Corrente di transizione per una particella di Klein Gordon e di Dirac

Corrente di transizione per una particella di Dirac

Come fatto per le particelle scalari di Klein Gordon di grande importanza è trovare l'espressione della corrente per i fermioni di Dirac.
Ciò permette di determinare l'interazione particella campo elettromagnetico, i diagrammi di Feynman e i fenomeni di scattering.

1) Corrente per una particella di Klein Gordon

Scrivo l'ampiezza di transizione per una particella libera

$$\langle \phi \,|H_{free}|\, \phi \rangle = \langle \phi \,|\, \partial_\mu \partial^\mu - m^2 \,|\, \phi \rangle$$

Nel caso di iterazione con un campo elettromagnetico si introduce la sostituzione minimale

$$\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu$$

$$\phi^*(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi - m^2\phi^*\phi =$$

$$= \phi^*\left[\partial_\mu\partial^\mu\phi + ie\,\partial_\mu(A^\mu\phi) + ieA_\mu\partial^\mu\phi - e^2A^\mu A_\mu\phi\right] - m^2\phi^*\phi =$$

= trascurando i termini in e^2

$$\phi^*\partial_\mu\partial^\mu\phi + ie\phi^*\partial_\mu(A^\mu\phi) + ie\phi^*A_\mu\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi$$

integrando per parti il II termine

$$ie\,\phi^*\partial_\mu(A^\mu\phi) = -ie(\partial_\mu\phi^*)A^\mu\phi = -ie(\partial^\mu\phi^*)A_\mu\phi$$

sostituendo

$$= \phi^*(\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\phi - ieA_\mu\left[(\partial^\mu\phi^*)\phi - \phi^*\partial^\mu\phi\right]$$

Da cui si ricava la corrente di transizione

$$J^{\mu} = +ie\left[\left(\partial^{\mu}\phi^{*}\right)\phi - \phi^{*}\left(\partial^{\mu}\phi\right)\right]$$

Se considero un campo di Klein Gordon

$$\phi = A e^{ip^{\mu}x_{\mu}} \qquad \partial^{\mu}\phi = A i p^{\mu} e^{ip^{\mu}x_{\mu}}$$

$$\phi^{*} = A e^{-ip^{\mu}x_{\mu}} \qquad \partial^{\mu}\phi^{*} = -A i p^{\mu} e^{-ip^{\mu}x_{\mu}}$$

$$J^{\mu} = +ie\left[-A^{2} i p^{\mu} - A^{2} i p^{\mu}\right] = +e A^{2} 2p^{\mu}$$

Affinché la componente ϕ della corrente sia conservata deve essere su un volume V

$$A^{2} = \frac{1}{2EV} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2EV}}$$

Calcoliamo ora la corrente di transizione di Klein Gordon

Tra due stati diversi

$$J^\mu = +ie\left[\left(\partial^\mu \phi^*\right)\phi - \phi^*\left(\partial^\mu \phi\right)\right]$$

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2E'V}} e^{ip'^\mu x_\mu} \qquad \partial^\mu \phi = \frac{ip'^\mu}{\sqrt{2E'V}} e^{ip'^\mu x_\mu}$$

$$\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2E''V}} e^{-ip''^\mu x_\mu} \qquad \partial^\mu \phi^* = \frac{-ip''^\mu}{\sqrt{2E''V}} e^{-ip''^\mu x_\mu}$$

$$J^\mu = +ie\left[\frac{-ip''^\mu}{\sqrt{2E''V}\sqrt{2E'V}} e^{-ip''^\mu x_\mu} e^{ip'^\mu x_\mu} - \right.$$

$$\left. - \frac{ip'^\mu}{\sqrt{2E''V}\sqrt{2E'V}} e^{-ip''^\mu x_\mu} e^{ip'^\mu x_\mu}\right] =$$

$$= +e \frac{(p'+p'')^\mu}{\sqrt{2E'V}\,\sqrt{2E''V}} e^{i(p'-p'')^\mu x_\mu}$$

2) Corrente per un fermione di Dirac.

Determino di seguito l'espressione della corrente per una particella di Dirac.

Scrivo l'ampiezza di transizione per una particella libera

$$\langle \psi | H_{free} | \psi \rangle$$

$$H_{free} = i\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha^{\mu}\partial_{\mu} - \beta m$$

$$H_{free} = i\gamma^0\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^0\gamma^0\alpha^{\mu}\partial_{\mu} - \gamma^0\gamma^0\beta m$$

ricordando che $\beta = \gamma^0$

$$\gamma^{\mu} = \beta\alpha^{\mu} = \gamma^0\alpha^{\mu}$$

$$H_{free} = i\gamma^0\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^0\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - \gamma^0 m$$

$$\langle \psi | H_{par} | \psi \rangle = \bar{\psi} \left(i \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi$$

dove abbiamo indicato con $\boxed{\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0}$

l'autoaggiunto di ψ.

Per il calcolo della corrente di transizione si introduce la sostituzione minimale nel caso di interazione con il campo elettromagnetico.

$$\hat{\partial}_\mu \rightarrow \hat{\partial}_\mu + ie\hat{A}_\mu$$

$$i\bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + i^2 e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu =$$

$$= \langle \psi | H_{par} | \psi \rangle - eA_\mu J^\mu$$

dove $J^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$