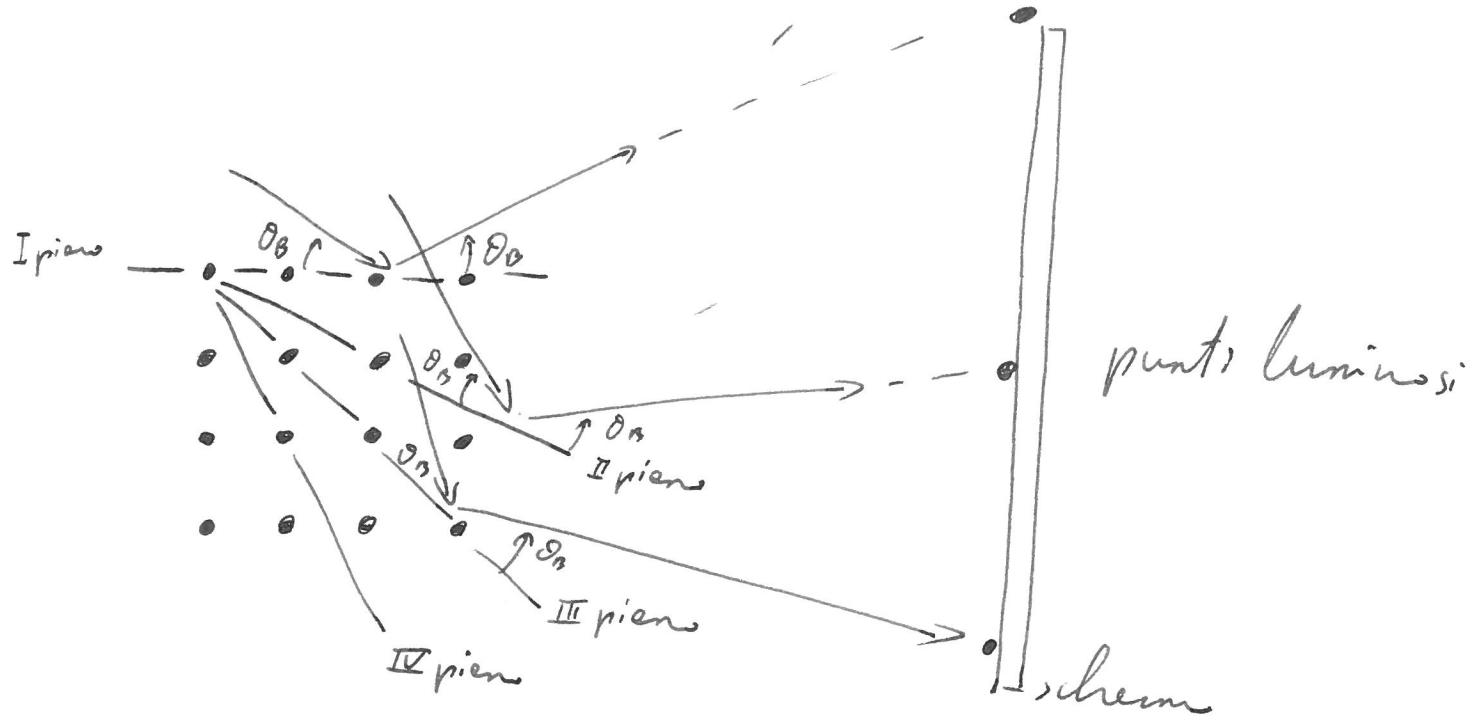
Se però le distanze tra due atomi nel verso di struttura cubica il fronte d'onda riflesso ha intensità massima se la differenza di percorso dei due raggi è multiplo intero di  $\lambda$ .

$$2pn\theta = m\lambda$$

$$m\theta = \frac{m\lambda}{2p} \quad \text{legge di Bragg.}$$

Se dei raggi colpiscono una struttura  
 cristallina regolare per le densi vengono  
 riflessi e il fascio di raggi formante un  
 angolo  $\alpha$  tale che  $m\alpha = \frac{m\lambda}{2p}$  con  $m$   
 il  
 pieno degli atomi del cristallo forma un  
 fronte d'onda che proietta su uno schermo  
 da una lente genera un punto di alte intensità  
 luminosa.

Tuttavia i pieni degli atomi del cristallo  
 le riflessioni dei raggi sono numerosi e distinti  
 (s. figure)

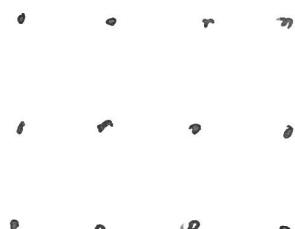


pertanto le figure di soffagine è costituita da un confuso gruppo di punti luminosi.

### Reticolo di sovraimposto

Invece se si ricava più chiare sulle strutture del cristall o dei regg. e possono essere ricavate forme che trascurano il

ci stell dei raggi  $\pi$  e recogliendosi  
quelli che lo attraversano su uno schermo.



schem

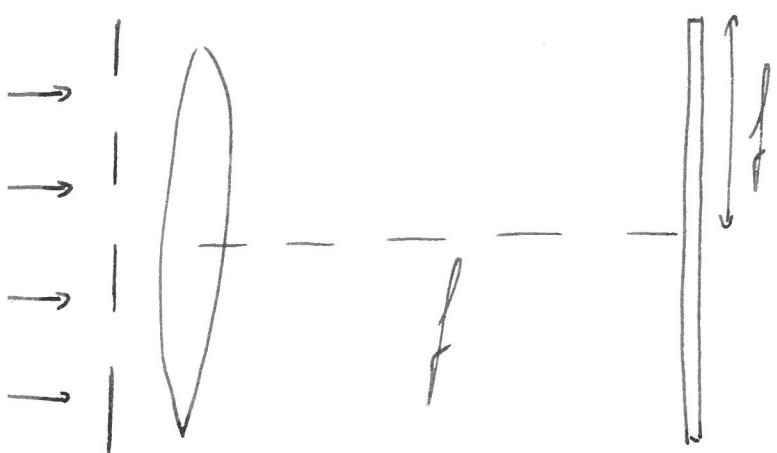
In tal caso il cistell funge da se e proprio  
ut. col.

Sull schermo si formerà un'immagine di  
d'rifrazione avente un centro luminoso e  
circol concentric luminosi.

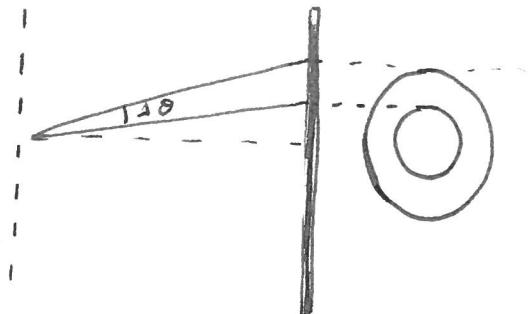
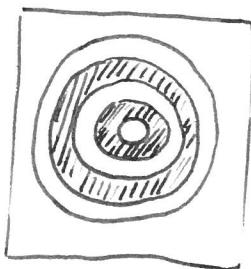
Dell'intensità di tal vicolo e delle  
loro ampiezza è possibile ricevere informazioni  
sulle strutture del castello e sulle lunghezze  
d'onde dei reggiori.

Pb) Su un reticolo di passo  $p = 4 \text{ mm}$  incide un fascio di onde piane di lunghezze comprese tra  $\lambda_1 = 0.5 \text{ pm}$  e  $\lambda_2 = 0.7 \text{ pm}$  attraversato il reticolo le onde convergono tramite una lente su uno schermo circolare di raggio  $f$  posto nel fuoco delle lenti a distanza  $f$  da esse.

Determinare la percentuale di schermo illuminato.



Sullo schermo si avranno degli anelli luminosi come in figure



costituiti da un'apertura angolare  $\alpha = \frac{n\lambda_2}{P} - \frac{n\lambda_1}{P}$

$\frac{n\lambda_2}{P}$  = picchi delle lunghezze d'onda inferiore del fascio.

$\frac{n\lambda_1}{P}$  = picchi delle lunghezze d'onda superiore del fascio.

(tra  $\frac{n\lambda_1}{P}$  e  $\frac{n\lambda_2}{P}$  si avranno i picchi delle

lunghezze d'onda intermedie pertanto tali zone è illuminate).

per  $n=1$

$$\theta_1 = \frac{\lambda_1}{P} = \frac{0.5}{4000} = 0.125 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta\theta_1 = 0.125 \cdot 10^{-3}$$

$$\theta_2 = \frac{\lambda_2}{P} = \frac{0.7}{4000} = 0.175 \cdot 10^{-3} \quad (\text{I fanno scena})$$

per  $n=2$

$$\theta_1 = 0.25 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta\theta_2 = (0.25 - 0.175) \cdot 10^{-3} = \\ = 0.075 \cdot 10^{-3}$$

$$\theta_2 = 0.35 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta\theta_3 = (0.375 - 0.35) \cdot 10^{-3} =$$

per  $n=3$

$$\theta_1 = 0.375 \cdot 10^{-3}$$

$$= 0.025 \cdot 10^{-3}$$

$$\theta_2 = 0.525$$

$$\Delta\theta_{t,t} = 0.225 \cdot 10^{-3}$$

per  $n=4$

$\theta_1$  risulta essere più piccolo di  $\theta_2$  corrispondente a  $n=3$ ;

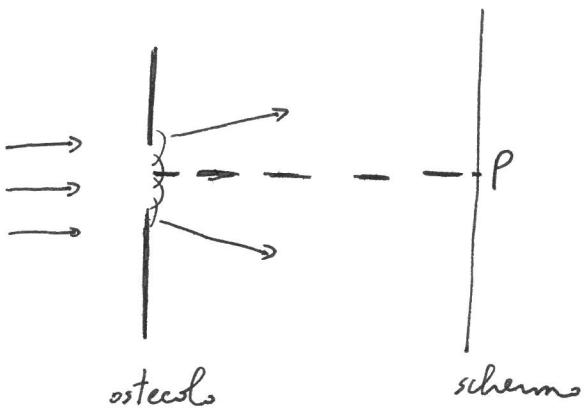
ciò vuol dire che dopo  $\theta_1^{(3)}$  lo schermo è sempre illuminato.

gli intervalli angolari per cui lo schermo risulta essere buio sono piccolissimi (praticamente il 100% dell'schermo è illuminato).

Il passo del reticolato è troppo grande affinché lo schermo risulti oscuro in una parte apprezzabile.

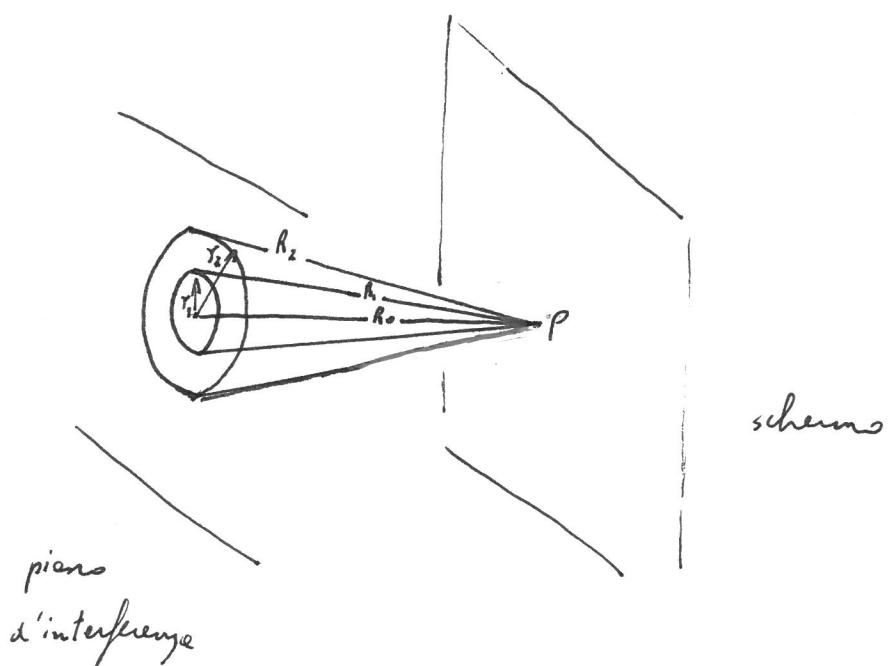
## Diffrizione alle Fresnel

L'effetto di interferenza prodotto da un ostacolo sul cammino del fronte d'onda proiettato su uno schermo vicino all'ostacolo stesso è detto diffrazione alle Fresnel.



Supponiamo di voler conoscere l'intensità luminosa in un punto dello schermo ad esempio in P.

Da P fin le normale allo schermo e suddiviso le zone d'interferenza in cerchi concentrici di raggi  $r_i$  tali che  $R_i$  (vedi figura) sia più breve di  $R_{i+1}$  di una lunghezza pari a  $\frac{\lambda}{2}$ .



Le varie zone concentriche individuate sul piano d'interferenza vengono dette zone di Fresnel, esse sono caratterizzate dal fatto che il campo elettrico che giunge in P da una zona è diverso opposto rispetto al campo precedente.

dalle zone contigue.

Il contributo portato da una zona di Fresnel al campo in  $P$  è proporzionale alla superficie e all' inverso delle distanze da  $P$  (le onde sferiche decrescono come  $\frac{1}{R}$ ).

$$E_i \approx \frac{S}{R} \approx \frac{\pi (r_i^2 - r_{i-1}^2)}{\frac{R_i + R_{i-1}}{2}}$$

$$R_i = R_0 + \frac{i\lambda}{2}$$

$$r_i^2 = R_i^2 - R_0^2 = R_0^2 + \frac{i^2 \lambda^2}{4} + R_0 i \lambda - R_0^2 \approx R_0 i \lambda$$

Trascurando  $\lambda^2$  rispetto a  $\lambda$ .

$$E_i \approx \frac{\pi (R_0 i \lambda - R_0 (i-1) \lambda)}{\frac{R_0 + \frac{i\lambda}{2} + R_0 + \frac{(i-1)\lambda}{2}}{2}} = \frac{\pi R_0 \lambda}{\frac{2R_0 + i\lambda - \frac{\lambda}{2}}{2}}$$

trascrivendo al denominatore le grandezze contenenti  $\lambda$

$E_i \approx \pi \frac{R_0 \lambda}{R}$  = costante fissata le lunghezze  
dell'onda incidente.

Il contributo al campo elettrico in Poi ogni zone è  
costante in modulo; due zone contigue danno  
contributo di segno opposto.

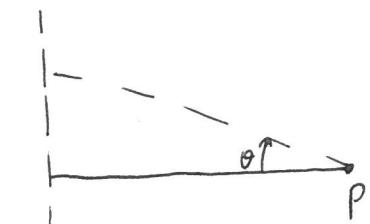
Se pongo lo schermo a distanza  $R_0 = 1\text{m}$  dalle  
zone d'interferenza legge di Fresnel avremo  
rispettivamente raggi ( $\lambda = 0.5 \cdot 10^{-6}$ )

$$r_1 = \sqrt{0.5 \cdot 10^{-6}} \approx 0.7\text{mm}$$

$$r_2 = 1\text{mm}$$

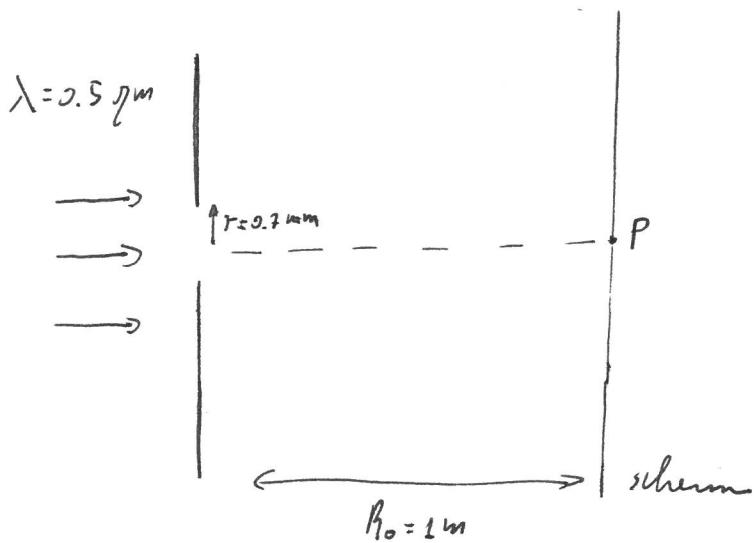
$$r_3 = 1.2\text{mm}$$

Come osservare dal quanto detto sulla diffrazione  
 alle Finsen risulta essere valido per angoli  
 $\theta$  (vedi figure) sufficientemente piccoli; al crescere  
 di  $\theta$  occorre tener conto di un fattore correttivo  
 che riduce l'intensità del campo giunto in  $P$  di  
 un fattore  $\frac{1}{2} (1 + \cos \theta)$



zone  
 d'interferenza

Supponiamo di ostacolare i raggi luminosi con uno schermo in cui è praticato un foro il cui raggio è pari al raggio delle I zone di Fresnel.



In P giunge solo il contributo delle I zone di Fresnel pertanto  $E_p = E_1$   $I_p = E_1^2$

Per comprendere l'intensità di tale campione occorre paragonarla al campo che giungerebbe in P se non ci fosse alcun ostacolo.

$$E_p = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n + \dots$$

$E_i$  = campo dell' $i$ -esima zone di Fresnel.

È possibile scrivere

$$E_p = \frac{1}{2} E_1 + \underbrace{\frac{1}{2} (E_2 - 2E_3 + E_4)}_{\text{"}} + \underbrace{\frac{1}{2} (E_3 - 2E_4 + E_5)}_{\text{"}} \dots$$

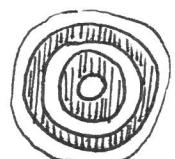
ricordando che il contributo al campo portato da due zone sicure è opposto ; tenendo tra parentesi sono nulli i贡献.

$$E_p = \frac{1}{2} E_1 \quad I_p = \frac{E_1^2}{4} = I_0$$

Se il foro ha le dimensioni delle 1 zone di Fresnel l'intensità luminosa in P risulta essere 4 volte l'intensità muta in assenza di ostacoli.

Naturalmente se il foro ha le dimensioni delle  
 II zone di Fresnel  $r=r_2$  il campo in P è nullo  $I_p=0$  (luci)  
 mentre se  $r=r_3$   $I_p=4 I_o$  e così via finché O risulta  
 essere sufficientemente piccolo.

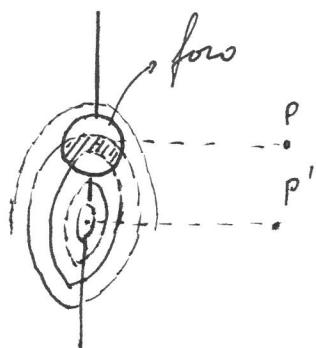
Se si costruisce un ostacolo tale da oscurare le  
 zone di Fresnel che portano un contributo negativo  
 al campo in P



$$\text{si avrà } E_p = n E_o$$

$$I_p = n^2 E_o^2$$

Se si vuole calcolare il campo elettrico in un punto  $P'$  occorre considerare le zone di Fresnel relative a  $P'$  che non vengono ostacolate dal diaframma opposto ai raggi luminosi.



Se si oppone al fronte d'onda un ostacolo delle dimensioni delle 1 zone di Fresnel



$$E_p = \frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{2} (E_1 - z E_2 + E_3) + \dots$$

$$E_1 = 0$$

$$E_p = -\frac{1}{2} E_2 = \frac{1}{2} E_1$$

$$I_p = I_0$$

in P si ottiene la stessa intensità luminosa in assenza d'ostacolo. Analogamente se l'ostacolo ha le dimensioni di 2, 3 ... zone di Fresnel.

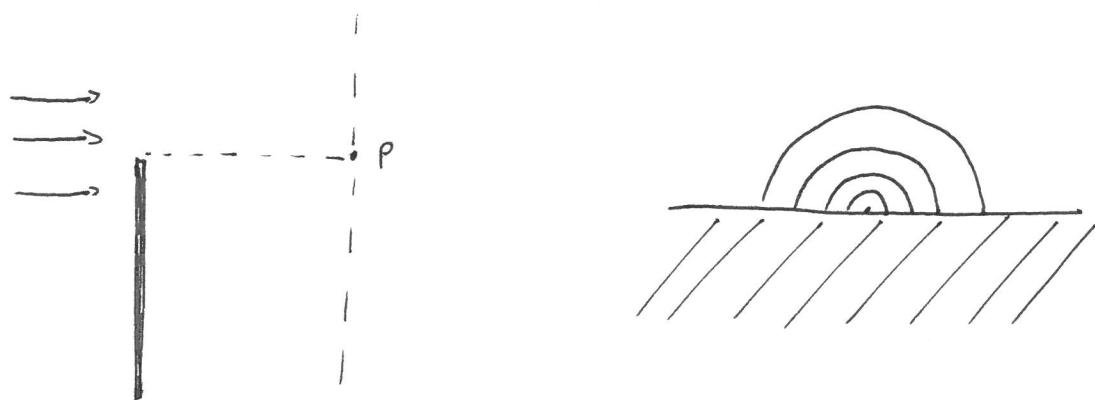
In P si ha una macchia luminosa di intensità

I. delle macchie di Poisson.

Tale fenomeno conferma il carattere ondulatorio delle luce.

Nel caso l'ostacolo sia troppo grande  $\theta \gg 0$  le ipotesi di Fresnel non sono rispettate e impossibile le macchie di Poisson ma solo il buio.

Una caratteristica figura d'interferenze si ha considerando un ostacolo piano che taglia e mette le zone di Fresnel



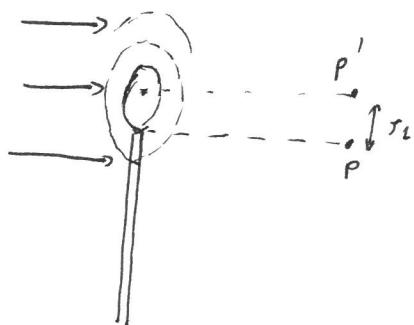
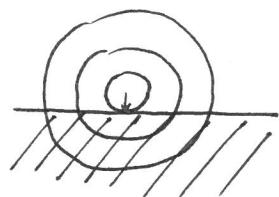
Il campo elettrico in P vale  $E_p = \frac{1}{2} E_0$  verticale.

$$I_p = \frac{1}{4} I_0$$

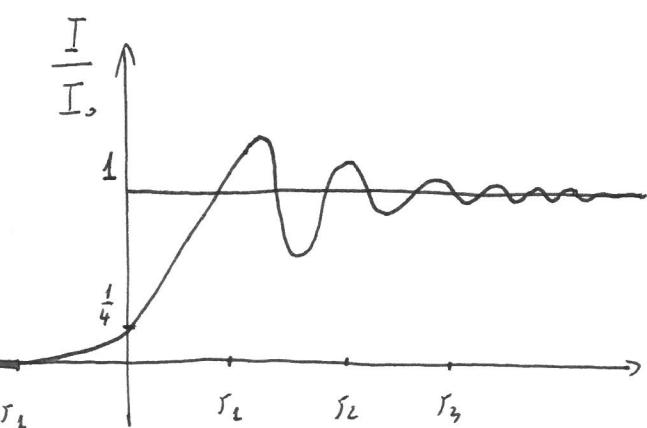
Se considero un punto  $P'$  posto al di sopra di  $P$

avrà un andamento di  $\frac{I}{I_0}$  mostrato in figura

tendente a 1 (intensità in orizzonte di schermo)



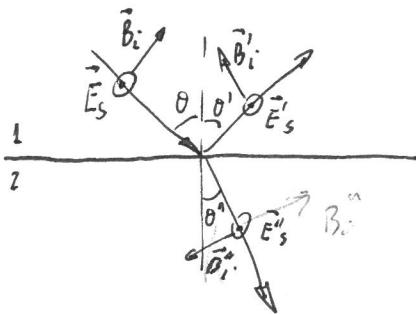
Per i punti al di sotto di  $P$  si ha rapidamente il buio.



## Equazioni di Fresnel

Le equazioni di Fresnel permettono di calcolare la frazione di energia contenuta dell'onda riflessa e rifratta.

Suppongo che il campo elettrico sia polarizzato nel piano ortogonale al piano del foglio.



i = piano fogli.

S = piano ortogonale a i.

Dalle equazioni di Maxwell si ricava che tra le superfici di separazione di due mezzi si conserva la componente tangenziale di  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ .

Pertanto:

$$E_s + \bar{E}'_s = \bar{E}''_s$$

$$\frac{H_i \cos \theta - H'_i \cos \theta'}{\rho_i} = H''_i \cos \theta'' \quad (\text{il segno meno è conseguenza delle tensioni levigie formate da fronti propagatori } \vec{E} \text{ e } \vec{B}; \text{ il } \vec{E} \text{ conserva lo stesso verso } \vec{B} \text{ com'è vero nell'onda riflessa}).$$

$$\frac{B_i \cos \theta - B'_i \cos \theta'}{\rho_i} = \frac{B''_i}{\rho_2} \cos \theta''$$

Pochi nei mezzi trasparenti:  $\rho_r \approx 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_s + \bar{E}'_s = \bar{E}_s \\ B_i \cos \theta - B'_i \cos \theta' = B''_i \cos \theta'' \end{array} \right. \quad B_i = \frac{\bar{E}_s}{v} = \frac{E_s}{c} n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_s + \bar{E}'_s = \bar{E}''_s \\ E_s n_1 \cos \theta - E'_s n_2 \cos \theta' = E''_s n_2 \cos \theta'' \end{array} \right.$$

Definisce  $\rho_s = \frac{\bar{E}'_s}{\bar{E}_s}$        $T_s = \frac{\bar{E}''_s}{\bar{E}_s}$

nel caso particolare di onde incidente normalmente alla superficie

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_s + \bar{E}'_s = \bar{E}''_s \\ E_s n_1 - E'_s n_1 = E''_s n_2 + E'_s n_2 \end{array} \right.$$

$$\rho_s = \frac{\bar{E}'_s}{\bar{E}_s} = \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2}$$

$n_2 > n_1$  il campo elettrico riflesso cambia verso.

enalogamente  $\rho_i = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$

onde polarizzate nel piano i.

Il rapporto tra l'energia trasportata dall'onda incidente e riflessa è detto Riflettanza

$$R_s = \frac{E_s^1}{E_s^2} = P_s^2 = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$R_i = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

Il rapporto tra l'energia trasportata dall'onda incidente e dall'onda riflette è detto transittanza.

$$T_s = 1 - R_s \quad (\text{per avie regioni di conservazione dell'energia})$$

$$T_s = 1 - \left( \frac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$T_i = 1 - \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

I valori delle riflessione e delle transittanza possono essere calcolati anche per angoli di incidenza diversi da 0.

In particolare si ha

$$\rho_i = \frac{\tan(\theta'' - \theta)}{\tan(\theta'' + \theta)}$$

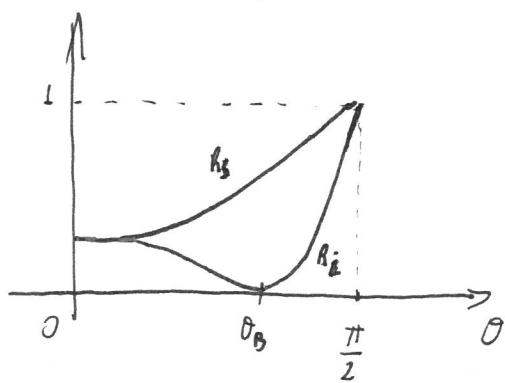
Se  $\theta'' + \theta = \frac{\pi}{2}$   $\rho_i = 0$  cioè il campo elettrico

riflesso appartenente al piano  $s$  è nullo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{n_2}{n_1} \\ \theta'' + \theta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\sin \theta_B}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_B)} = \operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

per tale angolo il campo elettrico dell'onda riflessa resta polarizzato nel piano  $s$ .



il grafico delle trasmissione e  
il complementare a uno di  $R_s$  e  $R_t$ .

## Forze elettriche e Forze magnetiche

Fin dall'antichità è nota l'esistenza di forze elettrostatiche che si manifestano con l'attrazione o la repulsione di oggetti carichi.

Sono nelle seconde metà del '700 sistematicamente studiate queste forze.

Furono Franklin e Paisley a rendersi conto per primi che le forze elettrostatiche avevano una dipendenza con l'inverso del quadrato delle distanze.

D'esperienza ha portato a tale conclusione consistente nell'osservare che una carica all'interno di una sfera carica uniformemente carica non sente l'influenza di campi elettrici.



Poiché le coniche è in equilibrio, deve essere

$$\frac{\sigma dS_1}{r_1^n} = \frac{\sigma dS_2}{r_2^n} \quad \text{e ancora}$$

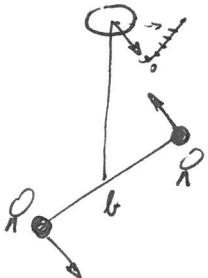
$$\frac{\sigma dS_1 \cos \alpha}{r_1^{n-2} r_1^2} = \frac{\sigma dS_2 \cos \alpha}{r_2^{n-2} r_2^2}$$

$dS_i \cos \alpha$  rappresenta l'elemento di superficie sferica di raggio  $r_i$ .

$$\frac{\sigma}{r_1^{n-2}} d\Omega = \frac{\sigma}{r_2^{n-2}} d\Omega$$

da cui  $r_1^{n-2} = r_2^{n-2} \quad \forall r \quad n=2$ .

\*) Una misura sperimentale delle forze elettrostatiche venne fatta solo in regola con la bilancia a torsione di Coulomb.



$F_{b=KQ}$  noto il momento di torsione del filo  
è possibile conoscere le misure delle  
forze esercitate tra le coniche.

$$F = K q_1 q_2 \frac{r^A}{r^2}$$

$r^A$  verso congiungente i centri delle due sfere.

Fissate  $q_1 = q_2$  come carica campione si definisce  $K$  come l'intensità delle forze agente tra due coniche di  $1\text{ cm}$  poste a distanza di  $1\text{ m}$ .

$K$  molt. grande       $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$        $\epsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12}$

\*) L'esistenza di forze magnetiche che si manifestano con l'attrazione che alcuni minerali (magnet.) producono su pezzi di ferro era nota fin dell'antichità.

I greci conoscevano l'uso delle bussolle 2000 anni prima di Cristo.

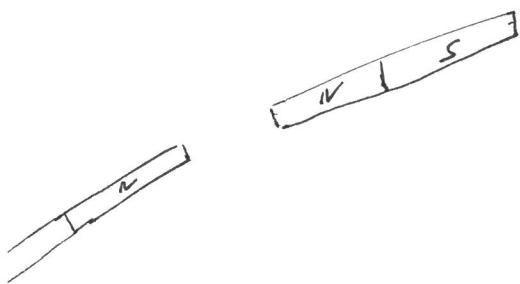
Il primo studio sulle forze di natura magnetica venne fatto da Gilbert nel 1600 - Egli scoprì che le

terre è una grande calamita e ha un polo NORD

l'estremo dell'ago magnetico che si oriente verso il NORD terrestre.

A differenza delle cariche elettriche in natura non esistono monopoli magnetici ma ad un polo Nord deve corrispondere sempre un polo Sud.

Tuttavia considerando una calamita molto lunga



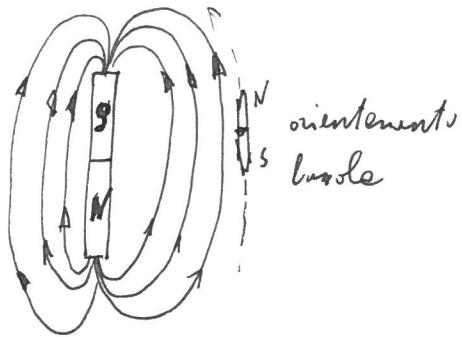
è possibile misurare le forze esercitate tra due poli trascrivendo le interazioni davanti ai poli più esterni.

Le forze magnetiche hanno le stesse caratteristiche delle forze elettrostatiche

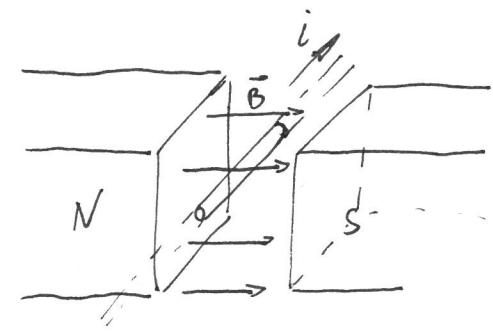
$$\vec{F} = \frac{k p_1 p_2}{r^2} \hat{r}$$
 si definisce campo magnetico  $\vec{H} = \frac{\vec{F}}{p_2}$

e campo di induzione magnetica  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$$k = \frac{1}{4\pi\mu_0} \quad \mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \pi$$



Nelle prime metà del 1800 Oersted si rese conto della interazione fra un magnete e un conduttore attraversato da corrente elettrica.



Le forze esercitate sull'elemento di circuito  $\Delta l$  vale

$$\Delta \vec{F} = i \Delta l \times \vec{B}$$

Dall'equazione precedente si ricava le forze di Lorentz, cioè le forze agenti su una carica in moto all'interno di un campo  $\vec{B}$ .

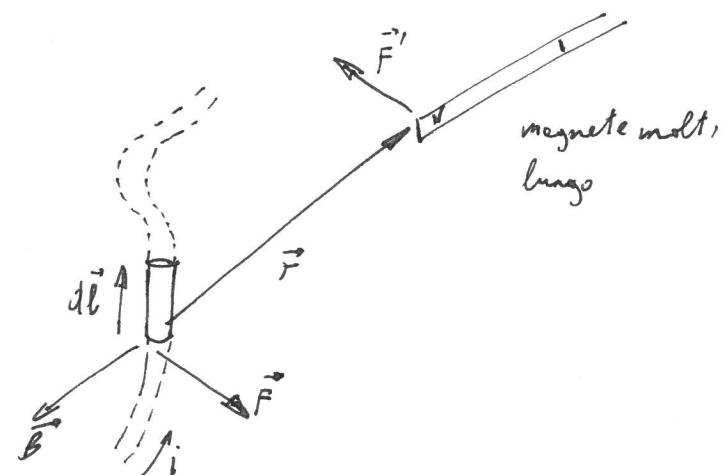
$$\Delta \vec{F} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \cdot \Delta l \times \vec{B} = \Delta Q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B},$$

Se un filo percorso da corrente elettrica risente di una forza magnetica e me solle un magnete sente l'influenza di un filo percorso da corrente elettrica.

Un filo percorso da corrente elettrica genera un campo magnetico.

\* ) legge di Lépêce.



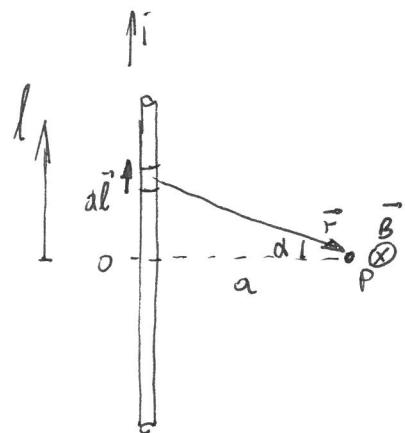
Le forze agenti sull'elemento  $d\vec{l}$  sono

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B} = i d\vec{l} \times \left( -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2} \right)$$

$$d\vec{F}' = -d\vec{F} = i d\vec{l} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{r}}{r^2}$$

$$dB' = \frac{\mu_0 i dF'}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 i dl \times \vec{r}}{4\pi r^2}$$

Dalle leggi di Laplace è possibile ricevere la legge di Biot e Savart.



filo infinito

il campo magnetico ha la direzione indicate e modulo

$$dB = \frac{\mu_0 i dl \cos \alpha}{4\pi r^2} \quad l = a \tan \alpha \quad dl = \frac{1}{\cos^2 \alpha} a d\alpha$$

$$r = \frac{a}{\cos \alpha} \quad r^l = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha}$$

$$dB = \frac{\mu_0 i \cos^2 \alpha}{4\pi a^2} \cos \alpha \frac{d\alpha}{\cos \alpha} d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$$

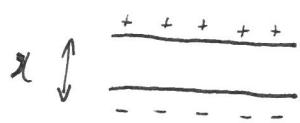
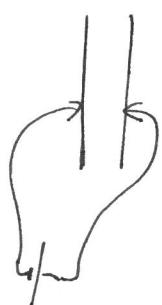
$$\tilde{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} t$$

## Strumenti di misura

### Elettrometro assoluto

Permette di calcolare differenze di potenziale e quindi forze elettrostatiche conoscendo sulle misure delle forze d'attrazione tra due facce di un condensatore.

con le forze elettrostatiche ignote conosce le facce di un condensatore

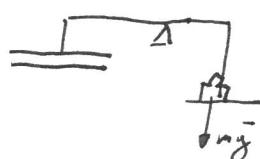


$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} x$$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} \quad (\text{forze effettive})$$

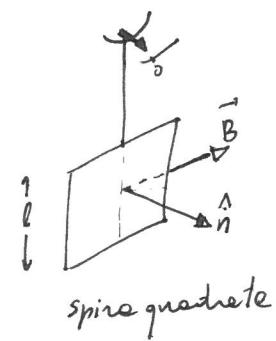
$$F = -\frac{1}{2} \frac{C V^2}{\epsilon_0 S} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S V^2}{x^2 \epsilon_0 S} = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S V^2}{x^2}$$

$$mg = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S V^2}{x^2} \quad V = \sqrt{\frac{2mg}{\epsilon_0 S}}$$



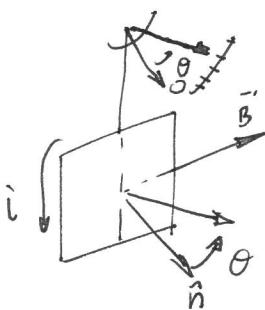
## Ampesometro

Permette di calcolare l'intensità di corrente



Se si fa passare corrente nelle spire le normale tende ad allinearsi con  $\vec{B}$ .

Tale spostamento viene misurato dall'ago girevole.



All'equilibrio:

$$il^2 B \cos\theta = K\theta$$

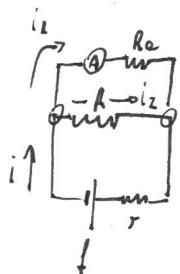
$$i = \frac{K\theta}{l^2 B \cos\theta}$$

$K$  = coefficiente di torsione del filo.

Soltamente gli amperometri hanno una resistenza interna trascurabile in modo da misurare la corrente che attraversa un circuito senza alterarla.

## Il voltmetro

È un amperometro dotato di una forte resistenza interna; permette di calcolare differenze di potenziale ai capi di un circuito.



Supponiamo di voler calcolare le differenze di potenziale ai capi delle resistenze.

Se non vi fosse il voltmetro  $\Delta V = R i$ .

Con il voltmetro

$$\Delta V' = R_a i_2 \quad i = i_1 + i_2$$

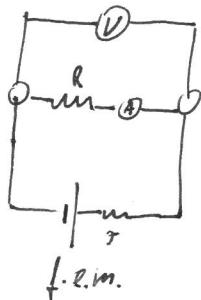
$$\Delta V' = R i_2 \quad \frac{R_a}{R} = \frac{i_2}{i_1}$$

Se  $R_a \gg R$   $i_2 \gg i_1$  pertanto  $i \approx i_2$

$$\Delta V = R i_2 = \frac{R_a}{R} i_1$$

## L'Amperometro

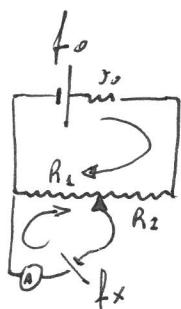
Permette di calcolare misure di resistenze



$$V = RI$$

$$R = \frac{V}{I}$$
       $V$  misurata dal Voltmetro  
                           $I$  " " " Amperometro.

## Misura relativa di f.e.m.



Il corso sulle resistenze variabile finché l'amperometro  $A$  non misura alcun passaggio di corrente. In tal caso

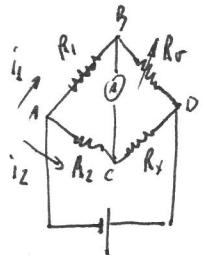
$$f_0 = (R_1 + R_2 + r_g) I_0$$

$$f_x = R_2 I_0$$

Se sostituisce la forza elettromotrice ignota con una forza elettromotrice nota e mantiene il corso finché le correnti che attraversano l'amperometro risultano essere nulle. Allora

$$f_{\text{note}} = R'_1 I_0 \quad \text{da cui} \quad f_x = f_{\text{note}} \frac{R_1}{R'_1}$$

## U'sure relativa di resistenze



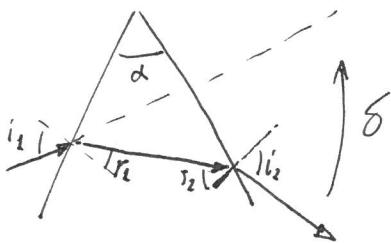
Fais varier la resistenza  $R_v$  finché non si annulla  
la corrente che attraversa l'impensore.

In tal caso  $V_{AB} = R_1 i_1 = V_{AC} = R_2 i_2$

$$V_{BD} = R_v i_1 = V_{CD} = R_x i_2$$

$$\frac{R_1}{R_v} = \frac{R_2}{R_x} \quad R_x = \frac{R_2 R_v}{R_1}$$

## Misure di indici di rifrazione



$$r_1 + r_2 = \alpha$$

$$\delta = i_2 - r_2 - r_1 + i_1 = i_2 + i_1 - \alpha$$

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{dr_2}{di_1} \quad \frac{\sin i_1}{\sin r_1} = n$$

$$\frac{\sin i_2}{\sin r_2} = n$$

$$\sin i_1 = n \sin r_1$$

$$\sin i_2 = n \sin r_2$$

$$\cos i_1 dr_1 = n \cos r_1 dr_1 \quad \cos i_2 dr_2 = n \cos r_2 dr_2$$

$$\frac{\cos i_2 dr_2}{\cos i_1 dr_1} = \frac{\cos r_2 dr_2}{\cos r_1 dr_1} \quad dr_2 = -dr_1$$

$$\frac{di_2}{di_1} = - \frac{\cos r_2}{\cos r_1} \frac{\cos i_1}{\cos i_2}$$

in particolare l'angolo  $\delta$  ha un minimo quando

$$1 + \frac{\sin i_2}{\sin i_1} = 0 \quad \text{cioè} \quad \frac{\cos r_2}{\cos r_1} \frac{\cos i_1}{\cos i_2} = 1$$

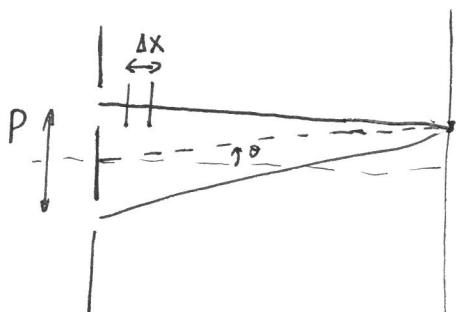
$$i_1 = i_2 ; \quad r_1 = r_2 = r$$

$$r = \frac{\alpha}{2} \quad S = S_{\min}$$

$$i = \frac{\delta + \alpha}{2}$$

$$n = \frac{\sin \frac{\delta + \alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Misure dell'indice di rifrazione con il fenomeno dell'interferenza



Il massimo contrasto si ha quando  
le due cammine ottiche sono uguali.

$$n \Delta X = \Delta x + \Delta l$$

$$(n-1) \Delta x = P \sin \theta$$

## Equazioni di Maxwell

### Elettostatica (nel moto)

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right.$$

a)  $\nabla \times \vec{E} = 0$  Poiché il campo elettrico è conservativo

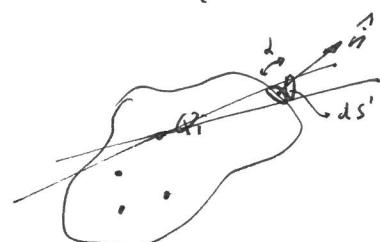
$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$$

||

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \hat{n} dS = 0 \quad \forall S \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$$

b)  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

$$\phi(\vec{E}_i) = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad (\text{Teorema Gauss})$$



$$\phi(\vec{E}_i) = \int_S \vec{E}_i \hat{n} dS = \int_S \frac{Q_i \hat{r} \hat{n}}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} dS' = \int_S \frac{Q_i \cos \theta dS'}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

$$\phi(\vec{E}_i) = \int \frac{Q_i dS'}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} = \int \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

$$\sum' \phi(\vec{E}_i) = \phi(\vec{E}) = \sum' \frac{Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



il contributo al flusso di una conica esterna  
è nullo.

in forma locale

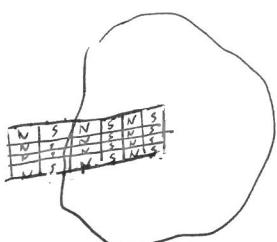
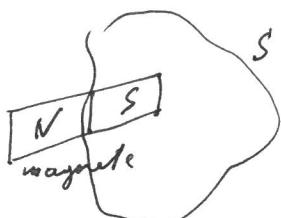
$$\phi(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \int_T (\nabla \cdot \vec{E}) dS = \frac{Q}{\epsilon_0} = \int_T \frac{\rho dV}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

### Magnetostatico (nel moto)

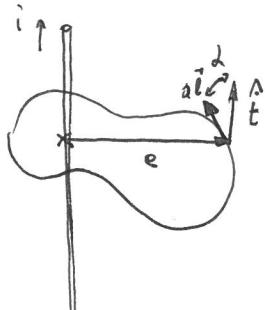
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{array} \right.$$

Poiché non esistono monopoli magnetici il flusso di  $\vec{B}$  attraverso una superficie è sempre nullo.



La somma dei monopoli interni alla superficie è nulla  $\phi(\vec{B}) = 0$

Delle leggi di Biot Savart



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{t}$$

elemento di  
circonferenza di raggio

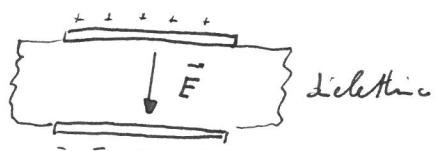
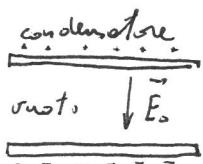
$$\oint \vec{B} d\vec{l} : \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{t} d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi r} d\vec{l} \cos 90^\circ = \oint \frac{\mu_0 i}{2\pi r} d\theta = \mu_0 i$$

filo indefinito

in forma locale

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \hat{n} d\vec{l} = \int_S \mu_0 \vec{J} \hat{n} dS \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

### Elettostatica presenza dielettrici

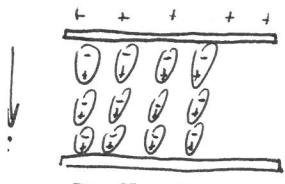


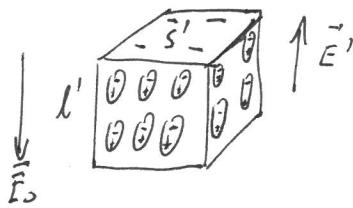
$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \quad \epsilon_r > 1$$

$$\epsilon_r = (\text{costante dielettrica relativa})$$

Spiegazione del fenomeno

A causa del campo elettrico esterno gli atomi del dielettrico si deformano e si orientano come in figura.





Considerando all'interno un volume  $T$   
e definendo densità di polarizzazione il vettore

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{T} \quad \vec{p}_i = \text{dipolo interno a } T$$

A causa dell'orientamento dei dipoli si crea un controcampo  
che abbassa il valore di  $\vec{E}_0$

Considerando l'elemento  $T$  come un condensatore a facce piene  
e parallele si ha

$$E' = \frac{Q'}{S'\epsilon_0} = \frac{Q'l'}{S'l'\epsilon_0} = -\frac{\sum p_i}{T\epsilon_0} = -\frac{P}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{tot} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad \text{poiché } \nabla \cdot \vec{E}_0 = \frac{P}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \quad -\nabla \cdot \vec{P} = P_{pol.} \text{ (densità di polarizzazione)}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = P \quad \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D} \text{ (vettore prestamento elettrico)}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = P \quad (\text{equazioni dell'elettrostatica})$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Poiché  $\vec{P}$  è parallelo ad  $\vec{E}$  nei materiali perfettamente isotropi

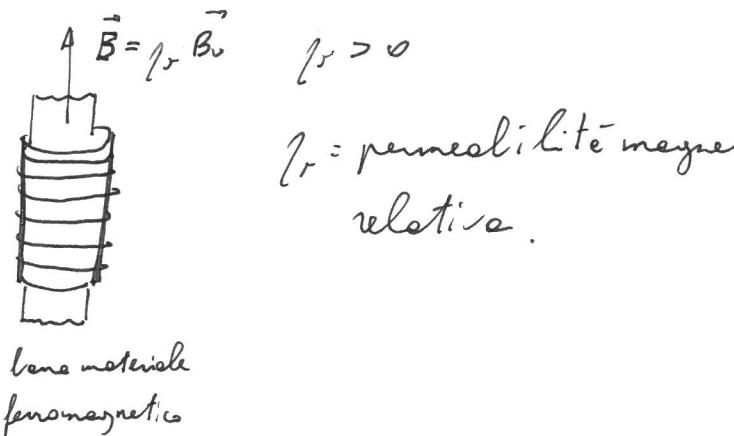
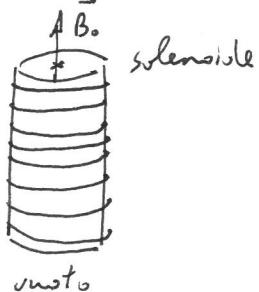
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}) = P$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = \frac{P}{\epsilon_0} \quad \epsilon_r \vec{E} = \vec{E}_0 \quad \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\chi_r - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

### \* Magnetostatica



Il campo magnetico aumenta di un fattore  $\mu_r$ .

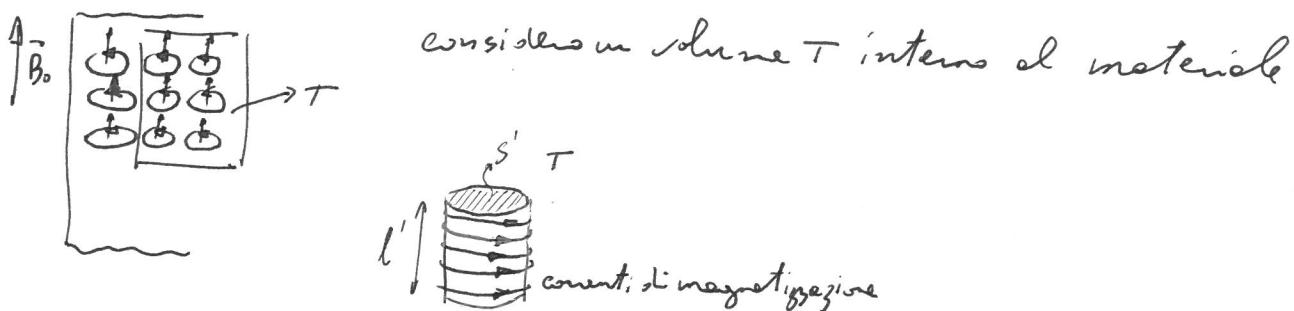
Ogni singolo atomo nell'elemento ferrimagnetico si comporta come una spira percorso da corrente elettrica



Ha un momento proprio e genera un campo magnetico proprio.

Quando il campo magnetico esterno è nullo gli atomi sono orientati  
e zero e il campo magnetico da essi generato è nullo.

In presenza di un campo esterno gli atomi comportandosi come une  
spire per annullare il momento allineano  $\vec{m}$  e  $\vec{B}_0$ .



definisco densità di magnetizzazione  $\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}_i}{T}$   $\vec{m}_i$  = momento magnetico

Il campo  $\vec{B}'$  generato all'interno del volume  $T$  è causa delle  
correnti di magnetizzazione sole (considerando  $T$  un solenoide)

$$\vec{B}' = \mu_0 \frac{N}{l'} i = \frac{\mu_0 N S' i}{l' S'} = \frac{\mu_0 N i S'}{T} = \mu_0 M$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

$$\text{Poiché } \nabla \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \nabla \times \vec{M}$$

$\nabla \times \vec{M}$  = densità di corrente di induzione  
magnetica

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

$$\frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} = \vec{H} \text{ vettore campo magnetico}$$

(in effetti  $\vec{B}$  si chiama vettore induzione magnetica)

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \\ \mu_0 \vec{B} = 0 \end{cases} \quad \text{equazioni magnetostatiche}$$

Poiché  $\vec{M}$  è parallelo a  $\vec{B}$  nei materiali perfetti e isotropi

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \vec{J}$$

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_r} = \mu_0 \vec{J} \quad \frac{\vec{B}}{\mu_r} = \vec{B}_0$$

$$\frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} : \vec{H} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

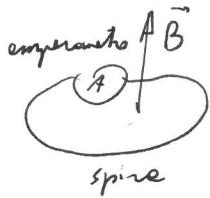
$$\frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} \quad \mu_0 \vec{M} = (\mu_r - 1) \vec{B}$$

$$\mu_0 \vec{M} = \chi \vec{B}$$

\* ) Equazioni Maxwell nel caso generale

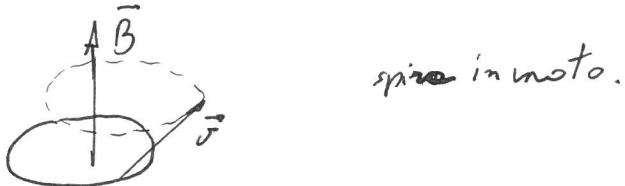
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right.$$

legge Faraday - Neumann



- 1) spire fissa  $\vec{B}$  variabile
- 2) spire in moto in un campo  $\vec{B}$ .

Nei casi 1 e 2 si ha passaggio di corrente elettrica nelle spire.



Il moto delle spire in un campo magnetico determina l'azione delle forze di Lorentz sulle cariche interne.

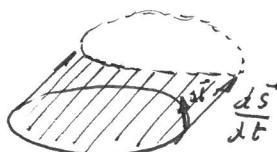
$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{J} \times \vec{B}$$

$$f.e.i = \oint \vec{v} \times \vec{B} d\vec{l} = \oint \vec{E} d\vec{l}$$

in termini infinitesimi:

$$\Delta f.e.i = - |\vec{J} \times \vec{B} \cdot \Delta \vec{l}| = |\Delta \vec{l} \times \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} \cdot \vec{B}|$$

il termine  $\Delta \vec{l} \times \Delta \vec{s} \cdot \vec{B}$  rappresenta il flusso di  $\vec{B}$  sulle superficie tratteggiata



$$\Delta \vec{l} \times \Delta \vec{s} \cdot \vec{B} = \Delta \phi(\vec{B})$$

c'è la differenza di flusso attraverso le spire all'interno tra t e t.



$$f.e.i = - \frac{\Delta \phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

il segno meno indica che un aumento di flusso genera uno corrente che

$$f.e.i = - \frac{d \phi(\vec{B})}{dt}$$

si oppone a tale aumento.

in forma locale

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int_S \vec{v} \times \vec{E} \hat{n} dS = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \hat{n} dS = - \left| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \hat{n} dS \right|$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Maxwell intui che l'equazione in corso non è stazionaria dove sono

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

il termine  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  è detta densità di correnti d'espansione.

Tali correnti sono generate da una variazione di  $\vec{E}$  nel tempo.

### \*| Equazione delle onde

Considero una regione di spazio contenente dei correnti elettriche e magnetiche.

Le equazioni di Maxwell sono

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \nabla \times \left( - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{analogo per } \vec{B}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Tali equazioni possono essere scritte nelle forme

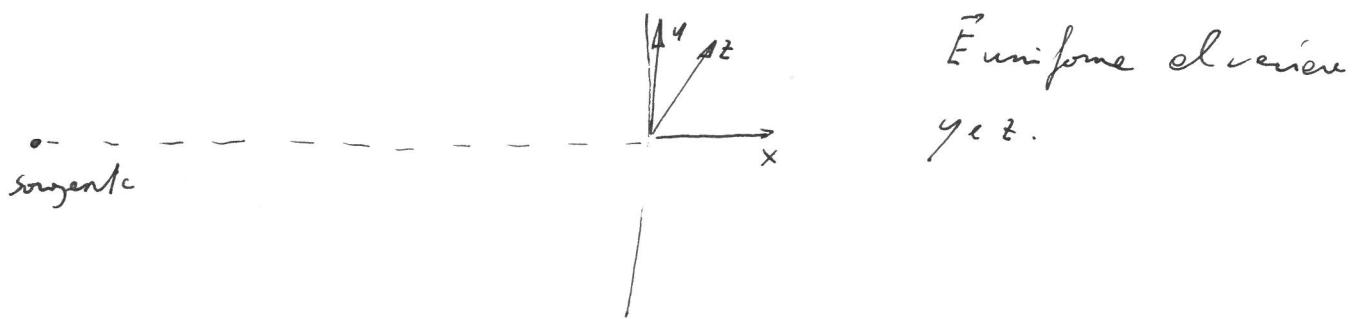
$$\square \vec{E} = 0 \quad \square = \text{d'Alembertiano.}$$

$$\square \vec{B} = 0 \quad \nabla^2 = \text{laplaciano}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

In molti casi a grandi distanze dalla sorgente il campo elettrico risulta invariante rispetto a  $y$  e  $z$ .

Approssimazione dell'onda piana



$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

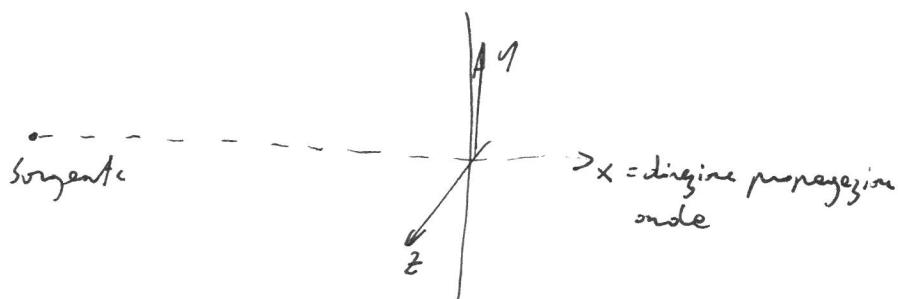
In tal caso una soluzione dell'equazione delle onde è  
delle forme

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 (x - vt) \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 (x - vt) \end{aligned} \quad V = (\mu_0 \epsilon_0)^{-\frac{1}{2}} \text{ nel vuoto} = c$$

## Caratteristiche delle onde elettromagnetiche piane.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

e) Il campo elettrico e magnetico appartengono sempre al piano ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda.



$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \text{poiché } \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$$

(approssimazione delle onde piane)

inoltre

$$\nabla \times \vec{B} = \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \left( 0, -\frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} \right)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \left( 0, -\frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

$$\sigma = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad \sigma = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Le componenti del campo elettrico} \\ \text{e magnetico lungo l'asse } x \text{ sono nulle.} \end{array}$$

b) La direzione di propagazione dell'onda, il campo elettrico e magnetico formeranno una tensione longitudinale.

Supponiamo di avere un campo elettrico polarizzato lungo l'asse  $y$   $E_y = 0$ .

Esiste sempre un campo magnetico associato ad  $E_y$  diretto lungo l'asse  $z$ , inoltre tale componente di  $B$  è l'unica diversa da 0.

$$E_y \neq 0 \quad E_z = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ - \frac{\partial B_z}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{array} \right.$$

campo  $B_z$  varia il le rispetto a  $x$  e  $t$

$$E_z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

le componenti di  $B$  lungo  $y$  è nulla.

$$\therefore \text{Sussiste la proporzionalità} \quad \vec{B} = \underline{\underline{E}}$$

$$E_y = E_y \underbrace{(x - ct)}_{u}$$

$$B_z = B_z (x - ct)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{\partial B_z}{\partial u} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial B_z}{\partial u}$$

poiché  $\frac{\partial E_y}{\partial x} = - \frac{\partial B_z}{\partial t}$

$$\frac{\partial E_y}{\partial u} = c \frac{\partial B_z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial (E_y - cB_z)}{\partial u} = 0 \quad E_y - cB_z = 0$$

$$E_y = cB_z.$$

\*) Equazione di Debye e potenziale vettore

Risoluzione equazioni Maxwell nel caso statico.

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases}$$

Poiché  $\nabla \times \vec{E} = 0$  è possibile introdurre un potenziale  $V$   
tale che  $\vec{E} = -\nabla V$

$$\nabla \cdot (-\nabla V) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{equazione di Poisson}$$

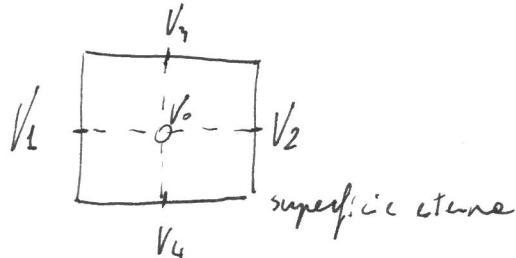
$$\text{La soluzione dell'equazione di Poisson è } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{P}{r} d\tau$$

$r$ : distanza punto  $P$  incisio  
nde calcolare  $V$  dell'elemento  
di volume  $d\tau$ .

Si può dimostrare che l'equazione di Poisson ammette soluzione unica sotto le condizioni al contorno.

Se considero una superficie chiusa da cui le elettriche si ha  $\nabla^2 V = 0$  equazione di Laplace

Una risoluzione di tale equazione può essere fatta per via numerica - Si dimostra infatti che sotto le condizioni al contorno cioè il valore di  $V$  sulla superficie esterna è possibile ricevere il valore di  $V$  nel centro come media del potenziale sulle superficie.



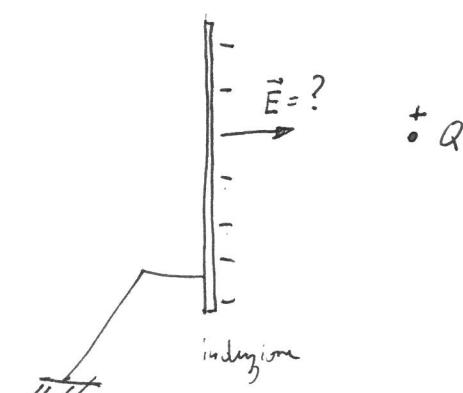
$$V_0 = \frac{1}{4} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$$

Un altro modo per risolvere l'equazione di Laplace è quella di considerare una distribuzione di carica puntiforme che generi le stesse condizioni al contorno del sistema considerato e di calcolare il potenziale del nuovo sistema ottenuto.

Poiché la soluzione è unica sotto le condizioni al contorno i valori dei potenziali nei due casi esistono.

E.

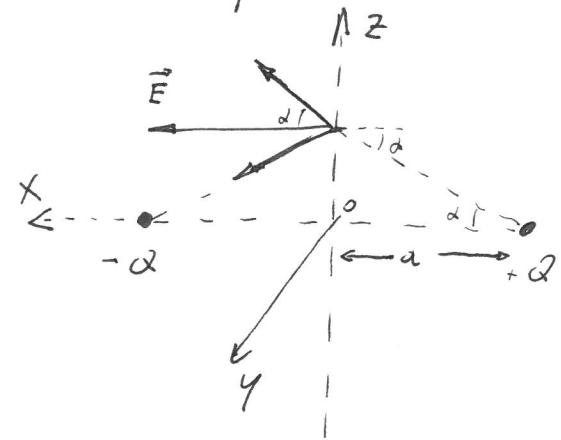
Istudiare il campo elettrico generato in prossimità del piano infinito.



nella etene

le condizioni al contorno vogliono  
 $V_{\text{piano}} = 0$  e  $V_{\text{l'infinito}} = 0$

Sistema equivalente al I



$V$  sul piano immaginario è null  
V all'infinito è nullo.

Il campo elettrico è ortogonale al piano e diretto lungo l'asse x

$$E_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{in norme})$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \| (x, y, z) - (-e, 0, 0) \|} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \| (x, y, z) - (e, 0, 0) \|} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left( (x-e)^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left( (x+e)^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{Q \left( -\frac{1}{2} \right) x (x-e)}{4\pi\epsilon_0 \left[ (x-e)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q \frac{1}{2} x (x+e)}{4\pi\epsilon_0 \left[ (x+e)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

lungo il piano  $x=0$

$$\frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{Qe}{4\pi\epsilon_0(e^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Qe}{4\pi\epsilon_0(e^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{Qe}{4\pi\epsilon_0(e^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

E' interessante se calcolare la carica indotta sul piano applicando il teorema di Gauss  $Q = \int_T E \cdot dT$

$$Q_{\text{piano}} = \frac{Qe}{2\pi} \int_T \frac{1}{(e^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} dT$$

in coordinate polari

$$Q_{\text{piano}} = \frac{Qe}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(e^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} 2\pi r dr = \frac{Qe}{2} \left[ \frac{-1}{(e^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^\infty =$$

$= Q$  la carica distribuita sul piano insieme vale  $Q$ .

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

Poiché  $\nabla \times \vec{B} \neq 0$  non è possibile definire un potenziale scalare tale che  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , possiamo introdurre un vettore

$\vec{A}$  = potenziale vettore tale che  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$

$$\left[ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 ; \text{ è verificata } \nabla \cdot \vec{B} = 0 \right]$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

poiché il potenziale vettore è definito a meno di un gradiente

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \quad \text{e anche} \quad \nabla \times (\vec{A} + \nabla \times \vec{U}) : \underbrace{\nabla \times \vec{A}}_{\text{"}} + \underbrace{\nabla \times (\nabla \times \vec{U})}_{\text{"}} = \vec{B}$$

possiamo considerare un potenziale vettore avente divergenza nulla, in tal caso

$\nabla' \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$  è analogo con l'equazione di dipolo la soluzione è

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\vec{J}}{r} d\tau .$$

\*) Applicazione del potenziale vettore per calcolare le formule di dipolo  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} d\vec{l} \times \hat{r}$



$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\vec{J}}{r} d\vec{s} d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} d\vec{l}$$

$$d\vec{B} = \nabla \times (d\vec{A}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{1}{r} d\vec{l} \right) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \nabla \cdot \left( \frac{1}{r} \right) \times d\vec{l} +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{i}{r} \right) \cdot \cancel{\nabla \times d\vec{l}} \quad (d\vec{l} \text{ costante})$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left( -\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \times d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} d\vec{l} \times \frac{\hat{r}}{r^2}$$

\*) Equazioni dei potenziali vettoriali

(risoluzione dell'equazione di Maxwell nei casi non stazionari).

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \nabla \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{impossibile definire un potenziale}$$

$V$  tale che

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \nabla V$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right\}$$

$$\nabla \cdot (\mu_0 \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} - \nabla \cdot \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Si impongono le

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad \text{stesso}$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

Inoltre considerando

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

$$\nabla^2 V = -\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases} \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \\ \square V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases}$$

Le due equazioni vengono dette  
di potenziali ristretti poiché-  
le forme delle soluzioni è

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{\infty} \frac{[\rho]}{r} dT$$

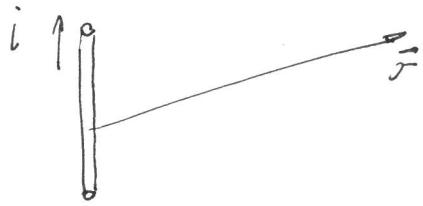
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{r_0}^{\infty} \frac{[\vec{j}]}{r} dT$$

dove  $[\rho]$  e  $[\vec{j}]$  rappresentano le distribuzione delle densità di carica e di corrente nel tempo  $t - \frac{r}{v}$

$v$ : velocità dell'onda (nel vuoto  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$ )

$r$ : distanza del punto P in cui si vuole calcolare  $V$  e  $\vec{A}$  dall'elemento  $dT$ .

\*) Applicazione delle equazioni dei potenziali riportate per calcolare il campo dell'onda elettromagnetica prodotto da una spira percorsa da corrente sinusoidale.



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} [i] \int \frac{d\vec{l}}{r}$$

se  $F$  è molto grande rispetto alle lunghezze del filo  $\frac{1}{r}$  può essere considerata costante

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[i]}{r} d\vec{l}$$

$$[\vec{B}] = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left( \frac{[i]}{r} d\vec{l} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \nabla \cdot \left( \frac{[i]}{r} \right) \right) \times d\vec{l} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[i]}{r} \nabla \times d\vec{l}$$

$$\nabla \cdot \left( \frac{[i]}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{[i]}{r} \right) \cdot \nabla \cdot r = \frac{1}{r^2} \left( \frac{[i]}{r} \right) \hat{r} =$$

$$= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial [i]}{\partial r} - \frac{1}{r^2} [i] \right) \hat{r} \quad [i] = i_0 \cos \omega \left( t - \frac{r}{c} \right)$$

$$\frac{\partial [i]}{\partial r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial [i]}{\partial t}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{l} \times \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial [i]}{\partial t} + \frac{[i]}{r^2} \right] \hat{r}$$

Il II termine rappresenta l'equazione di Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} [i] d\vec{l} \times \hat{\vec{r}}$$

Il I termine il campo dell'onda elettromagnetica

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{rc} \omega \sin(\omega t - \frac{c}{r}) d\vec{l} \times \hat{\vec{r}} \quad \text{in generale}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{rc} \omega A \sin \omega t d\vec{l} \times \hat{\vec{r}}$$

$$d\vec{E} = \frac{\mu_0 \omega A}{4\pi r} \sin \omega t d\vec{l} \quad (\text{dovendo essere ortogonale a } \vec{B} \text{ e moltiplicato per un fattore } c)$$

Tali campi vanno all'infinito come  $\frac{1}{r}$  pertanto a grandi distanze le loro influenze è maggiore di quelle prodotte da campi stazionari che vanno all'infinito come  $\frac{1}{r^2}$ . Tuttavia essi sono rilevanti.

soltanto per pulsazioni e molto elevate.  
 (il fattore  $\frac{\rho_0}{c}$  e  $\rho_0$  l'onda trascurabile).

### \* ) Interazione tra onde elettromagnetiche e conduttori

Un'onda elettromagnetica attraverso indisturbata un materiale isolante mentre si dissolve all'interno di un conduttore e le sue energie si trasformano in calore dissipato per effetto Joule.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_0 \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla_0 \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\nabla \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

termine dissipativo.  $\sigma = \frac{1}{\rho} \approx 10^9 \text{ s}^{-1}$  in un conduttore.

cerchiamo soluzione delle forme

$$E = E_0 \cos \omega(t - \frac{x}{v}) = E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{v})}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{i\omega}{v} E \quad \frac{\partial E}{\partial t} = i\omega E$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{v^2} E \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E$$

sostituendo

$$-\frac{\omega^2}{v^2} E = \frac{1}{v} i\omega E - \frac{1}{v} \omega^2 E$$

$$\frac{1}{v^2} = 1 - \frac{1}{v} i \quad \text{il termine reale può essere trascurato rispetto al termine immaginario}$$

$$\frac{1}{v} = \sqrt{\frac{1}{\omega}} \quad v-i = \sqrt{\frac{1}{\omega}} \quad e^{-\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{1}{\omega}} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) = \sqrt{\frac{1}{\omega}} (1-i)$$

$$E = E_0 e^{i\omega(t - \frac{x\sqrt{1/\omega}}{2} + \frac{i\sqrt{1/\omega}}{2})} = E_0 e^{-\frac{x\sqrt{1/\omega}}{2}} e^{i\omega(t - \frac{x\sqrt{1/\omega}}{2})}$$

$$E = E_0 e^{-\frac{x\sqrt{1/\omega}}{2}} \cos \omega(t - \frac{x\sqrt{1/\omega}}{2})$$

Il campo elettrico si porta esponenzialmente a zero.

Per  $x \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma \omega}}$  per l'ottica  $\omega = 10^{14}$

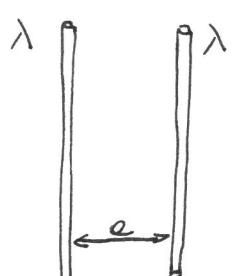
$$x \approx \frac{1}{\sqrt{10^{-2} \cdot 10^9 \cdot 10^{14}}} \approx \frac{1}{10^8} \approx 10^{-8} \text{ mm} \quad \text{l'onda}$$

si riduce a meno delle metà.

## Trasformazioni relativistiche dei campi

Alcune contraddizioni relative alle equazioni di Maxwell spinc Einstein a formulare le teorie della relatività.

Una contraddizione può essere la seguente:

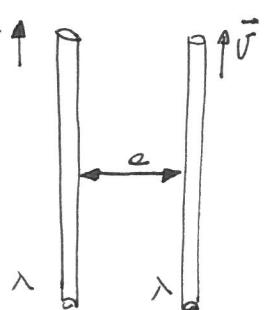


filini indefiniti con lini con densità  $\lambda$ .

$$F = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \quad dF = \frac{\lambda \lambda}{2\pi\epsilon_0} dl = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0} dl$$

(forza di repulsione agente sul tratto  $dl$ )

Considera un sistema di riferimento rispetto al quale i filini muovono con velocità  $v$ .



Oltre alle forze di repulsione elettostatiche tra i due fili si esercita una forza di attrazione magnetica.

$$dF = i dl B = i dl \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi r} dl$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \lambda \frac{dl}{dt} = \lambda v$$

$$dF = \frac{\mu_0 \lambda^2 v^2}{2\pi r} dl \quad (\text{forze attrazione magnetica})$$

$$dF = \frac{\lambda^2}{2\pi r \epsilon_0} dl \quad (\text{forze repulsione elettrica})$$

Nei due sistemi di riferimento entrambi inerziali  
 le forze a cui sono soggetti i fili sono differenti.  
 (Contro il principio d'inerzia galileiano)

Consideriamo il problema relativistico

$$J = \rho v \text{ relativisticamente} \quad \stackrel{\Rightarrow}{J} = \rho_0 \stackrel{\Rightarrow}{v} = (\rho_0 v_x, \rho_0 v_y, \rho_0 v_z, \rho_0 c)$$

Se la densità di carica in un sistema fermo è  $\rho_0$ , in un sistema in moto con velocità  $v$  vale  $\gamma \rho_0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \rho_0$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Nell'esempio precedente si ha che per il sistema d'rifermarsi in cui i fili sono fermi

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\lambda^2}{2\pi e \epsilon_0}$$

nell'altro sistema

$$\frac{dF}{dl} = \frac{(\gamma \lambda)^2}{2\pi e \epsilon_0} - \frac{\gamma_0 (\gamma \lambda)^2 v^2}{2\pi e} = \frac{\gamma^2 \lambda^2 - \gamma_0 \gamma^2 \lambda^2 \epsilon_0 v^2}{2\pi e \epsilon_0} =$$

$$= \frac{\gamma^2 \lambda^2 - \gamma^2 \lambda^2 \frac{v^2}{c^2}}{2\pi e \epsilon_0} = \frac{\gamma^2 \lambda^2 (1 - \beta^2)}{2\pi e \epsilon_0} = \frac{\lambda^2}{2\pi e \epsilon_0} \quad \underline{\underline{N.B}}$$

\* ) Variazioni relativistiche di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ .

Equazioni Maxwell

$$\square V = -\frac{P}{\epsilon_0} = -\frac{\gamma_0 P}{\gamma_0 \epsilon_0} = -\gamma_0 c^2 P$$

$$\square \vec{A} = -\gamma_0 \vec{J}$$

Considerando il quadivettore  $\vec{J} = (\gamma \vec{v}, \gamma c) P_0 \equiv (\rho \vec{v}, \rho c)$   
 $P_0 \gamma = P$  (relativistico)

Se due equazioni di Maxwell vengono misurate nelle forme

$$\square \overset{\Rightarrow}{A} = \gamma_0 \overset{\Rightarrow}{J} \quad \text{dove} \quad \overset{\Rightarrow}{A} \equiv \left( \vec{A}, \frac{V}{c} \right)$$

la IV componente fornisce la I equazione ( $\square V = -\gamma_0 c^2 P$ )

Il risultato di tale equazione  $\overset{\Rightarrow}{A}$  deve necessariamente sottostare alle trasformazioni di Lorentz pertanto è un quadivettore.

$$\begin{cases} A_x = \gamma (A'_x + \beta \frac{V'}{c}) \\ A_y = A'_y \\ A_z = A'_z \\ \frac{V}{c} = \gamma \left( \frac{V'}{c} + \beta A'_x \right) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \gamma (x' + \beta c t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma \left( t' + \frac{\beta}{c} x' \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_x = \gamma \left( A'_x + \frac{\beta}{c} V' \right) \\ A_y = A'_y \\ A_z = A'_z \\ V = \gamma \left( V' + \beta c A'_x \right) \end{cases} \quad - \nabla V = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$

Osserviamo che

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial t'} + \gamma \beta c \frac{\partial}{\partial x'} \end{cases}$$

Si ottengono le trasformazioni

$$\begin{cases} E_x = E'_x \\ \vec{E}^\perp = \gamma \left( \vec{E}'^\perp + c \vec{\beta} \times \vec{E}' \right) \end{cases} \quad ? \quad \begin{cases} A_x = A'_x \\ \vec{A}^\perp = \gamma \left( \vec{A}'^\perp + \frac{\vec{\beta}}{c} \times \vec{A}' \right) \end{cases}$$

A titolo d'esempio dimostra  $E_x = E'_x$

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\left(\gamma \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t'}\right) V - \left(\gamma \frac{\partial}{\partial t'} + \gamma \beta c \frac{\partial}{\partial x'}\right) A_x = \\&= -\gamma \frac{\partial V}{\partial x'} - \gamma \frac{\beta}{c} \frac{\partial V}{\partial t'} - \gamma \frac{\partial A_x}{\partial t'} - \gamma \beta c \frac{\partial A_x}{\partial x'} : \\&= -\frac{\partial}{\partial x'} \gamma \left(V + \beta c A_x\right) - \frac{\partial}{\partial t'} \gamma \left(A_x + \frac{\beta}{c} V\right) = -\frac{\partial V'}{\partial x'} - \frac{\partial A'_x}{\partial t'} = E'_x\end{aligned}$$

N.B.

Se i due fili avessero dimensione finita, si avrebbe

$$F_0 = K l_0 \quad F' = K l' = \frac{K l_0}{\gamma} \quad (\text{contrazione lunghezza})$$

Sono sistemi in cui i fili sono fermi

$\dot{s}' = " \quad " \quad \text{sono in moto}$

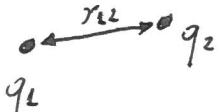
$$F' = \frac{\Delta P_0}{\gamma \Delta t_0} \quad F_0 = \frac{\Delta P_0}{\Delta t_0}$$

Nel sistema in cui i fili sono in moto si ha le

stessa variazione di quantità di moto del sistema  
risolubile solo così in un tempo  $\Delta t' = j \Delta t_0$  maggiore di  $\Delta t_0$   
(dilatazione dei tempi).

## Considerazioni energetiche

a) Energia associata ad una distribuzione di cariche



$$U = q_2 V = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^2 \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Nel caso di  $N$  cariche

$$U = \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V_i$$

Nel caso di una distribuzione continua di cariche

$$U = \frac{1}{2} \int_T \rho V dT \quad \text{poiché } \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$U = \frac{1}{2} \int_T \epsilon_0 \nabla \cdot (\vec{E}) V dT = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_T \nabla \cdot \vec{E} V dT$$

$$\text{me } \nabla \cdot (\vec{E} V) = V \nabla \cdot \vec{E} + \nabla V \cdot \vec{E}$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_T \nabla \cdot (\vec{E} V) - \nabla V \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_T \nabla \cdot (\vec{E} V) + E^2 d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_T \nabla \cdot (\vec{E} V) + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_T E^2 d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \phi(\vec{E} V) + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_T E^2 d\tau$$

Il fattore  $\vec{E} V$  è all'infinito come  $\frac{1}{r^3}$ , una superficie come  $r^2$  perpendicolare il I termine è nullo.

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_T E^2 d\tau.$$

b) Energie associate ad un campo magnetico.

Considera un circuito CL



$$\frac{Q}{C} - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{d^2Q}{dt^2}$$

$$\frac{Q}{C} = -L \frac{d^2Q}{dt^2} \quad \frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{LC}$$

$$Q = Q_0 \cos \omega t \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

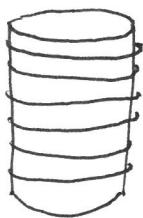
$$I = -\frac{dQ}{dt} = Q_0 \omega \sin \omega t$$

L'energia di un condensatore vale

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2C} Q_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2C} Q_0^2 (1 - \sin^2 \omega t) =$$

$$= \frac{1}{2C} Q_0^2 - \frac{1}{2C} Q_0^2 \sin^2 \omega t = U_0 - \frac{1}{2CL} Q_0^2 \sin^2 \omega t = U_0 - \frac{1}{2} L I^2$$

Per la conservazione dell'energia il termine  $\frac{1}{2}LI^2$  deve rappresentare l'energia associata al campo magnetico che "crea nell'induttanza.



Consideriamo solenziole attraversate da corrente elettrica.

$$L = \frac{N\phi(B)}{I} = \frac{NBS}{I}$$

$$U = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}NBSI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} \quad U = \frac{1}{2}NBS \frac{lB}{\mu_0 N} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}l$$

Nel caso generale

$$U = \int \frac{1}{2\mu_0} B^2 dT$$

c) Energie associata ad un'onda elettromagnetica.

La densità d'energia associata a campi magnetici e elettrici vale

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \epsilon_0 \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{inoltre}$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \epsilon_0 \vec{E} \left( \frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_0 \epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J} \right) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = -\frac{\vec{E} \cdot \nabla \times \vec{B}}{\mu_0} + \vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B})) + \vec{E} \cdot \vec{J}$$

le potenze dissipate sono

$$\int_T -\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \int_{T_0} \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) + \underbrace{\int_T \vec{E} \cdot \vec{J} dT}_{\int_{l \cdot s} \int \vec{E} \cdot \vec{J} dl ds = \int_l \vec{E} dl \int_s \vec{J} ds = VI}$$

= potenze dissipate per effetto Joule

$$\int_T \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) dT = \phi \left( \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \right) = \phi(\vec{n}) \quad \text{è l'energia}$$

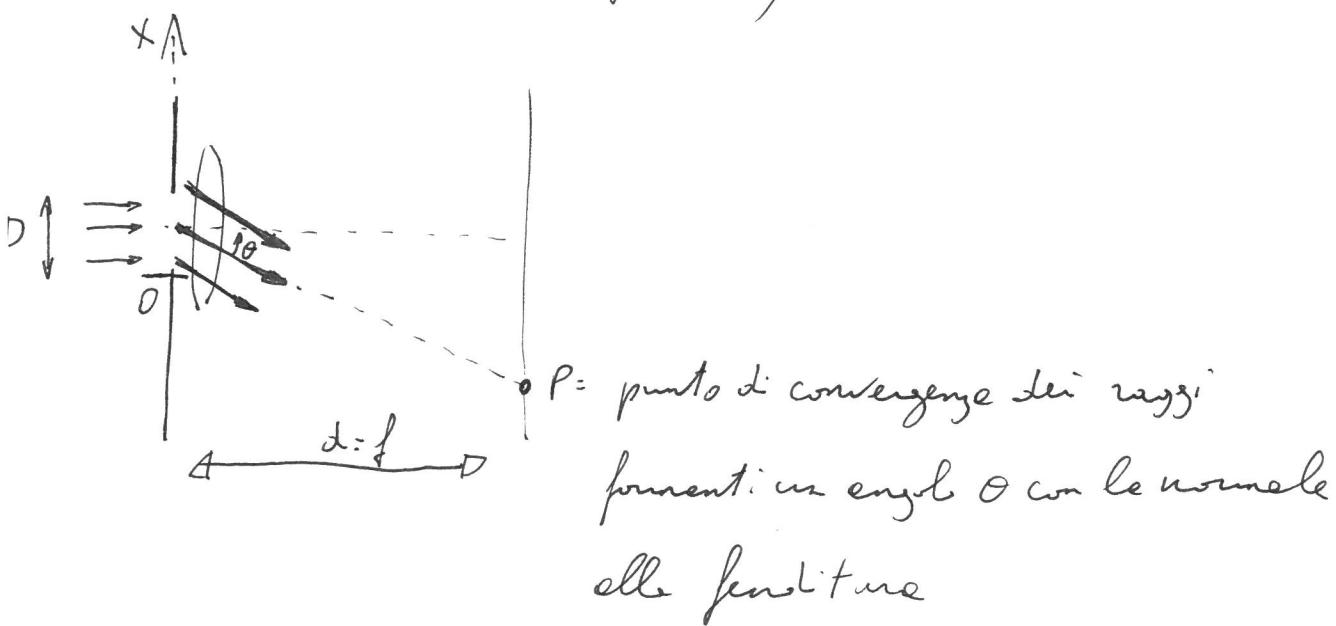
dissipate delle onde elettromagnetiche

il vettore  $\vec{n} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$  rappresenta le potenze in unità di superficie trasportate dall'onda elettromagnetica.

## Fenomeni d'interferenza

### a) Diffrazione alle Fraunhofer.

Per diffrazione alle Fraunhofer s'intende il fenomeno d'interferenza prodotto da una fenditura su uno schermo posto a distanza infinita da essa.  
e si ha quando la lunghezza d'onda delle luce è confrontabile con le dimensioni della fenditura  
In pratica si pone una lente convergente e si considera il fenomeno sul piano focale).



Il campo elettrico nel punto P è dato del contributo  
dei campi dei singoli raggi sparsi di un fattore

$$\Delta\phi = \frac{2\pi \times \text{ven} \theta}{\lambda}$$

$$dE = \frac{E_0}{D} \cos(\omega t + \frac{2\pi \times \text{ven} \theta}{\lambda}) dx$$

$$E = \frac{E_0}{D} \int_0^D \cos(\omega t + \frac{2\pi \times \text{ven} \theta}{\lambda}) dx = \frac{E_0}{D} \frac{\lambda}{2\pi \text{ven} \theta} \left[ \sin(\omega t + \frac{2\pi \times \text{ven} \theta}{\lambda}) \right]_0^D$$

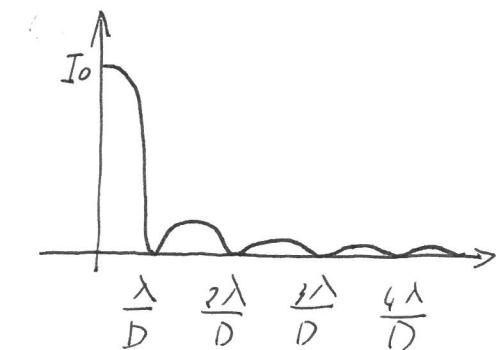
$$= \frac{E_0}{D} \frac{\lambda}{2\pi \text{ven} \theta} \left\{ \sin(\omega t + \frac{2\pi D \text{ven} \theta}{\lambda}) - \sin(\omega t) \right\} :$$

$$= \frac{E_0 \lambda}{D 2\pi \text{ven} \theta} \sin \frac{\pi D \text{ven} \theta}{\lambda} \cos \left( \omega t + \frac{\pi D \text{ven} \theta}{\lambda} \right)$$

$$\frac{2\pi \text{ven} \theta}{\lambda} = z$$

$$E = E_0 \frac{\sin z}{z} \cos(\omega t + z)$$

$$I = \frac{E_0}{2} \frac{\sin^2 z}{z^2} = I_0 \frac{\sin^2 z}{z^2}$$



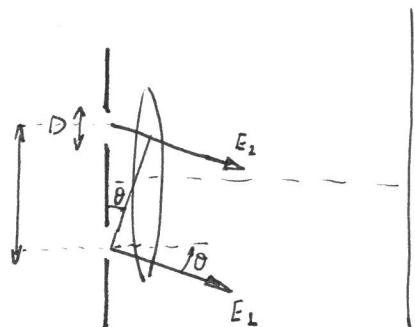
minimi

$$\frac{D \text{ven} \theta}{\lambda} = n \pi$$

$$\text{ven} \theta \approx \theta = \frac{n \lambda}{D}$$

Tutte l'intensità luminose si concentrano in un  
censo di raggio  $\frac{\lambda}{2}$ .

b) Diffrazione alla Fresnel per prodotto de due fenditure.

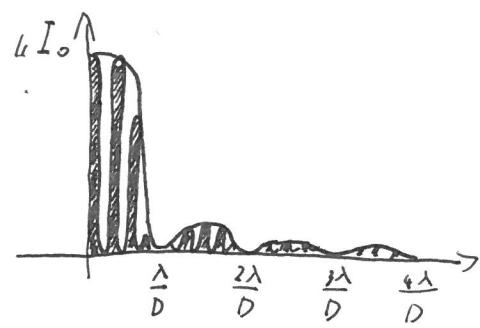


$$E_L = E_0 \frac{v_m z}{z} \cos(\omega t + z)$$

$$E_2 = E_0 \frac{v_m z}{z} \cos\left(\omega t + z + \frac{2\pi P_m \phi}{\lambda}\right)$$

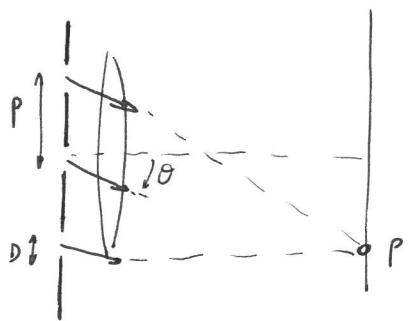
$$E_{t,t} = E_0 \frac{v_m z}{z} \cdot 2 \cos\left(\omega t + z + \frac{\pi P_m \phi}{\lambda}\right) \cos \frac{\pi P_m \phi}{\lambda}$$

$$I = 4 \frac{E_0^2}{2} \frac{v_m^2 z}{z^2} \cos^2 \frac{\pi P_m \phi}{\lambda} = 4 I_0 \frac{v_m^2 z}{z^2} \cos^2 \frac{\pi P_m \phi}{\lambda}$$



$$\frac{\pi p \sin \theta}{\lambda} = n\pi \quad \sin \theta \approx \theta = \frac{n\lambda}{p} \quad (\text{minimi luminosi})$$

c) Diffrazione alle Fraunhofer prodotte dalle N fenditure.



$$E = E_0 \frac{\sin z}{z} \cos(\omega t + z)$$

$$E_n = E_0 \frac{\sin z}{z} \cos(\omega t + z + \frac{2\pi n p \sin \theta}{\lambda}) \quad (\text{campi prodotti dalle fenditure } n+1 \text{ esime})$$

Nel caso di sorgente N fonditure il campo prodotto nel punto P vale

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} E_0 \frac{v_n z}{z} e^{i(\omega t + z + \frac{2\pi n \psi}{\lambda})}$$

pongo  $\psi = \frac{\pi p s n \vartheta}{\lambda}$

$$E = E_0 \frac{v_n z}{z} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(\omega t + z + 2n\psi)} = E_0 \frac{v_n z}{z} e^{i(\omega t + z)} \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} e^{2in\psi}}$$

$$= E_0 \frac{v_n z}{z} e^{i(\omega t + z)} \frac{1 - e^{2iN\psi}}{1 - e^{2i\psi}}$$

$$E = E_0 \frac{v_n z}{z} \left| \frac{1 - e^{2iN\psi}}{1 - e^{2i\psi}} \right| \cos(\omega t + z + \varphi)$$

$$I = \frac{E_0^2}{Z} \frac{v_n^2 z}{Z^2} \frac{(1 - e^{2iN\psi})(1 - e^{-2iN\psi})}{(1 - e^{2i\psi})(1 - e^{-2i\psi})} =$$

$$= I_0 \frac{v_n^2 z}{Z^2} \frac{2 - (e^{2iN\psi} + e^{-2iN\psi})}{2 - (e^{2i\psi} + e^{-2i\psi})} = I_0 \frac{v_n^2 z}{Z^2} \frac{2 - 2 \cos 2N\psi}{2 - 2 \cos 2\psi}$$

$$I = I_0 \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2} \frac{1 - \cos 2N\psi}{1 - \cos 2\psi} = I_0 \frac{\sin^2 \theta}{\lambda^2} \frac{\sin^2 N\psi}{\sin^2 \psi}$$

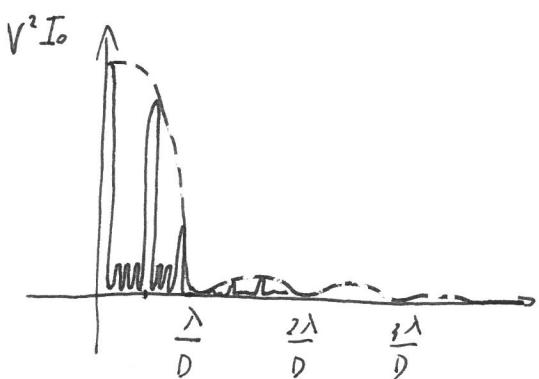
$$\psi = \frac{\pi P \sin \theta}{\lambda} = n\pi$$

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{n\lambda}{P} \quad (\text{in tali punti: } \frac{\sin^2 N\psi}{\sin^2 \psi} \text{ è indet})$$

applichiamo il teorema dell'Hopital

$$\frac{2 \sin N\psi N \cos N\psi}{2 \sin \psi \cos \psi} = \frac{N \sin 2N\psi}{\sin 2\psi} =$$

$$= \frac{2N^2 \cos 2N\psi}{2 \cos 2\psi} = N^2$$



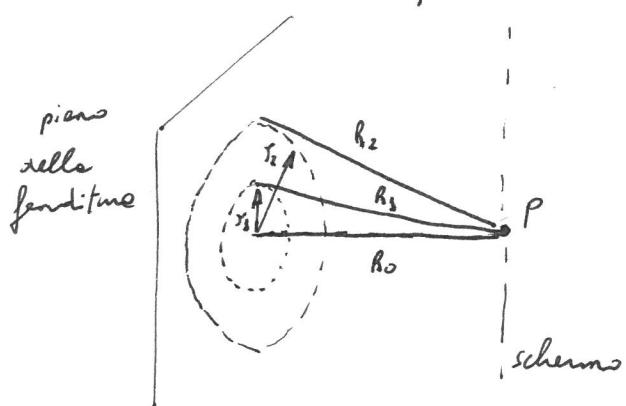
Massimi luminosi:

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{n\lambda}{P}$$

## Diffrizione alle Fresnel

Per diffrazione alle Fresnel s'intende il fenomeno d'interferenza prodotto da una fenditura su uno schermo posto ad una piccola distanza da essa.

Supponiamo di voler calcolare l'intensità luminosa nel punto P. Si esegue queste costruzione:



$$R_i = R_0 + i \frac{\lambda}{2} \quad \lambda = \text{lunghezza d'onda luce incidente}$$

Ogni cerchio circolare è detta zone di Fresnel; il contributo al campo in P dato da due zone di Fresnel adiacenti è di segno opposto. L'intensità del campo prodotto in P da una zone di Fresnel vale:

$$\frac{E_i = E_0 \pi (r_i^2 - r_{i-1}^2)}{\frac{R_i + R_{i-1}}{2}}$$

perché è un'energia per una superficie  
(proporzionale alla superficie e all'  
inverso delle distanze)

perché le onde sferiche vanno con  $\frac{1}{2}$

$$r_i^2 = R_i^2 - R_o^2$$

$$\frac{E_i}{R_i + R_{i-1}} = \frac{2E_0\pi(R_i^2 - R_{i-1}^2)}{R_i + R_{i-1}} = 2E_0\pi(R_i - R_{i-1}) = 2E_0\pi\left(R_o + \frac{i\lambda}{2} - R_o - (i-1)\frac{\lambda}{2}\right) = 2E_0\pi\frac{\lambda}{2} = E_0\pi\lambda$$

$$I = E_0^2\pi\lambda^2 = I_F$$

L'intensità luminosa di ogni singola zona di Fresnel è uguale.

Se non vi fossero ostacoli il campo in Pianelle:

$$E = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}(E_2 + 2E_3 + E_4) + \frac{1}{2}(E_3 + 2E_4 + E_5) \dots$$

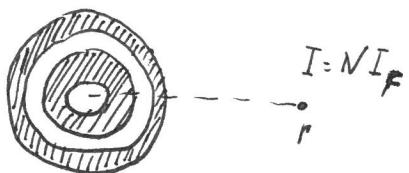
$E_i$  = campo  $i$ -esima zona Fresnel

$$E = \frac{1}{2}E_1 \quad I = \frac{E_1^2}{4} \quad I_F = 4I_0$$

\* Se costruisce una fenditura delle dimensioni di una zona di Fresnel ottengo in P un punto luminoso di intensità  $4I_0$ .

Se la fenditura ha le dimensioni di due zone di Fresnel nel punto P, si ha il buio e costante.

Se si oscurano le zone di Fresnel  $\rightarrow$  l'ipotesi è lasciata  $N$  zone di Fresnel che portano un contributo al campo dello stesso segno si ha in  $P$  un'intensità luminosa  $I = NI_F$



(Machie di Poisson)



Se si ostruisce un ostacolo che ammira solo le  $I$  zone di Fresnel si crea nel punto  $P$  un punto luminoso di intensità  $I = I_0$

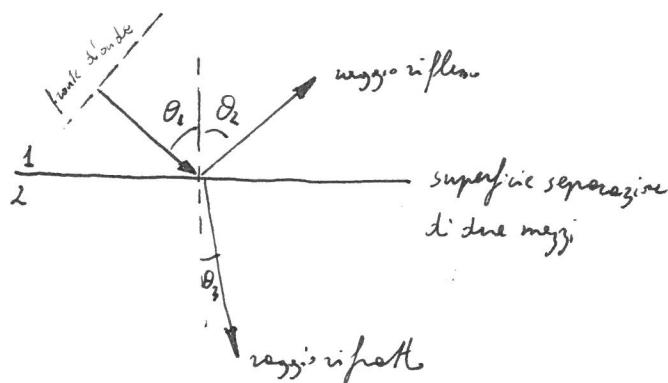
$$\bar{E} = \frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{2} (E_2 + E_2 + E_3) + \dots \quad (\text{tensioni nulli})$$

$$\bar{E} = \frac{E_F}{2} \quad I = I_0$$

Analogamente per ostacoli che coprono le prime zone di Fresnel.

## Riflessione e Rifrazione

a) Leggi di Snell



Valgono le seguenti leggi sperimentali:

$$\theta_2 = \theta_3$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

$n$  = indice di rifrazione del mezzo.

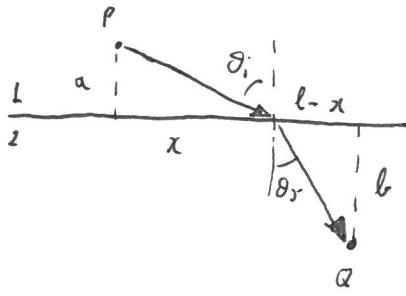
b) Principio di Fermat

Le leggi di Snell possono essere ricavate con il principio

di Fermat che afferma:

il percorso di un raggio luminoso che attraversa più mezzi con indici di rifrazione diversi è quell che minimizza

il cammino ottico  $L = \sum n_i l_i$        $n_i$  = indice rifrazione del mezzo  
 $l_i$  = lunghezza percorso i-esimo mezzo.

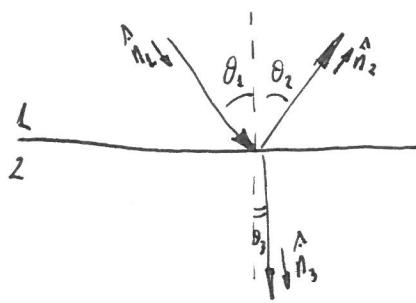


$$\rho = n_1(x^2 + e^2)^{\frac{1}{2}} + n_2[(l-x)^2 + b^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \frac{n_1 x}{x \sqrt{x^2 + e^2}} - \frac{n_2 x(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}} = 0$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{n_1}{n_2}$$

### c) Equazioni di Maxwell

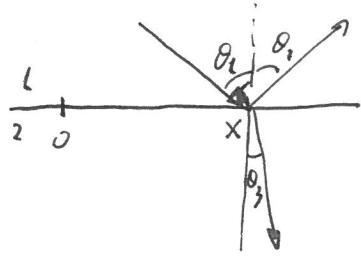


$$E_{\text{incidente}} = E_1 \cos \alpha_1 \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}_1}{v_1} \right)$$

$$E_{\text{riflessa}} = E_2 \cos \left[ \alpha_2 \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}_2}{v_2} \right) + \phi_2 \right]$$

$$E_{\text{riflette}} = E_3 \cos \left[ \alpha_3 \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}_3}{v_2} \right) + \phi_3 \right]$$

Per le continuità delle onde nel punto di incidenza  
l'angolo delle 3 onde deve essere lo stesso al vertice  
di x e t



$$\omega_1 \left[ t - \frac{x \sin \theta_1}{v_1} \right] = \omega_2 \left[ t - \frac{x \sin \theta_2}{v_1} \right] + \varphi_2 = \omega_3 \left[ t - \frac{x \sin \theta_3}{v_2} \right] + \varphi_3 \quad (\theta_X, \theta_t)$$

Suppose that  $\varphi_2 = \varphi_3 = 0$  (wave in phase)

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$$

$$\frac{\sin \theta_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_1}{v_1} \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

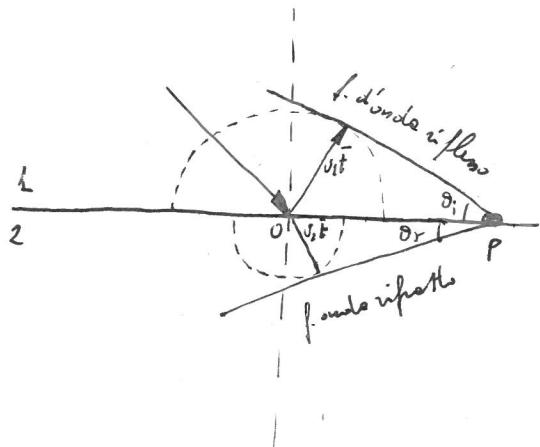
$$\frac{\sin \theta_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_3}{v_2} = \frac{\sin \theta_1}{v_1}$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_3} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{c} \cdot \frac{c}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{so } N = \frac{c}{v}$$

d) Principio di Huyghens.

Il principio di Huyghens afferma che ogni punto del fronte d'onda elettromagnetico si comporta come una sorgente sottiforme da cui parte un'onda sferica.

L'inviluppo di tutte le onde così generate crea il fronte d'onda nell'istante successivo.



Il fronte d'onda è appena giunto nel punto P. Dal punto O si è già sviluppata un'onda sferica.

L'inviluppo delle onde sferiche è il fronte d'onda.

$$v_1 \bar{t} = \bar{OP} \sin \theta_i$$

$$v_2 \bar{t} = \bar{OP} \sin \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2} . \quad (\text{legge di Snell}).$$