Ampiezze di Transizione per una particella di Dirac

Ampiezza di transizione particella Dirac

La grandezza $\langle \psi_f | S | \psi_i \rangle$ è detta ampiezza di transizione e il suo quadrato indica la probabilità di transizione tra lo stato iniziale ψ_i e lo stato finale ψ_f

$$\langle \psi_f | S^{(1)} | \psi_i \rangle = \int \overline{\psi}_f \, \psi_i^{(1)} \, d^3x$$

dove con $\overline{\psi}$ si indica l'aggiunto $\psi^{+} \gamma^{0} = \overline{\psi}$

l'apice (1) sta ad indicare che l'ampiezza di transizione è stata considerata utilizzando per la funzione d'onda $\psi_i^{(1)}$ l'approssimazione

$$\psi_i^{(1)} = \psi_i^{(0)} + e \hat{A}_\mu \psi_i^{(0)}$$

$$\psi_i^{(0)} = \sqrt{\frac{m}{VE'}}\, u_i\, e^{-i\vec{p}'\vec{x}}$$

$$\psi_i^{(1)} = e\hat{A}_\mu \sqrt{\frac{m}{VE'}}\, u_i\, e^{-i\vec{p}'\vec{x}}$$

dove u è il vettore a 4 componenti e

$\vec{p}\vec{x}$ è il prodotto $p_i x^i = Et - p^1x^1 - p^2x^2 - p^3x^3$

$$\langle \psi_f | S^{(1)} | \psi_i \rangle = \int \sqrt{\frac{m}{VE'}}\sqrt{\frac{m}{VE''}}\, e\, \bar{u}_f \hat{A}_\mu u_i\, e^{-i(\vec{p}'-\vec{p}'')\vec{x}}\, d^4x$$

$$= \sqrt{\frac{m}{VE'}}\sqrt{\frac{m}{VE''}}\, e \int A_\mu\, \bar{u}_f \gamma^\mu u_i\, e^{-i(\vec{p}'-\vec{p}'')\vec{x}}\, d^4x$$

Se considero un potenziale

$$A_\mu = A_\mu(q)\, e^{-i\vec{q}\vec{x}}\, d^4q$$

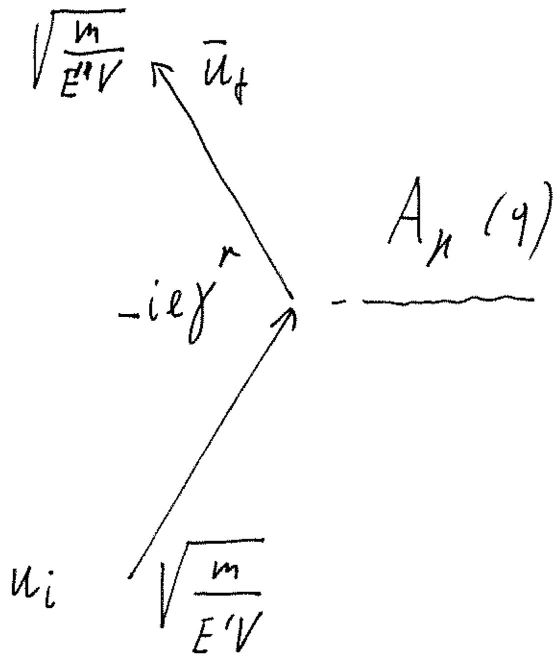
$$\langle \psi_f | S^{(1)} | \psi_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{VE'}}\sqrt{\frac{m}{VE''}}\, e \int \underbrace{\bar{u}_f \gamma^\mu u_i}_{J^\mu} A_\mu(q)$$

$$e^{-(q+\vec{p}'-\vec{p}'')\vec{x}}\, d^4x\, d^4p'\, d^4q$$

Integrando in d^4x

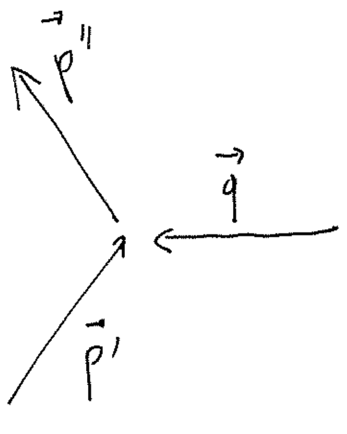
$$\langle \psi_f | S^{(1)} | \psi_i \rangle = \sqrt{\frac{m}{VE'}}\,\sqrt{\frac{m}{VE''}}\; e \int \bar{u}_f \gamma^\mu u_i A_\mu(q)$$

$$(2\pi)^4 \delta(\vec{q}+\vec{p}\,'-\vec{p}\,'')\; d^4p''\, d^4q$$



+ bilancio della quantità di moto

$\delta(\vec{q}+\vec{p}\,'-\vec{p}\,'')$



$$\delta(\vec{q}+\vec{p}\,'-\vec{p}\,'')$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{p}\,'' = \vec{q} + \vec{p}\,'$$

2) Approssimazione del secondo ordine per una particella di Dirac

L'equazione di Dirac può essere approssimata al secondo ordine dalla serie di Dayson

$$i\hat{\partial}_\mu \psi^{(2)} - m\psi^{(2)} = e\hat{A}_\mu \psi^{(1)}$$

dove $\psi^{(1)} = e\hat{A}_\mu \psi_i^{(0)}$

$$\psi_i^{(0)} = \sqrt{\frac{m}{E'V}}\, u_i\, e^{-i\vec{p}'\vec{x}}$$

La funzione $\psi^{(2)}$ si calcola con il metodo di Green.

Si cerca una soluzione dell'equazione

$$i\hat{\partial}_\mu \psi - m\psi = \delta^4(\vec{x}-\vec{y})$$

dove $\delta^4(\vec{x}-\vec{y})$ è la delta di Dirac.

Tale soluzione è detto propagatore del campo fermionico e vale

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{\hat{q}-m}{q^2-m^2}\, e^{-i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})}$$

La soluzione dell'equazione

$$i\hat{\partial}_\mu \psi^{(2)} - m\,\psi^{(2)} = e^2 \hat{A}_{\mu(x)} \hat{A}_{\mu(y)} \psi_i^{(0)}$$

sarà

$$\psi^{(2)} = e^2 \int \hat{A}_\mu(x)\, \hat{A}_\mu(y)\, G(\vec{x}-\vec{y})\, \psi_i^{(0)}\, d^4x\, d^4y$$

Scriviamo ora l'espressione al secondo ordine

$$\langle \psi_f | S^{(2)} | \psi_i \rangle =$$

$$= e^2 \int \bar{\psi}_f \frac{(\hat{q}-m)}{q^2-m^2} \gamma^\mu A_\mu(x)\, e^{-i\vec{q}x}\, e^{i\vec{q}y} \gamma^\mu A_\mu(y)\, \psi_i^{(0)}\, d^4q\, d^4x\, d^4y$$

$$= e^2 \int \bar{u}_f \sqrt{\frac{m}{E''V}}\, e^{i\vec{p}''\vec{x}} \left(\frac{\hat{q}-m}{q^2-m^2}\right) \gamma^\mu A_\mu(x)\, e^{-i\vec{q}\vec{x}}\, e^{i\vec{q}\vec{y}} \gamma^\mu A_\mu(y)$$

$$u_i \sqrt{\frac{m}{E'V}}\, e^{-i\vec{p}'y}\, d^4q\, d^4x\, d^4y\, d^4p''$$

Se si scrive poi

$$A^\mu(x) = A^\mu(q')\, e^{-i\vec{q}'\vec{x}}\, d^4q'$$

$$A^\mu(y) = A^\mu(q'')\, e^{-i\vec{q}''\vec{y}}\, d^4q''$$

$$\langle \psi_f | S^{(2)} | \psi_i \rangle =$$

$$= e^2 \int \bar{u}_f \sqrt{\frac{m}{E''V}} \left(\frac{\hat{q}-m}{q^2-m^2}\right) \gamma^\mu A_\mu(q')\, e^{-i(\vec{q}+\vec{q}'-\vec{p}'')x}$$

$$\gamma^\mu A_\mu(q'')\, e^{-i(\vec{p}'-\vec{q}+\vec{q}'')y}\; u_i \sqrt{\frac{m}{E'V}}$$

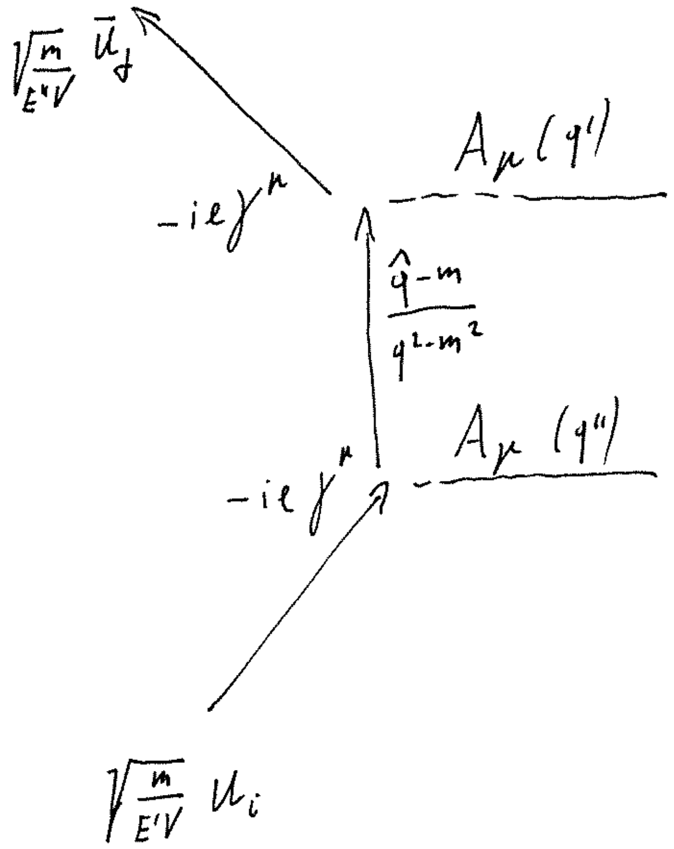
$$d^4q\, d^4x\, d^4y\, d^4p''\, d^4q'\, d^4q''$$

integrando in $d^4x\, d^4y$

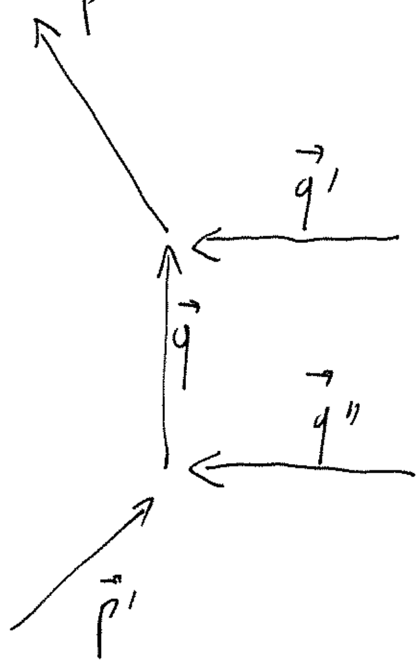
$$= e^2 \int \bar{u}_f \sqrt{\frac{m}{E''V}} \left(\frac{\hat{q}-m}{q^2-m^2}\right) \gamma^\mu A_\mu(q')\, \gamma^\mu A_\mu(q'')\, u_i \sqrt{\frac{m}{E'V}}$$

$$(2\pi)^4\, \delta(\vec{q}+\vec{q}'-\vec{p}'')\; (2\pi^4)\, \delta(\vec{p}'-\vec{q}+\vec{q}'')$$

$$d^4q\, d^4p''\, d^4q'\, d^4q''$$



$$+(2\pi)^4\,\delta(\vec{q}+\vec{q}\,'-\vec{p}\,'')$$
$$(2\pi)^4\,\delta(\vec{p}\,'-\vec{q}+\vec{q}\,'')$$
$$d^4q'\,d^4q''\,d^4q$$



$$\delta(\vec{q}+\vec{q}\,'-\vec{p}\,'')$$
$$\delta(\vec{p}\,'-\vec{q}+\vec{q}\,'')$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{p}\,''=\vec{q}\,'+\vec{q}$$
$$\vec{q}=\vec{p}\,'+\vec{q}\,''$$

Le due delte di Dirac rappresentano il bilancio delle quantità di moto ai due nodi_