EQUAZIONE DI DIRAC IN UN CAMPO GRAVITAZIONALE

Nei capitoli precedenti si è fatto uso per descrivere le equazioni della relatività generale della metrica Riemanniana $g_{\mu\nu}$ e della connessione di Christoffel $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu}$.
Di seguito introduciamo un metodo alternativo, ma completamente equivalente, di descrivere la geometria di una varietà Riemanniana basata sulla nozione di tetrade V e connessione di Lorentz ω.
Ciò permetterà di formulare la teoria della relatività generale come teoria di gauge per un gruppo di simmetria locale mettendo la gravitazione sullo stesso piano delle altre interazioni fondamentali.
Uno spazio curvo descritto dalla metrica Riemanniana può essere approssimato localmente con uno pazio piatto tangente dotato della metrica di Minkowski.
Basta introdurre in ogni punto x una quaterna di vettori covarianti $V_{\mu}^{a}(x)$ con $a = 0 \dots 3$ che soddisfano la relazione $g^{\mu\nu}V_{\mu}^{a}V_{\nu}^{b} = \eta^{ab}$ o la relazione inversa $g^{\mu\nu} = V_{a}^{\mu}V_{b}^{\nu}\eta^{ab}$
Tali vettori sono detti "tetradi" o anche vierbein (quattro gambe).
Di seguito si userà la seguente notazione:
gli indici latini minuscoli a, b ... che variano da 0 a 3 sono utilizzati per caratterizzare oggetti tensoriali definiti nello spazio piatto tangente che soddisfano le regole di trasformazione di Lorentz e gli indici vengono alzati e abbassati dalla metrica di Minkowski η.
Gli indici greci μ, ν ... variano da 0 a 3 e rappresentano oggetti tensoriali definiti sulla varietà di Riemann che soddisfano la regola di trasformazione generale di coordinate e gli indici vengono alzati e abassati dalla metrica di Riemann g.
Mediante le tetradi e i loro inversi qualunque oggetto definito sulla varietà Riemanniana può essere localmente proiettato nello spazio piatto tangente

$$B_{\mu\nu} \to B_{ab} = B_{\mu\nu}V_{a}^{\mu}V_{b}^{\nu}$$

$$B^{\mu\nu} \to B^{ab} = B^{\mu\nu}V_{\mu}^{a}V_{\nu}^{b}$$

Le tetradi sono oggetti di tipo misto che si trasformano come vettori covarianti rispetto all'indice curvo e come vettori di Lorentz rispetto all'indice piatto

$$V_{\mu}^{a} \to V_{\mu}^{a\prime} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \Lambda_{b}^{a} V_{\nu}^{b}$$

Per effetto della proiezione che trasforma indici curvi in indici piatti si passa dalle trasformazioni generali di coordinate alle trasformazioni di Lorentz dello spazio tangente. Lo spazio tangente può variare da punto a punto, e quindi la trasformazione di Lorentz è una trasformazione di tipo locale rappresentata da matrici $\Lambda = \Lambda(x)$.
Il requisito di general covarianza in uno spazio curvo si traduce, mediante le tetradi, inun requisito di invarianza locale per trasformazioni di Lorentz secondo quanto richiesto dalle simmetrie di gauge.
Di seguito accenniamo brevemente alla teoria di gauge.
Supponiamo di avere un campo ψ la cui azione è invariante per simmetria globale $\psi \to \psi' = U\psi$ dove U rappresenta la trasformazione di un gruppo di Lie a n parametri

$$U = \exp(-i\epsilon^{A}X_{A})$$

Con $A = 1 \dots n$.
I parametri ϵ^{A} sono coefficienti reali e costanti, gli operatori X_{A}, Hermitiani se la rappresentazione è unitaria, sono i generatori della trasformazione, che soddisfano le relazioni di commutazione fissate dalla algebra di Lie del gruppo

$$[X_{A}, X_{B}] = i f_{AB}{}^{C} X_{C}$$

Le costanti di struttura $f_{AB}{}^{C} = -f_{BA}{}^{C}$ sono tutte nulle solo se il gruppo è abeliano.
Se la trasformazione è globale tutti i parametri ϵ^{A} sono costanti e il gradiente del campo si trasforma banalmente come il campo stesso

$$\partial_{\mu}\psi' = \partial_{\mu}(U\psi) = U\partial_{\mu}\psi$$

e l'azione, costituita da con una densità Lagrangiana che è quadratica nel campo e nelle sue derivate, $L \sim \psi^{\dagger}\psi + (\partial\psi)^{\dagger}\partial\psi$, risulta automaticamente invariante.

Se invece la trasformazione è locale, $\epsilon^A = \epsilon^A(x)$, allora il gradiente del campo si trasforma in modo differente,

$$\partial_\mu \psi' = \partial_\mu (U\psi) = U\partial_\mu \psi + (\partial_\mu U)\psi$$

poiché $\partial_\mu U \neq 0$ la precedente azione non è più invariante.

L'invarianza per trasformazioni locali (detta anche invarianza di gauge) può essere ripristinata sostituendo l'ordinario gradiente con un operatore differenziale generalizzato, chiamato derivata covariante di gauge che indicheremo con il simbolo D_μ per distinguerlo dalla derivata covariante degli spazi di Riemann che di seguito indicheremo con ∇_μ.

Per definire la derivata covariante di gauge bisogna introdurre un insieme di n campi vettoriali ${A_\mu}^A$, uno per ogni generatore di simmetria X_A.

Consideriamo l'operatore differenziale

$$D_\mu = \partial_\mu - ig{A_\mu}^A X_A = \partial_\mu - igA_\mu$$

dove g è una costante di accoppiamento che dipende dal modello di iterazione che stiamo considerando. Le proprietà dei vettori ${A_\mu}^A$ vengono fissate dalla richiesta che siano soddisfatte le relazioni

$$(D_\mu \psi)' = (\partial_\mu - ig{A_\mu}')U\psi = UD_\mu \psi = U(\partial_\mu - igA_\mu)\psi$$

sviluppando le derivate

$$U\partial_\mu \psi + (\partial_\mu U)\psi - igA'_\mu U\psi = U\partial_\mu \psi - igUA_\mu \psi$$

$$(\partial_\mu U)\psi - igA'_\mu U\psi = -igUA_\mu \psi$$

moltiplicando da destra per U^{-1}

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}$$

In particolare, ricordando quanto riportato nel paragrafo "rappresentazione infinitesima del gruppo di Lorentz", una trasformazione generica di Lorentz può essere scritta nella forma

$$U = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega_{ab}J^{ab}\right)$$

e la derivata di gauge covariante per un campo vettoriale nello spazio tangente si scrive

$$D_\mu A^a = \partial_\mu A^a - \frac{1}{2}{\omega_\mu}^{ij}(J_{ij})^a{}_b A^b = \partial_\mu A^a + {\omega_\mu}^a{}_b A^b$$

L'ultima uguaglianza tiene conto della relazione

$$(J_{ij})^a{}_b = i(\eta_{jb}\delta_i^a - \eta_{ib}\delta_j^a)$$

Ricordiamo che ${\omega_\mu}^a{}_b = -{\omega_\mu}^b{}_a$.

Per ottenere la derivata di gauge covariante ad un tensore generico è sufficiente utilizzare la regola di derivazione di un prodotto e osservare che la derivata covariante coincide con la derivata classica se si effettua su uno scalare.

$$\partial_\mu(A^a B_a) = D_\mu(A^a B_a) = A^a D_\mu B_a + B_a \partial_\mu A^a + B_a {\omega_\mu}^a{}_b A^b$$

$$A^a \partial_\mu B_a + B_a \partial_\mu A^a = A^a D_\mu B_a + B_a \partial_\mu A^a + B_a {\omega_\mu}^a{}_b A^b$$

$$A^a \partial_\mu B_a = A^a D_\mu B_a + B_b {\omega_\mu}^b{}_a A^a$$

da cui

$$D_\mu B_a = \partial_\mu B_a - {\omega_\mu}^b{}_a B_b$$

In generale per un tensore di rango due

$$D_\mu A^a{}_b = \partial_\mu A^a{}_b + {\omega_\mu}^a{}_c A^c{}_b - {\omega_\mu}^c{}_b A^a{}_c$$

Dobbiamo applicare la connessione ω su ogni indice di Lorentz usando il segno positivo se l'indice è controvariante e il segno negativo se l'indice è covariante.

Notare anche la posizione degli indici essendo ${\omega_\mu}^a{}_b \neq {\omega_\mu}^b{}_a$.

A questo punto occorre definire una relazione che lega la derivata covariante di gauge a quella di Riemann e in particolare tra la connessione di Christoffel Γ e quella di Lorentz ω.

Consideriamo a tale proposito la derivata covariante delle delle tetradi.
Questi oggetti possiedono sia un indice vettoriale curvo, nella varietà Riemanniana, sia un indice vettoriale piatto nello spazio tangente.

$$\nabla_\mu V_\nu^a = \partial_\mu V_\nu^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha V_\alpha^a$$

Ricordando che $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$

$$\nabla_\alpha\left(\eta_{ab} V_\mu^a V_\nu^b\right) = 2\eta_{ab} V_\mu^a \nabla_\alpha V_\nu^b + V_\mu^a V_\nu^b \nabla_\alpha \eta_{ab} = 0$$

ma

$$\nabla_\alpha \eta_{ab} = -\omega_\alpha{}^c{}_a \eta_{cb} - \omega_\alpha{}^c{}_b \eta_{ac} = -(\omega_{\alpha ba} + \omega_{\alpha ab}) = 0$$

L'uguaglianza a zero è dovuta all'antisimmetria

$$\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}$$

L'equazione precedente si riduce allora alla condizione

$$\nabla_\mu V_\nu^a = 0$$

Tale condizione è conosciuto anche come postulato delle tetradi e può essere esplicitata dall'equazione

$$\partial_\mu V_\nu^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b{}_\nu = \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha V_\alpha^a$$

Esprimendo a questo punto Γ in funzione di g, e g in funzione delle teradi V, possiamo risolvere l'equazione precedente e calcolare $V = V(\omega)$.
A questo punto è opportuno esprimere la lagrangiana del campo gravitazionale

$$L = \frac{1}{k^2}\int dx^4 \sqrt{-g}\, R\,(\Gamma)$$

in funzione della connessione ω.
Ricordiamo che

$$R(\Gamma) = R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta}$$

è lo scalare di curvatura e

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}$$

è il tensore di Riemann.
Per esprimere la curvatura in funzione di V e ω consideriamo la derivata covariante seconda di un campo vettoriale A^adefinito sullo spazio tangente.
La derivata covariante prima coincide ovviaente con la derivata di Lorentz $D_\mu A^a$ (perché A^a non ha indici curvi). La derivata seconda agisce invece sia sull'indice piatto a che sull'indice curvo μ.

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^a = \partial_\mu\left(\partial_\nu A^a + \omega_\nu{}^a{}_b A^b\right) + \omega_\mu{}^a{}_c\left(\partial_\nu A^c + \omega_\nu{}^c{}_b A^b\right) - \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha D_\alpha A^a$$

Se prendiamo il commutatore delel due derivate covarianti i termini simmetrici si elidono e rimane

$$[\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu] A^a = \left[\partial_\mu \omega_\nu{}^a{}_b + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^c{}_b - \partial_\nu \omega_\mu{}^a{}_b - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^c{}_b\right] A^b$$

abbiamo considerato che

$$\Gamma_{[\mu\nu]}{}^\alpha = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}{}^\alpha\right) = 0$$

$$R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega) = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^{cb} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^{cb}$$

$$R(\Gamma) = R_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} = R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega) V_a^\mu V_b^\nu$$

Possiamo in definitiva scrivere

$$L = \frac{1}{2k}\int dx^4 \sqrt{-g}\, R\,(\Gamma) = \frac{1}{2k}\int dx^4 V\, R\,(\Gamma) = \frac{1}{2k}\int dx^4 V V_a^\mu V_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega)$$

Consideriamo ora l'equazione di Dirac in assenza di campo gravitazionale
$i\gamma^a \partial_a \psi - m\psi = 0$
e la relativa azione
$S = \int dx^4 \, (\bar{\psi} i\gamma^a \partial_a \psi - m\bar{\psi}\psi)$
con $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$

ricordiamo l'espressione delle matrici di Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la proprietà delle matrici di Dirac

$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = 2\eta^{ab}$
$(\gamma^0)^2 = 1$
$(\gamma^i)^2 = -1$
$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$
$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$
$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$
$(\gamma^5)^2 = 1$
$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$
$\gamma^5\gamma^a + \gamma^a\gamma^5 = 0$

Con i=1,2,3.

Infine secondo quanto già riportato nel paragrafo "Dall'equazione di Maiorana a quella di Dirac, invarianza relativistica dell'equazione di Dirac" una trasformazione di Lorentz su uno spinore di Dirac a quattro componenti può essere scritta nella forma
$U = \exp\left(-\frac{i}{4}\omega^{ab}\sigma_{ab}\right)$
e la derivata covariante
$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{4}\omega_\mu{}^{ab}\sigma_{ab}\right)\psi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{4}\omega_\mu{}^{ab}[\gamma^a, \gamma^b]\right)$
Se consideriamo sistemi fisici descritti da equazioni che sono invarianti per trasformazioni di Lorentz in uno spazio tempo di Minkowski, possiamo immergere tali sistemi in uno spazio tempo curvo di Riemann ossia rendere le stesse equazioni invarianti per trasformazioni generali di coordinate.
In pratica questa procedura consiste nelle segueti operazioni:
Sostituire la metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ con quella di Riemann $g_{\mu\nu}$.
Sostituire le derivate parziali ∂_μ con le derivate covarianti ∇_μ.
Sostituire l'integrale d'azione dx^4 con $dx^4\sqrt{-g}$.
Consideriamo ora l'azione di Dirac

$$S = \int dx^4\,(\bar{\psi} i\gamma^a \partial_a \psi - m\bar{\psi}\psi)$$

ed effettuiamo la procedura sopra descritta

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g}\left(\bar{\psi} i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi\right)$$

dove γ^μ sono le matrici di Dirac dello spazio tangente proiettata sulla varietà curva mediante le tetradi

$$\gamma^\mu = V_a^\mu \gamma^a$$

osserviamo che con questo artificio la relazione tra le matrici di Dirac

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\eta^{ab}$$

diventa

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = V_a^\mu V_b^\nu(\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a) = 2V_a^\mu V_b^\nu \eta^{ab} = 2g^{\mu\nu}$$

Se consideriamo il campo spinoriale ψ riferito allo spazio piatto tangente allora la derivata covariante totale ∇_μ coincide con la derivata covariante di gauge

$$D_\mu\psi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{4}\omega^{ab}[\gamma^a, \gamma^b]\right)\psi$$

In definitiva l'azione relativa ad uno spinore di Dirac in un campo gravitazionale si può scrivere nella forma

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g}\left(\bar{\psi} i\gamma^\mu \mathrm{D}_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi\right) - \frac{1}{2k}\int dx^4 V V_a^\mu V_b^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega)$$

con

$$R_{\mu\nu}{}^{ab}(\omega) = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} + \omega_\mu{}^a{}_c \omega_\nu{}^{cb} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} - \omega_\nu{}^a{}_c \omega_\mu{}^{cb}$$

$$D_\mu\psi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{4}\omega_\mu{}^{ab}[\gamma^a, \gamma^b]\right)\psi$$

il tensore metrico si può esprimere come funzioni delle tetradi secondo la reazione $g^{\mu\nu} = V_a^\mu V_b^\nu \eta^{ab}$ e di conseguenza anche la connessione di Christoffel $\Gamma = \Gamma(g)$

infine la connessione di gauge ω può essere espressa come funzioni delle tetradi $\omega = \omega(V)$ fruttando il postulato delle tetradi

$$\partial_\mu V_\nu^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b{}_\nu = \Gamma_{\mu\nu}{}^\alpha V_\alpha^a$$

Minimizzando l'azione rispetto a V si ottengono le equazioni di campo mentre minimizzando rispetto a ψ si ottengono le equazioni del moto.

Un modo differente di procedere è quello di considerare ψ V e ω come tre variabili indipendenti e di minimizzare l'azione rispetto a queste tre variabili.

Questo metodo è detto formalismo variazionale del primo ordine o formalismo di Palatini.