Leggi di Maxwell

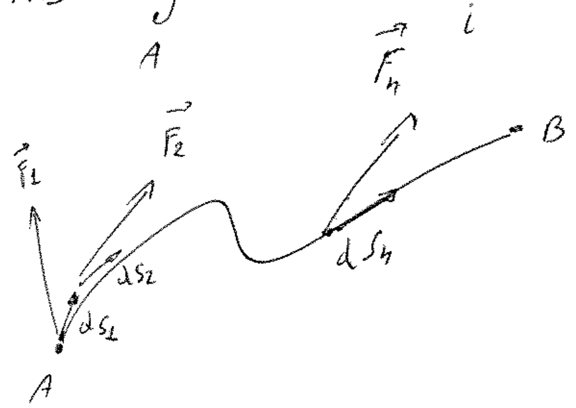
Da ricordare:

Definizione

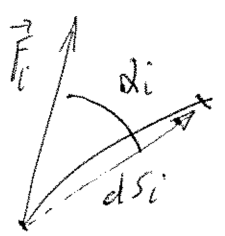
Lavoro di una forza $\vec{F}$

Il lavoro di una forza $\vec{F}$ per portare un corpo dal punto A al punto B attraverso un percorso Γ è definito

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = \sum_i \vec{F}_i\, d\vec{s}_i = \vec{F}_1\, d\vec{s}_1 + \dots \vec{F}_n\, d\vec{s}_n$$



con $\vec{F}_i\, d\vec{s}_i$ si intende il prodotto scalare



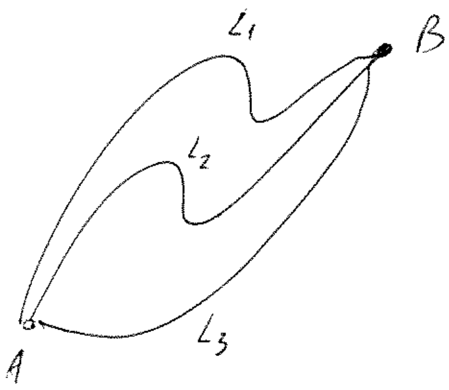
$$\vec{F}_i\, d\vec{s}_i = F_i\, ds_i \cos\alpha_i$$

Definizione

Forze conservative

→ Una forza si dice conservativa se il lavoro non dipende dal percorso scelto ma soltanto dalla posizione del punto iniziale e finale

→ Una forza si dice conservativa se il lavoro su un percorso chiuso è nullo.



$L_1 = L_2 = L_3$ $\forall$ percorso scelto

$\Updownarrow$

$$\oint \vec{F} \, d\vec{s} = 0$$

la circuitazione di $\vec{F}$ è nulla.

Energia meccanica

Per una forza conservativa vale la conservazione dell'energia meccanica

$$L_{AB} = U_B - U_A = E_{C(A)} - E_{C(B)}$$

cioè

$$U_B + E_{C(B)} = U_A + E_{C(A)}$$

con $E_C = \frac{1}{2} m v^2$

Il campo elettrico di una carica puntiforme è una forza centrale.

Ogni forza centrale è conservativa perché il lavoro da A a B può essere composto da spostamenti elementari tangenziali e radiali.

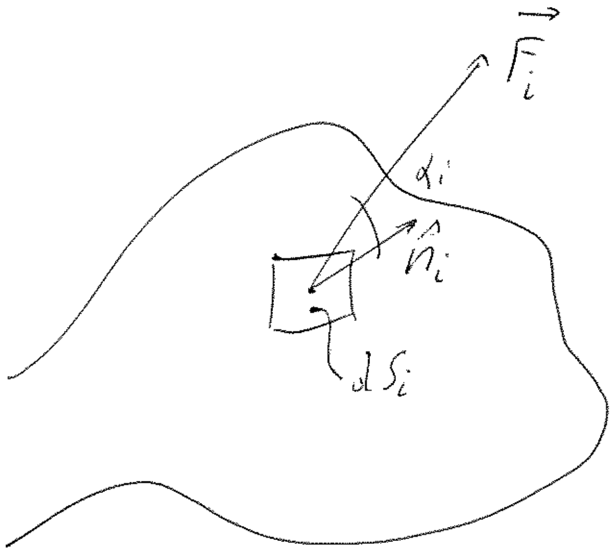
Gli spostamenti elementari tangenziali compiono lavoro nullo essendo lo spostamento normale alla forza.
Il contributo al lavoro per spostarsi dal punto A al punto B dipende soltanto dalla variazione radiale tra A e B.

$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} = 0 \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

(3)

Definizione di flusso di un vettore attraverso una superficie



$\vec{n}$ = versore normale

$$\phi_\Omega(\vec{F}) = \int_\Omega \vec{F}\,\vec{n}\,dS = \sum_i F_i\,dS_i \cos\alpha_i$$

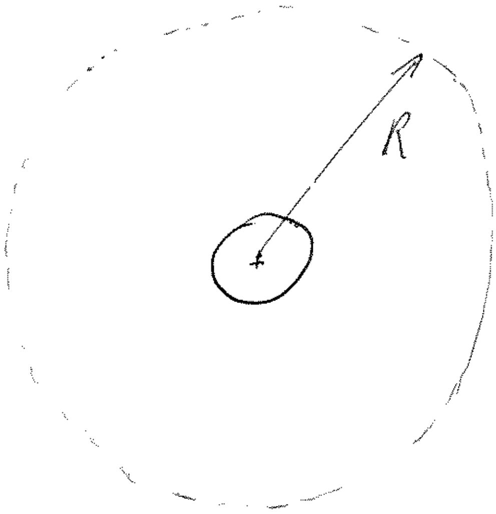
$\boxed{\text{Teorema di Gauss}}$

$$\phi_\Omega(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è pari alla somma delle cariche interne su ε_0.

→ Calcolo di alcuni casi particolari per il calcolo di E con il teorema di Gauss

1) Campo elettrico di una sfera carica.



ipotesi di simmetria:

→ Campo elettrico costante su una superficie sferica di raggio R.

→ Direzione del campo normale alla superficie stessa

→ $\vec{E}_i \hat{n}_i = E_i \cos\alpha_i = E_i$

$$\Phi(E) = \sum_i E_i \cos\alpha_i \Delta S_i = \sum_i E \Delta S_i = E 4\pi R^2$$

$\parallel$

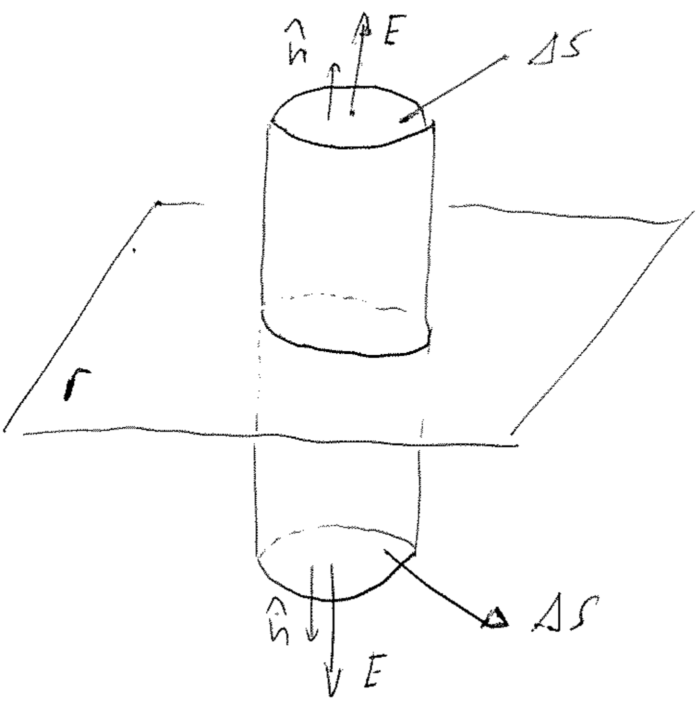
GAUSS

$\parallel$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E 4\pi R^2$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 R^2}}$$

2) Campo elettrico di un piano uniformemente carico (CONDENSATORE) infinito.



ipotesi di simmetria → Campo elettrico normale al piano

Il flusso è nullo sulla parete laterale del cilindro perché il campo è normale a $\hat{n}$ pertanto $\cos\alpha_i = 0$

$$\phi(E) = 2E\Delta S$$

$$\parallel$$

GAUSS

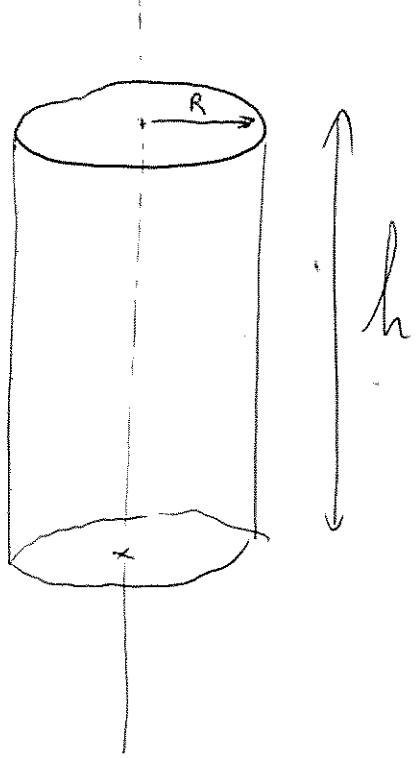
$$\parallel$$

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = 2E\Delta S$$

σ = densità di carica sul piano.

$$E = \frac{Q}{\Delta S}\frac{1}{2\varepsilon_0}$$

3) Campo elettrico di un filo uniformemente carico infinito.



ipotesi di simmetria:

→ Campo elettrico normale alla direzione del filo

→ Campo elettrico costante ad una distanza fissa R dal filo.

Il flusso è nullo sulla superficie superiore ed inferiore del cilindro perché il campo è normale ad $\hat{n}$ e $\cos\alpha_i = 0$

Sulla superficie laterale del cilindro $E =$ costante e $\cos\alpha_i = 1$

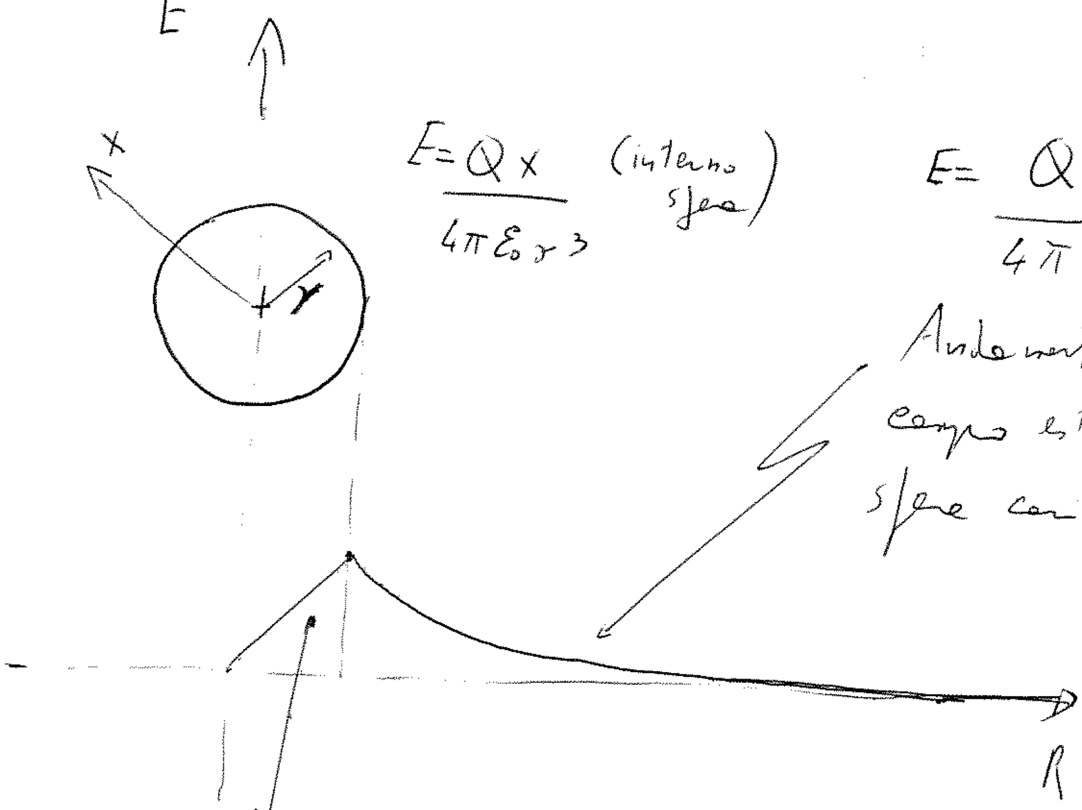
$$\phi(E) = \sum_{\text{sup. laterale}} E \Delta S_i = E\, 2\pi R h$$

|| GAUSS ||

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = E\, 2\pi R h \Longrightarrow E = \frac{Q}{h} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$\boxed{\sigma = \text{densità carica filo}}$

5



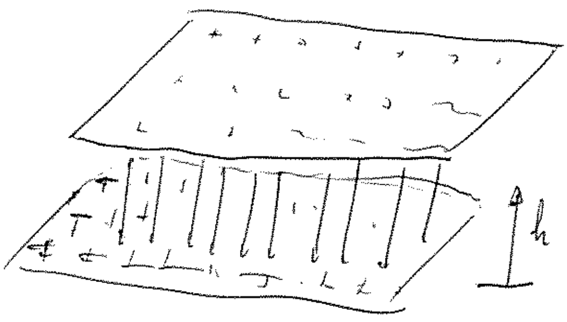
$$E = \frac{Q\,x}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \quad \text{(interno sfera)}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Andamento campo esterno alla sfera carica $\simeq \frac{1}{R^2}$

Andamento campo interno sfera carica $\simeq R$

Condensatore



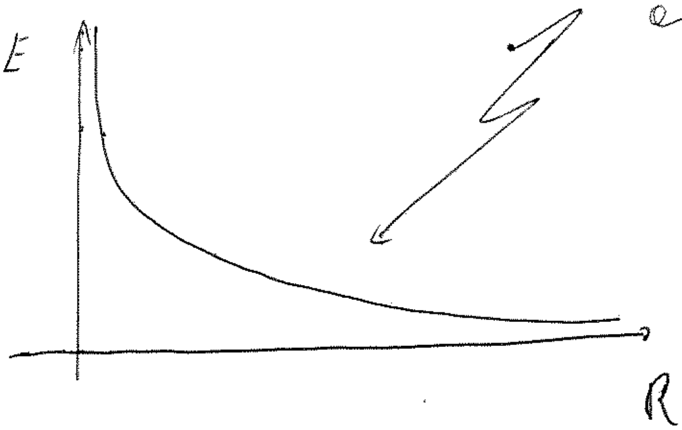
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Campo costante

$$V = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} h$$

filo carico

$$E = \frac{\sigma}{2\pi \varepsilon_0 R}$$



andamento campo con $\frac{1}{R}$

6

Prime due leggi di Maxwell in formula integrale e caso stazionario.

→ Caso stazionario significa che non ci sono grandezze che variano con il tempo

→ $\oint \vec{E}\, d\vec{s} = \sum_i \vec{E}_i\, d\vec{s}_i = 0$

La circuitazione del campo elettrico è nulla

→ $\phi(\vec{E})_{\Omega \text{ chiusa}} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

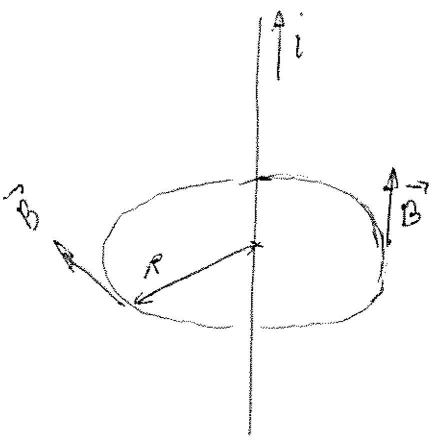
Il flusso del campo elettrico su una superficie chiusa è pari alla somma delle cariche interne alla superficie diviso ε_0.

Da ricordare:

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 \sum i_k$$

μ_0 = permeabilità magnetica
i_k = correnti concatenate

Teorema di Ampere



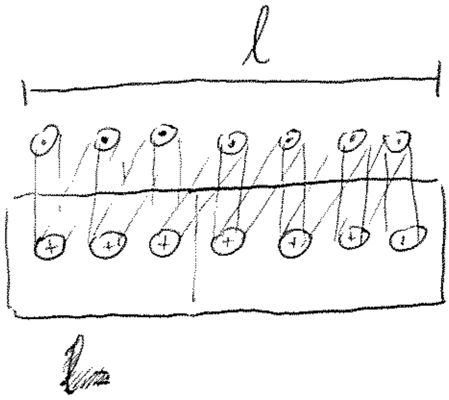
ipotesi di simmetria
B costante lungo la circonferenza di raggio R.

$$B\, 2\pi R = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

campo generato da un filo percorso da corrente elettrica.

Campo magnetico generato all'interno di un solenoide



ipotesi di simmetria

→ il campo elettrico esterno al solenoide è nullo

$$Bl = \mu_0 N i$$

$$B = \mu_0 \frac{N i}{l}$$

N = numero di spire

l = lunghezza solenoide

Flusso del campo magnetico

$$\Phi_{\Omega}(\vec{B}) = 0$$

Data una superficie chiusa ogni linea uscente dalla superficie deve essere anche entrante.

Non esistono monopoli magnetici.

(9)

EQUAZIONE	GRANDEZZA INTERESSATA	CHE COSA DICE	CHE COSA SIGNIFICA	CHE COSA COMPORTA
Teorema di Gauss per il campo elettrico $\Phi_{\Omega}(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon}$	Flusso $\Phi_{\Omega}(\vec{E})$ del campo elettrico $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa Ω	Il flusso del campo elettrico che attraversa (in uscita) qualunque superficie chiusa è direttamente proporzionale alla carica totale contenuta nella superficie, somma algebrica delle cariche positive e negative all'interno.	• Le cariche elettriche sono le sorgenti del campo elettrico. • Le linee del campo elettrico sono aperte; hanno origine dalle cariche positive e terminano su quelle negative. • Le cariche elettriche $\vec{E}$ che si trovano al di fuori di una superficie chiusa Ω non contribuiscono al flusso perché generano linee di campo che intersecano Ω due volte, in entrata e in uscita, cioè producono un flusso uscente netto uguale a zero.	• Determina il modulo del campo elettrico generato da distribuzioni di carica con particolari simmetrie. • Spiega perché su un conduttore in equilibrio elettrostatico la carica si localizza in superficie. • Determina il modulo del campo elettrico sulla superficie di un conduttore all'equilibrio (teorema di Coulomb).
Teorema della circuitazione per il campo elettrostatico $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{E}) = 0$	Circuitazione $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{E})$ del campo elettrico $\vec{E}$ lungo una linea $\mathcal{L}$ (chiusa e orientata)	La circuitazione del campo elettrostatico è nulla, qualunque sia il cammino chiuso e orientato lungo il quale essa è calcolata.	• Il campo elettrostatico è conservativo, cioè il lavoro fatto quando una carica puntiforme è portata da un punto a un altro entro il campo è indipendente dal percorso scelto per congiungere i due punti.	• Permette di definire l'energia potenziale elettrica e il potenziale elettrico.
Teorema di Gauss per il campo magnetico $\Phi_{\Omega}(\vec{B}) = 0$	Flusso $\Phi_{\Omega}(\vec{B})$ del campo magnetico $\vec{B}$ attraverso una superficie chiusa Ω	Il flusso del campo magnetico attraverso qualunque superficie chiusa è nullo.	• Le linee del campo magnetico non hanno né inizio né fine, ma sono linee chiuse, oppure sono linee che si estendono all'infinito.	• Esclude l'esistenza di poli magnetici isolati (monopòli): ogni polo nord (da cui le linee di campo escono) è indissolubilmente associato a un polo sud (in cui le linee di campo entrano).
Teorema di Ampère $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{B}) = \mu_0 \, i_{tot}$	Circuitazione $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{B})$ del campo magnetico $\vec{B}$ lungo una linea $\mathcal{L}$ (chiusa e orientata)	La circuitazione del campo magnetico lungo qualunque cammino chiuso $\mathcal{L}$ è direttamente proporzionale alla corrente totale concatenata, cioè alla corrente che attraversa una superficie delimitata da $\mathcal{L}$.	• Il fatto che il campo magnetico, tramite la sua circuitazione $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{B})$, dipenda dalle correnti elettriche indica che tali correnti (cioè le cariche elettriche in movimento) sono le sorgenti del campo magnetico stesso. • Il fatto che $\Gamma_{\mathcal{L}}(\vec{B})$ possa essere diversa da zero indica che il campo magnetico non è conservativo: per questa ragione non ha senso definire un'«energia potenziale magnetica» e un «potenziale magnetico».	• Determina il modulo del campo magnetico generato da correnti elettriche con particolari simmetrie, per esempio dalla corrente che percorre un filo cilindrico di lunghezza infinita.

Legge di Faraday - Neumann

CASO NON STAZIONARIO

La circuitazione del campo elettrico lungo qualunque linea chiusa orientata è uguale alla rapidità variata di segno del flusso del campo magnetico attraverso la superficie che ha per contorno quella linea.

f.e.m. = forza elettromotrice indotta $= -\dfrac{d\phi(B)}{dt}$

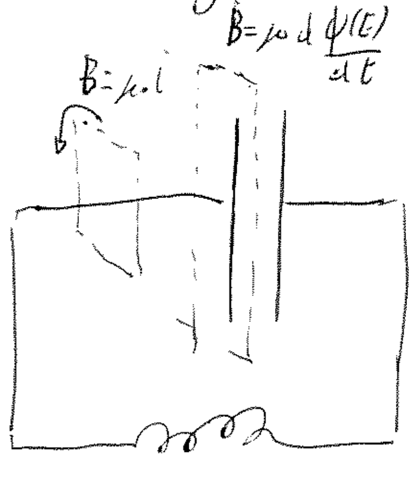
$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} = f.e.m = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

Campo magnetico indotto

CASO NON STAZIONARIO

$$\oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 \left[i + \varepsilon_0 \frac{d\,\phi(\vec{E})}{dt} \right]$$

Il termine aggiuntivo fu introdotto da Maxwell ed è fondamentale ~~per~~ insieme al termine $\frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$ della II equazione per definire le equazioni delle ~~campo~~ onde elettromagnetiche.



CIRCUITO LC

La prima spira del circuito oscillante LC genera un campo magnetico dovuto alla corrente i che l'attraversa.

Spostando la spira a cavallo del condensatore non ho correnti ma un campo elettrico oscillante. È questo campo che genera in questo caso il campo B.

EQUAZIONE	CON DERIVATE E INTEGRALI EQUAZIONE IN FORMA INTEGRALE	CAMPO	GRANDEZZA INTERESSATA	PRINCIPALI FATTI DESCRITTI
Prima equazione: teorema di Gauss per il campo elettrico $\Phi_\Omega(\vec{E}) = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0}$	$\oint_\Omega \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0}$	$\vec{E}$	Flusso di $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa Ω	Le cariche sono sorgenti del campo elettrico.
Seconda equazione: legge di Faraday-Neumann, o teorema della circuitazione per il campo elettrico $\Gamma_\mathcal{L}(\vec{E}) = -\frac{\Delta\Phi_S(\vec{B})}{\Delta t}$	$\oint_\mathcal{L} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_s(\vec{B})}{dt}$	$\vec{E}$, $\vec{B}$	Circuitazione di $\vec{E}$ lungo una linea chiusa $\mathcal{L}$	• Un flusso magnetico variabile attraverso la superficie di un circuito genera una corrente indotta. • Un campo magnetico variabile è sorgente di un campo elettrico.
Terza equazione: teorema di Gauss per il campo magnetico $\Phi_\Omega(\vec{B}) = 0$	$\oint_\Omega \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\vec{B}$	Flusso di $\vec{B}$ attraverso una superficie chiusa Ω	Non esistono poli magnetici isolati (monopòli).
Quarta equazione: legge di Ampère-Maxwell, o teorema della circuitazione per il campo magnetico $\Gamma_\mathcal{L}(\vec{B}) = \mu_0\left[i_{tot} + \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi_S(\vec{E})}{\Delta t}\right]$	$\oint_\mathcal{L} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\left[i_{tot} + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_S(\vec{E})}{dt}\right]$	$\vec{B}$, $\vec{E}$	Circuitazione di $\vec{B}$ lungo una linea chiusa $\mathcal{L}$	Le sorgenti del campo magnetico sono: • le correnti elettriche (primo addendo); • i campi elettrici variabili (secondo addendo).