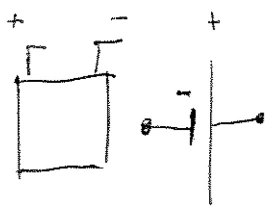
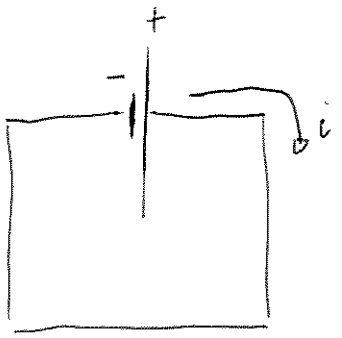
Circuiti elettrici

Generatore di corrente continua

Componente elettrico capace di creare una differenza di tensione ΔV ai due capi di un circuito elettrico e di conservarla indefinitamente.



Se ai capi del generatore viene collegato un circuito elettrico si avrà una circolazione di cariche elettriche che per convenzione vanno dal potenziale maggiore al potenziale minore.



$I = \dfrac{dQ}{dt}$ è detta corrente elettrica espressa in ampere A è la quantità di carica Q che attraversa una sezione del conduttore per unità di tempo.

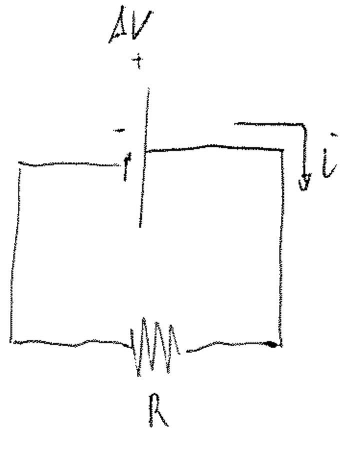
La legge di Ohm

In un conduttore posto ad una differenza di potenziale ΔV tra due punti circola una corrente costante.

$\Delta V = R I$

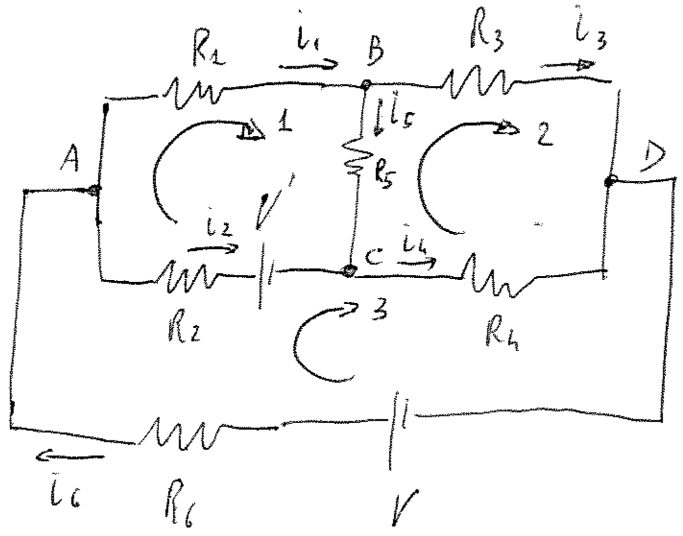
$R =$ resistenza del conduttore

$R = \rho \frac{l}{S}$ $\begin{cases} l = \text{lunghezza conduttore} \\ S = \text{sezione} \\ \rho = \text{resistività} \end{cases}$



La potenza $W = VI = RI^2$ è la potenza dissipata dal circuito in calore per effetto Joule

Legge di Kirchhoff



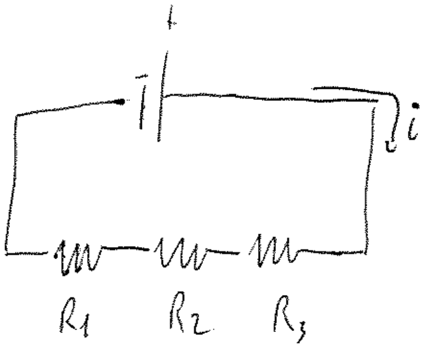
1) La somma delle correnti in ogni nodo della rete è nulla

2) La caduta di potenziale per ogni maglia chiusa è nulla.

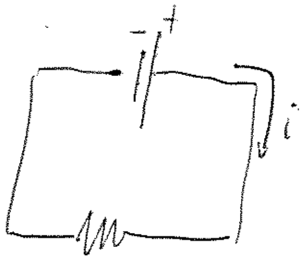
$$
\begin{cases}
\text{Punto A: } & -i_6 + i_1 + i_2 = 0 \\
\text{PUNTO B: } & -i_1 + i_3 + i_5 = 0 \\
\text{PUNTO C: } & -i_2 - i_5 + i_4 = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\text{MAGLIA 1: } & V' = -R_2 i_2 + R_1 i_1 + R_5 i_5 \\
\text{MAGLIA 2: } & R_3 i_3 - R_4 i_4 - R_5 i_5 = 0 \\
\text{MAGLIA 3: } & R_6 i_6 + R_2 i_2 + R_4 I_4 - V + V' = 0
\end{cases}
$$

Circuiti equivalenti con resistenze in serie e in parallelo

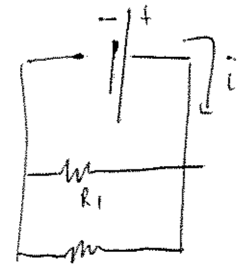


$\simeq$

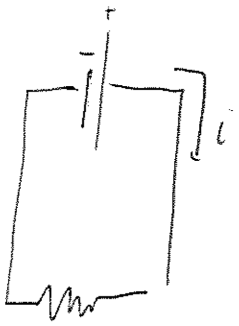


$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Resistenze in serie



$\simeq$

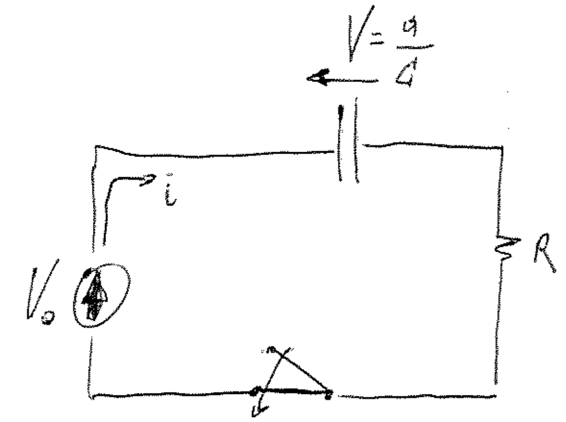


$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Carica e scarica di un condensatore

Si definisce capacità di un condensatore

$$C = \frac{Q}{V}$$



$$V_0 = Ri + \frac{q}{C}$$

derivando

$$V_0 = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$V_0 - \frac{q}{C} = R\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{V_0 C - q}{C} = R\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{dq}{V_0 C - q} = \frac{1}{RC}\,dt$$

$$\frac{dq}{q - V_0 C} = -\frac{1}{RC}\,dt$$

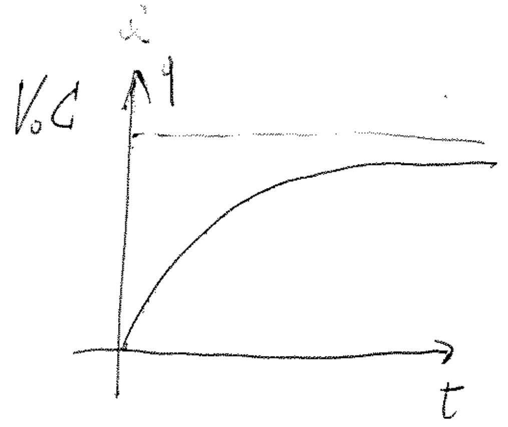
$$\ln(q - V_0 C) - \ln(-V_0 C) = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln\left(\frac{q - V_0 C}{-V_0 C}\right) = -\frac{t}{RC}$$

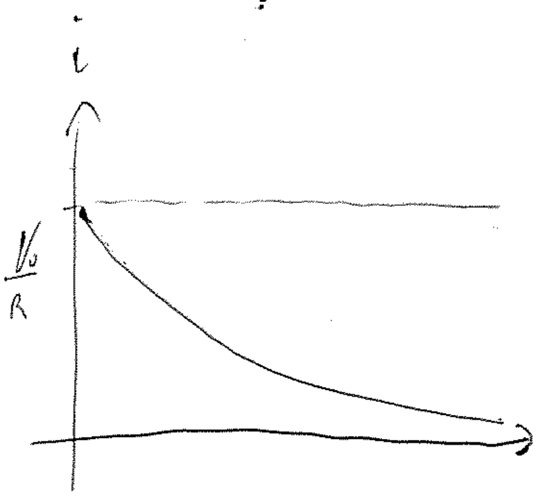
$$q - V_0 C = -V_0 C \, e^{-t/RC}$$

$$q = V_0 C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$



carica del condensatore



la carica del condensatore bilancia il potenziale V_0 e la corrente si annulla.

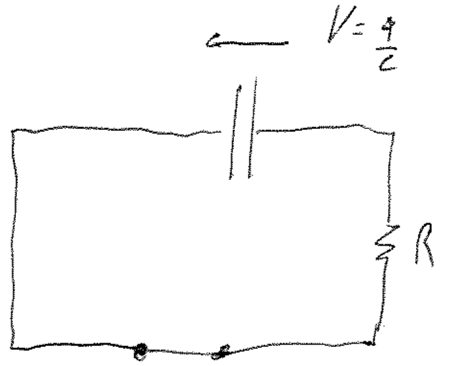
Potenza del circuito

$$W = V_0 i = \frac{V_0^2}{R} e^{-t/RC}$$

Energia per la carica del condensatore

$$E = V i\, dt = \frac{q}{C} i\, dt = \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C}\frac{q^2}{2}\Big|_0^Q = \frac{Q^2}{2C}$$

Scarica di un condensatore

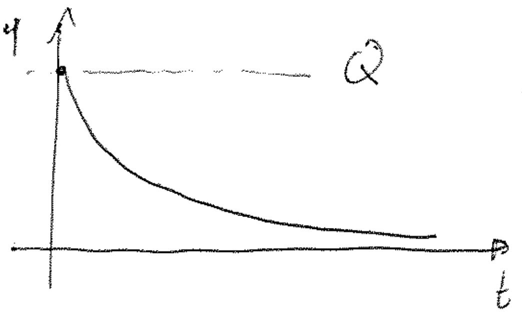


$$\frac{q}{C} = -Ri = -R\frac{dq}{dt}$$

$$\int^t -\frac{1}{RC}\, dt = \int_Q^q \frac{1}{q}\, dq$$

$$-\frac{1}{RC} t = \ln q - \ln Q = \ln\frac{q}{Q}$$

$$e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{q}{Q} \Rightarrow q = Q\, e^{-\frac{1}{RC}t}$$

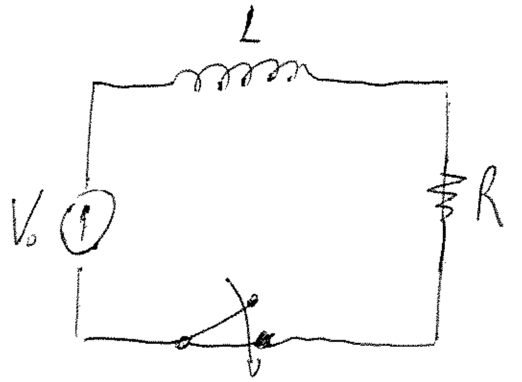


Carica e scarica di un'induttanza

Un circuito elettrico genera una corrente elettrica i che crea un campo proporzionale B. Le linee di campo che si chiudono sul circuito stesso creano un flusso $\phi(B) = L i$ dove L è detto coefficiente di auto-induttanza.

La derivata del flusso $\frac{d}{dt}\phi(B)$ genera una f.e.m. indotta.

$$V_L = -\frac{d}{dt} L i = -L \frac{di}{dt}$$



$$V_0 - L\frac{di}{dt} = R i$$

$$\frac{V_0}{R} - \frac{L}{R}\frac{di}{dt} = i$$

$$i - \frac{V_0}{R} = -\frac{L}{R}\frac{di}{dt}$$

$$-\frac{R}{L}\left(i - \frac{V_0}{R}\right) = \frac{di}{dt}$$

$$\int_0^t -\frac{R}{L}\,dt = \int_0^i \frac{di}{\left(i - \frac{V_0}{R}\right)}$$

$$-\frac{R}{L}t = \ln\left(i - \frac{V_0}{R}\right) - \ln\left(-\frac{V_0}{R}\right)$$

$$\ln e^{-\frac{R}{L}t} = \ln\left(i - \frac{V_0}{R}\right) - \ln\left(-\frac{V_0}{R}\right)$$

$$\ln e^{-\frac{R}{L}t} + \ln\left(-\frac{V_0}{R}\right) = \ln\left(i - \frac{V_0}{R}\right)$$

$$-\frac{V_0}{R}\, e^{-\frac{R}{L}t} = \left(i - \frac{V_0}{R}\right)$$

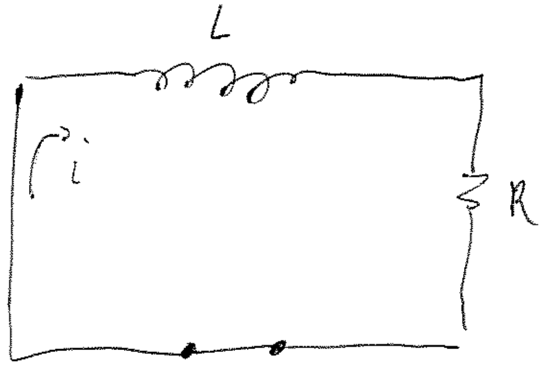
$$i = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Inizialmente la f.e.i ostacola il potenziale V_0 e non circola corrente poi a regime l'effetto dell'induttanza sulla corrente i è nulla e l'induttanza si comporta come un corto circuito.

Potenza del circuito

$$W = V_0 i = \frac{V_0^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$\boxed{\text{Scarica dell'induttanza}}$



$$Ri = -L\frac{di}{dt}$$

$$\int_0^t -\frac{R}{L}\,dt = \int_{i_0 = \frac{V_0}{R}}^{i} \frac{di}{i}$$

$$-\frac{R}{L}t = \ln i - \ln\frac{V_0}{R} = \ln\frac{iR}{V_0}$$

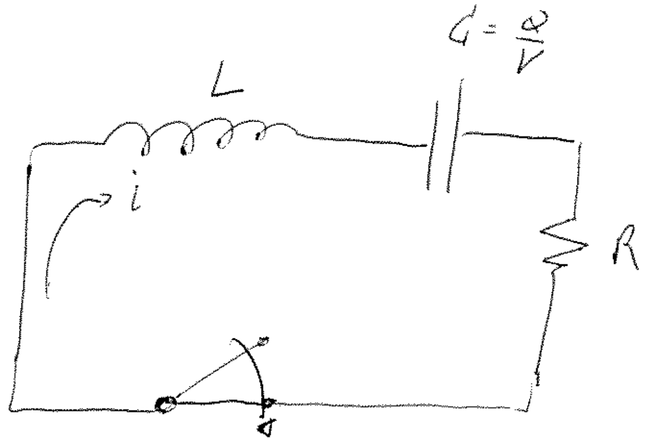
Energia per caricare l'induttanze!

$$E = V_L\, i\, dt = L \frac{di}{dt} \frac{dq}{\cancel{dt}} \cancel{dt}$$

$$dq = i\, dt$$

$$E = L \frac{di}{\cancel{dt}}\, i\, \cancel{dt} = L\, i\, di = \frac{1}{2} L i^2$$

Scarica di un circuito LC



$$\begin{cases} V_L = -L \dfrac{di}{dt} \\ V_C = \dfrac{q}{C} \end{cases}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri = 0$$

derivando in t

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{dq}{dt}\frac{1}{C} + R\frac{di}{dt} = 0$$

$$\ddot{I} + \frac{R}{L}\dot{I} + \frac{I}{CL} = 0$$

funzione caratteristica $\quad q = e^{-\lambda t}$

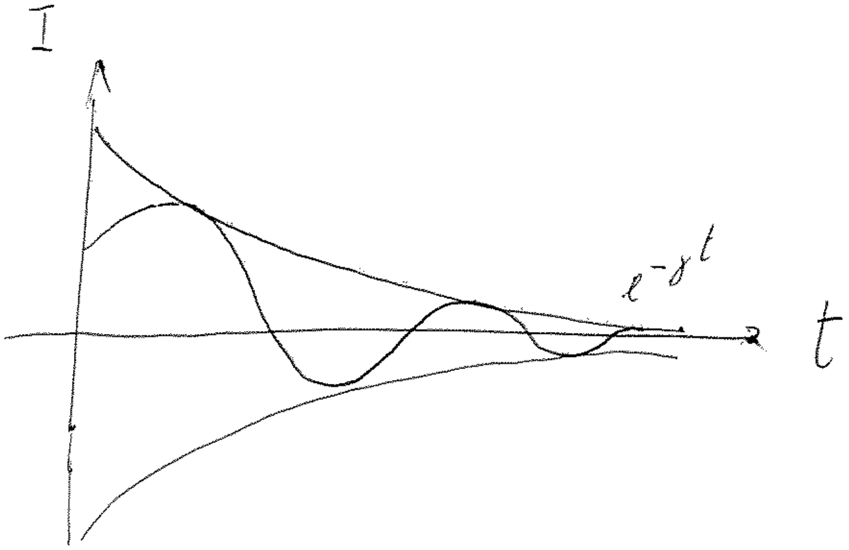
$$\lambda^2 - \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL} = 0$$

caso $R^2 < 4\frac{L}{C}$

$$I = I_0 e^{-\gamma t} \, \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$



caso $R^2 > 4\frac{L}{C}$

La corrente decresce esponenzialmente senza alcuna oscillazione.

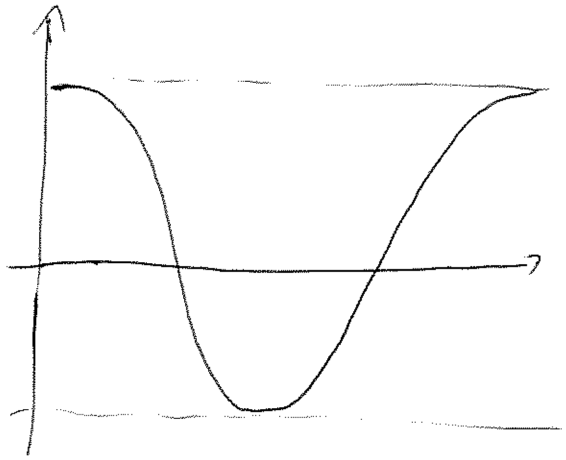
$$\lambda = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{LC} 4L^2 = \frac{4L}{C}$$

caso limite $R = 0$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad I = I_{max} \operatorname{sen}(\omega_0 t + \alpha)$$

I

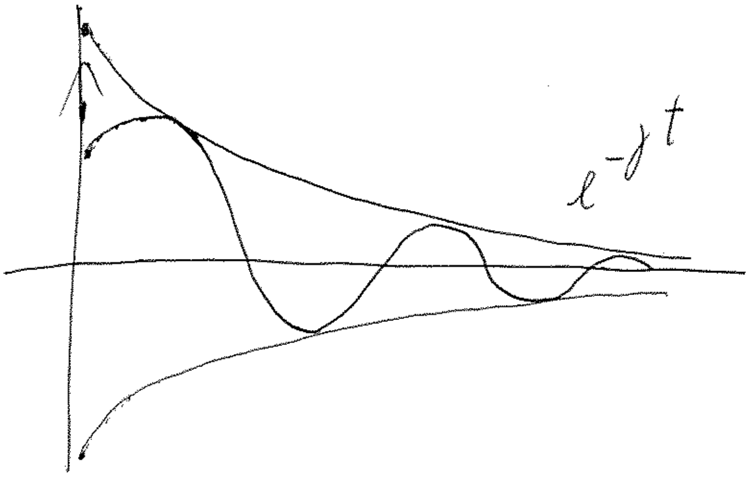


Caso $R^2 < 4\frac{L}{C}$

$$I = I_0 e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$\gamma = \frac{R}{2L}$$



Caso $R^2 > 4\frac{L}{C}$

La corrente decresce esponenzialmente senza alcuna oscillazione.