Simulazione MIUR

(Aprile 2019)

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

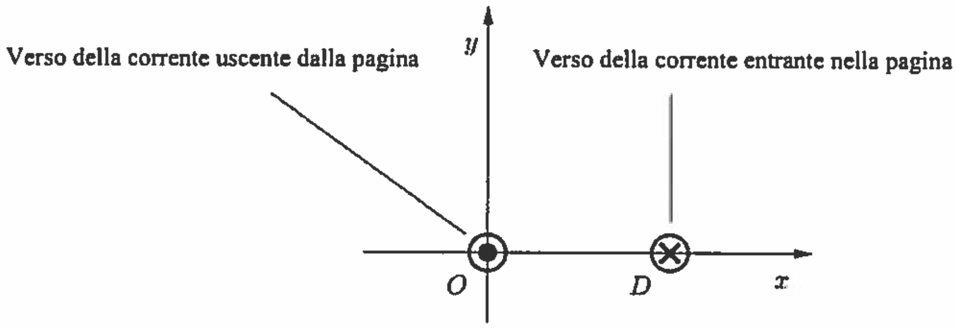
(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Tema di: MATEMATICA e FISICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Due fili rettilinei paralleli vincolati a rimanere nella loro posizione, distanti 1 m l'uno dall'altro e di lunghezza indefinita, sono percorsi da correnti costanti di pari intensità ma verso opposto; si indichi con i l'intensità di corrente, espressa in ampere (A). Si consideri un piano perpendicolare ai due fili sul quale è fissato un sistema di riferimento ortogonale Oxy, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), in modo che i due fili passino uno per l'origine O e l'altro per il punto $D(1,0)$, come mostrato in figura.



1. Verificare che l'intensità del campo magnetico $\vec{B}$, espresso in tesla (T), in un punto $P(x,0)$, con $0 < x < 1$, è data dalla funzione $B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, dove K è una costante positiva della quale si richiede l'unità di misura. Stabilire quali sono la direzione e il verso del vettore $\vec{B}$ al variare di x nell'intervallo $(0,1)$. Per quale valore di x l'intensità di $\vec{B}$ è minima?

2. Nella zona di spazio sede del campo $\vec{B}$, una carica puntiforme q transita, ad un certo istante, per il punto $C\left(\frac{1}{2},0\right)$, con velocità di modulo v_0 nella direzione della retta di equazione $x = \frac{1}{2}$. Descriverne il moto in presenza del solo campo magnetico generato dalle due correnti, giustificando le conclusioni.

   Stabilire intensità, direzione e verso del campo magnetico $\vec{B}$ nei punti dell'asse x esterni al segmento OD. Esistono punti sull'asse x dove il campo magnetico $\vec{B}$ è nullo?

3. Indipendentemente da ogni riferimento alla fisica, studiare la funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ dimostrando, in particolare, che il grafico di tale funzione non possiede punti di flesso. Scrivere l'equazione della retta r tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\frac{1}{3}$ e determinare le coordinate dell'ulteriore punto d'intersezione tra r e il grafico di f.

4. Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{1/4}^{3/4} f(x)\,dx$$

ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto. Esprimere, per $t \geq 2$, l'integrale

$$g(t) = \int_{2}^{t} |f(x)|\,dx$$

e calcolare $\lim_{t\to+\infty} g(t)$. Qual è il significato di tale limite?

PROBLEMA 2

Assegnato un numero reale positivo k, considerare le funzioni f e g così definite:

$$f(x) = \sqrt{x}\,(k - x) \qquad\qquad g(x) = x^2(x - k).$$

1. Provare che, qualunque sia $k > 0$, nell'intervallo $[0, k]$ il grafico di f ha un unico punto di massimo $F(x_F\,, y_F)$ ed il grafico di g ha un unico punto di minimo $G(x_G\,, y_G)$. Verificare che si ha $x_G = 2x_F$ e $y_G = -(y_F)^2$.

2. Verificare che, qualunque sia $k > 0$, i grafici delle due funzioni sono ortogonali nell'origine, vale a dire che le rispettive rette tangenti in tale punto sono tra loro ortogonali. Determinare per quale valore positivo di k i due grafici si intersecano ortogonalmente anche nel loro ulteriore punto comune.

D'ora in avanti, assumere $k = 1$. In un riferimento cartesiano, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), l'unione degli archi di curva di equazioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$, per $x \in [0, 1]$, rappresenta il profilo di una spira metallica. Sia S la regione piana delimitata da tale spira.

3. Supponendo che nella regione S sia presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano di S, avente intensità $B_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ T, verificare che il valore assoluto del flusso di tale campo attraverso S è pari a $7{,}0 \cdot 10^{-3}$ Wb.

4. Supporre che la spira abbia resistenza elettrica R pari a 70 Ω e che il campo magnetico, rimanendo perpendicolare al piano di S, a partire dall'istante $t_0 = 0$ s, inizi a variare secondo la legge:

$$B(t) = B_0\, e^{-\omega t}\cos(\omega t), \text{ con } \omega = \pi \text{ rad/s}$$

e $t \geq 0$ espresso in secondi (s). Esprimere l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione di t, specificando in quale istante per la prima volta la corrente cambia verso.
Qual è il valore massimo di tale corrente per $t \geq 0$? Spiegare quale relazione esiste tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

QUESITI

1. Assegnato $k \in \mathbb{R}$, si consideri la funzione così definita: $g(x) = \frac{(k-1)x^3+kx^2-3}{x-1}$.
   - Come va scelto il valore di k affinché il grafico di g non abbia asintoti?
   - Come va scelto il valore di k affinché il grafico di g abbia un asintoto obliquo?

   Giustificare le risposte e rappresentare, nei due casi, i grafici delle funzioni ottenute.

2. Sia f una funzione pari e derivabile in $\mathbb{R}$, sia g una funzione dispari e derivabile in $\mathbb{R}$. Dimostrare che la funzione f' è dispari e che la funzione g' è pari. Fornire un esempio per la funzione f ed un esempio per la funzione g, verificando quanto sopra.

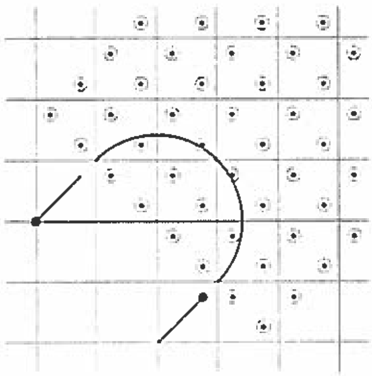
3. Si consideri la funzione $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ così definita:
$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\, dt$$
   Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1.

4. Nello spazio tridimensionale, sia r la retta passante per i punti $A(-2,\ 0,\ 1)$ e $B(0,\ 2,\ 1)$. Determinare le coordinate di un punto appartenente alla retta r che sia equidistante rispetto ai punti $C(5,\ 1, -2)$ e $D(1,\ 3,\ 4)$.

5. Emma fa questo gioco: lancia un dado con facce numerate da 1 a 6; se esce il numero 3 guadagna 3 punti, altrimenti perde 1 punto. Il punteggio iniziale è 0.
   - Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia ancora 0?
   - Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0?

6. Ai vertici di un quadrato $ABCD$, di lato 2 m, sono fissate quattro cariche elettriche. La carica in A è pari a 9 nC, la carica in B è pari a 2 nC, la carica in C è pari a 4 nC, la carica in D è pari a -3 nC. Supponendo che le cariche si trovino nel vuoto, determinare intensità, direzione e verso del campo elettrostatico generato dalle quattro cariche nel centro del quadrato.

7. Un protone, inizialmente in quiete, viene accelerato da una d.d.p. di 400 V ed entra, successivamente, in una regione che è sede di un campo magnetico uniforme e perpendicolare alla sua velocità.



La figura illustra un tratto semicircolare della traiettoria descritta dal protone (i quadretti hanno lato 1,00 m). Determinare l'intensità di $\vec{B}$.

8. Si vuole ottenere l'emissione di elettroni da lastre metalliche di materiali diversi su cui incide una radiazione di frequenza $7{,}80 \cdot 10^{14}$ Hz. Determinare, motivando la risposta, quale tra i materiali in elenco è l'unico adatto allo scopo.

Materiale	**Lavoro di estrazione**
Argento	4,8 eV
Cesio	1,8 eV
Platino	5,3 eV

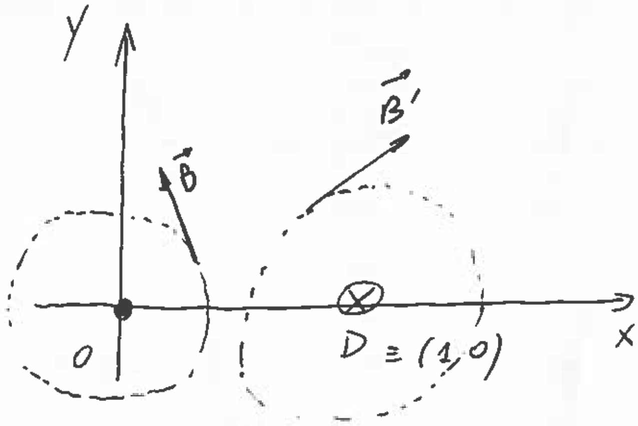
Individuato il materiale da utilizzare, determinare la velocità massima che può avere un elettrone al momento dell'emissione.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
costante di Planck	h	$6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J · s
costante dielettrica nel vuoto	ε_0	$8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m
massa dell'elettrone	m_e	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg
massa del protone	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Probleme N° 1

(Punto 1)



Ricordando le quarta legge di Maxwell

$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 i$ è possibile ricavare il

campo magnetico per un filo infinito percorso

da corrente elettrica

$B\, 2\pi r = \mu_0 i$ $\qquad B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$

Il verso del campo è tangente alla circonferenza

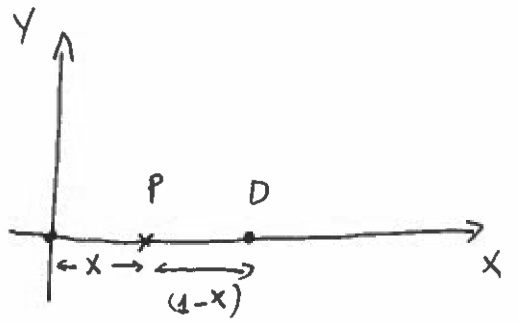
concentrica al filo e ortogonale ad esso.

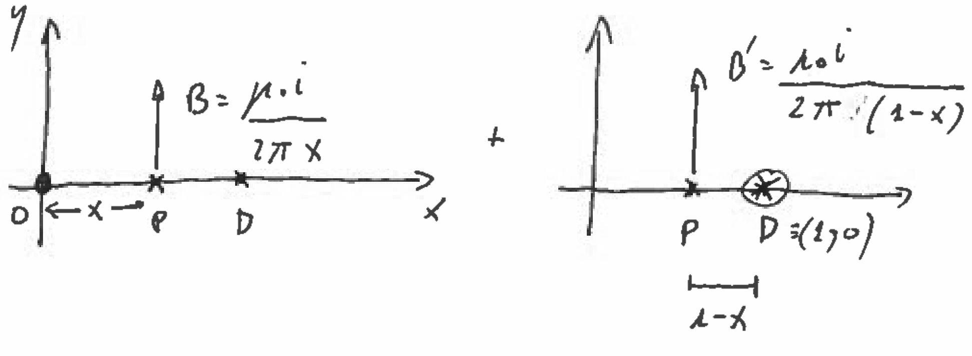
Il verso è quello della mano destra rispetto al

verso della corrente.

Se indico con B il campo generato dal filo in O e con B' il campo generato dal filo in D allora in un punto compreso tra O e D il campo totale vale

$$B_{t.t} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(1-x)} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(1-x)}\right) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$





L'unità di misura di K è $[K] = \frac{[\text{tesla}]}{[m]}$

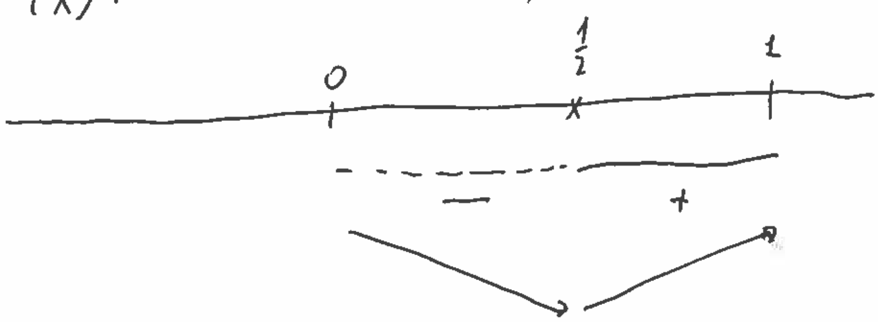
Il verso è quello dell'asse y ed il massimo è dato dal massimo della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

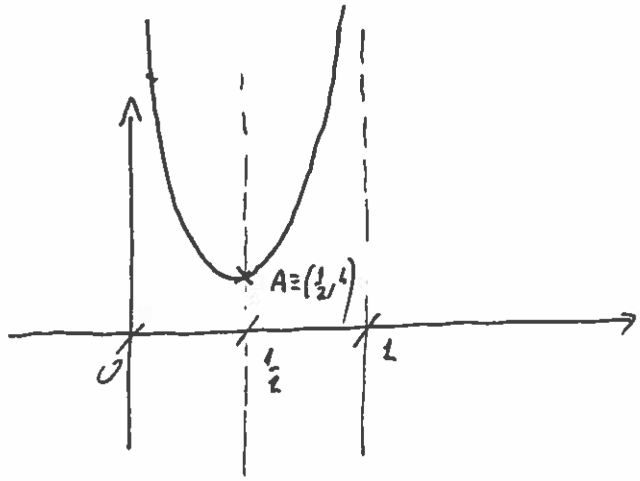
$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - (1-x)^2}{x^2(1-x)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2} + 2x}{x^2(1-x)^2} = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$$

$f'(x) > 0 \qquad x \in (0,1)$



$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2 = 4$

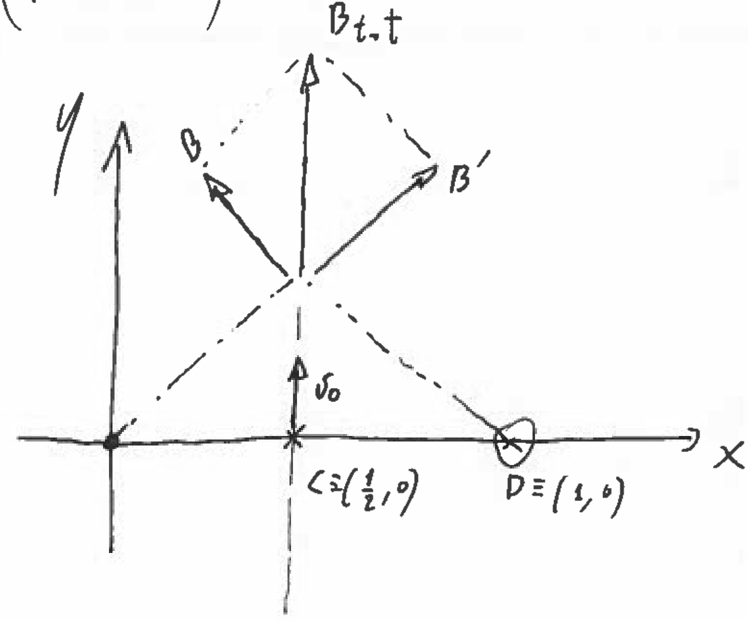


l'intensità del campo per $x \in (0,1)$ è minima per $x = \frac{1}{2}$

e vale

$$B_{t.t} = \frac{\mu i}{2\pi} 4 = \frac{2\mu i}{\pi}$$

(Punto 2)

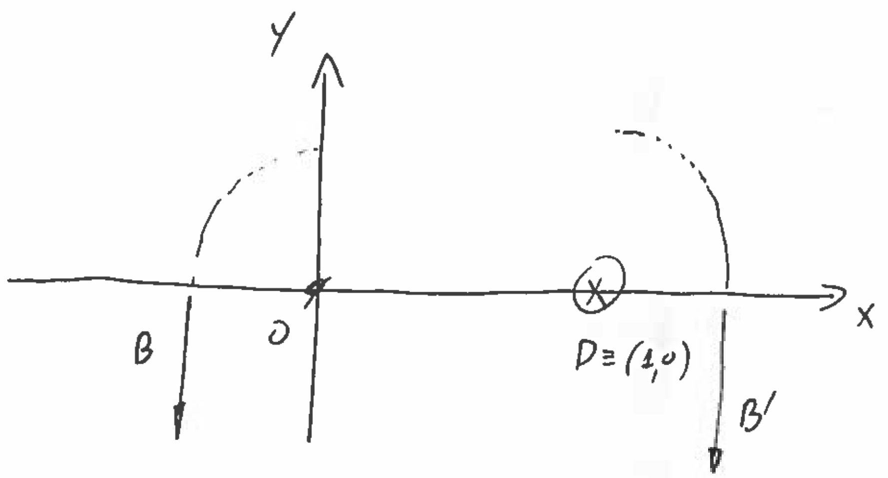


Il moto di una carica soggetta a campo magnetico è data dalla formula di Lorentz.

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Se la carica si muove lungo l'asse $x = \frac{1}{2}$ poiché il campo magnetico generato dai due fili percorsi da corrente elettrica è parallelo a quest'asse risulta

$\vec{v} \times \vec{B} = 0 \implies \vec{a} = 0$ il moto della carica è rettilinea uniforme con velocità v_0.



Per valori esterni all'intervallo $x \in (0,1)$ il

campo totale vale

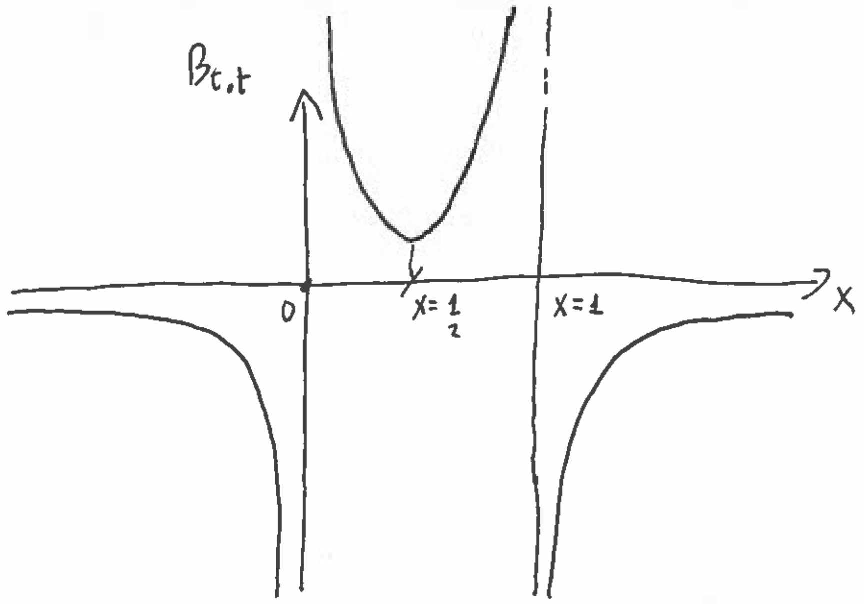
$$B_{tot} = B + B' = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(1-x)}\right) \quad \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

ed entrambi hanno la direzione dell'asse y

e verso contrario.

In nessun punto dell'asse x il campo si annulla

essendo la funzione $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{(1-x)}$ sempre $\neq 0$.



$$B_{min} = \left(x = \frac{1}{2}\right)$$

$$B_{min} = \frac{2\mu \cdot i}{\pi}$$

Andamento del campo $B_{t.t}$ sull'asse x.

La direzione è quella dell'~~asse~~ y con il verso dato dal segno della funzione.

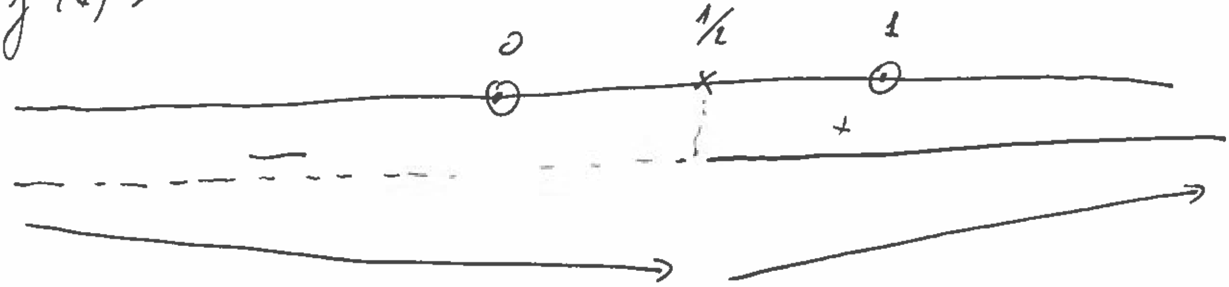
(Punto 3)

Studiare la funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$$

$f'(x) > 0$ $\qquad x > \frac{1}{2}$

$f'(x) > 0$

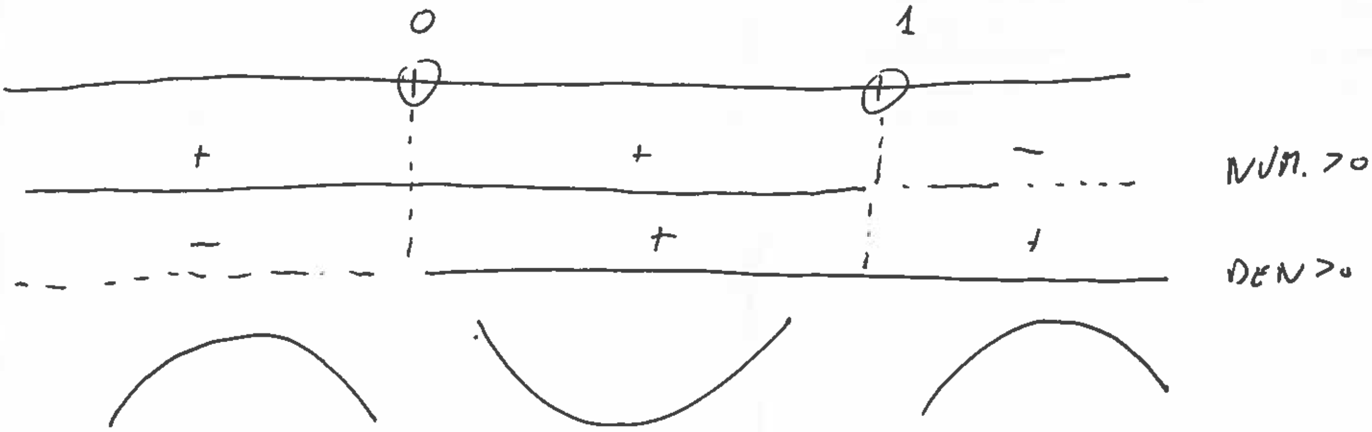


$$f''(x) = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4} + \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{2x^3(1-x) + 2(1-x)^4}{x^3(1-x)^4}$$

$$= \frac{2(1-x)\left(x^3 + (1-x)^3\right)}{x^3(1-x)^4} = \frac{2(1-x)\left(\cancel{x^3} + 1 - 3x + 3x^2 - \cancel{x^3}\right)}{x^3(1-x)^4}$$

$$= \frac{2(1-x)(3x^2 - 3x + 1)}{x^3(1-x)^4}$$

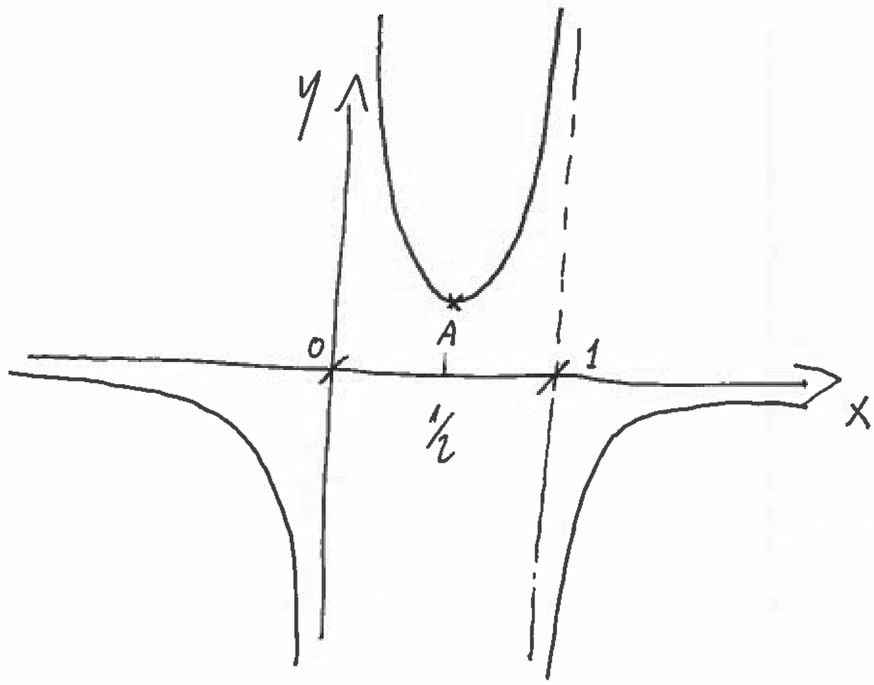
$f''(x) > 0 \qquad \dfrac{(1-x)}{x^3} > 0$



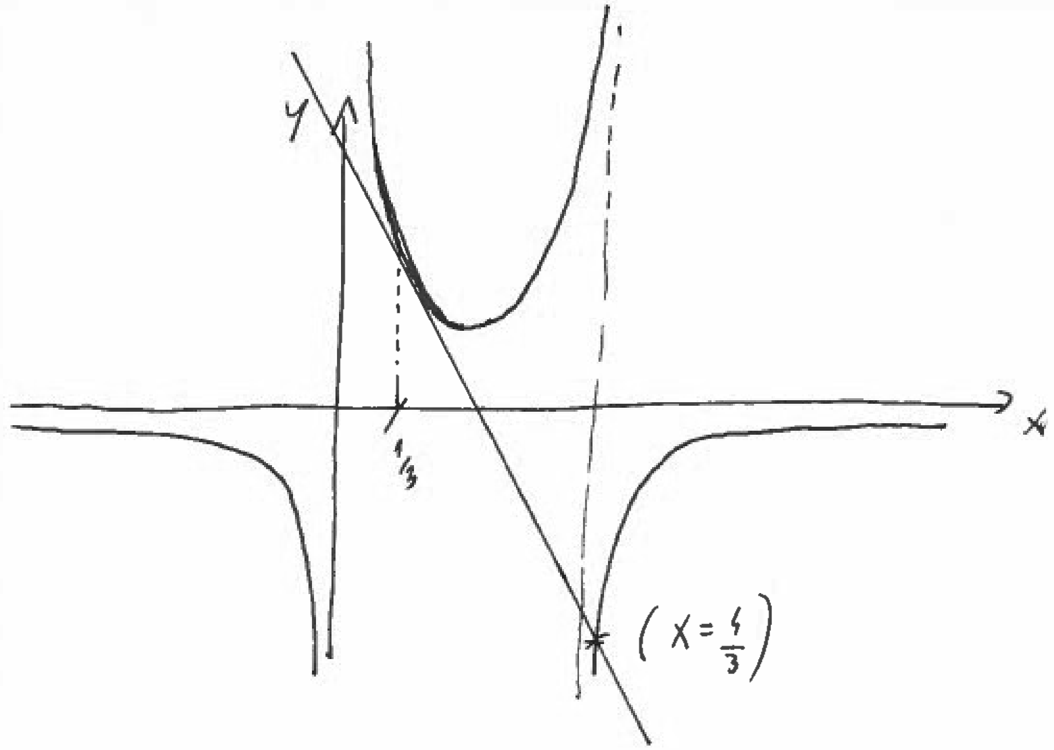
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$

$\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

$\begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{cases}$



$A \equiv \left(\frac{1}{2}, 4k\right)$ = minimo



$$y = f\left(\tfrac{1}{3}\right) + f'\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(x - \tfrac{1}{3}\right)$$

$$f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = K\left(3 + \frac{3}{2}\right) = K\,\frac{9}{2}$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}K \Rightarrow f'\left(\tfrac{1}{3}\right) = \frac{2\,\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^2}K = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{81}}K =$$

$$= -\frac{1}{\cancel{3}}\,\frac{\overset{27}{\cancel{81}}}{4}K = -\frac{27}{4}K$$

$$y = K\left[\frac{9}{2} - \frac{27}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)\right]$$

Calcolo il punto di intersezione tra le rette

$$y = K\left[\frac{9}{2} - \frac{27}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)\right]$$ e la funzione

$$f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$\frac{9}{2} - \frac{27}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$\frac{9}{2} - \frac{27x}{4} + \frac{9}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

$$18 - 27x + 9 = \frac{4}{x} + \frac{4}{1-x}$$

$$27 - 27x = \frac{4}{x} + \frac{4}{1-x}$$

$$27(1-x) = \frac{4}{x} + \frac{4}{1-x} = \frac{4(1-x) + 4x}{(1-x)x} = \frac{4}{(1-x)x}$$

$$27(1-x) = \frac{4}{(1-x)x}$$

$$27x(1-x)^2 = 4$$

$$27x(1+x^2-2x)=4$$

$$27x+27x^3-54x^2-4=0$$

$$27x^3-54x^2+27x-4=0$$

$$x=\frac{4}{3}$$

$$27\left(\frac{4}{3}\right)^3-54\left(\frac{4}{3}\right)^2+27\left(\frac{4}{3}\right)-4=0$$

$$4^3-6\cdot 4^2+9\cdot 4-4=0$$

$$64-96+36-4=0$$

(Punto 4)

Calcolare $\displaystyle\int_{1/4}^{3/4} f(x)\,dx$

$$f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$\int_{1/4}^{3/4} K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \Big[K \ln|x| - K \ln|1-x|\Big]_{1/4}^{3/4}$$

$$= K \ln \frac{|x|}{|1-x|}\Bigg|_{1/4}^{3/4} = K \ln \frac{3}{\cancel{4}}\frac{\cancel{4}}{1} - K \ln \frac{1}{\cancel{4}}\frac{\cancel{4}}{3}$$

$$= K \ln 3 - \Big[K \ln 1 - K \ln 3\Big]$$

$$= K \ln 3 - \cancel{K \ln 1} + K \ln 3 =$$

$$= 2K \ln 3$$

l'integrale rappresenta l'area sottesa della funzione tra $x=\frac{1}{4}$ e $x=\frac{3}{4}$.

$$g(t)=\int_2^t |f(x)|\,dx$$

$$g(t)=\int_2^t \left|K\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)\right|dx=\int_2^t \left|K\,\frac{1-\cancel{x}+\cancel{x}}{(1-x)x}\right|dx=$$

$$=\int_2^t K\,\frac{1}{x(x-1)}\,dx$$ essendo $f(x)$ negativa nell'intervallo considerato

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}=\frac{Ax-A+Bx}{x\,(x-1)} \Rightarrow \begin{matrix}A=-1\\ B=1\end{matrix}$$

$$g(t)=\int_2^t K\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)}\right)dx=-\ln(x)+\ln(x-1)\Big|_2^t=$$

$$=\ln\frac{x-1}{x}\Big|_2^t=\ln\frac{t-1}{t}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{t-1}{t}+\ln 2$$

$$\lim_{t\to\infty}\ln\frac{t-1}{t}+\ln 2=\ln 2$$

Problema N°2 (PUNTO 1)

$f(x) = \sqrt{x}\,(K - x)$ $\qquad$ $g(x) = x^2(x - K)$

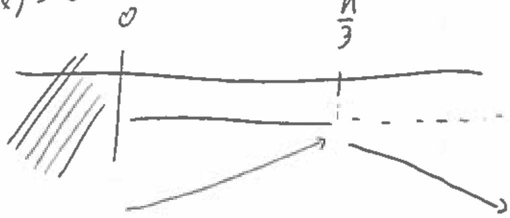
Studio il grafico $f(x)$ con $K>0$

Il dominio di $f(x)$ è $\quad x \in [0, +\infty)$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}}K - x^{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}K - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) > 0$



$f'(x) > 0$

$K - 3X > 0 \qquad x < \frac{K}{3}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-1}K - \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x) > 0 \qquad -K - 3x^{\frac{1}{2}} > 0$

$\sqrt{x} < -\frac{K}{3}$ (mai)

$f''(x) > 0$

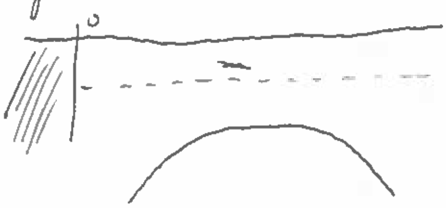
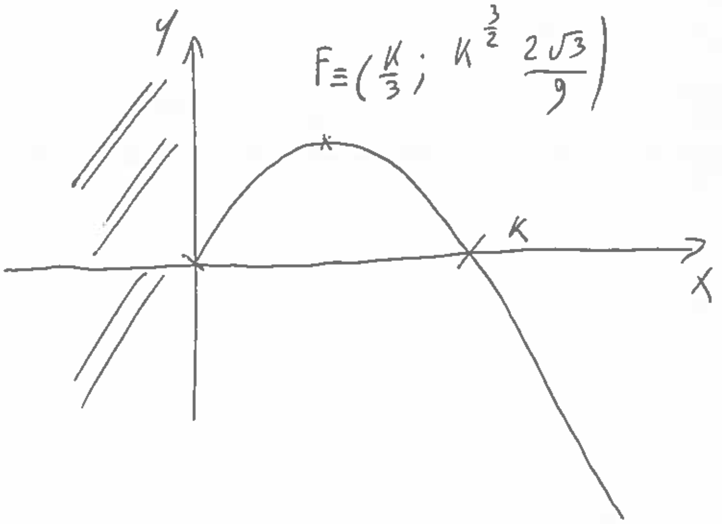


GRAFICO DI F(x) ②



$$f\left(\frac{k}{3}\right) = k^{\frac{3}{2}}\,\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Studio il grafico di $g(x) = x^2(x-k)$ con $k>0$

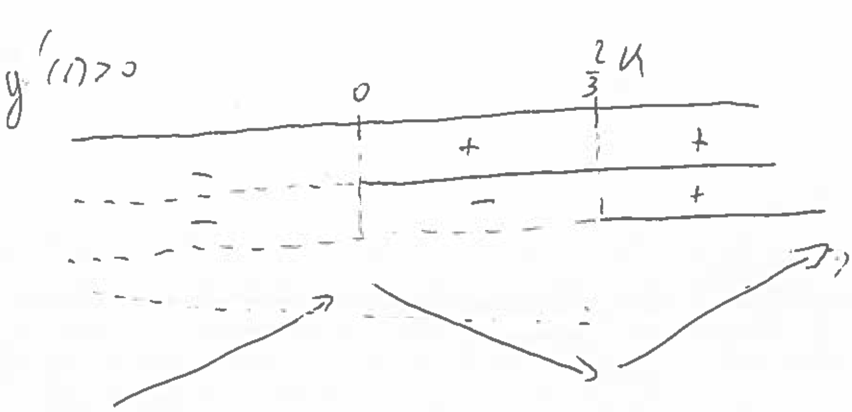
Il dominio di $g(x)$ è tutto $\mathbb{R}$.

$$g(x) = x^3 - x^2 k$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2xk$$

$g'(x) > 0 \qquad 3x^2 - 2xk > 0$

$$x(3x - 2k) > 0$$

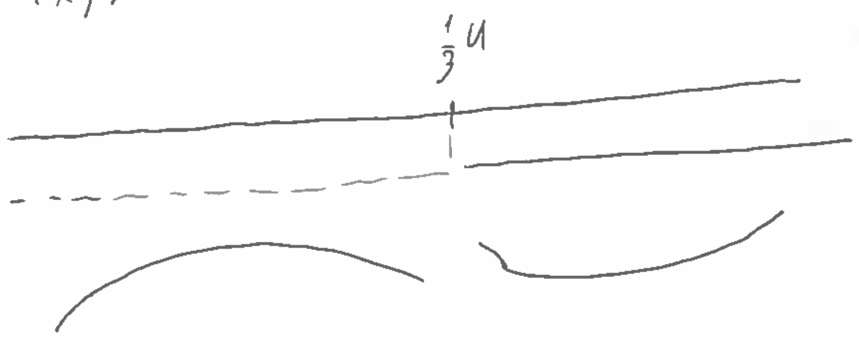


$$g''(x) = 6x - 2k$$

$$g''(x) > 0 \qquad 6x - 2k > 0$$

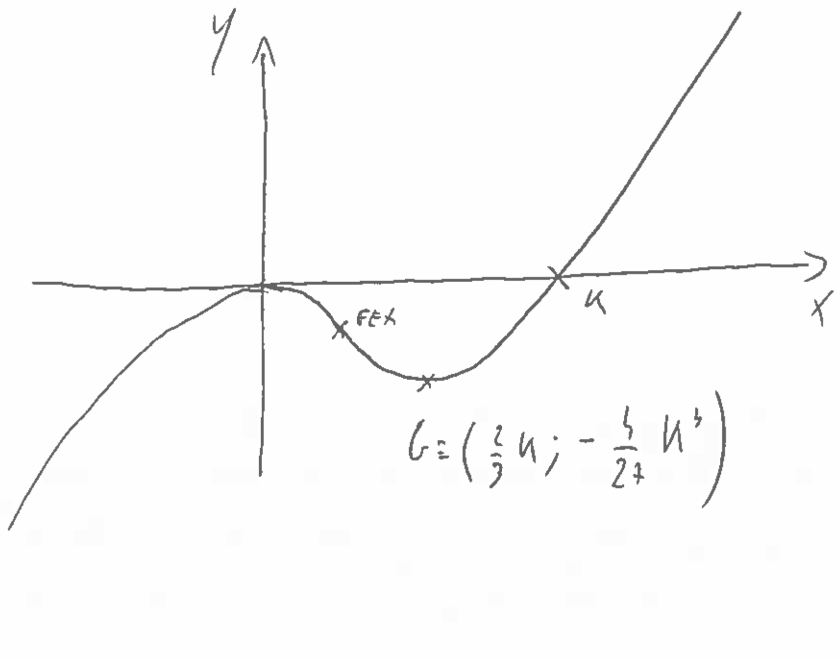
$$x > \frac{1}{3}k$$

$$g''(x) > 0$$



$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$



$$g\left(\frac{2}{3}k\right) = -\frac{4}{27}k^3$$

(PUNTO 2)

Le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono ortogonali nell'origine infatti

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} K - \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$f'(0) = +\infty$$

$\Rightarrow$ la tangente nello $\emptyset$ alla funzione $f(x)$ è l'asse y

$$g'(x) = 3x^2 - 2xK$$

$$g'(0) = 0$$

$\Rightarrow$ la tangente nello $\emptyset$ alla funzione $g(x)$ è l'asse x.

//

$$f'(K) = \frac{1}{2}\sqrt{K} - \frac{3}{2}\sqrt{K} = -\frac{1}{2}\sqrt{K}$$

$$g'(K) = 3K^2 - 2K^2 = K^2$$

La condizione che le due funzioni siano ortogonali anche nel punto K è data dalla condizione

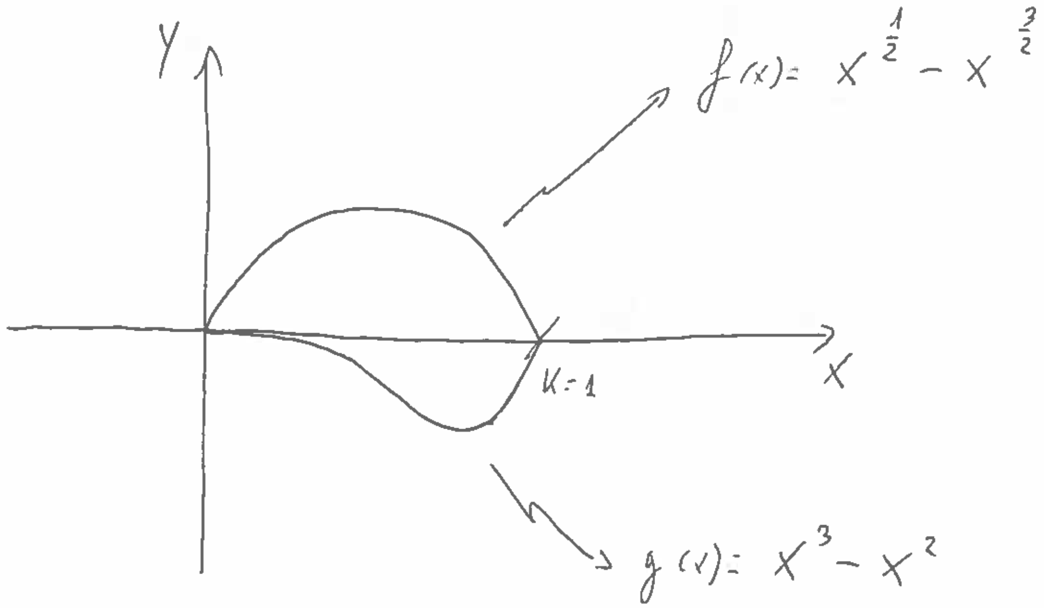
$$f'(K) = -\frac{1}{g'(K)}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{K} = -\frac{1}{K^2} \Rightarrow$$

$$K^{\frac{3}{2}} = 2$$

$$K = 2^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = 1.58$$

PUNTO 3



Calcolo l'area delimitata dalle due curve $f(x)$ e $g(x)$

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx - \int_0^1 \left(x^3 - x^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{-8-5}{20} = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$$

$$B_0 = 2 \times 10^{-2}\ T$$

$$A = \frac{7}{20}\ m^2$$

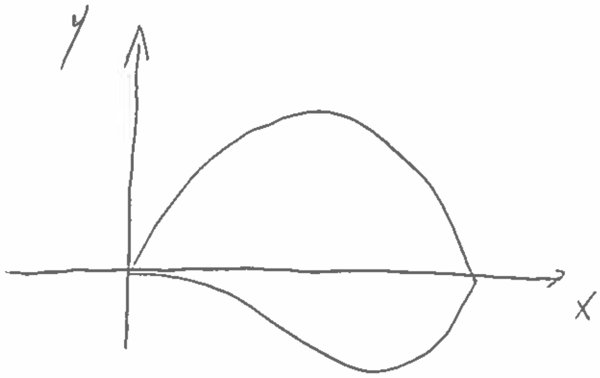
$$\phi(B) = B_0 A = \cancel{2} \times 10^{-2} \times \frac{7}{\cancel{20}\ 10} = 7 \times 10^{-3}$$

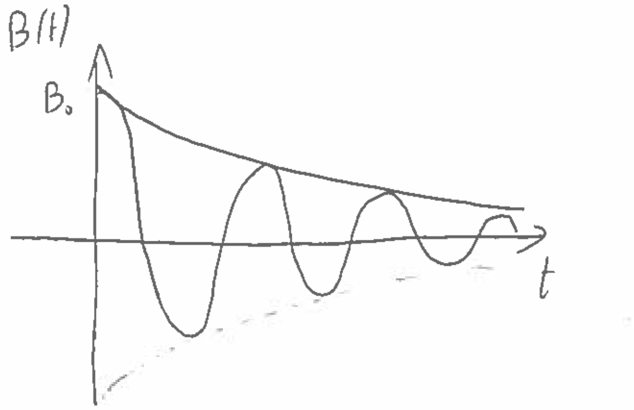
Punto 4

$S_{spire} = \frac{\pi}{20}\ m^2$

$R_{spire} = 70\,\Omega$

$B(t) = B_0\, e^{-\alpha t} (\cos \omega t)$





Applicando la II legge di Maxwell nel caso non stazionario possiamo scrivere

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} = f.e.i = -\frac{d\,\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Il campo magnetico induce sulle spire una forza elettromotrice pari a $-\frac{d\,\Phi(\vec{B})}{dt}$

$$-\frac{d}{dt}\phi(\vec{B}) = -S B_0 \frac{d}{dt}\left[e^{-\omega t}(\cos\omega t)\right]$$

$$= -S B_0 \left[-\omega e^{-\omega t}\cos\omega t + e^{-\omega t}\omega(-\sin\omega t)\right]$$

$$= + S B_0 \,\omega e^{-\omega t}\left[\cos\omega t + \sin\omega t\right]$$

$$f.e.i = S B_0 \,\omega e^{-\omega t}\left[\cos\omega t + \sin\omega t\right]$$

$$R I = S B_0 \,\omega e^{-\omega t}\left[\cos\omega t + \sin\omega t\right]$$

$$I = \frac{S B_0 \omega}{R} e^{-\omega t}\left[\cos\omega t + \sin\omega t\right] =$$

$$= I_0 e^{-\omega t}\left[\cos\omega t + \sin\omega t\right]$$

$$\frac{dI}{dt} = I_0 e^{-\omega t}\left[-\omega \sin\omega t + \omega\cos\omega t\right] +$$

$$+ I_0(-\omega) e^{-\omega t}\left[\cos\omega t + \sin\omega t\right]$$

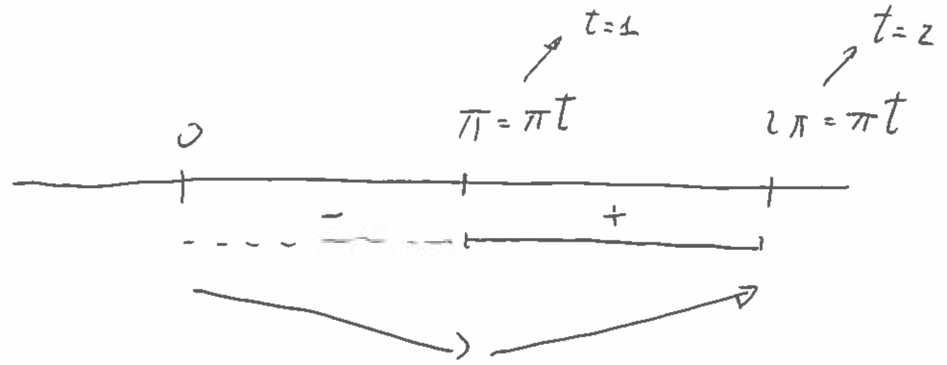
$$\frac{dI}{dt} > 0$$

$$-\omega \operatorname{sen}\omega t + \cancel{\omega \cos\omega t} - \cancel{\omega \cos\omega t} - \omega \operatorname{sen}\omega t > 0$$

$$-2\omega \operatorname{sen}\omega t > 0$$

$$-\operatorname{sen}\omega t > 0 \qquad \text{posto } \omega = \pi$$

$$\frac{dI}{dt} > 0$$

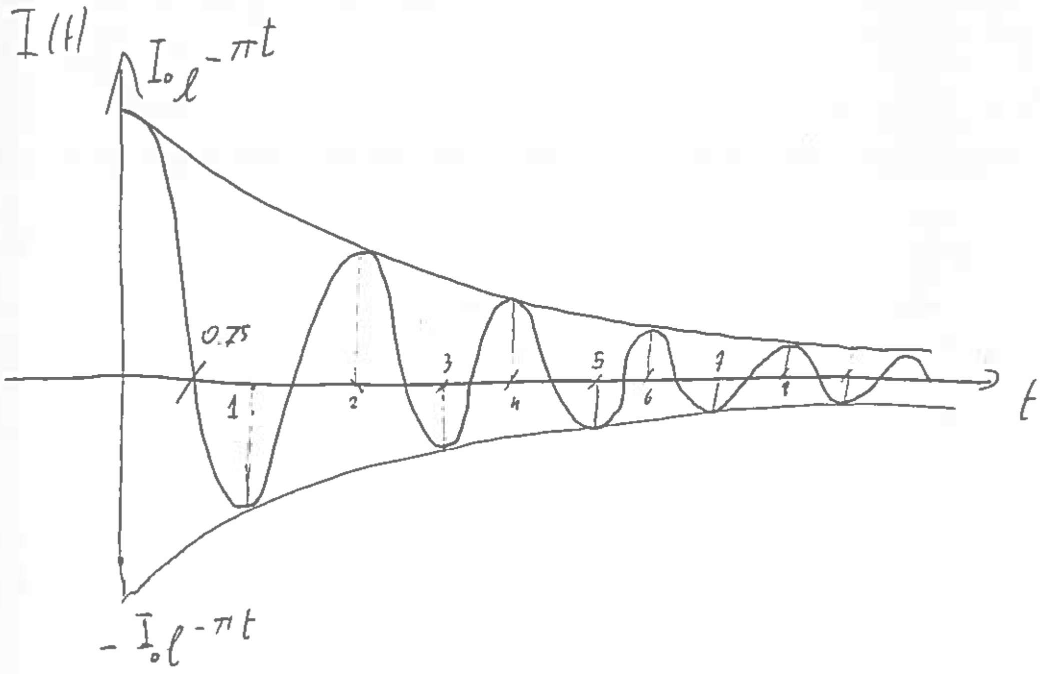


Inoltre

$$I = I_0 e^{-\omega t}\left[\cos\omega t + \operatorname{sen}\omega t\right] = I_0 e^{-\omega t}\cos\omega t\left[1 + tg(\omega t)\right]$$

La corrente si annulla per $tg(\omega t) = -1$

$$\omega t = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow \pi t = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow t = \frac{3}{4} = 0.75$$



Il valore massimo della corrente si ha per $t = 0$

e vale $I_0 = \dfrac{S B_0 \omega}{R}$

La corrente cambia verso per $t = 0.75$.

La corrente è proporzionale in modulo alla f.e.i

e quindi alla derivata del flusso.

Il verso della corrente è concorde alla

regola della mano sinistra (per il segno meno

nella formula $f.e.i = -\dfrac{d\phi(\vec{B})}{dt}$).

Quesito n°1

$K \in \mathbb{R}$ $\qquad g(x) = \dfrac{(K-1)x^3 + Kx^2 - 3}{x-1}$

1) Scegliere K in modo che la funzione non presenti asintoti.

$$g(x) = \frac{Kx^3 - x^3 + Kx^2 - 3}{x-1}$$

$\boxed{\text{per } K = 2}$ $\qquad g(x) = \dfrac{2x^3 - x^3 + 2x^2 - 3}{x-1} = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3}{x-1}$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 2x^2 - 3 & x - 1 \\ \hline x^3 - x^2 & x^2 + 3x + 3 \\ \hline // \; 3x^2 & \\ \quad 3x^2 - 3x & \\ \hline \quad // \quad 3x - 3 & \\ \qquad 3x - 3 & \\ \hline \qquad // \; // & \end{array}$$

$$g(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + 3x + 3)}{\cancel{(x-1)}} = x^2 + 3x + 3$$

2) Scelgo K affinché la funzione presenti un asintoto obliquo.

Per avere un asintoto obliquo occorre verificare le due condizioni:

1) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = a \in \mathbb{R}$

2) $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) - ax = b \in \mathbb{R}$

Se sono verificate le due condizioni l'asintoto obliquo è la retta $y = ax + b$

1) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(K-1)x^3}{x^2} = (K-1)x \in \mathbb{R}$

affinché questo limite $\in \mathbb{R}$ deve essere

$\boxed{K = 1}$

3

$\boxed{\text{Per } K = 1}$

$$g(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}$$

1) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 = a$

2) $\lim_{x \to \pm\infty} g(x) - a x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 3}{x - 1} - x = b$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\cancel{x^2} - 3 - \cancel{x^2} + x}{x - 1} = b = 1$$

Asintoti obliqui per $\boxed{K = 1}$ $\boxed{y = x + 1}$

Studio la funzione

$$g(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}$$

Il dominio della funzione è $\mathbb{R} - \{x = 1\}$

per $x = 1$ è presente un asintoto verticale.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3}{x - 1} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 3}{x - 1} = -\infty$$

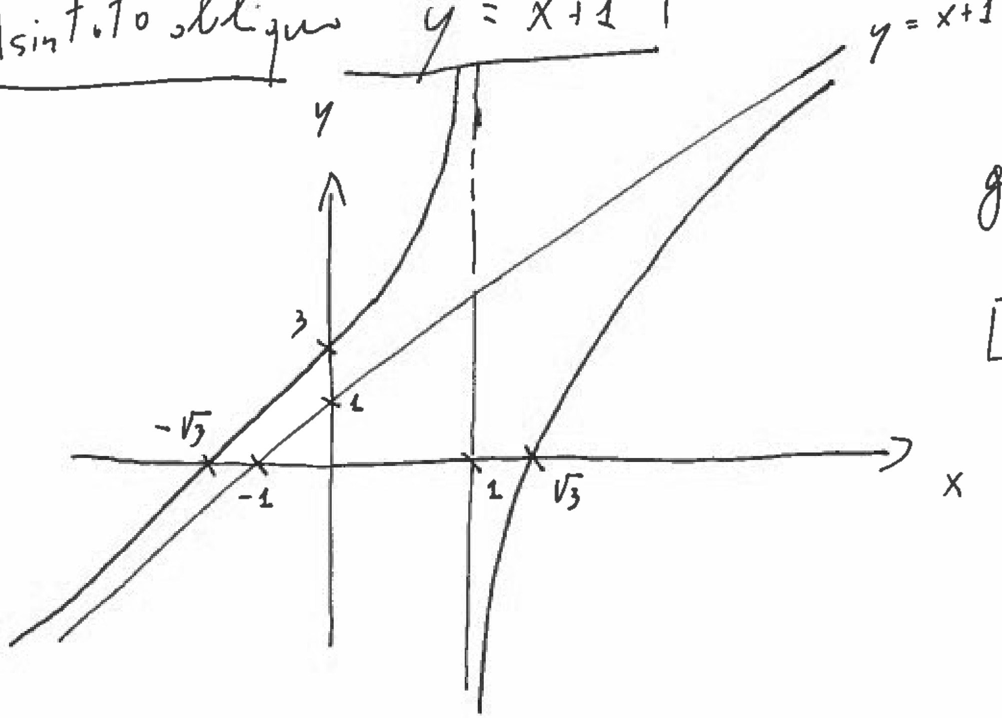
$$\frac{d\,g(x)}{dx} = \frac{2x(x-1) - (x^2 - 3)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 3}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2} \qquad \frac{d\,g(x)}{dx} > 0 \quad \forall x$$

$\boxed{\text{Asintoto obliquo} \quad y = x+1}$

$\boxed{K=1}$

5



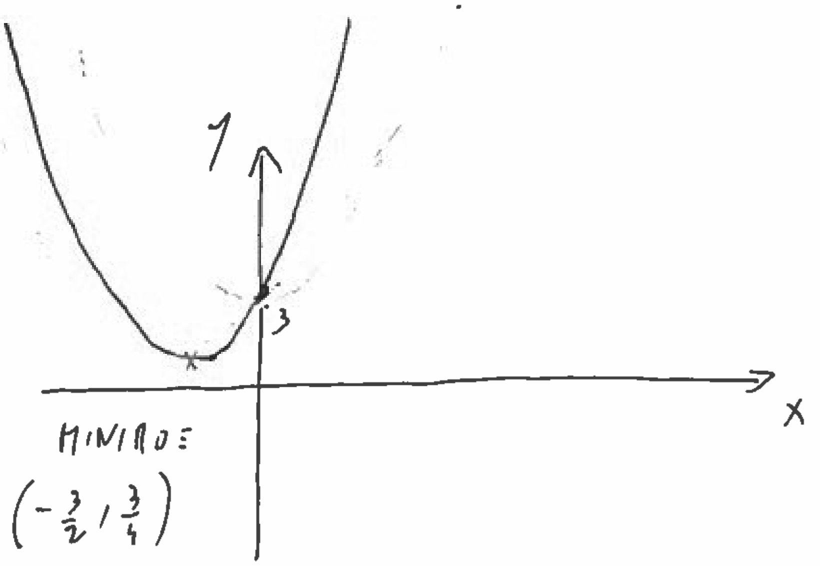
$$g(x) = \frac{x^2-3}{x-1}$$

$\boxed{K=1}$

$\boxed{K=2}$ nessun asintoto

$$g(x) = x^2+3x+3$$

$\boxed{K=2}$



MINIMO:

$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \qquad g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 3 = \frac{3}{4}$$

Quesito n° 2

$f(x)$ = funzione pari

$g(x)$ = funzione dispari

Definizione di funzione pari

$$f(x) = f(-x)$$

derivando ambo i membri

$$f'(x) = -f'(-x)$$

La derivata di una funzione pari è una funzione dispari

Definizione di una funzione dispari

$$f(x) = -f(-x)$$

derivando ambo i membri

$$f'(x) = f'(-x)$$

La derivata di una funzione dispari è una funzione pari

Esempio di funzione pari $\quad y = x^2$

$$y' = 2x \quad (\text{dispari})$$

Esempio di funzione dispari $\quad y = x^3$

$$y' = 3x^2 \quad (\text{pari})$$

Quesito n°3

Considera la funzione

$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\, dt$$

La retta tangente a $f(x)$ nel punto $x = 1$ ha equazione

$$y = f(x=1) + f'(x=1)(x-1)$$

$$f(x=1) = \int_1^1 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\, dt = 0$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\right]_1^x = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{x} - \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{d}{dx} f(x=1) = f'(x=1) = \cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} = 0$$

La retta tangente a $f(x)$ nel punto $x = 1$ ha equazione $y = 0$.

Quesito n° 4

Determina l'equazione della retta passante per i punti $\vec{A} \equiv (-2, 0, 1)$

$\vec{B} \equiv (0, 2, 1)$

$$\overrightarrow{(A-B)} = (-2, 0, 1) - (0, 2, 1) = (-2, -2, 0)$$

l'equazione della retta è

$$\vec{X} = t\,\overrightarrow{(A-B)} + \vec{B}$$

$$\begin{cases} x = -2t + 0 \\ y = -2t + 2 \\ z = 0 + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2t \\ y = -2t + 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

②

Determino il punto appartenente alla retta e equidistante da

$$C \equiv (5, 1, -2)$$
$$D \equiv (1, 3, 4)$$

$$(x-5)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=(x-1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2$$

sostituendo

$$(-2t-5)^2+(-2t+2-1)^2+(1+2)^2=(-2t-1)^2+(-2t+2-3)^2+$$
$$+(1-4)^2$$

$$4t^2+25+20t+(-2t+1)^2+9=4t^2+1+4t+(-2t-1)^2+$$
$$+9$$

$$\cancel{4t^2}+25+20t+\cancel{4t^2}+\cancel{1}-4t+\cancel{9}=\cancel{4t^2}+1+4t+\cancel{4t^2}+\cancel{1}+4t$$
$$+\cancel{9}$$

$$25+20t-4t=1+8t$$
$$24=-8t \qquad \boxed{t=-3}$$

③

Il punto appartenente alla retta ed equidistante da C e D è

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ z = 1 \end{cases}$$

Quesito n°5

Lancio dado:

→ se esce il numero 3 Emme guadagna 3 punti

→ altrimenti perde 1 punto.

1) Probabilità che dopo 4 lanci il suo punteggio sia ancora ϕ.

Dopo 4 lanci il punteggio è ϕ se nei 4 lanci esce una volta 3

Utilizzando la binomiale di Bernoulli

$$P = \binom{n}{k} p^{k} q^{n-k}$$

n = numero di estrazioni

K = numero di successi

p = probabilità di 1 successo

$q = 1 - p$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

La probabilità che nei 4 lanci esca una volta 3 è

(2)

$P(\text{esce una volta 3 in 4 lanci}) = \binom{4}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{4!}{3!}\,\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3 =$

$= 4\,\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{500}{1296}$

2) Probabilità che dopo 6 lanci il punteggio non scende sotto lo ϕ.

Affinché dopo 6 lanci il punteggio non scende sotto lo ϕ occorre che in 6 lanci esce il 3 da 2 a 6 volte.

Oppure in 6 lanci non deve uscire il 3 1 volta sola o ϕ volte

$P_1(\text{esce 1 volta 3 in 6 lanci}) = \binom{6}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{\cancel{6!}}{\cancel{5!}}\,\frac{1}{\cancel{6}}\left(\frac{5}{6}\right)^5 =$

$= \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3125}{7776}$

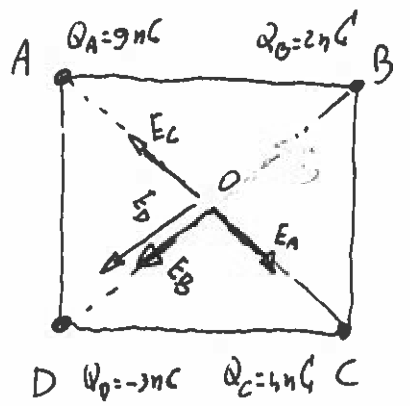
$P_2(\text{esce 0 volte 3 in 6 lanci}) = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = \frac{15.625}{46.656}$

La probabilità che dopo 6 lanci il punteggio non scenda sotto lo 0 è il complementare di

$P_1 + P_2 =$

$$P = 1 - P_1 - P_2 = 1 - \frac{3125}{7776} - \frac{15625}{46656} = 1 - 0.4 - 0.33 = 0.27$$

Quesito n° 6



AB = 2m = BC

$Q_A = 9nC$

$Q_B = 2nC$

$Q_C = 4nC$

$Q_D = -3nC$

Il valore del campo elettrico generato da una carica nel punto O vale $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\hat{r}$

dove Q = valore della carica

d = distanza della carica dal punto O

$\hat{r}$ = versore posizione del punto − posizione carica

In modulo

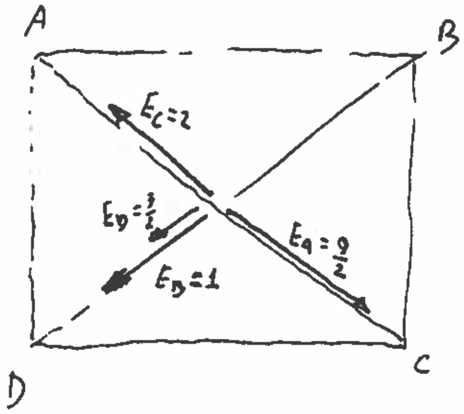
$$E_A = \frac{9}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{9}{4\pi\varepsilon_0}\times 2 = \frac{9}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{N}{nC}\right)$$

$$E_B = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\times 2 = \frac{\cancel{2}\,1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{N}{nC}\right)$$

$$E_C = \frac{4}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\pi\varepsilon_0}\times 2 = \frac{2}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{N}{nC}\right)$$

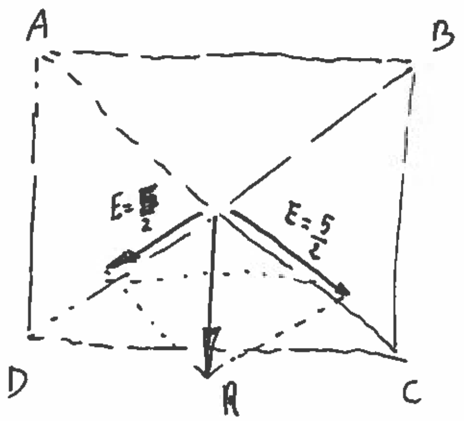
$$E_D = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{4\pi\varepsilon_0}\times 2 = \frac{3}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{N}{nC}\right)$$

Considero ora il verso del campo nel punto O



(trascurando al denominatore il termine $\pi\varepsilon_0$)

Sommando i vettori



La risultante è diretta verticalmente (verso il basso) e ha

modulo $2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{5}{2}\,\frac{Q}{\pi\varepsilon_0}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,5\,\frac{Q}{\pi\varepsilon_0}$ $\left(\frac{N}{\text{n Coulomb}}\right)$

Quesito n° 7

Il moto di una carica soggetta ad un campo magnetico è dato dalla formula di Lorentz

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Nel nostro caso il protone accelerato da una d.d.p. $= \Delta V = 400V$ acquista un'energia cinetica $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = q\Delta V$.

Essendo la forza di Lorentz perpendicolare alla velocità il moto della carica sarà circolare uniforme e la forza di Lorentz equilibrerà la forza centrifuga.

$$F_c = \frac{m v^2}{R} \qquad F_{Lorentz} = q\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}\, B$$

uguagliando $F_c = F_{Lorentz}$

$$\frac{\cancel{m}}{R}\,\frac{2\cancel{q}\Delta V}{\cancel{m}} = \cancel{q}\sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}\, B$$

Si ricava

$$B = \frac{2}{R}\,\Delta V\,\frac{1}{\sqrt{2q\Delta V/m}} = \frac{\sqrt{2}}{R}\,\sqrt{\Delta V}\,\sqrt{\frac{m}{q}}$$

Quesito n° 8

Secondo l'effetto fotoelettrico e la legge di Planck ogni fotone incidente ha un'energia pari a

$E = h f = 7.80 \times 10^{14}\, Hz \cdot 6.63 \times 10^{-34}\, J\, s = 5.17 \times 10^{-19}\, J$

Trasformando E ... da J in eV

$E = \dfrac{5.17 \times 10^{-19}\, J}{1.6 \times 10^{-19}\, J/eV} = 3.23\, eV$

Solo il Cesio ha un lavoro di estrazione inferiore a 3.23 eV.

Al momento dell'estrazione gli elettroni liberi ... dell'atomo di Cesio possono raggiungere una velocità cinetica pari a $(3.23 - 1.8)\, eV$

$E_c = 1.43\, eV$

Da cui

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = 1.43\,eV = 1.43 \times 1.6 \times 10^{-19}\ J$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1.43 \times 1.6 \times 10^{-19}}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.43 \times 1.6 \times 10^{-19}}{9.1 \times 10^{-31}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 1.43 \times 1.6}{9.1}}\ 10^6 = 0.7 \times 10^6\ \frac{m}{s}$$