Equazione di Dirac per una particella libera

Equazione di Dirac per una particella libera

Scriviamo l'equazione di Dirac.

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$$

esplicitando i termini

$$i\gamma^0\partial_0\psi + i\gamma^1\partial_1\psi + i\gamma^2\partial_2\psi + i\gamma^3\partial_3\psi - m\psi = 0$$

ricordando che
$$\begin{cases} i\partial_0\psi = E\psi \\ i\partial_i\psi = \pm p_i\psi \quad \text{(coordinate covarianti)} \end{cases}$$

$$\left[\gamma^0 E \pm p_i\gamma^i - m\right]\psi = 0$$

$$\left\{E\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{4\times4} \pm p_i\begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}_{4\times4} - m\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4}\right\}\psi = 0$$

$$\left\{ E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - p^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - p^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. - p^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \psi = 0$$

$$\begin{bmatrix} E-m & 0 & -p^3 & -p^1+ip^2 \\ 0 & E-m & -p^1-ip^2 & p^3 \\ -p^3 & -p^1+ip^2 & -E-m & 0 \\ -p^1-ip^2 & p^3 & 0 & -E-m \end{bmatrix} \psi = 0$$

Si cerca una soluzione della forma

$$\psi = u(p)\, e^{i(\vec{p}\vec{x} - Et)}$$

Per avere una soluzione diversa da quella banale imponiamo che il determinante sia nullo.

Che è equivalente a

$$(E^2-m^2-p^2)^2=0$$ le cui soluzioni sono

$$E_+ = +\sqrt{p^2-m^2}$$

$$E_- = -\sqrt{p^2-m^2}$$

Troviamo l'espressione esplicita dello spinore con il caso $E>0$ procedendo prima con le condizioni $u_1=A$ $u_2=0$ e calcolando u_3 e u_4 poi con la condizione $u_1=0$ $u_2=A$ e calcolando u_3 e u_4. In modo analogo si procede per $E<0$.

Ponendo

$$E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$u_{\uparrow E_+}(p) = \sqrt{\frac{2E}{E+m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p^3}{E+m} \\ \dfrac{p^1 + i p^2}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$u_{\downarrow E_+}(p) = \sqrt{\frac{2E}{E+m}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p^1 - i p^2}{E+m} \\ -\dfrac{p^3}{E+m} \end{pmatrix}$$

Per $E = -\sqrt{p^2+m^2}$

$$u_{\uparrow E_-}(p) = \sqrt{\frac{2E}{E+m}} \begin{pmatrix} \dfrac{p^3}{E-m} \\[2ex] \dfrac{p^1 - i p^2}{E-m} \\[2ex] 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{\downarrow E_-}(p) = \sqrt{\frac{2E}{E+m}} \begin{pmatrix} \dfrac{p^1 - i p^2}{E-m} \\[2ex] -\dfrac{p^3}{E-m} \\[2ex] 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il valore della costante A è stato calcolato imponendo la relazione $u^\dagger_{E_+} u_{E_+} = 1$ mentre $u^\dagger_{E_-} u_{E_-} = -1$.

L'equazione di ortogonalità tra gli

spinori prevede

$$\bar{u}_{E_+\uparrow}\, u_{E_+\downarrow} = \bar{u}_{E_+\downarrow}\, u_{E_+\uparrow} = \bar{u}_{E_-\uparrow}\, u_{E_-\downarrow} = \bar{u}_{E_-\downarrow}\, u_{E_-\uparrow} = 0$$

È possibile dimostrare la relazione

$$\sum_{s=1,2} u_{\uparrow E_+}\bar{u}_{\uparrow E_+} + u_{\downarrow E_+}\bar{u}_{\downarrow E_+} = \frac{\hat{p}+m}{2m}$$

e analogamente

$$\sum_{s=1,2} u_{\uparrow E_-}\bar{u}_{\uparrow E_-} + u_{\downarrow E_-}\bar{u}_{\downarrow E_-} = \frac{\hat{p}-m}{2m}$$

Infine è possibile dimostrare la relazione

$$\bar{u}\, u = \frac{E}{m}$$

da cui deriva il coefficiente di normalizzazione $\sqrt{\frac{m}{VE}}$ per la funzione ψ.