# Teoremi sulle funzioni continue

# Teorema di Weierstrass

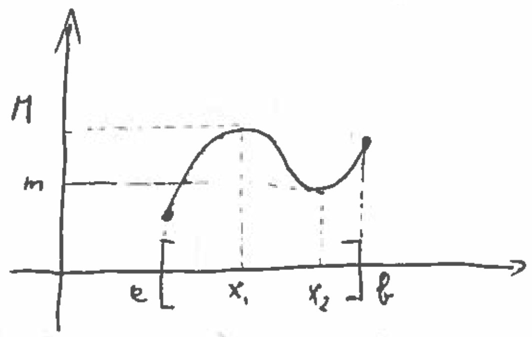
Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su un insieme chiuso e limitato allora $f$ assume massimo e minimo assoluto.

$f(x_1) = m$ con $x_1 \in [a,b]$ $\quad m \in \mathbb{R} \neq \pm\infty$

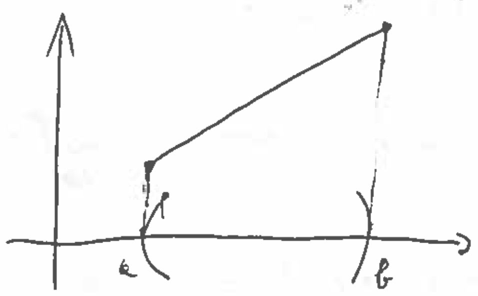
$f(x_2) = M$ con $x_2 \in [a,b]$ $\quad M \in \mathbb{R} \neq \pm\infty$

$m =$ minimo $f([a,b])$

$M =$ massimo $f([a,b])$

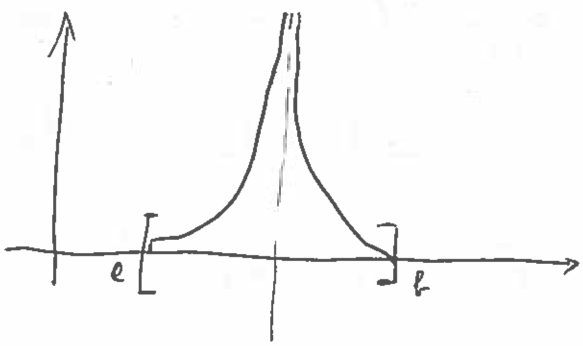



insieme non chiuso




non esiste massimo e minimo

funzione non continua




il massimo non appartiene a $\mathbb{R}$

Dim.

Se $f(x_1)=m$ con $x_1=a$ oppure $x_1=b$ il teorema è dimostrato.

Se $f(x_1)=m$ con $x_1 \neq a$ e $x_1 \neq b$ allora si considerano i due intervalli

$\left[a, \frac{b-a}{2}\right)$ e $\left[\frac{b-a}{2}; b\right]$ allora $x_1$ apparterrà ad uno dei due insiemi.

Supponiamo che appartenga all'insieme $\left[\frac{b-a}{2}; b\right]$ allora se $x_1 = \frac{b-a}{2}$ o $x_1 = b$ il teorema è dimostrato altrimenti si considerano i due intervalli $\left[\frac{b-a}{2}; \frac{b-a}{2}+\frac{b-a}{4}\right)$ e $\left[\frac{b-a}{2}+\frac{b-a}{4}, b\right]$ allora $x_1$ apparterrà ad uno dei due insiemi.

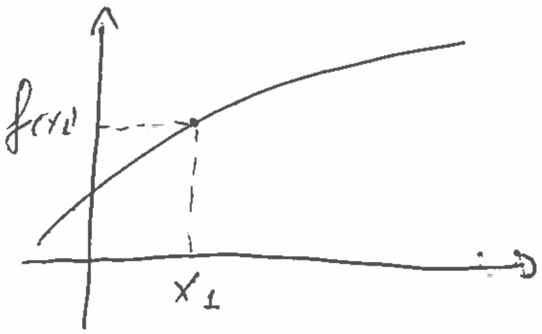
E così via in modo da determinare un punto di accumulazione $x_1$ t.c. $m=f(x) \in I(x_1)$.

Teorema della permanenza del segno

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ continua in $x_1 \in X$

se $f(x_1) > 0$ allora $\exists\, I_{x_1}$ t.c.

$f(x) > 0 \;\forall\, x \in I_{x_1}$ .




Dim:

Per la continuità di $f$ $\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$ e $\forall \varepsilon > 0$

$\exists\, I_{x_1}$ t.c. $f(x_1) - \varepsilon < f(x) < f(x_1) + \varepsilon \quad \forall x \in I_{x_1}$

Se scelgo $\varepsilon < f(x_1)$

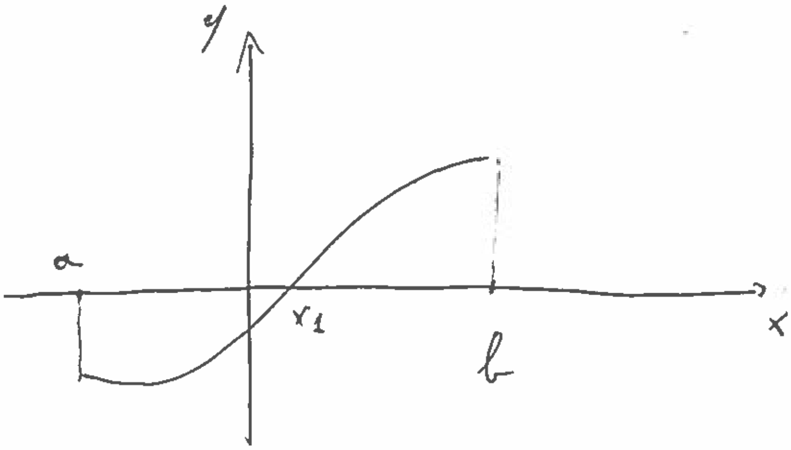
$f(x) > 0 \;\forall\, x \in I_{x_1}$

# Teorema degli zeri

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua

con $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ allora esiste

almeno un $x_1 \in [a,b]$ t.c. $f(x_1) = 0$




Definisco $x_1 = \sup A = \{ x \in [a,b] \text{ t.c. } f(x) < 0 \}$

1) $x_1$ non può essere tale che $f(x_1) < 0$ altrimenti per il teorema della permanenza del segno lo sarebbe in un $I(x_1)$ quindi esisterebbe un $x_2 > x_1$ t.c. $f(x_2) < 0$ contro l'ipotesi $x_1 = \sup A$.

2) $x_1$ non può essere tale che $f(x_1)>0$

altrimenti per il teorema della permanenza

del segno $f(x)>0$ in un $I(x_1)$ -

Contro l'ipotesi che $x_1 = \sup. A$

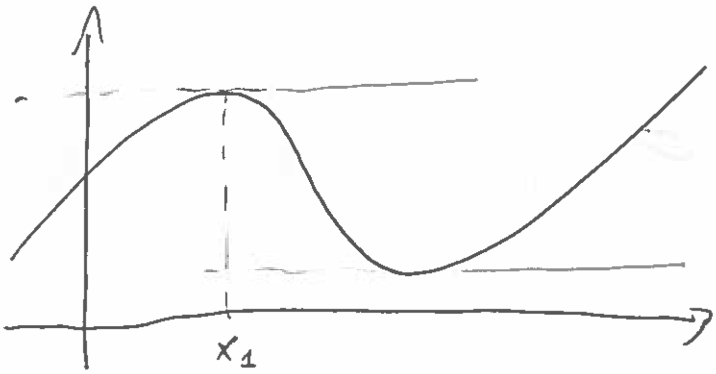
Perché $I(x_1) \notin A$

$$\boxed{\text{Pertanto} \quad f(x_1)=0}$$

# Teorema di Fermat

Sia $f: \overline{X} \to \mathbb{R}$

Se $x_1$ è un punto di massimo o minimo relativo con $x_1 \in \mathbb{R}$ allora se $f$ è derivabile in $x_1$ deve essere $f'(x_1) = 0$.




definizione di massimo relativo

$$\exists I_{x_1} \text{ t.c. } \forall x \in I_{x_1} \quad f(x_1) \geq f(x)$$

1) considero $x > x_1$ con $x \in I_{x_1}$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0$$

2) considero $x < x_1$ con $x \in I_{x_1}$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0$$

$$\lim_{x \to x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq 0$$

$$\lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq 0$$

essendo la funzione derivabile in $x_1$

deve essere

$$\lim_{x \to x_1^+} = \lim_{x \to x_1^-} = 0$$

# Teorema di Rolle

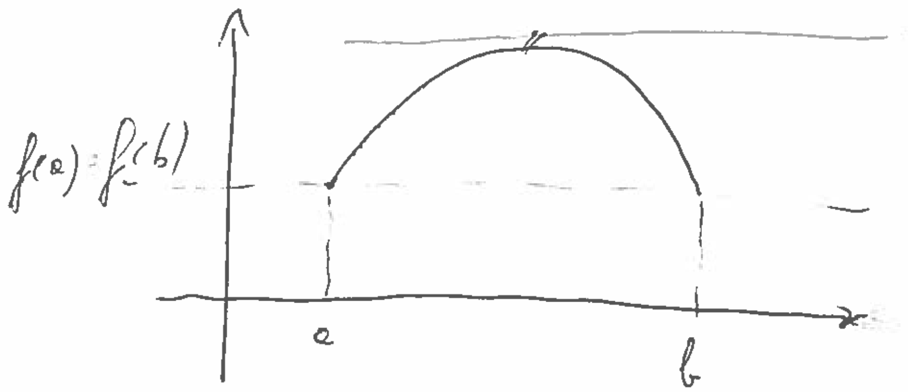
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

1) $f$ continua in $[a, b]$

2) $f$ derivabile in $(a, b)$

3) $f(a) = f(b)$

allora $\exists\ x_1 \in (a, b) : f'(x_1) = 0$




<u>Dim</u> =

Per il Teorema di Weierstrass $f$ ha massimo e minimo relativo. ($M$ e $m$)

1) Se $m = M$ allora la funzione è costante su $[a, b]$ pertanto la derivata è nulla

2) Se $m \neq M$ allora almeno uno dei due punti è interno ad $[a, b]$

Supponiamo che $m$ sia interno ad $f([a,b])$ allora per il teorema di Fermat $f'(x_1) = m = 0$

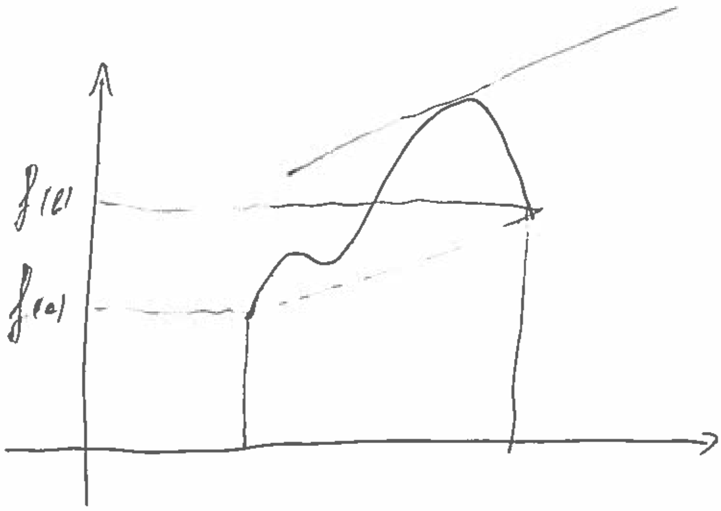
# Teorema di Lagrange

Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

1) $f$ continua in $[a,b]$

2) $f$ derivabile in $(a,b)$

allora esiste $x_1 \in (a,b)$ : $f'(x_1) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$




considero $\varphi(x) = f(x) - (x-a)\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\varphi(x)$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in $(a,b)$

$$\begin{cases} \varphi(a) = f(a) \\ \varphi(b) = f(a) \end{cases}$$

per il Teorema di Rolle

$\exists\, x_1 : \varphi'(x_1) = 0$

$$\varphi'(x_1) = 0 \Rightarrow f'(x_1) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

## Teorema di Cauchy

Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a, b]$

$f(x)$ e $g(x)$ derivabili in $(a, b)$

$g'(x) \neq 0 \quad x \in [a, b]$

Allora esiste $c$ interno ad $[a, b]$ t.c.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Definisco $F(x) = f(x) - K g(x)$

con $F(a) = F(b)$

$\Downarrow$

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \, g(b)$$

Per il teorema di Rolle esiste un punto $c \in (a,b)$ t.c.

$$F'(c) = 0$$

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$