Il momento magnetico del fermione di Dirac

Il momento magnetico del fermione di Dirac

Prima di analizzare il momento magnetico del fermione di Dirac consideriamo il caso classico di un atomo avente un momento angolare L_z lungo l'asse z.

Se l'atomo è formato da un solo elettrone orbitante, supponendo per semplicità che l'elettrone percorra un'orbita circolare, possiamo associare all'atomo una corrente

$i = \dfrac{e\,v}{2\pi r}$ dove e è la carica dell'elettrone e r è il raggio della sua orbita.

Per la forza di Lorentz sull'elettrone, supposto immerso in un campo B_z, agisce un momento

$$\vec{\mu} = \frac{e v}{2\pi r} (\pi r^2)\, \hat{n}$$ dove $\hat{n}$ è il versore normale alla superficie definita dalla sua orbita.

$$= \frac{1}{2} e v r\, \hat{n}$$

Considerando che il momento

$$\vec{L}_z = m_e v r\, \hat{n}$$ dove m_e = massa elettrone

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2m_e} e \vec{L}_z$$

Se facciamo riferimento allo spin dell'elettrone

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2m_e} e \vec{S}$$ dove $S = \pm \frac{1}{2} \hbar$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2m_e} e \frac{1}{2} \hbar\, \hat{n} = \mu_B \frac{g}{\hbar} \vec{S}$$

dove $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ è una costante chiamata magnetone di Bohr e g "fattore g"

Nel nostro caso vale $g = 1$.

Il momento magnetico $\vec{\mu}$ se immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ genera un momento $\vec{\tau}$ che tende a far allineare il campo magnetico al momento magnetico $\vec{\mu}$.

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \mu B \sin\theta$$

l'energia associata al momento magnetico $\vec{\mu}$ vale

$$dW = \tau \, d\theta = \mu B \sin\theta \, d\theta = d(-\mu B \cos\theta) =$$
$$= d(-\vec{\mu}\vec{B})$$

Da cui $U = -\vec{\mu}\vec{B}$.

Poiché vale la relazione $F = -\nabla U$

$$F_z = +\mu \frac{dB}{dz}$$

Questo effetto è detto "Stern and Gerlach effect"
perché Stern e Gerlach furono i primi a
verificare che un elettrone che attraversa un
campo magnetico B_z crescente si divide in
due fasci a seconda che abbia spin $\pm\frac{1}{2}\hbar$
perché soggetto ad una forza diretta lungo
l'asse z.

Equazione di Dirac

Scriviamo ora l'equazione di Dirac in una forma alternativa

Nella forma standard

$$\left(\gamma^0 p^0 - \gamma^1 p^1 - \gamma^2 p^2 - \gamma^3 p^3 - m\right)\psi = 0$$

con $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ $\quad i:1-3$

Se si scompone lo spinore ψ a 4 componenti in due spinori a 2 componenti $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ possiamo riscrivere l'equazione in una forma alternativa

$$\begin{cases} p^0\varphi - \sigma_1 p^1 \chi - \sigma_2 p^2 \chi - \sigma_3 p^3 \chi - m\varphi = 0 \\ -p^0\chi + \sigma_1 p^1 \varphi + \sigma_2 p^2 \varphi + \sigma_3 p^3 \varphi - m\chi = 0 \end{cases}$$

Sostituendo la funzione $\varphi \to \tilde{\varphi}\, e^{-imt}$

e ricordando che $p^0 = i\frac{\partial}{\partial t}$

$$\begin{cases} p^0\tilde{\varphi} - \vec{\sigma}\vec{p}\tilde{\chi} = 0 \\ p^0\tilde{\chi} + 2m\tilde{\chi} = \vec{p}\vec{\sigma}\tilde{\varphi} \end{cases}$$

di seguito omettiamo le tilde

$$\begin{cases} p^0\varphi - \vec{p}\vec{\sigma}\chi = 0 \\ p^0\chi + 2m\chi = \vec{p}\vec{\sigma}\varphi \end{cases}$$

Per ottenere le equazioni che descrivono il moto di un elettrone in un campo dato occorre effettuare la sostituzione minimale

$$p^0 \to p^0 - eV$$

$$p^i \to p^i - eA^i$$

$$\begin{cases} (p^0 - eV)\varphi - (\vec{p} - e\vec{A})\vec{\sigma}\chi = 0 \\ (p^0 - eV)\chi + 2m\chi = (\vec{p} - e\vec{A})\vec{\sigma}\varphi \end{cases}$$

In prima approssimazione la seconda equazione diventa:

$$2m\chi = (\vec{p} - e\vec{A})\vec{\sigma}\varphi$$

$$\chi = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})\vec{\sigma}\varphi}{2m}$$

sostituendo nella prima

$$(p^0 - eV)\varphi = \frac{1}{2m}\left(\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})\right)^2\varphi \qquad (*)$$

Per le matrici di Pauli vale la relazione

$$(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} + i\vec{\sigma}(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

nel nostro caso $\vec{a} = \vec{b} = (\vec{p} - e\vec{A})$

$$\left(\vec{\sigma}(\vec{p} - e\vec{A})\right)^2 = (\vec{p} - e\vec{A})^2 + i\vec{\sigma}\left([\vec{p} - e\vec{A}]\wedge[\vec{p} - e\vec{A}]\right)$$

Considero il termine $[\vec{p} - e\vec{A}]\wedge[\vec{p} - e\vec{A}]\varphi$

$$= \left[\vec{P} \wedge (-e\vec{A}\varphi) \right] - e\vec{A} \wedge (\vec{P}\varphi)$$

Sostituendo $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$

$$-ei\,\vec{\nabla} \wedge (\vec{A}\varphi) - ie\vec{A} \wedge (\vec{\nabla}\varphi) =$$

$$= -ei\,\vec{\nabla} \wedge (\vec{A}\varphi) + ie(\vec{\nabla}\varphi) \wedge \vec{A} =$$

$$= -ie\left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{A}\varphi) - (\vec{\nabla}\varphi) \wedge \vec{A} \right] =$$

$$= -ie\left[\cancel{(\vec{\nabla}\varphi) \wedge \vec{A}} + \varphi\,\vec{\nabla} \wedge \vec{A} - \cancel{(\vec{\nabla}\varphi) \wedge \vec{A}} \right]$$

$$= -ie\,\varphi\,\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = -ie\,\varphi \,\mathrm{rot}\,\vec{A} = -ie\vec{B}\varphi$$

Ritornando alla (*)

$$(p^0 - eV)\varphi = \frac{1}{2m}\left((\vec{p} - e\vec{A})^2 - ie\vec{\sigma}\vec{B} \right)\varphi$$

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + eV - \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\vec{B} \right]\varphi$$

Quest'equazione si differenzia dall'equazione non relativistica di Schrodinger per la presenza nell'hamiltoniana dell'ultimo termine che considerando anche $\hbar$: si scrive

$$-\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}\vec{B}\varphi .$$

Nell'approssimazione al primo ordine l'elettrone si comporta come una particella che oltre alla carica elettrica possiede un momento magnetico.

$$\vec{\mu}=\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}=g\,e\frac{\hbar}{4m}\vec{\sigma}=g\frac{e\hbar\vec{s}}{2m}=g\mu_B\frac{\vec{S}}{}$$

L'equazione (+) fu già ricavata da Pauli prima dell'equazione di Dirac.

l'equazione di Dirac approssima quindi l'equazione di Schrodinger nel caso non relativistico inoltre include il momento magnetico generato dallo spin della particella che non è incluso nella equazioni di Schrodinger ma fu aggiunto successivamente da Pauli dopo aver scoperto sperimentalmente l'esistenza dello spin.
Il valore del momento magnetico ricavato dalla equazioni di Dirac risulta essere doppio di quello calcolato classicamente.
Il fattore g_s è stato misurato sperimentalmente e risulta $g_s = 2.002319$ in ottimo accordo con le previsioni della QED e con l'equazione di Dirac.