Invarianza relativistica equazioni di Dirac

Invarianza relativistica equazioni di Dirac

Il gruppo di Lorentz è l'insieme delle trasformazioni su un quadrivettore $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

$x^\mu = (t, \vec{x})$

che lasciano invariato l'intervallo

$$ds^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu = x^\mu x_\mu$$

dove $g_{\mu\nu} = \begin{cases} \delta_{\mu\nu} & \mu = 0 \\ -\delta_{\mu\nu} & \mu = 1-3 \end{cases}$ $\quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Le coordinate con gli indici alti vengono chiamate "controvarianti" quelle con gli indici bassi "covarianti".

Un vettore controvariante si trasforma secondo la relazione $V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu$

Poché

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

mentre un vettore covariante secondo la relazione

$$V'_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu{}^\nu V_\nu$$

Considero l'invarianza dell'intervallo

$$V'^\nu g_{\nu\mu} V'^\mu = V^\nu V_\nu = V^\nu g_{\nu\mu} V^\mu$$

$$\Lambda^\nu{}_\mu V^\mu g_{\nu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\rho V^\rho = V^\nu g_{\nu\mu} V^\mu$$

$$V^\mu (\Lambda^t)_\mu{}^\nu g_{\nu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\rho V^\rho = V^\nu g_{\nu\mu} V^\mu \qquad (*)$$

$$V^\mu \left[\Lambda^t g \Lambda\right]_{\mu\rho} V^\rho = V^\nu g_{\nu\mu} V^\mu$$

Da cui

$$\Lambda^t g \Lambda = g$$

$$\Lambda^t g = g \Lambda^{-1}$$

$$g^{-1} \Lambda^t g = \Lambda^{-1}$$

Tornando alla (*)

$$V^{\mu}(\Lambda^t)_{\mu}{}^{\nu}\, g_{\nu\alpha} = V'_{\alpha}$$

$$V_{\mu}\, g^{\mu\beta}\, (\Lambda^t)_{\beta}{}^{\nu}\, g_{\nu\alpha} = V'_{\alpha}$$

ma $g^{\mu\beta} = (g^{-1})_{\mu\beta}$ infatti

$$\begin{cases} g^{\alpha\beta} X_{\beta} = X^{\alpha} \\ g_{\alpha\beta} X^{\beta} = X_{\alpha} \end{cases} \qquad X^{\alpha} X_{\alpha} = g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} X_{\beta} X^{\beta} = X_{\beta} X^{\beta}$$

$$V'_{\alpha} = \left[g^{-1} \Lambda^t g \right]_{\mu\alpha} V_{\mu} = \left[\Lambda^{-1} \right]_{\mu\alpha} V_{\mu}$$

$$V'_{\alpha} = \left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \right) V_{\mu} = \tilde{\Lambda}_{\alpha}{}^{\mu}\, V_{\mu}$$

Considero ora una trasformazione infinitesima di Lorentz

$$\Lambda = (1+\epsilon) \qquad \Lambda^{-1} = (1-\epsilon)$$

$$g^{-1}\Lambda^{t} g = \Lambda^{-1}$$

$$g^{-1}(1+\epsilon^{t})g = (1-\epsilon)$$

$$1 + g^{-1}\epsilon^{t} g = 1-\epsilon$$

$$\epsilon^{t} = -\epsilon$$

Da cui si ricava che per trasformazioni infinitesime di Lorentz vale

$$\Lambda_{inf} = (1+\epsilon)$$

con ϵ = matrice emisimmetrica

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\epsilon}{n}\right)^{n} = \exp(\epsilon)$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & 0 & -r_3 & r_2 \\ -b_2 & r_3 & 0 & -r_1 \\ -b_3 & -r_2 & r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{\theta} \wedge \vec{x} - \vec{b}\, x^0$$

$$\Lambda = 1 + \epsilon = 1 + i \sum_{i=1}^{3} \theta_i \left[J_i \right] + b_i \left[K_i \right]$$

Le matrici J_i e K_i 4×4 formano una

base di Lie per il gruppo di Lorentz.

Vediamo ora come si trasforma uno spinore per Trasformate di Lorenz.

Considero l'equazione di Dirac

$$\left(i\hat{\partial}_\mu - m\right)\psi = 0 \qquad \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$$

$$\left(i\hat{\partial}_\mu - m\right)S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') = 0$$

$$\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \gamma^\mu \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu}$$

$$\left(i\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right)\psi'(x') = 0$$

moltiplicando a sinistra per $S(\Lambda)$

$$\left(i S(\Lambda)\gamma^\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - m\right)\psi'(x') = 0$$

Da cui si ricava

$$S(\Lambda)\gamma^{\mu}S^{-1}(\Lambda)\Lambda^{\nu}{}_{\mu}=\gamma^{\nu}$$

oppure moltiplicando a sinistra per $S^{-1}(\Lambda)$ e a destra per $S(\Lambda)$

$$\gamma^{\mu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu}=S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\nu}S(\Lambda) \qquad (*)$$

ma per trasformazioni elementari di Lorentz

$$\Lambda^{\nu}{}_{\mu}=g^{\nu}{}_{\mu}-\omega^{\nu}{}_{\mu}$$

dove ω^{ν}_{μ} è una matrice emisimmetrica.

Considero

$$S(\Lambda)=I-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$$

sostituendo nella (*) si ricava $\sigma_{\mu\nu}=-\sigma_{\nu\mu}$

$$\sigma_{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}\right]$$

(8)

Infine

$$S'(\Lambda) = I - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\,\omega^{\mu\nu}$$

$$S'(\Lambda) = \lim_{N\to\infty}\left(I - \frac{1}{4}\sigma_{\mu\nu}\frac{\omega}{N}^{\mu\nu}\right)^N = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}}$$

$$S(\Lambda) = e^{\frac{1}{8}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]\,\omega^{\mu\nu}}$$