

Le forze fondamentali in natura sono:

1) forze gravitazionali

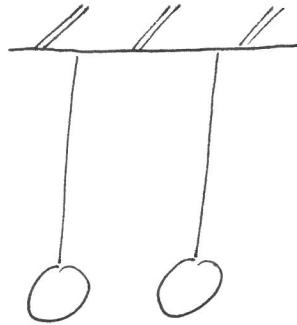
2) forze elettrostatiche

forze forti

3) forze deboli.

\* 4) forze elettrostatiche

sperimento



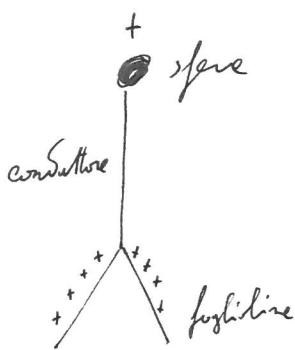
sfere sospese sottratte (quindi caricate) si allontanano o  
si rimpiccioliscono (restano ferme) e secondo del materiale con cui  
sono composte

\* 5) lo sottraiusco determina un'elettrizzazione delle sfere.

\* 6) Un corpo può essere caricato positivamente, negativamente o  
essere neutro.

\*) cariche dello stesso segno si respingono, cariche di segno opposto si attraggono.

misuratore di cariche



se la sfera è conica, le cariche si distribuiscono sulle foglioline da divergono.

Le divergenze delle cariche può misurare la conica della sfera.

\*) Si verifica sperimentalmente che la forza d'interazione tra due cariche è della forma

$$\vec{F} = \frac{k q_1 q_2}{R^2}$$

( $q_1$  e  $q_2$  possono avere segno opposto o uguale, tale segno determina il verso della forza).

\*) È possibile considerare  $k=1$  in tal caso la dimensione delle

$$\text{cariche sarà } \sqrt{\frac{m L^2}{t^2}}$$

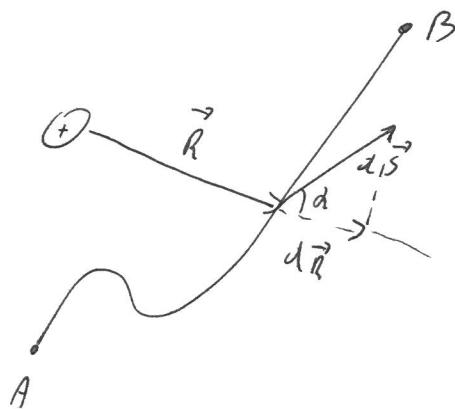
\*) È possibile considerare un campo di carica

1 coulomb = 1 C e determinare K

$$\left\{ \begin{array}{l} K = 9 \times 10^9 \\ K = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12} \end{array} \right.$$

Osservazione

Le forze elettrostatiche sono forze conservative.



$$dL_{AB} = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} \quad \hat{R} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2} dR$$

$$\hat{R} \cdot d\vec{s} = 1 \cdot ds \text{ and } d = dR$$

\* definiamo densità volumetrica di carica

$$\rho = \frac{dq}{dV} = \frac{C}{m^3}$$

densità superficiale di carica

$$\rho = \frac{dq}{ds} = \frac{C}{m^2}$$

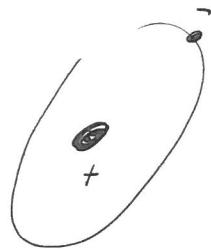
densità lineare

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{C}{m}$$

\* /) struttura dell'atomo

\* /) la carica è quantizzata  
minimo valore

H



$$q_{elettrone} = -1.6 \cdot 10^{-19} C$$

$$q_{proton} = 1.6 \cdot 10^{-19} C$$

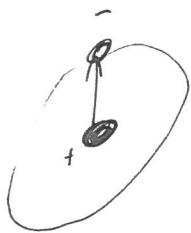
$$q_{neutrone} = 0$$

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} kg$$

$$m_p = 1840 m_e$$

$$m_n \approx m_p$$

\* Unità di grandezze forze gravitazionale elettostatica



atomo di idrogeno  $R: 1\text{A} = 10^{-10}\text{m}$

$$F_e = - \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2.56 \cdot 10^{-38}}{10^{-20}} = -2 \cdot 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_g = - \frac{6.67 \cdot 10^{11} \cdot 2.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1.6 \cdot 10^{-22}}{10^{-20}} = -1 \cdot 10^{-42} \text{ N}$$

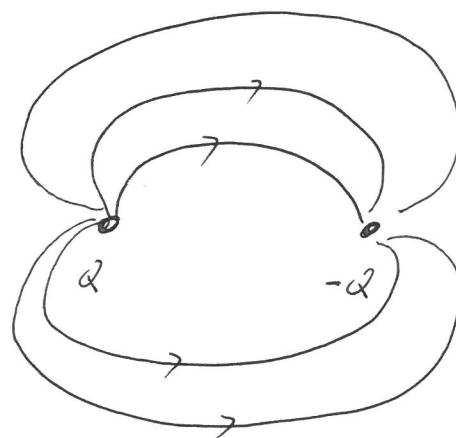
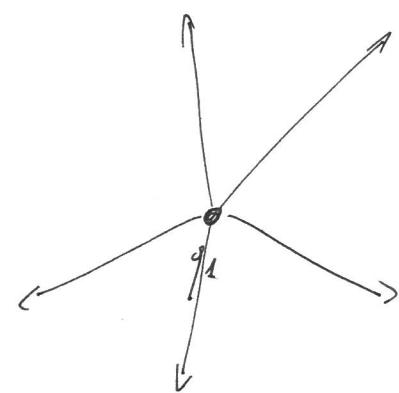
Le forze elettostatiche sono molto più intense delle forze "gravitazionali".

\*) Definizione di campo elettrico

Consideriamo una carica  $q_1$  il campo elettrico creato dalla carica  $q_1$  è definito come

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_1} \quad (q_2 = \text{carica Si pone introdotte}).$$

\*) Le linee di forza del campo sono tangenti alle forze esercitate su una carica di puro  $q_2$



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

$\vec{r}_i$  = (distanza carica punto forza della  $i$ -esima carica).

$$\vec{F} = q \vec{E} = m \vec{a}$$

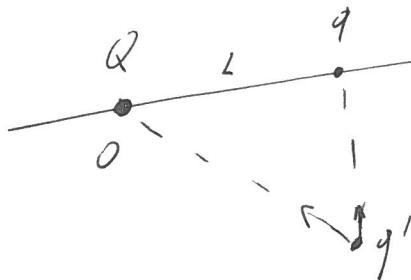
\* Se le cariche generatrici del campo sono influenzate dalle cariche immesse

$$\vec{E} = \lim_{q_2 \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dq_2} \quad \text{di fatto } q_2 \rightarrow \text{carica dell'elettrone}$$

Risorge il problema in caso di sistemi

microscopici con  $q_1$  molto piccola

## Esercizio



\*) calcolare il punto in cui  $q'$  è in equilibrio.

$q'$  è in equilibrio se  $\sum F$  applicate a  $q'$  è nulle.

Condizione necessaria affinché  $\sum F = 0$  è che  $F_1$  e  $F_2$  siano parallele

\*)  $q'$  deve necessariamente trovarsi sull'asse  $x$ .

assumiamo che  $|Q| > |q|$

1)  $x < 0$  non sono posizioni d'equilibrio per le definizione si fissa elettrica e la dipendenza della carica e dal raggio.

2) se le cariche hanno lo stesso segno non c'è soluzione  
e destro di  $q$   $x > L$

3) se le cariche hanno segni opposti  $x > L$

le forze agenti su q' devono essere opposte quindi

$$\frac{q'Q}{x^2} - \frac{q'q}{(x-L)} = 0 \quad (*)$$

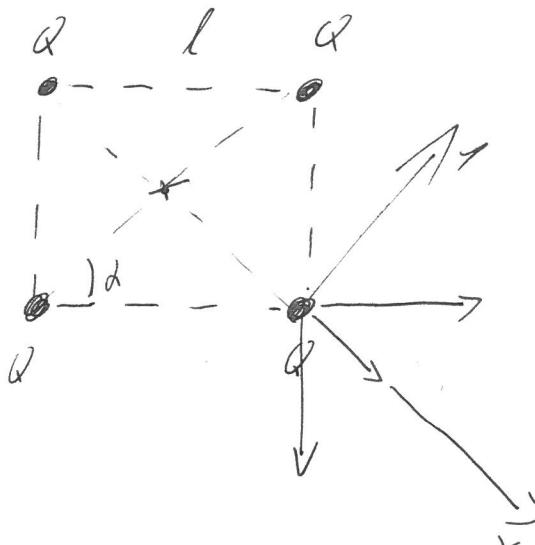
risolvendo l'equazione di secondo grado

$$x = \frac{L}{1-\frac{q}{Q}} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{1}{Q}} \right) \quad q, Q \text{ sono considerate in} \\ \text{modulo}$$

le soluzioni vanno scartate se non soddisfano le condizioni emerse inizialmente.

Nel caso in cui  $q = Q$  una soluzione è indeterminata  
e ne ve scartate poiché nelle (\*) è possibile semplificare  
 $q e Q$ .

II)



Le quattro cornici uguali sono poste ai vertici di un quadrato di lato  $l$

\* ) calcolare la posizione dove deve essere posta  $q$  affinché le 5 cornici siano in equilibrio.

Consideriamo una cornice  $Q$  e calcoliamo le forze agenti su tale cornice - Tali forze devono essere bilanciate dalle forze attrattive delle cornici  $q$  -

La risultante delle forze si trova lungo l'asse  $x$ , la posizione della cornice  $q$  che deve bilanciare tali forze deve essere sulla stessa linea. Essendo il ragionamento valido per ogni cornice  $Q$  la posizione di  $q$  è data dall'intersezione delle diagonali del quadrato

Dalle condizioni di equilibrio la risultante delle forze è nulla. Lungo l'asse  $x$

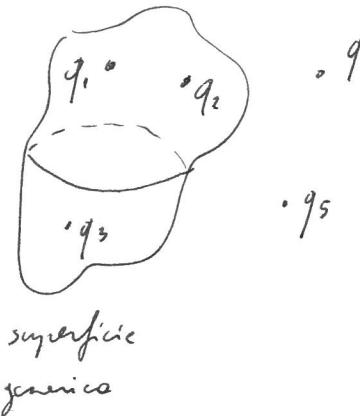
$$2 \cdot \frac{Q^2}{l^2} \cdot \cos\alpha + \frac{Q^2}{l^2 \sin^2 \alpha} = \frac{q Q}{l^2 \sin^2 \alpha}$$

$$\sqrt{2} \frac{Q^2}{l^2} + \frac{Q^2}{l^2} = \frac{q Q}{l^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} Q + \frac{Q}{2} = 2q$$

$$\left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2q}{Q} \quad \frac{q}{Q} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq -0.95$$

\* ) Teorema di Gauss



Il teorema di Gauss afferma che

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i^n Q_i$$

(flusso)

$Q_i$  = carica interna alla superficie.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

$\vec{n}$  vettore normale alla superficie diretto verso l'esterno.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \text{contributo del flusso delle cariche } q_i = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{l}_i \cdot \vec{n} dS$$

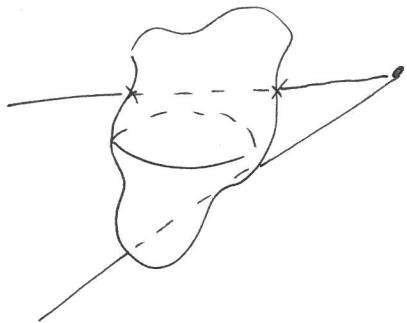
$$= \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \underbrace{\cos \theta dS}_{dS'}$$

$$\frac{dS'}{r_i^2} = d\Omega \text{ (elemento angolo solido)}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0} \int_S d\omega = \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0} \cdot 4\pi \quad \left( \int_S d\omega = 4\pi \right)$$

\* ) il contributo è indipendente dalla posizione delle coniche

\* ) il contributo delle coniche esterne è nullo.

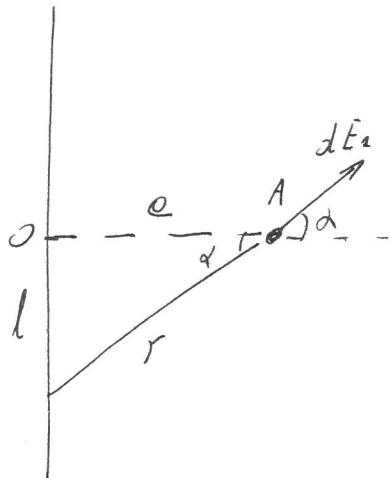


ogni linea incontra la superficie un numero pari di volte (se le coniche è esterne)

il contributo del flusso è nullo.

## applicazione del teorema di Gauss

Determinare il valore del campo elettrico determinato da un filo infinito conico.



\* La direzione del campo elettrico è ortogonale al filo.

Determina il modulo

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\alpha$$

$$d = r \cos\alpha$$

$$l = \epsilon_0 T \cos\alpha$$

$$dl = \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha \quad \text{sostituendo in funzione di } \epsilon_0 \text{ e } \alpha$$

$$d\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \frac{a}{\cos^2\alpha} \cos\alpha}{\epsilon_0^2} d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_0} \cos\alpha d\alpha$$

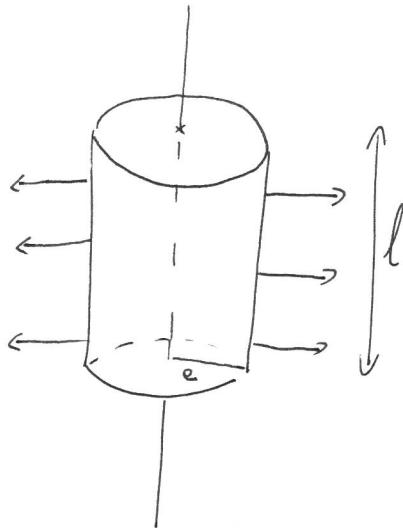
180

$$E = \int_{0}^{180^\circ} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\epsilon_0} \cos\alpha d\alpha = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 \epsilon_0}$$

0

15

\*) risolviamo lo stesso esercizio applicando il teorema di Gauss.



il campo sulla superficie del cilindro è uniforme.

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_{\text{ext}} 2\pi a l$$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad (\text{secondo il Teorema di Gauss})$$

ognegliano

$$E_{\text{ext}} 2\pi a l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

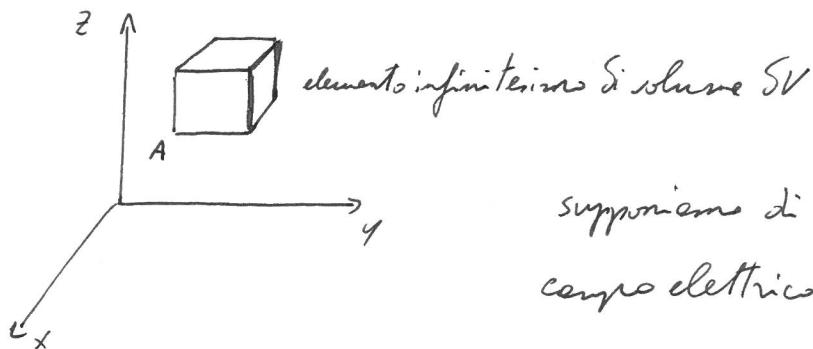
$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 a}$$

$$*) \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum Q_i = \frac{\int \rho dV}{\epsilon_0} \quad \text{dove } \rho = \frac{dQ}{dV}$$

\*) Formulazione del Teorema di Gauss mediante le divergenze del campo elettrico.



Supponiamo di considerare come varia il campo elettrico in funzione della posizione

$$\begin{cases} \bar{E}_x = \frac{\delta E_x}{\delta x} dx & \text{e il vettore } \vec{E} \text{ in } A \\ \bar{E}_y = \frac{\delta E_y}{\delta y} dy \\ \bar{E}_z = \frac{\delta E_z}{\delta z} dz \end{cases} \quad \vec{E} = (\bar{E}_x, \bar{E}_y, \bar{E}_z)$$

1) il contributo dato al flusso elementare  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$  dalle due facce parallele al piano  $y, z$  è:

$$d\oint \vec{E} \cdot d\vec{s}_1 = (\bar{E}_x + \frac{\delta E_x}{\delta x} dx - \bar{E}_x) dy dz$$

2) il contributo dato dalle facce parallele al piano  $x, z$  è

$$S \oint (\vec{E})_z = \left( E_y + \frac{\delta E_y}{\delta y} dy - E_y \right) dx dz$$

3) il contributo dato dalle facce parallele al piano  $x, y$

$$d \oint (\vec{E}_z) = \left( E_z + \frac{\delta E_z}{\delta z} dz - E_z \right) dx dy$$

$$d \Phi (\vec{E}) = \left( \frac{\delta E_x}{\delta x} + \frac{\delta E_y}{\delta y} + \frac{\delta E_z}{\delta z} \right) dV$$

↳ divergenza campo elettrico

Si definisce vettore  $\vec{D} = \left( \frac{\delta}{\delta x}, \frac{\delta}{\delta y}, \frac{\delta}{\delta z} \right)$

$$d \phi E = \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

$$\oint (\vec{E}) = \int_V \text{divergenza } \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \quad \rho = \text{densità - Si conice}$$

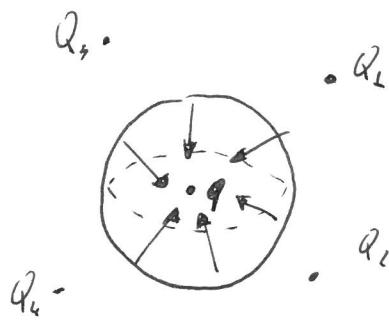
$$\text{div. } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

\* Osservazione.

Una carica libera non può trovarsi in equilibrio stabile.

Condizione necessaria ma non sufficiente affinché una carica sia in equilibrio è  $\vec{F} = 0$

Considero una carica  $q$  in un campo elettrico generato da cariche esterne a una superficie sferica infinitesima contenente la carica  $q$ .



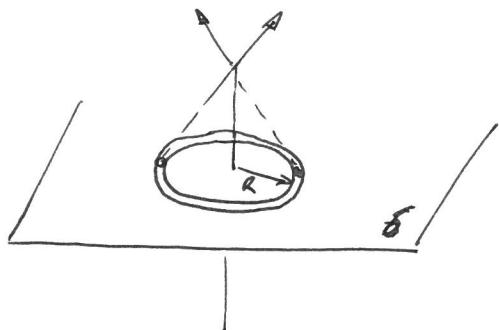
→: direzione del campo elettrico generato dalle cariche esterne affinché la posizione di  $q$  sia stabile.

Dalla definizione di  $\phi(\vec{E})$  significa che in tale orientamento determina  $\oint(\vec{E}) \neq 0$  contro il teorema di Gauss che vuole il contributo al flusso delle cariche esterne nullo.

\* )

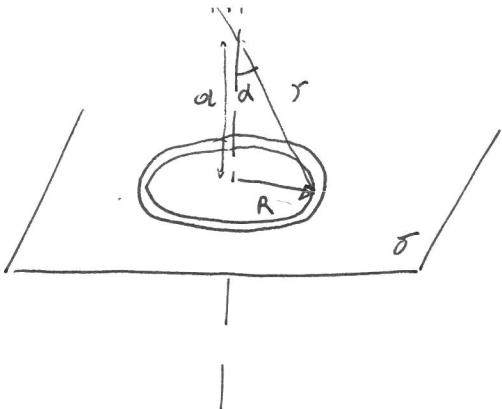
$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (\text{se } r \text{ è molto piccolo rispetto alle lunghezze del filo}).$$

\* ) campo elettrico di un piano uniformemente carico.



Se il piano è esteso in tutte le direzioni precedente per corone circolari verifico che i contributi di  $\vec{E}$  paralleli al piano sono nulli.

1) Il campo elettrico  $\vec{E}$  è perpendicolare al piano.



$$dE_L = \frac{\sigma 2\pi R dR}{4\pi \xi^0 r^2} (\text{area charge density } \sigma = Q) \cos \alpha$$

$$= \frac{\sigma R dR \cos \alpha}{2\xi^0 r^2}$$

integrando in  $\alpha$   
 $\frac{R}{r} = \operatorname{tg} \alpha$   
 $\frac{a}{r} = \cos \alpha$   
 $dR = r \frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha$

$$dE_L = \frac{\frac{\sigma}{2\xi^0} \times \operatorname{tg} \alpha \frac{a}{\cos^2 \alpha} da \cos \alpha}{\cancel{r^2}} = \frac{\sigma}{2\xi^0} r a da =$$

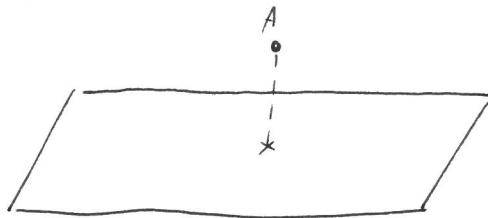
$$= \frac{\sigma}{2\xi^0} (-a \cos \alpha) \quad \text{integrande } \alpha = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$E_L = \frac{\sigma}{2\xi^0}$$

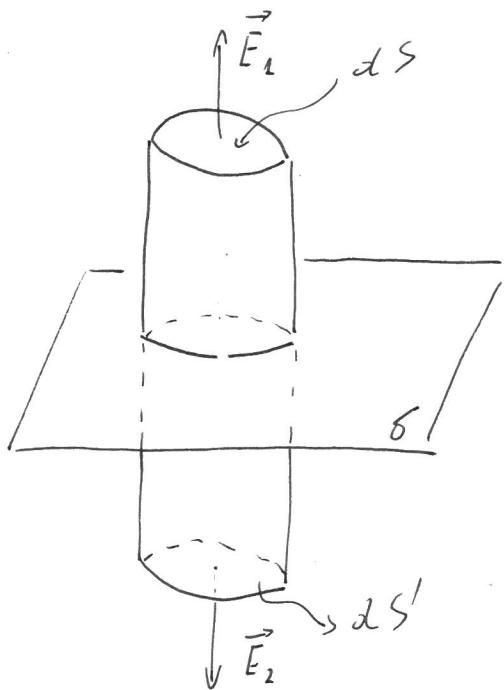
\* Un piano forma un campo elettrico costante.

\* la dimostrazione risulta più semplice se si applica

il Teorema di Gauss.



per regioni di simmetria si verifica che il campo è costante alle stesse distanze e i contributi al  $\vec{E}$  paralleli al piano sono nulli:



$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| \times \text{la Sistenza di } ds, ds'$   
dal piano è la stessa

Il flusso lungo le pareti laterali del cilindro è nullo

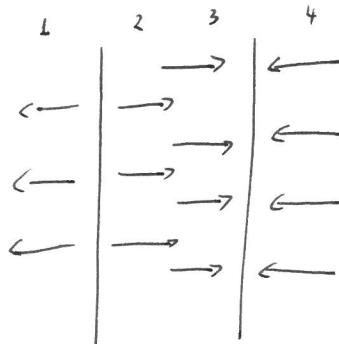
il flusso attraverso  $ds = \text{flusso attraverso } ds'$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sigma ds}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

\*) Caso del slippio stretto

considero due piani paralleli concili un po' positivamente  
l'altro negativamente

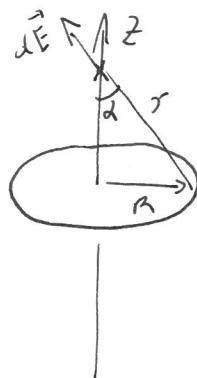


$\delta^+$      $\delta^-$

e sinistra dei due piani  $\vec{E} = 0$  per contributi 1 e 3  
analogoamente destre per 4 e 2.

Tra i due piani  $\vec{E} = \ell \cdot \frac{\delta}{2\pi c_0}$

\* ) Anello filiforme uniformemente carico.



Il valore del campo elettrico è facilmente calcolabile nei punti  
null'onde  $z$  essendo nullo il contributo normale all'asse.

$$dE_z = \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{and} \quad \lambda, r = \text{costanti}$$

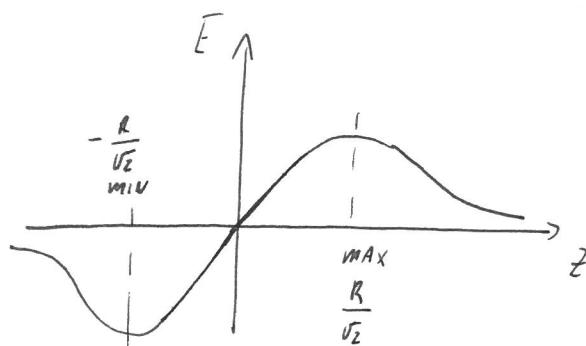
$$E_z = \frac{2\pi R \lambda \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cos\alpha$$

considero la variabile  $z$

$$\begin{cases} r \cos\alpha = z \\ r = \sqrt{z^2 + R^2} \end{cases}$$

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

grafichiamo  $f(z) = F$



$$\begin{cases} a < 0 & F = \infty \\ a > 0 & F = 0 \end{cases}$$

(all'infinito il campo se con  $\frac{1}{z^2}$  come se l'anello fosse una conica puntiforme.)

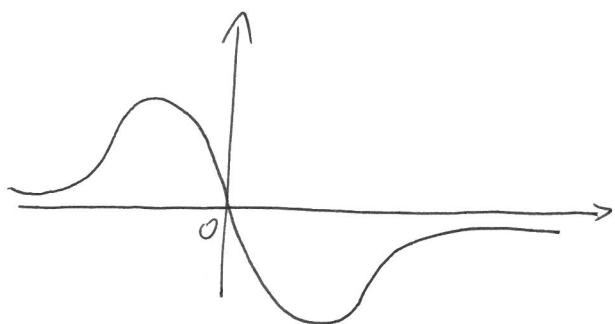
$$\frac{dF}{dz} = \frac{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - z \frac{3}{2} (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2z}{( )^3} = 0$$

$$z^2 + R^2 - 3z^2 = 0 \quad z = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$

\*) Se la conica è vincolata all'asse z l'origine

è un punto di equilibrio instabile (nel grafico in figura  
in cui la conica introdotto ha lo stesso segno dell'anello)

stabile nel caso in cui i segni siano contrari.



\* ) la tangente nella o  
è negativa indica un  
equilibrio instabile .

\* ) Se le cariche si spostano dalla posizione di  
equilibrio o ha un moto armonico (nel caso in cui  
le cariche siano di segno opposto) determiniamo la pulsazione .

$$\ddot{z} = -\omega^2 z \quad \text{equazione del moto armonico}$$

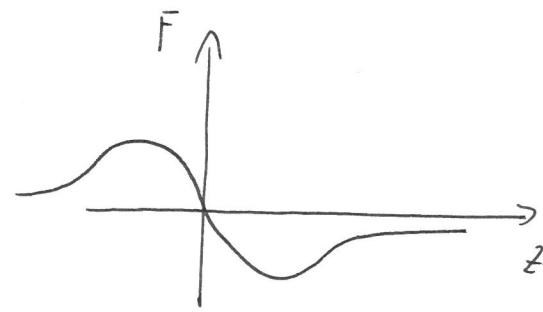
$$m\ddot{z} = -\frac{Qq z}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

in un intorno della posizione  
di equilibrio  $z \ll R$

$$m\ddot{z} = -\frac{Qq z}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

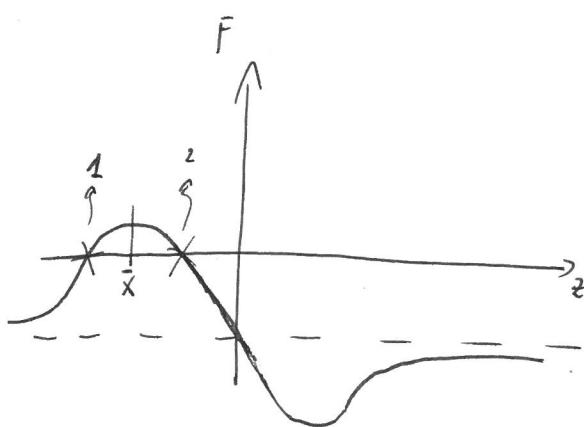
$$\omega = \sqrt{\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}}$$

\*) influenza delle gravi-



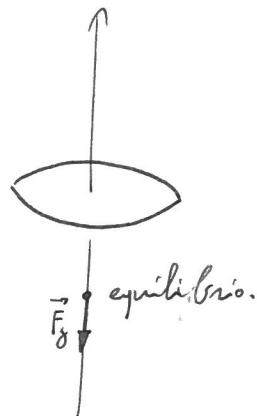
nell'equazione delle forze elettrostatiche dovo aggiungere le forze di gravità costante

$$\ddot{z} + \omega^2 z = a \quad ( \text{ forma dell'equazione differenziale } \\ \text{ ottenuta aggiungendo le forze gravit.})$$



1= punto d'equilibrio instabile

2= punto equilibrio stabile



Nel caso in cui le forze gravitazionali & maggiore delle forze elettrostatiche in modo che  $f(z) < 0$  allora non vi saranno punti di equilibrio.

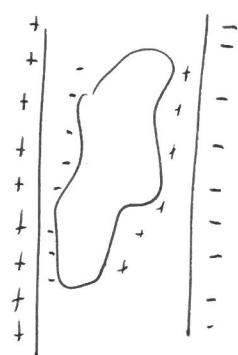
\* Definizione di conduttori e carattere microscopico.

Un conduttore è caratterizzato dall'avere cariche libere all'interno.



affinché il conduttore sia in equilibrio statico  $\vec{E} = 0$

\* il conduttore raggiunge la posizione delle cariche in modo che  $\vec{E} = 0$  (si parla per intuizione)



\* ) In un conduttore conico in equilibrio le cariche si distribuiscono sulla superficie esterna .

All'equilibrio  $\vec{E} = 0$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\sum Q_{interno}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow (Q_{interno} = 0)$$

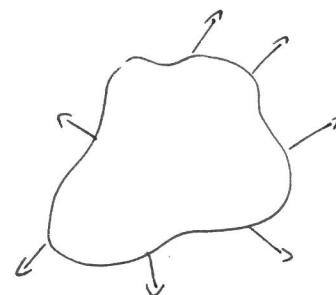
All'interno all'equilibrio un conduttore è neutro.

\* ) Determino il campo esterno generato da un conduttore conico -

Esso sarà perpendicolare alla superficie poiché se si fosse una componente tangenziale queste indurrebbe le cariche a muoversi.

Applichiamo il Teorema di Gauss

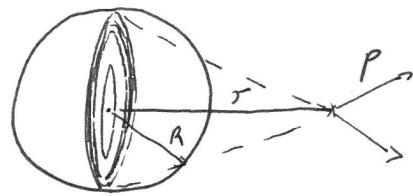
$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \frac{S}{\epsilon_0}$$



(Teorema S. Coulomb).

$\frac{S}{\epsilon_0}$  = valore  $E$  sulla superficie  
del conduttore .

\*1) Calcolare il campo elettrico di una sfera isolante di raggio  $R$  e densità di carica costante.



Procedendo per corone circolari si può convincere che il campo generato sarà radiale e pari al campo generato da un punto avente la carica complessiva e posta nel centro delle sfere.

Se  $r \rightarrow R$  il campo elettrico  $E$  in  $P$  può essere calcolato con il teorema di Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

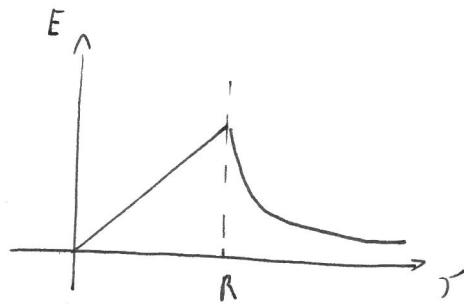
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

Nel caso in cui  $r < R$

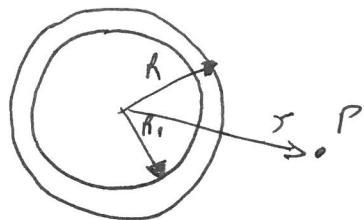
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\vec{E} = \frac{Q \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 R^3}$$



\*) Campo elettrico generato da una sfera carica omogenea.



1) se  $r < R_1$  il campo elettrico è nullo essendo  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

$$2) r > R \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E 4\pi r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi (R^3 - R_1^3)}{\epsilon_0}$$

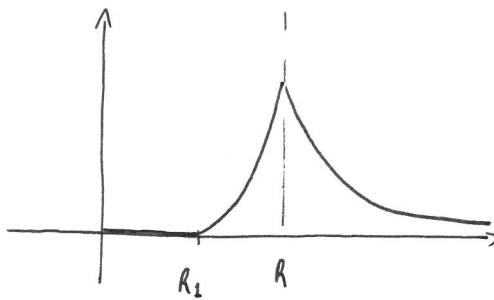
$$\vec{E} = \frac{\rho (R^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$3) \begin{cases} r < R \\ r > R_1 \end{cases}$$

$$Q = \rho \int_{R_1}^r 4\pi r^2 dr = \rho \frac{4}{3}\pi (r - R_1)$$

$$\oint (\vec{E}) = E \cancel{\pi} r^2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi (r - R_1)}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho (r - R_1)}{3\epsilon_0 r^2} \cdot \hat{r}$$



\*) Se la densità di una sfera non è costante ma  
si prende sul raggio ad es.

$$\rho(r) = \alpha r^2$$

$$Q = \int \alpha r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4}{5} \pi \alpha r^5$$

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{\alpha r^3}{5 \epsilon_0} \hat{r}$$

\* Essendo il campo elettostatico conservativo è possibile definire una funzione energia potenziale

$$\Delta U = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Definiamo la funzione potenziale come

$$- \Delta V = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Delta U = q \Delta V$$

$$* - \Delta V = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) + \text{costante}$$

Se assumo per convenzione che il potenziale sia nullo dove le forze è nulle (all'infinito) avrò:

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

Nel caso in cui abbiamo più campi

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Se la distribuzione si carica è continua

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dl}{r}$$

Se scompongo il campo secondo tre direzioni ortogonali.

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\delta V}{\delta x} \\ E_y = -\frac{\delta V}{\delta y} \\ E_z = -\frac{\delta V}{\delta z} \end{cases} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot V$$

Il teorema di Helmholtz afferma, sotto ipotesi di estensione  
ampie, che le derivate seconde miste sono indipendenti  
dell'ordine di derivazione

$$\frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 V}{\delta y \delta x} \Rightarrow \frac{\delta E_x}{\delta y} = \frac{\delta E_y}{\delta x}$$

Tale Teorema mi fornisce tre equazioni scalari le quali possono essere scritte nelle forme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

che equivalgono alla matrice

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o anche} \quad \text{rot } \vec{E} = 0$$

\* ) Per tutti i campi conservativi il rotore deve essere nullo, e per questo che tali campi vengono detti instazionali.

\* E' possibile scrivere le prime due equazioni di Maxwell

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{array} \right.$$

essendo  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$  la 1<sup>a</sup>

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = \vec{\nabla}^2 V$$

$$\vec{\nabla}^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$\vec{\nabla}^2$  operatore laplaciano =  $\Delta$

la 1<sup>a</sup> puo essere scritta

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{equazione di Poisson}).$$

$$*) \Delta V = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Il luogo dei punti a potenziale costante è detta superficie equipotenziale -

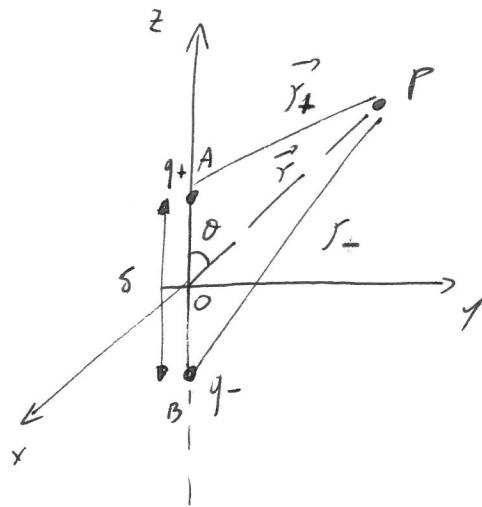
Le superfici equipotenziali sono normali alle linee di forza -

\*) L'unità di misura del potenziale è il volt =  $\frac{\text{Joule}}{\text{coulomb}}$

$$[F] = \frac{\text{volt}}{\text{metri}}$$

\* ) Dipolo.

Un sistema di due cariche opposte in modulo, opposte in segno poste a una distanza  $\delta$  è detto dipolo.



Si definisce momento del dipolo  $\vec{p} = q \vec{\delta}$   $\vec{\delta} = (A - B)$

Il potenziale nel punto P sarà

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

Per distanze abbastanza grandi si fanno le seguenti approssimazioni:

$$r_- - r_+ = \delta \cos \theta \quad r_+ \cdot r_- = r^2$$

$$V(P) : \frac{q \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

oppure essendo  $\cos \theta \approx \frac{z}{r}$

$$\tilde{V}(P) = \frac{P}{4\pi \epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_x = - \frac{\delta V}{\delta x} = \frac{3P_x z}{4\pi \epsilon_0 r^5} \end{array} \right.$$

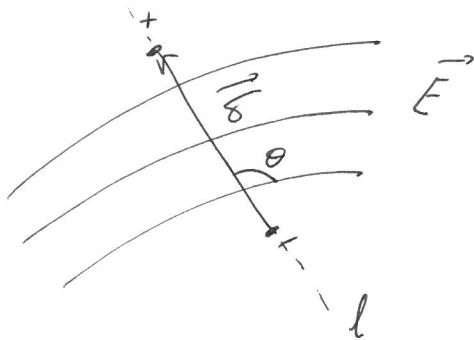
$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_y = - \frac{\delta V}{\delta y} = \frac{3P_y z}{4\pi \epsilon_0 r^5} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_z = - \frac{\delta V}{\delta z} = \frac{P}{4\pi \epsilon_0} \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \end{array} \right.$$

$$\tilde{E}_z = \frac{P}{4\pi \epsilon_0} \frac{\cos^2 \theta - 1}{r^3} \quad \tilde{E}_\perp = \frac{P}{4\pi \epsilon_0} \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{r^3} \quad (\text{variazione del campo ortogonale a } x \text{ si ottiene con altre approssimazioni e considerazioni}).$$

\* ) Un campo generato da un dipolo decresce con  $\frac{1}{r^3}$  è più debole del campo generato da una cerica puntiforme.

Supponiamo di porsi il dipolo in un campo esterno



$$\text{l'energia potenziale sarà } V = -qV + qV'$$

$$\text{se le distanze }\delta \text{ è piccola} \quad \frac{V' - V}{\delta} \approx \frac{dV}{dl}$$

$$V' = V + \frac{\delta V}{\delta l} \delta$$

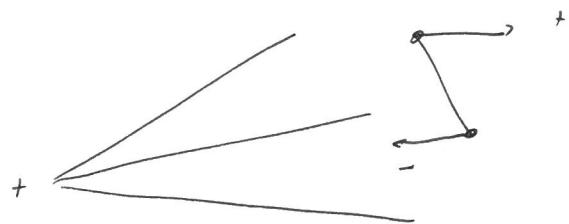
$$V = -qV + qV + q\delta \cdot \frac{\delta V}{\delta l}$$

$$\frac{\delta V}{\delta l} = -E \cos \theta \quad (\theta = \text{angolo compreso tra il campo e la direzione del dipolo}).$$

$$V = -q\delta E \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

$$F = -\vec{\nabla} V = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E})$$

Se il campo è costante non si è forze ma può esserci  
un momento  $\vec{M} = \vec{p} \times \vec{F}$

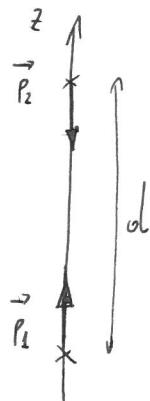


Il momento escente sul dipolo tende ad allinearsi con  
le linee di forza del campo.

In un campo elettrico non costante un dipolo viene  
sempre attirato dalle sorgenti del campo.

$$*) \vec{P}_1 = q_1 \vec{\delta} \text{ (dipolo fisso)}$$

$$\vec{P}_2 = q_2 \vec{\delta} \text{ (dipolo libero di ruotare)}$$



- 1) Quale orientamento raggiunge  $\vec{P}_2$  all'equilibrio  
 2) Di quanto varia la sua energia potenziale  
 3) A quale forza risultante è soggetto  $\vec{P}_2$  a  
 opera di  $\vec{P}_1$  nella situazione finale.

Calcolo il potenziale  $V$ , ricavo l'energia potenziale  $U$ , la posizione di equilibrio è quella che minimizza  $U$ .

$$V_{(\text{generato da } p_1)} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^+} - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^-} = \frac{q_2(r^- - r^+)}{4\pi\epsilon_0 r^+ r^-} \approx \frac{q_2 \delta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$U_{in} = qV = (U_+) + (U_-) = q_2 V(r) - q_2 V(r+\delta) = (\text{essendo } \delta \text{ trascurabile})$$

$$= q_2 V(r) - q_2 \left[ V(r) + \frac{dV}{dr} \delta \right] = - q_2 \frac{dV}{dr} \delta = q_2 E(r) \delta = P_2 E(r)$$

$$E(r) = - \frac{dV}{dr} = - \frac{P_1}{4\pi\epsilon_0} \quad \frac{d}{dr} \frac{r^{-2}}{r} = \frac{r P_1}{24\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} (= \delta^3)$$

$$U_{in} = \frac{P_2 P_1}{2\pi\epsilon_0 \delta^3} > 0$$

Le posizioni che minimizzano  $V$  sono quelle che invertono le cariche del secondo dipolo.

$$V_f = q_2 V(r+\delta) - q_2 V(r) = -\bar{U}_i = -\frac{P_1 P_2}{2\pi \epsilon_0 d^3}$$

$$\Delta U = -\frac{P_1 P_2}{\pi \epsilon_0 d^3}$$

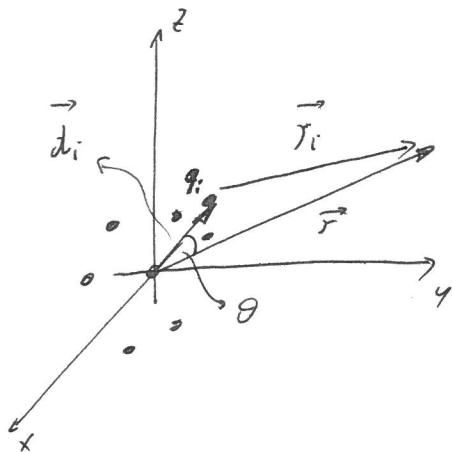
Per calcolare le forze ricordiamo che  $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = \frac{P_1 P_2}{2\pi \epsilon_0} \frac{d r^{-3}}{dr} = -\frac{3 P_1 P_2}{2\pi \epsilon_0 r^4} \end{cases}$$

\* le forze sono dirette in verso opposto all'asse  $z$  e attrattive.

Decresce molto rapidamente all'aumentare delle distanze.

\* ) Potenziale generato da un numero finito di cariche  
in una regione di spazio sufficientemente lontana  
dalle cariche stesse.



$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$\vec{r}_i = (\vec{r} - \vec{d}_i)$$

$$r_i = |\vec{r} - \vec{d}_i| \approx r - d_i \cos\theta = r - \vec{d}_i \cdot \frac{\vec{r}}{r} = r \left( 1 - \frac{\vec{d}_i \cdot \vec{r}}{r^2} \right)$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \sum_i \frac{q_i}{\left( 1 - \frac{\vec{d}_i \cdot \vec{r}}{r^2} \right)}$$

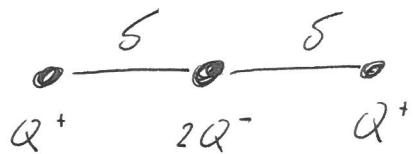
$$\left( 1 - \frac{\vec{d}_i \cdot \vec{r}}{r^2} \right)^{-1} \text{ è un'espressione della forma } \begin{cases} \frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + x^2 + \dots \\ x \ll 1 \end{cases}$$

$$V(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \sum_i q_i \left( 1 + \frac{\vec{d}_i \cdot \vec{F}}{r^2} + \frac{(\vec{d}_i \cdot \vec{F})^2}{r^4} + \dots \right)$$

$$V(p) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{Q}{r} + \vec{F} \cdot \frac{\sum_i q_i \vec{d}_i}{r^3} + \frac{\sum_i (\vec{d}_i \cdot \vec{F})^2 / q_i}{r^5} \dots \right]$$

↓                      ↓                      ↓  
 Termine d.  
monopolo            Termine d.  
dipolo                Termine d.  
quadru polo.

\*) Il seguente esempio mostra un caso in cui il contributo più forte al potenziale è dato dal termine d. quadru polo.

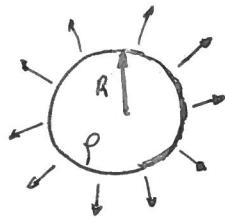


Termine d.  
monopolo = 0       $\sum_i Q = 0$

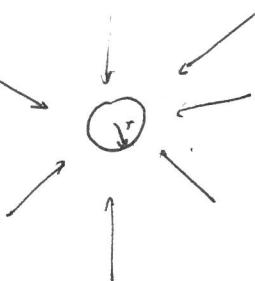
Termine d.  
dipolo = 0

A diagram showing a horizontal line with two circles representing charges. The left circle is labeled  $P_2$  and the right circle is labeled  $P_1$ . Below the line, there are two arrows pointing towards the right circle, each labeled  $r$ . The left arrow is labeled  $+$  and the right arrow is labeled  $-$ .

\*) Energia potenziale che compete ad una sfera avente una distribuzione di carica uniforme.



Considerando  $V=0$   $R=\infty$  tale energia rappresenta il lavoro occorrente per portare le cariche dall'infinito e formare la sfera stessa.



$$dU = V_{(q)} dq$$

$V$ : potenziale che compete alla superficie sferica di raggio  $r$ .

$$dU = \frac{q(r)}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} dq$$

$$\left\{ q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \right.$$

$$\left. dq = \rho 4\pi r^2 dr \right.$$

$$dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \cdot \frac{1}{r} \rho 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 r^4 dr$$

$$U = \int_0^R \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho' r^4 dr = \frac{4\pi R^5 \rho^2}{3\epsilon_0 5} = \frac{QR^2\rho}{\epsilon_0 5} = \frac{Q}{\epsilon_0 5} \cdot \frac{R^2 Q_3}{4\pi R^2} =$$

$$= \frac{3Q}{5} \cdot \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R} = \frac{3}{5} Q V_{\text{sup}}$$

\* / In un modo del tutto generale si può calcolare l'energia potenziale che esiste ad un sistema. Si considera

In un sistema discreto l'energia  $U$  è pari alla somma di significate  $q_i$  per il potenziale delle altre cariche generate nelle posizioni che esse occupano.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{r_{ij}} \quad r_{ij} = \text{distanza delle cariche } i, j$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad \begin{aligned} & \left( \text{sviluppando le coppie connettive} \right. \\ & \left. \text{ogni termine } \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{q_j q_i}{r_{ji}} \text{ viene preso 2 volte} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i q_i \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \quad \left( V_i: \text{potenziale generato} \right. \\ \left. \text{nella posizione della carica } i \right)$$

Per un sistema continuo

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\tau} V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau$$

ma  $\vec{\nabla}(V\vec{E}) = V\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \vec{E}\vec{\nabla}V = V\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - \vec{E}\cdot\vec{E} = V\vec{\nabla}\cdot\vec{E} - E^2$

Da cui  $V\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}(V\vec{E}) + E^2$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{\tau} [\vec{\nabla}(V\vec{E}) + E^2] d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int_{\tau} \vec{\nabla}(V\vec{E}) d\tau + \int_{\tau} E^2 d\tau \right]$$

$$= \underbrace{\frac{\epsilon_0}{2} \oint_S \vec{\nabla}(V\vec{E}) \vec{n} dS}_{\text{all'infinito tale termine è nullo}} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau} E^2 d\tau$$

infatti  $V$  decresce di esponenzialmente con  $\frac{1}{r}$

$$E \quad " \quad " \quad \frac{1}{r^2}$$

$$dS \text{ varia con } r^2$$

Pertanto

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau} E^2 d\tau$$

$$U = \int_{\tau} \underbrace{\left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right)}_{\text{densità di energia in ciascun locale}} d\tau$$

↳ densità di energia in ciascun locale.

\* ) Dimostrare che le due formule si puo' ricavare in particolare  $U$  sara omogeneamente concavo.

$$U = \frac{3}{5} Q V_{\text{sup}} \quad (\text{come visto precedentemente}).$$

$$r \geq R \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

$$r < R \quad 4\pi r^2 E = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r^3}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$V = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau} E^2 d\tau$$

$$V = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int_0^R \frac{P^2 r^2}{2 \epsilon_0^2} \cdot 4\pi r^2 dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Q^2}{r^4} \cdot 4\pi r^2 dr \right] =$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \frac{4\pi P^2}{2 \epsilon_0^2} \frac{R^5}{5} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} Q^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \int_R^x \frac{1}{r^2} dr \right] =$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \frac{4}{9} \frac{\pi}{\epsilon_0^2} P^2 \frac{R^5}{5} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} Q^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{x} + \frac{1}{R} \right] \right] =$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \frac{4}{9} \frac{\pi}{\epsilon_0^2} P^2 \frac{R^5}{5} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0^2} \frac{Q^2}{R} \right]$$

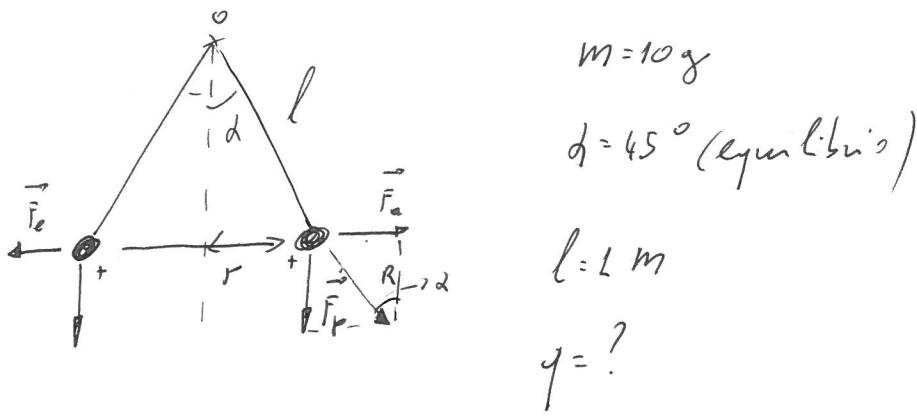
$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{9} \frac{\pi}{\epsilon_0} \frac{P^2 R^5}{5} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2 R} + Q V_{sup} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{Q^2}{5 \cdot 4 \cdot 6\pi R} + Q V_{sup} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{Q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0 R} + Q V_{sup} \right]$$

$$= \frac{Q V_{sup}}{10} + \frac{Q V_{sup}}{2} = \frac{3}{5} Q V_{sup}$$

# Probleme



$$t_{gd} = \frac{|\vec{F}_e|}{|\vec{F}_p|} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 my} \quad \frac{r}{l} = \tan \alpha$$

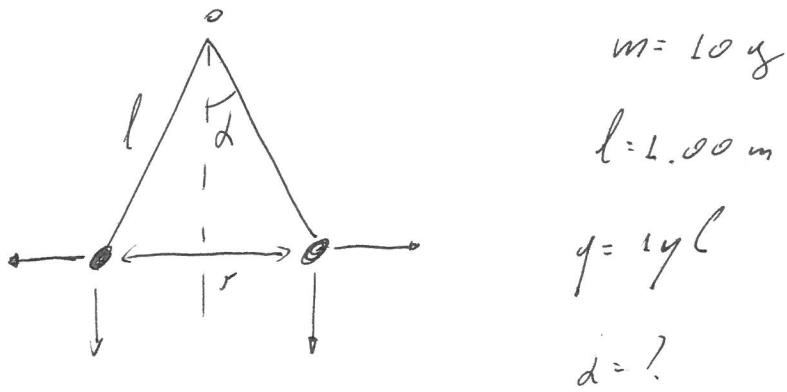
$$r^2 = l^2 \tan^2 \alpha$$

$$q^2 = 4\pi\epsilon_0 my \text{ und } t_{gd} = l^2$$

$$t_{gd} = 1 \quad \tan^2 \alpha = \frac{1}{2} \quad l^2 = 1$$

$$q^2 = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 9.8 = 7.4 \text{ N} \quad l = 10^{-6}$$

\* Viene supponiamo



$$m = 10 \text{ g}$$

$$l = 1.00 \text{ m}$$

$$q = 1 \text{ N}$$

$$\alpha = ?$$

$$q^2 = 4\pi \epsilon_0 mg l^2 m' d \tan \alpha$$

$$m' d = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \quad \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0 mg l^2} = \alpha = 0.91$$

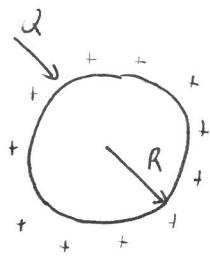
$$\alpha = \frac{\tan^3 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\tan^3 \alpha = \alpha \tan^2 \alpha + \alpha$$



\*) Condensatori elettrostatici

Consideriamo una sfera conica conduttrice



$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R}$$

Se mettiamo le sfera conduttrice in contatto con il suolo  
traverso un loro conduttore (messe a terra) le cariche si  
distribuiscono sulla superficie terrestre  $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R_T} \approx 0$

Fissata la configurazione di un conduttore esiste una  
proporzionalità fra  $Q$  e  $V$

$$Q = C V$$

$$(C = \text{capacità elettrica}) \quad [C] = \frac{\text{coulomb}}{\text{solt}} = F(\text{fioron})$$

Un corpo avendo capacità di un fioron dovrebbe avere un  
maggi. enorme - Si usano pertanto sottomultiplici del fioron

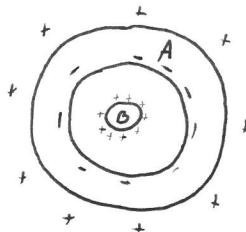
$$\text{picofioron} = 10^{-12} F$$

$$\text{nano fioron} = 10^{-9} F$$

$$\text{micro fioron} = 10^{-6} F$$

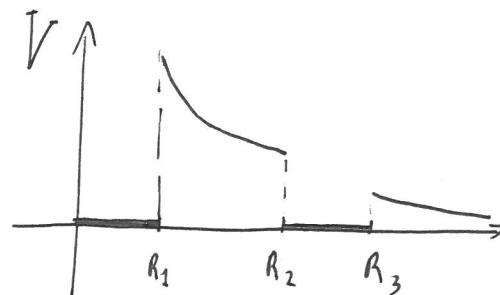
$$\text{millifioron} = 10^{-3} F$$

\* Considera un conduttore con A contenente el su interno un conduttore B.

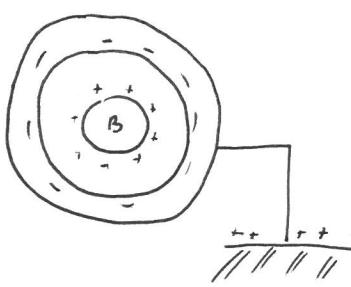


condensatore  
sferrico.

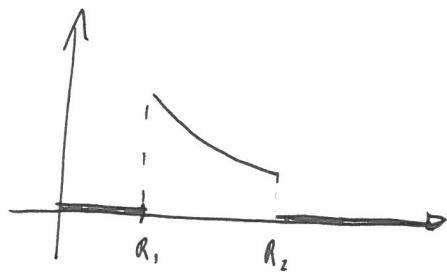
Poiché il campo elettrico all'interno di un conduttore è nullo si avrà la distribuzione di carica sferica. Si conia il segnale tenendo conto che le cariche superficiali hanno lo stesso valore in modulo.



Nel caso in cui si tesse il conduttore A si avrà  $V_A = \infty$



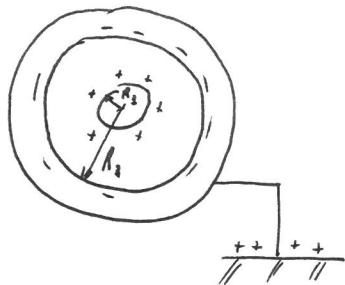
\* Dimostra che ha esistito un condensatore elettrostatico



\* Per condensatore intendo un sistema di due conduttori  
in cui il fenomeno di induzione che una carica sull'altro è  
completo cioè tutte le linee di forza del campo prodotto  
dal primo conduttore terminano sull'altro.

S'dice che un condensatore viene caricato se fra i due  
conduttori (armature) si viene a creare una differenza di  
potenziale e su di esse si distribuiscono cariche uguali in  
modulo e di segno opposte

## \* Calcolo delle capacità di un condensatore sfrico



\* Definisco capacità di un condensatore  $C = \frac{Q}{\Delta V}$  dove  $Q$  è la carica presente su ogni conduttore.  $\Delta V$  è la differenza di potenziale tra i due.

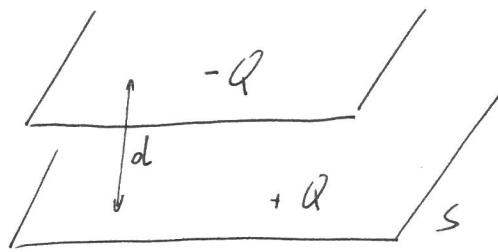
$$\Delta V = - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} d\vec{r} = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad \text{se } R_2 - R_1 \ll R_1 \quad \text{cioè } R_2 \text{ è praticamente uguale a } R_1$$

$\square = d$

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

## \* Condensatore piano



$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

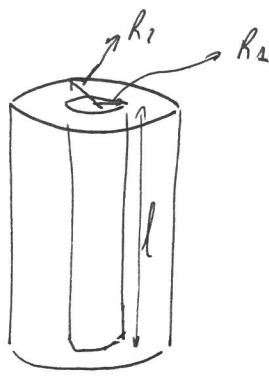
$$\Delta V = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d \quad Q = \sigma S$$

$$\Delta V = \frac{Q}{S\epsilon_0} d \quad C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

\* Per aumentare la  $C$  occorre diminuire le distanze tra:

piani - Spesso si servono con uno strato sottile isolante e i pioneri e contatti.

## \* Condensatore cilindrico



$$F = \frac{Q}{l 2\pi \epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\Delta V = \frac{Q}{l 2\pi \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

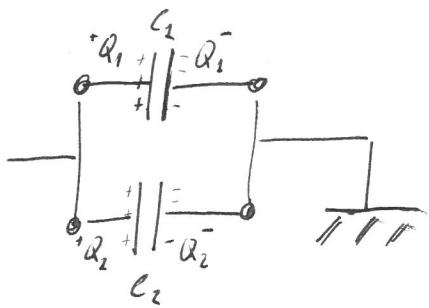
consideriamo il caso in cui  $R_2 - R_1 = d$  è molto piccolo.

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1 + d}{R_1} = 1 + \frac{d}{R_1}$$

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln(1 + x) \approx x \quad x \ll 1$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 l R}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

\*) Condensatori in parallelo



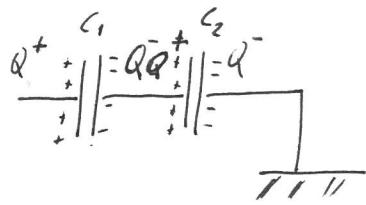
$$\begin{cases} C_1 \Delta V = Q_1 \\ C_2 \Delta V = Q_2 \end{cases} \quad (\text{la differenza di potenziale tra i due condensatori è uguale})$$

$$(C_1 + C_2) \Delta V = Q_1 + Q_2 = Q$$

$$\frac{Q}{\Delta V} = C = C_1 + C_2$$

Le capacità di un sistema formato da due o più condensatori collegati in parallelo è pari alla somma delle rispettive capacità.

## \* Condensatori in serie



$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

2 cap. in serie di due spmt condensatori i tali che il suo  
inverso è pari alla somma degli inversi delle capacità  
dei singol. condensatori.

$$U = - \int \vec{f}(r) d\vec{r} = - \int \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} + \text{costante} (= 0)$$

$$r = R_C + R_{He} = R_0 \left( 12^{\frac{1}{3}} + 4^{\frac{1}{3}} \right) = 4.65 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

$$q_1 q_2 = 12 z_p^2 = 3.07 \cdot 10^{-37} C$$

$$U_{(R)} = 5.93 \cdot 10^{-13} J$$

Per la conservazione dell'energia all'infinito l'energia potenziale  
sono trasformate in energia cinetica di  $C + He$

$$U = \frac{1}{2} m_C V_C^2 + \frac{1}{2} m_{He} V_{He}^2$$

Inoltre poiché il sistema è isolato si ha la conservazione delle  
quanti di moto

$$m_C V_C + m_{He} V_{He} = 0$$

$$V_C = - \frac{m_{He} V_{He}}{m_C} = - \frac{k V_{He}}{123}$$

$$5.93 \cdot 10^{-13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{4\pi m_p} \cdot \frac{v_{He}^2}{23} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{4\pi m_p} v_{He}^2$$

$$5.93 \cdot 10^{-13} = \frac{8}{3} m_p v_{He}^2$$

$$v_{He} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5.93 \cdot 10^{-13}}{8 m_p}} = 1.15 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

## Probleme

Ad una distanza  $d$  da una sfera fissa a densità variabile  $\rho(R)$  e di raggio  $R$  viene lanciata una maza in conica che forma un angolo  $\alpha$  con le rette congiungenti i due centri.

Determinare  $s_0$  (Velocità iniziale maza) affinché presso la sfera radendo le superficie. (le coniche stelle due masse sono positive)

$$\rho(R) = aR + \frac{b}{r} \quad \frac{q}{m} = 2.00 \cdot 10^6 \frac{C}{kg}$$

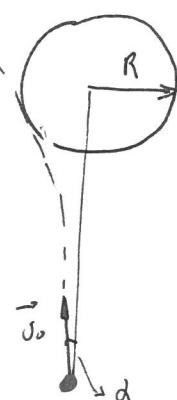
$$R = 3.5 \text{ cm} = 0.035 \text{ m}$$

$$d = 11 \text{ cm} = 0.11 \text{ m}$$

$$a = 2.5 \cdot 10^{-3} \frac{C}{m^4}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$b = 3.2 \cdot 10^{-6} \frac{C}{m^2}$$



$$Q = \int \rho d\tau = \int \left( aR + \frac{b}{r} \right) 4\pi r^2 dr = \\ = 4\pi \left[ a \frac{R^4}{4} + b \frac{R^2}{2} \right] = 3.14 \cdot 10^{-8} C$$

La variazione di energia potenziale subita dalla massa in  $i$

$$\Delta U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{d} \right)$$

$$\Delta U = -\Delta E_c \quad E_c = \text{energia cinetica}$$

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Poiché la forza tra le due particelle è centrale si ha la conservazione del momento angolare.

(Non si ha invece la conservazione delle quantità di moto poiché il sistema non è isolato essendo le spese di rete vincolate).

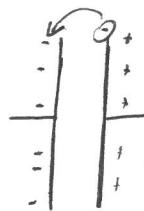
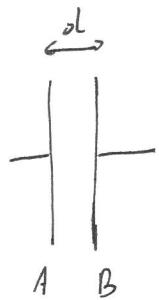
$$m v_o \text{ al raggio } d = m v_f R$$

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_o^2$$

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right) = \frac{1}{2} m \left( \frac{v_0^2 d' \sin^2 \alpha}{R^2} - v_0^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{m v_0^2}{R^2} \left( d' \sin^2 \alpha - R^2 \right)$$

$$v_0^2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{R} \right) \frac{2R^2}{m(d' \sin^2 \alpha - R^2)} = 2.85 \cdot 10^{10} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

## Energia potenziale condensatore circolare



condensatore sferico

condensatore circolare

$$dV = V(q) dq$$

$$V(q) = \frac{q}{C}$$

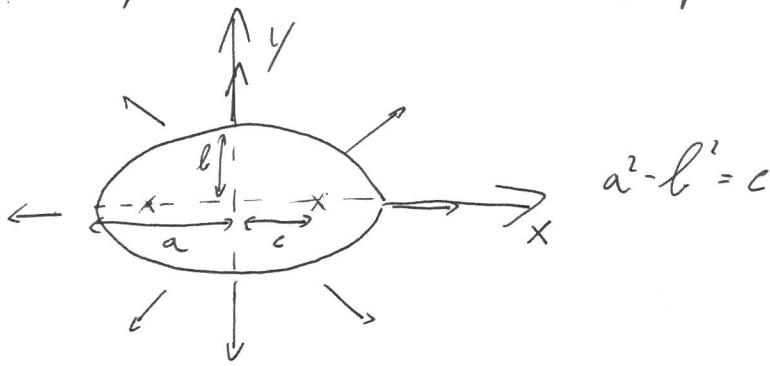
$$dV = \frac{q}{C} dq$$

$$V = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2$$

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{d} S E^2 d^2 \quad V = Ed$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 +$$

\*| Campo elettrico di una superficie ellittica conduttrice



Il campo elettrico  $\vec{E}$  è in ogni punto della superficie ellittica ortogonale alla ellisse (altrimenti si avrebbe un mix delle ceriche superficiali).

$$\begin{cases} E_a = \frac{SV}{\delta a} \\ E_b = \frac{SV}{\delta b} \end{cases}$$

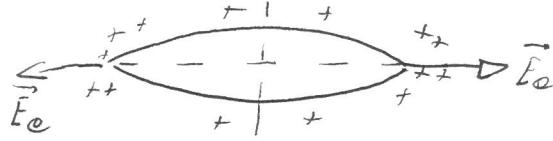
$$E_a = \frac{SV}{\delta b} \cdot \frac{db}{da} \quad a^2 - b^2 = c \text{ differenziamo}$$

$$\cancel{\frac{\partial a}{\partial c} - \frac{\partial b}{\partial c} \frac{\partial b}{\partial a} = 0} \quad (\text{considerando } c \text{ costante})$$

$$\frac{db}{da} = \frac{a}{b}$$

$$E_a = \frac{a}{b} \frac{dV}{db} = \frac{a}{b} E_b$$

$$E_a = \frac{a}{l} E_b$$

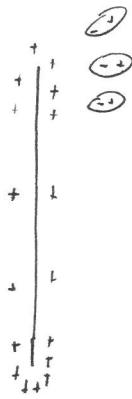


Nel caso in cui le superficie presenti un valore di  $\alpha \gg b$ :

$E_a \gg E_b$  si ha in a un condensatore elettrico molto

campi in  $b^-$  (addezzamento di cariche sulle punte)

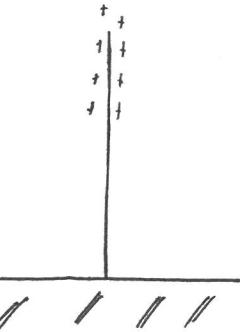
\* ) potere dispersivo delle punte



a) le molecole polari dell'aria si orientano,  
attratte dall'addezzamento di carica intensa  
tra loro ionizzandosi.

b) Le cariche negative formatesi nell'aria  
neutralizzano le cariche sulle punte.

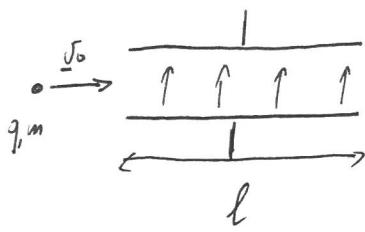
\* ) pericolosità



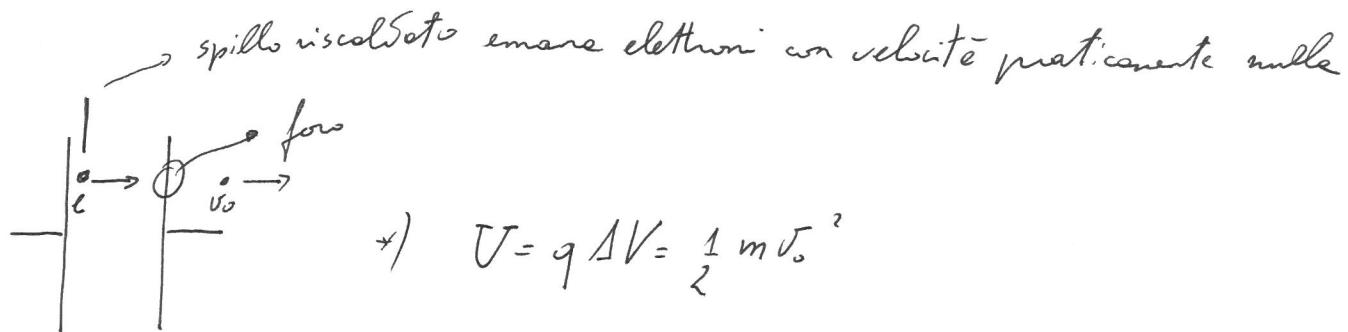
\* ) le cariche negative delle nuvole  
vengono neutralizzate dal pericolosità.

Il pericolosità non attira i fulmini perché  
esse che essi ricevono.

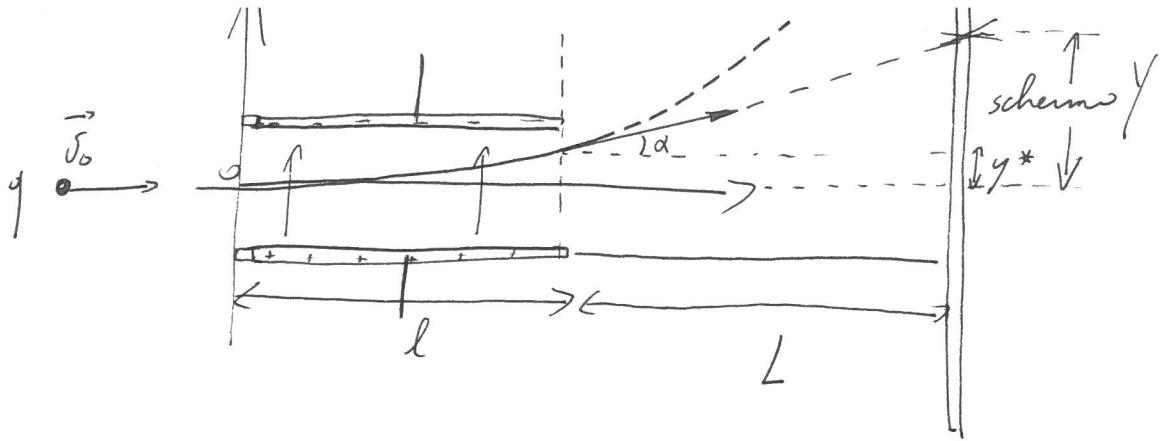
\* ) Moto di una carica in un campo elettrico



\* ) è molto facile ottenere una particella carica (es. elettrone) e una velocità  $v_0$ .



$\Delta V$  dalla differenza di potenziale e dalla massa  
e carica dell'elettrone è possibile determinare  
la velocità  $v_0$  con cui entra nel campo.



$$\begin{cases} m \ddot{x} = 0 \\ m \ddot{y} = -Eg \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{condizioni} \\ \text{al contorno} \end{matrix} \quad \begin{cases} x_{(0)} = y_{(0)} = 0 \\ v_{x_0} = v_0 \\ v_{y_0} = ? \end{cases}$$

integrandi

$$\begin{cases} \dot{x} = \text{costante} = v_{x_0} \\ \dot{y} = \frac{E}{m} g t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_{x_0} t \\ y = \frac{1}{2} \frac{E}{m} g t^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{eliminando il parametro } t, \text{ si ottiene} \\ \text{una parabola con vertice nell'origine} \end{matrix}$$

$$y^* = y(t = \frac{l}{v_{x_0}}) = \frac{1}{2} \frac{E}{m} g \frac{l^2}{v_{x_0}^2}$$

$$y = y^* + L t g d$$

$$t_{gd} = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=l}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{m} E \frac{x}{v_0^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{x=l} = \frac{q}{m} E \frac{l}{v_0^2}$$

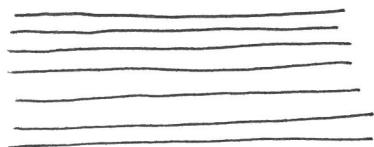
$$y = y^* + L t_{gd} = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \frac{l^2}{v_0^2} + L \frac{q}{m} E \frac{l}{v_0^2}$$

$$y = \frac{q}{m} E \frac{l}{v_0^2} \left( \frac{1}{2} l + L \right)$$

1) conoscendo  $v_0^2$  posso determinare  $\frac{q}{m}$  (esperienza Thomson)

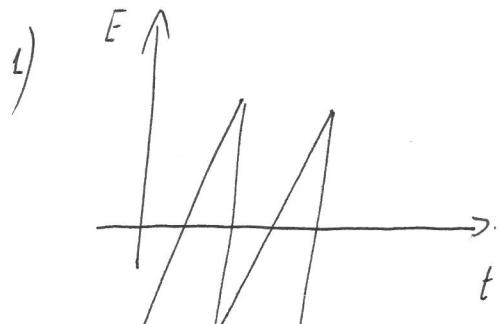
2)  $E = \frac{\Delta V}{l}$  ha restato un misuratore delle differenze di potenziale  $\Delta V$ . (oscillografo e raggi catodici)

Su tale principio è possibile creare il pennello d'elettroni che impressionando lo schermo fluorescente del televisore creano le immagini.

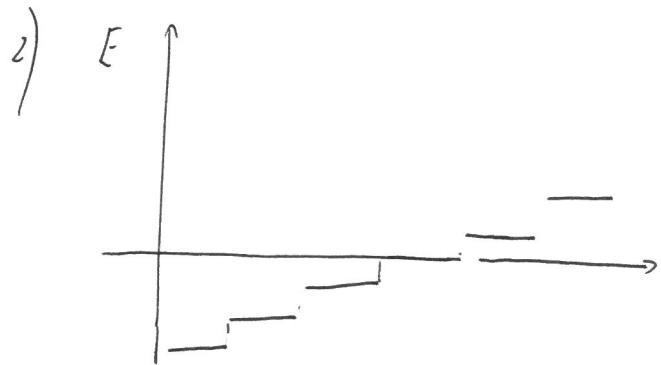


il pennello d'elettroni colpisce lo schermo  
e righe

visano due condensatori

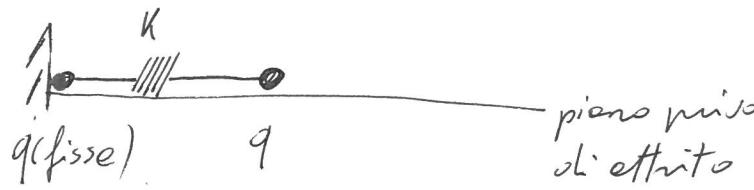


il potenziale è dentato se permette  
al fascio d'elettroni di seguire una linea  
orizzontale



un potenziale a tratti  
determina il salto se una  
riga all'altra

\* ) Problema



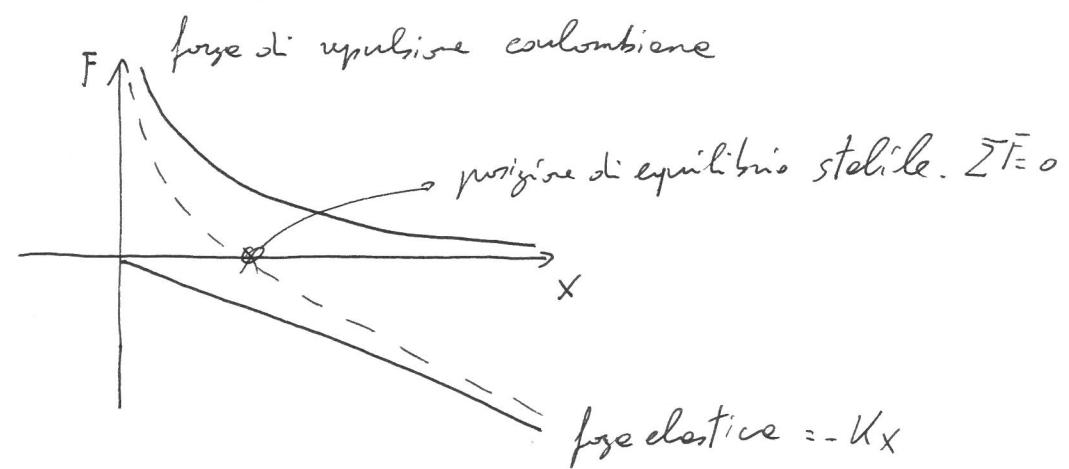
Le molle ha costante elastica  $K$  e lunghezza a riposo nulla.

Determinare la posizione di equilibrio e il periodo  $T$  delle piccole oscillazioni.

$$q = 1.25 \cdot 10^{-2} C$$

$$m = 1.6 g$$

$$K = 25 \frac{N}{m^2}$$



\* ) All'equilibrio  $\sum F = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} m \ddot{x} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} - Kx \\ m \ddot{x} = 0 \end{array} \right. \quad x_s = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 K}} \simeq 1.8 \text{ cm}$$

$$m\ddot{x} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} - kx = f(x)$$

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  in un intorno di  $x_0$  (sviluppo in serie di Taylor del I ordine)

$$\omega = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$f'(x) = -\frac{2\omega}{x^3} - k$$

$$f(x) = \frac{\omega}{x_0^2} - kx_0 - \left( \frac{2\omega}{x_0^3} + k \right) (x - x_0) =$$

$$= \frac{\omega}{x_0^2} - kx_0 - \frac{2\omega x}{x_0^3} + \frac{2\omega}{x_0^2} - kx + kx_0$$

$$f(x) = \frac{3\omega}{x_0^2} - x \left( \frac{2\omega}{x_0^3} + k \right) = m\ddot{x}$$

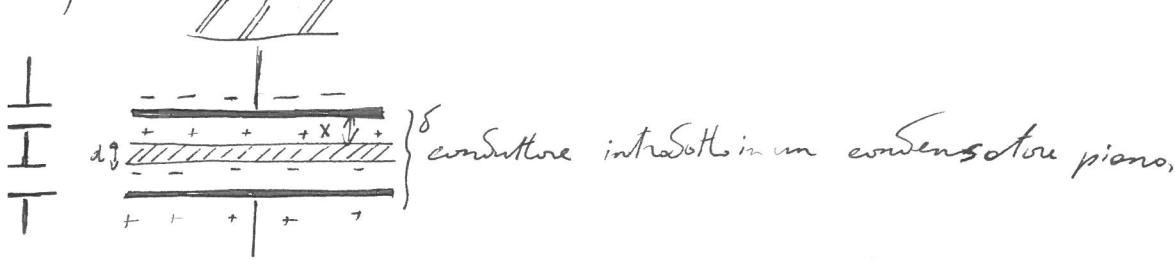
$\ddot{x} = -\omega^2 x + \text{costante}$  equazione differenziale dell'oscillatore armonico

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left( \frac{2\omega}{x_0^3} + k \right) = \frac{1}{m} \left( \frac{2\omega}{x_0^3} + \frac{\omega}{x_0^2} \right) = \frac{3}{mx_0^3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mx_0^3 4\pi \epsilon_0}{3q^2}} = 0.029 \text{ s}$$

17

\*)



Poiché il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo le sbarre si curva come in figura.

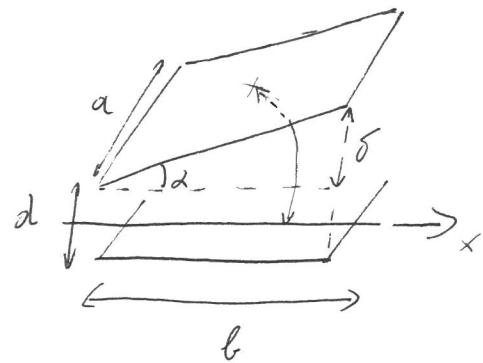
Il sistema sarà allora equivalente ad una coppia di condensatori disposti in serie - Determina  $C_0$  del sistema.

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{\delta - d - x}{\epsilon_0 S} + \frac{x}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{\epsilon_0 S} (\delta - d)$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{\delta - d} \quad \text{la capacità del condensatore equivalente.}$$

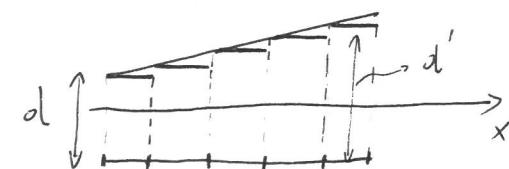
Y

\* Determina approssimativamente la capacità di un condensatore piano le cui armature formano un angolo di tre 60°.



Poiché le linee di forza devono essere normali al piano eccetto una direzione } mostrata in figura.

Per la trascurabilità possiamo considerare le forze normali al campo e assimilare il sistema ad un insieme di condensatori in parallelo.



Per ogni condensatore piano  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d'}$

$$\text{dove } d' \approx d + x \tan \alpha = d + x \frac{\delta}{b}$$

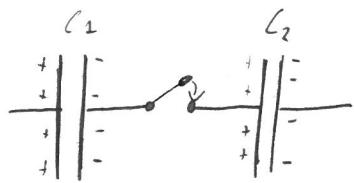
$$dC = \frac{\epsilon_0 a dx}{d + x \frac{\delta}{b}}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \int_0^L \frac{\epsilon_0 a dx}{d + x \frac{\delta}{L}} = \epsilon_0 a \int_0^L \frac{dx}{d + \frac{x\delta}{L}} \\
 &= \epsilon_0 \frac{a}{\delta} \int_0^L \frac{\frac{\delta}{L} dx}{d + \frac{x\delta}{L}} = \left. \epsilon_0 \frac{a}{\delta} \ln \left( d + \frac{x\delta}{L} \right) \right|_0^L = \\
 &= \epsilon_0 \frac{a}{\delta} \ln \frac{d + \delta}{d} = \frac{\epsilon_0 d}{\delta} \ln \left( 1 + \frac{\delta}{d} \right)
 \end{aligned}$$

in particolare  $\delta \approx 0$  ritroviamo  $C = C_0$

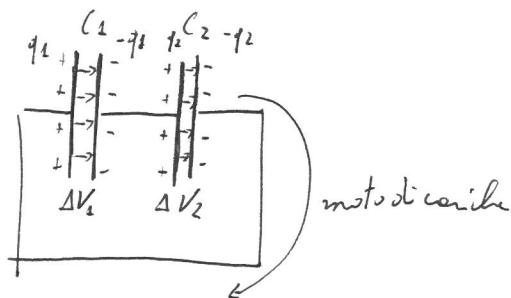
$$\text{infatti } \lim_{\delta \approx 0} \frac{\epsilon_0 d}{\delta} \ln \left( 1 + \frac{\delta}{d} \right) = C_0$$

\* ) Distribuzione delle cariche e variazione di potenziale  
in un sistema di condensatori posti in corto circuito.



units non ho né una variazione  
delle distribuzione di cariche né  
del potenziale.

Sayendo i condensatori in corto circuito significa una differenza  
di disposizione di cariche e di potenziale



Ossia il campo elettrico è conservativo  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

sono cioè  $\Delta V_1^{(f)} + \Delta V_2^{(f)} = 0$  (uno dei due condensatori  
comparte polarità).

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1^{(f)} = q_1^{(i)} + \delta q \\ q_2^{(f)} = q_2^{(i)} + \delta q \end{array} \right. \quad \text{dove } \delta q \text{ sono uguali per le conservazioni} \\ \text{delle cariche.}$$

$$C = \frac{\alpha}{\Delta V}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{q_1^{(f)}}{C_1} = \frac{q_1^{(i)}}{C_1} + \frac{\delta q}{C_1} \\ \frac{q_2^{(f)}}{C_2} = \frac{q_2^{(i)}}{C_2} + \frac{\delta q}{C_2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V_1^{(f)} = \Delta V_1^{(i)} + \frac{\delta q}{C_1} \\ \Delta V_2^{(f)} = \Delta V_2^{(i)} + \frac{\delta q}{C_2} \end{array} \right.$$

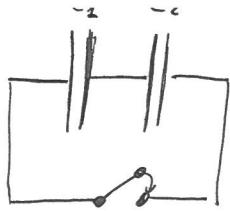
---


$$\theta = \Delta V_1^{(i)} + \Delta V_2^{(i)} + dq \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

in generale  $\sum_i \Delta V_j^{(i)} = -dq \left( \sum_i \frac{1}{C_j} \right) \rightarrow C_0$

ottenendo  $dq = -C_0 \sum_{j=1}^n \Delta V_j^{(i)}$

$$\Delta V_1^{(f)} = \Delta V_1^{(i)} - \frac{C_0}{C_1} \sum_i \Delta V_i$$



$$C_1 = 1 \mu F$$

$$C_2 = 2 \mu F$$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = 100 V$$

Metti in corto circuito il blocco

$$C_s = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{2}{3} \mu F$$

$$\Delta V_1^{(1)} = 100 - \frac{2}{3} \cdot 200 = -33 V$$

$$\Delta V_2^{(1)} = 100 - \frac{200}{2} \cdot \frac{2}{3} = 33 V$$

Sarà che  $\Delta V^{(1)} = 0$

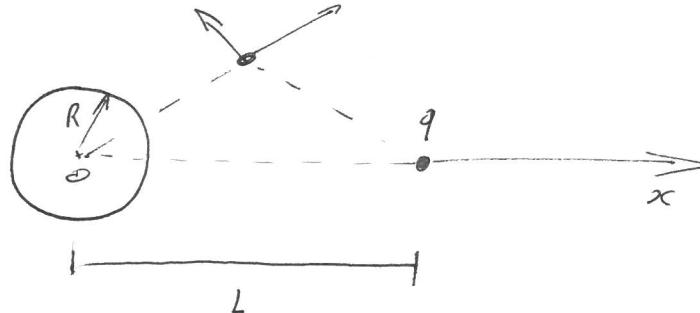
\* )  $E = \frac{1}{2} CV^2$  è calata.

L'energia non si conserva.

## Problema

Una sfera isolante ha densità  $\rho(r) = ar$  ( $r \leq R$ ) .

A distanza  $L$  è posta una carica  $q$ . Determinare al finito dove il campo elettrico è nullo.



$$a = 0.04 \frac{C}{m^4}$$

$$q = 5.00 \mu C$$

$$R = 2.0 \text{ cm}$$

$$L = 25.0 \text{ cm} .$$

\* / È opportuno fare le seguenti considerazioni:

Se il problema ammette soluzione tale punto deve necessariamente trovarsi sull'asse  $x$  essendo in qualsiasi altro punto  $\vec{E}$  somma di due vettori non paralleli pertanto diverso da 0.

Inoltre essendo sul tratto  $L$  escluso al di fuori

il campo elettrico somma di due vettori aventi lo stesso verso.

$$Q = \int_0^R a r^3 4\pi dr = a \frac{\pi R^4}{4}$$

il campo elettrico al di fuori delle sfere sarà  $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$

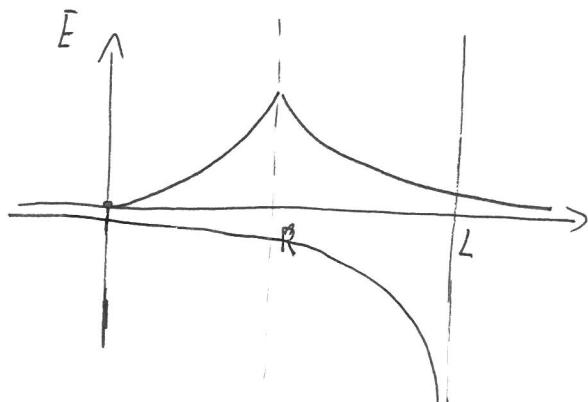
per calcolare il campo elettrico all'interno delle sfere  
applichiamo il Teorema di Gauss

$$E_{\text{int}} = \frac{\int_0^r p(r) 4\pi r^2 dr}{\epsilon_0} = \frac{4\pi}{\epsilon_0} a \frac{r^4}{4}$$

$$E = \frac{a r^2}{\epsilon_0 4}$$

Il campo generato dalle cariche  $q$

$$E = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(L-r)^2} \quad (\text{considerando che il campo che ci interessa è quello lungo il tratto } L).$$



Le soluzioni del problema rappresentano i punti di intersezione delle funzioni somme delle due discritte in l'asse x.  
Non è detto che esistano.

$$\left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(L-r)^2} = \frac{\alpha r^2 \pi}{\epsilon_0 k} \quad r \leq R \right.$$

$$\left. \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(L-r)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \quad r > R \right.$$

$$\left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{(L-r)^2} = \frac{Q}{R^4} \cdot \frac{r^2}{4\pi\epsilon_0} \quad r \leq R \right.$$

$$\left. \frac{q}{(L-r)^2} = \frac{Q}{r^2} \quad r > R \right.$$

$$1) \quad r(L-r) = \pm R^2 \sqrt{\frac{q}{Q}}$$

$$r^2 - rL \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{q}{Q}} R^2 = 0$$

$$r = \frac{L}{2} \stackrel{!}{=} \sqrt{\frac{L^2}{4} \pm \sqrt{\frac{q}{Q}} R^2} \quad r \leq R$$

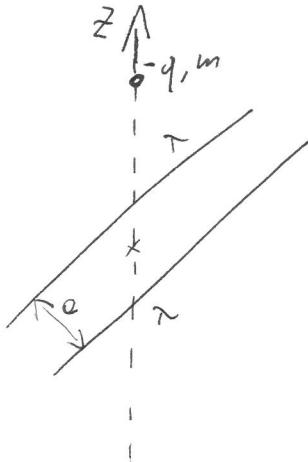
$$2) \quad \frac{L-r}{r} = \sqrt{\frac{q}{Q}} \quad r = \frac{L}{1 \pm \sqrt{\frac{q}{Q}}} = 10.9 \text{ cm} \quad (\text{unica soluzione elettostatica } r > 0)$$

$$Q = 3.02 \mu C$$

soluzioni 1)

$\begin{cases} 22.15 \text{ cm} & \text{esterna} \\ 2.85 \text{ cm} & \text{esterna} \\ 27.44 \text{ cm} & \text{esterna} \\ -2.31 \text{ cm} & \text{negativa} \end{cases}$	$r \leq R$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------

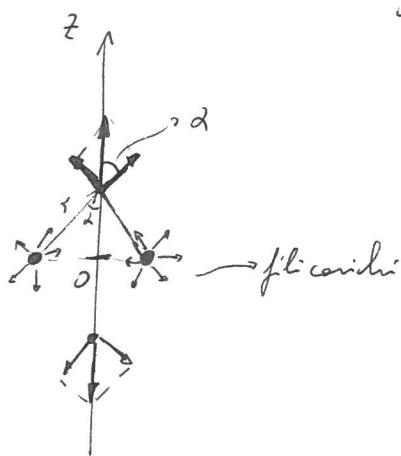
\* ) Probleme



\* ) filo con distribuzione di carica  $\lambda$

$$L = 12 \text{ cm} \quad \lambda = 5.07 \frac{\text{C}}{\text{m}} \quad m = 1 \text{ g}$$

Le cariche q si poste nel campo gravitazionale terestre, determinare il minimo valore di q affinché vi sia equilibrio.

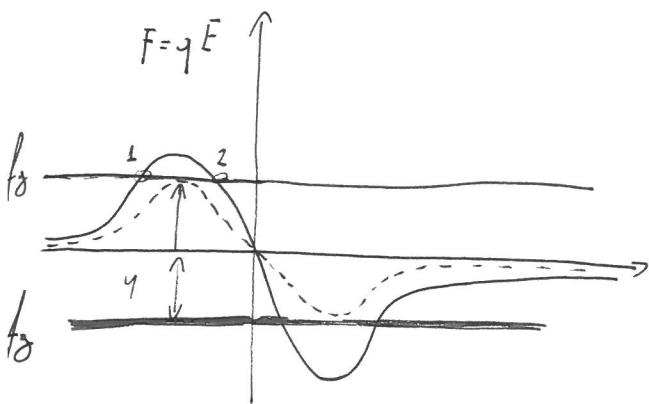
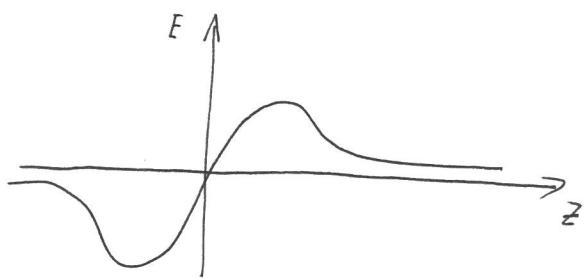


Il campo elettrico prodotto da un filo è  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$

$$E_t = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cos \alpha \quad r \cos \alpha = z$$

$$r^2 = \frac{e^2}{4} + z^2$$

$$E_t = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{z}{\left(\frac{e^2}{4} + z^2\right)}$$



Le soluzioni (posizioni di equilibrio) sono date dall'intersezione delle  $-f_g$  (forza di gravità) con le forze del campo elettrico.  
 (1 equilibrio instabile 2 stabile)

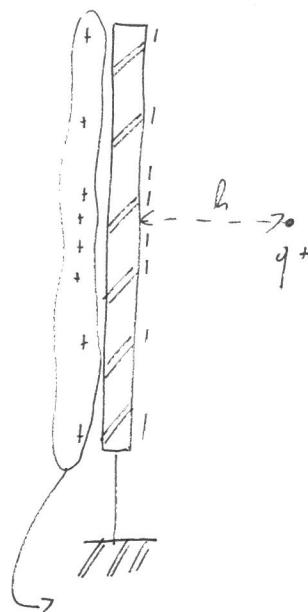
La concavità minima che determina una posizione di equilibrio è  
 la ... concavità che rende la funzione delle forze elettostatiche  
 tangente in un punto alla retta  $-f_g$ .

All'equilibrio  $\sum_i F = 0$

$$\frac{q\lambda}{\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + \frac{a^2}{4})} = mg$$

$$q = \frac{\pi\epsilon_0}{\lambda} mg a = 6.55 \cdot 10^{-8} C.$$

+)

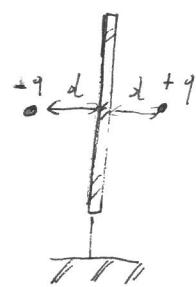


Pb) determinare le distribuzioni di cariche repressive sulle lastre conduttrici (messe a terra) accesi per induzione e cause delle corse  $+q$ .

Penso ugualmente il sistema

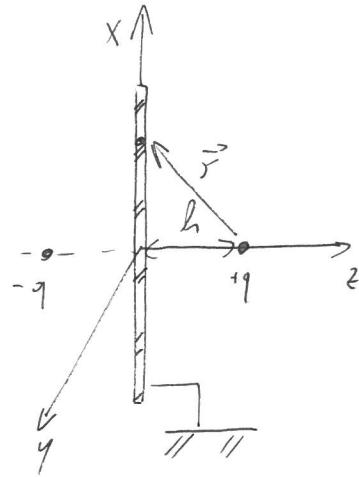


al sistema



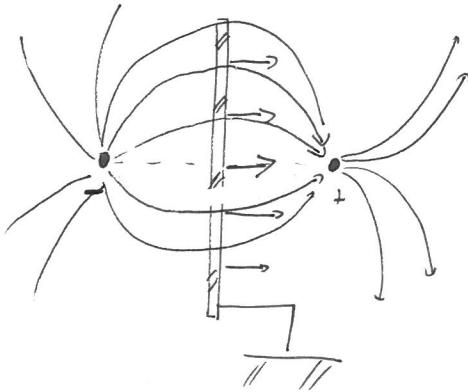
I due sistemi hanno infatti entrambi  $V = 0$  sulle lastre conduttrice e  $V = \infty$  all'infinito pertanto genereranno lo stesso potenziale e lo stesso campo elettrico in un punto dello spazio (l'equazione di Laplace è unicamente determinata note condizioni al contorno).

\*) Calcola il potenziale generato dalle due cariche.



$$V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right)$$

$$\vec{F} = -\text{grad } V$$



Considerando che il campo è normale al conduttore

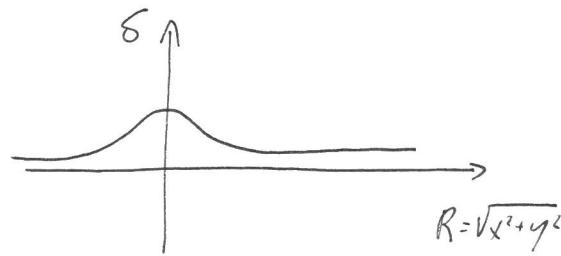
$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = 0 \end{cases}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{\frac{1}{2}x(z-h)}{(x^2 + y^2 + (z-h)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{1}{2}x(z+h)}{(x^2 + y^2 + (z+h)^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

$$E_z \text{ per } z \rightarrow 0$$

$$E_z = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{zh}{(x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

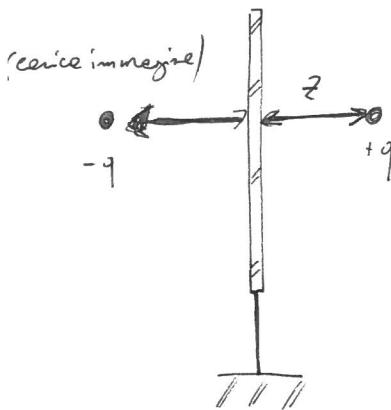
Soluzione con Coulomb  
 $\delta = \epsilon_0 E = \frac{-qh}{2\pi\epsilon_0 (x^2+y^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$



$$Q = \int_0^\infty \delta 2\pi R dR = \int_0^\infty -\frac{qh}{2\pi} \frac{2\pi R dR}{(R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-qh}{2} \left[ \frac{2}{(R^2+h^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^\infty$$

$$= -\frac{qh}{2} \left( 0 - \frac{2}{h} \right) = -q \quad (\text{distribuzione carica nulle} \\ \text{lestre conduttrice})$$

\* ) Problema



\* ) determinare la velocità con cui le cerice colpisce il piano.

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{z^2}$$

$$L = \int F dz = \frac{1}{2} m v^2$$

$$L = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 4} \int_{h}^{R} \frac{dz}{z^2}$$

$R$  = raggio delle sfera.

l'integrale non sarebbe determinato se  $R=0$ .

$$L = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{h} \right)$$

$$v = \frac{q}{4} \sqrt{\frac{2(h-R)}{m\pi\epsilon_0 R h}}$$

Il problema può essere risolto se si sfruttano le conservazioni dell'energia tenendo però conto anche dell'energia cinetica delle meseconiche (specolare) che rappresenta l'energia cinetica delle coniche che si muovono sul piano quando la conica +y si avvicina ad essa).

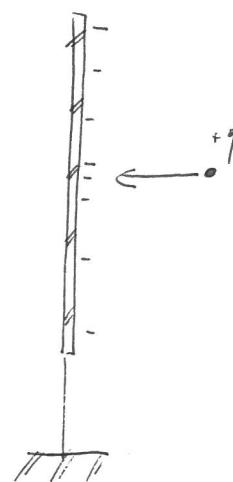
$$U(z) - U(R) = mv^2 \quad U = Vq$$

$$-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 z} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = mv^2$$

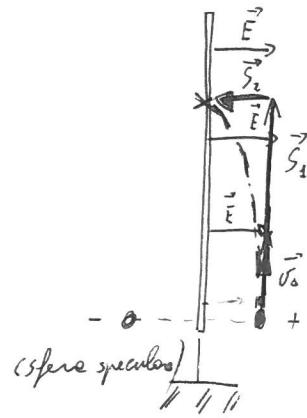
$$\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{z} \right) = mv^2$$

$$v^2 = \frac{2q^2(z-R)}{16\pi\epsilon_0 m R z}$$

$$v = \frac{q}{4} \sqrt{\frac{2(z-R)}{\pi\epsilon_0 m R z}}$$



\*) La risoluzione del problema è analogo nel caso in cui le forze corte viene leviate con una velocità  $\vec{v}_0$  parallela al piano stesso.



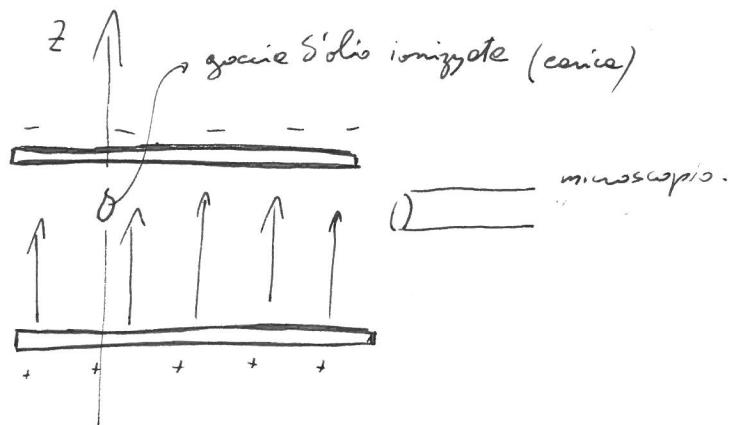
Il lavoro compiuto dalle forze per il loro spostamento è l'energia cinetica e l'è stato calcolato precedentemente.

Infatti essendo il campo normale al piano e conservativo il lavoro lungo lo spostamento  $s_1$  è nullo  $\vec{F} \perp \vec{s}_1$ ,

il lavoro lungo  $s_2$  è stato calcolato precedentemente.

## Espereienza di Millikan

Ha permesso di determinare il valore della carica  $q$  dell'elettrone.



L'equazione del moto delle gocce è

$$ma = -Kv - my + qE \quad n \in \mathbb{N}$$

Quando le gocce raggiunge la velocità di regime  $v_R$   $a = 0$

$$v_R = \frac{qE}{K} - \frac{my}{K}$$

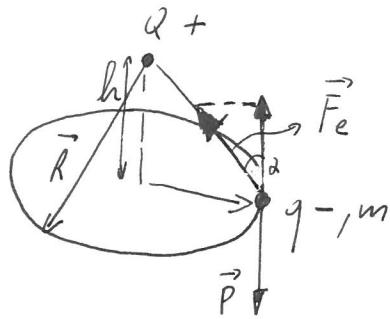
Potendo misurare con il telescopio  $R$  - raggio gocce  $m = \rho(\delta_0) \frac{4}{3} \pi R^3$

$v_R$  essendo inoltre  $K$  noto è possibile determinare

$q$  - Essendo un valore multiplo di una quantità si

carica  $q =$  carica dell'elettrone.

## Probleme



La carica  $-q$  dotata di massa  $m$  è soggetta alle forze peso e alle forze di attrazione della carica  $Q^+$ .

Tali forze la fanno descrivere un'orbita circolare con velocità costante.

Determinare  $\tau$  e  $h$ .

$$\begin{cases} Q = 1.6 \text{ nC} \text{ (micro)} \\ q = -2.5 \text{ nC} \text{ (nano)} \\ m = 10 \text{ mg} \quad R = 32 \text{ cm} \end{cases}$$

Affinché il moto avvenga lungo un piano la componente verticale delle forze elettrostatiche deve annullare la forza peso.

$$-mg + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \cos\alpha = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{R} = \frac{mg 4\pi\epsilon_0 R}{qQ}$$

$$h = \frac{q \pi \epsilon_0 R^3}{9 Q}$$

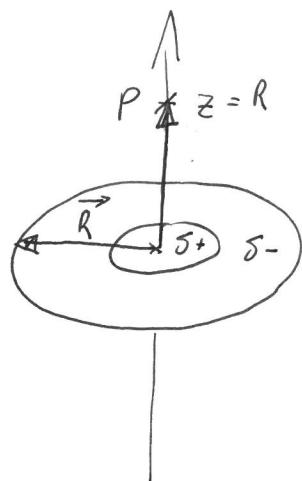
La componente orizzontale delle forze elettostatiche fornisce l'accelerazione centripeta alla carica.

$$\frac{m v^2}{r(\text{circol})} = \frac{m v^2}{R_{\text{circol}}} = m \alpha_c$$

$$\frac{q Q}{4 \pi \epsilon_0 R^2} r_{\text{circol}} = \frac{m v^2}{R_{\text{circol}}}$$

$$v^2 = \frac{q Q R_{\text{circol}}^2}{4 \pi \epsilon_0 R^2 m} \quad v = 3.22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

\* Problema.



$$R = 12 \text{ cm}$$

$$Q = 0.16 \mu\text{C}$$

(cerca i possedute da ciascuna delle due parti in cui è suddiviso il disco, il segno è opposto).

$\delta$  = densità omogenea maggiore in modulo tra le due parti.

\* Determinare il campo elettrico nel punto  $P$ .

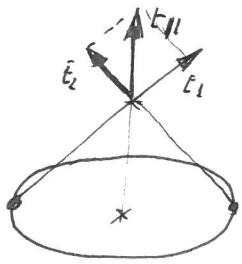
$$|\delta| = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{Q}{\pi (R^2 - r^2)}$$

$$r^2 = \frac{R^2}{2} \quad r = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad (r = \text{raggio dischetto concentrico})$$

$$dE_{||} = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2 + z^2} \cos\vartheta$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos\vartheta = \frac{r}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ r = \text{radiale} \end{array} \right\}$$

Procedendo per corone circolari è facile rendersi conto che  $E_{||}$  (componente del vettore  $E$  lungo l'asse  $z$ ) è l'unica diversa da zero.



$$dE_{\parallel} = \frac{\sigma 2\pi \rho d\rho z}{4\pi \epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

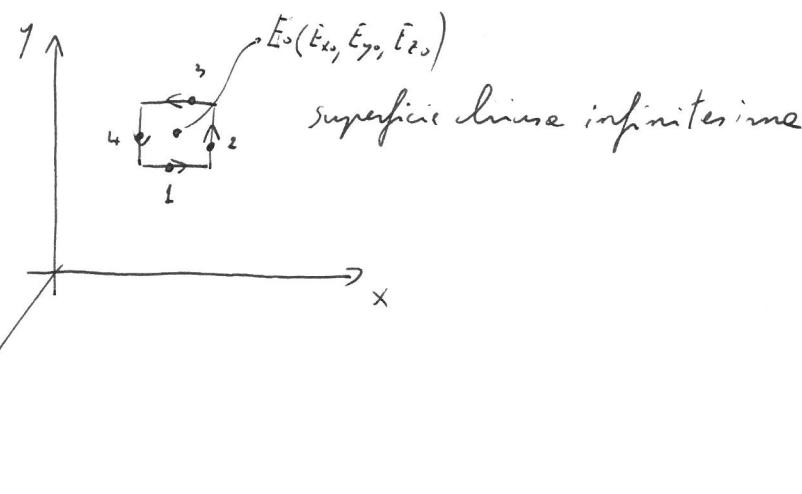
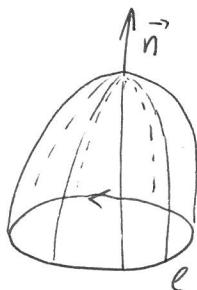
$$E_{\parallel} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[ \int_0^r \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \int_r^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

La risoluzione di tale integrale fornisce il valore di  $E$ .

## Teorema di Stokes

$$\oint_{\mathcal{L}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\omega \vec{t} \vec{E}) \vec{n} dS = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \vec{n} dS$$

$S$  = superficie aperte che poggia sulle linee chuse  $\mathcal{L}$ .



$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = \bar{E}_{x_1} dx + \bar{E}_{y_2} dy - \bar{E}_{x_3} dx - \bar{E}_{y_4} dy$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{x_1} = \bar{E}_{x_0} - \frac{\delta \bar{E}_x}{\delta y} \frac{dx}{2} \\ \bar{E}_{y_2} = \bar{E}_{y_0} + \frac{\delta \bar{E}_y}{\delta x} \frac{dx}{2} \\ E_{x_3} = \bar{E}_{x_0} + \frac{\delta \bar{E}_x}{\delta y} \frac{dy}{2} \\ \bar{E}_{y_4} = \bar{E}_{y_0} - \frac{\delta \bar{E}_y}{\delta x} \frac{dy}{2} \end{array} \right.$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= - \frac{\delta \bar{E}_x}{\delta y} \frac{dy}{2} dx + \frac{\delta \bar{E}_y}{\delta x} \frac{dx}{2} dy - \frac{\delta \bar{E}_x}{\delta y} \frac{dy}{2} dx + \frac{\delta \bar{E}_y}{\delta x} \frac{dx}{2} dy = \\ &= \left( \frac{\delta \bar{E}_y}{\delta x} - \frac{\delta \bar{E}_x}{\delta y} \right) dx dy = (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \vec{n} dS \end{aligned}$$

entonces  $\vec{n}$  paralelo al eje z l'única componente de

se contribuye diverso o all'integrale è  $(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \left( \frac{\delta \bar{E}_y}{\delta x} - \frac{\delta \bar{E}_x}{\delta y} \right)_z$

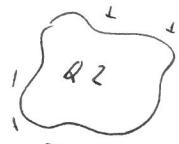
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{n} ds \quad \text{qualsiasi } l$$

segue che  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \iff \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

$\uparrow$   
campo è conservativo

## Problema dei conduttori carichi (vacuum)

Pl) Det.  $N$  conduttori carichi determinare il campo generato, la loro distribuzione si cariche.



Poiché le cariche non sono fisse non posso calcolare il potenziale con le formule

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Ricordando la II equazione di Maxwell  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  e che

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} V = \frac{\delta V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dall'analisi si dimostra che  $\nabla V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  (equazione di Poisson) ammette sempre un'unica soluzione.

Tale soluzione può essere determinata sfruttando le condizioni al contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{\infty} = ? \\ V_{(1)} = V_1 \\ \vdots \\ V_{(n)} = V_n \end{array} \right.$$

Poiché  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  posso determinare il campo elettrico in prossimità dei conduttori e applicando la legge di Coulomb

$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$  calcolare  $\sigma$  (distribuzione di carica su ciascun conduttore).

\* Se conoscendo le cariche  $Q_1, Q_2, Q_3$  dei 3 conduttori posso isolare al loro potenziale  $V_1, V_2, V_3$  e risolvere il problema come detto precedentemente.

Osserviamo che il potenziale  $V_1$  è funzione lineare non solo delle cariche  $q_1$  ma anche delle altre cariche avremo

$$V_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 + \alpha_{13} q_3$$

$$V_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 + \alpha_{23} q_3$$

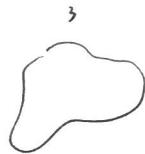
$$V_3 = \alpha_{31} q_1 + \alpha_{32} q_2 + \alpha_{33} q_3$$

Inoltre la matrice  $A_{ij}$  è simmetrica pertanto ... esiste l'inversa

ed è univocamente determinabile

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

Un modo per calcolare i coefficienti  $a_{ij}$  è il seguente



Per cui, se il conduttore 1 è isolato ha potenziale

$$V_1 = a_{11} q_1 + 0 + 0 \quad \text{determino così } a_{11}$$

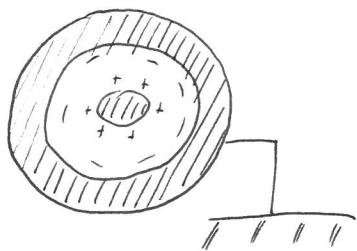
misso insieme  $V_2$  e  $V_3$  ottengo dall'espressione

$$V_2 = a_{21} q_1 + 0 + 0 \quad a_{21} = a_{31} =$$

$$V_3 = a_{31} q_1 + 0 + 0$$

Analogamente determino gli altri coefficienti  $a_{ij}$ .

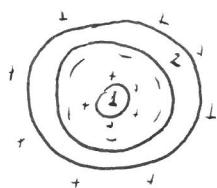
\* Determinare le capacità di un condensatore sferico.



$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 \\ V_2 = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{considerando che le cariche sui due conduttori} \\ \text{sono uguali in modulo e di segno opposto; } q_2 = -q_1 \end{array}$$

Determina i coefficienti  $\alpha_{ij}$

1) Considera il conduttore centrale



$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_3}$$

$$V_1 = V_2 + \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R_3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3}{R_1 R_2 R_3}$$

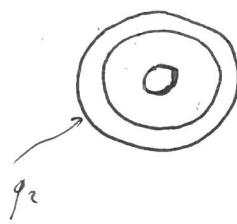
Si riceve che

$$\alpha_{11} = \frac{V_1}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3}{R_1 R_2 R_3}$$

$$\alpha_{22} = \frac{V_2}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$$

1) conico il 2° conduttore con carica  $q_2$ .

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_3}$$



Le cariche si distribuiscono sulla superficie del secondo conduttore, nulla succede all'interno.

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$\|P\| = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} & \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3}{R_1 R_2 R_3} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} & \frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} & \frac{1}{R_3} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} & \frac{1}{R_3} \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \alpha_{11} q - \alpha_{12} q$$

$$V_2 = \alpha_{21} q - \alpha_{22} q$$

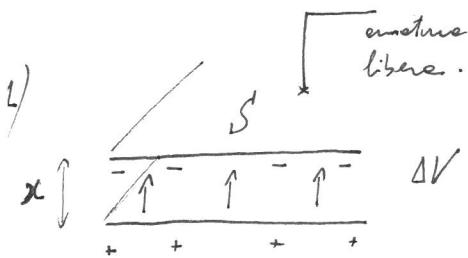
$$\frac{\Delta V}{q} = \frac{V_2 - V_1}{q} = \alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} + \alpha_{22}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \left[ \frac{\Delta V}{q} \right]^{-1} \left[ (\alpha_{11} - |\alpha_{12}| - |\alpha_{21}| + |\alpha_{22}|) \right]^{-1} \\
 &= \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3}{R_1 R_2 R_3} - \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right]^{-1} \\
 &= \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 - R_1 R_3 - R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3} \right]^{-1} = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\Delta V = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 - \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2 = (\alpha_{11} - \alpha_{12} - \alpha_{21} - \alpha_{22}) q_1$$

## Elettrometro assoluto

\* Determiniamo le forze elettostatiche con cui si attraggono le armature di un condensatore piano.



$$E^* = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (E^* = \text{campo elettrico generato dalla sola armatura fissa})$$

$$dF = dq E^* \quad (\text{forze esercitate sull'armatura libera})$$

$$dq = \epsilon dS$$

$$dF = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS'$$

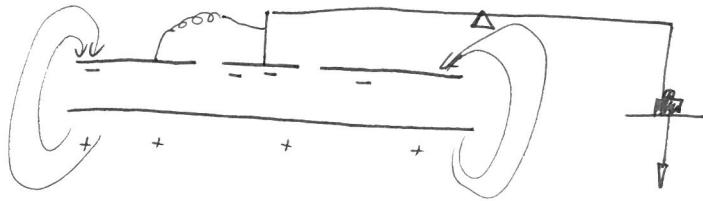
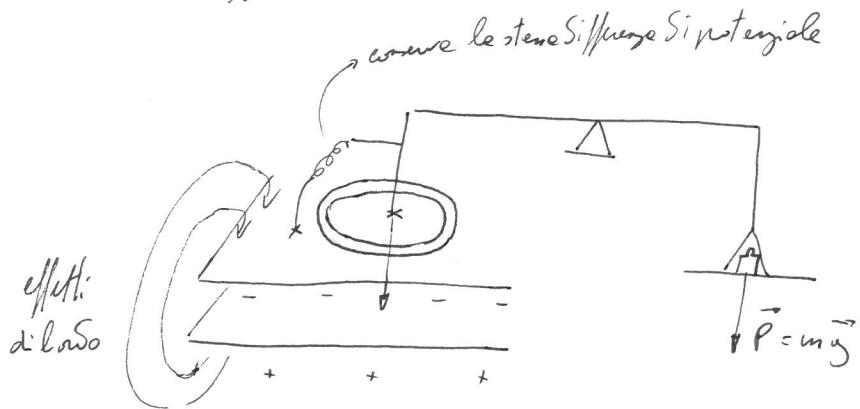
$$\frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \quad \text{poiché} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\frac{dF}{dS} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad E^2 = \text{densità di carica}$$

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S \quad (\text{le forze nel nostro caso sono attive})$$

$$\text{Poiché } F = \frac{\Delta V}{x}$$

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\Delta V^2}{x^2} S$$



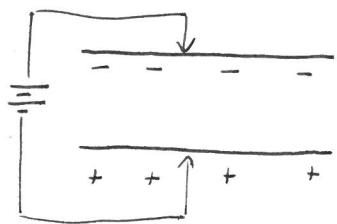
\* ) L'elettrometro esposto schematizzato in figure evita gli effetti di fondo.

$$F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\Delta V^2}{x^2} S = mg \quad (\text{condizione di equilibrio})$$

$S$ : superficie del piatto mobile

$$\Delta V = \sqrt{\frac{2mg}{S\epsilon_0}}$$

Le forze esercitate tra le due armature di un condensatore piano può essere determinate anche calcolando l'energia potenziale  $V$  del sistema e ricavando  $F = -\frac{\delta V}{\delta x}$



Applichiamo al condensatore un generatore che conservi sempre la stessa differenza di potenziale  $\Delta V$  tra le due armature.

$$V = \int_0^x \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dx = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{N^2}{x^2} S x$$

In realtà allontanando le armature del condensatore nel caso in cui non c'è il generatore il potenziale varia.

Pertanto l'energia  $V$  del sistema privo di generatore sarà pari a  $V$  meno il contributo di  $V$  apportato dal generatore stesso.

Calcoliamo dunque  $dV$  apportato dal generatore.

Il generatore per conservare le stesse differenze di potenziale tra le due armature genera delle cariche su di esse quando vengono allontanate).

$$C = \frac{q}{\Delta V} \quad \text{a } \Delta V \text{ costante}$$

$$\partial C = \frac{\partial q}{\Delta V} \quad dq = \partial C \Delta V = \Delta V \partial \left( \frac{S\epsilon_0}{x} \right) = - \frac{S\epsilon_0}{x^2} \Delta V \partial x$$

Il contributo  $\partial V = dq \Delta V = - \frac{S\epsilon_0}{x^2} \Delta V^2 \partial x$ .

L'energia di un condensatore privo di generatore è:

$$U = U_1 - \partial U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\Delta V^2 S}{x^2} + \frac{S\epsilon_0}{x^2} \Delta V^2 \partial x$$

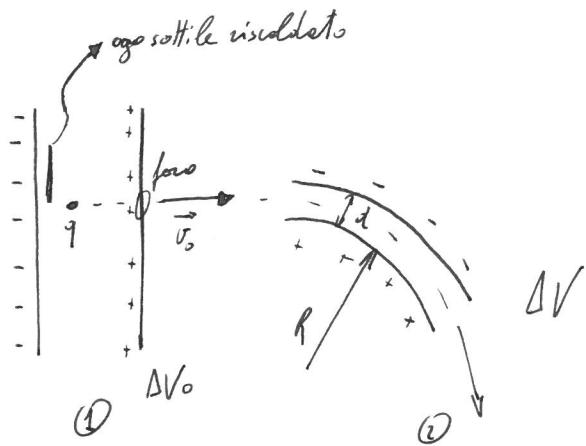
$$F = - \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\Delta V^2 S}{x^2} - \frac{S\epsilon_0}{x^2} \Delta V^2 = - \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\Delta V^2 S}{x^2}$$

3) è più facile invece calcolare la forza esercitata dalle due armature considerando che la carica  $Q$  resta costante

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2 \epsilon_0 S} Q^2 \times$$

$$F_x = - \frac{dU}{dx} = - \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 S} = - \frac{C^2 \Delta V^2}{2 \epsilon_0 S} = - \frac{\epsilon_0 S \Delta V^2}{x^2 2 \epsilon_0 S} = - \frac{1}{2} \epsilon_0 S E^2$$

## Probleme



$$R = 1 \text{ m}$$

$$d = 1 \text{ cm}$$

$$v_0 = \frac{e}{100}$$

determinare  $\Delta V_0$  e  $\Delta V$ .

Il primo condensatore permette di accelerare l'elettrone da fuori da dell'ago sottile riscaldato, il secondo deflecta la traiettoria dello stesso.

Se si ha così il condensatore 2 può essere considerato un condensatore piano, determinare  $\Delta V$  affinché l'elettrone percorra la traiettoria descritta.

$$\Delta V_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \Delta V_0 = \frac{1}{2} \frac{m}{q} v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{9.1 \cdot 10^{-31}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \cdot 9 \cdot 10^{12} = 25.6 \text{ V}$$

$F = q \vec{E} = q \frac{\Delta V}{d}$  ( $\vec{F}$  = forza che agisce sulle particelle nel 2° condensatore. Essa è sempre radiale, normale allo spostamento perpendicolare alla velocità tangenziale delle particelle resta costantemente pari a  $v_0$ .)

Affinché l'elettrone ricevesse l'orbita solita deve fornire l'accelerazione centripeta

$$\frac{m v_0^2}{R} = F = q \frac{\Delta V}{d}$$

$$\Delta V = \frac{d}{q} \frac{m v_0^2}{R} \simeq 0.51 V.$$

## Corrente elettrica

Quando si ha un movimento ordinato di cariche che globalmente si spostano da una posizione ad un'altra si dice che tra le due posizioni si è avuto passaggio di corrente elettrica.

Considerate una slanetta di materiale conduttore internamente al quale si allie per effetto di un campo elettostatico un movimento di cariche, si definisce corrente elettrica

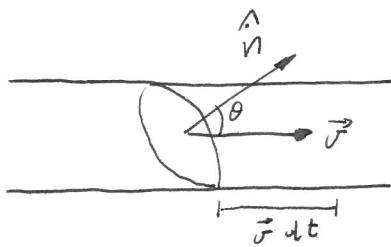
$i = \frac{dQ}{dt}$  rapporto fra le cariche  $dQ$  che fluisce nel

tempo  $dt$  attraverso una regione  $S$ , l'intervallo di tempo  $dt$ .

$$[i] = \frac{C}{sec} = A \quad (\text{ampere})$$

Se con un opportuno dispositivo si realizza una d. ol. p. costante nel tempo ai capi di un conduttore si osserva che il conduttore è sede di una corrente costante nel tempo.

Si dice che c'è un regime di corrente stazionario.



$$dq = n q \vec{v} \hat{n} dS dt \quad n = \text{densità di portatori di carica elettrica}$$

$$[\hat{n}] = \frac{1}{m^3}$$

$$\frac{dq}{dt} = n q \vec{v} \hat{n} dS$$

$$i = \int_S \underbrace{n q \vec{v} \hat{n}}_{\vec{J}} dS = \int_S \vec{J} \hat{n} dS$$

+) L'intensità di corrente è pari al flusso del campo elettrico attraverso una superficie aperta  $S$ .

$\vec{J} = n q \vec{v}$  nel caso ogni portatore abbia carica elettrica  $q$

altrettanto  $\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{J}_i$

## Equazione di continuità delle correnti

Consideriamo una superficie chiusa  $S$  in cui all'istante  $t$  sia racchiusa la carica totale  $Q(t)$ .

Scell'intervalle di tempo  $dt$  la quantità di carica diminuisce di una quantità  $dQ$ , tale quantità deve essere uscita attraverso la superficie  $S$

$$-\frac{dQ}{dt} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

$$-\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho(x, y, z, t) d\tau = \bar{\Phi}(\vec{j}) = \int_{\tau} \text{div} \vec{j} d\tau$$

$$\int_{\tau} -\frac{\delta \rho}{\delta t} d\tau = \int_{\tau} \text{div} \vec{j} d\tau \quad \text{questa relazione vale}$$

qualsiasi sia il volume  $\tau$  pertanto si ha l'uguaglianza degli integrali

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\delta \rho}{\delta t} = 0 \quad (\text{equazione di continuità delle corrente}).$$

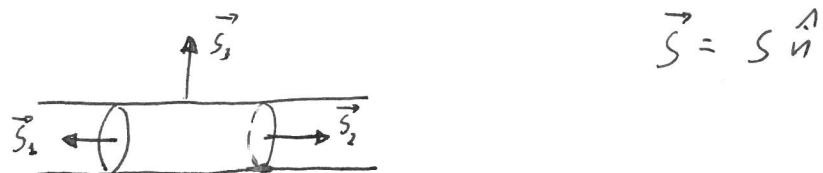
In condizioni stazionarie  $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0$  per tutti.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad \text{da cui} \quad \int_{\Gamma} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} d\tau = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = 0$$

\*) In condizioni stazionarie il flusso delle densità di corrente  $\vec{J}$  attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo.

Oss

In condizione stazionarie le correnti che fluiscono attraverso qualsiasi sezioni  $S_1, S_2$  di un talosì flusso è lo stesso.



$$\int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS = 0$$

$$\int_{S_1} \vec{J} d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J} d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{J} d\vec{S} = 0$$

Poiché  $\vec{J}$  è normale alla  $\hat{n}$  della superficie  $S_3$

$$\int_{S_3} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s} = I_1 + I_2 = 0$$

Se il verso convenzionale di flusso delle correnti viene assunto  
concordo per entrambi le sezioni allora  $I_1 = I_2$  la  
corrente attraverso le due sezioni è la stessa.

$$\vec{s}_1 \leftarrow \begin{array}{c} (+) \\ (-) \end{array} \quad \vec{s}_2 \rightarrow \quad I_1 + I_2 = 0$$

$$\begin{array}{c} (+) \vec{s}_1 \\ (-) \end{array} \quad \vec{s}_2 \rightarrow \quad I_1 = I_2 .$$

\* Determina approssimativamente il numero di elettroni liberi in  $1\text{cm}^3$  di rame e la corica che si potrebbe estremare se esso.

$$Z = 29 \text{ (numero atomico)}$$

$$A = 63.5 \text{ (peso atomico)}$$

$$\rho = 8.9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \text{ (densità)}$$

1 elettrone per atomo è libero di muoversi.

In 63.5 g di Cu sono presenti  $N_e = 6.02 \cdot 10^{23}$  elettroni liberi.

$$\text{In 1 g } \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{63.5} ; \text{ in } 1\text{cm}^3 \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{63.5} \cdot 9 \approx 9 \cdot 10^{22}$$

La corica che si potrebbe estremare vale

$$Q = 9 \cdot 10^{22} \cdot e = 1.5 \cdot 10^{-4} C \text{ (corica enorme).}$$

\* Determina la velocità con cui si muovono gli elettroni  
se la densità di corrente vale  $J = \frac{1A}{cm^2}$  (nel rame) -

$$J = n q v$$

$$v = \frac{J}{nq} = \frac{1A}{cm^2} \cdot \frac{cm^3}{9 \cdot 10^{22}} \cdot \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19} C} \approx 10^{-4} \frac{cm}{s} = 10^{-6} \frac{m}{s}$$

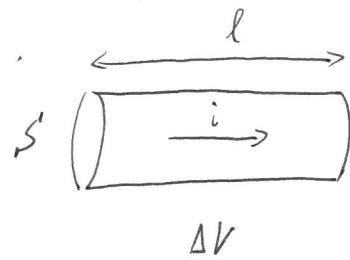
Osserviamo che la velocità con cui si muovono gli elettroni  
all'interno delle nule elettroniche è di gran lunga  
maggiore.

Assimilandoci alle nule elettroniche ad un gas perfetto e applicando  
il teorema dell'energia cinetica di un gas perfetto:

$$\langle \frac{1}{2} m v_0^2 \rangle = \frac{3}{2} k T \quad K = \frac{R}{N} \quad \text{costante di Boltzmann}$$

$$\sqrt{\langle v_0^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1.4 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9.1 \cdot 10^{-31}}} = 10^5 \frac{m}{s}$$

## Legge di Ohm



Si verifica sperimentalmente che  $\Delta V = R i$   $R$ : resistenza elettrica.

$$[R] = \Omega = (\text{Ohm}) = \frac{V}{A}$$

1)  $R$  varia secondo le dimensioni del conduttore solitamente vale la legge sperimentale

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad \rho = \text{resistività} \quad \frac{l}{\rho} = \sigma = \text{condutibilità}$$

2)  $R$  varia secondo la temperatura

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha (t - t_0))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \\ \alpha \end{array} \right. \text{ costanti ricavabili sperimentalmente.}$$

$$*) \quad A_g \quad \rho = 1.5 \cdot 10^{-8} \Omega m$$

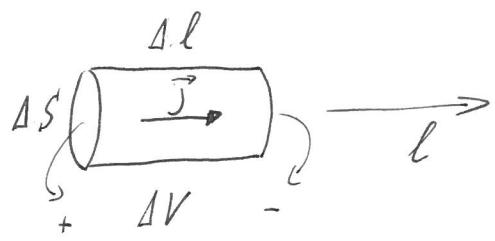
$$\text{Cu} \quad \rho_0 = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega m$$

In un conduttore di rame a temperatura standard di  $\ell = 1 \text{ m}$  e  $\phi = 0.1 \text{ mm}$

$$R = \frac{1.7 \cdot 10^{-8}}{\pi (0.05)^2 \cdot 10^{-6}} = 2.2 \Omega .$$

Se ci sono i seguenti valori:  $V = 1.5 V$        $i = 0.7 A$ .

\* ) Legge di Ohm in forma locale.



$$\Delta V = \text{superficie normale} \circ \vec{J}$$

$$\Delta V = R i$$

$$\Delta V = -\rho \frac{\Delta L}{\Delta S} \int \Delta S \quad (\text{il segno meno tiene conto del verso del vettore } \vec{J} \text{ del potenziale maggiore del potenziale minore}).$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta L} = -\rho \vec{S} \quad (\text{il campo elettrico ha componente sol lungo la retta } l)$$

$$E = \rho \vec{S}$$

$$\vec{E} = \rho \vec{S}$$

$$\vec{E} = \rho n q \vec{v}$$

Se il campo elettrico è costante la velocità con cui si sposta un elettrone è costante.

## Potenze dissipate, effetto Joule

#

Consideriamo un conduttore di estremi A, B tenuti a differenza di  
potenziale costante  $\Delta V$ .

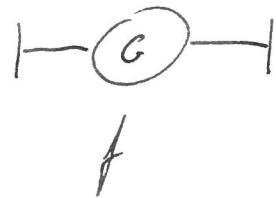
Se attraverso tale conduttore passa una corrente  $i$  si genererà

il campo elettrico compie un lavoro  $dL = dQ \Delta V = i \Delta V dt$

Le potenze sviluppate dal campo sono  $\frac{dL}{dt} = i \Delta V = i^2 R$ .

Allora l'energia spesa dal campo elettrico non si trasforma né in  
energia cinetica né in energia potenziale; tale energia viene  
assorbita (riscaldamento conduttore, ambiente circostante etc...).

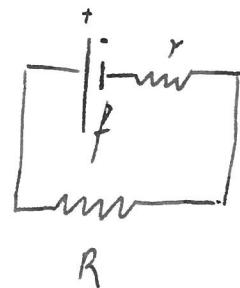
considere un generatore G. Sappiamo che  $f$  = forza elettromotrice del generatore le differenze di potenziale presente agli estremi del generatore è circuito aperto.



Oss

Le forze elettromotrici  $f$  di un generatore G sono tali che è sempre maggiore delle differenze di potenziale  $\Delta V$  presente agli estremi del generatore a circuito chiuso; ciò è causato dalla resistenza interna del generatore stesso e che è sempre maggiore di 0.

Un generatore reale di forza elettromotrice  $f$  viene schematizzato come un generatore ideale (resistenza interna nulla) allegato in serie alla resistenza  $r$  (resistenza interna del generatore stesso).



nel circuito circola una corrente  $i$

$$f = (r + R)i$$

$\Delta V$ : (differenza di potenziale ai capi della resistenza  $R$ ) =  
= differenza di potenziale agli estremi del generatore  
e circuito chiuso) =  $Ri$

$$\Delta V = Ri = \frac{f}{r+R} R < f$$

\* ) Pb

Determinare la legge  $I(t)$  che lega la corrente i passante nel circuito disegnato al tempo  $t$ .



$t=0$  circuito viene chiuso

$Q_0$  = carica presente sul condensatore per  $t=0$

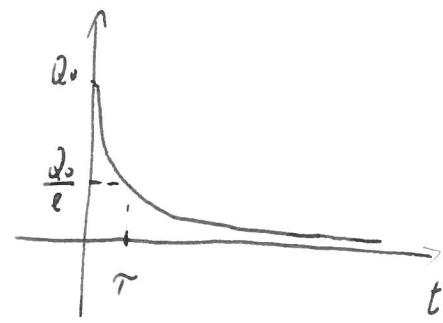
\* ) Si dimostri che per fenomeni che si evolvono nel tempo con velocità di molti, inferiori a quella della luce, vale la legge di Ohm generalizzata

$$\Delta V(t) = R I(t)$$

$$\frac{Q(t)}{C} = R I(t) = -R \frac{dQ(t)}{dt}$$

$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = -\frac{dt}{\tau} \quad \tau = RC$$

$$\ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{\tau} \quad \text{cioè } Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



La carica presente sulla armatura del condensatore varia esponenzialmente a 0.

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{\Delta V_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

\*) L'energia iniziale elettostatica posseduta dal condensatore vale  $E_0 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$ ; determina l'energia dissipata dalla resistenza R per effetto Joule -

$$W = R i^2$$

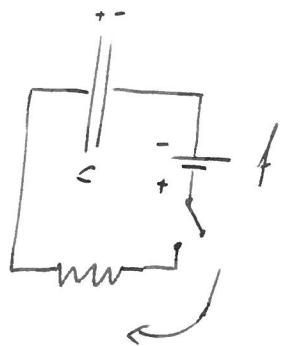
$$U_J = \int_0^\infty R i^2(t) dt = R \int_0^\infty \frac{Q_0^2}{R^2 C^2} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{R Q_0^2}{R^2 C^2} \left( -\frac{RC}{2} \right) \underbrace{\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}} dt}_{-1} \left( -\frac{2t}{RC} \right) =$$

$$U_J = \frac{Q_0^2}{2C}$$

Tutta l'energia presa dal condensatore viene dissipata in effetto Joule -

a) Per velocità prossime a quelle della luce una parte di energia viene dissipata a causa delle radiazioni elettronagnetiche, è evidente pertanto che a quelle velocità non vale l'equazione di Ohm generalizzata non soltanto il bilancio energetico  $E_0 = E_f$ .

b) Determina la funzione  $Q(t)$  = carica presente sul condensatore in figura



il circuito viene chiuso  $t=0$

$$Q(0) = 0$$

$f - \Delta V(t) = R I(t)$  [equazione di Ohm generalizzata, si tiene conto che la differenza di potenziale del generatore e del condensatore è di segno opposto]

$$C = \frac{Q(t)}{\Delta V(t)}$$

$$f - \frac{Q(t)}{C} = R \frac{dQ(t)}{dt}$$

$$\frac{dt}{R} = \frac{dQ}{f - \frac{Q}{C}}$$

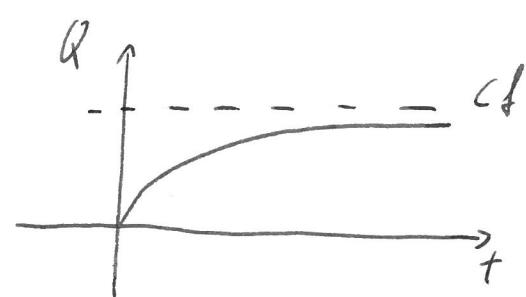
$$\frac{dt}{\tau} = \frac{dQ}{fC - Q}$$

$$-\frac{dt}{\tau} = \frac{d(f - Q)}{fC - Q}$$

$$\ln \frac{(f - Q)}{cf} = -\frac{t}{\tau} \quad (Q(0) = 0)$$

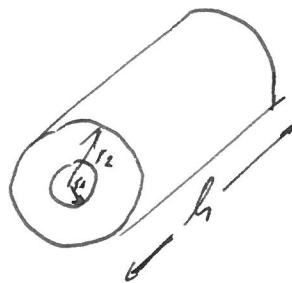
$$cf - Q = cf e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$Q = cf(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



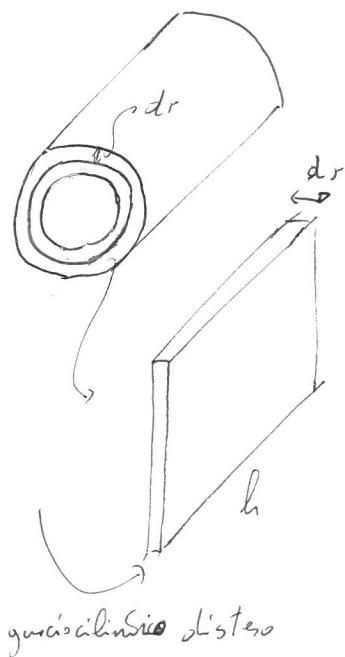
nel circuito, come si possono cominciare quando lo differenziale del condensatore uguale f.

Pb) Calcolare la resistenza  $R$  del tubo cilindrico cavo  
al passaggio di corrente dal raggio interno  $r_1$  a quello  
esterno  $r_2$ . (la resistività  $\rho$ ).



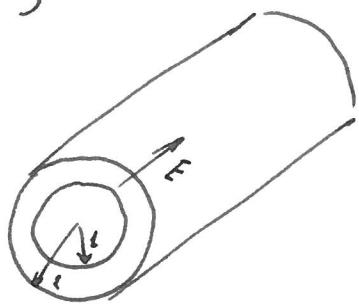
$$R = \rho \frac{l}{S}$$

E' possibile considerare il cilindro cavo come una rete  
di resistenze formate da gusci cilindrici concentrici  $r_1$  e  $r_2$   
di spessore  $dr$  e superficie  $S(r)$  parallela superficie laterale  
di ciascun guscio cilindrico considerato.



$$R = \rho \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2\pi r h} = \frac{\rho}{2\pi h} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

\* Il problema può essere analogamente risolto nel  
seguinte modo



Il campo elettrico  $E$  risponde (normale alle generatrici del cilindro) solo:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\Delta V = RI$$

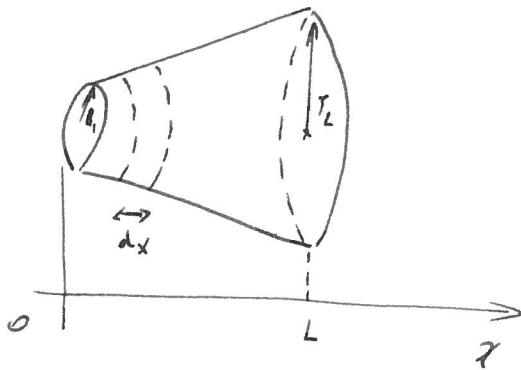
$$I = \int_S \vec{J} d\vec{S} \quad \text{applicando la legge di Ohm in forma locale}$$

$$\rho \vec{J} = \vec{E}$$

$$I = \int_S \frac{E}{\rho} dS = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\rho} 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\rho \epsilon_0}$$

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{X}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{L} \cdot \rho \epsilon_0 = \frac{\rho}{2\pi} \cdot \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{L}$$

Pb) Determinare la resistenza di un tronco di cono.



Il sistema può essere visto come una serie di tronchi di coni di spessore  $dx$  e raggio  $r$ .

$$r = r_1 + \frac{(r_2 - r_1)}{L} x$$

$$R = \rho \int_0^L \frac{dx}{S(x)} = \rho \int_0^L \frac{dx}{\pi \left( r_1 + (r_2 - r_1) \frac{x}{L} \right)^2} = \rho \frac{L}{r_2 - r_1} \int_0^L \frac{dx}{\pi \left( r_1 + (r_2 - r_1) \frac{x}{L} \right)^2} =$$

$$= -\rho \frac{L}{(r_2 - r_1)\pi} \left[ \frac{1}{r_1 + (r_2 - r_1) \frac{x}{L}} \right]_0^L = -\frac{\rho L}{(r_2 - r_1)\pi} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

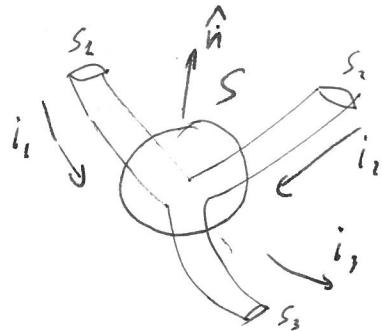
$$= \frac{\rho L}{\pi r_1 r_2}$$

## I leggi di Kirchhoff

In condizione stazionaria  $\nabla \vec{J} = 0$

$$\int_T \vec{D} \vec{J} d\tau = \int_S \vec{J} \hat{n} dS = 0 = \phi(S)$$

Considero una superficie chiusa  $S$  che contiene al suo interno un nodo (confluenza di più fili conduttori)



$$\int_S \vec{J} d\vec{S} = 0 ; \quad \int_{S_1} \vec{J}_1 d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{J}_2 d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{J}_3 d\vec{S} = 0$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Il segno positivo indica che  $\vec{J}$  ha lo stesso senso di  $\hat{n}$  = normale alla superficie  $S$  cioè la corrente è entrante.

\* In condizioni stazionarie la somma algebraica delle correnti uscenti da un nodo è nulla.

## II legge di Kirchhoff

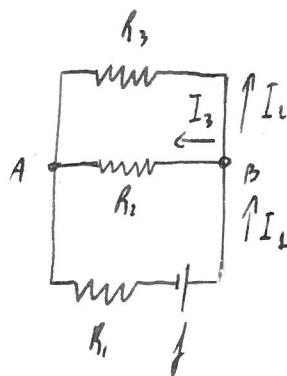
Per ramo s'intende un segmento di circuito compreso tra due nodi contigui.

La miglia è un insieme di rami che formano una linea chiusa in un circuito complesso.

La seconda legge di Kirchhoff afferma che in una miglia

$$\sum_i f_i = \sum_i R_i I_i .$$

b) Determinare  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  nel seguente circuito.



Si dimostra che il numero di maglie che fornisce equazioni indipendenti è pari al numero Rami - numero nodi + 1.

$$\text{Rami} = 3$$

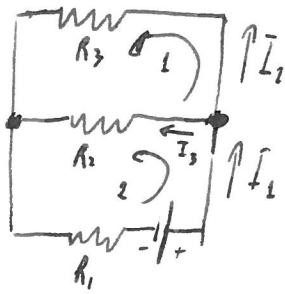
$$\text{nodi} = 2$$

$$\text{maglie} = 3$$

Potrò ricavare 2 equazioni dai nodi e 3 delle maglie  
(le iniziate sono solo  $I_1, I_2, I_3$ )

Isso vuol dire che le due equazioni ottenute Se i due nodi sono  
ogni l'equazione delle 3<sup>a</sup> maglie (perimetro circuito)  
è contingente lineare delle equazioni delle maglie  
formate dai due estremi della maglia. Il circuito stesso

Le lunghezze sono 3 come il numero delle incognite.



fissato il verso delle correnti  
mostrato in figura

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = I_2 + I_3 \\ f = I_3 R_2 + (I_3 + I_2) R_1 \\ 0 = I_2 R_3 + (I_2 - I_1) R_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = (I_1 - I_2) R_2 + I_1 R_1 \\ 0 = I_2 R_3 + I_2 R_2 - I_1 R_1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f = I_1 (R_1 + R_2) - I_2 R_1 \end{array} \right.$$

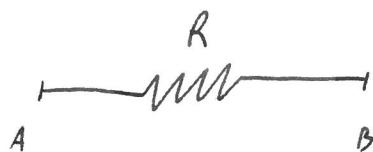
$$0 = -I_1 R_2 + I_2 (R_2 + R_3)$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} f & -R_1 \\ 0 & R_1 + R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \frac{f(R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) - R_2^2}$$

\*) Problemi di misurazione di differenze di potenziale, intensità di corrente e resistenze.

L'ampierometro è uno strumento che permette di calcolare l'intensità di corrente conoscendosi sulle proporzionalità tra corrente elettrica e campo elettrico da essa generato.

Ponendo un ampierometro A in un circuito l'intensità di corrente che attraversa il circuito sarà differente e causa della resistenza r interna all'ampierometro.



$$\Delta V = IR$$

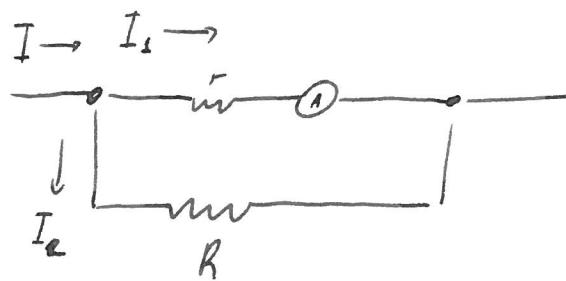
$$\Delta V = I'(r+R)$$

La corrente  $I'$  misurata dall'ampierometro è differente dal valore  $I$  cercato.

$$I = I' \left( 1 + \frac{r}{R} \right)$$

$$I \approx I' \text{ quando } r \ll R$$

Pb) È possibile misurare con un amperometro a base capacità anche intensità di corrente molto alte



Ponendo una resistenza  $R$  variabile posso calcolare l'intensità di corrente con l'amperometro  $A$  senza bruciarselo.

$$\bar{I}_1 r = I_2 R \quad I_2 = \bar{I}_1 \frac{r}{R}$$

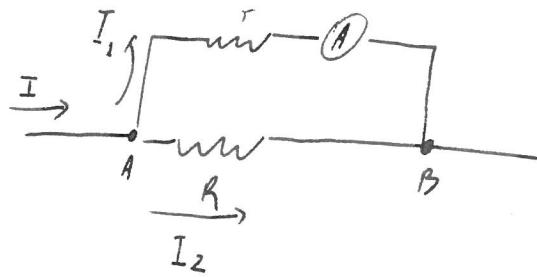
$$I = I_1 + I_2 = \bar{I}_1 \left( 1 + \frac{r}{R} \right)$$

$$\text{Se voglio che } I_1 = \frac{I}{n}$$

$$\frac{\bar{I}_1}{I} = \frac{1}{n} = \frac{1}{1 + \frac{r}{R}} \Rightarrow n = 1 + \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{n-1}{n}$$

(Determina il valore di  $R$  che permette un valore di  $I_1$  tale da non bruciare  $A$ .)

Pb) Misuratore di differenze di potenziale



\* vogli. determinare la differenza di potenziale tra A e B.

$$\Delta V = IR$$

$$I_1 r = I_2 R = \tilde{\Delta V}$$

$$\tilde{\Delta V} = I_1 r$$

$I_1$  misurabile dall'ampierometro  
r dato sperimentalmente dell'ampierometro, fissa.

Se r è molto grande  $I_1 = \frac{\tilde{\Delta V}}{r} \approx 0$  pertanto  $I_2 \approx I$

valendo la legge  $I = I_1 + I_2$

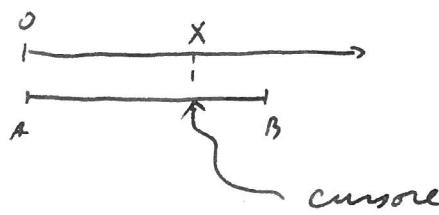
Se r è molto grande  $\tilde{\Delta V} = I_1 r$  si avvicina al valore  $\Delta V = Ir$ .

Lo strumento pertanto misura il valore  $\tilde{\Delta V}$  misurato tende a  $\Delta V$ .

\* Uno strumento di questo tipo che misura differenze di potenziale (r molt. alte) è detto solmetro.

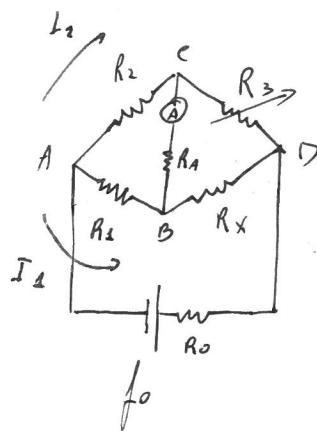
\*) Misure resistenze.

Schemi resistenze variabili.



$R = \rho \frac{X}{S}$  (la resistenza varia secondo la posizione del cavo).

Una resistenza variabile si indica con il simbolo



Nel circuito mostrato in figura sono note le resistenze  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  (variabili), si vuole determinare la resistenza  $R_x$ .

Facendo varire  $R_3$ , è possibile impedire il flusso di corrente nel tratto CB (l'ammetro misura corrente nulla).

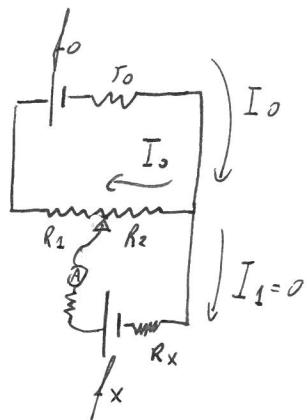
Siamo allora che

$$\Delta V|_{BC=AB} = 0 \quad \text{segue che}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta V)_{AC=AB} = R_2 I_2 = R_1 I_1 \\ (\Delta V)_{DC=DB} = R_3 I_2 = R_x I_2 \end{array} \right.$$

$$\frac{R_x}{R_1} : \frac{R_3}{R_2} \quad R_x = \frac{R_3}{R_2} R_1$$

\* Misura di una forza elettromotrice di una batteria.



Nel circuito in figura sono note le resistenze  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $r_0$  e la forza elettromotrice  $f_0$ , si vuole determinare  $f_x$ .

Misurando il corrente è possibile avere  $I_1 = 0$  si avrà allora

$$\begin{cases} f_x = R_2 I_0 \\ f_0 = (R_1 + R_2 + r_0) I_0 \end{cases}$$

Tale sistema non fornisce una corretta misura se  $f_x$  poiché la resistenza  $r_0$  del generatore  $f_0$  varia rispetto all'intensità di corrente  $I_0$  ma il valore di  $I_0$  tale che  $I_1 = 0$  non è noto.

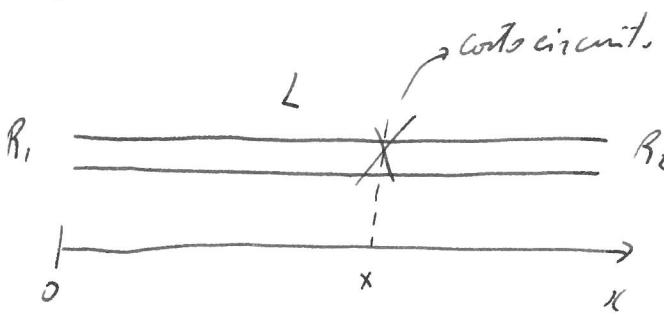
Sostituendo le lettere  $f_x$  e  $I_0$  in questo schema di fuga elettronica.

Tra le note fe e posizionando il cursore in modo che  $I_1 = 0$

otteniamo  $f_c = R_2' I_0$  ricordando che  $f_x = R_2 I_0$

$$f_x = R_2 \frac{f_c}{R_2'}$$

Pb)



Considero due fili conduttori di lunghezza  $L = 2 \text{ Km}$  e densità  $\rho$ .

resistenza  $\rho = \frac{dR}{dl} = 100 \Omega / \text{Km}$

Supponiamo che il sistema perde la sua funzionalità, è possibile calcolare la posizione  $x$  dove c'è un corto circuito.

(Le guaine dei segnali sono i due fili, si conosce  $x$  e il sistema è andato in cort. circuito).

Calcolo la resistenza  $R_1$ , era riportata essere  $300 \Omega$

$$R_1 = 2 \times \rho = 300 \Omega$$

$$x = \frac{R_1}{2\rho} = 1.5 \text{ Km.}$$

È possibile tuttavia che il guasto non si trovi a 1.5 Km

E infatti il c.c. circuito non è perfetto, il sistema può essere visto allora come in figura



Misso la resistenza  $R_2$  all'altra estremità dei due fili, ho risulta essere di 200Ω e non di 400Ω valore che si sarebbe ottenuto nel caso di c.c. circuito perfetto.

$$R_2 = 2 \times \rho + R_s$$

$$R_2 = 2(L-x)\rho + R_s$$

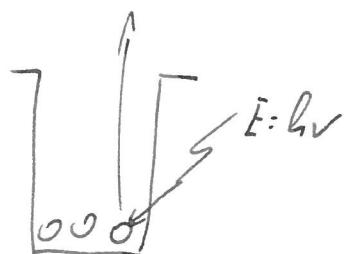
$$R_1 - R_2 = 2\rho(2x-L)$$

$$x = \frac{L}{2} + \frac{R_1 - R_2}{4\rho} = 1.25 \text{ Km.}$$

## Ancore sui conduttori

Vorostante in un conduttore vi sia una nube elettronica libera di muoversi con velocità medie molti elevata, nessun elettrone è libero di uscire dal conduttore stesso.  
Ciò è evidente per motivi di equilibrio di cariche elettostatiche.

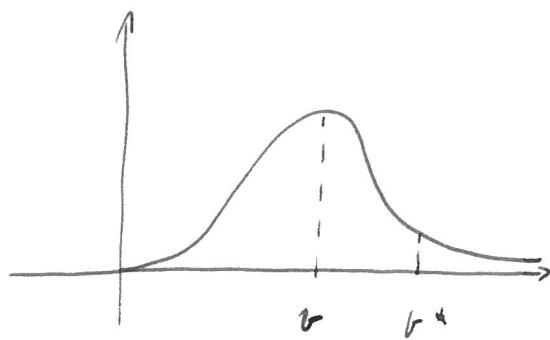
Diciamo che gli elettroni si trovano in una luce. Si potenzialmente per uscire da tale luce avviene ad esempio che vengono colpiti da fotoni portatori di energia  $E = h\nu$  dove  $h$  è la costante di Planck e  $\nu$  le frequenze dell'onda elettromagnetica. (Effetto fotoelettrico).



Vediamo il metello venga colpito ad esempio con un mortaio, l'energia d'urto è maggiore di  $h\nu$  ma tale energia viene distribuita tra tutti gli elettroni, ciascuno riceve una quantità  $E < h\nu$  e non supera le barre Si potenziale.

Vediamo il metallo venga ricoltato, l'energia interna di ogni particella aumenta, solo le particelle avranno una velocità maggiore di  $v^*$  superando il nuovo Si potenziale.

Secondo la curva Si Maxwell



L'integrale fatto alle masse tra due velocità  $v_1 - v_2$  rappresenta il numero di particelle aventi velocità compresa tra queste due valori.

Si dimostra che il valore di  $\beta$  ed una temperatura  $T$  vale

$$J = B T e^{-\frac{q_e \Delta V}{k t}}$$

$$B = 60 \cdot 10^4 \frac{A}{m^2 K^2}$$

$$q_e = \text{carica elettronica} = 1.6 \cdot 10^{-19}$$

$\Delta V$  = energia cinetica per strappare un elettrone dal metallo

per il rame  $\Delta V$  = energia Si ionizzazione = l.i. = 4.4 eV

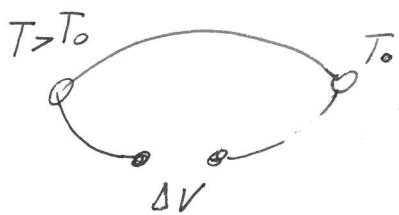
$$\text{Se } T = 300^\circ K$$

$$J = 3.4 \cdot 10^{-14} \frac{\text{ampere}}{m^2}$$

$$\text{Se } T = 2000^\circ K$$

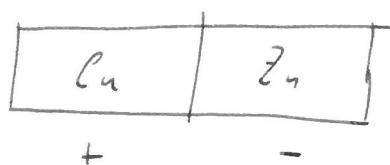
$$J = 8 \cdot 10^{-16} \frac{A}{m^2}$$

\* Spesso tal' relazione è possibile avere uno strumento che lega le temperature alle diverse s.p. potenziale  $\Delta V$



Conoscendo  $\Delta V$  è possibile risalire  $T$  e viceversa.

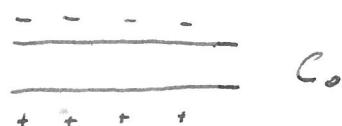
Il fenomeno ... di movimento di elettroni ed una temperatura  $T$  giustifica il motivo della conduttorità di esempio Cu + Zn messi a contatto si carica



## Elettrostatica in presenza di dielettrici

Poiché lo spazio sovra è riempito di materiale solido, liquido o gasoso, per studiare i fenomeni elettrostatici occorre abbandonare l'ipotesi dello spazio vuoto e studiare l'effetto prodotto nello spazio dalla presenza di materiali isolanti (dielettrici).

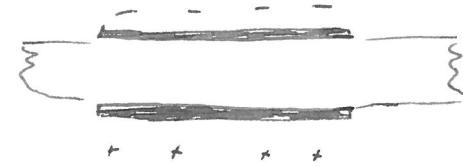
### Istruzione sperimentale



Per un condensatore posto nel vuoto dotato di carica  $Q$  vale  $C_0 = \frac{Q}{\Delta V_0}$

Se introduciamo tra le armature del condensatore un materiale isolante (omogeneo e isotropo) che riempie tutto lo spazio lasciando invariata la forma del condensatore

ele since Q



$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

sì riconosce sperimentalmente che la capacità  $C$  è aumentata

$$C = C_0 \epsilon_r \quad (\epsilon_r = \text{costante dielettrica relativa} \geq 1)$$

Di conseguenza il potenziale  $\Delta V$  è diminuito

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\epsilon_r}$$

Tale fenomeno si può giustificare osservando che il campo elettrico polarizza il dielettrico lasciando sul lato centrale delle corde positive e negative che in assenza di campo elettrico coincidono crea un effetto dipolare.

## Vettore polarizzazione elettrica $\vec{P}$

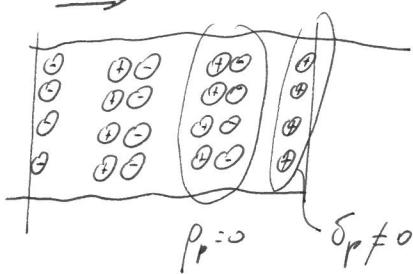
Definiamo vettore polarizzazione elettrica il momento di dipolo elettrico in unità di volume

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{\text{ol T}} = \frac{d \vec{p}}{dT}$$

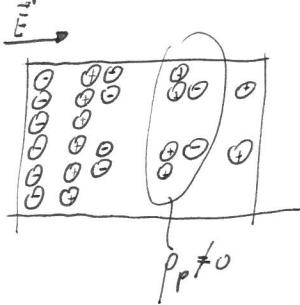
Benché all'interno di un dielettrico le cariche non sono in grado di muoversi liberamente  $\vec{P}$  è diverso da zero sotto l'azione di un campo esterno.

Se chiamiamo  $p_p$  e  $\delta_p$  rispettivamente la densità volumica e superficiale di carica di polarizzazione si dimostra che se  $\vec{P}$  è uniforme  $p_p = \delta_p \neq 0$  (le cariche di polarizzazione si manifestano solo in superficie), se  $\vec{P}$  non è uniforme  $p_p \neq 0$ .

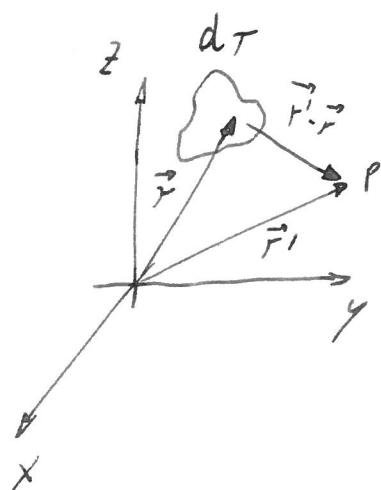
$\vec{P}$  uniforme



$\vec{P}$  decrescente



\* Calcoliamo quantitativamente la relazione tra le leggi  $\vec{P} \propto \vec{S}_p$ ,  $\vec{P} \propto \rho_p$ .



Determinare il potenziale generato nel punt. P dal volumetto infinitesimo  $d\tau$  dielettrico di tipo di vettore polarizzazione  $\vec{P}$ .

Il volumetto  $d\tau$  può essere visto come un dipolo di moment.

$$\vec{p} = \vec{P} d\tau$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{P} d\tau}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_T \frac{\vec{P}(F) (\vec{F}' - \vec{r}) d\tau}{|\vec{F}' - \vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_T \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{F}' - \vec{r}|} \right) d\tau$$

osservo che

$$\vec{\nabla} \left( \vec{P} \cdot \frac{1}{|\vec{F}' - \vec{r}|} \right) = \frac{1}{|\vec{F}' - \vec{r}|} \vec{\nabla} \vec{P} + \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{F}' - \vec{r}|} \right)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_T \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{P}}{|\vec{F}' - \vec{r}|} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_T \frac{\vec{\nabla} \vec{P}}{|\vec{F}' - \vec{r}|} d\tau$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\vec{P} \vec{n} dS}{|\vec{F}' - \vec{r}|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_T \frac{\vec{\nabla} \vec{P}}{|\vec{F}' - \vec{r}|} d\tau$$

Ricordando che  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\delta_P dS}{|\vec{F}' - \vec{r}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_T \frac{P_P d\tau}{|\vec{F}' - \vec{r}|}$

otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \\ P_p = - \vec{\nabla} \vec{P} \end{array} \right.$$

Vediamo ora le forme assunte dalle equazioni.

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \vec{E}_0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = 0 \end{array} \right. \quad \text{di Maxwell nel vuoto in presenza di dielettrici.}$$

Se  $\vec{E}$  è il campo elettrico in presenza di un dielettrico allora

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho + P_p}{\epsilon_0} = \frac{\rho - \vec{\nabla} \vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

se definisco  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , il vettore spostamento elettrico allora

$$\vec{\nabla} \vec{D} = \rho, \text{ il campo elettrico } E \text{ è sempre conservativo}$$

quindi l'equazione di Maxwell dice

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho & \vec{D} = (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 & \end{cases}$$

In generale la relazione tra  $\vec{P}$  e  $\vec{E}$  è espressa da un tensore  $\tilde{T}$  simile

$$\vec{P} = \tilde{T} \vec{E}$$

Tuttavia si sono così in cui il dielettrico è:

a) perfetto cioè il tensore  $\tilde{T}$  è costante

b) omogeneo se il valore di  $\tilde{T}$  non dipende dalla posizione

c) isotropi se il vettore  $\vec{P}$  è parallelo a  $\vec{E}$

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 (\chi + 1) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad \text{avendo posto } (\chi + 1) = \epsilon_r$$

\* Problema dell'elettostatica in mezzo di dielettrici perfetti e isotropi.

Nel caso di dielettrici perfetti e isotropi ( $\vec{P}$  costante e parallelo a  $\vec{E}$  in tutti lo spazio) le equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{D} \times \vec{E} = 0 \end{array} \right. \text{ diventano} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_r \vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{array} \right.$$

dalla I equazione del sistema ricava che

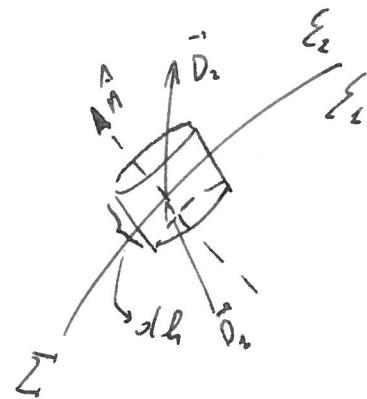
$$\epsilon_r \vec{E} = \vec{E}_0 \quad \vec{E}_0 = \text{campo elettrico generato nel vuoto.}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r} \quad \text{de cui} \quad V = \frac{V_0}{\epsilon_r}$$

\* In un dielettrico perfetto e isotropo il campo elettrico e il potenziale risultano diminuiti di un fattore  $\epsilon_r$ .

\* ) Presenza di due dielettrici:

Consideriamo il caso in cui sono presenti due dielettrici perfetti e isotropi con costanti dielettriche  $\epsilon_1, \epsilon_2$ .  
Sia  $\Sigma$  la loro superficie di contatto.



Considero un cilindretto con le basi parallele a  $\Sigma$  e altezza d $h$  infinitesima. Si ossine superiore rispetto alle dimensioni lineari delle basi si dice d $S$ .

Poiché  $\vec{D} = \rho_{el} \vec{s}$  essendo nulle le cariche localizzate all'interno del cilindro allora

$$\int_{\tau}^{\vec{D}} \vec{D} d\tau = \int_{\tau} \rho_{el} \vec{s} d\tau = 0$$

$$\oint \vec{D} d\vec{l} = 0$$

$\oint_S \vec{n}_1 \cdot \vec{D}_1 + \oint_S \vec{n}_2 \cdot \vec{D}_2 = 0$  il contributo del flusso delle superficie laterale è un infinitesimo di ordine superiore per costruzione del cilindro.

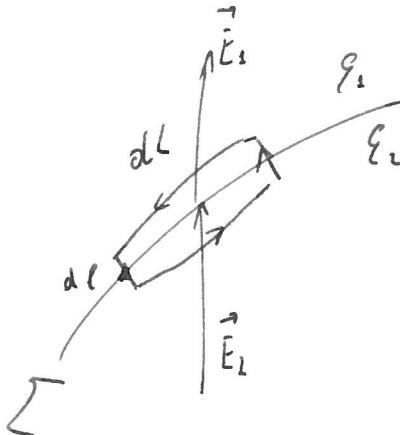
$$\oint_S (\vec{n}_1 \cdot \vec{D}_1 + \vec{n}_2 \cdot \vec{D}_2) = 0$$

$$D_{n_1} = D_{n_2} \Rightarrow E_1 E_{n_1} = E_2 E_{n_2}$$

Atraverso l'interfaccia fra due dielettrici diversi la componente di  $\vec{D}$  normale all'interfaccia non subisce alcuna discontinuità. La componente di  $\vec{E}$  è discontinua.

Considerare una linea  
linea con la figura

essere di un infinitesimo



L'ordine superiore rispetto a  $dL$  era di  $dL$  parallelo alla superficie  $\Sigma$ .

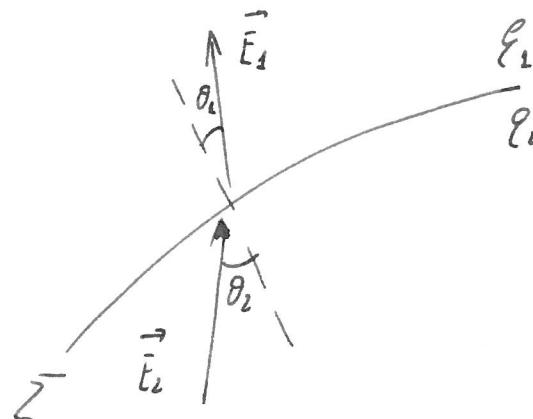
$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad E_{t_1} dL - E_{t_2} dL = 0$$

$$E_{t_1} = E_{t_2}$$

Si è tenuto conto che il contributo dell'integrale si sviluppa su  $dt$  è un infinitesimo di ordine superiore.

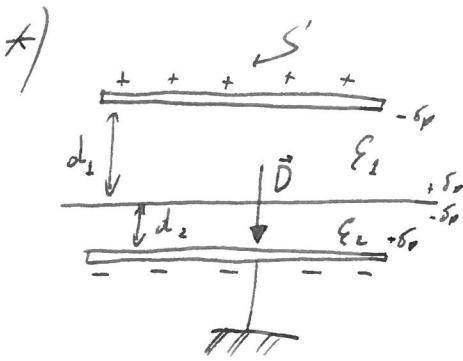
$$E_{t_1} = E_{t_2} \Rightarrow \frac{D_{t_1}}{\epsilon_1} = \frac{D_{t_2}}{\epsilon_2}$$

\* A attraverso la superficie di separazione fra due dielettrici diversi le componenti di  $\vec{E}$  parallele all'interfaccia non subiscono discontinuità;  $D \cdot t$  è discontinua.



$$E_{t_1} = E_{t_2} \Rightarrow \frac{E_{t_1}}{\epsilon_1 E_{n_1}} = \frac{E_{t_2}}{\epsilon_2 E_{n_2}} \Rightarrow \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

\* Tale legge è detta di ripartizione delle linee di forza del campo elettrico.

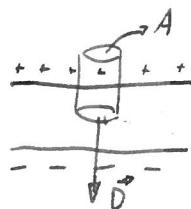


Calcolare la capacità  $C$

Se  $V$  è nota determinare

$\sigma_{\text{pol}}$  sulla superficie di polarizzazione.

Per regioni simmetriche  $\vec{D}$  è ortogonale al condensatore.



Consideriamo che  $\vec{D}$  all'esterno del condensatore è nullo applicando il Teorema di Gauss,

$$DA = \delta A = \frac{Q}{S}$$

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_2}$$

$$V = \int \vec{E} d\vec{l} = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{Q}{S} \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = S \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{d_1 \epsilon_1 + d_2 \epsilon_2}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}$$

$$P_1 = \epsilon_0 (\epsilon_{r_1} - 1) \frac{Q}{S \epsilon_1} = \frac{(\epsilon_{r_1} - 1) Q}{S \epsilon_{r_1}}$$

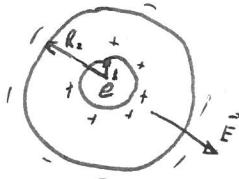
$$S_{\text{pol}}^{(1)} = \vec{P}_1 \hat{n} = \frac{(\epsilon_{r_1} - 1) Q}{S \epsilon_{r_1}}$$

$$P_2 = \frac{(\epsilon_{r_2} - 1) Q}{S \epsilon_{r_2}}$$

$$\delta_{\text{pol}}^{(1)} = \frac{(\epsilon_{r_2} - 1) Q}{S \epsilon_{r_2}}$$

$$S_p(\text{interface}) = \delta_{\text{pol}}^{(1)} - \delta_{\text{pol}}^{(2)}$$

\*)



Tra le armature del condensatore sferico mostrato in figura è posto un dielettrico la cui costante dielettrica sia in funzione del raggio

$$\epsilon(r) = \frac{\epsilon_0 R_2^2}{r^2}$$

$$R_2 = 5 \text{ cm}$$

$$R_2 - R_1 = 1 \text{ mm} \quad V = 10^{11} \text{ V}$$

\*) Determinare la carica  $Q$  del condensatore e le cariche di polarizzazione  $Q_{\text{pol}}^{(1)}$ ;  $Q_{\text{pol}}^{(2)}$  presenti sulle superficie di raggio  $R_1$  e  $R_2$ .

\*) Considera una superficie  $S$  aperta con centro C tra le armature del condensatore.

Per regioni di simmetria il vettore  $\vec{D}$  su tale superficie è costante

$$\int_S \vec{D} d\vec{S} = Q_{\text{lib}}$$

$$D \cdot 4\pi r^2 = Q_{\text{lib}}$$

$$D = \frac{Q_{\text{lib}}}{4\pi r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{lib}}}{4\pi r^2} \cdot \frac{\hat{r}}{\epsilon_0 R_s^2}$$

$$\Delta V = \int_{R_i}^{R_o} \vec{E}_r dr = \frac{Q_{\text{lib}}}{4\pi \epsilon_0 R_s^2} (R_o - R_i)$$

$$Q_{\text{lib}} = \frac{\Delta V}{4\pi \epsilon_0 R_s^2}$$

$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}$ , la componente isolabile

$$P = \frac{Q_{\text{lib}}}{4\pi} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_s^2} \right)$$

$$S_{\text{pol}}^{(1)} = \vec{P} \cdot \hat{n} = -\frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right)$$

$$S_{\text{pol}}^{(2)} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) = 0$$

Sulla superficie 2<sup>e</sup> non ci sono corihi di polarizzazione.

$$Q_{\text{pol}}^{(1)} = -\frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \stackrel{\text{utile}}{=}$$

\* ) Il nego non è omogeneo  $\vec{\nabla} \vec{P} \neq 0 \quad P_{\text{pol}} \neq 0$ .

## \* Rigidità dielettrica

Per rigidità dielettrica s'intende il campo elettrico massimo applicabile oltre il quale nel dielettrico si realizzano scintille elettriche che ne modificano irreversibilmente le proprietà di isolamento.

## \* Energie elettostatiche in presenza di dielettrici.

Per un sistema di cariche libere

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau \quad \text{da cui si ricava} \quad U = \int_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau$$

Quando sono presenti anche dei dielettrici l'energia elettostatica sarà data dal lavoro minimo a posizionare le sole cariche libere ma nel potenziale risultante presente anche ad effetto delle cariche di polarizzazione.

Le cariche di polarizzazione vengono automaticamente rotolate nella configurazione finale delle

interno con le cariche libere.

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau \quad \rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{D}$$

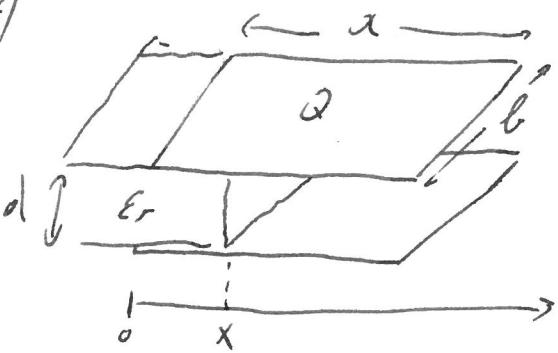
*V: potenziale nel dielettrico.*

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} V d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} V d\tau$$

(nel caso di dielettrici isotropi perfetti)

$$U = \int_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 d\tau$$

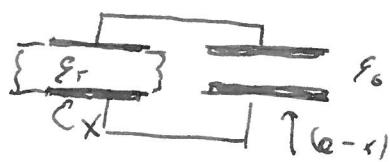
\*)



\*) Determinare la  
forza con cui è visualizzato  
il dielettrico.

$$F_x = -\frac{\delta U}{\delta x} \quad U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

La capacità del sistema è pari al parallelo tra due condensatori : il primo di lato  $x$  in presenza di dielettrico, il secondo di lato  $(a-x)$  nel vuoto.



$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \times b}{d} + \frac{\epsilon_0 (a-x) b}{d} = \frac{\epsilon_0 b}{d} [\epsilon_r x + (\epsilon_0 - \epsilon_r)x] =$$

$$= \frac{\epsilon_0 b}{d} [x + x(\epsilon_r - 1)]$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 \epsilon_0 l}{2 \epsilon_0 b [e + x(\epsilon_{r-1})]}$$

$$F_x = -\frac{\delta U}{\delta x} = \frac{Q^2 \epsilon_0 l}{2 \epsilon_0 b} \cdot \frac{(\epsilon_{r-1})}{[e + x(\epsilon_{r-1})]^2}$$

\*|  $F_x > 0$  in effetti è una forza di attrazione.

Il lavoro compiuto dal campo è perciò:

$$\delta L = -\delta U$$

$$U_i - U_f = \frac{Q^2 \epsilon_0 l}{2 \epsilon_0 b e} - \frac{Q^2 \epsilon_0 l}{2 \epsilon_0 b [e + e(\epsilon_{r-1})]} =$$

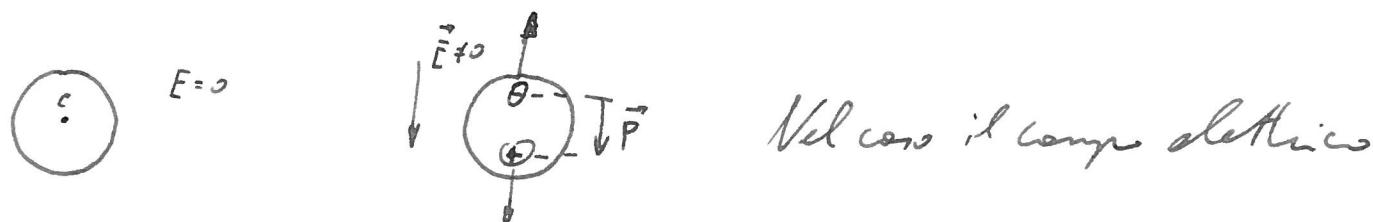
$$= \frac{Q^2 \epsilon_0 l}{2 \epsilon_0 b e} \left[ 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right] = \frac{Q^2 \epsilon_0 l (\epsilon_{r-1})}{2 \epsilon_0 b e \epsilon_r} = \frac{Q^2 (\epsilon_{r-1})}{2 C_0 \epsilon_r}$$

$\hookrightarrow \frac{1}{C_0}$

Tale lavoro coincide con la differenza S. esistente  
elettrico totale tra il condensatore posto nel vuoto e nel  
dielettrico.

Al livello microscopico il fatto che un campo elettrico  $\vec{E}$  induce in un dielettrico un vettore polarizzazione  $\vec{P}$  parallelo a  $\vec{E}$  è giustificabile nel seguente modo:

- 1) Considero un atomo; se  $E=0$  il momento dipolare dell'atomo è nullo coincidendo il baricentro delle cariche positive con quelle negative



Sia dunque  $\vec{E} \neq 0$  il baricentro delle cariche positive e negative si separano creando un vettore  $\vec{P}$

$$\vec{P} = \text{dd} \vec{E}_e$$

) Se le molecole ha un dipolo iniziale ( $\vec{E}_l = \vec{v}$ ) allora segue,  
 quando  $\vec{E} = 0$  in una posizione macroscopica  $\vec{P} = 0$ , nel  
 caso  $\vec{E}_l \neq 0$  la molecola si orienta ponendo il dipolo  
 parallelamente al campo.

Tale orientamento è ottenuto. Sotto Temperature che  
 righeggiano i quindici assorbimenti; Singh.

$$\langle \vec{p} \rangle = d_0 \vec{E}_l \quad \text{si Singolare ha } d_0 = \frac{P_0^2}{3kT} \quad \text{dove}$$

$P_0$  è il valore del singolo Si molecule per  $\vec{E}_l = 0$ ,  $k = \text{costante di Boltzmann}$ .

## Fenomeni magnetici

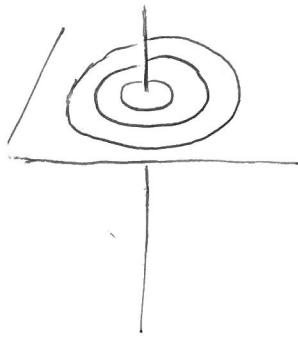
Fin dall'antichità si conosce le proprietà possedute dalle magnetite. Si ottiene l'incisura di ferro; le forze di attrazione o di repulsione fra due magneti, e tra un magnete e del ferro non sono che caratteristiche per il semplice fatto che, poste una vicina l'altra in un campo magnetico esso non subisce alcuna forza.

Come due cariche elettriche possono attrarsi o respingersi così anche due magneti; tuttavia se in elettostatica è possibile separare cariche elettriche positive dalle negative, in un magnete è sempre presente il polo positivo e quelli negativi.

Agl'inizi del 1800 si scoprì che un filo percorso da corrente elettrica genera un campo magnetico.

 se il verso delle correnti in due conduttori paralleli è opposto emetti attrazione, altrimenti repulsione.

Un ago magnetico in prossimità di un filo percorso da corrente elettrica si orienta. E' mostrato che le linee di forza del campo elettrico sono circoli concentrici con il filo elettrico.



Osserviamo invece che il campo elettrico generato da un filo percorso da corrente elettrica è nullo.

Infatti  $\vec{E}(\vec{r})$  superficie cilindrica concentrica al filo è nullo pertanto  $\vec{E} = 0$ .

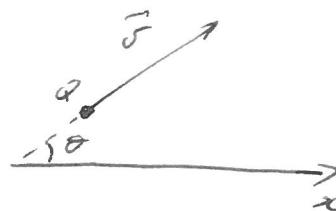
S'scrivì inoltre che una carica in moto risente dell'azione del campo magnetico.

\* Definizione vettore campo magnetico  $\vec{B}$ .

Considero un campo magnetico  $B$  costante, si osserva che una carica in moto posta in tale campo subisce una forza proporzionale alla velocità  $v$  e alla carica  $q$ .

Inoltre se  $F=0$  quindi la direzione della velocità è parallela all'asse  $x$ , sarà massima quando la direzione è ortogonale all'asse  $y$ , verrà inoltre proporzionalmente allo seno dove  $\alpha$  è l'angolo che  $\vec{v}$  forma con l'asse  $x$ .

$$|\vec{F}| = K q v \sin \alpha$$



Definiamo allora  $K = B$

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$\vec{F}$  = forza S. Lorentz.

Se una carica in moto risente di una forza S. naturale elettostatica e S. naturale magnetica

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_e = q \vec{E}$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

a) Considera il caso in cui un filo di lunghezza  $l$  è attraversato da corrente elettrica costante  $i$ .

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$



$\vec{F} = n q l S \vec{v} \times \vec{B}$  rappresenta le forze generate dal filo attraversato da corrente elettrica.

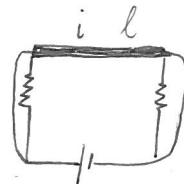
$n$  = numero di cariche presenti per unità di volume.

$$\vec{J} = n q \vec{v} \quad JS = i$$

$$\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}$$

Tale formula è verificabile sperimentalmente con misure stetiche delle forze magnetiche.

Umanatore statico  
di forze magnetiche



Sotto l'egizie si forze  
magnetiche le molle  
si comprimono. Si stende.

In un campo magnetico la forza non ha la direzione del campo ma è ad essa ortogonale.

L'equazione

$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$  fornisce una definizione puntuale di  $\vec{B}$

$\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}$  fornisce invece il valore di  $\vec{B}$  in un circuito attraversato. Se i costanti e avente direzione  $\vec{l}$  costante.

Se  $\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}$  (formula S. Laplace) fornisce dalla II equazione il valore puntuale S.  $\vec{B}$ .

¶ L'unità di misura di  $\vec{B}$  è  $\frac{\text{Forza}}{\text{Velocità} \cdot \text{corrente}} = \frac{N}{C \cdot S} =$

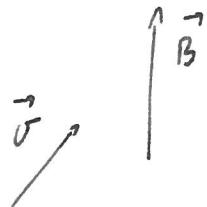
$$= 1 \text{ Tesla} = \frac{\text{Weber}}{\text{m}^2} \quad \text{Weber} = \text{Wb} = \text{solt. sec}$$

Poiché il Tesla è una unità di misura S. campi magnetici molto alti solitamente si usa il gauss

$$1 \text{ gauss} = 10^{-4} \text{ Tesla.}$$

\* Moto di una carica q in un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



Scompongo il vettore  $\vec{v}$  in una componente parallela e in una normale al campo.

La componente  $v_{||}$  resta costante mentre la componente  $v_{\perp}$  varia a causa dell'interazione con  $\vec{F}$ .

Insomma essendo la forza  $\vec{F}$  sempre ortogonale a  $\vec{v}$  il lavoro fatto dal campo ...  $\mathcal{L} = \int \vec{F} d\vec{s} = \int \vec{F} \vec{v} dt = 0$ .

La variazione s: energia cinetica  $U = \frac{1}{2}mv^2 = \text{costante}$   
 $|v| = \text{costante}$ .

Poiché  $v_{\parallel}$  = costante anche  $v_L$  sarà costante.

Consideriamo il moto delle varie  $v$  composte nel moto  $v_L$  e  $v_{\parallel}$ .

Sulla componente  $\vec{v}_L$  agisce la forza del campo normale esterno. Essa fornirà un'accelerazione puramente normale

$$F = q v_L B = m a_n = m \frac{v_L^2}{R}$$

Siccome che  $R = \frac{m v_L}{q B} = \text{costante}$

Il moto avviene su una traiettoria circolare di raggio

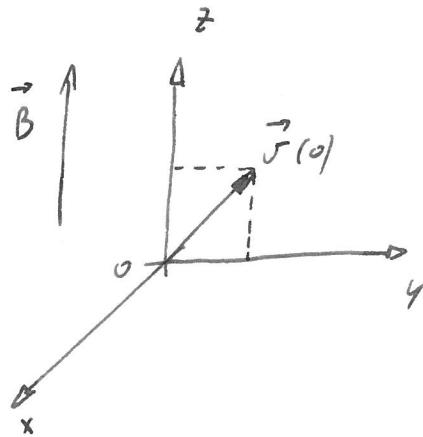
$R = \frac{m v_L}{q B}$ , tale moto è circolare uniforme.

Il moto composto. Se  $v_L$  e  $v_{\parallel}$  sono entrambi costanti.

\* All'istante si potranno pervenire nel  
seguinte modo

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{a}$$

$\vec{B}$  uniforme



Posizion gli assi in modo che  
 $z \parallel \vec{B}$     $\vec{v}$  è al piano  $\{x, y\}$ .

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}$$

$$F_x = m \ddot{x} = q v_y B$$

$$F_y = m \ddot{y} = -q v_x B$$

$$F_z = m \ddot{z} = 0$$

Condizioni iniziali

$$\vec{v}_{x_0} = 0$$

$$\vec{v}_y(t=0) = \vec{v}_{y_0}$$

$$\vec{v}_z(t=0) = \vec{v}_{z_0}$$

$$z = v_{z_0} t \quad (1)$$

Consideriamo ora il sistema Si esegui il differenziale

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = m\ddot{x} = q\dot{y}B \\ F_y = m\ddot{y} = -q\dot{x}B \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{x} = q\dot{y}B = -\frac{(qB)^2}{m}\dot{x} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{y} = -qB\ddot{x} = -\frac{(qB)^2}{m}\dot{y} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\ddot{x}) = -\omega^2 \dot{x} \\ \omega^2 = \left(\frac{qB}{m}\right)^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \end{array} \right.$$

Dalle condizioni iniziali ricaviamo che

$$t=0 \quad \dot{x}(t)=0 \quad \Rightarrow \varphi = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qyB \\ m\ddot{y} = -qxB \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega y \\ \ddot{y} = -\omega x \end{cases}$$

$$\ddot{y}(t=0) = 0 \quad \ddot{x}(t=0) = \omega v_{y_0}$$

$$\ddot{y} = -B\omega \sin(\omega t - \varphi)$$

$$0 = -B\omega \sin(-\varphi) \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cos \omega t \\ \dot{y} = B \cos \omega t \end{cases}$$

$$\ddot{x} = \omega A \cos \omega t$$

$$t=0 \quad \omega v_{y_0} = \omega A \quad A = v_{y_0} \quad B = v_{y_0}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = v_{y_0} \cos \omega t \\ \dot{y} = v_{y_0} \cos \omega t \end{cases}$$

$$X(t) = \int \dot{x}(t) dt = -\frac{v_{y_0}}{\omega} \cos \omega t + \text{costante}$$

$$y(t) = \int \dot{y}(t) dt = \frac{v_{y_0}}{\omega} \sin \omega t + \text{costante}$$

Le costanti dipendono dalla posizione iniziale delle leve. Poi il corpo è uniforme in tutto l'asse, la posizione iniziale è inalterata al fin del mto.

Supponiamo le costanti nulle

$$x(t) = -\frac{v_{y_0}}{\omega} \cos \omega t$$

$$y(t) = \frac{v_{y_0}}{\omega} \sin \omega t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2(t) + y^2(t) = \frac{v_{y_0}^2}{\omega^2} = R^2 \\ z(t) = v_{z_0} t \end{array} \right. \quad \text{il mto è decisale.}$$

IV

\* )  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  (forza esercitata su una carica  $q$  in  
moto con velocità  $\vec{v}$  da un campo magnetico  $\vec{B}$ ).

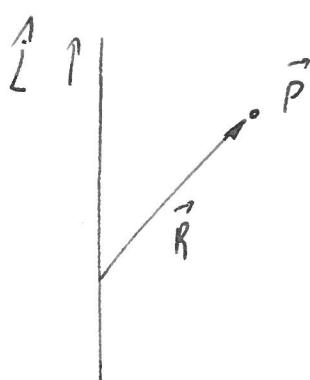
$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$  (forza esercitata su un filo infinitesimo  $d\vec{l}$   
in cui circola corrente  $i$  da un campo  
magnetico  $\vec{B}$ ).

Si dimostri sperimentalmente che se in un filo  
di lunghezza indefinita circola corrente  $i$  viene generato  
un campo magnetico  $\vec{B}$  per la

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{R^2} \vec{L} \times \vec{R}$$

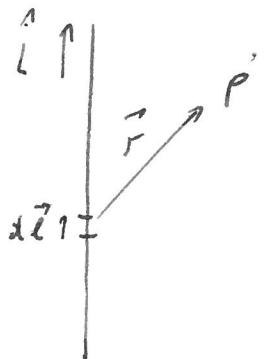
$\vec{L}$ : versore avente il verso delle  
correnti.

$\vec{R}$ : posizione di un punto  $P$  rispetto  
al filo.



Si dimostra sempre sperimentalmente che un tratto elementare di circuito  $d\vec{l}$  in un campo magnetico generato da corrente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

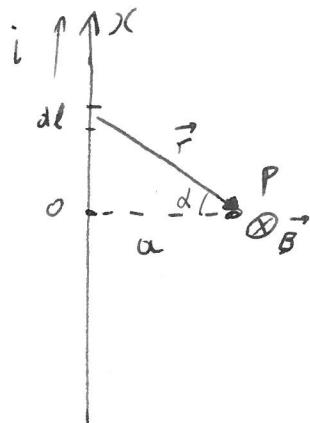


$$\mu_0 = \text{costante} = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{mA}}$$

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} \vec{l} \times \vec{R} \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^3} d\vec{l} \times \vec{R}$$

\* Determiniamo il campo magnetico generato da un filo infinito in cui circola corrente i con la prima equazione di Ampere  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d(\vec{l} \times \vec{r})}{r^3}$



Il verso del campo  $\vec{B}$  sarà quello entrante nel foglio  $\oplus$  [il verso uscente si indica con  $\ominus$ ]

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos \alpha \, dl}{r^3}$$

$$dl = dx$$

$$\frac{x}{a} = \tan \alpha \quad dx = \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

$$r = \frac{a}{\cos \alpha}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \frac{(\cos \alpha)^2}{a^2} \frac{a}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{\mu_0 i}{4\pi a} \left[ 2 \alpha \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \mu_0 i}{4\pi a}$$

\*

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \frac{i d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

$$i = \int_S d\vec{s} = \int_S n q v dS_n$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \int_S n q v \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3} dS_n = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_l \int_S n q \frac{\vec{v} \times \vec{R}}{R^3} dS_n dl$$

$$(v d\vec{l} = \vec{v} dl)$$

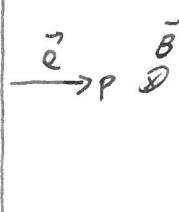
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} n q \frac{\vec{v} \times \vec{R}}{R^3} dl$$

Since the one single wire is not a genuine  
current magnetic pair

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{v} \times \vec{R}}{R^3}$$

pb) Determinare l'intensità del campo magnetico generato da un conduttore filiforme di corrente elettrica  $i = 10\text{ A}$  ad una distanza  $a = 10\text{ cm}$ . (lunghezza infinita).

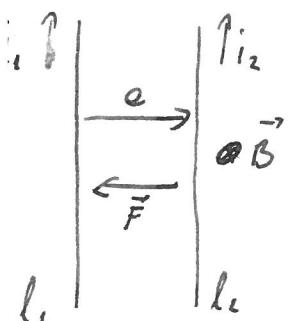
i)



$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{10}{0.1} = 2 \times 10^{-5}\text{ T}$$

(il valore di  $B$  è dello stesso ordine del campo terrestre).

\*) Determinare le forze esercitate tra due fili contrariati. Se correnti  $i_1$  e  $i_2$  avendo lo stesso verso.



Le correnti  $i_2$  generano in  $l_2$  un campo magnetico uniforme avente verso indicato in figura e modulo

$$B = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi a}$$

Le forze che tale campo eserciterà su  $l_2$  sarà attrattive (verso indicati in figura) ortogonale a  $\vec{B}$  e a  $\vec{i}_2$

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$dF = i_2 d\ell \frac{\gamma_0 i_1}{2\pi e}$$

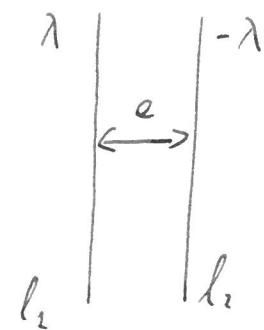
$$\frac{dF}{dl} = \frac{\gamma_0}{2\pi e} i_2 i_1 \quad (dF = \text{Forza esitata su un Tratto } S: \text{fisso } dl)$$

\*/ Si osservi che lo stesso risultato si sarebbe ottenuto nel calcolare la forza da  $i_2$  esercita su  $i_1$ .

La forza magnetica è mutua.

2b)

Considera due fili di lunghezza infinita dotati di una distribuzione di carica lineare  $\lambda$  e  $-\lambda$ .



$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 e}$$

è il campo elettrico generato da  $l_1$

$$\text{su } l_2. \quad dF = \lambda dl E$$

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 e} \quad (\text{dF è la forza esercitata mutualmente tra due elementi di } l_1 \text{ e } l_2 \text{ di lunghezza } dl)$$

Se facciamo scorrere il filo alto con velocità  $v$

$$l_1 \text{ creerà su } l_2 \text{ un campo } B = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi e}$$

$$\text{Tendendo controllando } i = \frac{dq}{dt} = \lambda \frac{ds}{dt} = \lambda v$$

$$dF_n = idl B = \frac{\mu_0}{2\pi e} \lambda^2 v^2 dl$$

(dF è la forza esercitata tra due elementi di  $l_1$  e  $l_2$ , tale forza è attrattiva)

È possibile determinare le velocità per cui le forze repulsive sorte dal campo elettostatico bilancino le forze attrattive sorte dal campo magnetico.

$$\frac{dF_E}{dl} = \frac{dF_M}{dl}$$

$$\frac{\gamma_0 X^2}{4\pi d} = \frac{X^2}{4\pi \epsilon_0 d}$$

$$J = \frac{1}{\sqrt{\gamma_0 \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{8.86 \cdot 10^{-12} \times 12.56 \cdot 10^{-2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1.11 \cdot 10^{-12}}} = 3 \times 10^8 \frac{m}{s} = C$$

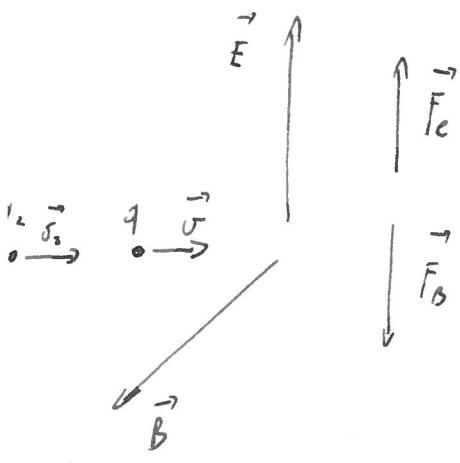
(C = velocità delle luce nel vuoto)

Risultato è sorprendente per l'inevitabile rileggezione tre le costanti g-e-E con C.

Inoltre è anche pericoloso perché viola il principio di relatività galileiana.

L'studio della meccanica relativistica permetterà di risolvere tali problemi.

\* ) Considera un campo elettrico  $\vec{E}$  e un campo magnetico  $\vec{B}$  ortogonali e un flusso. Si parla di carica  $q$  e velocità  $v$  ortogonale a  $\vec{B}$  e  $\vec{E}$



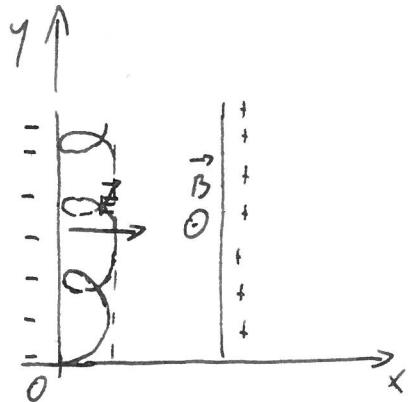
le forze elettrostatiche e le forze magnetiche agente su ogni particella avranno verso ind. cat. in figura, tutt'e due avranno verso opposto.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\text{affinché } \vec{F} = 0 \quad q\vec{E} = qv\vec{B} \quad v = \frac{\vec{E}}{\vec{B}}$$

Il dispositivo mostrato è un selector di velocità delle particelle. Infatti finché il sole di  $B$  e  $E$  sono perpendicolari la velocità  $v = \frac{E}{B}$  non avrà alcuna deflessione per effetto dei campi.

pl) Studi il moto di una carica posta in un campo elettrico in un campo magnetico (entrambi uniformi) posti ortogonalmente tra loro.



$$t=0 \quad x=0$$

$$y=0$$

Il moto si svolge solo lungo il piano  $x, y$ .

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0_x & 0_y & 0_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} m \ddot{x} = qE + q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \ddot{x} = q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}B \end{cases}$$

$$\ddot{x} = \frac{qB}{m} \dot{y} = -\left(\frac{qB}{m}\right) \dot{x} = -\omega^2 \dot{x}$$

$$\ddot{y} = -\frac{qB}{m} \left( \frac{qE}{m} + \frac{qB}{m} \dot{y} \right) = -\omega^2 y - \frac{q^2 BE}{m^2}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cos(\omega t - \varphi) \\ \dot{y} = B \cos(\omega t - \psi) - \frac{q^2 BE}{m^2 \omega^2} = B \cos(\omega t - \psi) - \frac{q^2 BE m^2}{m^2 \omega^2 B^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cos(\omega t - \varphi) \\ \dot{y} = B \cos(\omega t - \psi) - \frac{E}{B} \end{cases}$$

$$t=0 \quad \dot{x}=0$$

$$0 = A \cos \varphi \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{y} = -B \omega \sin(\omega t - \psi)$$

$$\dot{y}( \text{when } t=0) = 0$$

$$-B \omega \sin(-\psi) = 0 \quad \psi = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cos \omega t \\ \dot{y} = B \cos \omega t - \frac{E}{B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = A \omega \cos \omega t \\ \ddot{y} = -B \omega \sin \omega t \end{cases}$$

$$\dot{x}(t=0) = A\omega = \frac{q\bar{E}}{m} \quad A = \frac{q\bar{E}}{m\omega} = \frac{q\bar{E}}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{B}} = \frac{\bar{E}}{B}$$

$$\ddot{y} = -q \frac{\dot{x} B}{m}$$

$$-B \dot{y} \cancel{\cos \omega t} = -\underbrace{\frac{q\bar{B}}{m}}_{\omega} A \sin \omega t \quad B = A = \frac{\bar{E}}{B}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\bar{E}}{B} \cos \omega t \\ \dot{y} = \frac{\bar{E}}{B} \cos \omega t - \frac{E}{B} \end{cases}$$

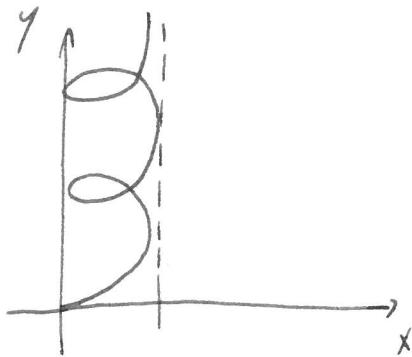
$$x = -\frac{\bar{E}}{B\omega} \cos \omega t + c_1$$

$$y = \frac{\bar{E}}{B\omega} \cos \omega t + c_2 - \frac{\bar{E}}{B} t$$

$$t=0 \quad (x=0, y=0)$$

$$\begin{cases} x = -\frac{E}{B\omega} \cos \omega t + \frac{E}{B\omega} \\ y = \frac{E}{B\omega} \sin \omega t - \frac{E}{B} t \end{cases}$$

Il moto è quell mostrato in figura



Lungo l'asse  $x$  si ha un moto armonico il centro

$$\frac{E}{B\omega} e \text{ sin } \omega t + \frac{E}{B\omega}$$

Se le distanze tra le armature del condensatore sono  $D$

$$\frac{E}{B\omega} = \frac{D}{2} \quad \text{è il minimo valore affinché le cariche raggiungano la seconda armatura.}$$

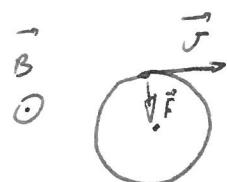
$$\frac{E}{B} = \frac{D}{2} \omega = \frac{D}{2} \frac{qB}{m}$$

$$\frac{E}{B^2} = \frac{D}{2} \frac{q}{m}$$

## \* acceleratori di particelle

Consideriamo una carica  $q$  avente velocità  $v$  ortogonale ad un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$ .

La carica descriverà una traiettoria circolare con velocità  $v$  costante.



$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$q\sigma B = m\omega_c = m\frac{\sigma}{R}$$

$$L_B = \int \vec{F} d\vec{s} \Rightarrow U = \text{cost}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \text{cost}$$

$$mv = qBR$$

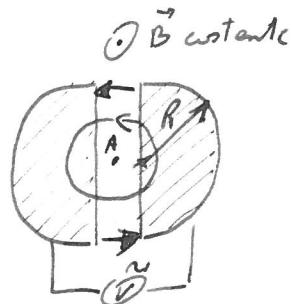
$$\sigma = \text{cost.}$$

La velocità angolare  $\omega$  con cui la particella descrive le circonferenze sole  $\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m}$

Le particelle assegnate percorrono una traiettoria circolare sempre co la stessa velocità angolare e indipendentemente dal raggio delle sue velocità.

$$Il periodo T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{Bq} .$$

Un acceleratore di particelle (ciclotrone) consiste in due scatole semicilindriche immerse in un campo magnetico  $\vec{B}$  costante.



Dal punto A fuoriscono cariche positive (protoni) che, posti nel campo  $\vec{B}$  descrivono una circonferenza.

Le due scatole semicilindriche sono tenute ad una differenza di potenziali  $IV$  variabile.

Quando la particella si trova in una zona interna di uno dei due semicilindri non sente l'effetto del campo elettrico essendo le scatole conduttrici:

Ville fascie compresa tra le due scatole le cariche risente delle differenze di potenziale  $IV$  e viene

muoverete.

Nel caso  $\Delta V$  fosse costante attraversando due volte in senso opposto le fascie tra i due semicilindri subirebbe in un giro completo un'accelerazione complessivamente nulla.

Si perci si invertisse la differenza  $\Delta V$ : potenziale ogni volta che la canna percorre una semicirconferenza non subirebbe in un giro completo un incremento energetico per  $\Delta V = 2g\Delta V = \frac{1}{2}m\Delta V^2$ .

Qui non richiede grandi difficoltà notare il periodo di scorrere effettivo la canna percorre una circonferenza indipendentemente dalla velocità stessa.

Ora non è altro che invertire il potenziale ogni semiperiodo.

$$T = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi m}{B_g}$$

Man mano le particelle aumenta velocità il raggio si desidera delle traiettorie percorse aumenta.

Quando  $r=R$  (raggio scatole semicilindrica) il motore viene deflessa da un opportuno condensatore nella direzione voluta.

Supponiamo che il campo magnetico  $B = 2 T$  e che il raggio d'una scatola semicilindrica sia  $R = 1 m$ . L'energia che possiede il motore quando sarà reattore solare

$$U = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{(qBR)^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{q}{m} B^2 R^2$$

$$\frac{q}{m} = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{1.67 \times 10^{-27}} \approx 10^8$$

$$U = \frac{1}{2} 10^8 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 200 \text{ MeV} \quad M = 10^6$$

Se la differenza di potenziale fra le due

scatole è di  $10^3$  volt le corrisponderebbe

la stessa di supercarga della 2 scatole  $200 \cdot 10^3$  volte

$$\text{poiché } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi \cdot 10^{-8}}{l} \text{ e in syn}$$

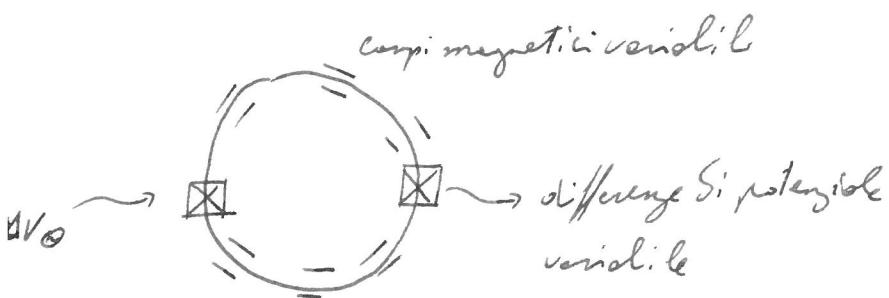
periodi, le come altrimenti due volte le stesse. Si accelerazione, il tempo complessivo che occorre per accelerare il proton è  $\tilde{T} = \pi \cdot 10^{-8} \cdot 100 \cdot 10^3 \approx 3 \text{ millesimi di seconds.}$

\*) Per velocità molto alte occorre tener conto degli effetti relativistici.

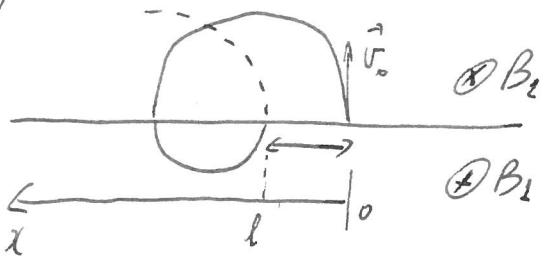
Le velocità vengono a cui il proton descrive le sue orbite circolari non sono costante poiché la massa in relattività varia con la velocità.

Pertanto, una differenza si potenziale simile ogni  $\frac{T}{2}$  sec. non sarebbe più sincronizzata con il percorso del proton nella fascia di accelerazione.

Con i sinetoni, grossi anelli in cui varia il potenziale  
che scelgono le cariche e lo spettro campo elettrico in  
sincronie con le cariche stesse si raggiungono velocità  
prossime a quelle della luce.



Pb)



$B_1$  = campo elettrico costante  
presente nel I semipiano.

$l$ : spazio percorsa dalla  
particella in un per. So T.

$B_2 < B_1$  = campo elettrico costante  
presente nel II semipiano.

$$\vec{v} \perp \vec{B}$$

\*) Determinare  $\langle \vec{v} \rangle$ .

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{m}{q} \frac{1}{B_1}$$

$$T_2 = 2\pi \frac{m}{q} \frac{1}{B_2}$$

$$T = \frac{l}{2} (T_1 + T_2) = \pi \frac{m}{q} \left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right)$$

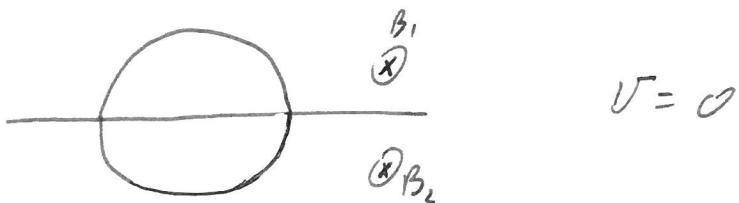
$$l = 2(R_2 - R_1) \quad R = \frac{mv_0}{qB}$$

$$l = \frac{mv_0}{q} \left( \frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_1} \right)$$

$$|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{L}{T} = \frac{\frac{2\pi\mu_0}{A} \left( \frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_1} \right)}{\pi \frac{m}{q} \left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right)} = \frac{2\mu_0}{\pi} \frac{\left( \frac{1}{B_2} - \frac{1}{B_1} \right)}{\left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right)}$$

$$= \frac{2\mu_0}{\pi} \frac{B_1 - B_2}{B_1 + B_2}$$

\* nel caso  $B_1 = B_2$



\* se  $B_2$  avanza verso opposto rispetto a  $B_1$

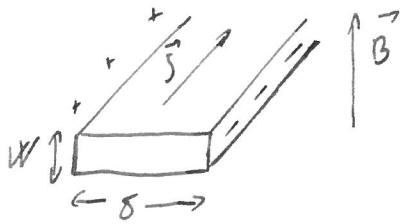
$$T = \pi \frac{m}{q} \left( \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} \right)$$

$$l = \frac{2\mu_0\delta_0}{q} \left( \frac{1}{B_2} + \frac{1}{B_1} \right)$$

$$|\vec{v}| = \frac{2\mu_0}{\pi}$$

## \* Effetto Hall

considera un conduttore a forma di parallelepipedo attraversato da corrente elettrica avente verso normale al campo  $\vec{B}$  in cui è immerso il conduttore.



il campo magnetico genera sulle cariche in moto una forza  $F = qvB$  diretta parallellamente al lato  $b$ . Sotto l'azione di tale forza le cariche si spostano in modo. Se creare un campo elettrico di amm.  $E_H$  tale forza.

$$E_H = \frac{qvB}{d}, \text{ tale campo sarà diretto verso opposto a } \vec{F}.$$

$E_H$  sarà determinato da un adattamento. Si calcola sulla base del conduttore come in figura.

Tale distribuzione crea una differenza di potenziale

$$\Delta V = E_H \delta = \delta v B$$

$$\text{poiché } i = S S = n q v \delta$$

$$v = \frac{i}{n q w \delta}$$

$$\Delta V = \frac{\delta i B}{n q w \delta} = R_H \frac{B i}{w}$$

$$R_H = \frac{1}{n q} \quad \text{è detta costante di Hall}$$

in un buon conduttore ci sono circa  $10^{23}$  elettroni liberi per  $\text{cm}^3$

$$n = 10^{23} \cdot 10^6 \quad q = 10^{-19}$$

$$R_H = \frac{1}{10^{23} \cdot 10^6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-10} \frac{\text{m}^2}{\text{C}}$$

Per semiconduttori  $R_H$  è maggiore.

Noto  $R_H$ ,  $i$ ,  $w$  e misurato  $\Delta V$  sulla fine del

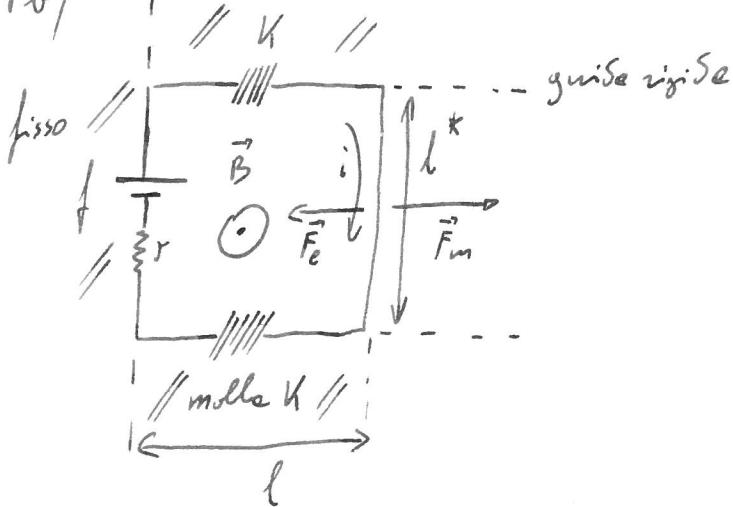
conduttore si può ricavare il campo magnetico  $B$ .

È questo uno strumento molto usato per le misurazioni.  
Le misure di  $\Delta V$  servono a ripetere alle posizioni che assume  
il conduttore nei confronti di  $B$ .

Puando  $\Delta V$  avrà il valore massimo  $\vec{B}$  sarà ortogonale  
alla superficie larga del parallelepipedo.

(Si può così indicare anche il verso  $S, \vec{B}'$ ).

Pb)



$$i = \frac{f}{r}$$

$$f = 10V$$

$$R = 2 \Omega$$

$$l^* = 6 \text{ cm}$$

$$B = 0.1 \frac{Wb}{m^2} \quad V = 1.5 \frac{V}{m}$$

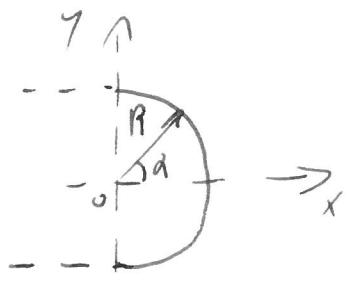
\*) Determinare la posizione d'equilibrio.

$\vec{F}_m$  (forza prodotta dal campo magnetico) si fa bilanciare all'equilibrio dalle forze elastiche  $\vec{F}_e = 2Kx \propto$

$$2Kx = il^* B$$

$$\Delta x = \frac{il^* B}{2K} = \frac{f}{r} \cdot \frac{l^* B}{2K} = \frac{5 \cdot 2.00 \cdot 0.1}{2 \cdot 1.5} = 0.01 \text{ m.}$$

\* supponiamo che lo stesso dispositivo mostrato precedentemente abbia il tratto  $l^*$  e forme simili.



$$d\vec{F}_m = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

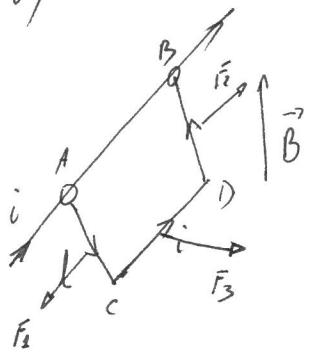
nel nostro caso  
 $dF_m = idl B$ .

$$dF_x = iB dl \cos \alpha \quad dl = R d\alpha$$

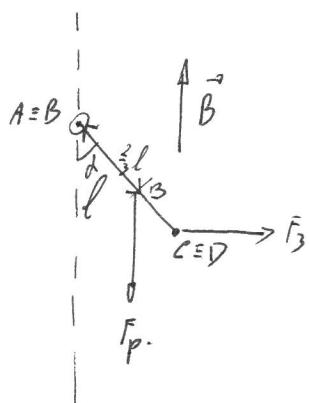
$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = iBR \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = iBR \cdot 2 = iBl \\ F_y = iBR \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha = 0 \end{array} \right.$$

le forze magnetiche è equivalente al caso precedente, e indipendentemente dalla disposizione di  $l^*$ .

Pb)



Spire quadrate immerse in un campo magnetico attraversato da corrente elettrica.



$$|\vec{B}| = 0.5 \text{ T}$$

$$i = 5 \text{ A}$$

$$l = \text{lato spire} = 5 \text{ cm}$$

$$m = \text{massa 3 letti spire} = 10 \text{ g}$$

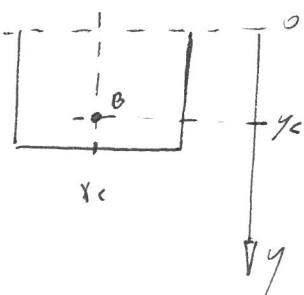
\*) Determinare le condizioni di equilibrio.

Le forze  $F_1$  e  $F_2$  generate dal campo magnetico si annullano e vicende, la forza  $F_3$  agente sul lato CD crea un momento non nullo.

$$F_3 = i l B \text{ è diretta come in figura.}$$

le forze per agire sul bivento delle spire

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{\frac{2l}{3} \frac{y_1}{3} + l \frac{y_2}{3}}{m} = \frac{2}{3} l$$



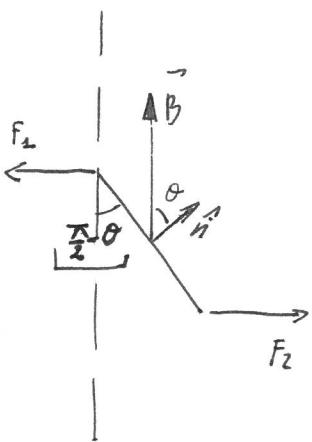
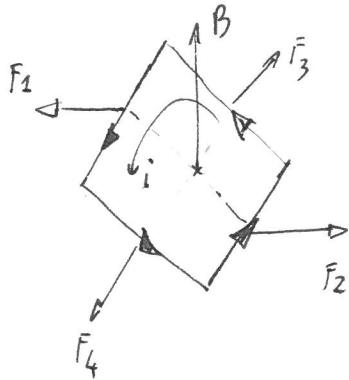
Con il bilancio dei momenti determiniamo l'angolo d'equilibrio

$$-mgyl \frac{2}{3} \sin\theta + ilBl \quad \theta = 0$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{ilB}{\frac{2}{3}lmg} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{3}} \frac{ilB}{mgy} = \frac{3 \cdot 5^2 \cdot 10 \cdot 0.5}{2 \cdot 10 \cdot 9.8} = 1.9$$

$$\theta = 12^\circ.$$

\* Considerons une spire quadratique immerse in un campo magnetico e attraversata da corrente elettrica



Le forze  $F_3$  e  $F_4$  rappresentano una coppia di brachi nulli

Il momento generato dalle coppie  $F_1, F_2$  è pari a

$$M = i l B \sin \theta = i l^2 B \sin \theta \quad \left\{ \begin{array}{l} l = S \text{ superficie contenuta} \\ \text{sulle spire} \end{array} \right.$$

il verso del momento è

ortogonale al piano individuato  
dalla B e n

$\hat{n}$  = normale ad  $S$  con la  
corrente in verso antiorario.

$$\vec{M} = i \underbrace{S \hat{n} \times \vec{B}}$$

$\hookrightarrow \vec{p}$  (caratteristica delle spire)

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{B}$$

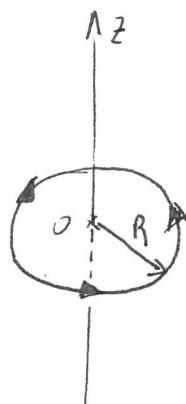
$\vec{p}$  = momento magnetico.

\* Il teorema di equivalenza di Ampere afferma che  
una piccola spira rigida percorsa da corrente  
stazionaria si comporta come un dipolo magnetico.  
Ese le sollecitazioni meccaniche che essa subisce in un  
campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme sono analoge a quelle  
subite da un dipolo in un campo elettrico; inoltre  
il campo magnetico prodotto dalla spira ha lo  
stesso andamento all'infinito del campo elettrico  
prodotto da un dipolo.

Oss

Noto il campo  $\vec{B}$ , la proporzionalità tra i.e il momento di una spira permette una misura delle intensità di corrente. Un comune amperometro si basa su tale fenomeno.

\* ) Campo magnetico creato da una spira percorso da corrente elettrica



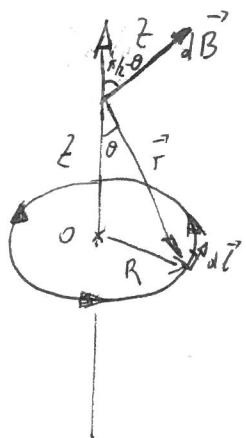
i) Determina il campo nel centro o

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} d\vec{l} \times \vec{r}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i dl}{4\pi r^3} \quad B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 i 2\pi R}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

(la direzione è parallela a z).

2) Determina il valore del campo su un punto dell'asse



per ragioni di simmetria la direzione  
del campo sarà parallela all'asse z.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} d\vec{l} \times \vec{r}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^3} d\vec{l} \times \text{sen}\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 i \text{sen}\theta}{4\pi r^2} \int_0^{2R\pi} d\vec{l} = \frac{\mu_0 i \text{sen}\theta 2R\pi}{4\pi r^2} \frac{r}{r} = \frac{\mu_0 i 2\pi R^2}{4\pi r^3} =$$

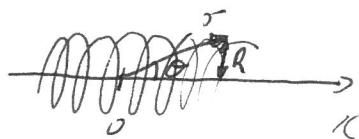
$$= \frac{\mu_0 i R^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3) Determina il valore del campo su un asse intorno al quale sono avvolte spire attraversate da corrente elettrica -



$N$  spire per unità di lunghezza  $x$ .

$$dB = \frac{\mu_0 i R^2 n dx}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$



$$\frac{R}{x} = \tan \theta$$

$$x = R \cot \theta$$

$$dx = -\frac{R}{x^2} d\theta$$

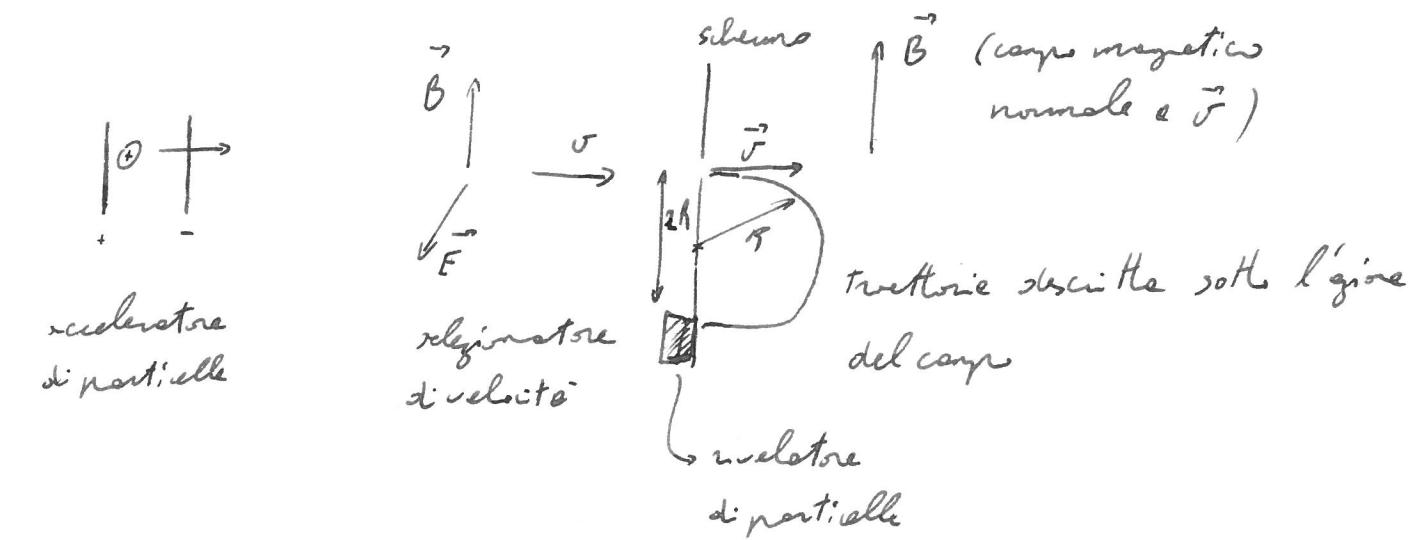
$$dB = -\frac{\mu_0 i R^3 n d\theta}{2 \sin^2 \theta (x^2 + R^2)^{3/2}} = -\frac{\mu_0 i R^3 n d\theta}{2 x^2 \sin^2 \theta r^3} \quad r = \frac{R}{\sin \theta}$$

$$dB = -\frac{\mu_0 i R^2 n \sin^2 \theta}{2 x^2 \sin^2 \theta R^3} d\theta = \frac{\mu_0 i n \sin \theta \cos \theta}{2} \quad 0 < \theta < \pi$$

$$B = \frac{\mu_0 i n x}{x} \quad * / il campo non dipende dal raggi delle spire.$$

## Spettrometro di masse

Permette di separare le masse degli atomi e di selezionare i vari isotopi.



Deiioni positivi  $X^+$  (atomi di massa incognita ai quali è stato sovrapposto un solo elettrone) vengono introdotti nel condensatore e acquistano velocità.

Il dispositivo costituito da un campo elettrico e uno magnetico normali tra loro seleziona le particelle lasciando passare quelle con velocità  $v$  e deflettendo le altre.

la particelle in un campo magnetico uniforme  
percorre una traiettoria circolare

$$mv = qBR.$$

Note la velocità se la carica di particella quella di un protone  
si può determinare le mosse misurando il raggio R.

Oss

Poiché in natura non esistono monopoli le linee del campo magnetico sono necessariamente chiuse.

Si consideri una superficie chiusa e calcoli  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$   
essendo necessariamente nulla poiché ogni linea attraversa due volte la superficie.

Possiamo così affermare che  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$  o analogamente

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{oppure encore} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

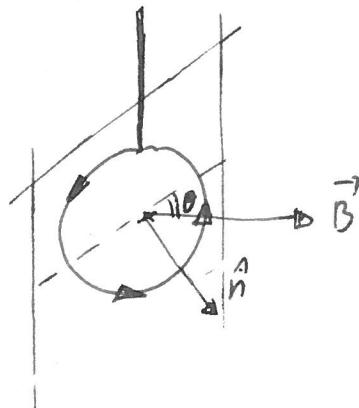
(III legge di Maxwell)

## A) Funzionamento dell'amperometro

Une spire percorse da corrente elettrica possiede un momento magnetico  $\vec{p} = i S \hat{n}$ , se le  $i$  sono immerse in un campo magnetico  $\vec{B}$  saranno soggette a un momento  $M = \vec{p} \times \vec{B}$

Il momento è nullo se  $\vec{p}$  e  $\vec{B}$  sono paralleli cioè se la normale alla superficie delimitata dalle spire è parallela a  $\vec{B}$ , il momento è massimo se  $\hat{n}$  è ortogonale al campo  $\vec{B}$ .

Se  $K\theta$  è il momento tenente del filo ( $=0$  per  $\hat{n} \perp \vec{B}$ )



piano immaginario  
che contiene le spire

$$i = \frac{K\theta}{S B \cos \theta}$$

$$M = i S B \cos \theta - K\theta = 0 \text{ all'equilibrio}$$

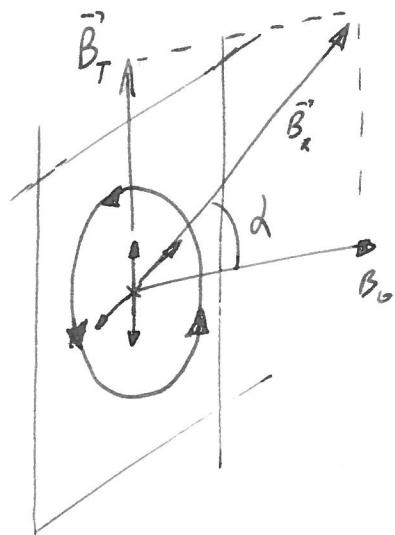
Questo sistema permette di determinare il valore di  $i$ .

Nel caso si fissa  $N$  spire

$i = \frac{V_0}{N S B_{\text{caso}}}$ , un sistema così fatto permetterebbe di determinare con maggiore accuratezza correnti piccole.

### \* Bussola delle Tangenti:

La bussola delle tangenti è uno strumento oggi poco usato per calcolare l'intensità di corrente.



piano immaginario  
contenente le spire

Se nelle spire non passa corrente elettrico l'ago magnetico si oriente nel verso del campo terrestre  $\vec{B}_T$ .

Le spine i poste in modo che (vedi figura) attraversate da corrente elettrica generano un campo magnetico ortogonale a  $B_T$  che vale nel centro

$$B_0 = \frac{\gamma_0 i}{2R}$$

Il loro orientamento assunto dall'ago sarà parallelo al vettore  $\vec{B}_0 + \vec{B}_H$ .

Si avrà che  $\frac{B_T}{B_0} = \operatorname{tg} \alpha$  dove cui  $\frac{\gamma_0 i}{2R} = \frac{B_T}{\operatorname{ctg} \alpha}$

$$i = \frac{B_T \cdot 2R}{\gamma_0 \operatorname{ctg} \alpha} \quad \left( \text{dall'angolo } \alpha \text{ si può ricavare il valore di } i \right).$$

x) Circuito gire di  $\vec{B}$

$$\oint \vec{B} d\vec{l}$$

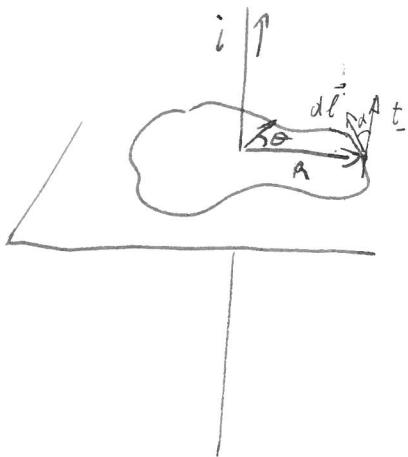
Considera un campo magnetico  $\vec{B}$  generato da un filo rettilineo di lunghezza infinita percorso da corrente elettrica.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i \vec{l} \times \vec{R}}{2\pi R^2}, \text{ calcola le circuitazioni di } \vec{B}$$

attraverso una qualsiasi linea chiusa concatenata con il filo attraversato da corrente elettrica.

Poiché  $\vec{B}$  è costantemente ortogonale al filo e inoltre il suo valore dipende solo da  $R$  non delle queste le circuitazioni di  $\vec{B}$  attraverso la circonference proiettando l' in un piano ortogonale

al filo.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \hat{t}$$

$\hat{t}$  = versore ortogonale  
a  $\vec{R}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int \frac{dl \cdot \hat{t}}{R} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int \frac{dl \cos \alpha}{R}$$

$dl \cos \alpha = dl'$  rappresenta un tratto infinitesimo di  
circonferenza di raggio R

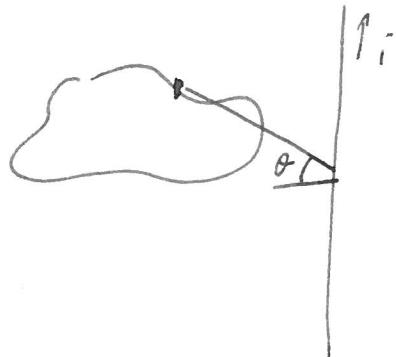
$$dl' = R d\theta$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R}{R} d\theta = \mu_0 i$$

Se vi fossero n fili percorsi da correnti differenti:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum n_i i_j$$

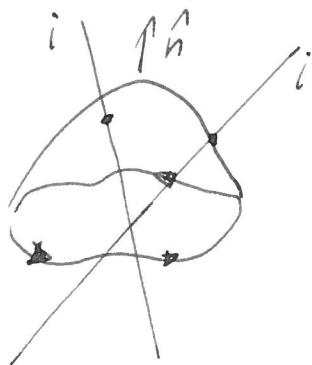
Se le linee chiuse non sono concesse con il filo



l'integrale in 0 ha come estremi  
di integrazione gli stessi valori  $\theta_1$ ,  
in questo caso  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ .

Sidimstra che il teorema delle circuitazione  
vale per qualsiasi settore  $\vec{B}$  generato da un  
filo attraversato da corrente elettrica (anche a no  
infinito).

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int i \quad \text{per il teorema di Stokes}$$



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \int i$$

$$\int_S (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \int_{S'} \vec{j} \cdot \hat{n} dS'$$

con  $S$  s'intende la superficie che poggia sulle curve chiuso  $\Gamma$ , per  $S'$  le sezioni dei fili attraversati dalle correnti elettriche, poiché il contributo al flusso di corrente stato sulla superficie  $S - S'$  è nullo essendo  $\vec{j} = 0$  posso scrivere

$$\int_S (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dS = \mu_0 \int_{S'} \vec{j} \cdot \hat{n} dS$$

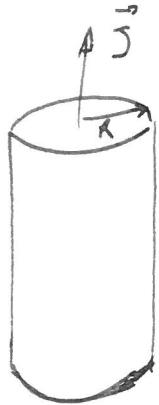
$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B} - \gamma_0 \vec{J}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{al venire al } S$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \gamma_0 \vec{J} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \gamma_0 \vec{J} \quad \text{oppure } \text{rot } \vec{B} = \gamma_0 \vec{J}$$

(IV equazione di Maxwell o forma  
locale della circuitazione di Ampere)

Pb) Determinare come varia il campo magnetico all'interno e all'esterno di un conduttore cilindrico attraversato da corrente elettrica  $i$ .



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

all'esterno  $r > R$

per ragioni di simmetria, il campo  $B$  è costante sui punti di una circonferenza ciascuna con il cilindro.

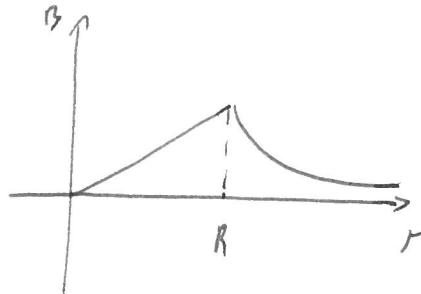
$$2\pi r B = \mu_0 J S_n = \mu_0 J \pi R^2$$

$$B = \frac{\mu_0 J R^2}{2}$$

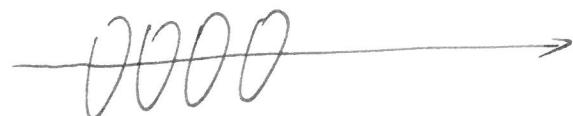
all'interno,  $r \leq R$

$$2\pi r B = \mu_0 J \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 J r}{2}$$



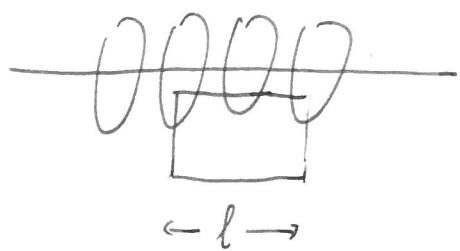
\*1) Campo generato da una serie di spire che si estendono all'infinito



Sull'asse il campo è costante ed è sempre parallelo all'asse stesso.

1) Le linee di forza all'interno delle spire devono necessariamente essere parallele all'asse altrimenti si avrebbe l'intersezione di due linee di forza e quindi la presenza di un monopolo nel punto di intersezione.

- 2) Per ragioni di simmetria le direzioni del campo potrebbe essere solo radiale.
- 3) All'esterno delle spine il campo è nulla infatti le linee di forza devono chiudersi, essendo le rette di spine infinite. Tali linee non si chiudono mai pertanto non proviscono delle spine.



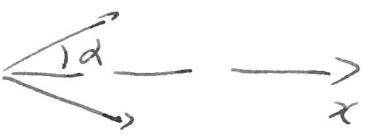
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \sum i_g$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = Bl = n \Phi_i$$

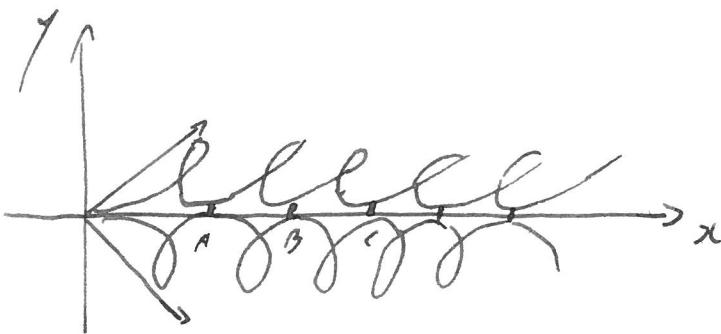
In ogni punto interno alle spine si ha lo stesso campo dell'uno.

## x) Focalizzazione Si un fascio di particelle

Considero un fascio di particelle a velocità  $\vec{v}$  che divergono di un piccolo angolo  $\alpha$ ;

 è possibile focalizzare il fascio cioè far sì che le particelle si incontrino in altri punti.

Se generiamo un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme parallelo all'asse  $x$ , ogni singola particella inzerà un moto elicoidale, solo le particelle lungo l'asse  $x$  resteranno indifferenti all'influenza del campo.



Poiché le componenti delle velocità lungo l'asse  $x$   
 $v_x$  può essere considerata costante per ogni particelle  
 $(v_x = v \cos \alpha \approx v)$  e poiché il periodo con cui le particelle  
descrivono un'elice è costante per ognuna d'esse,  
si incontreranno dopo ogni periodo nei punti  $(A, B, \dots, f_g)$ .

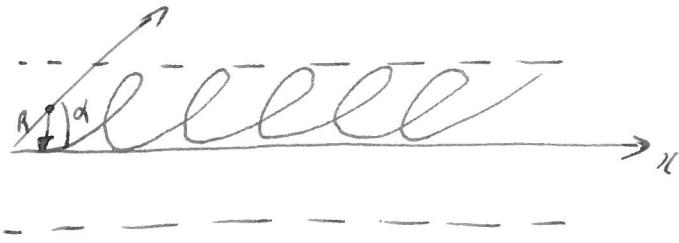
$$m v_y = q B R$$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{q B}{m} = \text{costante per ogni particella (lettura)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{q B} = \text{tempo che occorre affinché le particelle  
riconvergano.}$$

$$s = v_x T = v T = \frac{2\pi m v}{q B}$$

Possiamo calcolare il raggio del cilindro contenente l'alto, dico cioè di ogni particella (Tale cilindro deve essere a fatto il razzo affinché l'esperimento risca).



dell'alt.



$R$ : raggio descritto dalle particelle avendo divergenze messine nel moto circolare nel piano ortogonale a

$$m v_g = \gamma B R$$

$$m v_{rad} = \gamma B R$$

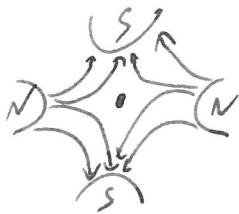
$$R = \frac{m v_{rad}}{\gamma B}$$

Il raggio del cilindro considerato sarà  $2R$ .

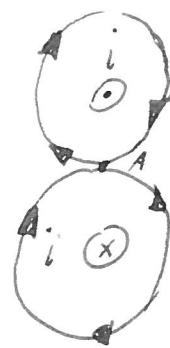
Si vantaggioso che il campo  $B$  sia debole, che l'angolo  $\alpha$  sia piccolo.

\* Condizione necessaria affinché un campo possa essere un buon focalizzatore di particelle che esso consenta inalterato il moto delle particelle la cui strazione del fascio è nulla.

es.

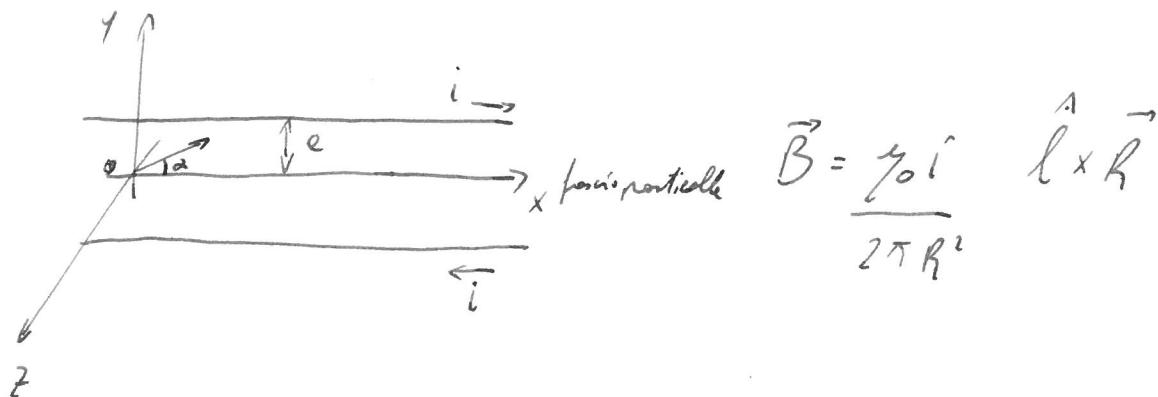


all'interno del quadrupolo magnetico  $B = 0$



Se nei due fili circolare una corrente con direzione opposta nel punto A esistente  $\vec{B} = 0$ .

Il sistema di due fili attraversati da corrente elettrica diverso opposto focalizza le particelle nel piano dei due fili.



Le particelle avranno componenti di velocità soli lungo x e y e sentiranno un campo  $B_z$

$$B_z = -\frac{\mu_0 i}{2\pi(e-y)} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(e+y)} = -\frac{\mu_0 i e y}{2\pi(e^2 - y^2)} \quad \text{xyee}$$

$$B_z = -\frac{\mu_0 i y}{\pi e^2}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ s_x & s_y & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_0 i y}{\pi e^2} \end{vmatrix}$$

$$m\ddot{x} = -q \frac{\gamma_0 i}{\pi e^2} \delta_y y$$

$$m\ddot{y} = q \frac{\gamma_0 i \delta_x y}{\pi e^2}$$

L'equazione differenziale del mot. lungo l'axe  $y$  rappresenta un moto armonico se  $K = \frac{q\gamma_0 i \delta_x}{m\pi e^2} < 0$  cioè  $q < 0$ .

In tal caso il sistema focalizza le particelle che, tutte con lo stesso periodo, riintersecheranno l'axe  $x$ .

Se  $K > 0$  ( $q > 0$ ) le particelle disegneranno curve

l'equazione del mot. sulla forme  $y = A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t}$ .

## Potenziale vettore

V

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{array} \right.$$

(Il campo magnetico non è conservativo anche in regioni lontane da correnti elettriche  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$  è conservativo).

\*) Definisco potenziale vettore quel vettore  $\vec{A}$  tale che  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

Condizione necessaria affinché  $\vec{A}$  possa essere definito

è che  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  (verificate dall'equazione di Maxwell)

$$\text{dunque } \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \quad \forall \vec{A}.$$

Noltre il potenziale vettore così definito è zero lungo un

gradiente, infatti  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$  anche

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} u) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u}_{\zeta=0}$$

Tra tutti: se ho  $\vec{A}$  scelgo quell'evente  $\vec{\nabla} \vec{A} = 0$

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{\nabla} u$$

$$\vec{\nabla} \vec{A} = 0 = \vec{\nabla} \vec{A}_0 + \vec{\nabla}^2 u \quad \text{la funzione } u \text{ è soluzione}$$

dell'equazione di Poisson  $\vec{\nabla}^2 u = -\vec{\nabla} \vec{A}_0$ .

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \gamma \vec{j}$$

$$\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \vec{A})}_{\zeta=0} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} = \gamma \vec{j}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\gamma \vec{j} \quad (\text{equazione di Poisson})$$

Abbiamo visto che nel caso del campo elettostatico

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{essere l'equazione soluzione}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left| \int_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r} \right| \quad \text{in caso di fili conduttori} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda dl}{r}$$

ore

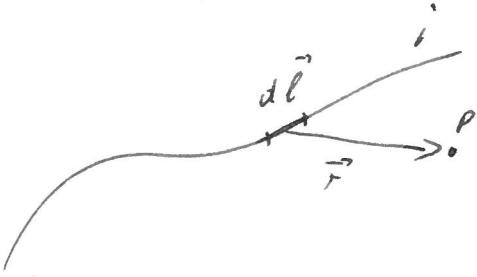
$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad \text{sostituendo } \mu_0 \vec{j} \text{ e } \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \mu_0 \int_{\tau} \frac{\vec{j} d\tau}{r} \quad \text{nel caso di conduttori filiformi}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi} \mu_0 \int_l \frac{\int S dl \vec{l}}{r} = \frac{1}{4\pi} \mu_0 \int_l \frac{i dl}{r} \vec{l}$$

\* Determinare l'equazione di Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \text{ con il potenziale vettore.}$$



$$i = \int dI \delta_n$$

$$i d\vec{l} = \vec{J} d\tau$$

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l}}{r}$$

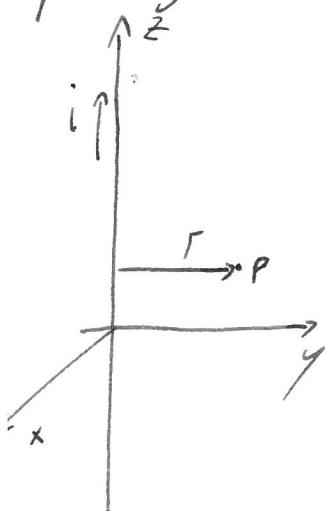
$$d\vec{B} = \text{rot}(d\vec{A}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \text{rot}\left(\frac{d\vec{l}}{r}\right) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \vec{\nabla}_X \left(\frac{d\vec{l}}{r}\right)$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \left[ \underbrace{\frac{1}{r} (\vec{\nabla} \times d\vec{l})}_{\text{essendo } d\vec{l} \text{ estante}} + \underbrace{\left( \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \times d\vec{l}}_{-\frac{\vec{r}}{r^3}} \right]$$

$\hookrightarrow$ , essendo  $d\vec{l}$  estante

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

\* Determinare le leggi di Biot-Savart con il potenziale vettore.



In questo caso non è utilizzabile l'equazione

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{s} d\tau}{r} \quad \text{poiché il filo}$$

rettilineo si estende all'infinito.  
filo infinito.

Il campo elettrico generato dal filo si posa su di esso  
Sistichuite una conica con Sensitività lineare e vale

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{cost.}$$

Potrò ora determinare  $\vec{A}$  sostituendo  $e \frac{\lambda}{\epsilon_0}$ , già e  
risolvendo da  $\vec{A} \parallel \vec{s}$

$$\vec{A} = \left( -\frac{\gamma_0 i}{2\pi} \ln r + c \right) \vec{e}$$

$$\vec{A} = (0, 0, A_z)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{s}{s_x} & \frac{s}{s_y} & \frac{s}{s_z} \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma_0 i}{2\pi} \ln r + c \end{vmatrix}$$

$$B_x = -\frac{\gamma_0 i}{2\pi} \frac{s}{s_y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = -\frac{\gamma_0 i}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot xy$$

$$= -\frac{\gamma_0 i y}{2\pi r^2}$$

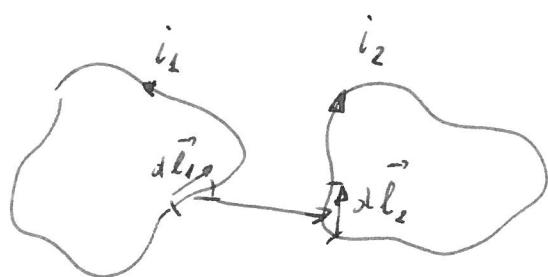
$$B_y = \frac{\gamma_0 i x}{2\pi r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{\gamma_0 i}{2\pi r^2} (-y, x, 0) = \frac{\gamma_0 i}{2\pi r^2} \vec{e} \times \vec{r}$$

## Osservazione

La formula di Laplace  $d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$  ha un riscontro fisico che si integra su un tratto di circuito.

Supponiamo infatti di voler calcolare le forze tra due tratti infinitesimi  $d\vec{l}$  attraversati da corrente elettrica.



$$d\vec{F}_{21} = i_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1$$

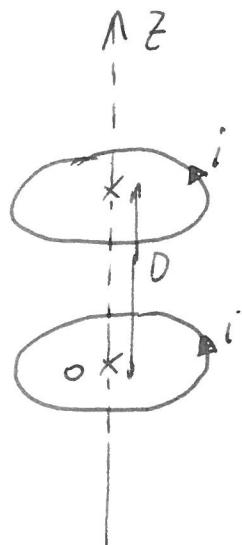
$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}}{r^3}$$

$$d\vec{F}_{21} = i_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r})}{r^3}$$

$$d^2\vec{F}_{12} = \frac{\gamma_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{dl_1 \times (dl_2 \times \vec{r})}{r^3}$$

si genera un assurdo infatti  $|d^2\vec{F}_{12}| = |d^2\vec{F}_{21}|$  ma  
le direzioni delle due forze non sono necessariamente  
le stesse dovranno essere una ortogonale a  $dl_1$ , l'altra  
a  $dl_2$ .

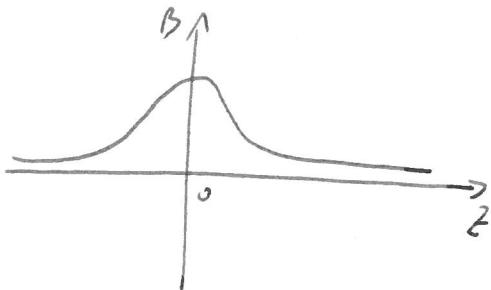
Pb)



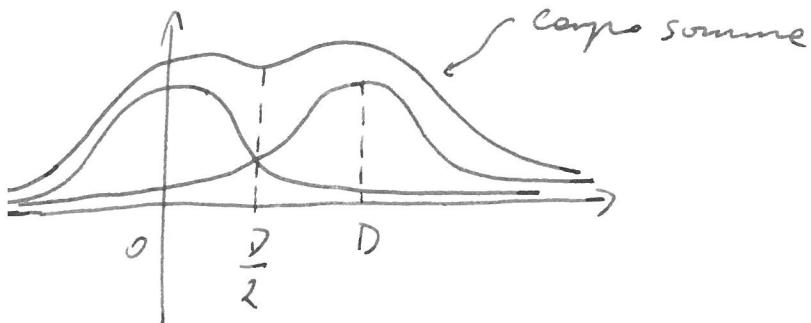
Determinare le distanze  $D$  affinché le due spire attraversate da corrente  $i$  generino un campo approssimativamente uniforme nel rettangolo  $D$ .

Campo elettrico generato da una spira sull'asse

$$B = \frac{\mu_0}{2} i \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



Il grafico del campo delle due spire sull'asse è il seguente.

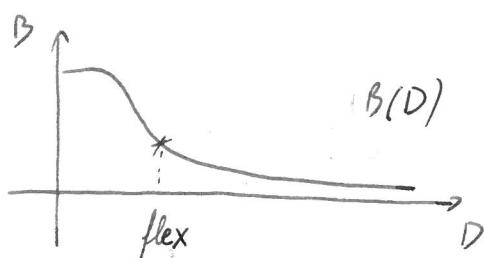


Il valore del campo somme dei due in  $\frac{D}{2}$  sarà

$$B = \frac{\gamma_0 i R^2}{2} \left( \frac{1}{\left(R^2 + \frac{D^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(R^2 + \frac{D^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{\gamma_0 i R^2}{2} \frac{1}{\left(R^2 + \frac{D^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Se  $D=0$  il campo in  $\frac{D}{2}=0$  sarà massimo,

All'aumentare di  $D$  il valore del campo in  $\frac{D}{2}$  decresce fino a tendere a 0 per  $D \rightarrow \infty$ .



(valore di  $D$  per cui la funzione  $B(D)$  ha un flex risulta

essere quello che rende il più possibile  $B$  costante

in un intorno di  $\frac{D}{2}$ .

$$\frac{d^2 B}{z D^2} = 0$$

$$\frac{dB}{zD} : -\gamma_0 i \frac{R^2}{2} \left( R^2 + \frac{D^2}{4} \right)^{-\frac{5}{2}} \frac{zD}{4} =$$

$$= -\frac{3}{4} \gamma_0 i R^2 \frac{D}{\left( R^2 + \frac{D^2}{4} \right)^{\frac{5}{2}}}$$

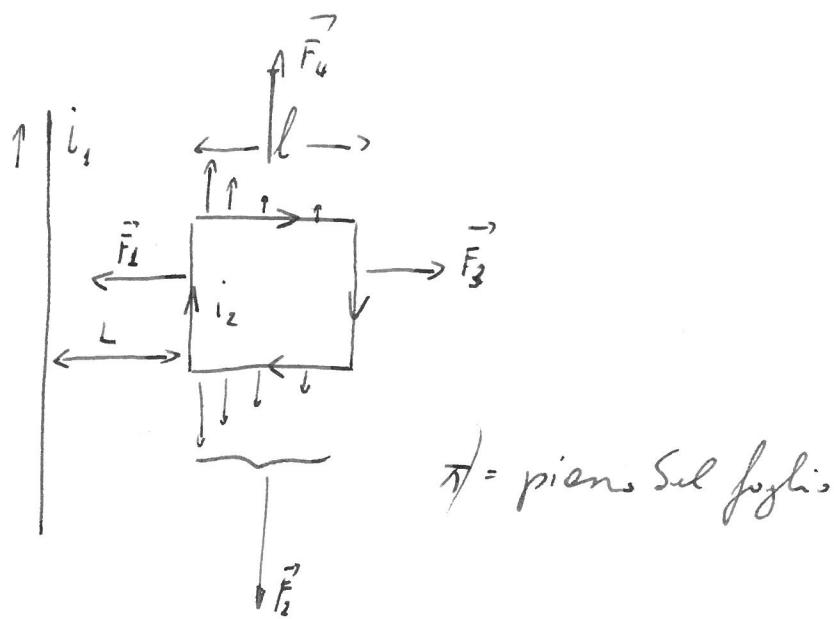
$$\frac{d^2 B}{z D^2} = -\frac{3}{4} \gamma_0 i R^2 \frac{\left[ \left( R^2 + \frac{D^2}{4} \right)^{\frac{5}{2}} - D \frac{5}{2} \left( R^2 + \frac{D^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{zD}{4} \right]}{\left( R^2 + \frac{D^2}{4} \right)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

$$\left( R^2 + \frac{D^2}{4} \right) - D^2 \frac{5}{4} = 0$$

$$R^2 = D^2$$

$$D = R.$$

\*)



Determinare le forze con cui le spine viene attirato dal filo conduttore.

Per ragioni di simmetria  $\vec{F}_4 = \vec{F}_2$  mentre  $\vec{F}_1 > \vec{F}_3$  poiché il campo sul lat. l<sub>1</sub> è più intenso del campo sul lat. l<sub>3</sub>.

Le forze Totale avrà la direzione di  $\vec{F}_1$  e modulu

$$F = F_1 - F_2 = i_1 l B_{(1)} - i_2 l B_{(2)}$$

$$B = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r}$$

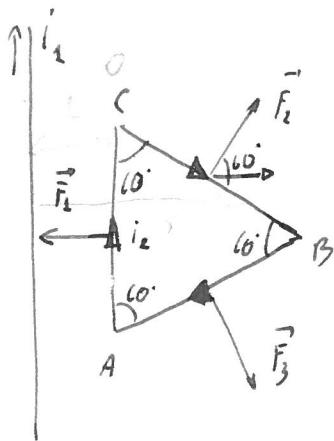
$$F = \frac{\gamma_0 i_{\text{iz}} l}{2\pi} \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{L+l} \right)$$

Nel nostro caso il momento delle spine  $\vec{m}$  ha lo stesso verso del campo quindi  $\vec{H} = \vec{m} \times \vec{B} =$

Nel caso le correnti circolari nelle spine in verso opposto le forze risultante sarebbe attrattive, il momento magnetico  $\vec{m}$  parallelo  $\vec{B}$  avrebbe verso opposto a  $\vec{B}$ .

Oppure le spine si spostano. Se prima di subire un momento non nulla ha inoltre le stesse ricorda il problema del precedente.

\* Determinare le forze risultante agente sulle spine



Per ragioni di simmetria  $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$

$$dF_2 = i_2 B dl \quad B = \frac{\gamma_0 i_1}{2\pi r}$$

$$F_2 = \frac{\gamma_0 i_1 i_2}{2\pi} \int_0^l \frac{1}{r} dl \quad r = L + l \cos 60^\circ = L + \frac{l}{2}$$

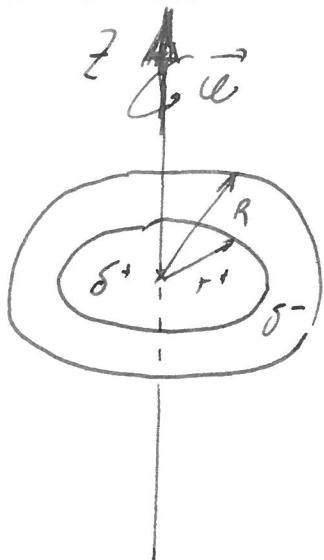
$$F_2 = \frac{\gamma_0 i_1 i_2}{2\pi} \int_0^l \frac{1}{L + \frac{l}{2}} dl = \frac{\gamma_0 i_1 i_2}{2\pi} \left[ 2 \ln \left( L + \frac{l}{2} \right) \right]_0^l$$

$$= \frac{\gamma_0 i_1 i_2}{\pi} \ln \frac{L + \frac{l}{2}}{L} = \frac{\gamma_0 i_1 i_2}{\pi} \ln \left( 1 + \frac{l}{2L} \right)$$

$$F_1 = \frac{\gamma_0 i_1 i_2 l}{2\pi L}$$

$$F_{tot} = F_1 - 2F_2 \cos 10^\circ = F_1 - F_2$$

$$F_{tot} = \frac{\gamma_0 i_1 i_2}{\pi} \left[ \frac{l}{2L} - \ln \left( 1 + \frac{l}{2L} \right) \right]$$



$$r^* = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

la parte interna del disco possiede una carica  $Q$ , la parte esterna  $-Q$ .

La densità si carica è uniforme e  $\delta^+ = -\delta^-$ .

Se il disco ruota con velocità angolare  $\vec{\omega}$  intorno all'asse, determinare il momento magnetico  $\vec{m}$ .

$$d\vec{m} = \delta \omega i \hat{n}$$

Suddividiamo il disco in tante corone circolari di raggi  $dr$  se il disco ruota ogni corona circolare genera un momento pari a quell di una giretta avente:

dimensione delle corone circolari e attraversata  
da corrente elettrica  $d_i = \frac{dg}{T} = 535 \times 35 \frac{\text{a}}{45}$

Il moment. generat. dal disco conico positivamente  
sarà diretto nel sens dell'ass.z

$$dm = diS = 5r\omega r^2 \pi dr$$

$$m = \int_0^{r^*} 5r^3 \omega \pi dr = 5\omega \pi \frac{r^*^4}{4}$$

Il momento generat. dalle parti del disco  
conico negativamente ha sens opposto  
all'ass.z.

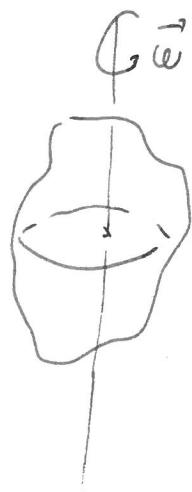
$$m = \int_{r^*}^R 5r^3 \omega r dr = 5\omega \pi \left[ \frac{R^4}{4} - \frac{r^{*4}}{4} \right]$$

$$M_{tot} = 5\omega \pi \frac{r^+^4}{4} - 5\omega \pi \frac{R^4}{4} + 5\omega \pi \frac{r^-^4}{4}$$

$$m_{tot} = 5\omega \pi \frac{r^+^4}{2} - 5\omega \pi \frac{R^4}{4} = 5\omega \pi \left[ \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right] R^4 = -\frac{5\omega \pi R^4}{8}$$

\* Considera un generico corpo avendo massa

Le cariche  $Q$  con  $\rho_m$  e  $\rho_q$  costanti in rot.  
intorno ad un asse fisso.



$$J = I\omega = \int_V r^2 dm \cdot \omega = \int_V r^2 \rho_m dV \cdot \omega$$

$$J = \rho_m \int_V r^2 dV \cdot \omega$$

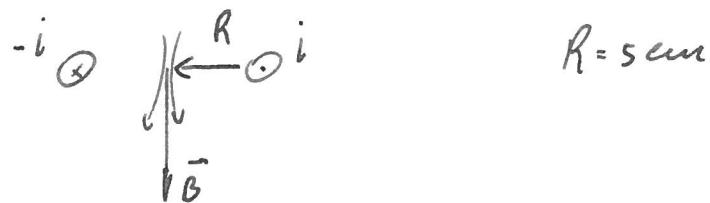
$$m = \int_V S dm = \int_V r^2 \cancel{\rho_q} \frac{\omega}{2\pi} dV \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_q dV = dq \\ \frac{e}{2\pi} = \frac{1}{T} \end{array} \right.$$

$$m = \frac{\rho_q}{2} \int_V r^2 \omega dV$$

$$m = \frac{J}{2} \cdot \frac{Q}{M}$$

\*) Vediamo come sia possibile costruire un campo molto alto.

Vogliamo campo di 30 T generato da due conduttori traversati da corrente elettrica.



$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad \text{il campo generato nel centro fra i due fili conduttori vale}$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}$$

le correnti che deve attraversare il circuito deve valere

$$i = \frac{B \pi R}{\mu_0} = \frac{30 \pi 5 \cdot 10^{-2}}{4\pi \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^6 A$$

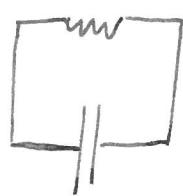
Se la forza elettromotrice del generatore vale  
 $E = 3000 V$ , la resistenza del circuito deve valere

$$R = \frac{E}{I} = \frac{3000}{4 \cdot 10^6} = 0.75 \cdot 10^{-3} \Omega$$

$R = \rho \frac{L}{S}$  se i fili sono in rame il circuito ha  
 la lunghezza totale di 2 m.

$$S = \frac{R}{\rho} = \frac{1.7 \cdot 10^{-8}}{0.75 \cdot 10^{-3}} \cdot 2 = 5 \cdot 10^{-5} m^2 \text{ (sezione dei fili)}$$

Un generatore di 3000 V è difficilmente realizzabile,  
 tuttavia se si vuole realizzare un campo  $B$  solo per  
 pochi millesimi di secondo è possibile sfruttare  
 un circuito R, C.



$\Delta V$

Per creare un campo  $B = 30T$  in generatore dovrebbe essere una potenza pari a  $W = 5 \cdot i^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{13} = 10^{10} W$  (paragonabile quelle si usa attualmente).

Un circuito  $RC$  di cui avete le strutture del circuito considerato prima si scarica in un tempo dell'ordine di 1 millisecondo.

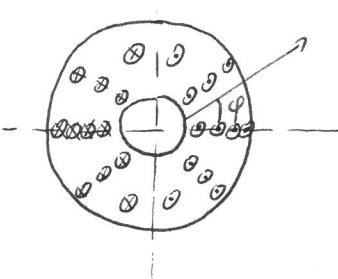
Per avere gli stessi effetti del circuito considerato (solo in 1 millisecondo) occorre che il circuito abbia una energia  $V = W \cdot 1 \text{ millisecondo} = 10^2 \text{ Joule}$

$$V = \frac{1}{2} C V^2 \quad (\text{Se } V = 3000 \text{ V})$$

$$C = \frac{2V}{V^2} : \frac{2 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^6} \approx 2 \text{ Farad}$$

\* E possibile realizzare il campo  $B = 50T$  anche nel seguente modo:

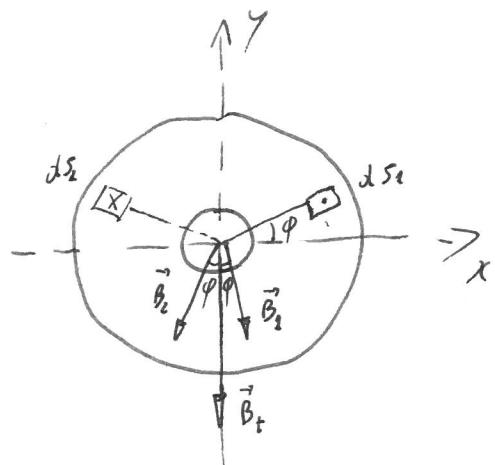
consideriamo un tubo cilindrico con attraversato da una corrente di densità variabile secondo la legge  $J = J_0 \cos \varphi$ . E' possibile suddividendo il cilindro in tanti conduttori filiformi disposti in modo da uniformare  $J = J_0 \cos \varphi$ .



$$J = J_0 \cos \varphi$$

$$R_1 = 5 \text{ cm}$$

$$R_2 = 25 \text{ cm}$$



Per ragioni di simmetria il campo risultante nel centro ha il verso indicato in figura

$$dI = \int d\varphi \, I'$$

$$dI = \int_0^{\pi} \cos \varphi \, r \, d\varphi \, dr$$

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos \varphi \, d\varphi \, dr$$

poiché seppiamo che il campo nell'origine è diretto lungo l'asse  $y$ , calcoliamo il suo modulo sol lungo tale asse

$$dB_y = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi \, dr \cos \varphi = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \, dr$$

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \left| \int_{R_i}^{R_o} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \, dr \right|$$

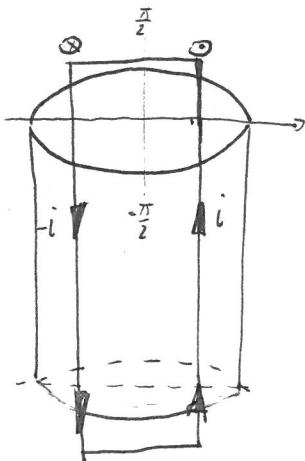
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi &= \langle \cos^2 \varphi \rangle \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \langle \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \rangle 2\pi = \pi \end{aligned}$$

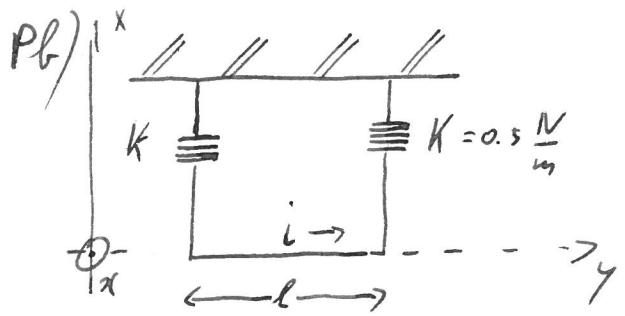
$$B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} (R_o - R_i)$$

$$\int_0 = \frac{2B}{\mu_0 (R_o - R_i)} = \frac{10}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.2} = 2.4 \cdot 10^8 \frac{A}{m^2}$$

Le corrente che occorre per generare nel tubo una

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{R_1}^{R_2} \cos \varphi r dr d\varphi = 2 \int_0^{\frac{R_2^2 - R_1^2}{2}} r dr = 0.06 \int_0^2 = 1.5 \cdot 10^{-2} A$$





$$l = 12 \text{ cm}$$

$$\vec{B} = (B_x, 0, 0)$$

$$B_x = B_0 + b_z$$

$$\begin{cases} b = 1.5 \frac{\text{T}}{\text{m}} \\ B_0 = 0.3 \text{T} \end{cases}$$

$$i = 6.5 \text{ A}$$

calcolare le posizioni di  
equilibrio.

la forza magnetica vale

$$F_y = -ilB = -il(B_0 + b_z)$$

la forza elastica

$$F_k = -2Kz$$

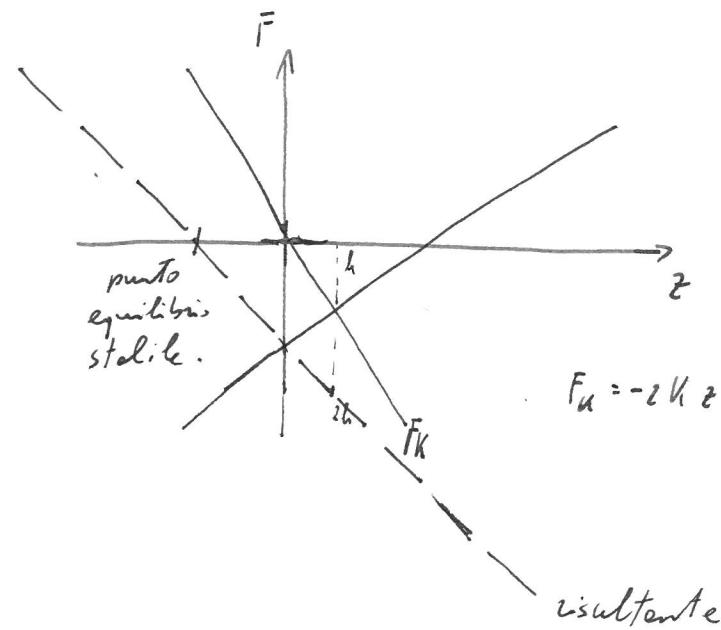
all'equilibrio

$$F_K + F_N = 0$$

$$-2Kz - il(B_0 + bz) = 0$$

$$-2Kz - ilB_0 - ilbz = 0$$

$$z = -\frac{ilB_0}{2K + ilb} = -0.11m$$



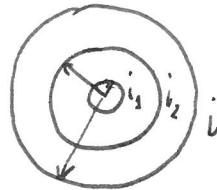
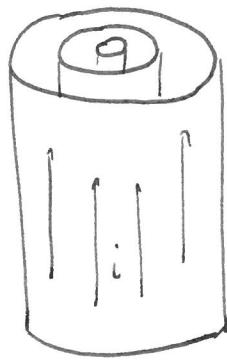
$B_x = B_0 + bz$  è possibile determinare  $b < B_0$

affinché l'equilibrio sia indifferente

$$-2Kz - ilB_0 - ilbz = 0 \quad (\text{indipendentemente da } z)$$

$$2K + ilb = 0 \quad B_0 = 0 \quad b = \frac{-2K}{il}$$

Pb)



$R_1, R_2, R$  (raggi dei tre cilindri)

$$\frac{R_L}{R} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{R_2}{R} = \frac{1}{3}$$

$$i = 120 \text{ A}$$

Determinare le correnti che deve percorrere un conduttore di raggio  $R_1 < R_2$  ( $i_1 < i_2$ ) affinché

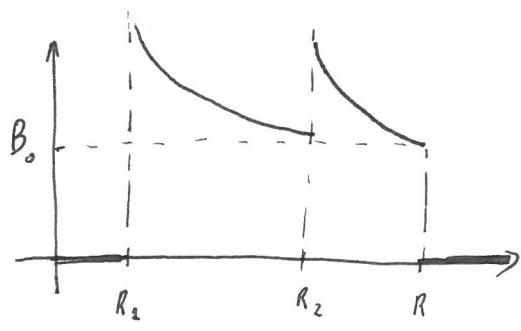
$$1) B = 0 \quad r > R$$

$$2) (B(r) \quad R_1 < r < R) = B_0 \quad (\text{campo sulle facce del conduttore si raggi} R \text{ all'interno del cilindro})$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i_i$$

$$B 2\pi r = \mu_0 (i + i_1 + i_2) = \omega$$

$$i = -(i_1 + i_2)$$



$$R_1 < r < R \quad B(r) = \frac{\mu_0 i_1 + i_2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \geq \frac{\mu_0 i}{2\pi R} = B(R) \quad (\text{condizione soddisfatta})$$

$$R_1 < r < R_2 \quad B(r) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r} \geq \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad \text{e si ricava} \quad i_1$$

$$\frac{\mu_0 i_1}{2\pi R_2} \geq \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad i_1 \geq i \frac{R_2}{R}$$

$$i_1 = i \frac{R_2}{R} = 120 \cdot \frac{1}{3} = 40 \text{ A}$$

$$i_2 = 80 \text{ A} \quad \text{di rette in verso opposto a } i.$$

Si vuole infine determinare

$\langle B \rangle$  fra  $R_1$  e  $R$

$$\langle B \rangle = \frac{\frac{1}{R} \int_{R_1}^R B_0 r dr}{\int_{R_1}^R dr} = \frac{\int_{R_1}^{R_2} B_0 r dr + \int_{R_2}^R B_0 r dr}{R - R_2} = \frac{\mu_0 \left[ i_2 \ln \frac{R_2}{R_1} + (i_1 + i_2) \ln \frac{R}{R_1} \right]}{2\pi (R - R_2)}.$$

\*) Campi elettrici e magnetici periodici nel tempo.

Nel caso di campi magnetici e elettrici in condizioni stagionali seguono le 4 equazioni di Maxwell

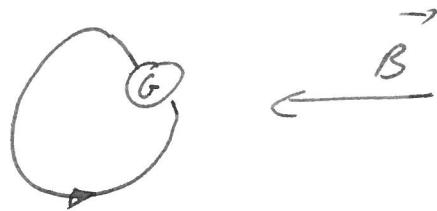
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{array} \right.$$

In condizioni non stagionali le equazioni di Maxwell relative a  $\vec{E}$  non risulteranno più disaccoppiate da quelle relative a  $\vec{B}$ .

## Legge di Faraday-Neumann

consiste un circuito costituito da una linea chiusa  
l'utilizzate tramite un filo conduttore.

Tale circuito è dotato di un galvanometro che misura  
l'eventuale passaggio di corrente elettrica.



Se il circuito interagisce con un campo elettrico  
 $\vec{B}$  si verifica sperimentalmente che in esso  
essa corrente elettrica è:

- 1) Il campo magnetico  $\vec{B}$  varia nel tempo.
- 2) Il circuito viene spostato con velocità  $v$  all'interno  
del campo  $\vec{B}$  non uniforme.

I fatti sperimentali vengono descritti dalla legge di Faraday - Neumann.

\* ) Se un circuito è immerso in un campo magnetico il cui flusso  $\vec{\Phi}(\vec{B})$  concatenato con il circuito sia variabile nel tempo, allora in esso si genera una forza elettromotrice  $f_i = - \frac{d\vec{\Phi}(\vec{B})}{dt}$

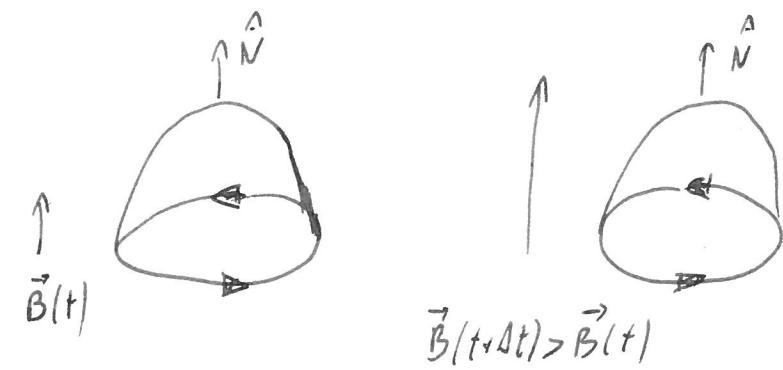
$$f_i = \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \quad (\vec{E}_i = \text{campo elettromotore indotto})$$

$$\vec{\Phi}(\vec{B}) = \int_S \vec{B} d\vec{S} \quad \text{dove } S \text{ è una superficie non chiusa che insiste sul circuito.}$$



Dalla legge di Faraday - Neumann si ricava la legge di Lenz:

il verso delle f.e.m. insotte è tale da opporsi alla variazione del flusso che le genera



$$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} > 0 \Rightarrow f_i < 0$$



il verso delle corrente  
insotte è quello mostrato  
in figura

Osserviamo che poiche  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$   $\int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$  non

Vere rispetto alla superficie  $S$  se insiste sulla curva  $\ell$ .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$S_{(\text{chiusa})}$

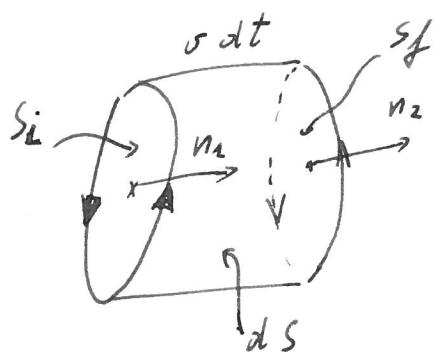


$$-\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s}_1 + \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s}_2 = 0 \quad S_1 \cup S_2 = S'_{(\text{chiuso})}$$

$$\int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s}_1 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s}'_2$$

Determiniamo se quale parametro fisico dipende il campo elettromotore indotto  $\vec{E}$ :

1) Consideriamo il caso in cui il campo magnetico  $\vec{B}$  sia costante nel tempo e il circuito si muova in tale campo.



Se consideriamo due istanti  $t_i$  e  $t_f = t_i + \Delta t$  l'elemento

$\vec{dl}$  si sarà spostato di un tratto  $d\vec{s} = \vec{\sigma} dt$  descrivendo

$$\text{la superficie } d\vec{s} = d\vec{l} \times \vec{\sigma} dt$$

Poiché il campo  $\vec{B}$  non varia col tempo il flusso  $\vec{B}$

attraverso la superficie chiusa si  $\oint \vec{V} \cdot d\vec{s}$  è nullo

Se indico con  $\phi$  il flusso del campo attraverso le superficie comprese nel circuito

$$-\oint_i \phi_i + \oint_f \phi_f + \oint_{ds} \phi_{ds} = \oint (\vec{E}) = 0$$

$$\oint_f \phi_f - \oint_i \phi_i = d\phi = -\oint_{ds} \phi_{ds} \quad (\text{flusso tagliato})$$

$$d\phi = -\oint_{ds} = - \int \vec{B} d\vec{s} = - \int \vec{B} (d\vec{l} \times \vec{\sigma} dt) = -dt \int (\vec{\sigma} \times \vec{B}) d\vec{l}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = - \int (\vec{\sigma} \times \vec{B}) d\vec{l} \quad \text{Sincere che il}$$

campo elettromotore  $\vec{E}_i = \vec{\sigma} \times \vec{B}$  (il campo elettromotore

è una semplice conseguenza delle forze di Lorentz esercite sulle cariche del circuito in moto).

2) Lo stesso risultato si ottiene nel caso in cui il circuito è fermo mentre il campo  $B$  varia nel tempo e cause simili moti traslatori uniformi delle sorgenti del campo.

Basta osservare che il sistema solido con le sorgenti del campo è invisibile rispetto a tale sistema è il circuito e muoversi con velocità  $\vec{v}$ .

Il circuito avrà il moto delle sorgenti solo sebbene tale moto genera un campo  $B$  sul circuito simile.

Indipendentemente dalle cause che determinino la variazione di  $B$  tale variazione determinerà un campo elettrico intorno  $\vec{E}_i = \vec{J} \times \vec{B}$ .

## Terza equazione di Maxwell nel caso non stazionario

Della legge di Faraday Neumann

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d \Phi(\vec{B})}{dt} = - \frac{d}{dt} \int \limits_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS \quad \text{considerando}$$

le superficie fisse

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \int \limits_S \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \cdot \hat{n} dS$$

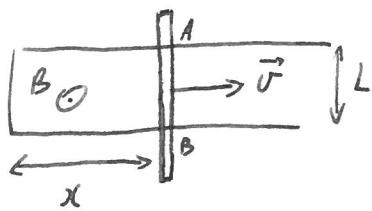
$$\int \limits_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS \quad (\text{teorema di Stokes}) = - \int \limits_S \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \cdot \hat{n} dS$$

qualsiasi sia la superficie  $S'$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \quad (\text{III eq. di Maxwell}).$$

\* Nel caso non stazionario il campo elettrico non è conservativo.

Pb)



A, B contatti strisciati sulle guide rettilinee.

Il campo elettrico  $\vec{B}$  incide solo  
fogl. è costante.

$\vec{v}$  = velocità slana conduttrice =  $10 \text{ m/s}$

$$L = 1 \text{ m}$$

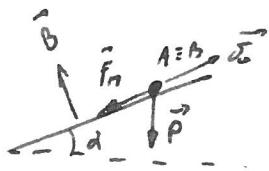
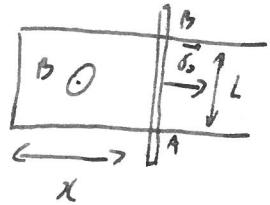
$$B = 1 \text{ T}$$

\*) Determinare le f.e.m. indotte.

$$f = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(B \times L)}{dt} = -BL \frac{dx}{dt} = -BLv = 10 \text{ V}$$

170

\* Supponiamo che la guida sia inclinata di un angolo  $\alpha$ , il campo  $B$  ortogonale al piano contenente la guida e la velocità iniziale della lametta  $\vec{v}_0$ .



Determinare l'equazione del moto delle lamette.

Sulle lamette agisce la forza verso le forze magnetica

$$F_n = iLB = \frac{f}{R}LB \quad (R: \text{resistenza del circuito})$$

$$F_n = \frac{BLv}{R} \cdot LB = \frac{(BL)^2 v}{R} \quad (\text{si suppone alla velocità iniziale})$$

$$P = mg \cos \alpha$$

$$m\ddot{x} = -\frac{(BL)^2 \dot{x}}{R} - mg \cos \alpha$$

$$\ddot{x} = -Kx \quad K: \frac{(BL)^2}{Rm}$$

$$\frac{\ddot{x}}{x} = -K \quad x = A e^{-\sqrt{K}t}$$

$$x = \int x dt = C e^{-\sqrt{K}t} + d$$

soluz. particolare

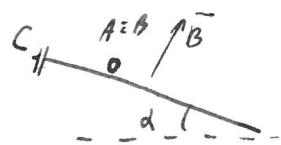
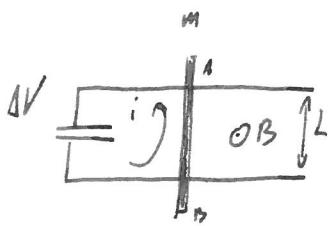
$$\dot{x} = -\frac{mg \sin \alpha R}{(BL)^2} \quad x = -\frac{mg \sin \alpha R}{(BL)^2} t$$

forme soluz.

$$x = C e^{-\frac{(BL)^2}{Rm} t} - \underbrace{\frac{mg \sin \alpha R}{(BL)^2} t}_\text{velocità si regine.} + d$$

e, d costanti determinabili dalle condizioni al contorno.

\*) Considerando i dati precedenti e introducendo un condensatore  $C$  nel circuito.



$$L = 1.20 \text{ m}$$

$$m = 150 \text{ g}$$

$$C = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ F}$$

$$B = 1.6 \text{ T}$$

$$\alpha = 9^\circ \quad V_0 = 0$$

\*) Determinare  $i$  e  $\Delta V$  dopo

$$x = 2 \text{ m}$$

(il condensatore è inizialmente scarico).

$$\Delta V = \nu BL$$

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{\Delta V}{\Delta t} = CBL \frac{\Delta V}{\Delta t} = CBL \nu$$

Determina l'equazione del moto delle sbarre

$$F = mg \sin \alpha - iLB = mg \sin \alpha - (BL)^2 e = ma$$

$$a = \text{costante} = \frac{mg \sin \alpha}{(BL)^2 + m}$$

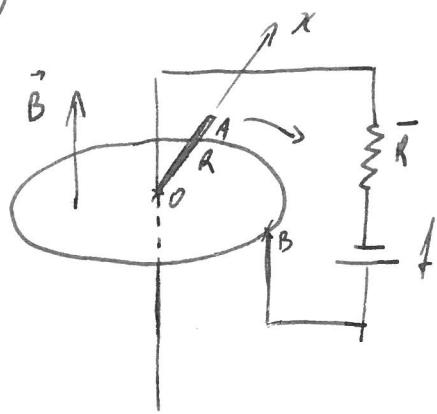
(la differenza con il problema  
presente nell'ex del  
mot. è determinata dalla  
premessa sul condensatore).

$$a \approx 1.46 \frac{m}{s^2}$$

$$i \approx 7.5 \cdot 10^{-3} A$$

$$\Delta V = 6.6 V$$

Pb)



A = contatto strisciante

B = contatto fisso

$\vec{B}$  = campo uniforme ortogonale alle spire circolari.

1) Se si muove la sbarretta  $AB$  con velocità  $v$  si crea un campo elettromotore induttivo

$E_i = v B$  vertente circolare corrente nel circuito  
(dimens.)

2) Se circola corrente nel circuito le sbarrette si muovono intorno al girevole  $O$  (motore elettrico).

\* Considera il caso in cui viene prodotto corrente che determina la velocità angolare  $\omega$  e regime, e la velocità angolare per cui si evita la massima potenza di perdite di potenza.

Se il circuito è attraversato dalla corrente elettrica generata da  $f$  sulla linea uscita una forza  $F = iRB$  agente nel centro. Si mese  $x = \frac{R}{2}$

Il momento di tale forza vale  $M = \frac{FR}{2} = \frac{iBR^2}{2}$ .

Tuttavia il moto delle lenzuola crea un campo elettromotore indotto  $E_i = \omega B$  che determina un flusso di corrente opposto a quell'generato da  $f$ .

All'equilibrio le forze elettromotrici indotte uguaglia f.

$$\int_0^R E_i dr = \int_0^R \omega B \alpha r = B \int_0^R \omega r dr = \omega B \frac{R^2}{2} = f$$

$$\omega = \frac{f}{\frac{BR^2}{2}} \quad ; \text{ la velocità angolare di regime.}$$

Il momento  $M = i(\omega) \frac{BR^2}{2}$  la potenza  $P = M \omega$

$$P = i(\omega) \frac{BR^2}{2} \omega$$

$$i(\omega) = \frac{f_{tot}}{\bar{R}} = \left( f - \omega \frac{BR^2}{2} \right) \cdot \frac{1}{\bar{R}}$$

$$P = \frac{f}{\bar{R}} \frac{BR^2 \omega}{2} - \frac{B^2 R^4}{4\bar{R}} \omega^2$$

le potenze sono nulle per  $\omega = 0$   
 ed è nulla alla velocità di regime  
 quando  $f = \frac{\omega BR^2}{2}$  cioè  $f_{tot} = 0$

$$\omega = \frac{f}{BR^2} = \frac{\omega_0}{2}$$

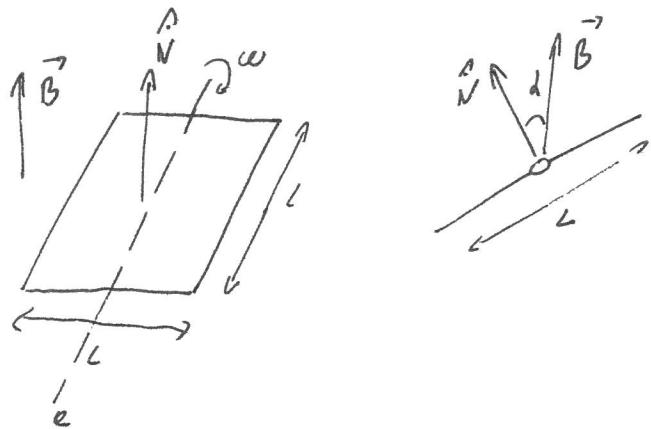
$$P_{max} = \left( f - \frac{f}{BR^2} \frac{BR^2}{2} \right) \frac{1}{\bar{R}} \frac{BR^2}{2} \cdot \frac{f}{BR^2} =$$

$$= \frac{f^2}{4\bar{R}}$$



# 1) Forze elettromotrici alternate

VI

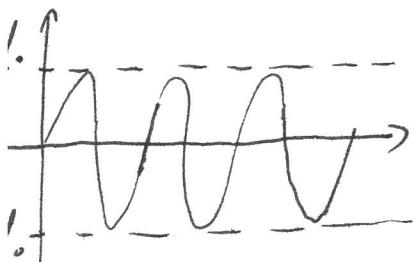


Le spire è immersa in un campo magnetico  $B$  uniforme  
e rotante intorno all'asse con velocità angolare  $\omega$  costante.

$$\Phi(\vec{B}) = BL^2 \cos \omega t \quad \omega = (\omega t - \varphi) \quad \text{e} \quad t=0 \quad \text{per} \quad \omega=0$$

$$\Phi(\vec{B}) = BL^2 \cos \omega t$$

$$f = \text{forza elettromotrice indotta} = - \frac{d\Phi(B)}{dt} = BL^2 \omega \sin \omega t = f_{\text{seno}} \omega t$$



le forze elettromotrici e di  
convezione le corrente che  
attraversano le spire sono alternate.

le corrente alternata che usualmente viene prodotta nei paesi industrializzati ha una frequenza  $\nu = 50 \text{ Hz}$

$$\nu = 50 \text{ giri al secondo} = 314 \text{ s}^{-1}$$

Una frequenza alta favorisce il valore delle forze elettromotrici indotte).

$$f = BL^2 \cos \alpha t \quad (\text{reazioni in spire})$$

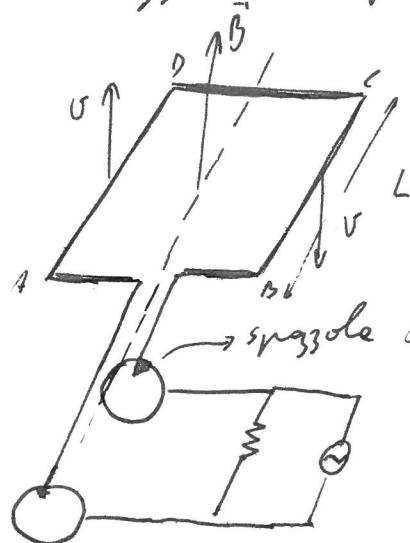
$$f = nBL^2 \cos \alpha t$$

$$\text{Se } B = 1 \text{ T} \quad n = 100$$

$$L = 10 \text{ cm}$$

$$f_0 = 314 \text{ V.} \quad (\text{il valore quadratico medio è} \\ \text{all'inizio } 220 \text{ V}).$$

\* È possibile utilizzare le corrente prodotte nel modo schematizzato in figura.



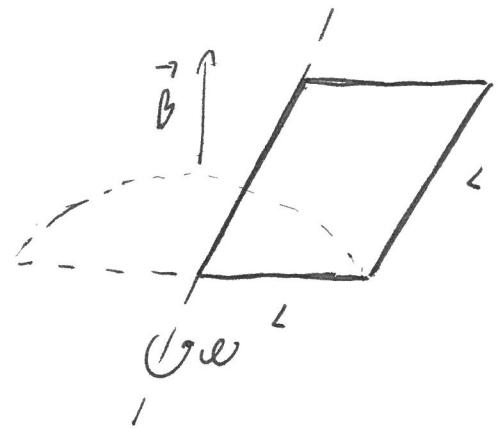
Il valore delle forze elettromotrice indotte f potrete essere calcolate anche considerando che

$$\vec{E}_i = \vec{\omega} \times \vec{B} \quad V = \oint \vec{E} d\vec{s}$$

Sui segmenti di spire AB e DC si ha un'accelerazione di coniche per effetto Hall, sui segmenti AD e BC si ha un campo  $E_i = \omega \frac{L}{2} B \sin \alpha$

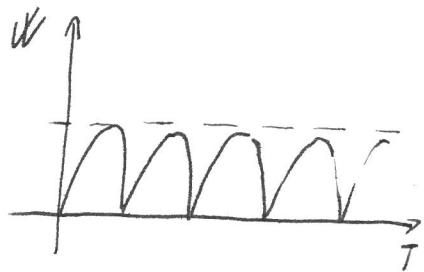
$$f = \omega \frac{L}{2} B \sin \alpha L + \omega \frac{L}{2} B \sin \alpha L = \omega L^2 B \sin \alpha$$

\*) Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto nel caso in cui le spire girese intorno ad un solo avvolgimento.



Il risultato sarebbe stato tuttavia economicamente vantaggioso poiché la regione di spazio contenente il campo  $\vec{B}$  uniforme è stata più vasta.

$$*) W = \text{potenza alternatore} : R i^2 = f i = \frac{f^2}{R}$$



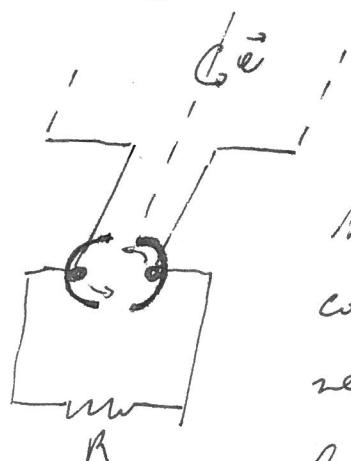
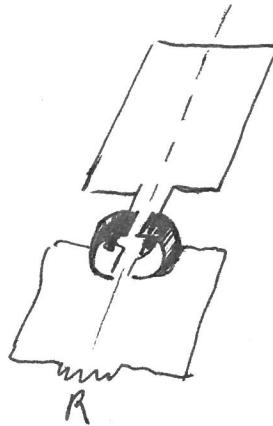
Nel caso di produzione di corrente alternata il periodo  $T$  è talmente breve che si può praticamente utilizzare calcolare la potenza media che la potenza istantanea.

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T W dt$$

$$W(t) = \frac{(\omega l^2 B \sin \omega t)^2}{R} = \frac{f_0^2 \sin^2 \omega t}{R}$$

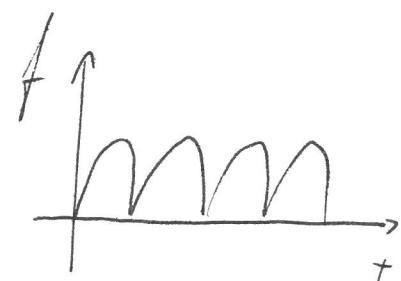
$$\langle W \rangle = \frac{f_0^2}{R} \cdot \frac{1}{\frac{T}{2\pi}} \int_0^{\frac{T}{2\pi}} \omega \sin^2 \omega t dt = \frac{f_0^2}{R} \cdot \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} \cancel{\times} = \frac{f_0^2}{2R}$$

\* E possibile produrre con un alternatore anche corrente avendo un solo verso



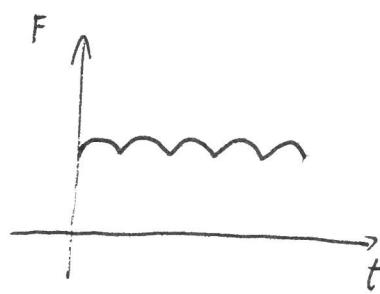
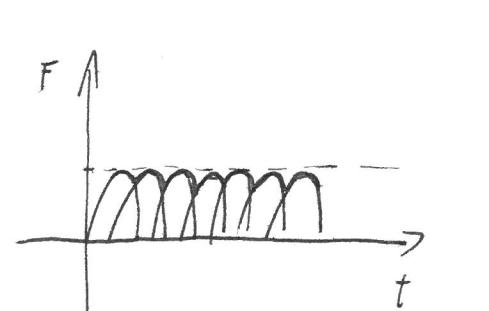
(dimens.)

Nel momento in cui le correnti invertiscono verso nelle spire anche le spazzole invertono le loro posizioni permettendo il passaggio del corrente dello stesso verso.



\* È possibile ottenere anche una forza elettromotrice approssimativamente costante con una serie di spire che ruotano sfinate l'una rispetto all'altra e con delle spazzole che scelgono le spire che devono fornire corrente al circuito utilizzatore.

(Anello Si Pecinotti)



forze approssimativamente costante.

\*) Se in un alternatore viene fatta pressare una corrente elettrica continua invertendo il processo descritto, le spire avranno un momento positivo per  $\alpha > 0$  e negativo per  $\alpha < 0$  ( $\alpha = \frac{B}{N}V$ ) pertanto esse inizieranno a oscillare intorno alla posizione di equilibrio data se  $\alpha = 0$ .

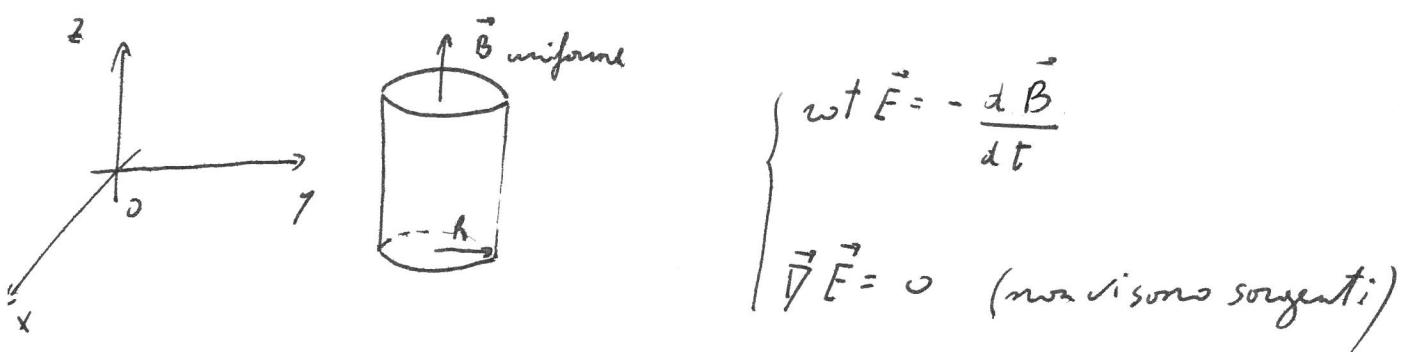
Se viene fornita corrente continua ad uno dinamo,  
per le caratteristiche strutturali del collettore su cui  
stizziscono le spazzole nelle spine la corrente avrà un  
verso per d $\rightarrow$  l'altro verso per d $\leftarrow$ .

Le spine portano infatti a motore intorno al  
proprio asse (motore a corrente continua)

Un motore a corrente alternata sinewave si ottiene  
facendo passare nelle spine una corrente alternata  
le varie con le stesse frequenze del moto rotatorio  
delle spine intorno al proprio asse.

\* Considera un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme variabile nel tempo. Ad esempio il campo all'interno di un solenoide percorso da corrente elettrica e determina il campo elettromotore indotto da  $\vec{B}$ .

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos \omega t \quad \vec{B} = (0, 0, B)$$



Poiché il campo magnetico ha componente solo lungo l'asse  $z$   $w * t * \vec{E} = - \frac{d \vec{B}}{d t}$  ha componente solo lungo tale asse.

$$w * t_x \vec{E} = \frac{\delta E_z}{\delta y} - \frac{\delta E_y}{\delta z} = 0$$

$$w * t_y \vec{E} = \frac{\delta E_z}{\delta z} - \frac{\delta E_x}{\delta y} = 0$$

Poiché il solenide ha una lunghezza infinita il campo non varia rispetto alle quote z perpend.

$$\frac{\delta E_y}{\delta z} = 0 \quad \frac{\delta E_x}{\delta z} = 0$$

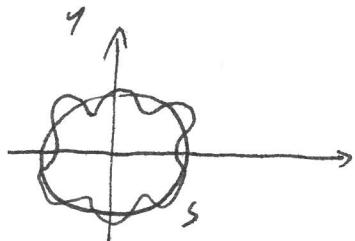
$$wt_x \vec{E} = \frac{\delta E_z}{\delta y} = 0$$

$$wt_y \vec{E} = - \frac{\delta E_z}{\delta x} = 0$$

La componente  $E_z$  del campo non varia al variare di x, y ciò è compatibile con un campo costante lung l'asse z oppure nullo.

Un campo costante lung l'asse z anche strettamente al solenide non è scattabile fisicamente. Pertanto le componenti del campo lung l'asse z è nulla.

Le linee di forza del campo sono contenute nel piano  $x, y$ , inoltre  $\vec{F} = 0$  (ogni linea del campo deve entrare e uscire un ugual numero di volte da ogni superficie considerate)



I caso (assunto per le simmetrie del problema)

II caso le linee di forza del campo sono circolari.

$$\vec{F} = \phi(r, t) .$$

$$f = - \frac{d\phi(\vec{r})}{dt}$$

poiché le linee di forza sono circolari

$$f = \phi \vec{E} d\vec{l} = E 2\pi r$$

$$E_{2\pi r} = - \frac{d}{dt} \phi(\vec{B})$$

$$\phi(\vec{B}) = B_0 r^2 \pi = B_0 \cos \omega r^2 \pi$$

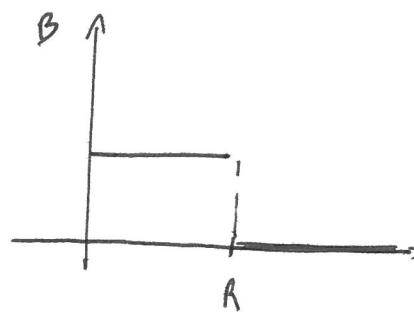
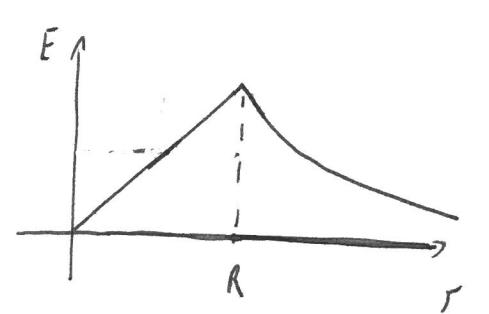
$$E_{2\pi r} = - \frac{d}{dt} B_0 \cos \omega r^2 \pi = - B_0 r^2 \pi \frac{d}{dt} \cos \omega t = B_0 r^2 \pi \omega \sin \omega t$$

$$E = \frac{B_0}{2} r \omega \sin \omega t \quad (\underline{\text{per } r < R})$$

nel caso  $r > R$

$$E_{2\pi r} = - \frac{d}{dt} B_0 \cos \omega R^2 \pi = B_0 R^2 \pi \omega \sin \omega t$$

$$E = \frac{B_0}{2} \omega \sin \omega t \frac{R^2}{r} \quad (\underline{\text{per } r > R})$$



\* È fisicamente impossibile avere un campo elettrico che scende all'infinito con  $\frac{1}{r}$ , infatti non fosse

l'energia elettostatica ad emersione costante  $U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \vec{E}^2 d\tau$   
 - scille infinite.

Presto questo è stato constato. Sull'una considerato, il solenide infinito.

Oss

Per ragioni di simmetria il campo elettrico generato dal solenide non può avere o linee di forza parallele a  $\vec{B}$  o circolari ortogonalmente a  $\vec{B}$ .



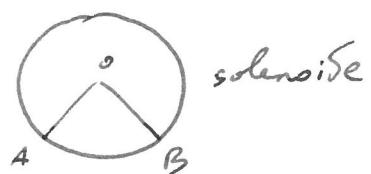
Il  $l_2$  è da scartare infatti se considero le linee  $l_1$  ortogonale a  $\vec{B}$  e quindi  $\vec{E}$  ottengo  $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$  ( $\vec{E} \perp d\vec{l}$ ) mentre

$$\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} \neq 0$$

\* Un campo magnetico  $\vec{B}$  all'interno di un solenoide variabile con il tempo determina un campo elettrico indotto.

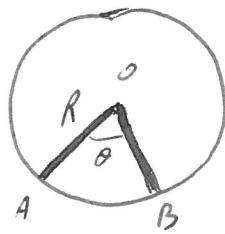
$$E_i = B_0 \frac{\pi}{2} r^2 n \epsilon t$$

Determinare la differenza di potenziale tra i punti A e B



\* Le differenze di potenziale tra i punti A e B dipendono dal percorso che unisce tali punti essendo il campo elettrico indotto non conservativo.

4) Si considera una lente conduttiva avente le seguenti forme



la differenza di potenziale ai capi A e B della lente sarà nulla

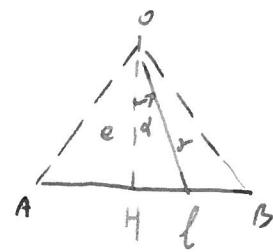
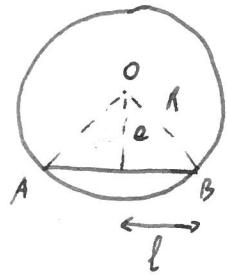
$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad \text{essendo il campo ortogonale alla direzione della lente.}$$

5) Se la lente ha la forma dell'arco  $\widehat{AB}$  allora

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} d\vec{l} = \int_B_0 \frac{R}{2} \omega \text{un et } R d\theta = \frac{B_0 R^2}{2} \omega \text{un et } \theta$$

3)

Consideriamo il caso in cui la lente ha la seguente forma



$$\Delta V = \int_A^B \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_A^B e B_0 \sin \theta \frac{r}{2} dl \cos \theta$$

$\theta$  è l'angolo formato da  $\vec{E}_i$  e  $d\vec{l}$ .

Siccome  $\vec{E}_i$  è sempre ortogonale al raggio  $r$ ,  $dl$  cosa rappresenta l'elemento infinitesimo di circonferenza avente come raggio  $r$  (distanza di  $d\vec{l}$  da  $O$ ).

$$\Delta V = \int_A^B e B_0 \sin \theta \frac{r}{2} \cdot \frac{r dr}{l \cos \theta}$$

integrandi nelle variabili x occorre porre z in funzione di x

$$e = r \cos \alpha$$

$$g^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Delta V = 2 \int_{H}^{B} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = 2 \int_{\frac{L}{e}}^{\frac{L}{\epsilon}} \omega B_0 \sin \alpha \frac{e^2}{\cos^2 \alpha} dx = \\ = \omega B_0 \sin \alpha e^2 \int_0^{\frac{L}{\epsilon}} dx = \omega B_0 \sin \alpha \frac{L}{\epsilon} \alpha$$

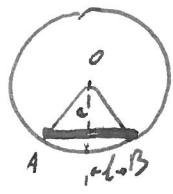
Se  $\omega = 314 \text{ rad/sec}$  (presa de corriente industrial)

$$B = 2 \text{ T}$$

$$R = 1 \text{ m} \quad \alpha = \frac{R}{z}$$

$$V = 314 \cdot 2 \cdot 0.5 \cdot 0.86 = 240 \text{ V.}$$

\* Le differenze di potenziale tra i punti A e B



potere essere calcolate applicando le leggi di Faraday - Kirchhoff

$$f = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (\text{attraverso la superficie di soggiorno sul triangolo } AOB)$$

$$f = - \frac{d\Phi}{dt} (B_0 \cos \theta) = B_0 \omega r \sin \theta$$

$$f = \underbrace{\int_A^O \vec{E}_i \cdot d\vec{l}} + \underbrace{\int_O^B \vec{E}_i \cdot d\vec{l}} + \int_B^A \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

$\vec{b} = 0$  (campo elettrico è ortogonale a  $d\vec{l}$ )

$$f = \int_B^A \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \Delta V_{(A,B)}$$

\*)

Consideriamo un parallelepipedo di rene all'interno del quale è presente un campo elettrico indotto  $E_i$ .

Determina l'intensità complessiva  $i$  corrente che passa nel conduttore e le potenze dissipate per effetto Joule.

$$E(r) = \frac{r}{2} B_0 \omega r n \text{ aet}$$



$$\omega = 314 \text{ rad/sec.}$$

$$B_0 = 10^{-4} \text{ T}$$

$$r = 10 \text{ cm} \quad h = 5 \text{ mm}$$

$$\rho = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$$

$$i = \int \vec{j} d\vec{S} = \int \frac{\vec{E}}{\rho} d\vec{S} = \int \frac{\vec{E}}{\rho} dS_n = \int \frac{\vec{E}}{\rho} h dr =$$

$$= \frac{B_0}{2} \omega r n \text{ aet} \int_r^R r dr = \frac{B_0 h \omega r n \text{ aet}}{2\rho} \cdot \frac{R^2 - r^2}{2}$$

È una corrente periodica delle forme  $i = i_0 \text{ sen et}$

$$i_0 = \frac{B_0 \omega h R^4}{4\rho} = \frac{10^{-2} \cdot 314 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.1^2}{4 \cdot 1.2 \cdot 10^{-8}} \approx 2.3 \cdot 10^3 A$$

La potenza dissipata per effetto Joule

$$W = R i^2$$

$$\Delta R = \rho \frac{2\pi r}{\Delta s}$$

$$\Delta i = \int \Delta S = \frac{E}{\rho} \Delta S = \frac{r}{\rho} B_0 \omega r h \Delta S$$

$$\Delta W = \rho \frac{2\pi r}{\Delta S} \cdot \frac{r^2}{2} B_0^2 \omega^2 r h \Delta S^2$$

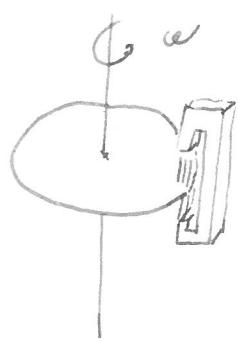
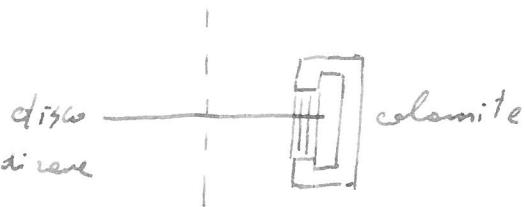
$$\Delta W = \frac{\pi r^3}{2\rho} B_0^2 \omega^2 r h \Delta S$$

$$W = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 r h}{2\rho} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi B_0^2 \omega^2 r h R^4}{8\rho} =$$

$$= \frac{i_0^2}{h} \rho 2\pi r h^2 \omega t$$

$$\langle W \rangle = \frac{\pi}{h} \rho_{\text{in}}^2 \approx 570 \text{ W}$$

(Potenza netta dissipata nel disco di rotazione Sol  
comprendibile).

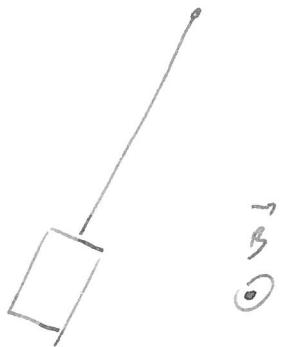


Se il disco si muove con velocità angolare  $\omega$  all'interno del gradiente di campo gravitazionale  
sulla colonna "colomiti" viene per effetto

Spostata all'interno del disco.

Tale energia viene sottratta dall'  
energia cinetica del disco che, magari  
frena.

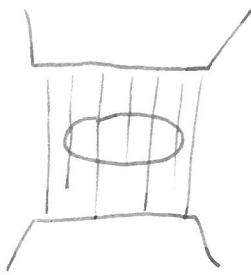
L' stesso esperimento può essere fatto con un pendolo  
in presenza di una carica  $\vec{B}$



Quando il pendolo giunge in posizione  
di equilibrio

\*) Misuratore di campo magnetico  
(galvanometro balistico)

Considera una spira posta in un campo di cui si vuole calcolare l'intensità (le dimensioni della spira sono note)



Se fermo bruscamente la spira nel campo o se la faccio ruotare di  $90^\circ$  ponendole parallele alle linee del campo

avrò una variazione di flusso  $\Delta\phi = BS$  ( $S$ : sup. spira)

$$\Delta\phi = -f \cdot \Delta t = -\frac{i}{R} \cdot \Delta t$$

se le spire i collegate ad un galvanometro esso sarà soggetto ad un momento  $M$  proporzionale alla corrente generata che lo attirerà

$$M = K_i \quad (\text{momento iniziale e cui è soggetto il galvanometro})$$

$$\eta \Delta t = K_i \Delta t$$

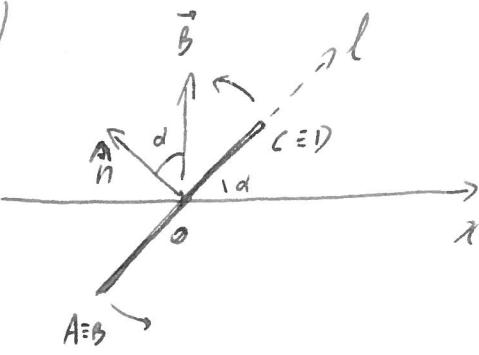
$$\eta \Delta t = I s \omega = I \omega_0 = K_i \Delta t$$

dalle velocità angolare iniziale  $\omega_0$ , noto, l'momento di inerzia  $I$  e la costante di proporzionalità  $K$  riconosce

$$\Delta t \text{ e quindi } \Delta \phi = B S$$

Scorrono le superfici delle spire immesse nel campo possiamo ricavare  $B$ .

Pb)



le spine quadrate di lat.  $l$  muo  
no un campo magnetico  $\vec{B}$  avendo  
la direzione mostrata in figura e varibile  
secondo la legge  $B = B_0 + \alpha x$

\*) Determina le forze elettromotrici  
indotte nelle spine.

$$f = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} : -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{n} dl$$

$$\phi(\vec{B}) = \int B \cos \alpha dl = \int B \cos \alpha l dl = L \cos \alpha \int (B_0 + \alpha x) dl$$

$$x = l \cos \alpha$$

si integra nelle variabili  $l$

$$\phi(\vec{B}) = L \cos \alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (B_0 + \alpha l \cos \alpha) dl :$$

$$= B_0 L' \cos \alpha + L \cos \alpha \left. \frac{l'}{2} \right|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}$$

$$\phi(\vec{B}) = B_0 L' \cos \alpha$$

si integra nelle variabili x

$$\phi(\vec{B}) = L \cos \int \left( B_0 + \alpha x \right) \frac{1}{\cos} dx =$$

$\frac{L \cos \alpha}{\cos}$

$$= L' B_0 \cos \alpha + \alpha L \underbrace{\int_{-\frac{L}{2} \cos \alpha}^{\frac{L}{2} \cos \alpha} x^2 dx}_{0} =$$

$$f = - \frac{d}{dt} L' B_0 \cos \alpha = - \frac{d}{dt} L' B_0 \cos \alpha = \alpha L' B_0 \sin \alpha$$

\*) Il problema potrebbe essere risolto anche considerando

$$de f = \phi \vec{E}_i \cdot \vec{l} = \phi (\sigma \times \vec{B}) \cdot \vec{l}$$

i contributi alle circuittazioni diverse da zero sono

quelli lungo i lati  $\overline{CD}$  e  $\overline{AB}$

lungo il lato  $\bar{CD}$        $|\vec{v} \times \vec{B}| = \omega \frac{L}{2} \sin \alpha (B_0 + \epsilon \frac{L}{2} \cos \alpha)$   
 (la direzione è quella del lat.)

$$f_1 = \omega \frac{L}{2} \sin \alpha (B_0 + \epsilon \frac{L}{2} \cos \alpha)$$

lungo il lato  $\bar{AB}$        $|\vec{v} \times \vec{B}| = \omega \frac{L}{2} \sin \alpha (B_0 - \epsilon \frac{L}{2} \cos \alpha)$

$$f_2 = \epsilon \frac{L}{2} \sin \alpha (B_0 - \epsilon \frac{L}{2} \cos \alpha)$$

$$f = f_1 + f_2 = \omega L \sin \alpha B_0$$

\* ) Se le spire ruotano intorno ad uno dei suoi lat.

$$f = L \omega L \sin \alpha (B_0 + \epsilon L \cos \alpha)$$

$$f = L^2 \epsilon (B_0 \sin \alpha + \frac{\alpha}{2} L \sin \alpha) \quad (\text{è differente dal caso precedente}).$$

\* ) Considera un solenide e una spira in la cui sede

-  - il campo elettrico  $B$  all'interno del solenide vale  $B = niz$

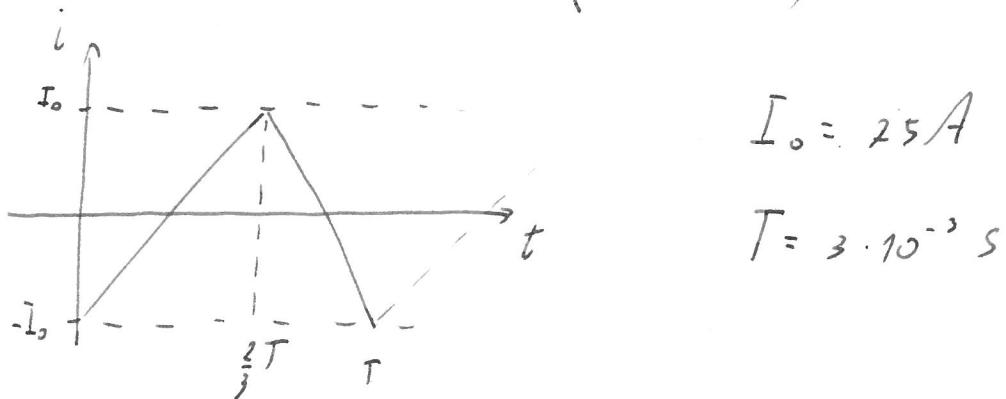
$n$  = numero di spire per unità di lunghezza

$$n = 1.5 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$$

$$r_1 = 5 \text{ cm}$$

$$R = 4.5 \Omega$$

Le corrente ha otherwise il solenide ha l'andamento mostrato. Sol grafico (periodico)



\* ) Calcolare le potenze dissipate dalle spire.

Determinare la funzione  $i(t)$

$$i(t) = a + bt \quad \begin{cases} t=0 & i=-I_0 \\ t=\frac{2}{3}T & i=I_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -I_0 \\ I_0 = -I_0 + b \frac{2}{3}T \end{cases} \quad b = 2I_0 \frac{\frac{2}{3}T}{T} = \frac{4I_0}{3T}$$

$$\underline{i(t)} = -I_0 + \frac{I_0 \cdot 3t}{T} = I_0 \left( \frac{3t}{T} - 1 \right) \quad 0 \leq t \leq \frac{2}{3}T \quad //$$

$$i(t) = a + bt \quad \begin{cases} t=\frac{2}{3}T & i=I_0 \\ t=T & i=-I_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_0 = a + b \frac{2}{3}T \\ -I_0 = a + bT \end{cases}$$

$$I_0 = -\frac{1}{3}bT \quad b = -\frac{6I_0}{T}$$

$$a = I_0 + \frac{6I_0}{T} \frac{2}{3}T = 5I_0$$

$$\underline{i(t)} = 5I_0 - \frac{6I_0}{T} t = I_0 \left( 5 - \frac{6}{T} t \right) \quad \frac{2}{3}T \leq t \leq T \quad //$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{3I_0}{T} \quad 0 \leq t < \frac{2}{3}T$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{6I_0}{T} \quad \frac{2}{3}T \leq t \leq T$$

$$f_i = -\frac{d}{dt} \phi(\vec{B}) = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

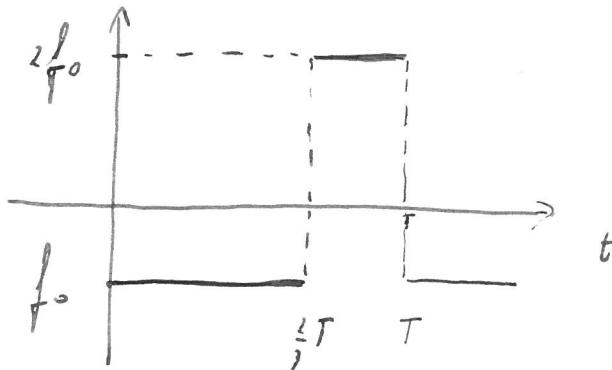
Considérons une surface  $S$  à l'intérieur du solénide, orthogonale à  $\vec{B}$ , à l'extérieure le solénoïde n'ayant pas de fil,  $\vec{B} = 0$ .

$$f_i = -\frac{d}{dt} B \pi r_i^2 = -\pi r_i^2 \frac{d}{dt} n \gamma_i i =$$

$$= -\pi r_i^2 n \gamma_0 \frac{d}{dt} i$$

$$f_i = -\pi r_i^2 \rho_0 n \frac{3I_0}{T} \quad 0 \leq t < \frac{2}{3}T$$

$$f_i = \pi r_i^2 \rho_0 n \frac{6I_0}{T} \quad \frac{2}{3}T \leq t \leq T$$



$$f_0 = \frac{\pi \cdot 25 \cdot 10^{-4} \cdot 4\pi \cdot 10^{-2} \cdot 1.5 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 75}{3 \cdot 10^{-5}} \approx 11V$$

$$\langle W \rangle = \frac{1}{T} \int W dT = \frac{1}{T} \left[ \int_{\frac{1}{3}T}^{\frac{2}{3}T} \frac{f_0'}{R} dt + \int_{\frac{2}{3}T}^T \frac{4f_0'}{R} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{R} \left[ \frac{f_0'}{R} \frac{2}{3}T + \frac{4f_0'}{R} \frac{1}{3}T \right] = \frac{2f_0'}{R} \approx 55W$$

## Sviluppo in serie di Fourier

Una funzione periodica limitata può essere approssimata con una funzione in serie di coseni:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t$$

la funzione  $f(t)$  convergerà puntualmente alla funzione considerata nei punti dove essa è continua, ai punti di discontinuità convergerà alle medie tra i limiti destro e sinistro delle funzioni in tali punti.

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T a_0 dt \quad \begin{aligned} & \text{(essendo l'integrale su un periodo} \\ & \text{del seno e del coseno nulli)} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$\int_0^T f(t) \cos nt dt = \int_0^T a_n \cos nt dt \quad (\text{since contribution of integral sinus of } \omega)$$

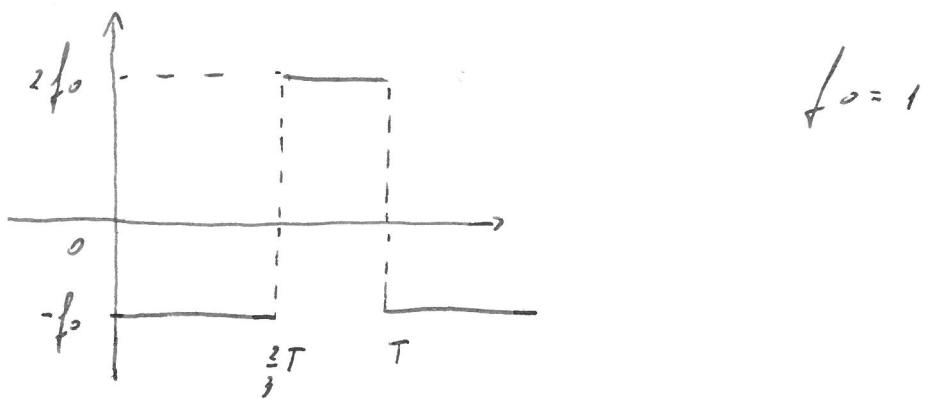
$$\int_0^T f(t) \cos nt dt = a_n \frac{T}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos nt dt$$

$$\int_0^T f(t) \sin nt dt = \int_0^T b_n \sin nt dt = b_n \frac{T}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin nt dt$$

\*1) Svilupperemo in serie Si Fourier la funzione periodica



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T} f_0 \left[ - \int_0^{\frac{2T}{3}} \cos(n\omega t) dt + 2 \int_{\frac{2T}{3}}^T \cos(n\omega t) dt \right]$$

$$a_n = \frac{2}{T} f_0 \frac{1}{n\omega} \left( - \left[ \operatorname{sen} n\omega t \right]_{\frac{2T}{3}}^{T} + 2 \left[ \operatorname{sen} n\omega t \right]_{\frac{2T}{3}}^T \right)$$

$$a_n = \frac{2f_0}{n\pi} \left[ - \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \right] =$$

$$\boxed{T \omega = 2\pi} \quad = \frac{f_0}{\pi n} \left[ - \operatorname{sen} \frac{4n\pi}{3} - 2 \operatorname{sen} \frac{4n\pi}{3} \right]$$

$$a_4 = -\frac{3f_0}{4\pi} \sin \frac{4n\pi}{3}$$

$$a_4 = -\frac{3f_0}{\pi} \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{3f_0}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} = +0.867$$

$$a_2 = -\frac{3f_0}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{3f_0}{2\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} = -0.413$$

$$a_3 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \left[ - \int_0^{\frac{2}{3}T} f(t) \sin n\omega t dt + 2 \int_{\frac{2}{3}T}^T f(t) \sin n\omega t dt \right] =$$

$$= \frac{2f_0}{Tn\omega} \left[ \left. \omega \cos \omega t \right|_0^{\frac{2}{3}T} - 2 \left. \cos \omega t \right|_{\frac{2}{3}T}^T \right] =$$

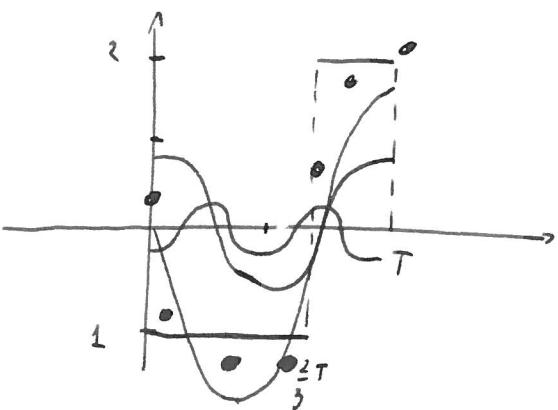
$$= \frac{2f_0}{Tn\omega} \left[ \left. \cos \omega \frac{2}{3}T \right|_0^2 - 2 + 2 \left. \cos \omega \frac{2}{3}T \right|_0^T \right] =$$

$$= \frac{f_0}{\pi n} \left[ 3 \cos \frac{4n\pi}{3} - 3 \right]$$

$$b_1 = \frac{f_0}{\pi} \left( 3 \cos \frac{4}{3} \pi - 3 \right) = -1.432$$

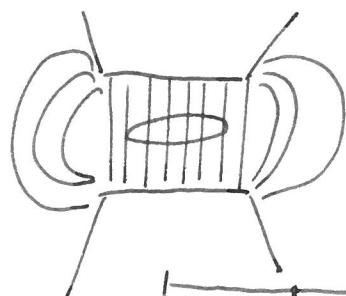
$$b_2 = \frac{f_0}{2\pi} \left( 3 \cos \frac{8}{3} \pi - 3 \right) = -0.216$$

$$b_3 = \frac{f_0}{3\pi} \left( 3 \cos \frac{11}{3} \pi - 3 \right) = 0$$



$\circ =$  somma delle funzioni  
 in senso e verso mi  
 opposte come le funzioni Si portano.

Pb)



Pongo une spire ortogonalmente  
ad un campo  $B$

$$S = \text{superficie spire} = 1.22 \text{ cm}^2$$

$$R = 0.15 \text{ m}$$

Se mossa le spire all'interno del campo uniforme

le forze elettromotrici indotte è nulla essendo  $\frac{d\phi(B)}{dt} = 0$ ,

se però estraggo le spire con una velocità  $v = 10 \text{ mm/s}$

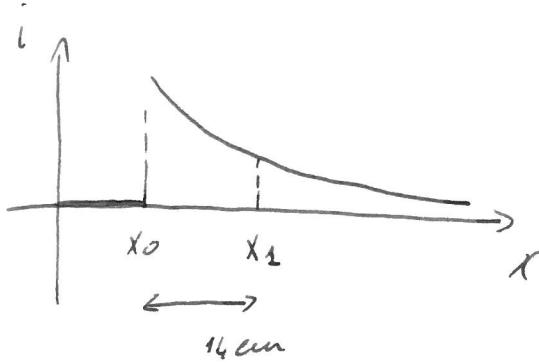
tal spire attraversa un gradiente di campo pertanto

il flusso di  $\vec{B}$  non è costante e le corrente indotte

che attraversa le spire risulta spazientemente

essere una funzione delle forme

$$i(x) = Ae^{-\frac{x}{\lambda}} \quad \lambda = 16 \text{ cm}$$



$$i = A e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad \lambda = 16 \text{ cm}$$

$$i_1 = i(x_2) = 0.31 \text{ mA}$$

$$i = 0 \quad x \leq x_0$$

\* Vogli determinare il valore di  $\vec{B}$  al centro ( $x=0$ )

determinate le condizioni al contorno il valore di  $A$

$$i_1 = A e^{-\frac{x_1}{\lambda}}$$

$$A = i_1 \lambda^{\frac{x_1}{\lambda}} \quad i = i_1 \lambda^{\frac{x_2-x}{\lambda}}$$

$$i = \frac{f}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi(B)}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{d\bar{\phi}(B)}{dx} \sigma$$

$$i dx = -\frac{\sigma}{R} d\bar{\phi}(B)$$

$$\int_{x_0}^{\infty} i dx = -\frac{\sigma}{R} (\bar{\phi}(B)_\infty - \bar{\phi}(B)_{x_0}) = -\frac{\sigma}{R} (0 - B_s S) \quad \text{in } x, \text{ il campo è costante 85}$$

$$\int_{x_0}^{\infty} i_2 e^{\frac{x_1-x}{\lambda}} dx = \frac{v}{R} BS'$$

$$-\lambda i_1 \left[ e^{\frac{x_1-x}{\lambda}} \right]_{x_0}^{\infty} = \frac{v}{R} BS'$$

$$+\lambda i_1 e^{\frac{x_1-x_0}{\lambda}} = \frac{v}{R} BS'$$

$$B = \frac{R \lambda i_1 e^{\frac{x_1-x_0}{\lambda}}}{v S} = \frac{0.15 \cdot 0.16 \cdot 0.31 \cdot 10^{-3} l^{\frac{0.14}{0.16}}}{60 \cdot 10^{-3} \cdot 1.22 \cdot 10^{-4}} = 2.4 T$$

## \* ) Magnetismo nelle materie

È possibile in primo luogo fare una distinzione tra alcune sostanze osservando il loro comportamento in presenza di un campo magnetico.

Alcune sostanze ferromagnetiche vengono attratte, con una forza dell'ordine del loro peso all'interno di un solenoidale (ferro, nichel, etc...)

Altre sostanze paramagnetiche (alluminio, platino etc...) vengono sempre attratte verso l'interno di un solenoidale ma con una forza inferiore alle prime.

Infine le sostanze diamagnetiche vengono respinte.

Una ragione di tale fenomeno può essere fornita dal Teorema di equivalenza di Ampere.

Gli elettroni che ruotano intorno al nucleo secondo il modello planetario dell'atomo, possono essere assimilati ad un'spira percorsa da corrente elettrica, essi generano un momento magnetico  $\vec{m}$  che, in assenza di campo magnetico esterno, è mediamente nullo su un volume  $dV$ .

In presenza però di un campo magnetico esterno si presentano altri fenomeni di polarizzazione; i momenti si orientano, il momento magnetico non è più mediamente nullo e ciò genera sia alterazioni del campo magnetico stesso sia azioni meccaniche sul materiale stesso.

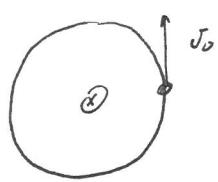
Le equazioni di Maxwell in presenza di materie  
subiscono una modifica; si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) \end{array} \right. \quad \vec{J}_m = \text{densità delle correnti} \\ \text{microscopiche}$$

Occone ore provare una relazione tra  $\vec{J}_m$  e una  
grandezza misurabile come ad esempio fatto nel caso  
del dielettrico tra poli e  $\vec{P}$  (vettore polarizzazione) che  
a sua volta va collegato al campo elettrico  $\vec{E}$ .

\* ) Letti sul magnetismo e l'elio microscopico.

Considero il modello di Rutherford dell'atomo di idrogeno allo stato fondamentale



$$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Determino il raggio dell'atomo di idrogeno

$$\vec{F}_c = m_e \vec{a}$$

$$\frac{\ell^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \omega_0^2 r_0 = m_e \frac{4\pi^2}{T_0^2} r_0 \quad T_0 = \frac{4\pi}{\ell} \sqrt{\frac{4\pi m_e \epsilon_0 r^3}{\ell}}$$

$L_i$  = (potenziale di ionizzazione) =  $-E_i$  (energie possedute dall'elettrone legato al nucleo)

$$= - \left( \frac{1}{2} m_e v_i^2 - \frac{\ell^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)$$

$$\frac{\ell^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m_e \frac{v^2}{r^2} \quad v^2 = \frac{\ell^2}{4\pi\epsilon_0 r m_e}$$

$$L_i = - \left( \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\ell^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{\ell^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$\sigma = \frac{\ell^2}{8\pi\epsilon_0 L_i} \quad \text{noto } L_i = 13.5 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$r = 0.5 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0.5 \text{ \AA} \quad \text{ricavo } T_0 = 1.5 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

la corrente dettice associata all'elettrone vale

$$i = \frac{e}{T_0} \simeq 1 \text{ mA}$$

il momento magnetico

$$m = i \vec{S} = i \frac{r^2 \pi}{(stato)} = 9.35 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$$

esiste una relazione fra il momento magnetico dell'

elettrone e il suo momento angolare  $\vec{L} = \vec{r} \times m_e \vec{v}$

$$L = \left| \vec{r}_0 \times m_e \vec{v}_0 \right| = m_e \left| (\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) \right| = m_e \left| (z \cdot \text{velocità oraria}) \right| = m_e z \frac{r^2 \pi}{T_0}$$

$$L = \frac{2\pi m_e r^2}{T_0}$$

$$\frac{m}{L} = \frac{e}{T_0} \text{ f.t.} \cdot \frac{T_0}{2\pi m_e \text{ f.t.}} = \frac{e}{2m_e}$$

anche la direzione di  $\vec{m}$  e  $\vec{L}$  è la stessa mentre il verso è opposto.

Le grandezze  $\frac{e}{2m_e}$  sono dette fattore givimagnetico.

Essendo il momento  $L$  quantizzato  $L = n\hbar$

anche il momento magnetico risultante quantizzato.

$$m = \frac{e}{2m_e} n \hbar \quad m = n m_B \quad m_B = \frac{e \hbar}{2m_e} \text{ è detto}$$

magneton di Bohr.

\* ) Oltre al momento magnetico generato dall'atomo a causa del moto dell'elettrone c'è pure il

males occorre tener conto del momento  
proprio del motore elettrico e venturone causato  
dalle rotazioni intorno al proprio asse (spin).

Il momento magnetico di ogni singola eterna si ottiene  
dalla somma di tutti questi momenti.

\* ) Vettore polarizzazione magnetica.

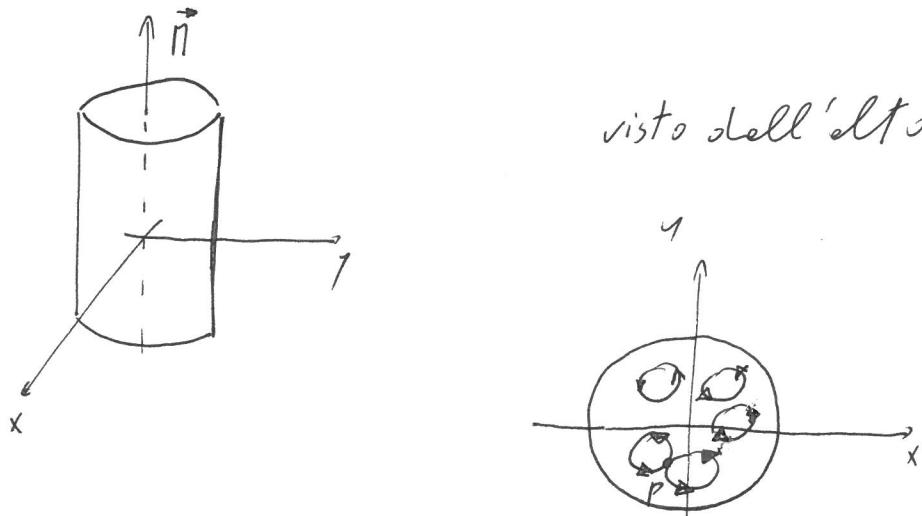
Come nei dielettrici è stato definito il vettore polarizzazione elettrica  $\vec{P}$ , definiamo il vettore polarizzazione magnetica

$$\vec{M} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \vec{m}_i}{\Delta T}$$

$\sum_{i=1}^n \vec{m}_i$  = somme di momenti

microscopici presenti nel  
volume  $\Delta T$ .

\* ) Considera un materiale a forma cilindrica avente un  
momento  $\vec{M}$  come indicato in figura



Supponiamo che  $\vec{M}$  non sia diverso dalle posizioni,

Tale momento può essere visto come il risultante  
dei momenti di ogni singolo atomo.

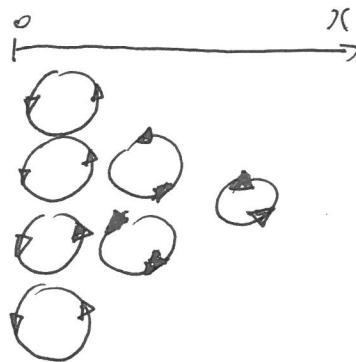
In un generico punto P all'interno delle superficie  
cilindriche non saranno presenti correnti microscopiche



perché nel punto P le correnti generate  
dal moto dell'elettrone nel primo  
atomo sono compensate dalle correnti determinate  
dal moto dell'elettrone nel secondo atomo.

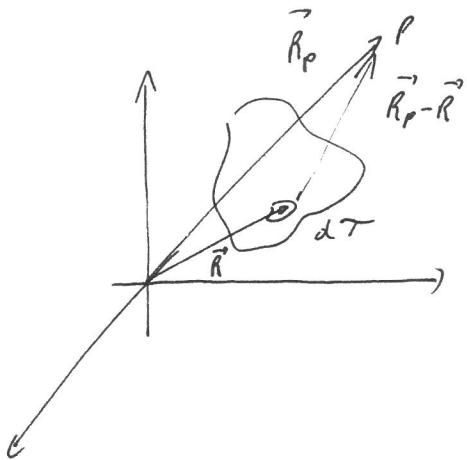
Solo all'esterno delle superficie cilindriche si avrà  
una corrente diversa da 0.

Nel caso invece che  $\vec{M}$  varii di variazione delle posizioni  
saranno presenti anche correnti interne.



il momento  $M$  decresce  
e la corrente  $i_x$ ; le correnti interne  
mediamente è diversa da zero.

a) Determina la relazione tra il vettore polarizzazione magnetica  $\vec{M}_e$  le correnti di superficie e di volume.



$$\vec{A}(P) = \text{potenziale attore nel punto } P = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J} d\tau}{|\vec{R}_p - \vec{R}|} :$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau} \frac{\vec{J} \cdot d\vec{S} \cdot d\ell}{|\vec{R}_p - \vec{R}|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\ell} \frac{i d\vec{l}}{|\vec{R}_p - \vec{R}|} = (\text{teorema di Stokes}) :$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_S \vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{|\vec{R}_p - \vec{R}|} \right) \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_S \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{R}_p - \vec{R}|} \right) \times d\vec{S} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_S d\vec{S} \times \frac{(\vec{R}_p - \vec{R})}{|\vec{R}_p - \vec{R}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S d\vec{m} \times \frac{(\vec{R}_p - \vec{R})}{|\vec{R}_p - \vec{R}|^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \vec{H} \times \frac{(\vec{R}_p - \vec{R})}{|\vec{R}_p - \vec{R}|^3} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \vec{H} \times \vec{V} \left( \frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}_p|} \right) d\tau$$

$$\vec{V} \times \left[ \vec{H} \cdot \frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}_p|} \right] = \frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}_p|} (\vec{V} \times \vec{H}) + : \left( \vec{V} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}_p|} \right) \times \vec{H}$$

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\vec{V} \times \vec{H}}{|\vec{R} - \vec{R}_p|} d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \vec{V} \times \left[ \vec{H} \cdot \frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}_p|} \right] d\tau =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\vec{V} \times \vec{H}}{|\vec{R} - \vec{R}_p|} d\tau + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{H} \times \hat{n} dS}{|\vec{R} - \vec{R}_p|}}_{\hookrightarrow (\text{seconda identità di Green})}$$

Riconoscendo inoltre che

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\vec{J}_{ms} d\tau}{|\vec{R} - \vec{R}_p|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}_{ms} dL S}{|\vec{R} - \vec{R}_p|} \quad \text{si ottengono}$$

le relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_{m_r} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \\ \vec{J}_{m_s} = \vec{M} \times \hat{n} \end{array} \right.$$

\* ) Le relazioni  $\vec{J}_{m_r} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$  può essere provate anche nel seguente modo :

Considera un mezzo magnetizzato non uniforme con vettore magnetico  $\vec{M} = (0, 0, M_z)$   $M_z = M_z(x)$

$$\frac{d M_z}{d x} > 0$$

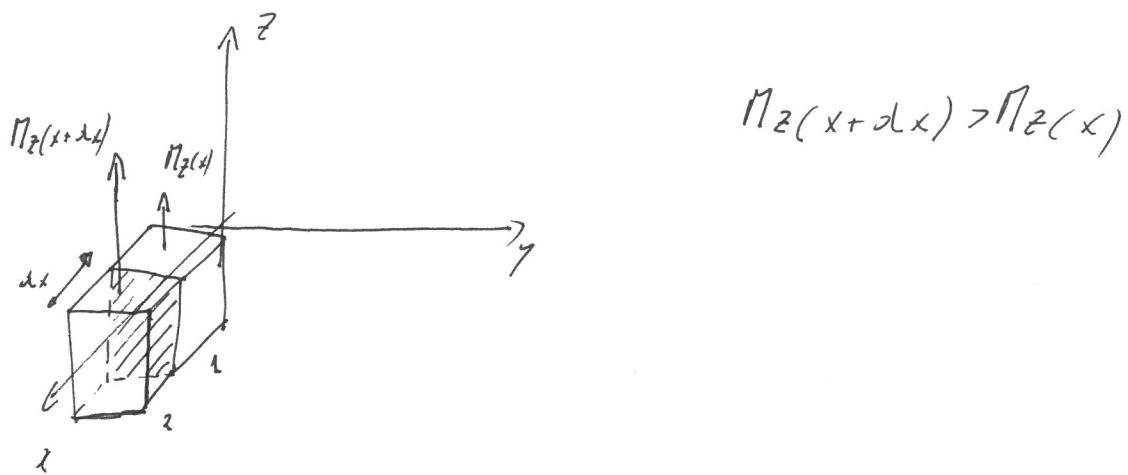
considera il mezzo magnetizzato diviso in tanti volumetti

$$dT_1 = dx dy dz$$

$$dT_2 = " "$$

:

$$dT_n = " "$$

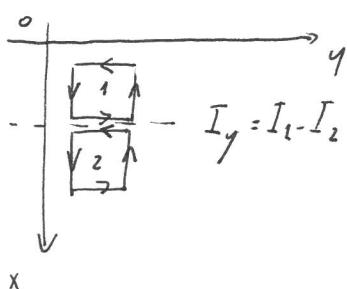


il momento magnetico  $m_1, m_2$  dei due cubi sare'

$$m_1 = M_z l \cdot T_1$$

$$m_2 = M_z l \cdot T_2$$

essendo il momento di ciascun cubo diverso da zero considerando un corrente lungo le superficie laterale di ciascun cubo di  $d$  tale che  $m = d i d s'$



$$M_1 d\tau_1 = dI_1 dS$$

$$M_2 d\tau_2 = dI_2 dS$$

$$M_z(x) dx dy dz = dI_1 dx dy$$

$$M_z(x+dx) dx dy dz = dI_2 dx dy$$

$$[M_z(x) - M_z(x+dx)] dz = d(I_2 - I_1) = dI_y$$

$dI_y$  è la corrente totale misurata che attraversa la superficie di contatto fra i due cubi (superficie trapezoidale)

$$[M_z(x) - M_z(x+dx)] dz = dI_y = (\vec{J}_{mv})_y dx dz$$

$$-\frac{\delta M_z}{\delta x} dx dz = (\vec{J}_{mv})_y dx dz$$

$$(\vec{J}_{mv})_y = -\frac{\delta M_z}{\delta x} = (\vec{\nabla} \times \vec{\eta})_y$$

Tale esempio può essere esteso nel caso il campo  $\vec{H}$  var. 100

anche lungo le altre direzioni e ottenere così

$$\vec{J}_{m_0} = \vec{D} \times \vec{H}.$$

\*) Equazioni di Maxwell in presenza di materie

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_m) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{m_0} \\ \vec{H} \times \vec{n} = \vec{J}_m, \end{array} \right.$$

Se la materia occupa tutto lo spazio non ha senso parlare di superfici esterne pertanto  $\vec{J}_{ms} = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{\nabla} \times \vec{H}) \end{array} \right.$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{\nabla} \times \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{H}}{\mu_0} \right) = \vec{J}$$

introduce il vettore campo magnetico  $\vec{H} = \frac{\vec{B} - \mu_0 \vec{M}}{\mu_0}$

Ottengono le equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \end{array} \right.$$

simili a quelle ottenute per i dielettrici

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{array} \right.$$

Affinché le equazioni differenziali permettano soluzione unica occorre determinare il rapporto tra  $\vec{B}$  e  $\vec{j}$  come già fatto nei dielettrici tra  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$ .