Equazioni del campo elettromagnetico

Equazioni del campo elettromagnetico

Finora abbiamo visto il moto di una carica in un campo elettromagnetico e la lagrangiana da cui derivano le equazioni.

Abbiamo visto l'azione come somma di due termini:

$$S = S_f + S_{fc}$$

dove $S_f = -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt$ è l'azione della particella libera e

$S_{fc} = -\frac{e}{c} A_i v^i dt$ è il termine di interazione particella campo.

Rendere stazionaria l'azione S con $\delta S = 0$ significa scrivere le equazioni di Lagrange che descrivono il moto della particella in funzione del campo vettoriale e 4 componenti A_i -

Ora occorre un nuovo termine nell'azione che permetta di calcolare le equazioni del campo A_i in funzione del moto di una carica.

Tale termine è indicato con S_c e vale

$$S_c = \frac{1}{16\pi} \int F_{ik} F^{ik} \, dV dt$$

con $F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$

$$S_{fc} = -\frac{\rho}{c} A_i v^i \, dV dt = -\frac{1}{c} A_i J^i \, dV dt$$

Si dimostra che se $S = \int \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) dx_i \quad i = 0 - 3$

dove $\phi(x, y, z, t)$ è un campo [illegible]

le equazioni di Lagrange diventano

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,k}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

inoltre è possibile dimostrare che si conserva il tensore energia impulso per il campo così definito

$$T_\mu^{\ \nu} = \phi_{,\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} - \delta_\mu^\nu L$$ e vale

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} T_\mu^{\ \nu} = 0$$

Cerchiamo di ricavare le equazioni del campo $\vec{A}$ in funzione della corrente $\vec{J}$.

$$S = \frac{1}{16\pi} \int (A_{k,i} - A_{i,k})(A^{k,i} - A^{i,k})\, dV dt + \frac{1}{c} \int A_i J^i\, dV dt$$

con le equazioni

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{i,k}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = 0$$

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \left(A_{k,i} A^{k,i} - A_{k,i} A^{i,k} - A_{i,k} A^{k,i} + A_{i,k} A^{i,k} \right) dV dt + \int A_i J^i dV dt$$

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \left(A_{i,k} A^{i,k} - A_{i,k} A^{k,i} - A_{i,k} A^{k,i} + A_{i,k} A^{k,i} \right) dV dt + \int A_i J^i dV dt$$

poiché sia l'indice i che K va sommato da $0 - 3$ è possibile invertire gli indici senza cambiare il risultato.

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \left(2 A_{i,k} A^{i,k} - 2 A_{i,k} A^{k,i} \right) dV dt + \int A_i J^i dV dt$$

considerando il tensore metrico per l'innalzamento dell'indice

$$A^{i,k} = g^{i\alpha} g^{k\beta} A_{\alpha,\beta} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{8\pi} \int \left(A_{i,k}\, g^{i\alpha} g^{k\beta} A_{\alpha,\beta} - g^{i\alpha} g^{k\beta} A_{i,k} A_{\beta,\alpha} \right) dV dt + \int A_i J_i dV dt$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{i,k}} = \frac{1}{8\pi} g^{i\alpha} g^{k\beta} \left(2 A_{\alpha,\beta} - 2 A_{\beta,\alpha} \right) dV dt + \int A_i J^i dV dt$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{i,k}} = \frac{1}{4\pi}\left(A^{i,k} - A^{k,i}\right) = -\frac{1}{4\pi} F^{ik}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = \frac{1}{c} J^i$$

L'azione è stazionaria se

$$\frac{\partial}{\partial x^k} F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} J^i$$

$$-\frac{4\pi}{c} J^i = \partial_k F^{ik} = \partial_k\left(\partial^i A^k - \partial^k A^i\right)$$

$$-\frac{4\pi}{c} J^i = \partial_k \partial^i A^k - \partial_k \partial^k A^i$$

$$-\frac{4\pi}{c} J^i = \partial^i \partial_k A^k - \partial_k \partial^k A^i$$

Scegliendo un campo A a divergenza nulla

$$\partial_k A^k = 0$$

$$\partial_k \partial^k A^i = \frac{4\pi}{c} J^i$$ ritroviamo le

equazioni del campo elettromagnetico.

Ricordiamo il valore della quadricorrente J^i

$$J^i = \rho_0 v^i = \rho_0 (c, v^1, v^2, v^3)$$ (per osservatore solidale alle particelle)

Per la conservazione della carica $\rho_0 \, dV =$ costante avendo indicato con ρ_0 la densità di carica misurata da un osservatore solidale alle particelle che si muove con il volume dV.

Per un osservatore fisso il volume dV si contrae di un fattore γ e quindi la densità aumenta di un fattore γ.

$$J^i = \rho_0 \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \frac{v^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \frac{v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \frac{v^3}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$ (per osservatore fisso)

Posso considerare anche ρ invece di ρ_0 cioè ... la densità presente in un volume fisso Ω senza seguire il moto delle particelle.

in questo caso

$$J^i = \rho \left(c, v^1, v^2, v^3 \right)$$

per la conservazione della carica

$$\underbrace{\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \rho \, d\Omega}_{\substack{\text{variazione carica} \\ \text{nel volume}}} + \underbrace{\int_S \rho v^i n_i \, dS}_{\substack{\text{flusso carica} \\ \text{attraverso volume}}} = 0$$

Applicando il teorema della divergenza

$$\frac{\partial}{c\,\partial t}(\rho c) + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho v^i) = 0$$

la conservazione della carica implica che la quadridivergenza di J^i si annulla.

Infine riscriviamo le equazioni di campo

$$\partial_k \partial^k A^i = \frac{4\pi}{c} J^i \qquad J^i = \rho(c, v^1, v^2, v^3)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} A^0(x,y,z,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} A^0(x,y,z,t) = 4\pi \rho(x,y,z,t) \\ \dfrac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} A^i(x,y,z,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} A^i(x,y,z,t) = 4\pi \rho(x,y,z,t) v^i \end{cases}$$

La scelta di $\frac{1}{16}\pi$ come moltiplicatore dell'azione del campo elettromagnetico è arbitraria.

Questa scelta (scelta di Gauss) produce un campo elettrico

$\vec{F} = Q_1 \vec{E} = \dfrac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}$ mentre la scelta di un fattore moltiplicativo $\frac{1}{4}$ eliminerebbe il 4π dall'equazione del campo producendo un campo elettrico $\vec{F} = Q_1' \vec{E}' = \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{Q_1' Q_2'}{r^2} \hat{r}$. Naturalmente le grandezze derivate cambiano nelle due scelte fatte ed è possibile creare una tabella di conversione per passare dall'una all'altra. (Gauss $\rightleftarrows$ Heaviside).

Di seguito consideriamo le unità di misura derivate dalla scelta di un fattore moltiplicativo $\frac{1}{4}$ dell'azione del campo (Scelta di Heaviside).

Ciò comporta una semplificazione delle equazioni di campo che diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} A^0(x,y,z,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} A^0(x,y,z,t) = \rho(x,y,z,t) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} A^i(x,y,z,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} A^i(x,y,z,t) = \rho(x,y,z,t)\, v^i \end{cases}$$

e una forza tra due cariche elettriche date dalla legge di Coulomb $\vec{F} = \dfrac{Q_1 Q_2 \, \hat{r}}{4\pi r^2}$ in cui compare il fattore $\dfrac{1}{4\pi}$.