Equazioni di Dirac

Equazioni di Dirac

Nel 1928 Dirac propone un'equazione relativistica definita da una funzione d'onda a 4 componenti che permette di tener conto dello spin delle particelle e che descrive il moto di particelle ad energia negativa trovate da Anderson nel 1932 e chiamate antimaterie o antiparticelle.

Dirac conserva gli operatori utilizzati da Klein Gordon e Schrodinger

$$\hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t} \qquad \hat{p}_x = -i\frac{\partial}{\partial x} \qquad \hat{p}_y = -i\frac{\partial}{\partial y} \qquad \hat{p}_z = -i\frac{\partial}{\partial z}$$

ma impone che la sua equazione sia lineare in E e p_i.

Volendo dare la stessa forma dell'equazione di Schrodinger Dirac scrive

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-i\alpha^1\frac{\partial}{\partial x^1}-i\alpha^2\frac{\partial}{\partial x^2}-i\alpha^3\frac{\partial}{\partial x^3}+\beta m\right)\psi=\hat{H}\psi$$

dove α^1, α^2, α^3 e β sono delle matrici 4×4 opportunamente definite.

Le matrici saranno definite imponendo l'equazione relativistica $E^2=p^2+m^2$

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\left(-i\alpha^1\frac{\partial}{\partial x^1}-i\alpha^2\frac{\partial}{\partial x^2}-i\alpha^3\frac{\partial}{\partial x^3}+\beta m\right)\left(-i\alpha^1\frac{\partial}{\partial x^1}-i\alpha^2\frac{\partial}{\partial x^2}-i\alpha^3\frac{\partial}{\partial x^3}+\beta m\right)\psi$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\left[\alpha^i,\alpha^j\right]\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}+\beta^2m^2-i\left(\beta\alpha^i+\alpha^i\beta\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\psi$$

Da cui si ricava che deve essere

$$\left[\alpha^i,\alpha^j\right]=2\delta_{ij}\qquad\left(\beta\alpha^i+\alpha^i\beta\right)=0\qquad\beta^2=I$$

Riscriviamo l'equazione di Dirac moltiplicando per la matrice β.

$$i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\beta\vec{\alpha}\,\vec{\nabla}\psi + m\psi$$

A questo punto Dirac introduce le matrici γ^i così definite:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$\gamma^i = \beta\alpha^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4} \qquad i=1,2,3$$

dove σ_i sono le matrici di Pauli che ricordiamo

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'equazione di Dirac diventa

$$\left(i\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0}+i\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}-m\right)\psi=0$$

Di seguito le grandezze $\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ verranno indicate come

$\cancel{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ o come $\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}$

$$\boxed{\left(i\frac{\hat{\partial}}{\partial x^i}-m\right)\psi=0}$$

Equazione di Dirac.

$$\left(i\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i}-m\right)\psi=0$$

oppure

$$\left(i\gamma^i\partial_i-m\right)\psi=0$$

$$i\left(\hat{\partial}_i-m\right)\psi=0$$

Proprietà delle matrici di Dirac

Matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}; \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}; \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$\gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

$$\hat{a} = \sum_{i=0-3} \gamma^\mu a_\mu$$

Regole delle matrici γ.

1) Trasposizione e coniugazione

$$(\gamma^0)^\dagger = (\gamma^0)$$

$$(\gamma^i)^\dagger = -(\gamma^i)$$

2) Regole per il prodotto

$$(\gamma^0)^2 = 1$$

$$(\gamma^i)^2 = -1$$

3) Proprietà di anticommutazione

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2g^{ij}$$

$$\begin{cases} g^{ij} = g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ g^i{}_j = g_j{}^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

4) $$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

5) Proprietà della matrice $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(\gamma^5)^2 = 1$$

$$\{\gamma^5, \gamma^j\} = \gamma^5\gamma^j + \gamma^j\gamma^5 = 0 \qquad j = 0, 1, 2, 3$$

6) Matrici di Dirac con indice basso

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$$

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -2\gamma^\nu$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\mu = 4 g^{\lambda\nu}$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu = -2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu = 2(\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\rho + \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma)$$

7) Prodotti matrici per vettori

$$\begin{cases} \hat{a} = \gamma a = \gamma^\mu a_\mu \\ \hat{a}\hat{b} + \hat{b}\hat{a} = 2ab \\ \hat{a}\hat{a} = a^2 \end{cases}$$

$$\gamma_\mu \hat{a} \gamma^\mu = -2\hat{a}$$

$$\gamma_\mu \hat{a}\hat{b} \gamma^\mu = 4ab$$

$$\gamma_\mu \hat{a}\hat{b}\hat{c} \gamma^\mu = -2\hat{c}\hat{b}\hat{a}$$

$$\gamma_\mu \hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} \gamma^\mu = 2(\hat{d}\hat{a}\hat{b}\hat{c} + \hat{c}\hat{b}\hat{a}\hat{d})$$

Proprietà della traccia delle matrici di Dirac

Proprietà della traccia

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$

$$tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A)$$

$$tr(AB) = tr(BA)$$

$$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA)$$

→ La traccia di un numero dispari di matrici γ è nulla.

Infatti:

$$tr[\hat{a}_1 \hat{a}_2 - \hat{a}_n] = tr[\gamma^1 a_1 \gamma^2 a_2 - \gamma^n a_n] = tr[\gamma^1 a_1 \gamma^2 a_2 - \gamma^n a_n \gamma^5 \gamma^5]$$

$$= tr[\gamma^5 \gamma^1 a_1 \gamma^2 a_2 \cdots \gamma^n a_n \gamma^5](-1)^n =$$

$$= tr[\gamma^1 a_1 \gamma^2 a_2 \cdots \gamma^n a_n](-1)^n$$

dove si è sfruttata l'anticommutatività delle matrice γ^5 con γ^μ.

$$\mathrm{tr}\left[\hat{a}\,\hat{b}\right] = \mathrm{tr}\left(\frac{\hat{a}\,\hat{b} + \hat{b}\,\hat{a}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(a_\mu \gamma^\mu b_\mu \gamma^\mu + a_\mu \gamma^\mu b_\mu \gamma^\mu\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(2\left(a_\mu b_\mu \gamma^\mu \gamma^\mu\right)\right) = \mathrm{tr}\left(a_\mu b_\mu \gamma^\mu \gamma^\mu\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(a_0 b_0 \left(\gamma^0\right)^2 + a_i b_i \left(\gamma^i\right)^2\right) \qquad i = 1, 2, 3$$

$$= \mathrm{tr}\left(a_0 b_0 I - a_1 b_1 I - a_2 b_2 I - a_3 b_3 I\right) =$$

$$= \mathrm{tr}\left(\left(a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3\right) I\right) =$$

$$= a_i b^i\, \mathrm{tr}\left(I\right) = 4\, a_i b^i$$

$$\mathrm{tr}\left[\hat{a}\,\hat{b}\right] = 4\, a_i b^i = 4\left(a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3\right)$$