Simmetrie e leggi di conservazione

Simmetrie e leggi di conservazione

Dato un ket di stato rappresentato da una funzione $\psi(\vec{x},t)$ e un operatore Hamiltoniano $\hat{H}$ del sistema in esame.

Allora un'osservabile A è una costante del moto se e solo se commuta con l'operatore $\hat{H}$.

Dim

Ricordiamo l'equazione di Schrodinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x},t) = \hat{H}\psi(\vec{x},t)$$ e il suo complesso coniugato

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\vec{x},t) = \hat{H}^+\psi^*(\vec{x},t) = \hat{H}\psi^*(x,t)$$

La derivata del valore atteso A vale

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\vec{x},t)\,\hat{A}\,\psi(\vec{x},t)\,d^3x$$

Ipotizzando che l'operatore $\hat{A}$ e $\hat{H}$ siano indipendenti dal tempo

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{d}{dt}\psi^*(\vec{x},t)\right]\hat{A}\,\psi(\vec{x},t)\,d^3x \;+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(\vec{x},t)\,\hat{A}\,\frac{d}{dt}\psi(\vec{x},t)\,d^3x$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{i\hbar}\,\hat{H}\,\psi^*(x,t)\,\hat{A}\,\psi(\vec{x},t)\,d^3x \;+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(\vec{x},t)\,\hat{A}\,\frac{1}{i\hbar}\,\hat{H}\,\psi(\vec{x},t)\,d^3x =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{i\hbar}\,\psi^*(x,t)\,\hat{H}^{+}\hat{A}\,\psi(\vec{x},t)\,d^3x$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\vec{x},t)\ \frac{1}{i\hbar}\ \hat{A}\hat{H}\ \psi(\vec{x},t)\, d^3x =$$

$$-\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\vec{x},t)\ \hat{H}\hat{A}\ \psi(\vec{x},t)\, dx^3 + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\ \hat{A}\hat{H}\ \psi(\vec{x},t)\, d^3x$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(\vec{x},t)\ [\hat{A}\hat{H}]\ \psi(\vec{x},t)\, d^3x$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\ \langle \psi(\vec{x},t) \,|\, [\hat{A}\hat{H}] \,|\, \psi(\vec{x},t) \rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{i\hbar}\ \langle \psi(\vec{x},t) \,|\, [\hat{A}\hat{H}] \,|\, \psi(\vec{x},t) \rangle$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'operatore (4)

$\hat{A}$ sia una costante del moto è che commuti con

$\hat{H}$.

Da questa proposizione deriva il fatto che in

meccanica quantistica leggi di conservazione del

momento angolare, della quantità di moto e

dell'energia possono ~~essere~~ ricavate da

considerazioni di simmetria spazio temporale.

Per esempio nel caso dell'atomo di idrogeno

l'operatore $\hat{L}_z$ commuta con $\hat{H}$ ciò comporta

che $\hat{L}_z \hat{H} = \hat{H} \hat{L}_z$. Questa relazione può essere

vista come la composizione di una rotazione e

di un'evoluzione temporale del ket di base pertanto possiamo dire che se si effettua prima un'evoluzione temporale del Ket di base e poi una rotazione di un angolo ϕ si ottiene lo stesso Ket invertendo la rotazione con l'evoluzione temporale.

$$\hat{U}(t)\hat{D}(\phi)|\alpha\rangle = \hat{D}(\phi)\hat{U}(t)|\alpha\rangle .$$

Oppure considerando che l'Hamiltoniana commuta con se stessa possiamo dire che la composizione di due evoluzioni temporali non dipendono dall'ordine con cui vengono effettuate.

$$\hat{U}_1(t)\hat{U}_2(t)|\alpha\rangle = \hat{U}_2(t)\hat{U}_1(t)|\alpha\rangle .$$