Funzioni Trigonometriche e moti oscillatori

Funzioni trigonometriche e moti armonici

Dallo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni $\operatorname{sen}\theta$; $\cos\theta$; $e^{i\theta}$ si ricava la famosa legge di Eulero

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta}$$

Da cui
$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

Utilizzando le formule di Eulero si possono semplicemente ricavare le seguenti formule trigonometriche:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad ; \quad \sec^2\alpha - 1 = \operatorname{tg}^2\alpha \quad ; \quad \csc^2\alpha - 1 = \cot^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}\alpha \pm \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\right)$$

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\alpha\right)$$

$$\cos^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\alpha\right)$$

1) Dimostrare la relazione

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\,\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2} +$$

$$+\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\,\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i\times 2} +$$

$$+\frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i\times 2} =$$

$$= \frac{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i\times 2} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

2) Dimostrare la relazione

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) =$$

$$= \cancel{2}\, \frac{e^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)i} - e^{-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)i}}{2i} \; \frac{e^{\frac{1}{2}(\alpha-\beta)i} + e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\beta)i}}{\cancel{2}} =$$

$$= \frac{\left(e^{\frac{1}{2}\alpha i} e^{\frac{1}{2}\beta i} - e^{-\frac{1}{2}\alpha i} e^{-\frac{1}{2}\beta i}\right)\left(e^{\frac{1}{2}\alpha i} e^{-\frac{1}{2}\beta i} + e^{-\frac{1}{2}\alpha i} e^{\frac{1}{2}\beta i}\right)}{2i} =$$

$$= \frac{e^{\alpha i} + e^{\beta i} - e^{-\beta i} - e^{-\alpha i}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i} + \frac{e^{\beta i} - e^{-\beta i}}{2i} = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta$$

Dimostrare la relazione

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)} - e^{-i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}}{4i^2} =$$

$$= \frac{e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}}{4i^2} - \frac{e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}}{4i^2} =$$

$$= \frac{e^{i(\alpha-\beta)} + e^{-i(\alpha-\beta)}}{4} - \frac{e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

Dimostrare la relazione

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\alpha\right)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \left[\frac{e^{\frac{1}{2}i\alpha} - e^{-\frac{1}{2}i\alpha}}{2i} \right]^2 = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} - 2}{4i^2} =$$

$$= \frac{2 - \left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)}{4} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos\alpha\right)$$

Equazioni differenziali e coefficienti costanti

Un'equazione differenziale della forma

$$a\frac{d^n y}{dx^n} + b\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \text{———} + c\frac{dy}{dx} + y = 0$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}(t=0) = c_{n-1} \\ \vdots \\ y(t=0) = c_0 \end{cases}$$

è un'equazione facilmente risolvibile.

Occorre cercare una soluzione della

forma $y = e^{\lambda x}$ sostituire nell'

equazione e risolvere l'equazione caratteristica

in λ trovando le radici.

Se $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ sono le radici allora la

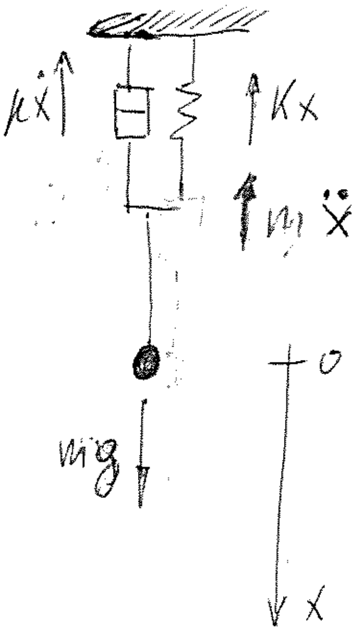
soluzione è della forma

$$y = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x} \ldots + C e^{\lambda_n x}$$

i coefficienti $A \ldots C$ si determinano

imponendo le condizioni al contorno.

Moti oscillatori



Considero una sfera di massa m sospesa ad una molla con costante elastica K in moto in un fluido viscoso con costante di smorzamento μ.

Le equazioni si scrivono

$$-m\ddot{x} - Kx - \mu\dot{x} + mg = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x + \frac{\mu}{m}\dot{x} = mg$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}g$$

L'equazione differenziale ha un termine noto $g \neq 0$. Una soluzione generale di questa equazione può essere vista come somma

di una soluzione dell'omogenea associata

$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ più una soluzione

particolare dell'equazione di partenza

che nel nostro caso può essere $x = \frac{mg}{k}$.

Andiamo a risolvere l'omogenea associata

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

cercando una soluzione della forma $x = e^{\lambda t}$

sostituendo

$\lambda^2 + \frac{\mu}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$ ottengo l'equazione

caratteristica le cui radici sono

(6)

$$\lambda = \frac{-\frac{\mu}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 - 4\frac{K}{m}}}{2} = -\frac{\mu}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}}$$

$\boxed{1^\circ \text{ caso - particolare } \quad \mu = 0}$

$$\lambda = \pm i\omega \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$x = A_1 e^{+i\omega t} + B_1 e^{-i\omega t}$$

$$x = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

La soluzione generale è

$$x = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{mg}{K}$$

$$x_0 = A + \frac{mg}{K} \Rightarrow A = x_0 - \frac{mg}{K}$$

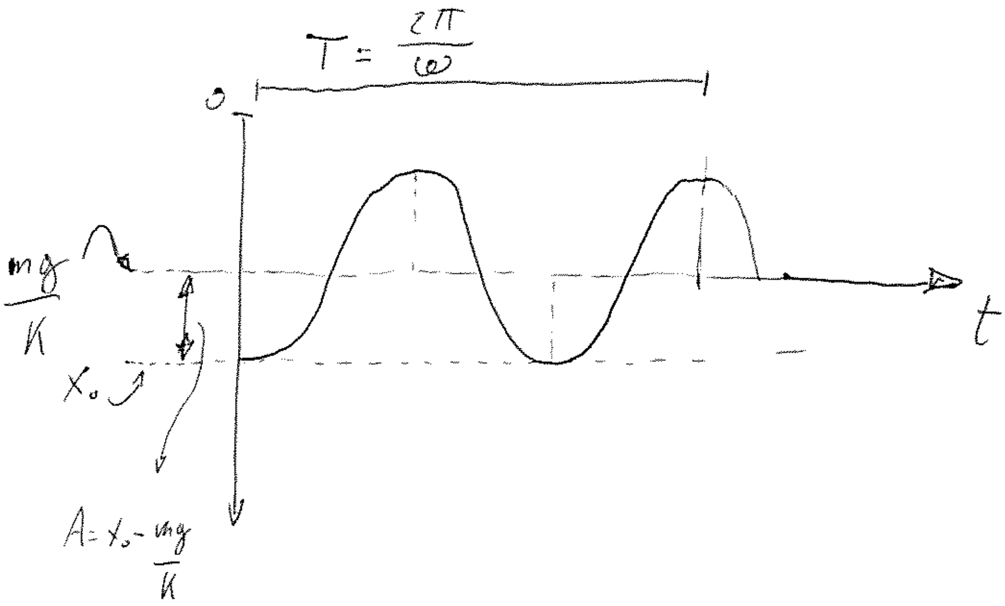
$$\dot{x}_0 = \omega B \Rightarrow B = \frac{\dot{x}_0}{\omega}$$

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{mg}{K}\right)\cos(\omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t) + \frac{mg}{K}$$

Consideriamo il caso particolare $\dot{x}_0 = 0$ per semplicità.

La soluzione è un moto oscillatorio intorno alla posizione $x = \frac{mg}{K}$

con ampiezza $A = x_0 - \frac{mg}{K}$



La $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ è detta pulsazione

il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

la frequenza $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

$\boxed{2^{\circ} \text{ caso} \quad \mu \neq 0 \quad \Delta > 0}$

Smorzamento critico.

Nel caso $\left(\frac{\mu}{m}\right)^2 > 4\frac{K}{m}$ cioè

$$\begin{cases} \omega_s^2 > 4\,\omega_n^2 \Rightarrow \frac{\mu}{m} > 2\sqrt{\frac{K}{m}} \\ \omega_s > 2\,\omega_n \end{cases}$$

le soluzioni della equazione caratteristica

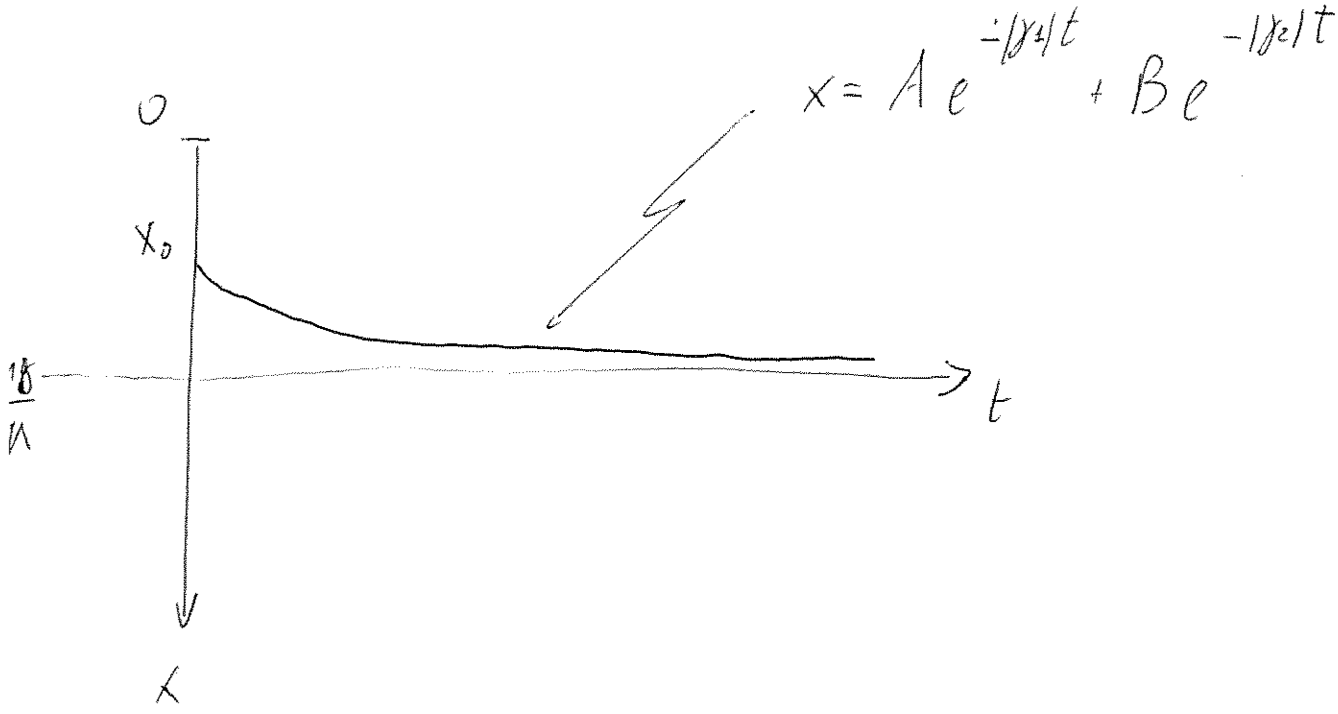
sono $\gamma_1 = -\frac{\omega_s}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_s}{2}\right)^2 - \omega_N^2} < 0$

$$\gamma_2 = -\frac{\omega_s}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_s}{2}\right)^2 - \omega_N^2} < 0$$

E la soluzione è della forma

$$x = A e^{-|\gamma_1| t} + B e^{-|\gamma_2| t}$$

è una decrescita esponenziale senza oscillazioni.



$\boxed{3^\circ \text{ caso} \quad \mu \neq 0 \qquad \Delta < 0}$

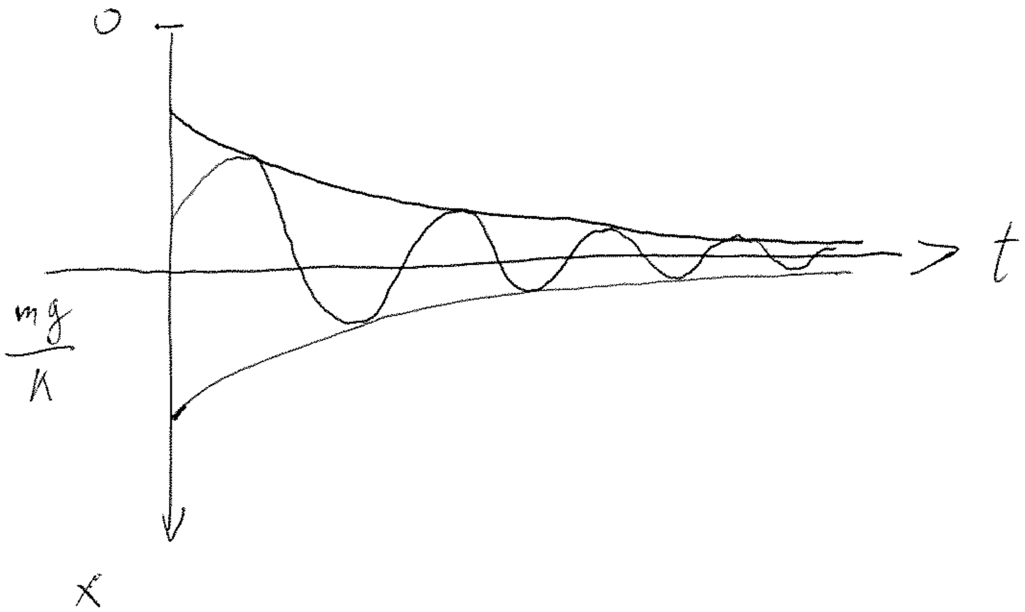
La soluzione è della forma

$$X = e^{-\frac{\mu}{2m}t}\left(A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)$$

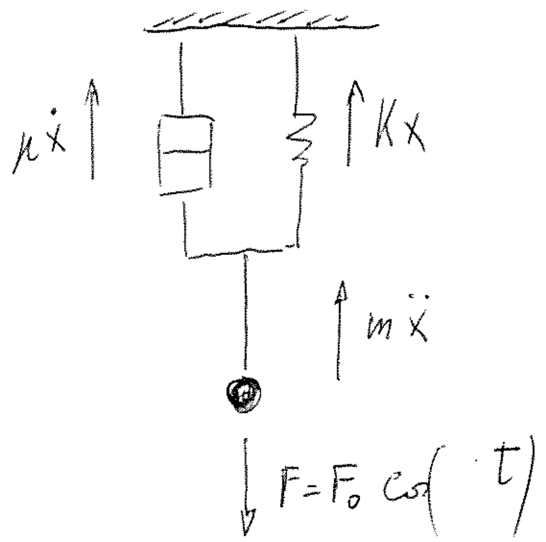
$$X = e^{-\frac{\omega_s t}{2}}\left(A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_N^2 - \left(\frac{\omega_s}{2}\right)^2} \qquad \text{con } \omega_s = \frac{\mu}{m}$$

$$\omega_N = \sqrt{\frac{K}{m}}$$


0
$\frac{mg}{K}$
t
x

Moti forzati e risonanze



Considero un corpo di massa m soggetto ad una forzante del tipo $F = F_0 \cos(\Omega t)$ e sospeso ad una molla di costante K in un fluido viscoso di costante μ.

Le equazioni diventano

$$m\ddot{x} + \mu \dot{x} + Kx = F_0 \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{K}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + \omega_s^2 \dot{x} + \omega_N^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

Come abbiamo visto una soluzione può essere vista come somma di una soluzione particolare più una soluzione dell'omogenea associata.

La soluzione dell'omogenea associata è una funzione smorzata che tende a $\emptyset$ per $t \to \infty$.

A regime possiamo dire che la soluzione generale coincide con la soluzione particolare.

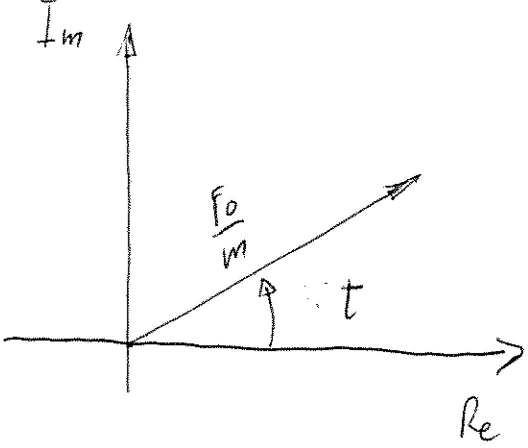
Per semplicità sostituisco la funzione reale

$$\frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$ con la funzione immaginaria

$$\frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}.$$

Nel piano complesso la funzione $\frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$

detta fasore si rappresenta come segue:



è un vettore di modulo $\frac{F_0}{m}$ che ruota con

velocità angolare Ωt.

Cerco una soluzione della forma

$$\begin{cases} x = A e^{i(\Omega t + \varphi)} \\ \dot{x} = A i \omega \, e^{i(\Omega t + \varphi)} \\ \ddot{x} = -A \omega^2 e^{i(\Omega t + \varphi)} \end{cases}$$

Moltiplicare una funzione complessa per i

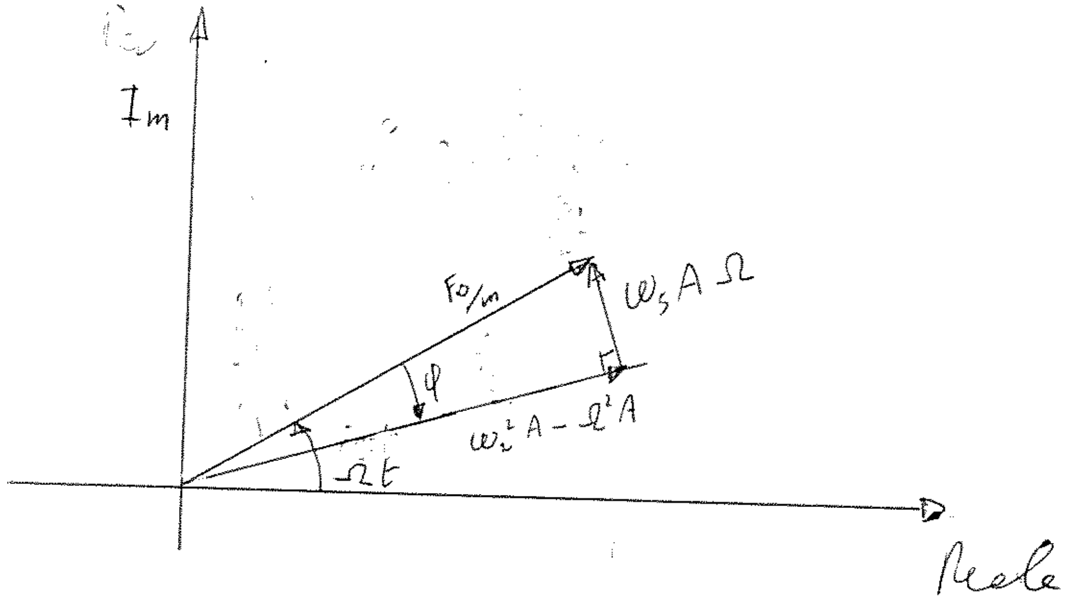
equivale moltiplicarla per $e^{i\frac{\pi}{2}}$ cioè ruotato di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario.

Rappresentiamo ora i fasori nel piano complesso

$$\ddot{x} = -A\Omega^2 e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

$$\omega_s^2 \dot{x} = \omega_s^2 A i \Omega e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

$$\omega_n^2 x = \omega_n^2 A e^{i(\Omega t + \varphi)}$$



All'equilibrio

$$\frac{F_0^2}{m^2} = A^2\left(\left(\omega_n^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(\Omega \omega_s^2\right)^2\right)$$

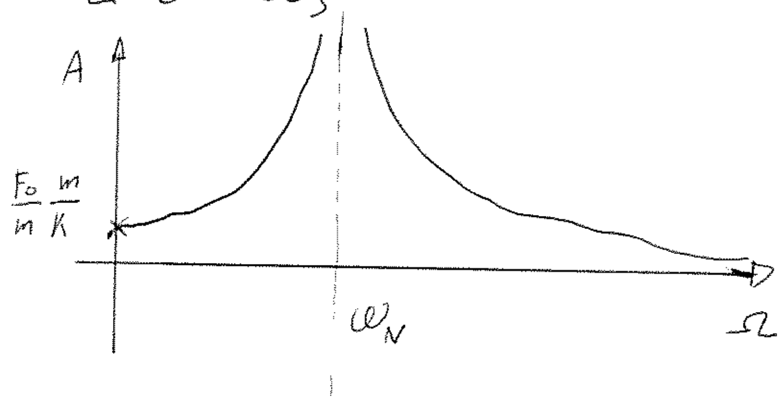
da cui
$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (\Omega \omega_s^2)^2}}$$

Mentre lo sfasamento

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega_s^2 \Omega}{\omega_N^2 - \Omega^2}$$

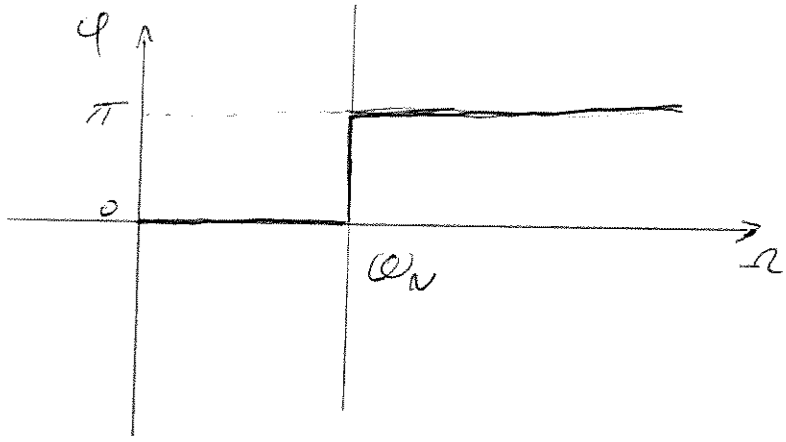
Consideriamo il caso particolare in cui non c'è l'attrito viscoso cioè $\omega_s = 0$

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_N^2 - \Omega^2)}$$



Per $\Omega \to \omega_N$ l'ampiezza tende all'infinito.

Questo fenomeno è detto di risonanza.



In presenza di uno smorzatore l'ampiezza non tende all'infinito per $\Omega \to \omega_n$