Serie di Taylor

Serie di Taylor con resto di Peano

(1)

Sia $f(x)$ una funzione continua e

n volte derivabile in un intorno $I(x_0 = 0)$

Allora la funzione può essere approssimata

in quest'intorno con una serie di potenze $P(x)$ a

meno di un errore.

Il valore $f(x) - P(x)$ che è l'errore che

si commette nella approssimazione è detto

resto di Peano $R(x)$.

Considero la serie di potenze

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \_\_\_ a_n x^n$$

voglio calcolare i coefficienti in modo che la serie di potenze approssimi la funzione data.

Vediamo le derivate della serie di potenze

$$\frac{d}{dx} P_n(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \_\_\_ + n a_n x^{n-1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} P_n(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3 x + \_\_\_ + n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} P_n(x) = 2 \cdot 3 a_3 + \_\_\_ + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}$$

Vediamo quanto vale la serie di potenze nel punto $x = 0$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dx} P_n(x) &= a_1 \\
\frac{d^2}{dx^2} P_n(x) &= 2\, a_2 \\
\frac{d^3}{dx^3} P_n(x) &= 2 \cdot 3 \cdot a_3 \\
&\vdots \\
\frac{d^n}{dx^n} P_n(x) &= n!\, a_n
\end{aligned}\right\} \quad \boxed{\text{per } x = 0}$$

Condizioni per approssimare la funzione con ~~la~~ le serie di potenze

(4)

<u>1ª Condizione</u>

$$P_n(0) = f(0) \Rightarrow a_0 = f(0)$$

<u>Condizioni successive</u>

$$P'_n(0) = f'(0) \Rightarrow a_1 = f'(0)$$

$$P''_n(0) = f''(0) \Rightarrow 2!\, a_2 = f''(0) \Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$P'''_n(0) = f'''(0) \Rightarrow 3!\, a_3 = f'''(0) \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

$\vdots$

$$P^{K}_n(0) = f^{(n)}(0) \Rightarrow K!\, a_K = f^{(n)}(0) \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

In definitiva

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

In generale se la funzione è definita

in un intorno di $x_0 \neq 0$

otteniamo

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

basta traslare le serie di x_0

Resto di Peano

Possiamo scrivere

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

$\hookrightarrow$ resto di Peano

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - P_n(x)}{x^n} = \frac{0}{0}$$

Applichiamo ripetutamente l' Hopital per uscire dalla forma indeterminata [illegible]

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

$$\frac{d^{(2)}}{dx} x^n = n(n-1) x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{(n)}}{dx} x^n = n(n-1) \cdots (n-(n-1)) x^0 = n!$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0) - n!\, a_n}{n!} =$$

$$= \frac{f^{(n)}(0) - n!\, f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0) - f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

Poichè il limite fa 0

$$R(x) = o\left[(x-0)^n\right]$$

in generale

$$R(x) = o\left[(x-x_0)^n\right]$$

Resto di Lagrange

Considero

$$f(x) - P_n^*(x) = R(x) \quad \text{con } x \in I \ (x_0 = 0)$$

applico ripetutamente Cauchy tra x e $x_0 = 0$ alle funzioni $R(x)$ e x

$$\frac{R(x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{R(0)}}}{(x-0)^{n+1} - (0-0)^{n+1}}$$

$\exists \ c_1 \in I(x_0 = 0)$ t.c.

$$\frac{R'(c_1)}{(n+1)\, c_1^{\,n}} = \frac{R'(c_1) - R'(0)}{(n+1)\left[(c_1-0)^n - (0-0)^n\right]} =$$

$$\frac{R''(c_2)}{(n+1)\, n\, c_2^{\,n-1}} \quad \text{con } c_2 \in I(x_0 = 0)$$

continuando

$$\frac{R'''(c_3)}{(n+1)n(n-1)c_3^{n-2}} \quad \text{con } c_3 \in I_{(x_0)}$$

Consideriamo le derivate $(n+1)$ esime

vediamo come varia il grado delle derivate

con il termine $(n+1)n(n-1)$

$D_3 \Rightarrow (n+1)n(n-1)$

$D_4 \Rightarrow (n+1)n(n-1)(n-2)$

$D_n \Rightarrow (n+1)n(n-1)(n-(n-2)) = n!$

$\Rightarrow$

D	termini
$3 \rightarrow$	$1 = 3-2$
$4 \rightarrow$	$2 = 4-2$
$5 \rightarrow$	$3 = 5-2$
$\vdots$	
$n \rightarrow$	$n \cdot 2$

$$\frac{R^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!\,c_{n+1}^0} = \frac{R^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

$$\text{con } c_{n+1} \in I_{(x_0=0)}$$

(3)

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{R^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1}) - P^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

$\cancel{P^{(n+1)}}$ $\quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k$

La derivata $P^{(n+1)}(x) = 0$ ~~perché presenze~~

~~delle~~ $\cancel{f^{(k)}(0) = 0 \ \forall k}$ essendo un polinomio di grado n

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

$$R_{LAGRANGE} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} X^{n+1}$$

con $c_{n+1} \in I(x_0 = 0)$

Sviluppo in serie di Taylor delle funzioni elementari

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \forall x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \forall x$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad |x| < 1$$

$2n+1$

$$(1+x)^K = 1 + Kx + \frac{K(K-1)}{2} x^2 + \frac{K(K-1)(K-2)}{6} x^3 + \dots + \binom{K}{n} x^n$$

$$\binom{K}{n} = \frac{K(K-1)(K-2)\cdots(K-n+1)}{n!} \qquad |x| < 1$$