CENNI SULLA RELATIVITA' GENERALE

La teoria della relatività generale è una teoria di campo in cui il campo gravitazionale è rappresentato da un tensore del secondo ordine $h^{\mu\nu}$ nell'approssimazione lineare, $g^{\mu\nu}$ nel caso generale.
Come già indicato nei paragrafi precedenti l'equazioni di campo possono essere ricavate in prima approssimazione nella forma linare nelle derivate seconde dello spazio e del tempo utilizzando degli operatori invarianti per trasformazioi di Lorentz.

$$h^{\mu\nu,\lambda}{}_{,\lambda} + h_\sigma{}^{\sigma,\mu\nu} - \left(h^{\mu\lambda,\nu}{}_{,\lambda} + h^{\nu\lambda,\mu}{}_{,\lambda}\right) - \eta^{\mu\nu} h_\sigma{}^{\sigma,\lambda}{}_{,\lambda} + \eta^{\mu\nu} h^{\lambda\sigma}{}_{,\lambda\sigma} = -\lambda T^{\mu\nu}$$

dove

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} m u^\mu u^\nu$$

è il tensore energia impulso e

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = v^\mu / \sqrt{1 - v^2}$$

Possiamo calcolare l'equazione del moto per una particella libera minimizzando la grandezza

$$d\tau^2 = \frac{1}{2} m \eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu = \frac{1}{2} m dx^\mu dx_\mu = \frac{1}{2} m \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau}\, d\tau d\tau$$

In presenza di un campo gravitazionale consideriamo il contributo dovuto all'interazione campo materia

$$\lambda h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$$

sostituendo l'espressione del tensore energia impulso otteniamo l'equazione del moto di una particella in presenza di un campo gravitazionale minimizzando l'azione

$$d\tau^2 = \left(\eta_{\mu\nu} + \lambda\, h_{\mu\nu}\right) dx^\nu dx^\mu = \left(\eta_{\mu\nu} + \lambda\, h_{\mu\nu}\right) u^\nu u^\mu d\tau d\tau = L d\tau d\tau$$

le note equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial u^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

forniscono le equazioni del moto di una particella in un campo gravitazionale

$$\frac{d}{d\tau}\left(u^\mu + \lambda h_{\mu\nu} u^\nu\right) - \frac{\lambda}{2} h_{\sigma\nu,\mu} u^\nu u^\sigma = 0$$

In analogia a quanto detto per l'approssimazione lineare le equazioni del moto nel caso generale si ottengono minimizzando

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu$$

dove $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico che in prima approssimazione può essere sostituito secondo la relazione $g_{\mu\nu} \cong \eta_{\mu\nu} + \lambda\, h_{\mu\nu}$
In assenza di campo il tensore metrico $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$
A questo punto definiamo vettore controvariante un oggetto a quattro componenti che per trasformazione generali di coordinate si trasforma secondo la legge

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu$$

e vettore controvariante un oggetto a quattro componenti che per trasformazione generali di coordinate si trasforma secondo la legge

$$B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu$$

un tensore di rango superiore è detto controvariante o covariante se si trasforma secondo la legge

$$A'^{\alpha\beta\ldots\gamma} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \cdots \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\sigma} A^{\mu\nu\ldots\sigma}$$

o secondo la legge

$$B'_{\alpha\beta\ldots\gamma} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \cdots \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\gamma} B_{\mu\nu\ldots\sigma}$$

Si dice che le equazioni della gravità generale sono invarianti per trasformazioni generali di coordinate perché formate unicamente da vettori o tensori di rango superiore covarianti o controvarianti.
Ritornando all'equazione del moto ottenuta minimizzando l'azione
$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu = g_{\mu\nu} u^\nu u^\mu d\tau d\tau$

osserviamo che $g_{\mu\nu}$ è un tensore del secondo ordine covariante infatti, dovendo essere invariante l'intervallo spazio-temporale
$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{dx'^\alpha} \frac{dx^\mu}{dx'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta$$
da cui
$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{dx'^\alpha} \frac{dx^\mu}{dx'^\beta}$$
Le equazioni di Lagrange forniscono le equazioni del moto
$$\frac{d}{d\tau}\left(g_{\mu\nu} u^\nu\right) - \frac{1}{2} g_{\sigma\nu,\mu} u^\nu u^\sigma = 0$$
dato che
$$\frac{d}{d\tau} g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu,\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau}$$
possiamo scrivere
$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu,\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{1}{2} g_{\sigma\nu,\mu} u^\nu u^\sigma$$
moltiplicando per $g^{\sigma\mu}$
$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau} + \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} (2 g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$
in virtù della simmetria in $dx^\alpha dx^\beta$
il termine
$$2 g_{\mu\beta,\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \left(g_{\mu\beta,\alpha} + g_{\mu\alpha,\beta}\right) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$
e l'equazione della geodetica diventa
$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau} + \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} (g_{\mu\beta,\alpha} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$
introducendo il simbolo di Christoffel
$$\Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} (g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu})$$

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$
Le equazioni di campo della relatività generale sono più complesse delle equazioni linearizzate e per derivarle occorre introdurre nuovi enti matematici che di seguito brevemente accenneremo.
Dovendo essere la relatività generale invariante per trasformazioni generali di coordinate occorre definire un nuovo operatore, la derivata covariante, che soddisfi questa proprietà in modo analogo a quanto fatto per l'invarianza di gauge.
La derivata covariante di un vettore A_μ si indica con il punto e virgola per distinguerla dalla derivata ordinaria indicata con la virgola o con il simbolo D.
Effettuare una derivata covariante di un vettore significa operativamente trasportare il vettore $A(x + dx)$ dal punto $x + dx$ al punto x spostandolo lungo la curva geodetica che collega i due punti in modo da conservare l'angolo che tale vettore forma con la curva (trasporto parallelo) prima di sottrargli $A(x)$ e dividere il tutto per dx.
E' possibile introdurre la seguente notazione:

$DA^{\mu} = A^{\mu}{}_{;\nu} dx^{\nu} = \left(A^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} A^{\alpha}\right) dx^{\nu} = A^{\mu}{}_{,\nu} + \delta A^{\mu}$
È possibile definire la derivata covariante di un vettore covariante
Dovendo essere
$\delta\left(A^{\mu} B_{\mu}\right) = 0$
$A^{\mu} \delta B_{\mu} = -B_{\mu} \delta A^{\mu} = -B_{\mu} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} A^{\alpha} dx^{\nu} = -B_{\alpha} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} A^{\mu} dx^{\nu}$
Da cui si ottiene $\delta B_{\mu} = -B_{\alpha} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} dx^{\nu}$ in definitiva
$A^{\mu}{}_{;\nu} = \left(A^{\mu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} A^{\alpha}\right)$
$A_{\mu;\nu} = \left(A_{\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} A_{\alpha}\right)$
E’ possibile procedere alla costruzione di derivate covarianti per tensori di rango maggiore di uno. Per tali tensori di rango più alto, la derivata covariante differsce dalla derivata ordinaria per un numero di termini aggiuntivi pari al numero degli indici.
Vale la seguente regola di derivazione covariante di un tensore $A^{\because}_{\dots}$ rispetto a x^{β} , bisogna aggiungere la derivata ordinaria $(A^{\because}_{\dots})_{,\beta}$ inoltre per ciascun indice covariante $A^{\because}_{.i.}$ occorre aggiungere il termine $-\Gamma^{\alpha}{}_{i\beta} A^{\because}_{.\alpha.}$ infine per ciascun indice controvariante $A^{.i.}_{\dots}$ occorre aggiungere il termine $\Gamma^{i}{}_{\alpha\beta} A^{.\alpha.}_{\dots}$.
Per esempio per un tensore di rango due
$A^{\mu\nu}{}_{;\beta} = A^{\mu\nu}{}_{,\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} A^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} A^{\mu\alpha}$
$A_{\mu\nu;\beta} = A_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} A_{\alpha\nu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} A_{\mu\alpha}$

Gli oggetti $\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$ detti simboli di Christoffel saranno di seguito espressi in funzione del tensore metrico utilizzando la proprietà della derivata covariante.
$DA_{i} = g_{ik} DA^{k}$
D’altra parte
$A_{i} = g_{ik} A^{k}$
$DA_{i} = D(g_{ik} A^{k}) = g_{ik} DA^{k} + A^{k} D g_{ik}$
Confrontando le due espressioni si ottiene $D g_{ik} = 0$
$g_{\mu\nu,\beta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} g_{\alpha\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta} g_{\mu\alpha}$
$g_{\beta\mu,\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu} g_{\alpha\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} g_{\beta\alpha}$
$g_{\nu\beta,\mu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\mu} g_{\alpha\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} g_{\nu\alpha}$
è possibile dimostrare che il simbolo di Christoffel è simmetrico rispetto ad una permutazione degli indici inferiori.
Sommando le ultime due equazioni e sottraendo la prima si ottiene
$g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta} = 2 g_{\alpha\beta} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}$
che comporta
$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}\left(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}\right)$
Abbiamo così espresso completamente il simbolo di Christoffel in funzione del tensore metrico.
Consideriamo ora una geodetica in uno spazio curvo definito dal tensore metrico $g_{\alpha\beta}$.
Se si parametrizza la geodetica attraverso l’intervallo spazio tempo $d\tau$ per la definizione di trasporto parallelo e derivata covariante avremo che la derivata covariante del vettore tangente alla geodetica è nullo.
In pratica
$Du^{\mu} = 0$
$du^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\nu} u^{\alpha} dx^{\nu} = 0$
essendo
$u^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau}$
Possiamo scrivere

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} u^\alpha u^\nu = 0$$

che sono le stesse equazioni ottenute precedentemente minimizzando l'azione $d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu$.

Vediamo ora come si ottengono le equazioni di campo per la teoria generale della gravità.
Nell'ottica di definire una teoria invariante per trasformazioni generali di coordinate si introducono tre importanti grandezze: il tensore di curvatura di Riemann, il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura.
Consideriamo due derivate covarianti consecutive di un campo vettoriale A_β, osserviamo che il risultano dipende dall'ordine di derivazione.

$$A_{\beta;\mu;\nu} = \left(A_{\beta,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} A_\alpha\right)_{,\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu}\left(A_{\sigma,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} A_\alpha\right) - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\left(A_{\beta,\sigma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\sigma} A_\alpha\right)$$

$$A_{\beta;\mu;\nu} = \left[A_{\beta,\mu,\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} A_{\alpha,\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} A_{\sigma,\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\left(A_{\beta,\sigma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\sigma} A_\alpha\right)\right] - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} A_\alpha + \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} A_\alpha$$

L'espressione di $A_{\beta;\nu;\mu}$ si ottiene dal'espressione sopra riportata scambiando l'indice ν con μ.
La quantità riportata in parentesi quadre è simmetrica negli indici ν e μ pertanto

$$A_{\beta;\mu;\nu} - A_{\beta;\nu;\mu} = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} A_\alpha + \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} A_\alpha + \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} A_\alpha - \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} A_\alpha$$

$$A_{\beta;\mu;\nu} - A_{\beta;\nu;\mu} = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} A_\alpha$$

dove

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = -\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu} \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}$$

è un tensore, essendo differenza di due tensori, a 4x4x4 x4=256 componenti. Tale tensore di rango 4 è detto tensore di curvatura di Riemann. Possiamo abbassare il primo indice $R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\sigma} R^\sigma{}_{\beta\mu\nu}$
Delle 256 componenti solo 20 sono indipendenti valendo le proprietà di seguito riportate:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0$$

Dalla contrazione del primo e dell'ultimo indice otteniamo un tensore di rango due

$$R_{\beta\mu} = R^\alpha{}_{\beta\mu\alpha}$$

Tale tensore di rango 2 è detto tensore di Ricci ed è simmetrico negli indici negli indici ν e μ

$$R_{\beta\mu} = R_{\mu\beta}$$

Mediante un'ulteriore contrazione otteniamo uno scalare

$$R = R^\beta{}_\beta = R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta}$$

detto scalare di curvatura.
Le equazioni di campo della teoria della relatività generale si possono ottenere facendo le seguenti ipotesi:

- L'equazione è invariante per trasformazioni generali di coordinate
- L'equazione si riduce a
  $$h^{\mu\nu,\lambda}{}_{,\lambda} + h_\sigma{}^{\sigma,\mu\nu} - \left(h^{\mu\lambda,\nu}{}_{,\lambda} + h^{\nu\lambda,\mu}{}_{,\lambda}\right) - \eta^{\mu\nu} h_\sigma{}^{\sigma,\lambda}{}_{,\lambda} + \eta^{\mu\nu} h^{\lambda\sigma}{}_{,\lambda\sigma} = -\lambda T^{\mu\nu}$$
  nell'approssimazione lineare
- L'equazione è del secondo ordine differenziale, lineare nelle derivate seconde.

Secondo il principio di equivalenza di Einstain è sempre possibile scegliere in qualsiasi punto dello spazio tempo un sistema di riferimento che annulla gli effetti della gravità.
Questo particolare sistema di riferimento (sistema in caduta libera) è caratterizzato da una metrica per cui $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu,\alpha} = 0$. Queste particolari coordinate sono dette coordinate localmente geodetiche e valgono in tale sistema di coordinate le equazioni del moto di una particella libera annulladosi la grandezza $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = 0$.
Non si annullano le sue derivate e il tensore di Riemann che indichiamo con l'apice per ricordare il particolare riferimento utilizzato vale

$R'^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\nu}$
mentre il tensore di Ricci
$R'_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[g_{\mu\nu}{}^{,\lambda}{}_{,\lambda} - g_{\mu\lambda}{}^{,\lambda}{}_{,\nu} - g_{\nu\lambda}{}^{,\lambda}{}_{,\mu}\right]$
e lo scalare di curvatura
$R' = g_{\lambda\sigma}{}^{,\lambda\sigma} - g_{\sigma}{}^{\sigma,\lambda}{}_{,\lambda}$
In questo sistema di coordinate valgono le equazioni di campo
$R'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R' = -\lambda^2 T'_{\mu\nu}$
Tali equazioni coincidono con l'approssimazione lineare se si il tensore $h^{\mu\nu}$ con il tensore metrico $g^{\mu\nu}$ secondo la relazione $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \lambda\, h_{\mu\nu}$.
In un generico sistema di coordinate le equazioni assumono la forma
$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\lambda^2 T_{\mu\nu}$
ed esplicitando il valore della costante di accoppiamento
$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G T_{\mu\nu}$

Terminiamo questo paragrafo dimostrando che se le equazioni di campo sono invarianti per trasformazioni generali di coordinate le equazioni nell'approssimazione lineare sono invarianti per trasformazioni infinitesime di coordinate.
Una trasformazione infinitesima di coordinate può essere espressa nella forma
$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon\xi^{\mu}(x)$ con $\epsilon \to 0$.
$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \delta^{\mu}_{\alpha} + \epsilon\xi^{\mu}{}_{,\alpha}(x)$
ma
$g'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}g^{\alpha\beta}(x) = \left[\delta^{\mu}_{\alpha} + \epsilon\xi^{\mu}{}_{,\alpha}(x)\right]\left[\delta^{\nu}_{\beta} + \epsilon\xi^{\nu}{}_{,\beta}(x)\right]g^{\alpha\beta}(x)$
$g'^{\mu\nu}(x') \cong g^{\mu\nu}(x) + g^{\alpha\nu}(x)\epsilon\xi^{\mu}{}_{,\alpha}(x) + g^{\mu\beta}(x)\epsilon\xi^{\nu}{}_{,\beta}(x)$
sviluppando in serie di Taylor
$g'^{\mu\nu}(x'(x)) \cong g'^{\mu\nu}(x) + g'^{\mu\nu}{}_{,\alpha}(x)\epsilon\xi^{\alpha}(x) \cong g'^{\mu\nu}(x) + g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}(x)\epsilon\xi^{\alpha}(x)$
sostituendo nell'equazione precedente
$g'^{\mu\nu}(x) = g^{\mu\nu}(x) - g^{\mu\nu}{}_{,\alpha}(x)\epsilon\xi^{\alpha}(x) + g^{\alpha\nu}(x)\epsilon\xi^{\mu}{}_{,\alpha}(x) + g^{\mu\beta}(x)\epsilon\xi^{\nu}{}_{,\beta}(x)$
Se $\lambda h^{\mu\nu}$ è piccolo la relazione tra la metrica inversa e $h^{\mu\nu}$ risulta
$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} - \lambda h^{\mu\nu}(x)$
(questa relazione può essere verificata moltiplicando ciascun termine per l'usuale relazione $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \lambda\, h_{\mu\nu}$, tranne perun termine trascurabile di ordine λ^2, il risultato è un'identità).
Sostituendo tale equazione, a meno di termini trascurabili di ordine $\epsilon\lambda$, otteniamo la relazione
$-\lambda h'^{\mu\nu}(x) = -\lambda h^{\mu\nu}(x) + \epsilon\xi^{\mu,\nu}(x) + \epsilon\xi^{\nu,\mu}(x)$
Questa equazione è coerente con l'invarianza di Gauge
$h'^{\mu\nu}(x) = h^{\mu\nu}(x) + \Lambda^{\mu,\nu}(x) + \Lambda^{\nu,\mu}(x)$
per l'equazione lineare della teoria di campo identificando le grandezze
$\epsilon\xi^{\mu}(x) = -\lambda\Lambda^{\mu}(x)$.