$$\boxed{\text{Le matrici di Pauli}}$$

Le matrici di Pauli

È stato dimostrato sperimentalmente che alcune particelle dette fermioni o spinori possiedono un momento angolare intrinseco pari a $s = \frac{\hbar}{2}$ perciò soggette ad un campo magnetico deflettono.

Se soggette ad un campo magnetico diretto lungo un asse (ad esempio l'asse z) gli spinori si dividono in due fasci: il primo con momento angolare $s_z = \frac{\hbar}{2}$ e il secondo con momento angolare $s_z = -\frac{\hbar}{2}$.

Il momento angolare totale vale invece $L^2 = s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$

Il primo a studiare lo spin di queste particelle fu il fisico tedesco Pauli.

Egli introdusse le tre matrici che prendono il suo nome.

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Queste tre matrici sono operatori hermitiani e valgono le seguenti proprietà notevoli:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k$$

$$(\sigma_i)^2 = \sigma_i\,\sigma_i = I$$

Da queste proprietà si ricava immediatamente che l'operatore spin $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$ le relazioni diventano

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk}\,\hat{S}_k .$$

Lo spinore può essere rappresentato come un vettore a due componenti e può presentarsi nel suo Ket di base come una combinazione di spin up e spin down rispetto ad un certo asse.

Ad esempio se considero l'operatore

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

posso ricavare gli autovettori

che sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il Ket di base

può essere preparato in modo da selezionare solo le particelle con spin up in questo caso

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o come combinazione di spin up e spin down in questo caso si scrive

$$\psi = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e in questo caso e^2

rappresenta la probabilità di trovare lo spin up dopo la misura e b^2 la probabilità di trovare lo spin down dopo la misura.

Operatore rotazione infinitesima

Supponiamo di avere un ket di stato rappresentato da una funzione $\psi(x,y,z)$ e consideriamo una rotazione elementare della funzione intorno all'asse z di un angolo infinitesimo $\Delta\phi$.

Possiamo scrivere

$$\psi\,(x+y\Delta\phi;\, y-x\Delta\phi;\, z) = \psi(x,y,z) + y\Delta\phi\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\Delta\phi\frac{\partial\psi}{\partial y} = \psi(x,y,z) + \Delta\phi\left(y\frac{\partial\psi}{\partial x} - x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)$$

$$= \psi(x,y,z) + \frac{\Delta\phi}{i\hbar}\left(i\hbar\, y\frac{\partial\psi}{\partial x} - i\hbar\, x\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) =$$

$$= \psi(x,y,z) + \frac{\Delta\phi}{i\hbar}\hat{L}_z\,\psi(x,y,z)$$

$$\psi(x+y\Delta\phi; y-x\Delta\phi; z) =$$

$$= \psi(x,y,z) - \frac{i\Delta\phi}{\hbar}\hat{L}_z\,\psi(x,y,z) = \left(1-\frac{i\Delta\phi}{\hbar}\hat{L}_z\right)\psi(x,y,z)$$

l'operatore $\left(1-\frac{i\Delta\phi}{\hbar}\hat{L}_z\right)$ ruota il ket di

stato di un angolo infinitesimo $\Delta\phi$ intorno all'asse z.

<u>Operatore rotazione finita</u>

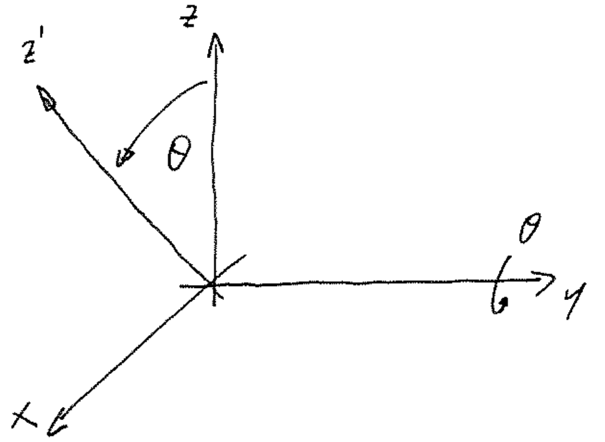
Consideriamo ora una serie di N rotazioni elementari

in modo da vedere una rotazione finita di

un angolo ϕ come

$$\lim_{N\to\infty}\left(1-i\frac{\phi/N}{\hbar}\hat{L}_z\right)^N = \exp\left(-\frac{i\phi}{\hbar}\hat{L}_z\right)$$

Rotazione intorno all'asse y



Una rotazione di un angolo θ intorno all'asse y è

data dall'operatore

$$\exp\left(-\frac{i\theta}{\hbar}\hat{L}_y\right) = \exp\left(-\frac{i\sigma_y\theta}{2}\right)$$

sviluppando in serie di Taylor e ricordando che

$(\sigma_y)^n = I$ per n pari

$$\exp\left(-\frac{i\sigma_y\theta}{2}\right) = \left[1 - \frac{\sigma_y^2}{2!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \frac{\sigma_y^4}{4!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^4 + \dots\right] +$$

$$-i\left[\sigma_y\frac{\theta}{2} - \frac{(\sigma_y)^3}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 + \dots\right] =$$

$$= I\cos\frac{\theta}{2} - i\sigma_y \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

$$\exp\left(-\frac{i\sigma_y\theta}{2}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \hline \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{Rotazione intorno all'asse z}}$

Consideriamo una rotazione di un angolo ϕ intorno all'asse z.

È data dall'operatore $\exp\left(\frac{-i\phi}{\hbar}\hat{L}_z\right) = \exp\left(-\frac{i\sigma_z}{2}\phi\right)$

sviluppando in serie di Taylor e ricordando che $(\sigma_z)^n = I$ per n pari.

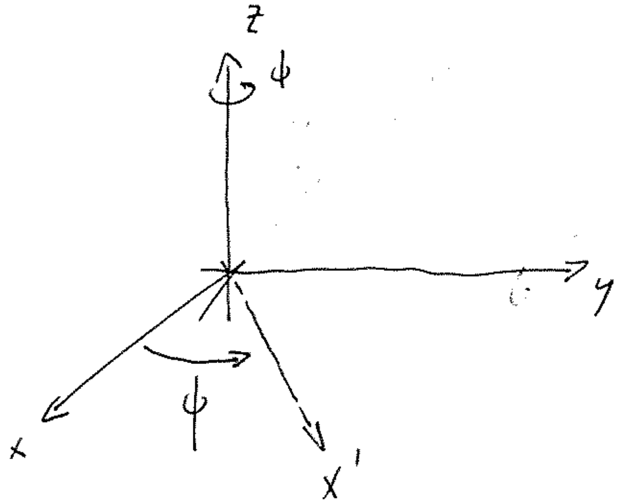
$$\exp\left(-i\frac{\sigma_z}{2}\phi\right) = \left[1 - \frac{\sigma_z^2}{2!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 + \frac{\sigma_z^4}{4!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^4 + \dots\right] +$$

$$-i\left[\sigma_z\frac{\phi}{2} - \frac{\sigma_z^3}{3!}\left(\frac{\phi}{2}\right)^3 + \dots\right] = I\cos\frac{\phi}{2} - i\sigma_z\sin\frac{\phi}{2}$$

$$\exp\left(-i\frac{\sigma_z}{2}\phi\right) = \left(\begin{array}{c|c} \cos\frac{\phi}{2} - i\sin\frac{\phi}{2} & 0 \\ \hline 0 & \cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2} \end{array}\right) =$$

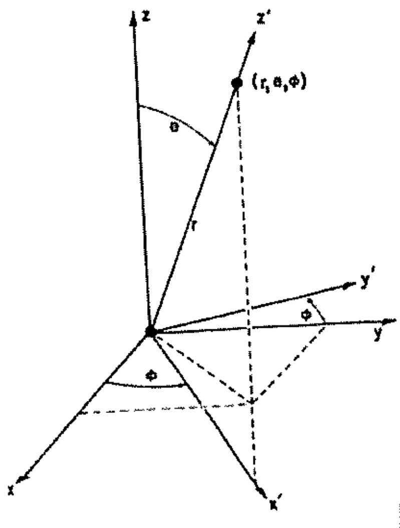
$$= \left(\begin{array}{c|c} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ \hline 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{array}\right)$$

Consideriamo ora una rotazione del sistema di coordinate di un angolo θ intorno all'asse y seguita da una rotazione di un angolo ϕ intorno all'asse z. In modo da portare gli assi x, y, z nelle posizione in figura x', y', z'.



Rotazione di ϕ intorno all'asse z

Rotazione di θ intorno all'asse y $D_y(\theta)$ + rotazione di ϕ intorno all'asse z $D_z(\phi)$



La rotazione della funzione d'onda dell'angolo θ e ϕ positivi può essere vista come una trasformazione che lascia invariata la funzione d'onda e ruota gli assi come in figura di un angolo θ e ϕ negativo.

$$\bar{D}(\theta,\phi) = \bar{D}_z(\phi)\,\bar{D}_y(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\phi}{2}} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}$$

$\bar{D}(\theta,\phi)$ = operatore rotazione funzione d'onda.

$$D(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\, e^{i\frac{\phi}{2}} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\, e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}$$

= operatore rotazione assi con funzione d'onda fissa.

La matrice $D(\theta,\phi)$ ottenuta è di grande importanza. La componente ij della matrice $D_{ij}(\theta,\phi)$ rappresenta la probabilità che una particella con spin i nel sistema x,y,z presenti un'ampiezza di probabilità j nel sistema ruotato x',y',z'.

Nel nostro caso, particella a spin $\frac{1}{2}$,

$$|+\rangle = \text{spin } \tfrac{1}{2}\hbar \text{ lungo asse } z$$

$$|-\rangle = \text{spin } -\tfrac{1}{2}\hbar \text{ lungo asse } z$$

$$|+'\rangle = \text{spin } \tfrac{1}{2}\hbar \text{ lungo asse } z'$$

$$|-'\rangle = \text{spin } -\tfrac{1}{2}\hbar \text{ lungo asse } z'$$

$$\begin{Bmatrix} |+'\rangle \\ |-'\rangle \end{Bmatrix} = D(\theta,\phi) \begin{Bmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{Bmatrix}$$

e ancora

$$\begin{Bmatrix} |+'\rangle \\ |-'\rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle +'|+\rangle & \langle +'|-\rangle \\ \langle -'|+\rangle & \langle -'|-\rangle \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} |+\rangle \\ |-\rangle \end{Bmatrix}$$

$\langle +'|+\rangle$ = ampiezza di probabilità che ~~la~~ la particella con spin up in z ritrovi spin up in z'

$\langle +'|-\rangle$ = ampiezza di probabilità che la particella con spin down in z ritrovi spin up in z'

$\langle -'|+\rangle$ = ampiezza di probabilità che la particella con spin up in z ritrovi spin down in z'

$\langle -'|-\rangle$ = ampiezza di probabilità che la particella con spin down in z ritrovi spin down in z'.