Integrazione concetti matematici e modelli fisici

Esercitazione

Lo scopo di questa esercitazione è di studiare alcune funzioni elementari e memorizzare il loro andamento ed il passaggio per alcuni punti notevoli.

Di seguito si associano queste funzioni ad alcuni fenomeni fisici cercando di integrare matematica - fisica come richiesto dalla II prova di maturità.

Studio funzione $\boxed{y = x^{\alpha}}$ $\alpha \in \mathbb{Q}$ $\alpha = \frac{m}{n}$

1) $\alpha > 1$ potenze pari e dispari $\alpha \in \mathbb{N}$ numeri naturali

α pari $= x^2;\ x^4;\ x^6 \ldots$

α dispari $= x^3;\ x^5;\ x^7 \ldots$

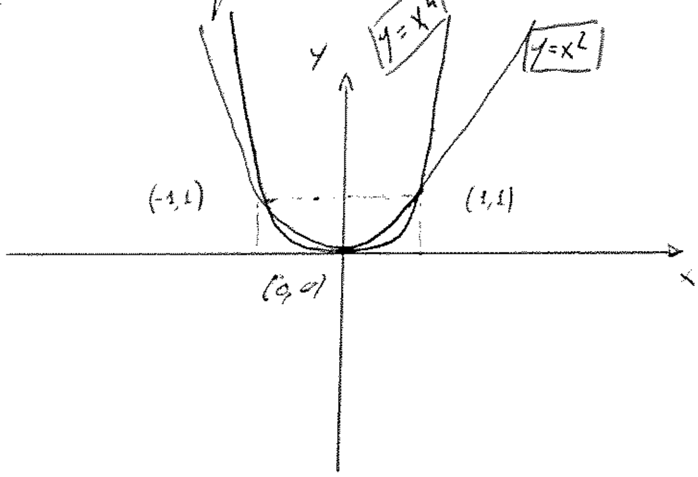
→ le potenze x^{α} con α pari sono funzioni pari cioè simmetriche rispetto all'asse y valendo la relazione $y(x) = y(-x)$

→ passano per i punti $A \equiv (0,0)$; $B \equiv (1,1)$; $C \equiv (-1,1)$

→ hanno nello $\emptyset$ tangente orizzontale

→ hanno una concavità positiva (∪ .

→ al crescere dell'esponente tendono più velocemente a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$



→ le potenze x^α con α dispari sono funzioni dispari valendo la relazione $y(x) = y(-x)$

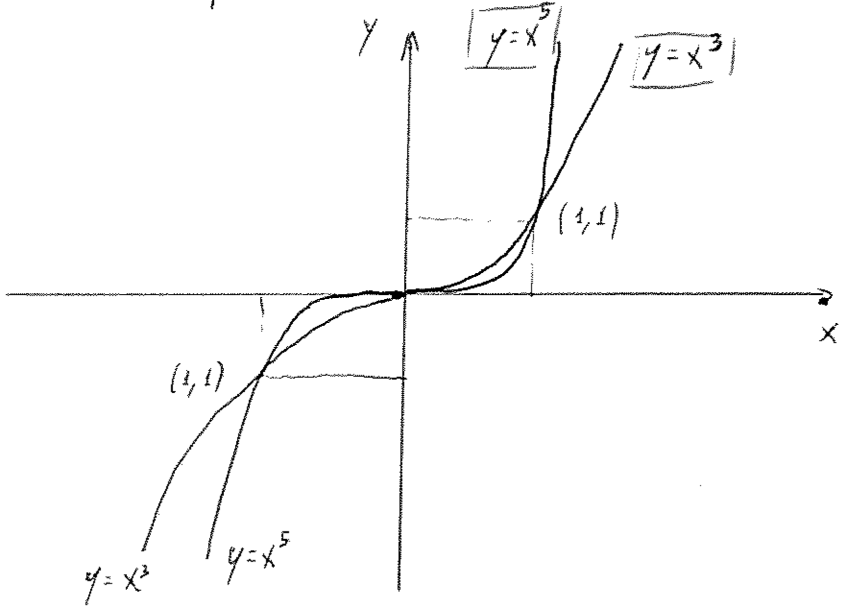
Il grafico si ottiene per $x<0$ specchiando il grafico ottenuto per $x>0$ prima rispetto all'asse y e poi rispetto all'asse x

→ passano per i punti $A \equiv (1,1)$; $B(-1,-1)$; $C \equiv (0,0)$

→ hanno nello ϕ tangente orizzontale

→ hanno concavità positiva nel I quadrante e negativa nel III quadrante con flesso nello ϕ.

→ al crescere dell'esponente tendono più velocemente a $\pm\infty$ per x che tende a $\pm\infty$.



2) funzioni $x^{\frac{1}{n}}$

$n \in \mathbb{N}$ numeri naturali

$\alpha = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \ldots$

$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

funzioni tipo $\sqrt{x}; \sqrt[3]{x}; \sqrt[4]{x} \ldots$

→ Per n pari le funzioni sono definite sol per valori positivi dell'asse x. Poiché ad esempio non è definita la $\sqrt[2]{-5}$ non esistendo un numero negativo il cui quadrato dà un numero negativo.

→ Per n dispari le funzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$ e sono funzioni dispari.

sia n pari che dispari

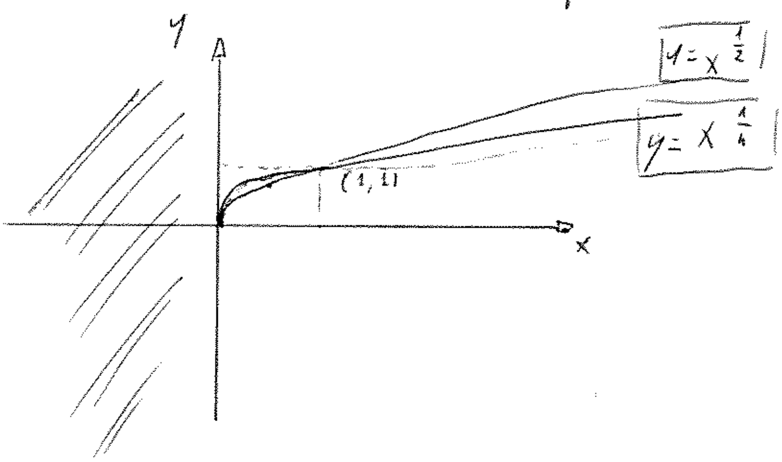
→ passano per i punti $A \equiv (0,0)$; $B \equiv (1,1)$

Per n dispari passano anche per $C \equiv (-1,-1)$

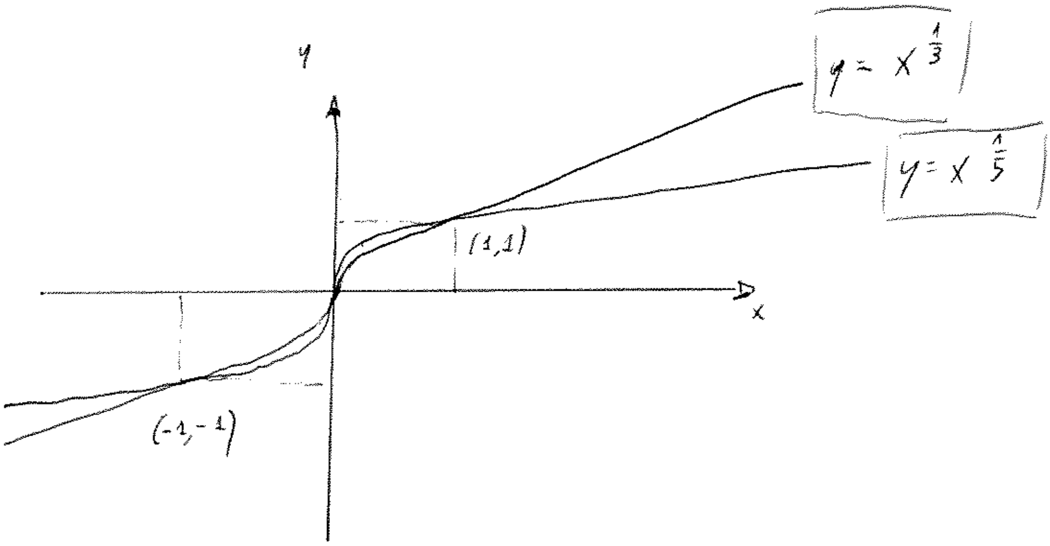
→ hanno nello ϕ tangente verticale (asse y)

→ hanno concavità negativa.

→ al crescere dell'esponente tendono più velocemente a $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$



n pari
$y = x^{\frac{1}{n}}$



3) Caso particolare x^{α} $\boxed{\alpha = 1}$

ho la bisettrice I III quadrante data dalla retta $y = x$

4) $y = x^{\alpha} = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ $\alpha \in \mathbb{Q}$ = numeri razionali

$\alpha = \dfrac{m}{n}$ $\quad y = x^{\frac{3}{4}}; x^{\frac{4}{5}}; x^{\frac{7}{3}} \ldots$

$= \sqrt[4]{x^3}; \sqrt[5]{x^4}; \sqrt[3]{x^7}$

→ Semplificare sempre il rapporto $\frac{m}{n}$ in modo che m non sia divisibile per n.

→ Per il campo di esistenza verificare se la radice $\sqrt[n]{\ }$ è pari o dispari.
Se n è dispari la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$
Se n è pari è definita solo per x positivo

→ Verificare poi l'esponente della x
x^m. Se m è pari l'intera funzione è pari; se m è dispari l'intera funzione è dispari.

→ Verificare il rapporto $y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{x^n}$ $\frac{m}{n}$

$\boxed{\text{Se } \frac{m}{n} > 1}$ l'andamento della funzione

$y = x^{\frac{m}{n}}$ è quello visto per le potenze

(pari o dispari a seconda che n sia pari o dispari; definita su $\mathbb{R}$ o su $x > 0$ a seconda che m sia dispari o pari)

$\boxed{\text{Se } 0 < \frac{m}{n} < 1}$ l'andamento della funzione

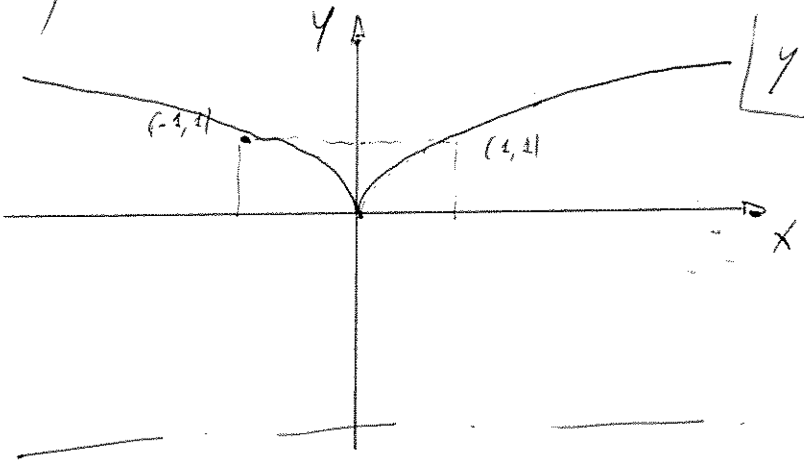
$y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{x^n}$ è quello visto per la funzione $x^{\frac{1}{n}}$.

(pari o dispari a seconda che n sia pari o dispari; definita su $\mathbb{R}$ o su $x > 0$ a seconda che m sia dispari o pari)

Esempio

$$\boxed{y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}}$$

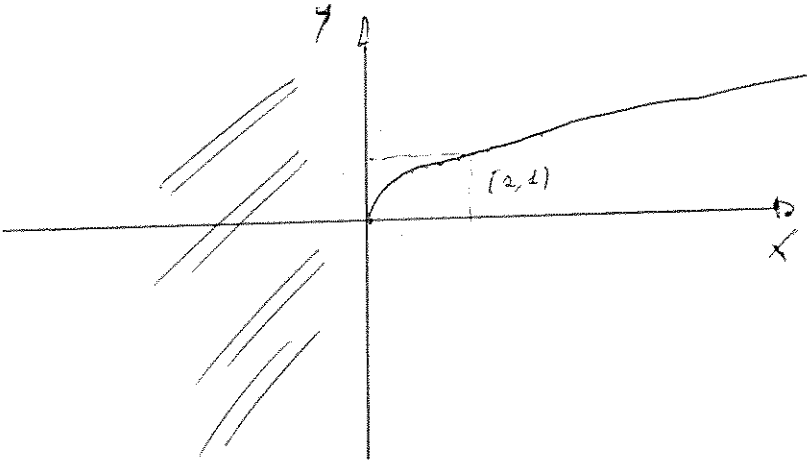
1) la funzione è pari
2) la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$
1) $0 < \alpha < 1$ si comporta come le funzioni tipo $y = x^{\frac{1}{4}}$



$$\boxed{y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}}$$

$$\boxed{y = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}}$$

1) la funzione è definita solo su $x \geq 0$
2) $0 < \alpha < 1$ si comporta come le funzioni tipo $y = x^{\frac{1}{4}}$



$$\boxed{y = \sqrt[4]{x^3}}$$

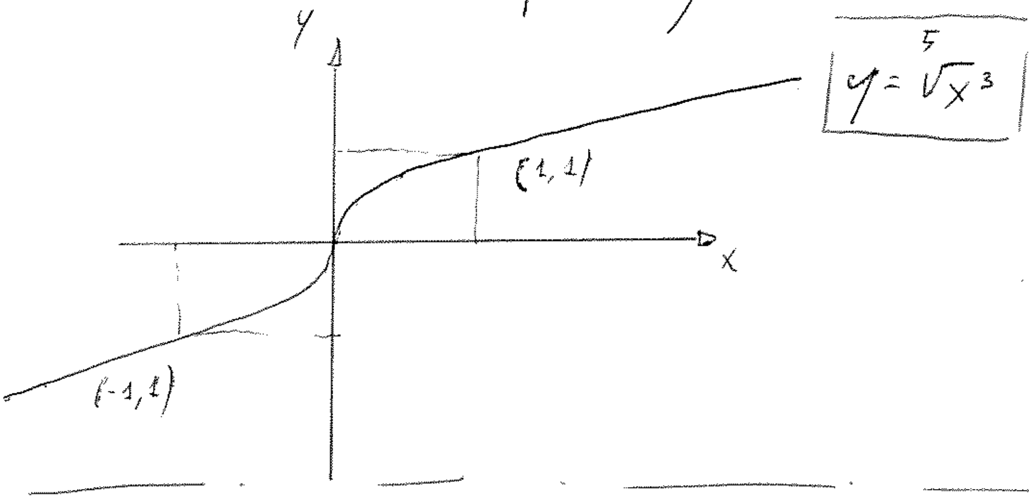
$\boxed{y = x^{\frac{3}{5}}}$ $\qquad y = \sqrt[5]{x^3}$

1) la funzione è dispari

2) la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$

3) $0 < \alpha < 1$ si comporta come la funzione

tipo $y = x^{\frac{1}{n}}$



$\boxed{y = x^{\frac{2}{5}}}$ $\qquad y = \sqrt[5]{x^2}$

1) la funzione è pari.

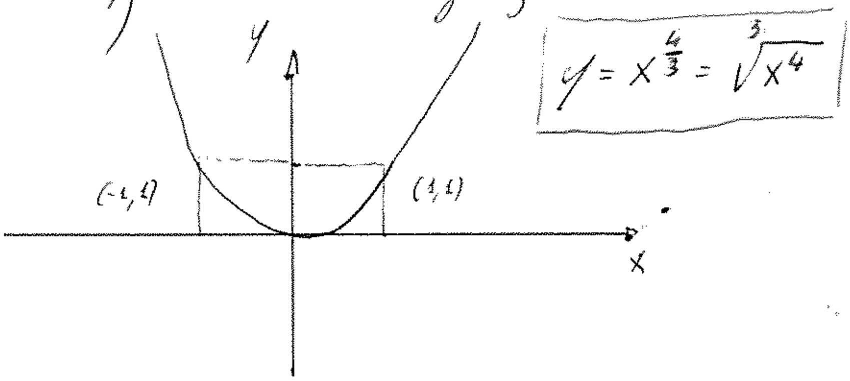
2) la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$

3) $0 < \alpha < 1$ si comporta come la funzione

tipo $y = x^{\frac{1}{n}}$

$$\boxed{y = x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4}}$$

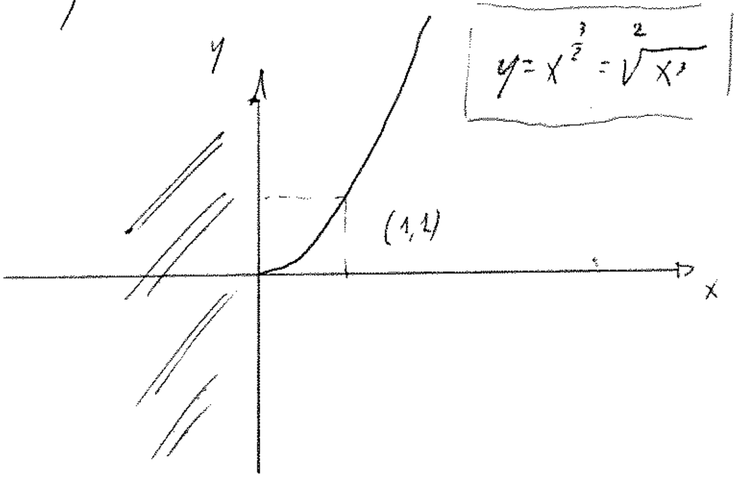
1) la funzione è pari
2) la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$
3) $\alpha > 1$ la funzione si comporta come le funzioni tipo $y = x^n$



$$\boxed{y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3}}$$

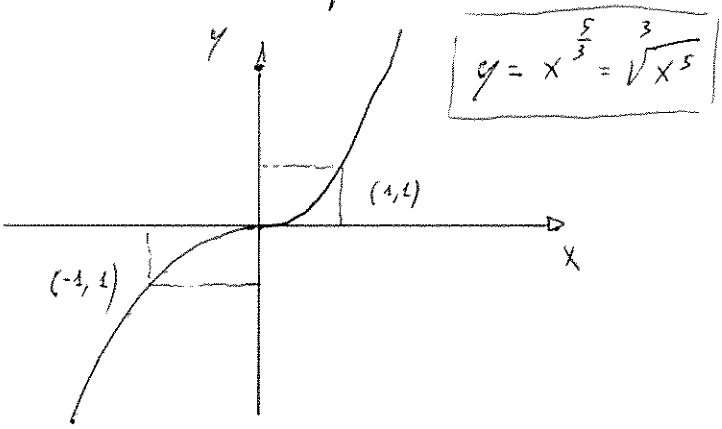
1) la funzione è definita solo per $x \geq 0$

2) $\alpha > 1$ si comporta come le funzioni tipo $y = x^n$



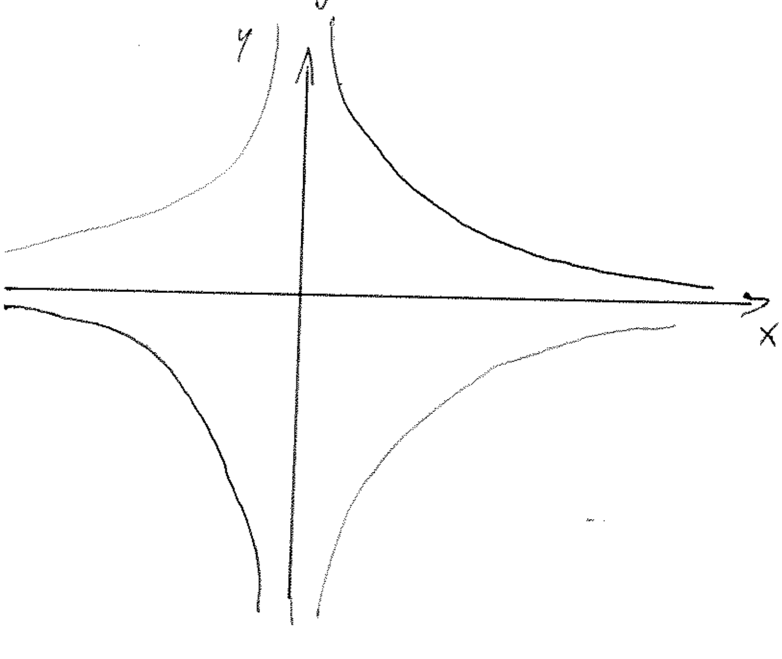
$$\boxed{y = x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^5}}$$

1) la funzione è dispari
2) la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$
3) $\alpha > 1$ si comporta come le funzioni tipo $y = x^n$



Funzioni tipo $x^{-\frac{m}{n}}$

Le funzioni di questo tipo hanno un andamento descritto in figura valendo la relazione $x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{2}}}$



Per vedere quale quadrante occupa la funzione fare riferimento a $x^{\frac{m}{n}}$

Funzioni logaritmiche

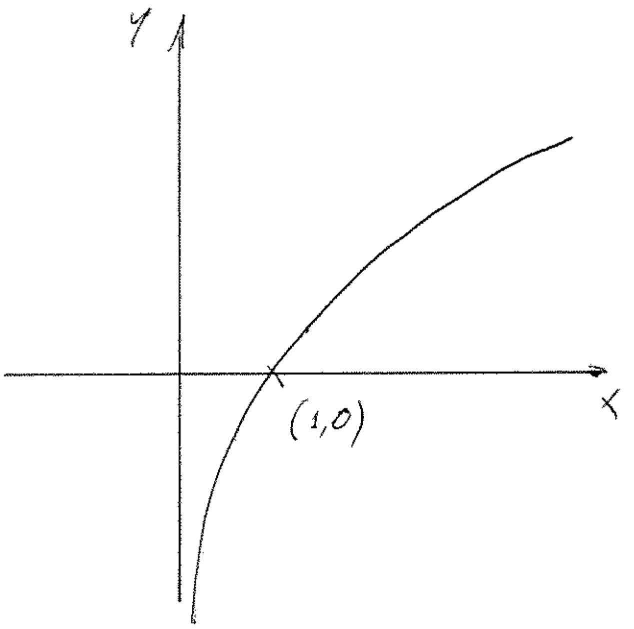
Le funzioni logaritmiche del tipo

$y = \log_a x$ sono definite solo per $x > 0$.

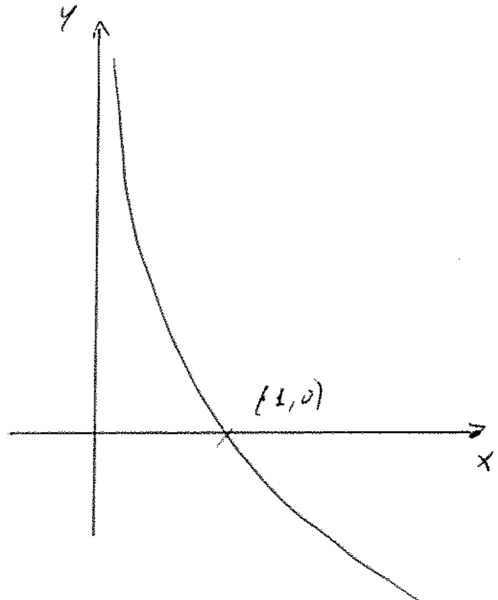
Passano per il punto $A \equiv (1, 0)$.

Tendono all'infinito meno velocemente di qualsiasi funzione tipo $y = x^\alpha$ $\alpha > 0$.

$$\begin{cases} y = \log_a x \\ \text{con } a > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = \log_e x \\ \text{con } 0 < a < 1 \end{cases}$$



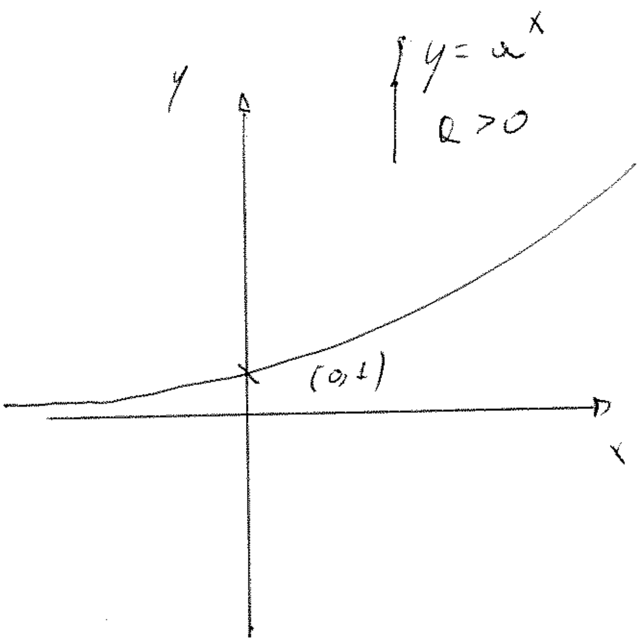
Funzioni esponenziali

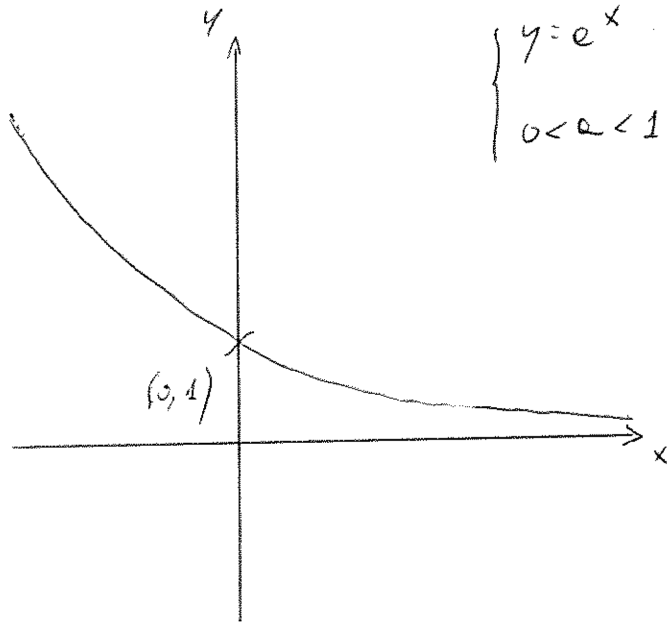
Le funzioni del tipo $y = a^x$ sono dette funzioni esponenziali.

Sono definite in tutto $\mathbb{R}$

Passano per il punto $A \equiv (0, 1)$

Tendono all'infinito più velocemente di qualsiasi funzione $y = x^\alpha$ con $\alpha > 0$.

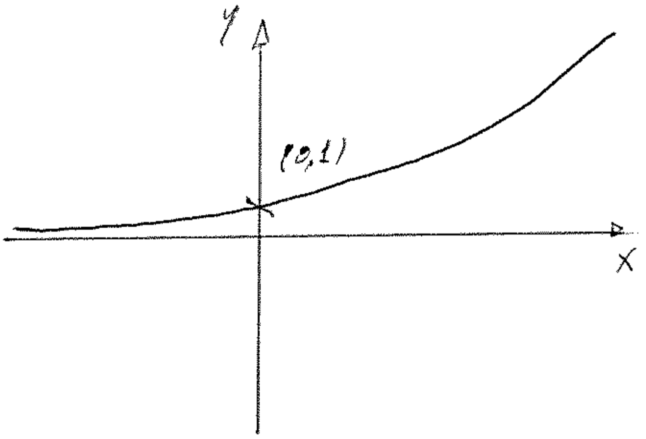




Decrescita e crescita esponenziale

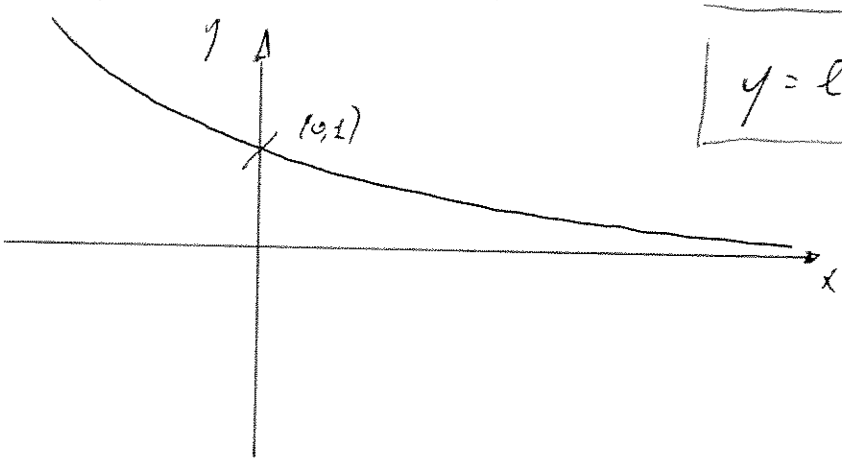
1) $\boxed{y = e^{+x}}$ $\boxed{y = e^{x}}$

funzione esponenziale



2) $\boxed{y = e^{-x}}$

Si ottiene dalla precedente specchiando la funzione rispetto all'asse y

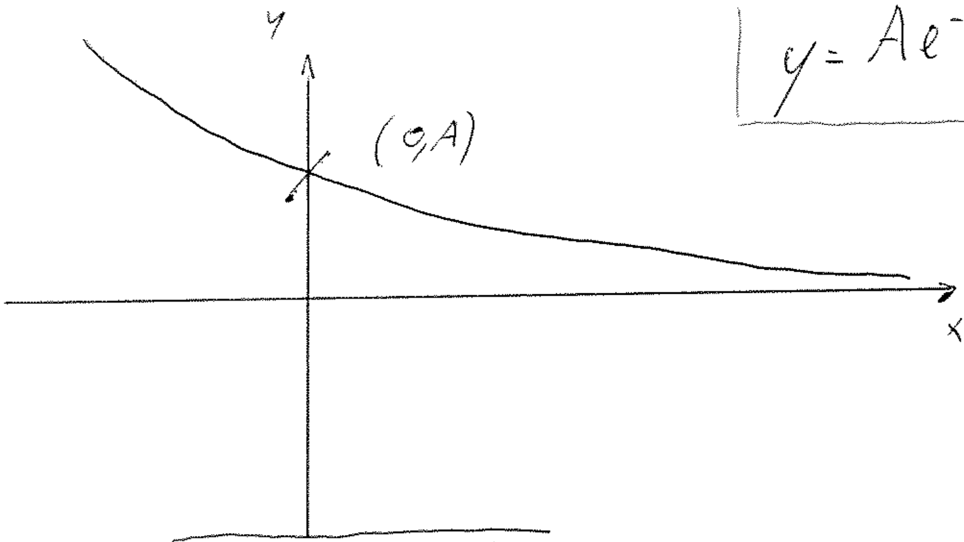


$\boxed{y = e^{-x}}$

3) $\boxed{y = A e^{-x}}$

Si ottiene dalla precedente facendola passare per il punto $C \equiv (0, A)$ anziché $(0, 1)$

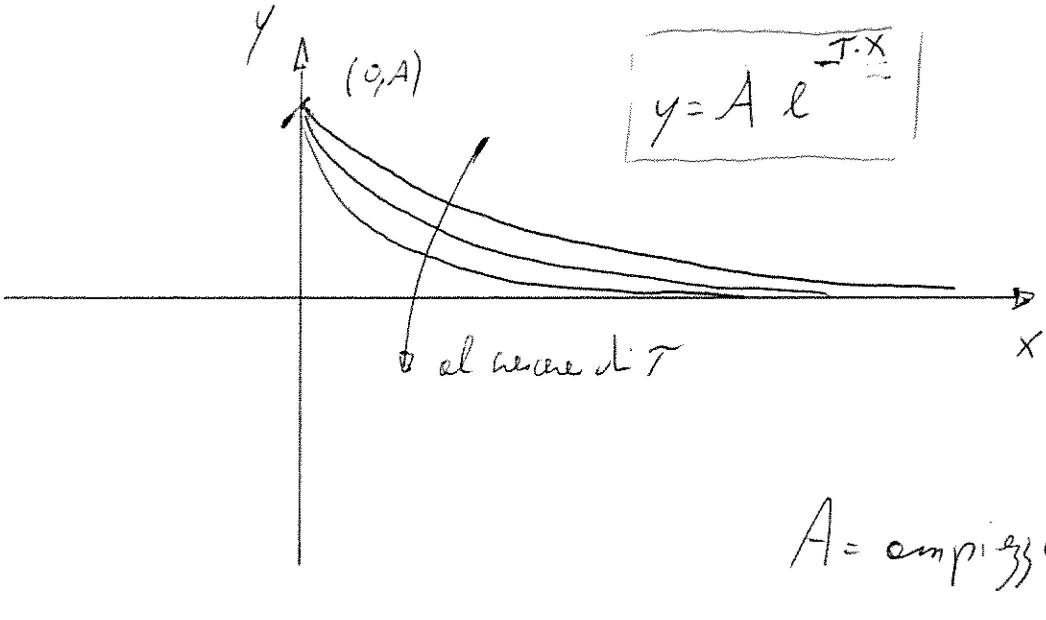
A = Ampiezza della funzione



$\boxed{y = A e^{-x}}$

4) $\boxed{y = A e^{-T \cdot x}}$

Decrescita esponenziale
considero il tratto $x \geq 0$



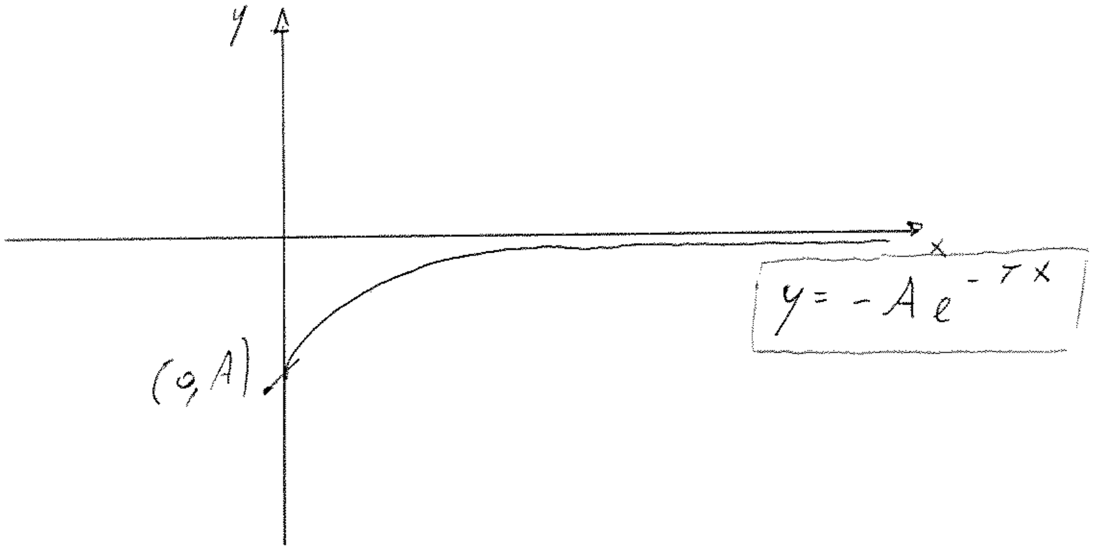
$\boxed{y = A e^{-T \cdot x}}$

A = ampiezza

T = costante di smorzamento

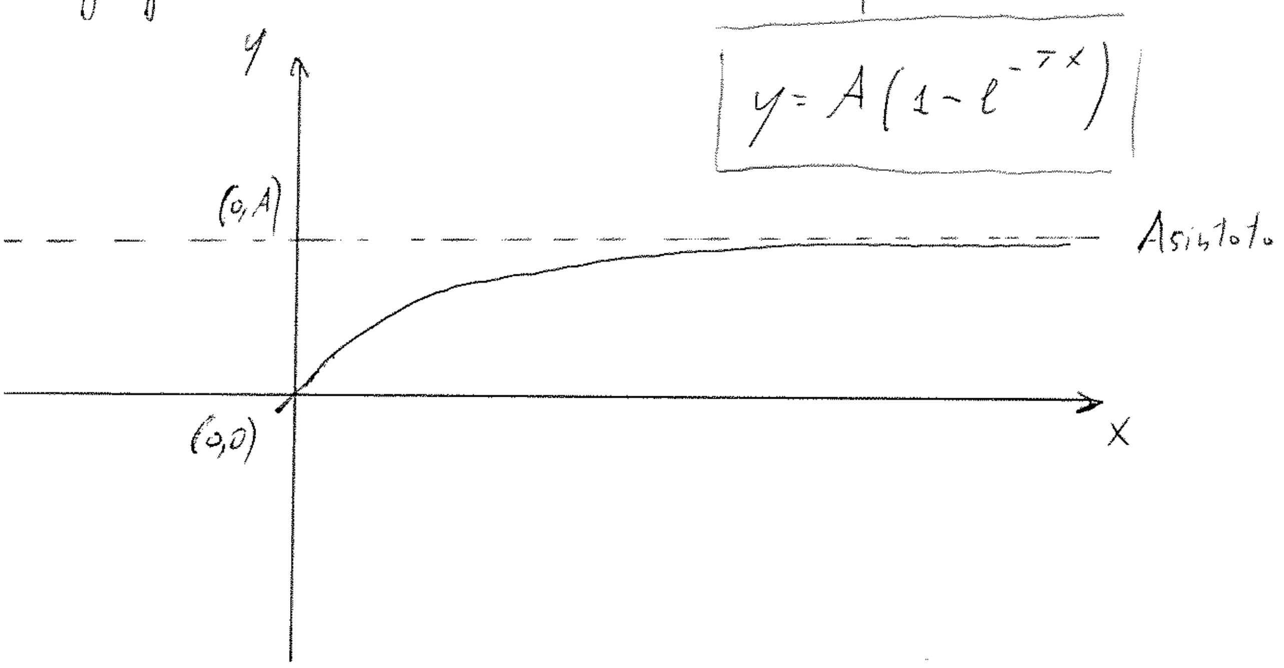
5) $\boxed{y = -A e^{-\tau x}}$

Si ottiene dal grafico precedente specchiando rispetto all'asse x



6) $\boxed{y = A\left(1 - e^{-\tau x}\right)}$

Si ottiene dal grafico precedente traslando il grafico verso l'alto di una quantità A.



Equazioni algebriche ed equazioni differenziali

Un' equazione algebrica è un' espressione numerica in una variabile x le cui soluzioni sono i valori numerici di x che soddisfano l' espressione suddetta.

Es $ax^3 + bx^2 + cx = 0$
è un' equazione algebrica di III grado

Un' equazione differenziale è un' espressione in cui al posto di incognite numeriche ci sono funzioni e derivate di funzioni. Risolvere un' equazione differenziale significa trovare una funzione $y = f(x)$ tale che soddisfa l' espressione suddetta.

Es $a \dfrac{d^2y}{dx^2} + b \dfrac{dy}{dx} + c = 0$
È un' equazione differenziale lineare del II grado a coefficienti costanti

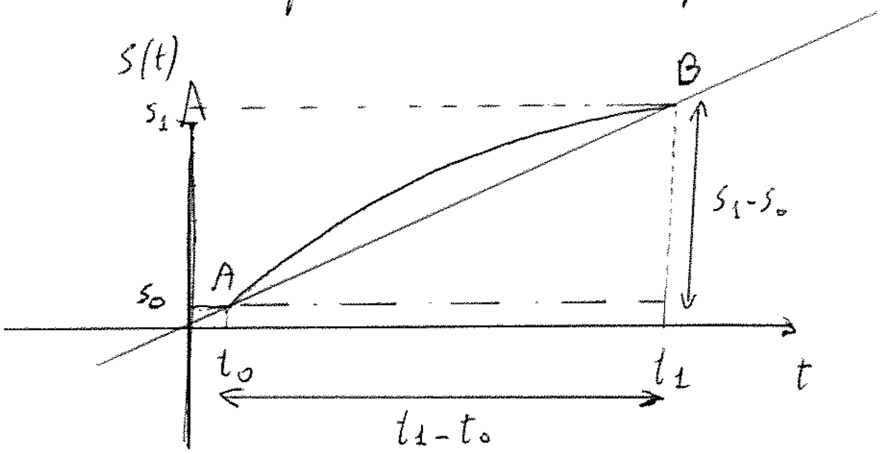
Interpretazione fisica di derivate e integrali

Di seguito utilizziamo la seguente notazione

$s(t)$ = funzione dello spostamento (lungo una direzione) di un corpo rispetto al tempo

$v(t)$ = funzione della velocità (lungo una direzione) di un corpo rispetto al tempo

$a(t)$: accelerazione (lungo una direzione) di un corpo rispetto al tempo.



$$\boxed{\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) \\ s(t) &= s_0 + v_m (t - t_0) \end{aligned}}$$

Grafico $s(t)$ di un corpo che al tempo t_0 si trova nella posizione s_0 e al tempo t_1 nella posizione s_1.

Si definisce velocità media del corpo per portarsi da s_0 a s_1 il valore

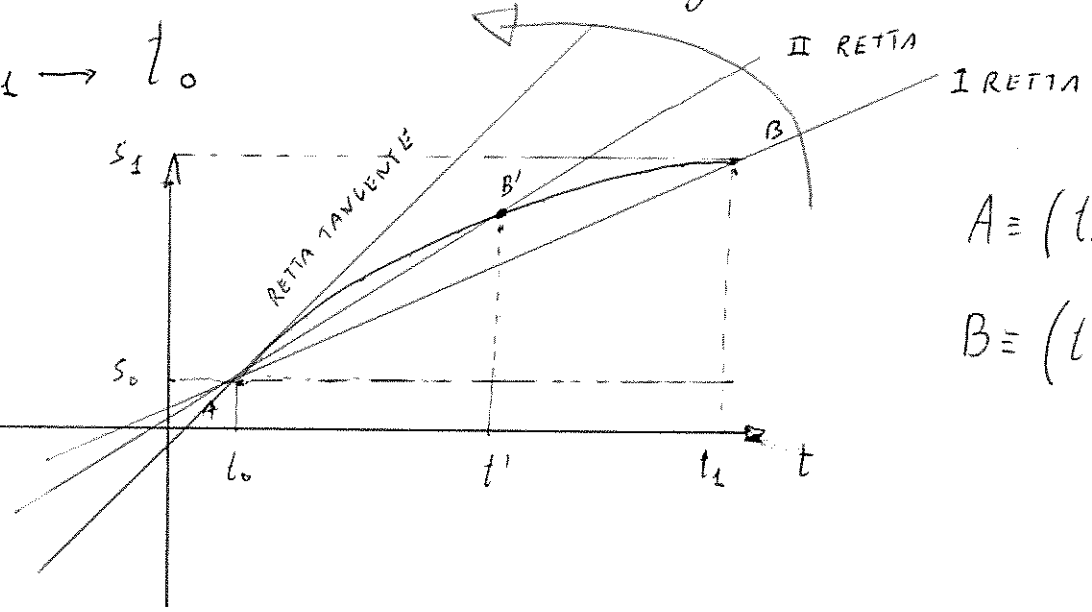
$$v_m = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$$

La velocità media rappresenta il rapporto incrementale della funzione $s(t)$ tra i punti s_1 e s_0.

La velocità media rappresenta il coefficiente angolare della retta secante alla curva passante per i punti $A \equiv (t_0, s_0)$ $B \equiv (t_1, s_1)$

Passiamo ora al limite facendo tendere

$t_1 \to t_0$



$A \equiv (t_0, s_0)$

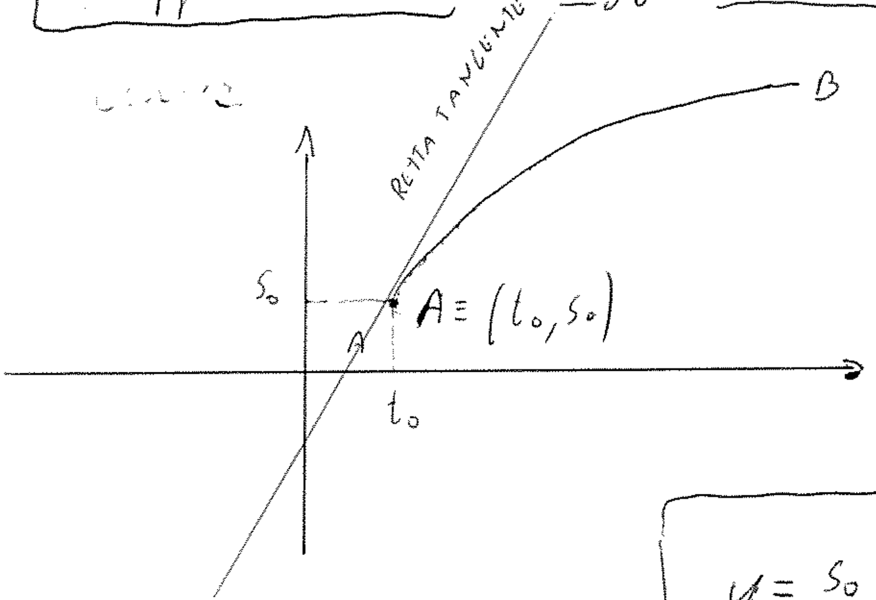
$B \equiv (t_1, s_1)$

Sull'asse temporale passo da t_1 a t' individuo sulla curva il punto $B' = s(t')$ e traccio la II retta.

Così via finché t' non coincide con t_0 e la retta secante diventa tangente alla curva $s(t)$ nel punto t_0.

La velocità istantanea all'istante t_0 rappresenta il limite del rapporto incrementale $\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = v_M$ quando $t_1 \to t_0$. Cioè la derivata di $s(t)$ calcolata in t_0.

La velocità istantanea all'istante t_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $s(t)$ e passante per $A \equiv (t_0, s_0)$



$$y = s_0 + \left.\frac{d\,s(t)}{dt}\right|_{t_0} (t - t_0)$$

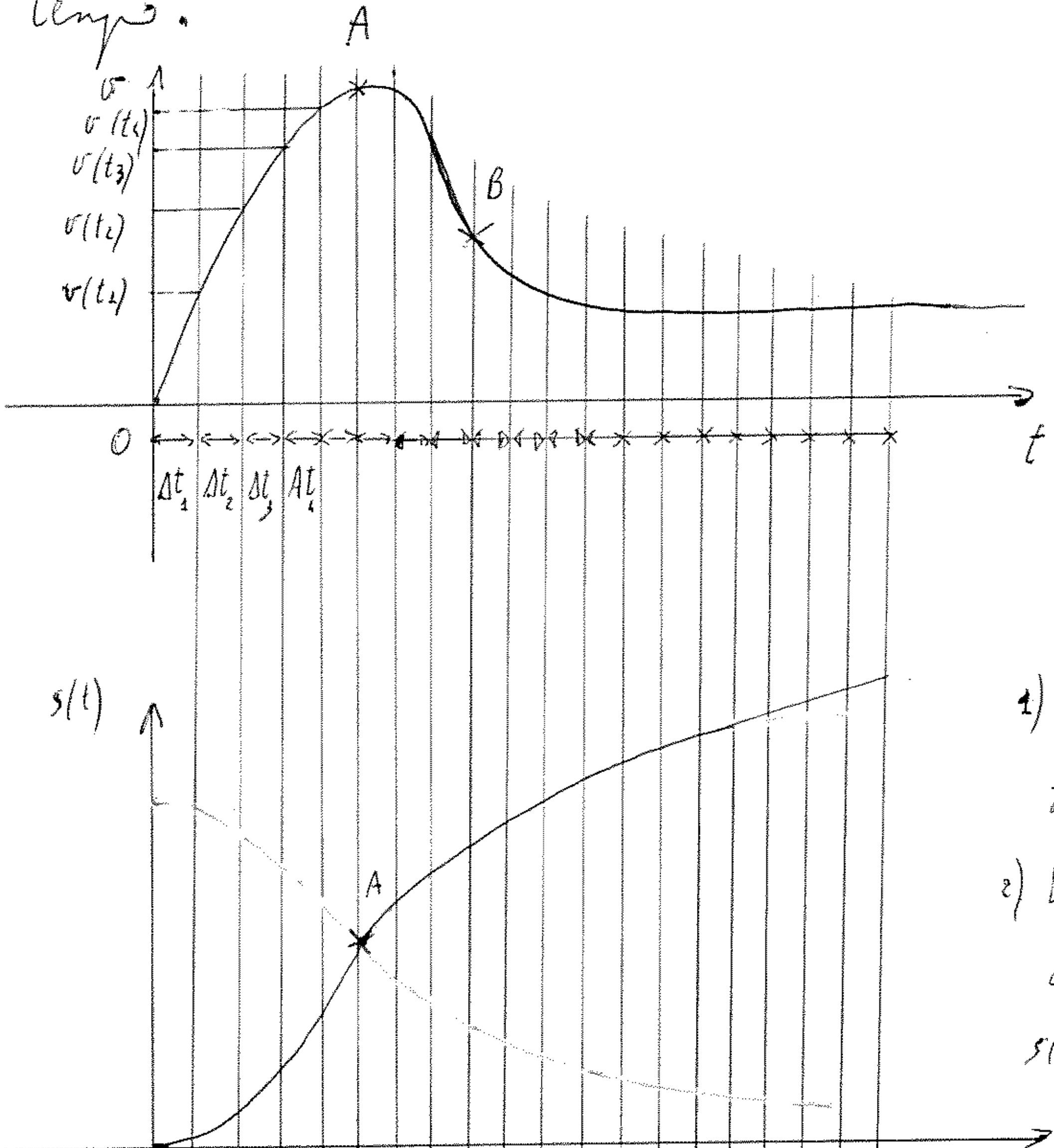
equazione della retta tangente alla curva $s(t)$ nel punto $A \equiv (t_0, s_0)$

Abbiamo indicato con $\left.\frac{d\,s(t)}{dt}\right|_{t_0}$ la derivata della funzione $s(t)$ calcolata nel punto t_0.

$$\left.\frac{d\,s(t)}{dt}\right|_{t_0} = \dot{s}(t_0) = \text{velocità istantanea al tempo } t_0$$

Interpretazione fisica di integrale

Consideriamo di seguito una funzione $v = v(t)$ che rappresenta l'andamento della velocità istantanea di un corpo (lungo una direzione) in funzione del tempo.



ASPETTO QUALITATIVO

1) Poiché $v(t) > 0$ $\frac{ds}{dt} > 0$ e la funzione $s(t)$ è crescente

2) Da O a A $\frac{ds}{dt} = v$ è crescente quindi $s(t)$ ha concavità positiva

3) Da A a $+\infty$ $\frac{ds}{dt} = v$ è decrescente quindi $s(t)$ ha concavità negativa.

4) Poiché $\frac{ds}{dt}$ tende ad un asintoto orizzontale $= K$ la funzione $s(t)$ all'∞ tende ad essere tangente ad una retta

Dall'.

Vogliamo ora passare dalla funzione $v = v(t)$ alla funzione che descrive lo spostamento del corpo $s = s(t)$.

Un modo per farlo è suddividere gli intervalli di tempo in segmenti uguali che indichiamo con Δt_i. Ad ogni segmento Δt_i si fa corrispondere una velocità $v(t_i)$ definita dal grafico in corrispondenza del segmento Δt_i.

Allora $s(t) = \sum_i v(t_i)\, \Delta t_i$ è una prima approssimazione che tende al valore esatto al limite di Δt segmenti tendenti a 0.

$s(t) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v(t_i)\, \Delta t_i$ rappresenta l'integrale della funzione $v(t)$ rispetto al tempo.

Si scrive anche

$$s(t) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_i v(t_i)\,\Delta t_i = \int_{t=t_0}^{t} v(t)\,dt$$

La funzione dello spostamento di un corpo (in una direzione) rappresenta l'integrale della velocità nel tempo.

La funzione dello spostamento di un corpo (in una direzione) rappresenta l'area sottesa dalla curva della velocità istantanea in funzione del tempo

Il teorema fondamentale del calcolo integrale afferma che l'integrale è la funzione inversa della derivata.

$$\int_{t=t_0}^{t} \frac{d\,f(t)}{dt}\,dt = f(t) - f(t_0)$$

Possiamo in definitiva scrivere le seguenti relazioni:

$$v(t) = \frac{d\,s(t)}{dt} = \dot{s}(t)$$

$$a(t) = \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = \ddot{s}(t)$$

$$s(t) = \int_{t=t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$v(t) = \int_{t=t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$\begin{tikzcd} s(t) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dt}"] & v(t) \arrow[l, bend left, "\int dt"] \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dt}"] & a(t) \arrow[l, bend left, "\int dt"] \end{tikzcd}$$

Caduta di un grave nel vuoto

Alla fine del '600 con la pubblicazione dei "Principia" Newton fornì uno strumento indispensabile per studiare matematicamente il moto dei corpi utilizzando come strumento il calcolo differenziale da lui stesso ideato e perfezionato.

Vediamo quali sono i passi per poter descrivere matematicamente la legge che descrive la caduta di un grave nel vuoto.

I passi seguenti devono essere utilizzati per studiare anche altri differenti fenomeni fisici.

1) Individuare la legge che descrive il fenomeno in oggetto

Nel nostro caso la I legge di Newton che si può riassumere nella formula $F = ma$

La I legge di Newton dice che un corpo permane nel suo stato di quiete o di moto uniforme finché non agisce una forza F su di esso.

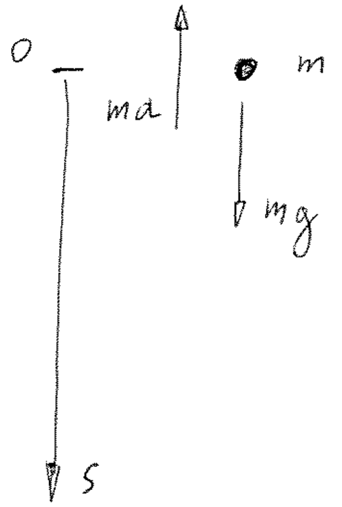
L'inerzia del corpo ad abbandonare lo stato di quiete o di moto uniforme sotto l'azione di una forza è detta massa inerziale ed è indicata con m_i. Pertanto vale $F - m_i a = 0$

2) Individuare la grandezza che spinge il fenomeno ad attuarsi. In questo caso F nel nostro caso la forza peso.

La forza peso $F = mg$ è un'approssimazione della forza gravitazionale valutata sulla superficie terrestre.

La m della formula è detta massa gravitazionale. Sperimentalmente si verifica che la massa gravitazionale coincide con la massa inerziale che indichiamo entrambe con m.

3) Individuare un asse orientato e disegnare le componenti dell'equazione in modo da



individuare mediante il loro verso il segno che avranno nell'equazione stessa.

La forza peso mg favorisce il moto.
La forza d'inerzia ma lo ostacola.

4) Scrivere l'equazione differenziale

$$\cancel{m}g - \cancel{m}a = 0$$

5) Risolvere l'equazione differenziale con le condizioni iniziali.

L'equazione ci dice che il corpo cade con un'accelerazione costante $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$ sulla terra.

Ricordi:

Per calcolare $s = s(t)$ ricordiamo che

$$g = a = \frac{dv}{dt}$$

integrando

$$\int_{t=t_0}^{t} g \, dt = \int_{t=t_0}^{t} \frac{dv}{dt} \, dt$$

portando g = costante fuori dal segno dell'integrale

e ricordando che l'integrale è la funzione inversa della derivata

$$g \int_{t=t_0}^{t} dt = v(t) - v(t_0)$$

$$g\,(t - t_0) = v(t) - v(t_0)$$

da cui $\quad v(t) = g\,(t - t_0) + v(t_0)$

ricordando che $v(t) = \frac{d\,s(t)}{dt}$

$$\frac{d\,s(t)}{dt} = g\,(t-t_0) + v(t_0)$$

integrando

$$\int_{t=t_0}^{t} \frac{d\,s(t)}{dt}\,dt = \int_{t=t_0}^{t} g\,(t-t_0)\,dt + \int_{t=t_0}^{t} v(t_0)\,dt$$

$$s(t) - s(t_0) = g \int_{t=t_0}^{t} (t-t_0)\,d(t-t_0) + \int_{t=t_0}^{t} v(t_0)\,dt$$

$$s(t) - s(t_0) = g\,\frac{(t-t_0)^2}{2} + v(t_0)(t-t_0)$$

$$\boxed{s(t) = s(t_0) + v(t_0)(t-t_0) + \frac{g}{2}(t-t_0)^2}$$

Nel caso particolare $t_0 = 0$ e $v(t_0) = 0$ cioè il grave cade con velocità iniziale al tempo ϕ nulla -

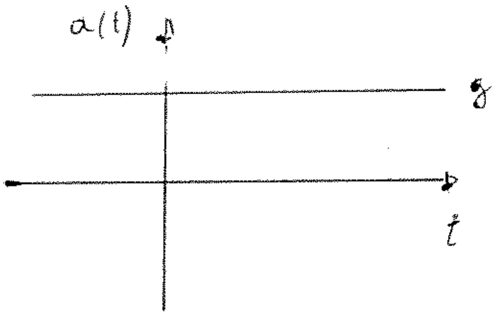
$$s(t) = s(t_0) + \frac{1}{2} g t^2$$

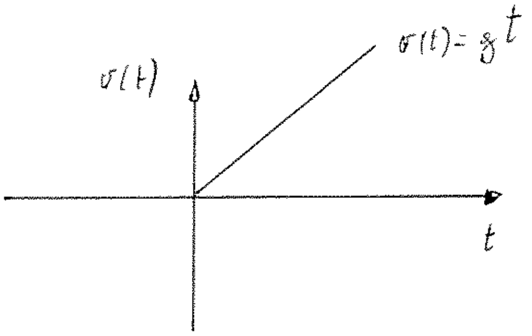
Se l'origine degli assi è tale che $s(t_0) = 0$

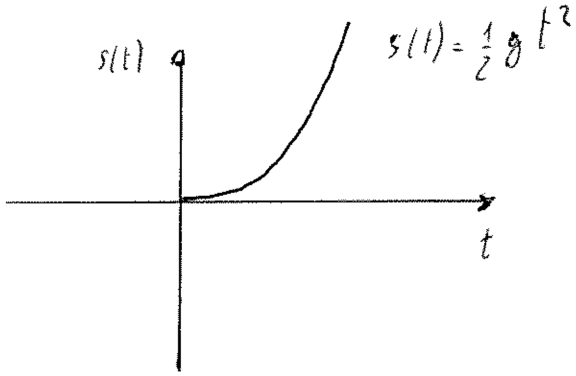
$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\boxed{v(t) = g t}$$

$$\boxed{a(t) = g}$$

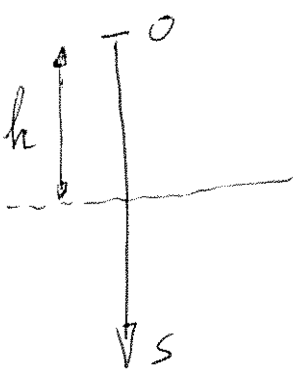






Ricavare la velocità di caduta di un corpo da un'altezza h

1) Dalle formule



dalla prima equazione

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} = t$$

dalla seconda equazione

$$v^2 = g^2 t^2 = g^2 \frac{2h}{\cancel{g}}$$

$$\Downarrow$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

2) Dalla conservazione dell'energia meccanica

Il potenziale di una forza mg costante è mgs

L'energia cinetica $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ $U = mgs$

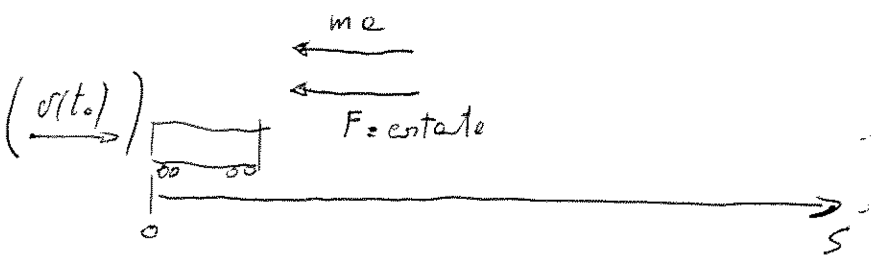
$$E_c(0) - U(0) = E_c(h) - U(h)$$

$$\frac{1}{2} m v(0)^2 - mg\,\emptyset = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 - \cancel{m} g h \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Frenatura veicolo con forza costante

Per evitare uno slittamento tra ruote e rotaie in molti veicoli ferroviari per decelerare si applica una forza frenante costante.

Verificare gli spazi di arresto per una forza frenante F.



$$ma + F = 0$$

$$\boxed{a = -\frac{F}{m}}$$

il veicolo subisce una decelerazione costante pari a $\frac{F}{m}$.

Le equazioni si risolvono come il caso precedente sostituendo g con $-d = -\frac{F}{m}$

(d = decelerazione)

Se $s(t_0) = 0$ e $t_0 = 0$ $\quad v(t_0) = v_0$

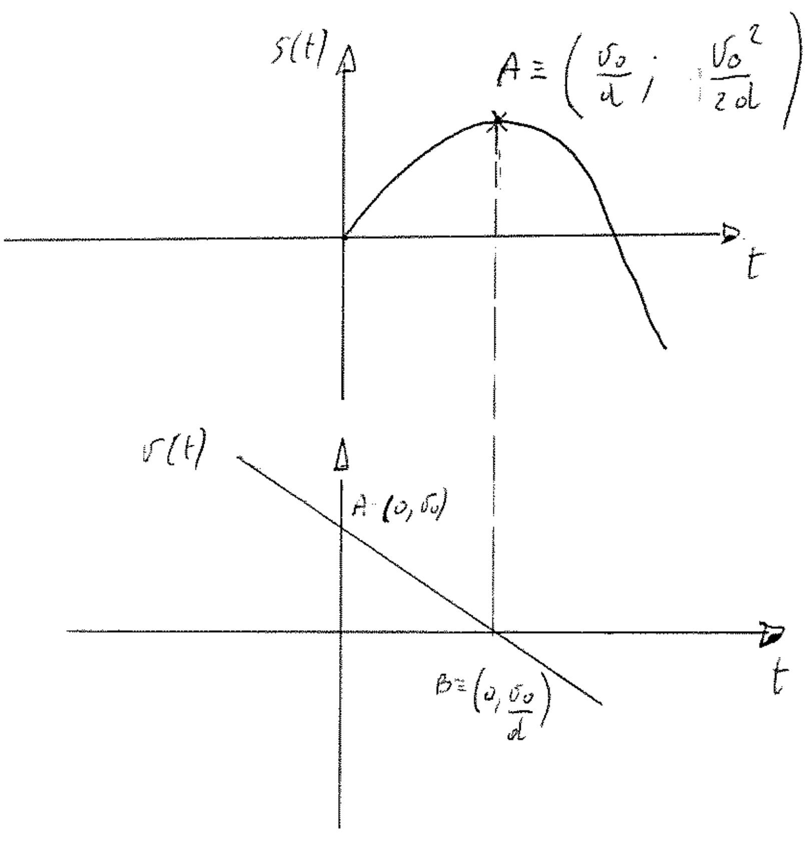
$$\begin{cases} s(t) = v_0 t - \dfrac{d}{2} t^2 \\[2ex] v(t) = v_0 - d\,t \end{cases} \qquad d = \frac{F}{m}$$

ponendo $v(t) = 0$ arresto veicolo

$$t = \frac{v_0}{d}$$

Sostituendo

$$s(t) = \frac{v_0^2}{d} - \frac{v_0^2}{2d} = \frac{v_0^2}{2d}$$



Quando la velocità si annulla al tempo $t = \dfrac{v_0}{d}$ lo spazio percorso vale $\dfrac{v_0^2}{2d}$

Applicando la legge di conservazione dell'energia meccanica è possibile definire la funzione $v(t)$ in funzione dello spazio.

$$\boxed{E_c - U = \text{costante}}$$

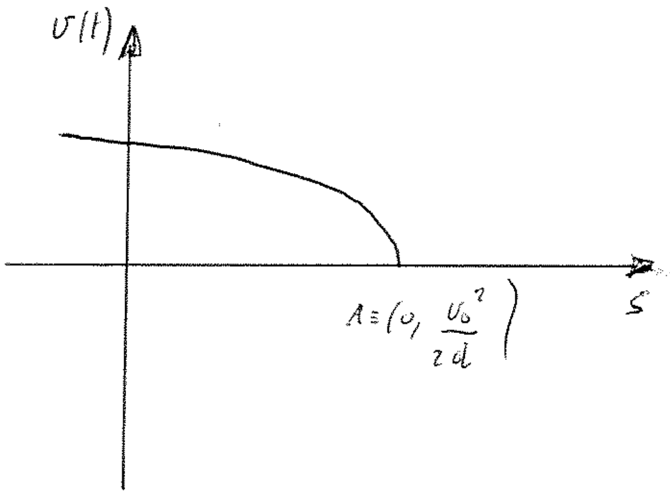
E_c = energia cinetica = $\frac{1}{2} m v^2$

U = energia potenziale che vale per una forza costante F_s. Nel nostro caso $U = -mds$

Uguagliando l'energia meccanica tra il punto $s(t_0)=0$ dove $E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$ e $U = \emptyset$ e il punto $s(t)$ dove $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ e $U = -mds$, otteniamo

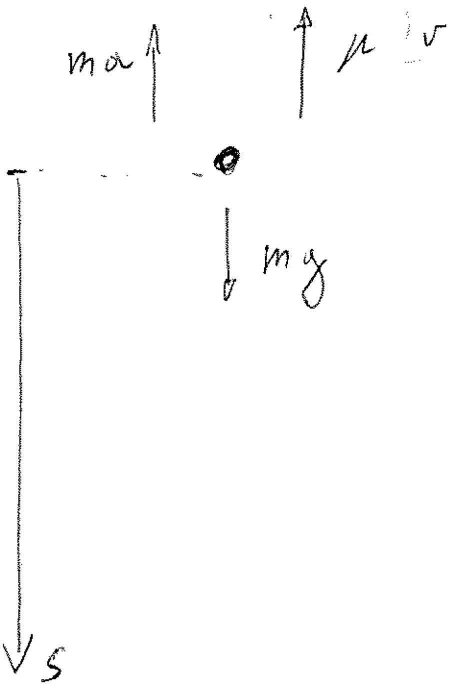
$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 + \cancel{m} ds \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2ds$$

Equazione di una parabola con asse di simmetria dato dall'asse s.



Caduta di un grave in un fluido viscoso

Un altro esempio di risoluzione di un'equazione differenziale è la risoluzione dell'equazione del moto di un grave soggetto ad un fluido viscoso (es. attrito dell'aria) - L'equazione differenziale è simile a quella utilizzata per la caduta di un grave nel vuoto con la sola accortezza di aggiungere un termine che si oppone al moto e rappresenta la forza esercitata dall'aria sul corpo - Sperimentalmente si verifica che questa forza è proporzionale alla velocità del corpo secondo una legge $\mu v = \mu \frac{ds}{dt}$ dove μ è il coefficiente di attrito -



l'equazione differenziale si scrive

$$mg - ma - \mu v = 0$$

$$g - \frac{dv}{dt} - \frac{\mu}{m} v = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = g\left(1 - \frac{\mu v}{gm}\right)$$

$$\frac{1}{g\left(1 - \frac{\mu v}{gm}\right)} \frac{dv}{dt} = 1$$

Si continua considerando il metodo di separazione delle variabili v e t.

$$\int_{v=v_0}^{v} \frac{1}{g\left(1-\frac{\mu v}{g m}\right)}\, dv = \int_{t=t_0}^{t} dt$$

$$\int_{v=v_0}^{v} \frac{1}{g-\frac{\mu}{m} v}\, dv = \int_{t=t_0}^{t} dt$$

Applichiamo ora due proprietà del differenziale dx che derivano dalle proprietà degli integrali:

1) $d(Kx) = K\,dx$ con K = costante

2) $dx = d(x+c)$ con c = costante

$$\int_{v=v_0}^{v} -\frac{m}{\mu} \frac{1}{g-\frac{\mu}{m} v}\, d\left(-\frac{\mu}{m} v\right) = \int_{t=t_0}^{t} dt$$

$$\int_{v=v_0}^{v} -\frac{m}{\mu} \frac{1}{g-\frac{\mu}{m}v} \, d\left(g-\frac{\mu}{m}v\right) = \int_{t=t_0}^{t} dt$$

ricordando che $\displaystyle\int_{x_i}^{x_f} \frac{1}{x} \, dx = \ln x_f - \ln x_i$

ipotizzando $\begin{cases} v(t=0) = 0 = v_0 \\ t_0 = 0 \end{cases}$

$$-\frac{m}{\mu}\left[\ln\left(g-\frac{\mu}{m}v\right) - \ln(g)\right] = t$$

$$\left[\ln\left[\frac{g-\frac{\mu}{m}v}{g}\right]\right] = -\frac{\mu}{m}t$$

$$1 - \frac{\mu}{mg}v = e^{-\frac{\mu}{m}t}$$

$$v = \frac{mg}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{mg}{\cancel{\mu}}\frac{\cancel{\mu}}{\cancel{m}} e^{-\frac{\mu}{m}t} = g e^{-\frac{\mu}{m}t}$$

Lo spostamento è l'integrale della velocità rispetto al tempo.

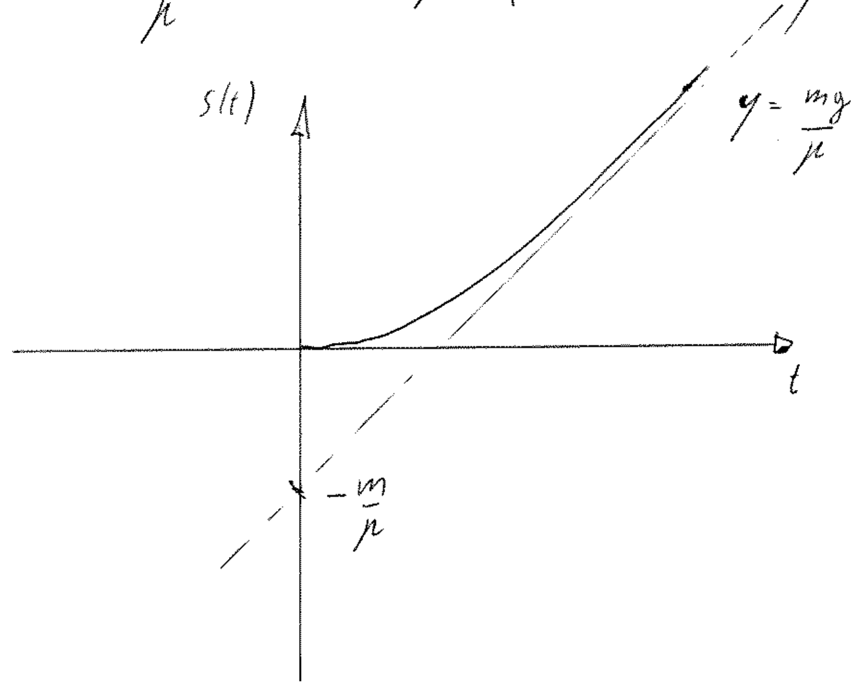
$$s(t) = \int_{t=0}^{t} A\left(1 - e^{-\tau t}\right) dt \qquad \text{con } A = \frac{mg}{\mu}$$

$$\tau = \mu/m$$

$$s(t) = At - \int_{t=0}^{t} e^{-\tau t}\, dt =$$

$$= At + \frac{1}{\tau}\int_{t=0}^{t} e^{-\tau t}\, d(-\tau t) = At + \frac{1}{\tau}\left[e^{-\tau t} - 1\right]$$

$$s(t) = \frac{mg\,t}{\mu} - \frac{m}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)$$



$y = \frac{mg}{\mu} t + b$ con $b = -\frac{m}{\mu}$

asintoto obliquo.

Un caso particolare può essere considerato la caduta con una velocità iniziale $v_0 \neq 0$

Considerando una velocità iniziale non nulla l'equazione si scrive

$$\ln\left[\frac{g - \frac{\mu}{m} v}{g - \frac{\mu}{m} v_0}\right] = -\frac{\mu}{m} t$$

$$g - \frac{\mu}{m} v = \left(g - \frac{\mu}{m} v_0\right) e^{-\frac{\mu}{m} t}$$

$$\frac{\mu}{m} v = g\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m} t}\right) + \frac{\mu}{m} v_0 e^{-\frac{\mu}{m} t}$$

$$v = \frac{g m}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m} t}\right) + v_0 e^{-\frac{\mu}{m} t}$$

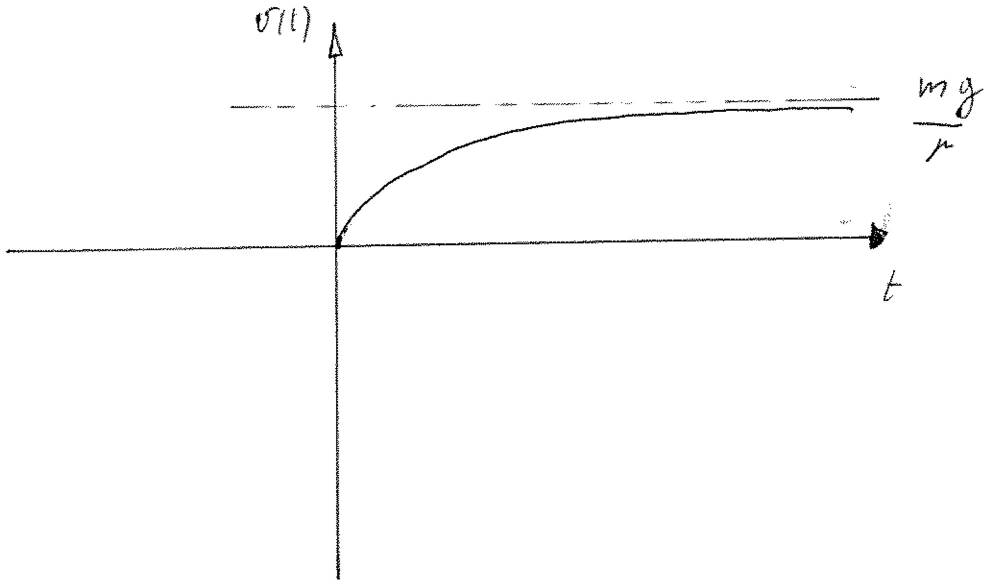
La velocità è la somma di due addendi: il primo tende asintoticamente al valore $\frac{g m}{\mu}$ il secondo parte dal valore v_0 e decresce esponenzialmente a 0.

(23)

La funzione $v(t)$ è del tipo $v = A(1 - e^{-\tau t})$

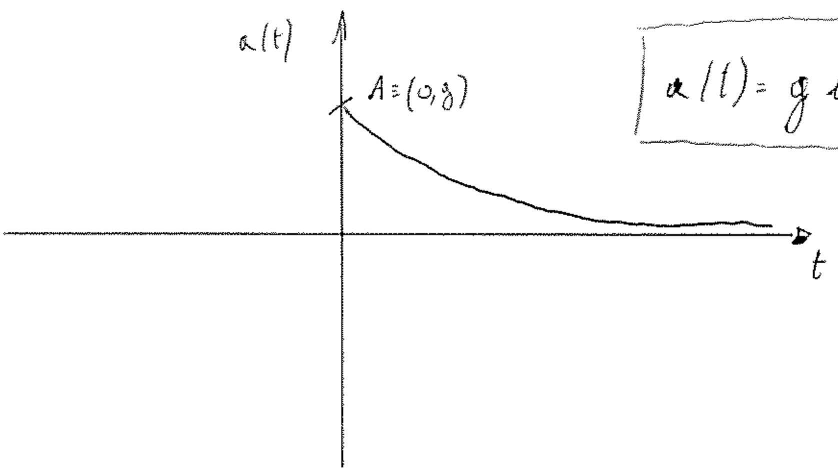
Parte da 0 e tende asintoticamente al

valore $\frac{mg}{\mu}$

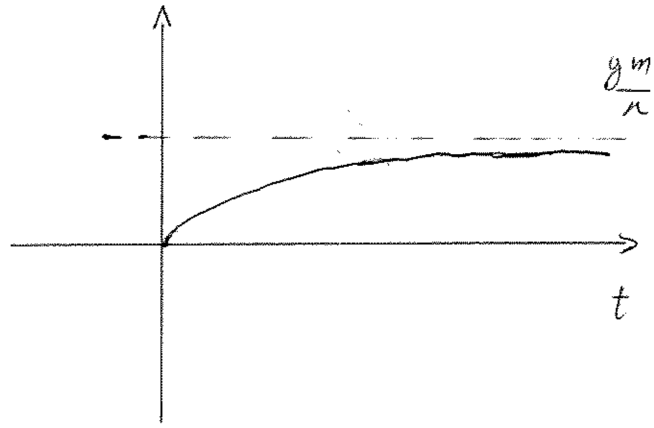


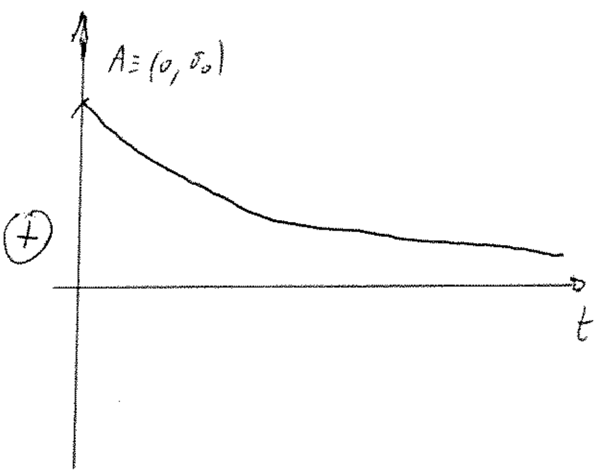
$$\boxed{v = \frac{mg}{\mu}\left(1 - e^{-\frac{\mu}{m}t}\right)}$$

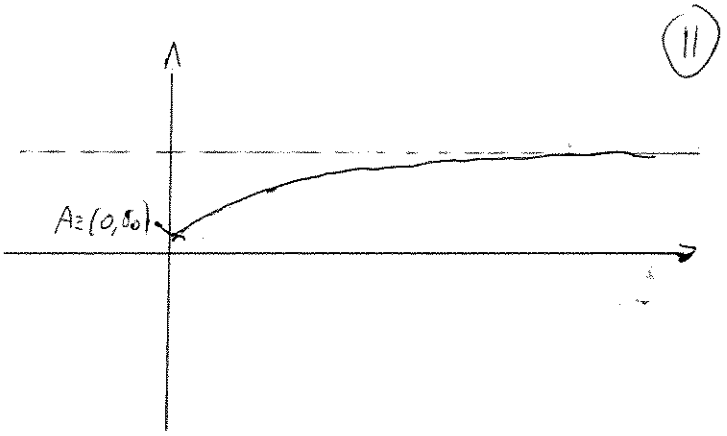
l'accelerazione è una decrescita esponenziale inizialmente ha il valore di g poi tende a $\emptyset$ ed il corpo cade con velocità asintotica costante $\frac{mg}{\mu}$ essendo nulla la risultante delle forze agenti sul grave.



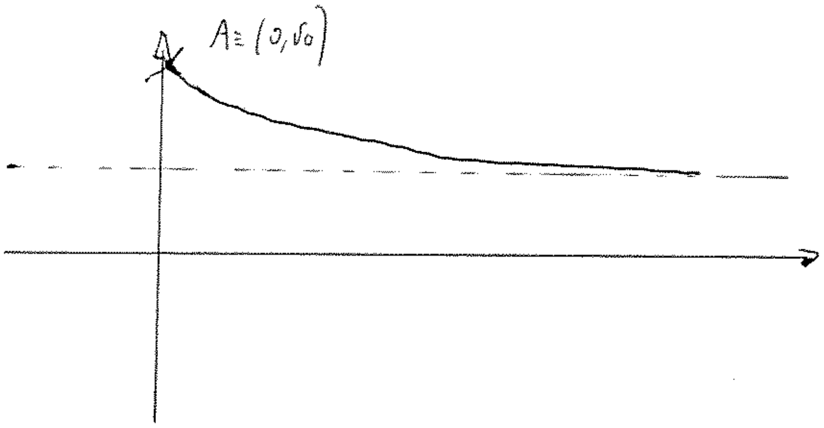
$$\boxed{a(t) = g\, e^{-\frac{\mu}{m}t}}$$







se $v_0 < \frac{gm}{\mu}$



se $v_0 > \frac{gm}{\mu}$

Un caso reale il lancio di Baumgartner

Il 14 ottobre 2012 Felix Baumgartner ha realizzato un lancio storico ottenendo tre record mondiali:

1) Altezza massima raggiunta 39045 m
2) Lancio più alto in caduta libera
3) La più alta velocità in caduta libera 1341.9 Km/h

Fase di salita

La fase di salita è realizzata utilizzando un pallone aerostatico che porta Felix alla quota ...

$h = 39045\ m$.

Da quell'altezza Felix si lancia in caduta libera.

Fase di caduta libera

Di seguito si definisce il modello matematico che permette di studiare la caduta libera di Felix dall'altezza di 39045 m e di definire i grafici delle accelerazione, velocità e spostamento in funzione del Tempo.

I grafici che si otterranno risulteranno diversi da quelli ottenuti per la caduta di un grave in un fluido viscoso perché occorre considerare condizioni fisiche diverse.

In primo luogo la densità dell'aria non può essere considerata costante durante il tragitto. Occorre definire un modello che tenga conto della rarefazione dell'aria con l'altezza.

La forza di resistenza dell'aria utilizzata è la formula di Newton $R = C_1 \frac{1}{2} \rho S v^2$

dove ρ = densità aria S = superficie impatto aria

C_1 = coefficiente attrito dinamico

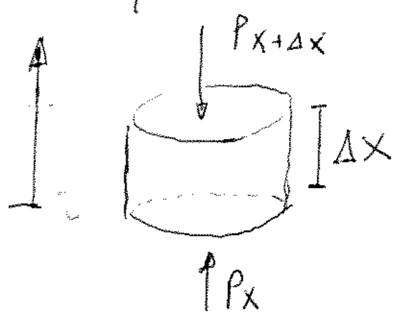
e non quelle utilizzate per i fluidi viscosi che era $R = -\mu v$ con μ = coefficiente attrito.

Infine la forza peso non può essere considerata costante pari a mg perché ad altezze elevate la forza attrattiva della terra diminuisce notevolmente variando con l'inverso del quadrato della distanza dal centro della terra.

Densità dell'aria

Per definire l'andamento della densità dell'aria con l'altezza considero:

1) la legge di Stevino dall'equilibrio di un cilindro infinitesimo



$$P_{(x)} A = P_{(x+\Delta x)} A + \rho g A \Delta x$$

$$\frac{P_{(x+\Delta x)} - P_{(x)}}{\Delta x} = -\rho g$$

passando al limite

$$\frac{dP}{dx} = -\rho g$$

ρ = densità aria

g = accelerazione gravità

$\rho g A \Delta x$ è il peso dell'aria del volume cilindrico che grava sulla faccia inferiore del cilindro

2) legge dei gas perfetti

$$P = \rho R T$$

T = temperatura in °K

R = costante universale dei gas.

$R = 287.1 \frac{m}{s^2 °K}$ per l'aria.

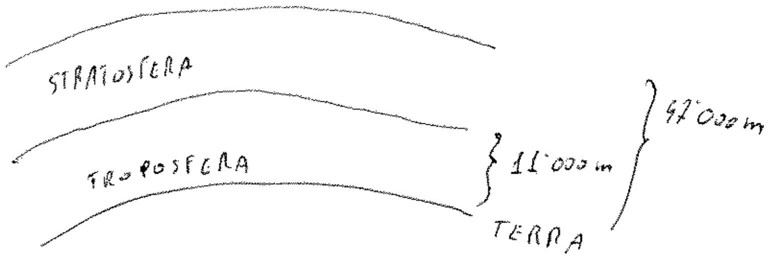
3) ipotesi semplificative del modello.

Nella realtà il primo strato dell'atmosfera

è detto troposfera e arriva a 11'000 m di altezza;

il secondo strato è detto stratosfera e arriva a

47'000 m di altezza.



Nella stratosfera la temperatura dell'aria

assume un valore costante $T_S = 217°K$ $(-56°C)$

Nella troposfera la temperatura varia con

l'altezza.

Per semplificare il modello supponiamo che

la temperatura dell'aria sia costante e

pari a $T_S = 217°K$ (anche nella troposfera).

Differenziando la legge dei gas perfetti

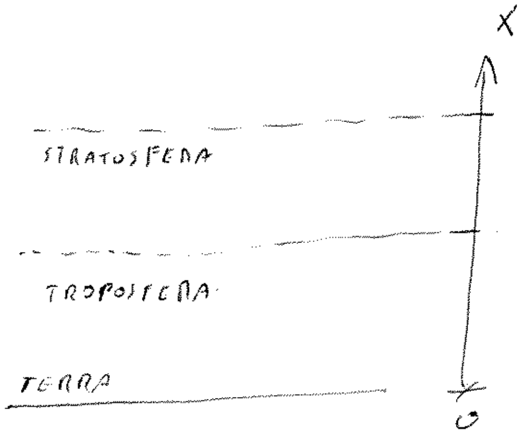
$$P = \rho R T$$

$$\begin{cases} dP = d\rho\, R T \\ \dfrac{dP}{dx} = -\rho g \end{cases}$$

$$\frac{d\rho\, R T}{dx} = -\rho g$$

integrando per separazione di variabili

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{g}{RT}\, dx$$



$P_0, T_s, \rho_0 = \frac{P_0}{R T_s}$

$$\ln \rho = \frac{-g}{RT}\, x$$

$$\rho = \rho_0\, e^{\frac{-g}{RT} x} = \frac{P_0}{R T_s}\, e^{\frac{-g}{R T_s} x}$$

$$\text{con} \begin{cases} P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pascal} \\ T_s = 217\ {}^\circ K \\ R = 287.1\ \dfrac{m}{s^2\ {}^\circ K} \end{cases}$$

Con l'ipotesi fatte la densità decresce esponenzialmente con l'altezza secondo la legge

$$\rho = \underbrace{\frac{p_0}{RT_s}}_{\rho_0} e^{\frac{-gx}{RT_s}}$$

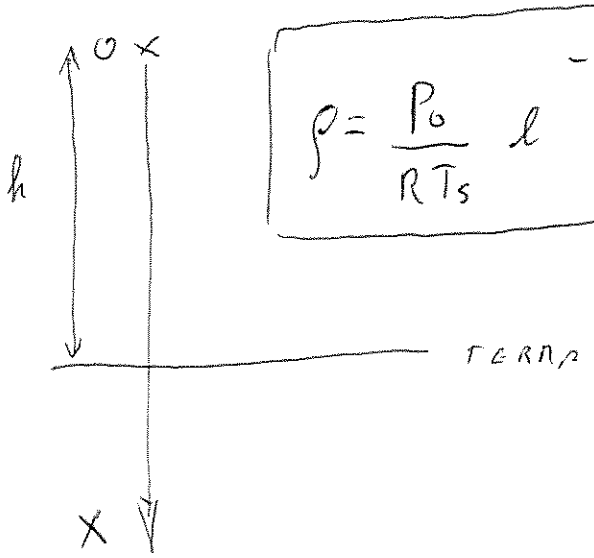
c'è da notare che la densità è proporzionale al numero di particelle per unità di volume e $-gx$ è il potenziale gravitazionale.

La legge di Boltzmann di ripartizione dell'energia

$n = n_0 e^{-\frac{mv^2}{2RT}}$ è una generalizzazione di questa formula sostituendo a ρ il numero di particelle n per unità di volume e l'energia potenziale con l'energia cinetica.

Nel nostro modello assumiamo per comodità l'asse x orientato verso il basso con origine all'altezza $\boxed{h = 39045\ m}$ da dove si lanciò Felix.

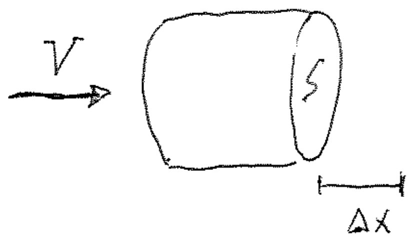
Rispetto a questo sistema di riferimento



$$\boxed{\rho = \frac{P_0}{RT_s}\, e^{-\frac{g}{RT_s}(h-x)}}$$

Resistenza dell'aria

Consideriamo un corpo che si muove in un fluido ad esempio l'aria con velocità V. Sia S la superficie di impatto con l'aria.

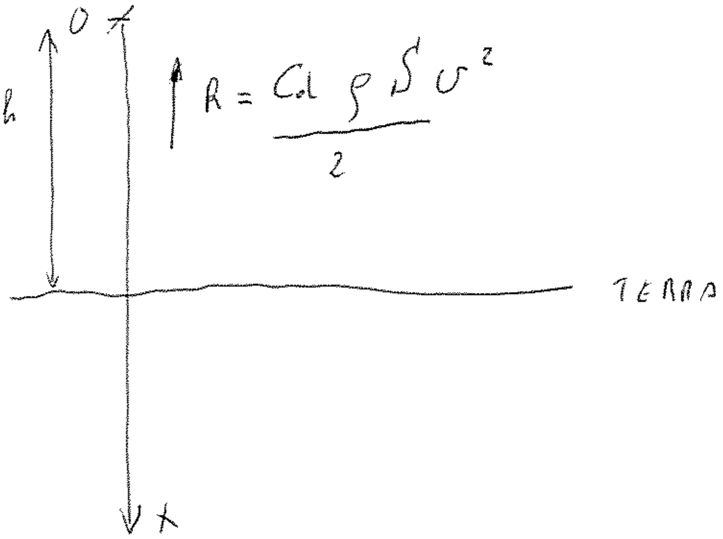


Se il corpo si muove di un tratto ΔX il volume d'aria impattato $S \Delta x$ acquista un'energia cinetica pari a $\frac{1}{2} \rho S \Delta x v^2$.

Uguagliando quest'energia cinetica al lavoro fatto dalle forze resistenti R.

$$R \cancel{\Delta x} = \frac{C_d}{2} \rho S \cancel{\Delta x} v^2 .$$

Il coefficiente C_d detto di attrito dinamico se valutato sperimentalmente e dipende dalla forma del corpo.



$$\begin{cases} m = \text{massa Felix + tuta} = 100\ \text{Kg} \\ C_d = 0.567 \\ S = 1\ m^2 \end{cases}$$

Forza peso

La forza gravitazionale che spinge Felix verso il centro della terra vale

$$F = \frac{K M m}{r^2}$$

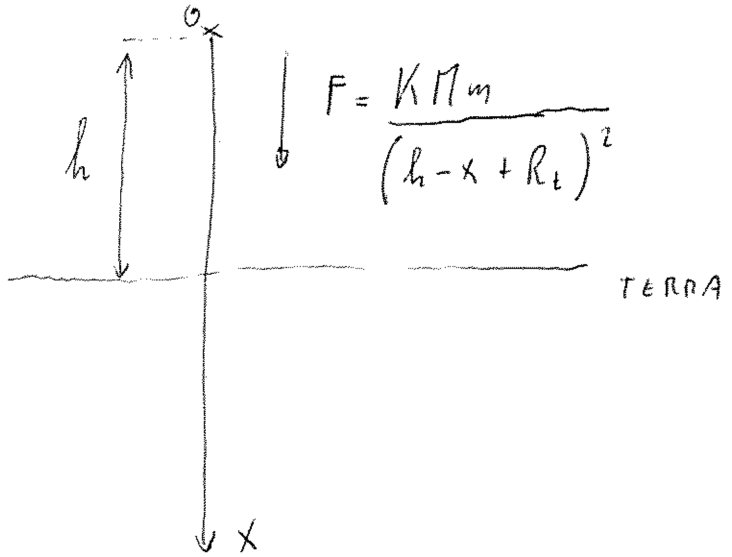
dove K è la costante gravitazionale

M = la massa della terra

m = la massa di Felix + tuta.

r = distanza dal centro della terra.

Considerando il nostro sistema di riferimento



$$F = \frac{KMm}{(h - x + R_t)^2}$$

h: altezza di lancio $= 39045$ m

R_t = raggio terrestre $= 6.3725\,e^{6}$ m

K = costante gravitazionale $=$

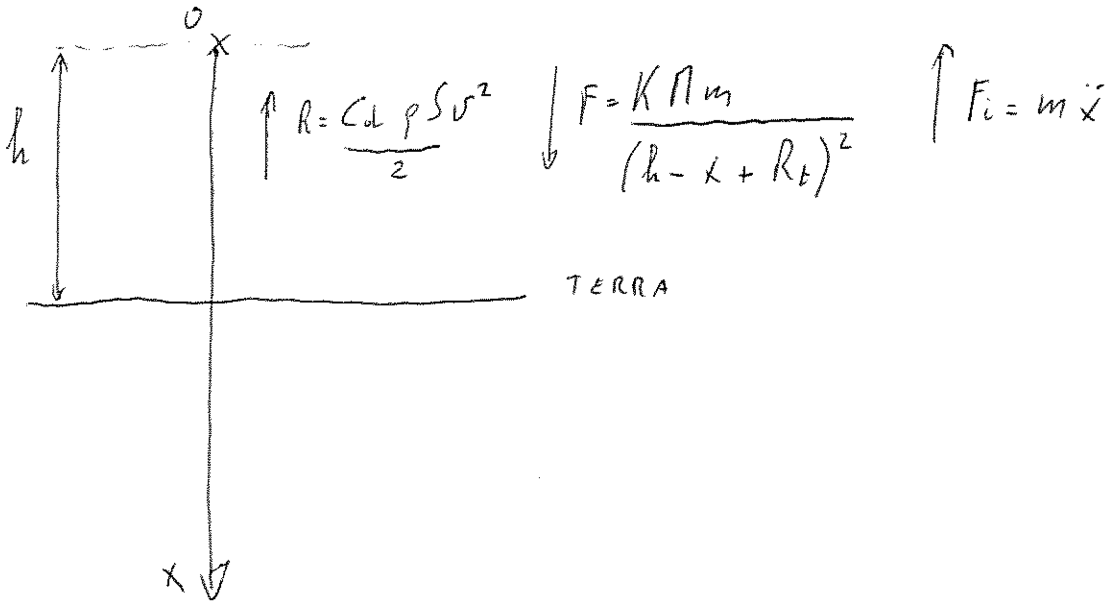
$= 6.67384\,e^{-11} \frac{m^2}{Kg\,s^2}$

M = massa terrestre

$= 5.9475\,e^{24}$ Kg

m = massa Felix + Tuta $= 100$ Kg

Aggiungendo la forza d'inerzia $m\ddot{x}$ abbiamo



L'equazione differenziale del moto in caduta libera si scrive rispetto al sistema di riferimento scelto

$$m\ddot{x} = \frac{KMm}{(h - x + R_t)^2} - \frac{C_d S v^2}{2} \frac{P_0}{RT_s} e^{-\frac{g}{RT_s}(h-x)}$$

dove abbiamo sostituito ρ con la funzione $\rho = \rho(x)$ prima definita.

Risoluzione dell'equazione differenziale con il metodo numerico

Dobbiamo risolvere la seguente equazione differenziale

$$\ddot{x} = \frac{KM}{(h-x+R_t)^2} - \frac{C_d S \dot{x}^2}{2} \frac{P_0}{RT_s} e^{\frac{-g}{RT_s}(h-x)}$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases}$$

Di seguito riporto i valori numerici delle costanti utilizzate

M = massa terrestre = $5.9475\ e^{24}$ Kg

K = costante gravitazionale = $6.67384\ e^{-11}\ \frac{m^2}{Kg\ s^2}$

h = 39045 m = altezza di lancio

R_t = raggio terrestre = $6.3725\ e^{6}$ m

S = superficie in opposizione all'aria in caduta libera = $1\ m^2$

C_d = coefficiente attrito dinamico Felix in caduta = 0.567

m = massa Felix + tuta = 100 Kg

T_s = temperatura stratosfera = $217\ °K$

R = costante dei gas per l'aria = $287.1\ \frac{m}{s^2\ °K}$

g = accelerazione gravità = $9.81\ m/s^2$

P_0 = pressione atmosferica = 1×10^5 Pascal

Vi sono numerosi programmi per la risoluzione di equazioni differenziali con il metodo delle differenze finite.

Si procede per step:

step 1) Si sostituiscono nell'equazione il valore di $x(t_0=0)=x_0$ alla variabile x e il valore di $\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$ alla variabile $\dot{x}$.

Nel nostro caso entrambi valori nulli.

Si ricava così $\ddot{x}(t_0=0)=\ddot{x}_0$.

Noto il valore di $\ddot{x}(t_0=0)=\ddot{x}_0$ posso ricavare per integrazione

$$\begin{cases} \dot{x}(t_1) = \dot{x}(t_0) + \ddot{x}(t_0)(t_1-t_0) \quad \text{e} \\ x(t_1) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t_1-t_0) \end{cases}$$

Step 2) Si procede come il precedente step sostituendo nell'equazione il valore $x(t_1) = x_1$ alla variabile x e $\dot{x}(t_1) = \dot{x}_1$ alla variabile $\ddot{x}$ in modo da calcolare $\ddot{x}(t_1) = \ddot{x}_1$ -

Poi per integrazione

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \ddot{x}_1 \Delta t \\ x_2 = x_1 + \dot{x}_1 \Delta t \end{cases}$$

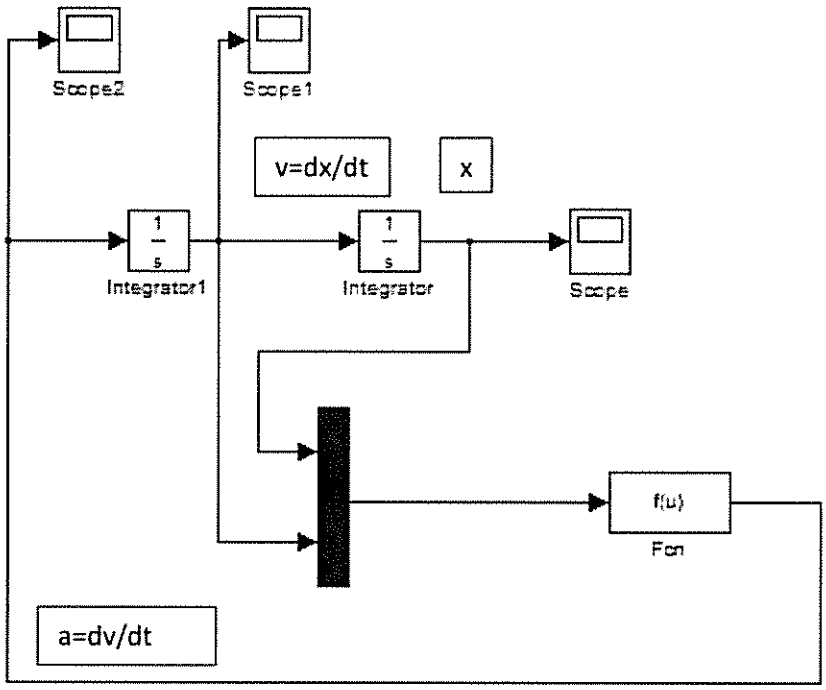
avendo indicato $x_2 = x(t_2)$

Per ogni step possiamo ricavare i valori di x_i ; $\dot{x}_i$; $\ddot{x}_i$ costruendo il grafico dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione per punti rispetto al tempo.

Riducendo il valore di Δt la soluzione diventa più accurata aumentando il numero di punti del grafico.

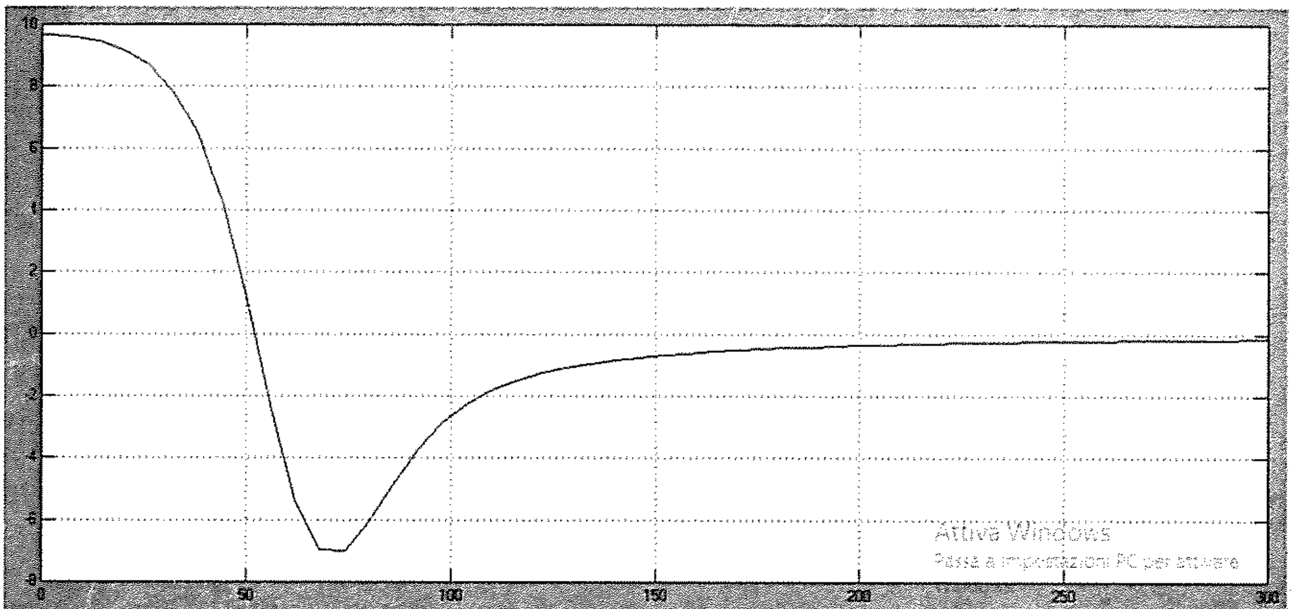
RISOLUZIONE TRAMITE SIMULINK

DEFINIZIONE DEL MODELLO



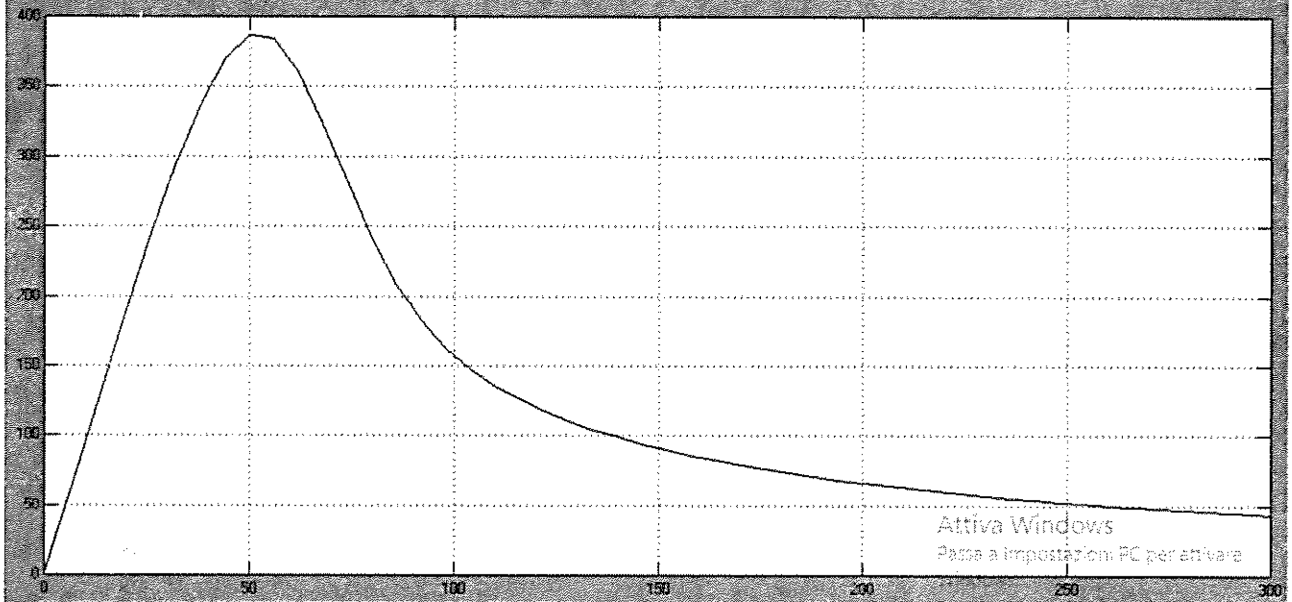
$$f(u) = \frac{UM}{(h - x + R_t)^2} - \frac{C_d S \dot{x}^2}{2} \frac{P_0}{RT_S} e^{-\frac{g}{RT_S}(h-x)}$$

$\frac{dv}{dt} = \ddot{x}$



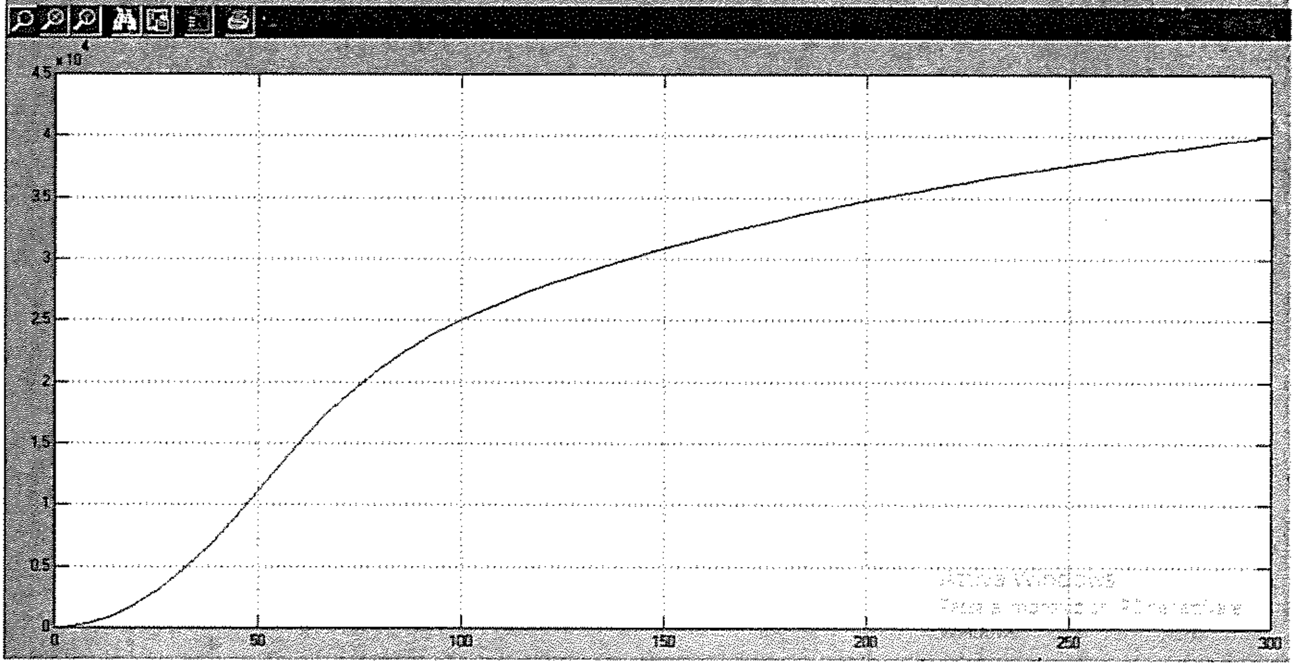
t

$\frac{dx}{dt} = \dot{x}$



t

x



t

Analisi dei grafici

Il I grafico riporta l'accelerazione di Felix in funzione del tempo. Essendo valida la relazione

$m\ddot{x} = F - R$ dove F è la forza gravitazionale e R la forza che si oppone al moto per la resistenza dell'aria possiamo affermare che a meno di un fattore m il I grafico rappresenta la somma delle forze agenti.

Inizialmente la forza resistente è piccola e prevale quella gravitazionale essendo bassa la velocità.

Al crescere della velocità aumentano le forze resistenti fino ad avere intorno ai 50 s una risultante nulla cioè la forza resistente bilancia la forza gravitazionale.

Da 0 a 50 secondi

La risultante delle forze è positiva quindi la velocità è crescente.

Intorno ai 50 secondi

La risultante delle forze si annulla $\ddot{x} = 0$ e quindi la velocità raggiunge il massimo valore.

Per $t > 50$ secondi

La risultante delle forze è negativa quindi Felix subisce un rallentamento.
Il grafico della velocità decresce.

Per $t = 260$ secondi quando Felix apre il paracadute la risultante delle forze tende asintoticamente a $\emptyset$.

Pertanto la velocità tende asintoticamente al valore limite che annulla l'equazione (35)

$$\ddot{x} = F - R$$

All'altezza del suolo
$$\begin{cases} F = mg \\ R = \frac{1}{2} \rho C_d S v^2 \end{cases}$$

$$v_{limite} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho C_d S}}$$ sostituendo i valori

$$v_{limite} = 46.4 \ m/s$$