

PROGETTAZIONE ASSISTITA DI STRUTTURE MECCANICHE

CONSIDERAZIONI INTRODUTTIVE SULL'ANALISI DELLE STRUTTURE

Gli elementi analitici a disposizione dello strutturista che si propone di valutare lo stato di tensione e di deformazione di una membratura sono fondamentalmente le equazioni di equilibrio e le equazioni di congruenza nonché il legame costitutivo che pone in relazione le tensioni alle corrispondenti deformazioni.

Nel caso generalissimo le equazioni, del tipo differenziale con derivate parziali, si presentano di ardua risoluzione se non per particolarissime condizioni al contorno.

Di qui nascono le soluzioni riferite a geometrie e condizioni di carico molto ben definite e particolari che è possibile trovare in letteratura o sui manuali.

A tal proposito si ricordano le notissime formulazioni di De Saint Venant concernente i solidi con una dimensione prevalente rispetto alle altre (travi), le formulazioni relative ad elementi bidimensionali privi di resistenza all'inflessione (membrane) oppure capaci di sopportare tali carichi (piastre).

Numerosi metodi sono stati messi a punto nel corso degli anni per risolvere il problema dell'equilibrio elastico sempre nell'ambito, come già detto, di geometrie e condizioni di carico che consentissero una descrizione analitica atta ad essere sviluppata con difficoltà più o meno grandi.

D'altro canto il problema è stato affrontato per via analitico-numerica con l'adozione di soluzioni approssimate che verificassero le condizioni di equilibrio

e congruenza sotto l'azione dei cimenti assegnati, in termini di carichi e/o di spostamenti, se non in tutto il corpo almeno in alcuni punti di esso.

Il metodo degli elementi finiti si può così inquadrare fra i metodi numerici, con gli inevitabili fondamenti analitici, che forniscono risultati approssimati operando sulle strutture opportunamente discretizzate in elementi il cui comportamento risulta più facilmente descrivibile.

Riducendo il tutto ad una procedura costituita da operazioni pratiche si può dire che l'analisi strutturale da espletare con il metodo degli elementi finiti comincia con lo studio del disegno progettuale della membratura.

Ad esso segue, come peraltro accade anche quando ci si predisponde all'uso di altre metodologie, la schematizzazione della struttura che consiste nell'individuare nella struttura i caratteri essenziali delle geometrie che la compongono, le posizioni dei vincoli, il tipo e la posizione dei carichi in maniera da non discostarsi eccessivamente dalla realtà ed agevolare o consentire il calcolo seguendo la metodologia prescelta.

Se ci si propone di utilizzare un metodo che muove dalla discretizzazione dovrà essere posta attenzione anche alla economia degli oneri di calcolo evitando la proliferazione di elementi che, se sono in numero elevato, da un conto accrescono la precisione dei risultati d'altra parte elevano gli oneri di calcolo (tempi di

occupazione di memoria) rendendo onerosa e talvolta, in dipendenza dello strumento adottato, non più ottenibile la soluzione.

STRUTTURE E LORO SCHEMATIZZAZIONE E DISCRETIZZAZIONE.

Come si è detto, a partire dal disegno della struttura (disegno costruttivo) l'operazione da compiere preliminarmente è quella dell'individuazione delle parti strutturali principali e della loro tipologia (membrature traveiformi, piastre, geometrie tozze etc...) in modo da ricondurre il loro studio a morfologie di comportamento noto dal punto di vista strutturale.

Tale procedura, va ricordato, è comunque necessaria ogni qual volta ci si accinge ad un calcolo sia pure con i metodi convenzionali analitici.

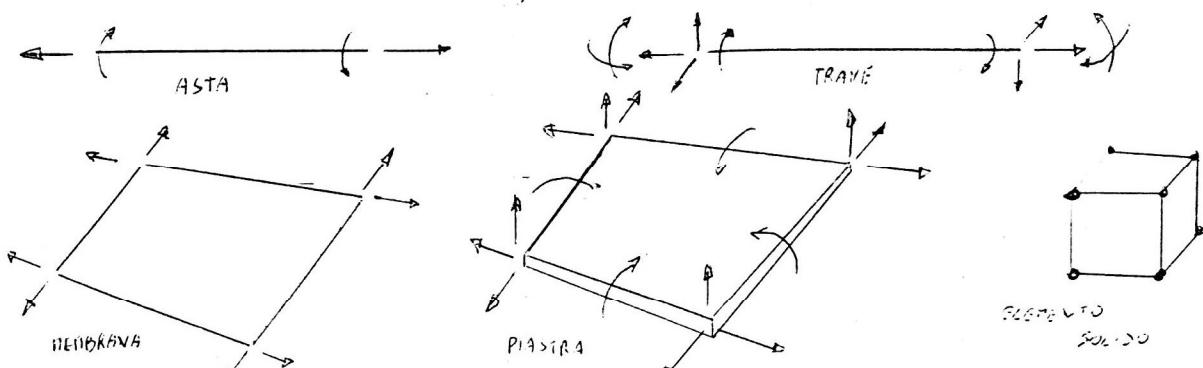
L'individuazione delle tipologie strutturali consente di associare alle parti della struttura effettiva elementi dei quali sarà possibile valutare il comportamento.

A partire dagli elementi più semplici si possono elencare :

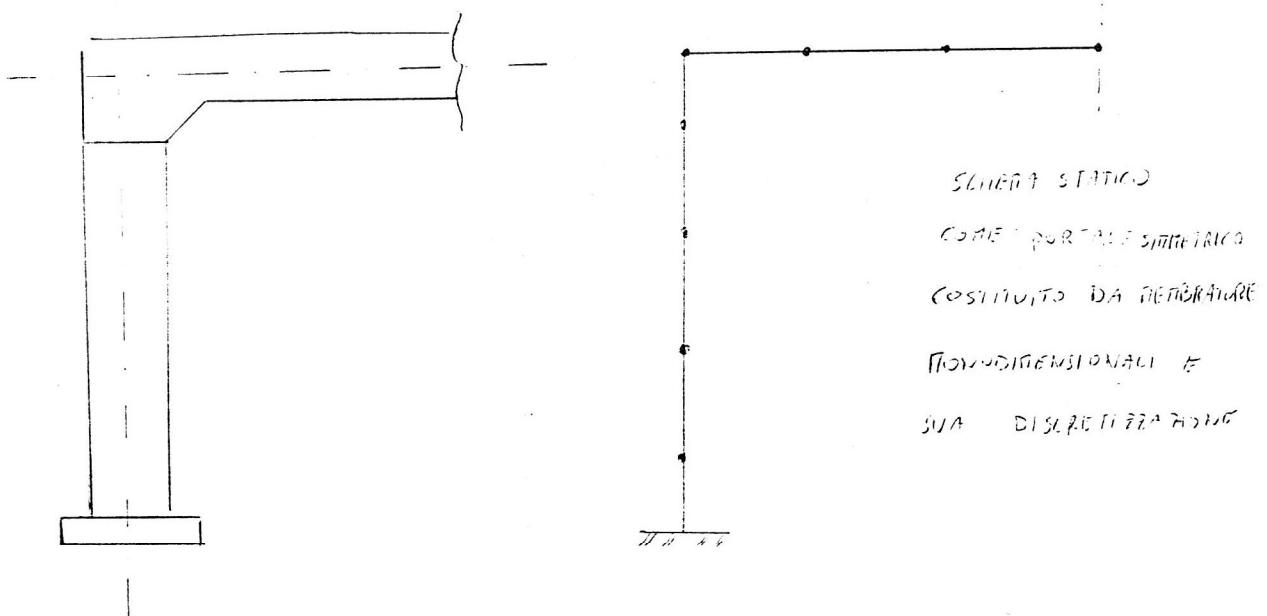
- aste, tipiche delle strutture reticolari, da intendere come elementi monodimensionali capaci di reagire a sforzo normale ed a torsione ;
- travi, elementi anch'essi monodimensionali ma dotati di possibilità di reazione a tutte le caratteristiche, sforzo normale, taglio, torsione e flessione ;
- membrane, elementi bidimensionali privi di rigidità flessionale ;
- piastre, elementi anch'essi bidimensionali dotati di rigidità flessionale ;
- elemento solido.

Tale elenco, naturalmente contiene solo le principali categorie di elementi che è possibile costruire o reperire nella cosiddetta biblioteca di elementi offerta dai processori che operano con il metodo degli elementi finiti.

Un'ultima osservazione generale preliminarmente può essere fatta, di tipo qualitativo, in merito alla discretizzazione. Essa consiste nella

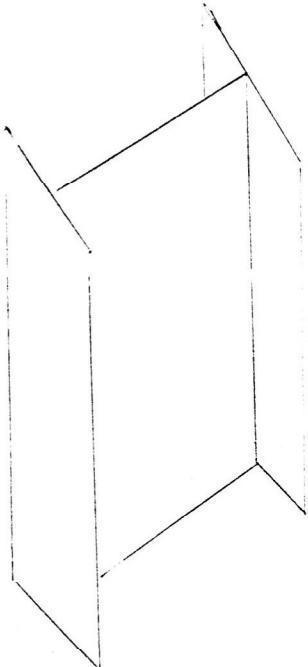


suddivisione della struttura con punti linee o superfici a seconda della geometria individuata se mono-bi-o tridimensionale definendo in tal modo gli elementi i loro estremi o lati o spigoli ed i vertici che vengono chiamati nodi.

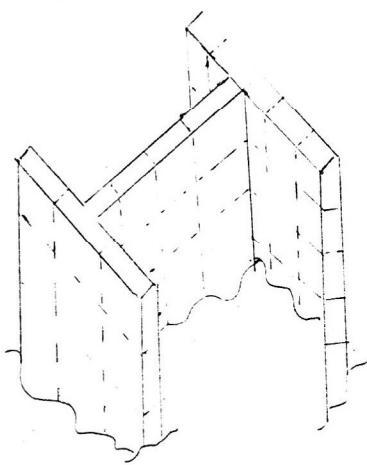


TELAI IN PROFILATO D'ACCIAIO

DISEGNO DEL COMPLESSIVO



ESEMPPIO DI DISCRETIZZAZIONE
CON ELEMENTI BIDIMENSIONALI



ESEMPPIO DI DISCRETIZZAZIONE
CON ELEMENTI TRIDIMENSIONALI

Le figure che precedono esemplificano differenti criteri di discretizzazione applicati alla stessa struttura (o a particolari di essa) che comportano un differente numero di elementi e di nodi e conseguentemente un differente impegno di preparazione della modellazione e di calcolo.

E' importante osservare che gli elementi nei quali risulta suddivisa la struttura espletano il loro comportamento strutturale scambiandosi le azioni unicamente

attraverso i nodi e pertanto gli enti relativi vanno riferiti solo a questi (forze, spostamenti etc...). pertanto, oltre che dalla geometria, la presenza di un nodo è determinata dalla necessità ad esempio di applicazione di una forza esterna ovvero ancora dalla presenza di un vincolo in quanto, nella struttura discretizzata, solo nei nodi è possibile definire gli enti che entrano in gioco e le condizioni che li legano (equilibrio, congruenza, legami costitutivi).

In questa fase si procede alla elaborazione del modello della struttura in termini geometrici e strutturali da sottoporre all'analisi attraverso una procedura ad elementi finiti elaborata in proprio ovvero, più di frequente, attraverso un codice di calcolo prescelto tra i numerosi esistenti.

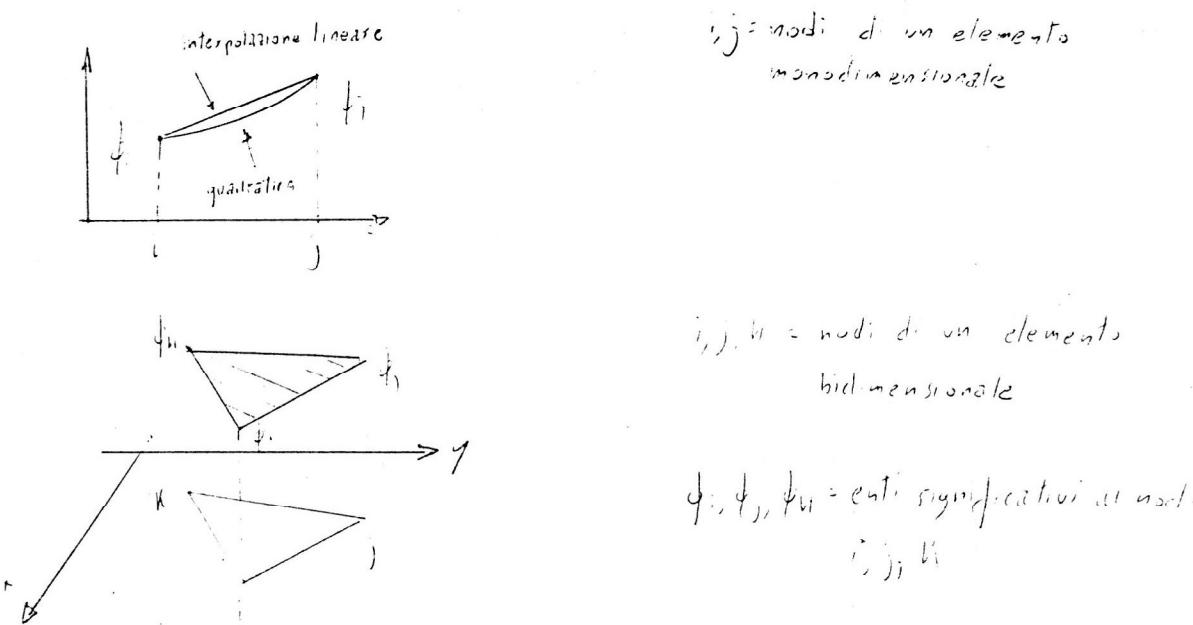
La modellazione della struttura è spesso facilitata da processori in grado di operare la discretizzazione geometrica seguendo tecniche più o meno sofisticate tese a ridurre e semplificare la fatica dell'operatore provvedendo peraltro ad effettuare anche la discretizzazione automatica di interi sottoinsiemi della struttura individuati da macro-geometrie di linea, superficie o volume predefinite.

INTERPOLAZIONE ED INTRODUZIONE ALLE FUNZIONI DI FORMA

Come si è detto il metodo degli elementi finiti si applica ad una struttura discretizzata e gli enti significativi (spostamenti o forze) sono considerati applicati ai nodi e soltanto ad essi.

Da ciò deriva che tutte le condizioni che si scrivono per impostare la risoluzione del problema (equazioni di equilibrio e congruenza, bilanci energetici) sono solo ad essi riferiti. Nasce quindi l'esigenza di fornire delle relazioni che costituiscano l'approssimazione necessaria per passare dalle variabili riferite ai nodi al valore che esse assumono all'interno di ciascun elemento.

Questa estensione viene effettuata dalle cosiddette funzioni di forma che, come si vedrà, rivestono grande importanza nel modellare il comportamento dell'elemento.



Le figure che precedono intendono visualizzare alcuni semplici tipi di funzioni di forma che costituiscono il modello approssimante per interpolazione dell'andamento di ϕ all'interno del sottodomini rappresentato dall'elemento.

Solitamente, se non si è in presenza di particolari esigenze, le funzioni di forma sono rappresentate da polinomi nelle variabili spaziali x , y , z rappresentative delle coordinate relative ad un sistema opportunamente prescelto con lo scopo di semplificare e generalizzare la rappresentazione analitica.

APPROXIMAZIONE MEDIANTE POLINOMI INTERPOLATORI

Utilità : semplicità computazionale integrazione/derivazione ;
miglioramento della soluzione per elevazione del grado del polinomio.

- 1) Rilocalizzazione dei nodi r-method
- 2) Infittimento della mesh h-method
- 3) Elevazione del grado del polinomio p-method.

FORME POLINOMIALI IN COORDINATE GLOBALI

Approssimazioni polinomiali monodimensionali, bidimensionali e tridimensionali.

$$\phi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_m x^m$$

In forma matriciale

$$\{\eta\}^T = \{1, x, \dots, x^n\} \quad (\text{vettore delle coordinate})$$

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{Bmatrix}$$

(vettore dei coefficienti ovvero coordinate generalizzate)

$$\{\phi(x)\} = \{\eta\}^T \{\alpha\}$$

2) Approssimazioni in domini bidimensionali

$$\phi(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy + \dots + \alpha_m y^n.$$

ovvero essendo

$$\{\eta\}^T = \{1, x, y, x^2, y^2, xy, \dots, y^n\} \text{ e}$$

$$\{\alpha\}^T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$$

$$\text{si ha } \{\phi(x,y)\} = \{\eta\}^T \{\alpha\}$$

$$\text{osservando che dovrà essere } m = \sum_{j=1}^{n+1} j$$

3) Approssimazione in un dominio tridimensionale

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} zx + \\ & \dots - \alpha_m z^n \end{aligned}$$

ed in forma matriciale

$$\{\phi(x,y,z)\} = \{\eta\}^T \{\alpha\}$$

osservando che dovrà essere $m = \sum_{j=1}^{n+1} j(n+2-j)$

Esempi

Modello lineare ($n=1$)

caso monodimensionale	$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$
caso bidimensionale	$\phi(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$
caso tridimensionale	$\phi(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$

Modello quadratico ($n=2$)

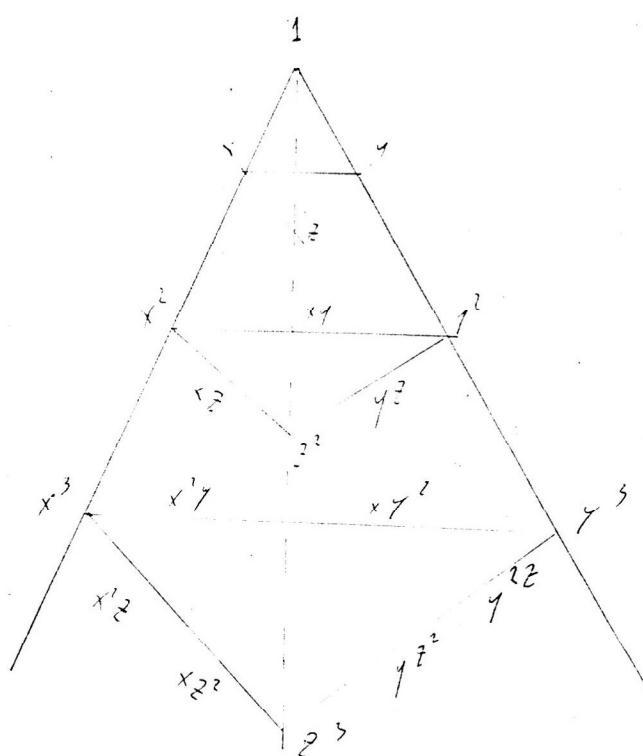
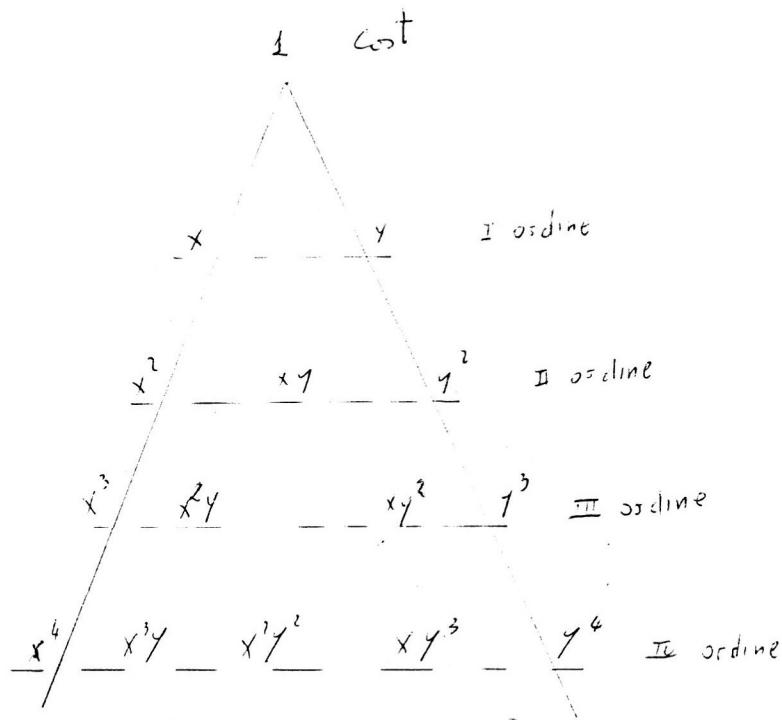
caso monodimensionale	$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$
caso bidimensionale	$\phi(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y - \alpha_4 x^2 +$ $+ \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy$
caso tridimensionale	$\phi(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z +$ $+ \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy +$ $+ \alpha_9 yz + \alpha_{10} zx$

Modello cubico ($n=3$)

caso monodimensionale	$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$
caso bidimensionale	$\phi(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 +$ $+ \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 y^3 +$ $+ \alpha_9 x^2 y + \alpha_{10} xy^2$

caso tridimensionale

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y - \\& + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \\& + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} zx - \alpha_{11} x^3 + \\& + \alpha_{12} y^3 + \alpha_{13} z^3 + \alpha_{14} x^2 y - \\& + \alpha_{15} x^2 z + \alpha_{16} y^2 x + \alpha_{17} y^2 z - \\& + \alpha_{18} z^2 x + \alpha_{19} z^2 y + \alpha_{20} xyz.\end{aligned}$$



POLINOMI INTERPOLATORI IN TERMINI DI GRADI DI LIBERTÀ
NODALI.

L'analisi al discreto, nella fattispecie condotta con gli elementi finiti, conduce alla scrittura di condizioni che presentano come incognite i valori di enti ai nodi (spostamenti, temperature, pressioni etc...). Una volta risolte le equazioni e note le quantità in corrispondenza dei punti suddetti si deve risalire al risultato in tutto il dominio occupato dal corpo attraverso le funzioni di interpolazione.

Se si considera la suddivisione in elementi e si indicano con $\phi^{(i)}$ i valori assunti ai nodi dagli enti presi in esame (gradi di libertà) allora si può raccogliere nella forma matriciale che segue l'interpolazione dei valori all'interno dell'elemento

$$\begin{Bmatrix} \phi^{(1)} \text{ al nodo 1} \\ \phi^{(2)} \text{ al nodo 2} \\ \dots \\ \phi^{(m)} \text{ al nodo m} \end{Bmatrix} = \{\phi^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \{\eta\}^T \text{ al nodo 1} \\ \{\eta\}^T \text{ al nodo 2} \\ \dots \\ \{\eta\}^T \text{ al nodo 3} \end{Bmatrix} \{\alpha\} = [\eta] \{\alpha\}$$

In sintesi, riscrivendo, si ha in successione

$$\{\phi^{(e)}\} = [\eta] \{\alpha\}$$

da cui si possono trarre, sotto condizioni di invertibilità della matrice $[\eta]$ i coefficienti $\{\alpha\} = [\eta]^{-1} \{\phi\}^{(e)}$

D'altra parte è stato stabilito in precedenza in generale $\{\phi\} = [\eta]^T \{\alpha\}$ da cui $\{\phi\} = [\eta]^T [\eta]^{-1} \{\phi\}^{(e)} = [N] \{\phi\}^{(e)}$. La matrice $[N] = [\eta]^T [\eta]^{-1}$ è detta funzione di forma.

La funzione di forma ci consente di scrivere $\{\phi\} = [N] \{\phi\}^{(e)}$.

L'invertibilità della matrice $[\eta]$ costituisce una limitazione nell'uso dell'interpolazione polinomiale cui si aggiunge il vincolo che, poiché essa deve essere quadrata, il numero di coefficienti (coordinate generalizzate) deve essere uguale al numero dei gradi di libertà presi in considerazione nell'elemento.

Considerazioni sulla scelta del polinomio interpolatore

- 1) Il p.i. deve soddisfare quanto possibile i criteri di convergenza (di cui al prosieguo)
- 2) Il modello descritto del p.i. deve essere indipendente dal sistema di coordinate
- 3) Il numero di coordinate generalizzate α_i deve essere uguale al numero di g.d.l. nodali dell'elemento.

La condizione di cui al punto 2), che implica l'invarianza del modello nel passaggio tra sistemi di coordinate comporta la cosiddetta isotropia geometrica ed è realizzata ad es. per un sistema di coordinate cartesiane, quando il polinomio

contiene i termini atti a realizzare la simmetria rappresentata in 2-D dal triangolo di Pascal e in 3-D dal tetraedro.

OSSERVAZIONI

Il metodo degli elementi finiti è un metodo numerico basato sulla discretizzazione del continuo e sull'approssimazione delle variabili prescelte attraverso funzioni (polinomi) convenienti.

C'è da attendersi, pertanto, che al ridursi delle dimensioni degli elementi, ovvero all'infittirsi dei nodi, si ottengono soluzioni successivamente sempre più approssimate ; lo stesso dicasi per quanto concerne il grado del polinomio.

1) Continuità

Va anzitutto osservato che il requisito base è la continuità del modello d'interpolazione per fare in modo da rispettare la continuità della "variabile di campo" modellata all'interno dell'elemento $\{\phi\}$.

2) Modellazione degli stati uniformi

Devono essere rappresentati dal modello d'interpolazione tutti gli stati uniformi sia della variabile di campo ϕ sia delle sue derivate fino all'ordine più alto che risulta presente nell'espressione del funzionale $I(\phi)$ anche quando le dimensioni dell'elemento si riducono al limite fino ad annullarsi.

Una giustificazione fisica di questa seconda affermazione si può dare ricordando che il valore costante di ϕ costituisce la più elementare possibile variazione che, pertanto, deve poter essere restituita quando i valori nodali sono tutti uguali tra loro.

Simile osservazione può essere riferita anche alle derivate specie pensando alla successiva suddivisione in elementi sempre più piccoli e nodi sempre più fitti.

Viene dimostrato peraltro che non si può pretendere di ottenere la convergenza verso il risultato "esatto" se il modello non consente la rappresentazione dello stato costante.

Nel nostro caso specifico di problematiche strutturali ciò vuol dire che la funzione approssimante deve essere in grado di modellare i moti rigidi (spostamenti rigidi - >deformazioni nulle) e deformazioni costanti.

3) Continuità al contorno dell'elemento

Le variabili di campo ϕ e le sue derivate fino ad un ordine meno rispetto a quello più alto che appare nel funzionale devono essere continue anche ai bordi dell'elemento (interfacce).

Bisogna rammentare che il modello costruito è di tipo discreto e finisce in tutto il dominio con l'essere rappresentato da un insieme di funzioni valide ciascuna nel loro sottodomino.

Come vedremo in seguito la valutazione delle caratteristiche dell'elemento va fatta attraverso operazioni di integrazione del tipo $\int \frac{d^r \phi}{dx^r} dx$ per cui, perché sia definito un tale tipo di integrale la funzione ϕ deve essere continua fino all'ordine $r-1$. Per inciso si dice che se la derivata r -esima della variabile ϕ è continua allora ϕ ha continuità $C^{(r)}$.

COMPATIBILITÀ CONFORMABILITÀ E COMPLETEZZA.

Se sono rispettate le condizioni 1) e 3) gli elementi si chiamano compatibili o conformabili.

Se è rispettata la condizione 2) gli elementi si dicono completi.

La completezza richiede che ϕ abbia continuità $C^{(r)}$ all'interno dell'elemento e $C^{(r-1)}$ all'interfaccia.

A conclusione del discorso va comunque ricordato che, sebbene in linea teorica sussistano i requisiti sopra enunciati come condizioni di convergenza dei risultati, moltissimi modelli d'interpolazione non li rispettano tutti e tuttavia comportano risultati soddisfacenti e convergenza verso risultati corretti.

L'esperienza mostra che interpolazioni complete ma non compatibili comportano risultati soddisfacenti.

Per effettuare una corretta analisi di convergenza bisogna che

- tutte le meshes siano contenute nelle precedenti

- gli elementi devono essere più piccoli in modo che i nodi ricadano sempre all'interno di un elemento più grande
- la forma dell'interpolazione non deve cambiare durante l'infittimento.

INTERPOLAZIONE LINEARE IN TERMINI DI COORDINATE GLOBALI

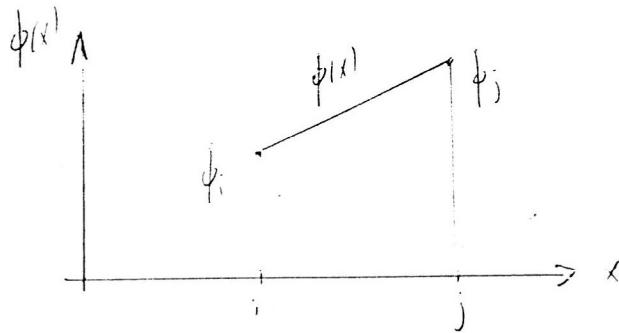
Come si è visto in precedenza, si può adottare, per effettuare l'interpolazione dei valori all'interno di ciascun elemento, un polinomio di grado qualsivoglia.

Se la scelta cade sul più semplice - quello di primo grado - allora si effettuerà una interpolazione lineare costruendo elementi mono-bi o tridimensionali che vengono chiamati "simplex".

In quanto segue verranno sviluppati modelli di tale tipo in applicazione di quanto indicato nella discussione riguardante i polinomi interpolatori e le funzioni di forma.

ELEMENTI SIMPLEX

Elemento "simplex" monodimensionale.



Assumiamo per $\phi(x)$ la forma lineare $\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$ oppure in altra forma

$$\text{alternativa } \phi(x) = [1, x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

in cui α_1 e α_2 sono dei coefficienti da determinare con le condizioni

$$\phi(x=x_i) = \phi_i \quad \phi(x=x_j) = \phi_j$$

e cioè

$$\phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i$$

$$\phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j$$

da cui risolvendo il sistema nelle incognite α_1 e α_2 si ha

$$\alpha_1 = \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{x_j - x_i}$$

$$\alpha_2 = \frac{\phi_j - \phi_i}{x_j - x_i}$$

per cui si può riscrivere l'interpolazione

$$\phi(x) = \frac{\phi_i x_j - \phi_j x_i}{x_j - x_i} + \frac{\phi_j - \phi_i}{x_j - x_i} x$$

elaborando ed associando i fattori ϕ_i e ϕ_j si ottiene

$$\phi(x) = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \phi_i + \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \phi_j$$

Introducendo ora la funzione di forma $N(x)$, con evidente significato dei simboli, la relazione precedente si può riportare alla forma voluta

$$\phi(x) = [N(x)] \{ \phi \}^e$$

particularizzata nel caso in esame con

$$[N(x)] = [N_i(x), N_j(x)] e$$

$$\{ \phi^{(e)} \} = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}$$

Formulazione alternativa

Allo stesso risultato si perviene anche per altra via già indicata in precedenza e cioè utilizzando la relazione conclusiva $[N(x)] = \{\eta\}^T [\eta]^{-1}$ giacchè un presupposto è verificato essendo noi in presenza di 2 g.d.l. complessivi dell'elemento e di due coefficienti α_1 e α_2 (coordinate generalizzate) del polinomio.

$$\phi(x) = \{\eta\}^T \{\alpha\} = [1, x] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad \{\phi^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

invertendo la matrice

$$[\eta] = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix}$$

$$[\eta]^{-1} = \frac{1}{x_j - x_i} \begin{bmatrix} x_j & -x_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[N(x)] = \{\eta\}^T [\eta]^{-1} = [1, x] \frac{1}{x_j - x_i} \begin{bmatrix} x_j & -x_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ponendo $x_j - x_i = l$

$$N(x) = \left[\frac{x_j - x}{l}, \frac{x - x_i}{l} \right]$$

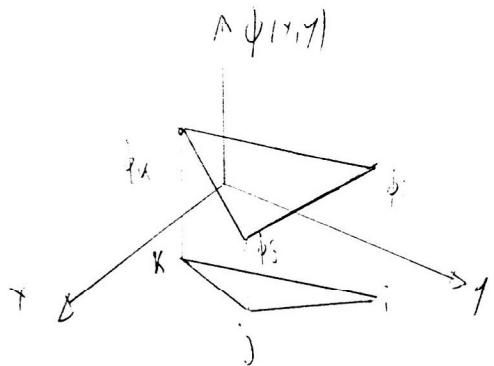
Annotazioni:

A) Le funzioni $N_i(x)$ e $N_j(x)$ sono associate ad un nodo ed hanno la caratteristica di valere 1 al nodo a cui sono associate e 0 agli altri.

B) Le funzioni di interpolazione $N_i(x)$ sono differenti dal modello di interpolazione (polinomiale) dell'elemento $\phi = \{\eta\}^T \{\alpha\}$ che esprime la variazione delle variabili di campo dell'intero elemento.

Infatti la funzione di forma $N_i(x)$ si associa all'i-esimo grado di libertà mentre la somma $\sum_i N_i \phi_i$ rappresenta la variazione della variabile di campo all'interno dell'elemento in termini del grado di libertà fisico considerato.

Elemento simplex bidimensionale.



$$\begin{array}{ll} i = x_i, y_i & \phi(x_i, y_i) = \phi_i \\ j = x_j, y_j & \phi(x_j, y_j) = \phi_j \\ k = x_k, y_k & \phi(x_k, y_k) = \phi_k \end{array}$$

Modello d'interpolazione lineare

$$\phi(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

In successione scriviamo le relazioni che concernono lo sviluppo sostanzialmente identico a quello relativo al caso monodimensionale

$$\{\phi(x,y)\} = \{\eta\}^T \{\alpha\}$$

$$\phi(x_i, y_i) = \phi_i$$

$$\phi(x_j, y_j) = \phi_j$$

$$\phi(x_k, y_k) = \phi_k$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\eta\}^T \text{nodo i} \\ \{\eta\}^T \text{nodo j} \\ \{\eta\}^T \text{nodo k} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$[N(x,y)] = \{\eta\}^T [\eta]^{-1} = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\det[\eta] = x_i y_j + x_j y_k + x_k y_i - x_i y_k - x_j y_i - x_k y_j = 2A$$

dove A è l'area del triangolo ijk

$$[N(x,y)] = \frac{1}{2A} [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

$$[N(x,y)] = 1/(2A) [a_i - b_i x - c_i y, a_j - b_j x - c_j y, a_k - b_k x - c_k y]$$

$$a_i = (-I)^{l+1} \begin{vmatrix} x_j & y_j \\ x_k & y_k \end{vmatrix} = x_j y_k - x_k y_j$$

$$b_i = (-I)^{l+2} \begin{vmatrix} l & y_j \\ l & y_k \end{vmatrix} = y_j - y_k$$

$$c_i = (-I)^{l+3} \begin{vmatrix} l & x_j \\ l & x_k \end{vmatrix} = x_k - x_j$$

$$d_j = (-I)^{2+l} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_k & y_k \end{vmatrix} = x_k y_i - x_i y_k$$

$$b_j = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} I & y_i \\ I & y_k \end{vmatrix} = -y_k y_i$$

$$c_j = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} I & x_i \\ I & x_k \end{vmatrix} = x_i x_k$$

$$a_k = (-1)^{3+l} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = x_i y_j - x_j y_i$$

$$b_k = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} I & y_i \\ I & y_j \end{vmatrix} = -y_i y_j$$

$$c_k = (-1)^{3-i} \begin{vmatrix} I & x_i \\ I & x_j \end{vmatrix} = x_j - x_i$$

Osservazioni

Consideriamo la funzione di forma relativa al nodo j nel punto $j(x_j, y_j)$ essa vale 1 nel punto $i(x_i, y_i)$ e nel punto $k(x_k, y_k)$ vale 0.

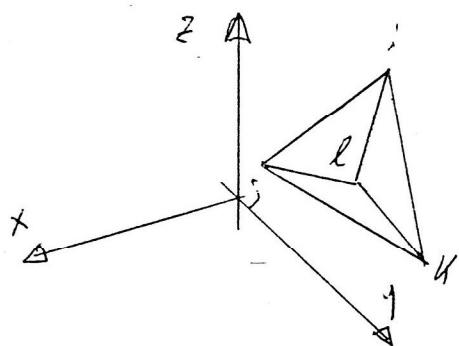
Le derivate delle funzioni di interpolazione

$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x}$ e $\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y}$ essendo le stesse lineari in x e y risultano costanti infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}[N(x, y)]\{\phi\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}[a_i + b_i x + c_i y, \quad a_j + b_j x + c_j y, \quad a_k + b_k x + c_k y] \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2A}(b_i \phi_i + b_j \phi_j + b_k \phi_k) = \text{costante} \end{aligned}$$

Elemento simplex tridimensionale

Per l'elemento tridimensionale si riportano le relazioni significative in sintesi le quali possono essere ottenute in stretta analogia con quanto dettagliatamente mostrato nel caso 2-D.



In stretta analogia con i precedenti sopra dettagliati si ha

$$i(x_i, y_i, z_i), j(x_j, y_j, z_j), k(x_k, y_k, z_k), l(x_l, y_l, z_l)$$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

V=volume del tetraedro

Le coordinate generalizzate sono

$$\alpha_1 = I/(6V)(a_i \phi_i + a_j \phi_j - a_k \phi_k + a_l \phi_l)$$

$$\alpha_2 = I/(6V)(b_i \phi_i + b_j \phi_j - b_k \phi_k + b_l \phi_l)$$

$$\alpha_3 = I/(6V)(c_i \phi_i + c_j \phi_j - c_k \phi_k + c_l \phi_l)$$

$$\alpha_4 = I/(6V)(d_i \phi_i + d_j \phi_j - d_k \phi_k + d_l \phi_l)$$

con

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$b_i = - \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$c_i = - \begin{vmatrix} x_j & l & z_j \\ x_k & l & z_k \\ x_l & l & z_l \end{vmatrix}$$

$$d_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & l \\ x_k & y_k & l \\ x_l & y_l & l \end{vmatrix}$$

e così via con permutazione circolare

Le funzioni di forma sono

$$N_m = 1/(6V)(a_m + b_m x + c_m y + d_m z) \quad \text{con } m=i,j,k,l$$

Estensione dell'interpolazione per quantità vettoriali

La procedura indicata per l'interpolazione può essere estesa con riferimento a quantità vettoriali (ad es. spostamenti) per i quali si vuole ottenere un modello relativo ad un elemento.

Lo stesso modello viene mantenuto per ogni componente del vettore spostamento negli esempi limitate a una, due o tre rispettivamente nei casi mono, bi o tridimensionale.

-Caso monodimensionale

$$u(x) = [N(x)] \{ \phi^{(e)} \}$$

-Caso bidimensionale

L'interpolazione lineare è valida per entrambe le componenti

$$u(x,y) = N_i(x,y) u_i + N_j(x,y) u_j + N_k(x,y) u_k$$

$$v(x,y) = N_i(x,y) v_i + N_j(x,y) v_j + N_k(x,y) v_k$$

Disponendo in forma matriciale a partire da quella generale

$\{\phi(x,y)\} = [N(x,y)]\{\phi\}^e$ particolarizziamo specificando i termini

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i(x,y) & 0 & N_j(x,y) & 0 & N_k(x,y) & 0 \\ 0 & N_i(x,y) & 0 & N_j(x,y) & 0 & N_k(x,y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$

- Caso tridimensionale

In analogia con i casi precedenti si ha

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_l & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_l & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ u_k \\ v_k \\ w_k \\ u_l \\ v_l \\ w_l \end{pmatrix}$$

COORDINATE NATURALI

Motivi di opportunità legati alla semplicità di espressione conseguenti alla scelta del sistema di coordinate più idoneo per la geometria dell'elemento suggeriscono di operare in termini di coordinate locali nell'elaborare i modelli approssimanti.

Pertanto ci si sofferma sugli sviluppi connessi con tale orientamento ricordando in ogni caso che le operazioni che portano all'espressione della matrice di rigidezza coinvolgono derivazioni ed integrazioni per le quali bisognerà tener presente le regole di analisi della derivazione in catena e dell'integrazione nel passaggio di trasformazione di coordinate locali-globali.

Ad esempio se si effettua la trasformazione di una funzione $f(x,y)$ espressa nelle coordinate globali x e y ed \underline{x} \underline{y} sono le coordinate locali

$$x = x(\underline{x}, \underline{y})$$

$$y = y(\underline{x}, \underline{y})$$

$$\text{Jacobiano} = \begin{vmatrix} \partial x / \partial \underline{x} & \partial x / \partial \underline{y} \\ \partial y / \partial \underline{x} & \partial y / \partial \underline{y} \end{vmatrix} = \frac{\text{Area}(x,y)}{\text{Area}(\underline{x},\underline{y})}$$

l'integrale della funzione $f(x,y)$ in un dominio Ω è dato da

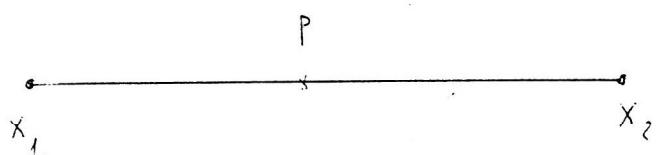
$$\iint f(x,y) dx dy = \iint f(x(\underline{x}, \underline{y}), y(\underline{x}, \underline{y})) |J| d\underline{x} d\underline{y}$$

dove $\underline{\Omega}$ è il dominio Ω trasformato e $|J|$ è il determinante jacobiano della trasformazione.

Le coordinate naturali sono un sistema di coordinate tali da permettere l'individuazione di un punto dell'elemento attraverso un insieme di numeri adimensionali compresi tra 0 e 1.

Comunemente assumono valore 1 in corrispondenza del nodo di partenza e 0 all'altro estremo.

ELEMENTO MONODIMENSIONALE



La posizione del punto P può essere individuata dalle coordinate naturali non indipendenti

$$L_1 = (x_2 - x) / (x_2 - x_1) \quad (1 \text{ al nodo } 1, 0 \text{ al nodo } 2)$$

$$L_2 = (x - x_1) / (x_2 - x_1) \quad (0 \text{ al nodo } 1, 1 \text{ al nodo } 2).$$

Come si è detto tali coordinate non sono indipendenti ma legate dalla relazione

$$L_1 - L_2 = 1$$

Si possono sottolineare alcune circostanze , la prima osservazione deriva dal confronto con le funzioni di forma in precedenza ricavate per l'elemento simplex monodimensionale.

Si ha

$$N_i=L_1 \quad N_j=L_2$$

Inoltre ogni valore delle coordinate globali può essere ottenuto per combinazione lineare delle coordinate dei nodi esterni con coefficienti pari a L_1 e L_2 che possono così essere interpretate come funzioni peso

$$x=x_1 L_1 - x_2 L_2$$

In forma matriciale le relazioni tra x e $L_1 L_2$ dirette ed inverse sono :

$$\begin{cases} 1 \\ x \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} 1 \\ x \end{cases}$$

Formule utili per l'eventuale sviluppo occorrente per la determinazione della matrice di rigidezza sono le seguenti.

Se f è espressa come funzione delle coordinate naturali L_1 e L_2 la differenziazione rispetto ad x è notoriamente

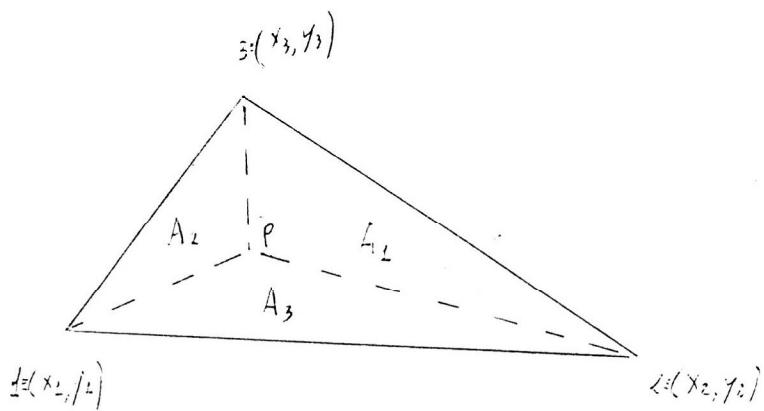
$$df/dx = \partial f/\partial L_1 \partial L_1/\partial x + \partial f/\partial L_2 \partial L_2/\partial x.$$

Nel caso particolare si ha $\partial L_1/\partial x = -1/(x_2 - x_1)$ e $\partial L_2/\partial x = 1/(x_2 - x_1)$.

Inoltre risulta

$$I = \int L_1^\alpha L_2^\beta dx = \alpha! \beta! (x_2 - x_1) / (\alpha + \beta + 1)!$$

ELEMENTO TRIANGOLARE



$$A = \text{area}_{123}$$

$$A_1 = \text{area}P_{23}$$

$$A_2 = \text{area}P_{13}$$

42

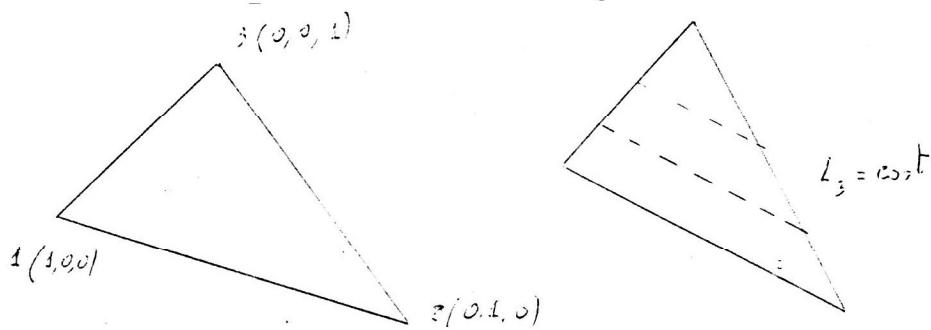
$$A_3 = \text{area} P_{12}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

Un sistema di coordinate naturali può essere quello formato da

$$L_1 = A_1/A \quad L_2 = A_2/A \quad L_3 = A_3/A$$

Risulta $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ e si ottengono valori particolari e le circostanze rappresentate nelle figure che seguono.



Si verifica inoltre che le funzioni di forma per l'elemento triangolare coincidono proprio con le coordinate introdotte

$$N_i = L_i \quad N_j = L_2 \quad N_k = L_3$$

Si può dimostrare inoltre che le coordinate di un generico punto interno al triangolo possono essere espresse da

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}$$

Invertendo e tenendo presente che

$$A = l/2 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

Estendendo il caso monodimensionale

$$df/dx = \sum_i \partial f / \partial L_i \partial L_i / \partial x \quad i=1\dots 3$$

$$df/dy = \sum_i \partial f / \partial L_i \partial L_i / \partial y \quad i=1\dots 3$$

In cui

$$\partial L_1 / \partial x = (y_2 - y_3) / 2A$$

$$\partial L_2 / \partial x = (y_3 - y_1) / 2A$$

$$\partial L_3 / \partial x = (y_1 - y_2) / 2A$$

$$\partial L_1 / \partial y = (x_3 - x_2) / 2A$$

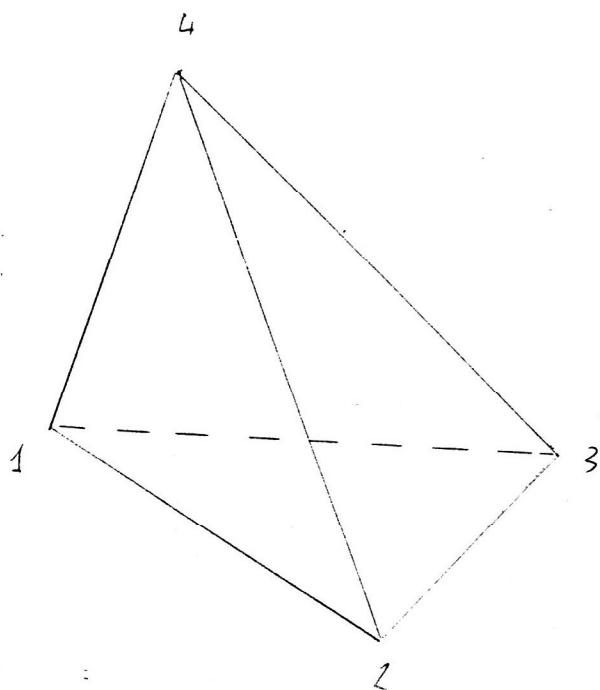
$$\partial L_2 / \partial y = (x_1 - x_3) / 2A$$

$$\partial L_3 / \partial y = (x_2 - x_1) / 2A$$

Le formule di integrazione sono :

$$\iint L^{\alpha} L_1^{\beta} L_2^{\gamma} dA = 2A \alpha! \beta! \gamma! / (\alpha + \beta + \gamma + 2)!$$

COORDINATE NATURALI PER UN ELEMENTO TETRAEDRICO



$$L_1 = V_1/V$$

$$L_2 = V_2/V$$

$$L_3 = V_3/V$$

$$L_4 = V_4/V$$

essendo V =volume tetraedro

$$V_1 = \text{vol } P_{234}$$

$$V_2 = \text{vol } P_{134}$$

$$V_3 = \text{vol } P_{124}$$

$$V_4 = \text{vol } P_{123}$$

Le funzioni di forma coincidono con le coordinate definite $N_i = L_i$ $i=1\dots,4$

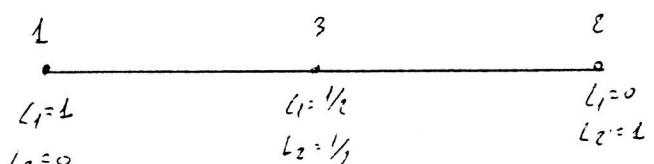
$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{Bmatrix}$$

L'integrale

$$\iiint L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma L_4^\delta dV = 6 V \alpha! \beta! \gamma! \delta! / (\alpha + \beta + \gamma + \delta + 3)!$$

ELEMENTI DI ORDINI SUPERIORI IN TERMINI DI COORDINATE
NATURALI

MODELLO QUADRATICO MONODIMENSIONALE



$$u(x) = [L_1, L_2, L_1 L_2] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

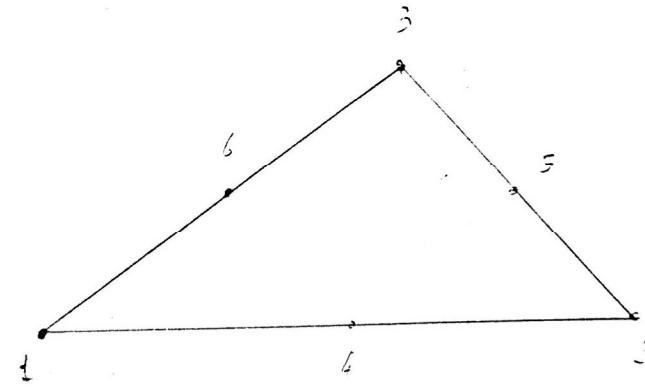
$$u(x) = [L_1 - 2L_1 L_2, L_2 - 2L_1 L_2, 4L_1 L_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$N_1 = L_1 - 2L_1 L_2 = L_1(1 - 2(L_1 - L_2)) = L_1(2L_2 - 1)$$

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1)$$

$$N_3 = 4L_1 L_2$$

ELEMENTO BIDIMENSIONALE QUADRATICO



$$\{\phi\} = \{\eta\}^T \{\alpha\}$$

$$\phi = [L_1, L_2, L_3, L_1 L_2, L_2 L_3, L_3 L_1] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi^{(e)}\} = [\eta] \{\alpha\}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix}$$

$$\{\alpha\} = [\eta]^T \{\phi^{(e)}\} =$$

$$\{\phi\} = \{\eta\}^T [\eta]^T \{\phi^{(e)}\} = [N] \{\phi^{(e)}\}$$

$$N = [L_1, L_2, L_3, L_1 L_2, L_2 L_3, L_3 L_1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ricordando che $L_1 + L_2 + L_3 = I$

$$N_1 = L_1(2L_1 - I)$$

$$N_2 = L_2(2L_2 - I)$$

$$N_3 = L_3(2L_3 - I)$$

$$N_4 = 4L_1L_2$$

$$N_5 = 4L_2L_3$$

$$N_6 = 4L_3L_1$$

Analogamente per gli elementi tetraedrici con interpolazione quadratica

$$N_i = L_i(2L_i - I) \quad i=1, 2, 3, 4$$

$$N_5 = 4L_1L_2$$

$$N_6 = 4L_2L_3$$

$$N_7 = 4L_1L_3$$

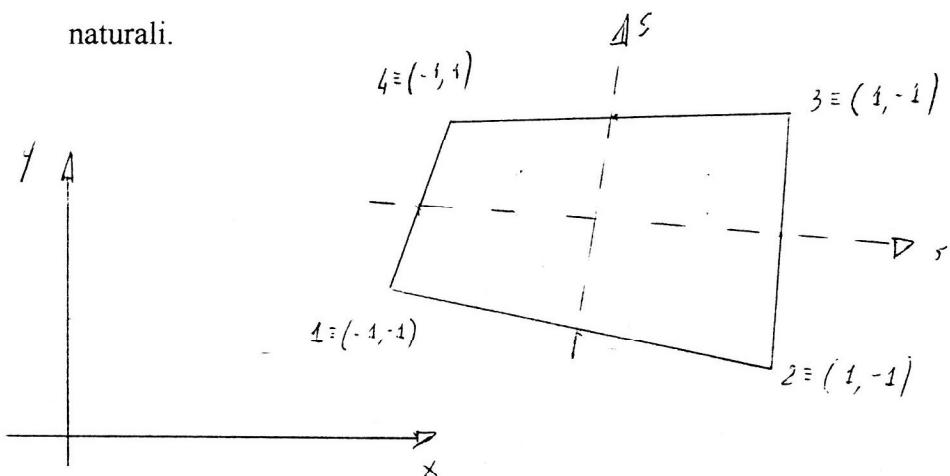
$$N_8 = 4L_1L_4$$

$$N_9 = 4L_2L_4$$

$$N_{10} = 4L_3L_4$$

ELEMENTI QUADRILARETI

Per gli elementi quadrilateri bisogna introdurre un diverso sistema di coordinate naturali.



La relazione tra le coordinate cartesiane e quelle naturali è nella forma

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

Dove la relazione generica

$$N_i = 1/4(1+r r_i)(1+s s_i)$$

fornisce la trasformazione di coordinate.

Risulta peraltro che se ϕ è una qualsiasi funzione delle coordinate naturali

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial s} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \phi}{\partial s} \end{Bmatrix}$$

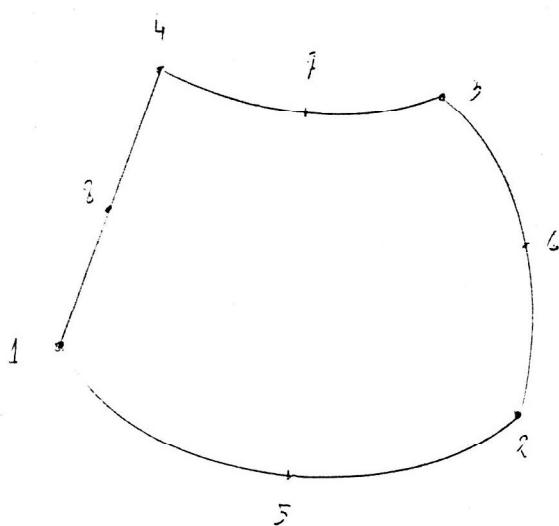
La matrice Jacobiana

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix}$$

si ricava dalla derivando la relazione che lega coordinate naturali-cartesiane.

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-s) & -(1-s) & (1+s) & -(1+s) \\ -(1-r) & -(1+r) & (1+r) & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}$$

Se si introducono le coordinate nodali relative ai 4 nodi di vertice e ai quattro nodi medi dei lati



$$\phi(x,y) = [N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8] \{ \phi^{(e)} \}$$

$$Ni = 1/4(I+r r_i)(I+s s_i)(r r_i + s s_i - I) \quad i=1,2,3,4$$

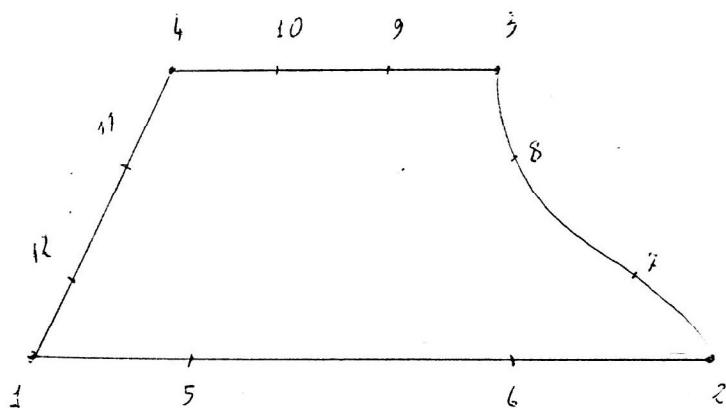
$$N_5 = 1/2(I-r^2)(I+s s_5)$$

$$N_6 = 1/2(I-r r_6)(I+s^2)$$

$$N_7 = 1/2(I-r^2)(I-s s_7)$$

$$N_8 = 1/2(I-r r_8)(I-s^2)$$

Per l'elemento cubico si indicano le funzioni di forma N_1, \dots, N_{12}

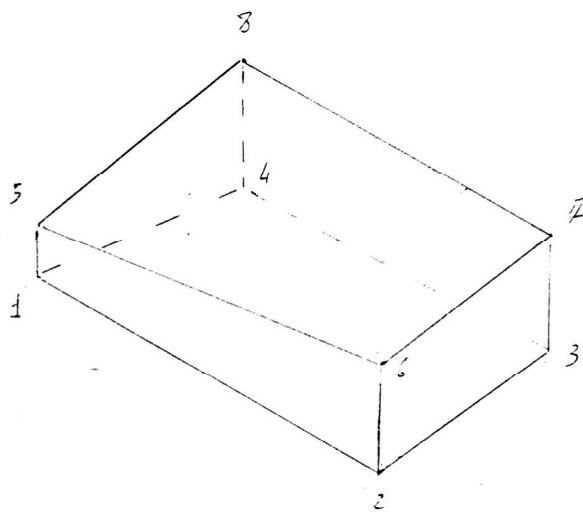


$$N_i = \frac{1}{32} (1 - r_i r_j) (1 + s_i s_j) (9r^2 + 9s^2 - 10) \quad i=1,2,3,4$$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 - r_i r_j) (1 - s^2) (1 + 9s_i s_j) \quad i=7,8,11,12$$

$$N_i = \frac{9}{32} (1 + s_i s_j) (1 - r^2) (1 + 9r_i r_j) \quad i=5,6,9,10$$

ELEMENTO TRIDIMENSIONALE



Trasformazione lineare

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & \dots & \dots & N_8 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & N_1 & \dots & \dots & N_8 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & N_1 & \dots & \dots & N_8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_8 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_8 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_8 \end{pmatrix}$$

$$N_i = 1/8(1-rx_i)(1-sy_i)(1-tz_i) \quad i=1, \dots, 8$$

Per l'elemento quadratico a 20 nodi

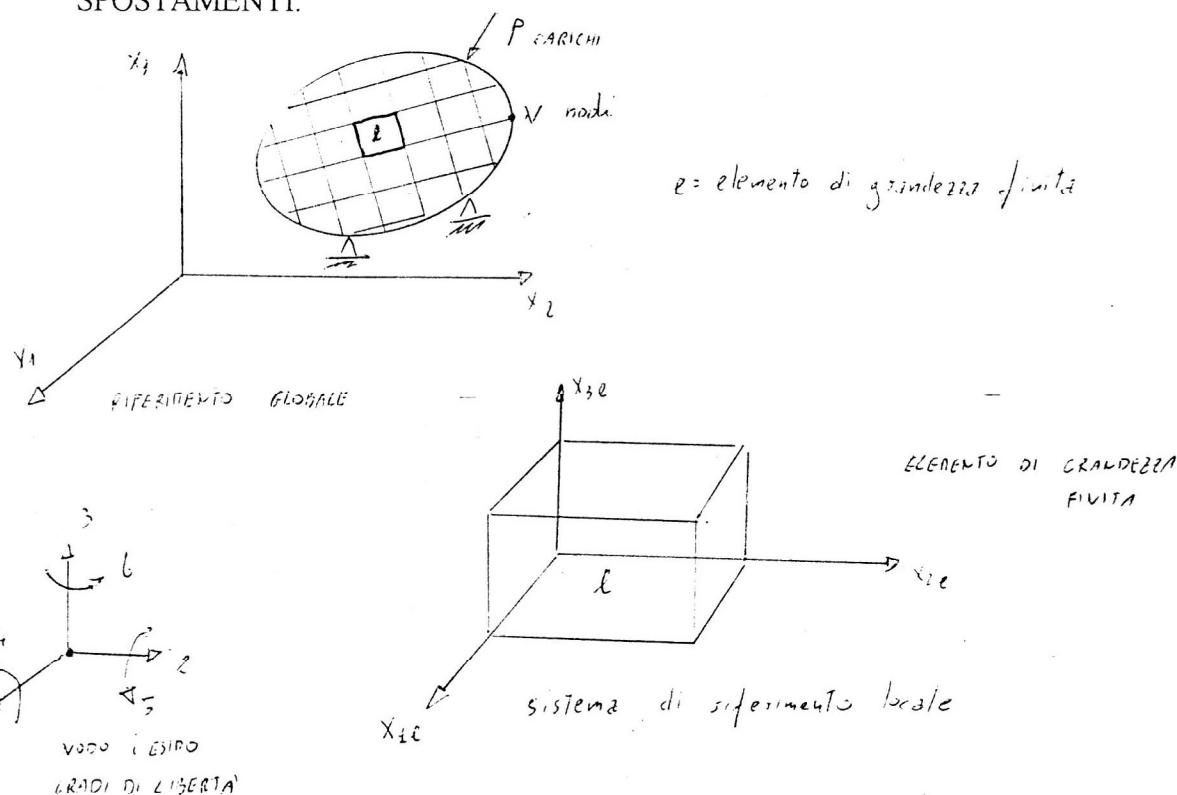
$$N_i = \frac{1}{8}(1+rr_i)(1+ss_i)(1+tt_i)(rr_i + ss_i + tt_i - 2) \quad i=1, \dots, 8$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-r^2)(1+ss_i)(1+tt_i) \quad i=9, 12, 17, 19$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1+rr_i)(1-s^2)(1+tt_i) \quad i=10, 11, 18, 20$$

$$N_i = \frac{1}{4}(1-rr_i)(1+ss_i)(1-t^2) \quad i=13, 14, 15, 16$$

FORMULAZIONE DELLE EQUAZIONI DI GOVERNO PER L'ANALISI
STATICA CON IL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI-METODO DEGLI
SPOSTAMENTI.



NOTAZIONI

n =Numeri di nodi dell'elemento e

N =Numero totale di nodi

L =Numero totale di elementi

DN =Numero totale di g.d.l.

DL =Somma del numero dei g.d.l. di ciascun elemento

Per ogni elemento avente per vertici i nodi 1,2,...n si costruisce il vettore spostamento dell'elemento

$$\begin{aligned} \{\mathbf{u}\}_{e \sum_n^{\text{di x 1}}} &= \{\{u\}^{(1)T} \{u\}^{(2)T} \dots \{u\}^{(n)T}\} = \\ &= \{u_1^{(1)} u_2^{(1)} \dots u_{d1}^{(1)} \dots \dots u_1^{(n)} u_2^{(n)} \dots u_{dn}^{(n)}\} \end{aligned}$$

Spostamenti relativi all'elemento e

Riunendo i vettori relativi agli elementi di tutta la struttura si ha il vettore

$$\{\mathbf{u}\}_{L_{DLx1}} = \{\{u\}_1^T \dots \{u\}_L^T\}$$

in cui si troveranno dei vettori relativi ai nodi che vengono ripetuti poiché considerati più volte in quanto appartenenti ad elementi contigui.

Depurando dalle ripetizioni il vettore $\{\mathbf{u}\}_L$ si può ottenere il vettore relativo agli N nodi effettivamente distinti ed ai relativi DN g.d.l.

$$\{\mathbf{u}\}_{g_{DNx1}} = \{\{u\}^{(1)T} \dots \{u\}^{(n)T}\}$$

Congruenza

Scriviamo ora una condizione che imponga l'identificazione degli spostamenti di un determinato nodo come appartenente a diversi elementi comportando l'eliminazione delle ripetizioni

$$\{\mathbf{u}\}_{L_{DLx1}} = [B]^T_{DLxDN} \{\mathbf{u}\}_{g_{DNx1}}$$

L'insieme degli spostamenti nodali si costruisce attraverso una trasformazione geometrica che descrive il passaggio dalla configurazione iniziale a quella finale.

Tale trasformazione costituisce un insieme di spostamenti nodali nel rispetto dei vincoli e prescinde dalle forze applicate.

Con opportune costruzioni formali l'equazione scritta può farsi corrispondere a quella relativa al continuo.

Definiamo la matrice di operatori

$$[\Delta]_{3 \times 6}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}_{3 \times 6}$$

il vettore spostamento al continuo

$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix};$$

e quello delle deformazioni

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\}^T$$

al continuo si può scrivere la relazione matriciale

$$\{\varepsilon\}_{6 \times 1} = [D]_{6 \times 3} \{s\}_{3 \times 1}$$

che riporta alla definizione delle deformazioni attraverso le derivate degli spostamenti.

Esempio :

Costruzione della matrice [B] per un sistema piano con nodi a 2 g.d.l.

N=4

L=2

$$n_1 = n_2 = 3$$

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 2 \text{ g.d.l.}$$

$$DL = 2 \text{ el.} \times 3 \text{ nodi} \times 2 \text{ g.d.l.} = 12$$

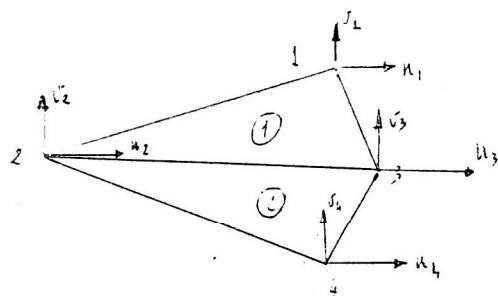
$$DN = 4 \text{ nodi} \times 2 \text{ g.d.l.} = 8$$

$$\{u\}_1 = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\}^T$$

$$\{u\}_2 = \{u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}^T$$

$$\{u\}_L = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}^T$$

$$\{u\}_g = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}^T$$



$\{u\}_1$				$\{u\}_2$							
$\{u\}^{(1)}$		$\{u\}^{(2)}$		$\{u\}^{(3)}$		$\{u\}^{(4)}$					
u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4

$\{u\}^{(1)}$	u_1	I	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	v_1	0	I	0	0	0	0	0	0	0	0
$\{u\}^{(2)}$	u_2	0	0	$-I$	0	0	0	0	0	0	0
	v_2	0	0	0	I	0	0	0	0	0	0
$\{u\}^{(3)}$	u_3	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0
	v_3	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0
$\{u\}^{(4)}$	u_4	0	0	0	0	0	0	0	0	I	0
	v_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	I

$$\{u\}_{12x1} = [B]^T \cdot_{12x8} \{u\}_{g8x1}$$

$$\begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix} \right\}_{12 \times 1} & = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{12 \times 8} & \left\{ \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{matrix} \right\}_{8 \times 1} \end{matrix}$$

Trascrivendo la relazione precedente n forma più compatta

$$\left\{ \begin{matrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^2 \\ \{u\}^3 \\ \{u\}^2 \\ \{u\}^3 \\ \{u\}^4 \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \{u\}^1 \\ \{u\}^2 \\ \{u\}^3 \\ \{u\}^4 \end{matrix} \right\}$$

FORZE GENERALIZZATE E LEGAME COSTITUTIVO

Introduciamo l'insieme $\{F\}_e$ costituito dalle forze agenti sull'elemento ed in corrispondenza dei nodi che esso connette.

E' utile effettuare le seguenti osservazioni

1- Forze concentrate ai nodi

Le forze $\{F\}_e$ sono convenzionalmente intese come concentrate ai nodi mentre in realtà il collegamento tra gli elementi è esteso lungo tutta la frontiera ;

2- Forze generalizzate

Esse sono da intendersi come forze generalizzate ;

3-Ordine e notazione

Nel prenderle in considerazione bisognerà le stesse notazioni stabilite per i corrispondenti spostamenti ;

4-Calcolo dell'energia di deformazione diretta

Le forze e gli spostamenti si corrispondono nel senso che ad ogni forza si fa corrispondere uno spostamento nella stessa direzione e nello stesso verso in tal modo la forza compie lavoro per quello spostamento ed è agevole il calcolo dell'energia di deformazione diretta ;

5-Linearità di legame tra forze e spostamenti

E' valida l'ipotesi di linearità di dipendenza tra le forze applicate e gli spostamenti ad esse conseguenti nella stessa o in altre direzioni.

LEGAME COSTITUTIVO

Stabilito il significato delle forze, le loro caratteristiche e l'ipotesi di linearità è possibile scrivere per ogni coppia di direzione i e j la relazione

$$F_i = K_{ij} u_j \quad \text{legame costitutivo.}$$

Esplicitando le forze agenti sull'elemento si può scrivere il vettore

$$\{F\}_e = \{F_1^{(I)} \dots F_{dI}^{(I)} \dots \dots F_1^{(n)} \dots F_{dn}^{(n)}\}^T$$

esse, come si è detto sono da considerare ridotte ai nodi e sono distinte in :

Forze di volume o di massa

$$\{F_M\}_e = \{F_{M I}^{(I)} \dots F_{MdI}^{(I)} \dots \dots F_{M I}^{(n)} \dots F_{Md n}^{(n)}\}^T$$

Forze derivanti da azioni distribuite sul contorno

$$\{F_s\}_e = \{F_{s I}^{(I)} \dots F_{s dI}^{(I)} \dots \dots F_{s I}^{(n)} \dots F_{s dn}^{(n)}\}^T$$

Forze derivanti da distorsioni o coazioni

$$\{F_\theta\}_e = \{F_{\theta I}^{(I)} \dots F_{\theta dI}^{(I)} \dots \dots F_{\theta I}^{(n)} \dots F_{\theta dn}^{(n)}\}^T$$

Forze indotte dagli spostamenti nodali

$$\{F_k\}_e = \{F_{k I}^{(I)} \dots F_{k dI}^{(I)} \dots \dots F_{k I}^{(n)} \dots F_{k dn}^{(n)}\}^T$$

In quanto segue non porteremo in conto le prime tre in quanto quantità non dipendenti dagli spostamenti $\{u\}$ senza perdere la generalità della trattazione solo la completezza.

Le forze per ultimo scritte sono quelle legate agli spostamenti attraverso i coefficienti K_{ij} di rigidezza per cui esplicitandole

$$\begin{aligned} F_{K1}^{(1)} &= K_{11} u_1^{(1)} + K_{12} u_2^{(1)} + \dots \dots + K_{1 \sum d_i} u_{d_i}^{(n)} \\ &\vdots \\ F_{Kd_i}^{(n)} &= K_{\sum d_i 1} u_1^{(1)} + K_{\sum d_i 2} u_2^{(1)} + \dots \dots + K_{\sum d_i \sum d_i} u_{d_i}^{(n)} \end{aligned}$$

Si ha in sintesi, raccogliendo in forma matriciale, il legame costitutivo

$$\{F_K\}_e = [K]_{ee} \{u\}_e$$

Al fine di alleggerire la notazione da questo punto in poi non scriveremo più il pedice K introdotto per distinguere le forze nodali dipendenti dagli spostamenti attraverso il coefficiente di rigidezza K. Esplicitando la relazione scritta sopra si ha :

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1^{(1)} \\ \vdots \\ F_{d1}^{(1)} \\ \vdots \\ F_1^{(n)} \\ \vdots \\ F_{dn}^{(n)} \end{array} \right\}_{\sum_i^d} = \left[\begin{array}{cccc} K_{11} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & \\ K_{\sum d - 1} & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right]_{\sum_i^d \sum_i^d} \left\{ \begin{array}{c} u_1^{(1)} \\ \vdots \\ u_{d1}^{(1)} \\ \vdots \\ u_1^{(n)} \\ \vdots \\ u_{dn}^{(n)} \end{array} \right\}_{\sum_i^d}$$

Per ora si dirà soltanto che, per i teoremi di reciprocità, la matrice di rigidezza si presenta come una matrice quadrata e simmetrica. Per motivi che saranno ripresi nel seguito si osserva che essa è anche singolare (determinante nullo) proprietà connessa con il fatto che gli spostamenti $\{u\}$ sono indefiniti essendo possibili moti rigidi qualsivoglia per la mancanza di imposizioni di vincoli.

Ulteriore osservazione, atta anche a fornire un possibile metodo (metodo diretto) per la valutazione dei coefficienti, si può effettuare considerando che la singola reazione generica F_i coincide con la rigidezza K_{ij} qualora si applichi alla struttura uno spostamento $u_j = 1$ e spostamenti nulli lungo tutti gli altri gradi di libertà.

Va infine esplicitamente osservato che in quanto precede si è inteso come prefissato un sistema di riferimento rispetto al quale esprimere gli enti vettoriali presenti nella relazione.

Nel caso della matrice di rigidezza, a causa dell'opportunità di semplificazione e di generalità della procedura, il calcolo va di solito condotto adottando un conveniente sistema di riferimento e riservandosi di effettuare la trasformazione successivamente per riportare tutti gli elementi ad una rappresentazione nell'unico sistema globale, anch'esso convenientemente prescelto.

Il legame costitutivo al continuo si presenta sotto forma

$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ dove $\{\sigma\}$ rappresenta le componenti speciali di tensione, $[D]$ la matrice dei moduli elastici, ed $\{\varepsilon\}$ le componenti speciali di deformazione

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & \dots & d_{16} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{61} & \dots & \dots & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Nota :richiami di teoria dell'elasticità - Legame costitutivo - Legge di Hooke generalizzata

In condizioni isotermiche si può scrivere il legame generale, indipendente dal tempo e dalla temperatura, tra le tensioni e le deformazioni espresso da una funzione φ nella forma $\sigma_{ij} = \varphi_{ij}(\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy})$.

Prendendo in considerazione i soli termini lineari si può ridurre la dipendenza alla forma $\sigma_{ij} = d_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ (i,j,k,l=1,2,3 x,y,z)

Legge di Hooke generalizzata

Le costanti sembrerebbero $3^4 = 81$ e se esse non variano con la posizione si dice che esse si riferiscono ad un mezzo elasticamente omogeneo.

Poiché sia σ_{ij} che ε_{kl} sono simmetriche allora $d_{ijkl} = d_{jikl}$ e $d_{ijkl} = d_{ijlk}$ che manifesta l'indifferenza alla permutazione di coppie di pedici per cui è possibile ridurli a solo due scrivendo ad es. d_{ij} con $i,j = 1\dots 6$ essendo possibile solo 6 combinazioni per ogni coppia per un totale di 36 costanti effettivamente differenti.

Elaborando le differenze si può scrivere il legame costitutivo completo

$$\begin{aligned}\sigma_x &= d_{11} \varepsilon_x + \dots + d_{16} \gamma_{xy} \\ &\vdots \\ \tau_{xy} &= d_{61} \varepsilon_x + \dots + d_{66} \gamma_{xy}\end{aligned}$$

TRASFORMAZIONE DI SISTEMA DI COORDINATE

In quanto segue verranno trovate le relazioni che consentono la trasformazione di sistema di riferimento.

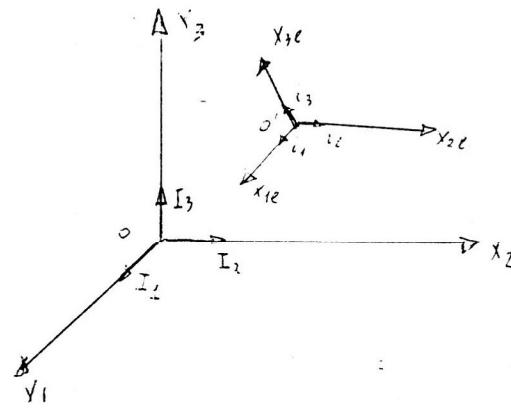
Si considerino i due sistemi di riferimento (o, x_1, x_2, x_3) ed $(o', x_{1e}, x_{2e}, x_{3e})$ i cui versori sono rispettivamente I_1, I_2, I_3 e i_1, i_2, i_3 .

Valgono le relazioni per i versori

$$i_1 = \lambda_{11}I_1 + \lambda_{12}I_2 + \lambda_{13}I_3$$

$$i_2 = \lambda_{21}I_1 + \lambda_{22}I_2 + \lambda_{23}I_3$$

$$i_3 = \lambda_{31}I_1 + \lambda_{32}I_2 + \lambda_{33}I_3$$



in cui λ_{ij} rappresentano i coseni direttori delle direzioni i_1, i_2, i_3 rispetto al riferimento (o, x_1, x_2, x_3) .

Applicando le relazioni generali nel caso specifico di rappresentazione di spostamento caratterizzato da 6 g.d.l. (tre traslazioni e tre rotazioni)

$$\{u'\}_{\text{locale}} = \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}_{\text{globale}} = [T_1] \{u\}_{\text{globale}}$$

$$\{\vartheta'\}_{\text{locale}} = \begin{Bmatrix} u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_{\text{globale}} = [T_1] \{\vartheta\}_{\text{globale}}$$

Ordinando in un'unica relazione matriciale con riferimento all'intero vettore spostamenti-rotazioni

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{Bmatrix}_{\text{locale}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_{\text{globale}}$$

$$\{u'\}_{\text{locale}} = [T] \{u\}_{\text{globale}}$$

Un'importante e comoda proprietà delle matrici di trasformazione delle coordinate è quella di essere ortogonale e cioè tale che la sua trasposta è uguale alla sua stessa inversa per cui $[T]^T = [T]^{-1}$.

La relazione di trasformazione risulta agevolmente invertibile

$$\{u'\}_{\text{locale}} = \begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}_{\text{globale}} = [T_1] \{u\}_{\text{globale}}$$

$$\{\vartheta'\}_{\text{locale}} = \begin{Bmatrix} u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_{\text{globale}} = [T_1] \{\vartheta\}_{\text{globale}}$$

Ordinando in un'unica relazione matriciale con riferimento all'intero vettore spostamenti-rotazioni

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \\ u'_3 \\ u'_4 \\ u'_5 \\ u'_6 \end{Bmatrix}_{\text{locale}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}_{\text{globale}}$$

$$\{u'\}_{\text{locale}} = [T] \{u\}_{\text{globale}}$$

Un'importante e comoda proprietà delle matrici di trasformazione delle coordinate è quella di essere ortogonale e cioè tale che la sua trasposta è uguale alla sua stessa inversa per cui $[T]^{-l} = [T]^T$.

La relazione di trasformazione risulta agevolmente invertibile

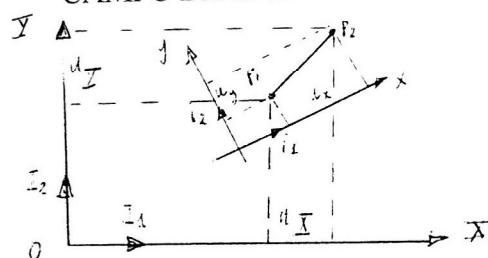
$$\{u\}_{\text{globale}} = [T]^T \{u'\}_{\text{locale}}$$

$$\delta\{u\}_e^T [K]_{ee}\{u\}_e = \delta\{u'\}_e^T [K']_{ee}\{u'\}_e = ([T] \delta\{u\}_e)^T [K']_{ee}[T]\{u\}_e = \\ = \delta\{u\}_e^T [T]^T [K']_{ee}[T]\{u\}_e$$

Confrontando la prima e l'ultima delle relazioni della catena di uguaglianze scritte si ottiene la voluta trasformazione

$$[K]_{ee} = [T]^T [K']_{ee}[T] \quad \text{trasformazione della matrice di rigidezza}$$

ESEMPLIFICAZIONE DELLA TRASFORMAZIONE DI COORDINATE IN CAMPO BIDIMENSIONALE

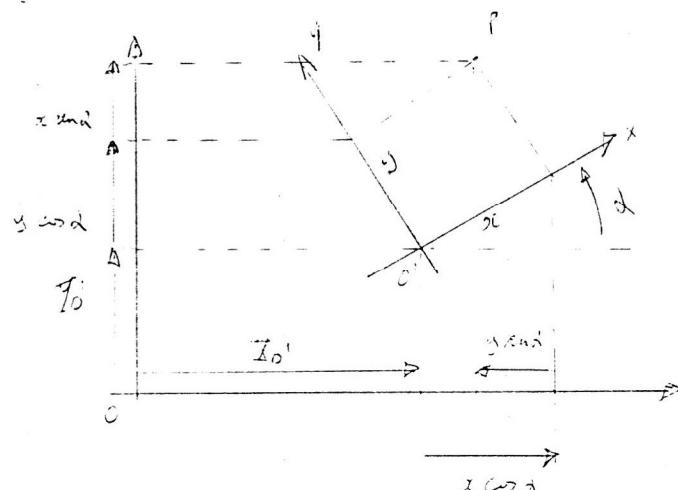


Rappresentazione del vettore $\{u\}$

$$\{u\}_{(o,x,y)} = u_x i_1 + u_y i_2 = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{Bmatrix}$$

$$\{u\}_{(o,X,Y)} = u_X I_1 + u_Y I_2 = \begin{Bmatrix} u_X \\ u_Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \end{Bmatrix}$$

Dalle rappresentazioni scritte si può trarre in sostanza la trasformazione da effettuare come dettagliata nella figura che segue con riferimento alle coordinate di un punto P.



$$X = X_o + x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$Y = Y_o + x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

Con riferimento al segmento $P_1 P_2$

$$L^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$$

$$\cos \alpha = \frac{X_2 - X_1}{L}$$

$$\sin \alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{L}$$

Effettuiamo ora la trasformazione del vettore P_1P_2 dalle componenti nel sistema

(o', x, y) a quelle nel sistema (O, X, Y)

$$X_2 - X_1 = X_{o'} + x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha - X_o - x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha$$

$$Y_2 - Y_1 = Y_{o'} + x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha - Y_o - x_1 \sin \alpha - y_1 \cos \alpha$$

raccogliendo i termini e semplificando

$$X_2 - X_1 = (x_2 - x_1) \cos \alpha + (y_2 - y_1) (-\sin \alpha)$$

$$Y_2 - Y_1 = (x_2 - x_1) \sin \alpha + (y_2 - y_1) \cos \alpha$$

In forma matriciale indicando con

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad [T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Si può verificare, ritrovandola, la proprietà di ortogonalità ricavando

$$[T]^{-1} = \frac{\text{adj}[T]^T}{|T|} = \frac{\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \end{bmatrix}}{|T|}$$

essendo il determinante

$$|T| = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

ed i termini $\beta_{11}=(-1)^{l+l} \cos\alpha$; $\beta_{21}=(-1)^{2+l} \sin\alpha = -\sin\alpha$; $\beta_{12}=(-1)^{l+2} (-\sin\alpha) = \sin\alpha$

$\beta_{22}=(-1)^{2+2} \cos\alpha = \cos\alpha$ che si esprime $[T]^l=[T]^T$.

ANALISI GLOBALE IN FORMULAZIONE DIRETTA

Forze non legate agli spostamenti nodali degli elementi $\{\bar{F}\}$

$\{F\}_e = [K]_{ee} \{u\}_e + \{\bar{F}\}$ non verranno portate in conto.

Forma quadratica associata alla matrice $[K]_{ee}$

$$q = \frac{1}{2} \{u\}_e^T [K]_{ee} \{u\}_e$$

Poichè $q \geq 0$ la $[K]_{ee}$ è semidefinita positiva.

In particolare se $q=0$ la matrice è singolare e sono possibili moti rigidi.

Scriviamo le relazioni costitutive per ogni elemento

$$\{F\}_1 = [K]_1 \{u\}_1$$

$$\{F\}_2 = [K]_2 \{u\}_2$$

⋮

$$\{F\}_e = [K]_{ee} \{u\}_e$$

⋮

$$\{F\}_L = [K]_L \{u\}_L$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} \{F\}_1 \\ \vdots \\ \{F\}_e \\ \vdots \\ \{F\}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & [K]_{ee} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & [K]_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{u\}_1 \\ \vdots \\ \{u\}_e \\ \vdots \\ \{u\}_L \end{bmatrix}$$

$$\{F\}_L = (\sum^L [K]) \{u\}_L$$

Legame costitutivo per tutti gli elementi.

CARICHI ESTERNI

Forze applicate dall'esterno e concentrate ai nodi (forze esterne effettive e reazioni vincolari)

$$\{P\} = \{\{P\}_1, \dots, \{P\}_x\}$$

EQUILIBRIO

Utilizziamo il p.l.v. (consideriamo spostamenti virtuali (congruenti e compatibili con i vincoli). Pertanto vale anche per essi

$$\{u^*\}_L = [B]^T \{u^*\}_g$$

Sia ora

L_i^* = lavoro delle forze interne compiuto per gli spostamenti virtuali u^*

L_e^* = lavoro delle forze esterne compiuto per gli spostamenti virtuali u^*

$$L_i^* = \{u^*\}_L^T \{F\}_L = ([B]^T \{u^*\}_g)^T \{F\}_L$$

$$L_e^* = \{u^*\}_g^T \{P\}$$

Uguagliando ed operando

$$\{u^*\}_g^T [B]_{DNxDL} \{F\}_{LDLx1} = \{u^*\}_g^T \{P\}_{DNx1}$$

Dovendo valere per ogni insieme di u^* si ha

$$[B]\{F\}_L = \{P\} \quad \text{Equazione di equilibrio}$$

Equazione finale

$$\{u\}_L = [B]^T \{u\}_g \quad \text{a) congruenza}$$

$$\{F\}_L = (\sum^L [K]) \{u\}_L \quad \text{b) legame costitutivo}$$

$$[B]\{F\}_L = \{P\} \quad \text{c) equilibrio}$$

$$[B](\sum^L [K])\{u\}_L = \{P\}$$

$$[B](\sum^L [K])[B]^T \{u\}_g = \{P\}$$

posto $[K]_{gg} = [B](\sum^L [K])[B]^T$

$$[K]_{gg} \{u\}_g = \{P\}.$$

VINCOLI

Il sistema di equazioni scritto non è risolubile in quanto presenta la matrice dei coefficienti singolare.

Ciò corrisponde alla possibilità di moti rigidi in quanto sono al momento assenti i vincoli. Distinguiamo nel vettore $\{u\}_g$ gli spostamenti u_v vincolati e quelli u_n non interessati a restrizioni.

$$\{u\}_g = \begin{Bmatrix} \{u\}_n \\ \{u\}_v \end{Bmatrix}$$

Corrispondentemente si ha

$$\{P\}_g = \begin{Bmatrix} \{P\}_n \\ \{P\}_v \end{Bmatrix}$$

Con P_v reazioni vincolari.

Pertanto ricorrendo alla partizione l'equazione finale diventa

$$\begin{bmatrix} [K]_{nn} & [K]_{nv} \\ [K]_{vn} & [K]_{vv} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_n \\ \{u\}_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P\}_n \\ \{P\}_v \end{Bmatrix}$$

Scrivendo

$$\{P\}_n = [K]_{nn} \{u\}_n + [K]_{nv} \{u\}_v \quad (1)$$

$$\{P\}_v = [K]_{vn} \{u\}_n + [K]_{vv} \{u\}_v \quad (2)$$

Essendo $\{u\}_v$ un vettore noto si ha

$$[K]_{nn} \{u\}_n = \{P\}_n - [K]_{nv} \{u\}_v$$

e in definitiva

$$\{u\}_n = [K]_{nn}^{-1} (\{P\}_n - [K]_{nv} \{u\}_v)$$

sostituendo nella (2) si ottengono le reazioni vincolari.

DIPENDENZA LINEARE TRA GRADI DI LIBERTÀ

VINCOLI MULTIPLI

Equazione di equilibrio

$$[K]_{gg} \{u\}_g = \{P\}_g$$

dove

$\{u\}_g$ è il vettore spostamenti relativi ai gradi di libertà di tutti i nodi.

Supponiamo di vincolare attraverso un cinematismo ideale (privo di attriti) m gradi di libertà del sistema ad n spostamenti indipendenti

sia $\{u\}_m$ il vettore spostamenti relativo ai gradi di libertà linearmente dipendenti da $\{u\}_n$ vettore spostamenti relativo ai gradi di libertà indipendenti.

Dipendenza lineare tra i gradi di libertà del sistema

$$[R]_{mm} \{u\}_m + [R]_{mn} \{u\}_n = 0$$

$$\{u\}_m = -[R]^{-1}_{mm} [R]_{mn} \{u\}_n = [G]_{mn} \{u\}_n$$

$$\{u\}_g = \begin{Bmatrix} \{u\}_m \\ \{u\}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_{mm} \\ [I]_{nn} \end{bmatrix} \{u\}_n = [\lambda]_{gn} \{u\}_n$$

Esempio

$$\{u\}_g = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

Trasformazione della matrice di rigidezza applicando il principio del lavoro virtuale

$$\delta\{u\}_g^T [K]_{gg} \{u\}_g = \delta\{u\}_g^T \{P\}_g$$

$$\delta\{u\}_g^T = \delta\{u\}_n^T [\lambda]_{gn}^T$$

$$\{u\}_g = [\lambda]_{gn} \{u\}_n$$

sostituendo

$$\delta\{u\}_n^T [\lambda]_{gn}^T [K]_{gg} [\lambda]_{gn} \{u\}_n = \delta\{u\}_n^T [\lambda]_{gn}^T \{P\}_g$$

valendo la relazione per ogni spostamento $\delta\{u\}_n$ si ha

$$[\lambda]_{gn}^T [K]_{gg} [\lambda]_{gn} \{u\}_n = [\lambda]_{gn}^T \{P\}_g$$

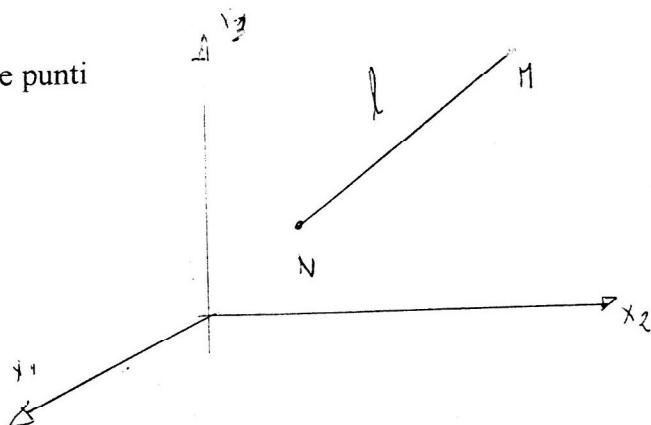
$$[K]_{nn} = [\lambda]^T_{gn} [K]_{gg} [\lambda]_{gn}$$

$$\{P\}_n = [\lambda]^T_{gn} \{P\}_g$$

$$[K]_{nn} \{u\}_n = \{P\}_n$$

ESEMPIO

Collegamento rigido tra due punti



$$\{\theta_M\} = \{\theta_N\}$$

$$\{u_M\} = \{u_N\} + \{\theta_N\}x\{l\}$$

$$\{\theta_N\}x\{l\} = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ u_{N4} & u_{N5} & u_{N6} \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{N5}l_3 - u_{N6}l_2 \\ u_{N6}l_1 - u_{N4}l_3 \\ u_{N4}l_2 - u_{N5}l_1 \end{Bmatrix}$$

$$u_{M1} = u_{N1} + 0 + 0 + 0 + u_{N5}l_3 - u_{N6}l_2$$

$$u_{M2} = 0 + u_{N2} + 0 - u_{N4}l_3 - 0 - u_{N6}l_1$$

$$u_{M3} = 0 + 0 + u_{N3} + u_{N4}l_2 - u_{N5}l_1 + 0$$

$$u_{M4} = 0 - 0 + 0 + u_{N4} - 0 - 0$$

$$u_{M5} = 0 + 0 + 0 + 0 + u_{N5} - 0$$

$$u_{M6} = 0 - 0 + 0 + 0 - 0 - u_{N6}$$

$$[G]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & l_3 & -l_2 \\ 0 & 1 & 0 & -l_3 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 & -l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

REAZIONI NEI VINCOLI M.P.

Sia $\{u\}_g$ il vettore degli spostamenti dei nodi eventualmente vincolati da m.p.c.

$\{P\}_g$ il vettore delle forze ad essi associate.

Costruiamo un vettore $\{c\}_g$ composto dalle forze sviluppate per effetto dell'imposizione di m.p.c.

Essendo tali vincoli dei collegamenti cinematici dovrà essere il lavoro virtuale

$$\delta \{u\}_g^T \{c\}_g = 0$$

ovvero ..

$$\delta \{u\}_n^T [\lambda]_{gn}^T \{c\}_g = 0$$

e cioè essendo $\delta \{u\}_n^T$ arbitrario

$$[\lambda]_{gn}^T \{c\}_g = 0$$

$$\begin{bmatrix} [G]_{mn} \\ [I]_{mn} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \{c\}_m \\ \{c\}_n \end{Bmatrix} = 0$$

da cui si ricava il legame

$$\{c\}_n = -[G]_{mn}^T \{c\}_m$$

VINCOLI SINGOLI E REAZIONI

$$[K]_{nn} \{u\}_n = \{P\}_n$$

Siano

$\{u\}_s$ gli spostamenti nodali imposti come condizioni di vincolo (ad es. nulli) e

$\{u\}_f$ i restanti spostamenti nodali per cui

$$\{u\}_n = \begin{cases} \{u\}_s \\ \{u\}_f \end{cases}$$

Partizionando la matrice di rigidezza e indicando con V le reazioni vincolari si ha

$$\begin{bmatrix} [K]_{ss} & [K]_{sf} \\ [K]_{fs} & [K]_{ff} \end{bmatrix} \begin{cases} \{u\}_s \\ \{u\}_f \end{cases} = \begin{cases} \{P\}_s \\ \{\underline{P}\}_f \end{cases} + \begin{cases} \{V\}_s \\ \{0\}_f \end{cases}$$

$$[K]_{ss} \{u\}_s + [K]_{sf} \{u\}_f = \{P\}_s + \{V\}_s$$

$$[K]_{fs} \{u\}_s + [K]_{ff} \{u\}_f = \{\underline{P}\}_f$$

Dalla seconda equazione si ricavano gli spostamenti liberi

$$\{u\}_f = [K]_{ff}^{-1} (\{\underline{P}\}_f - [K]_{fs} \{u\}_s) = [K]_{ff}^{-1} \{P\}_f$$

dalla prima le reazioni vincolari

VINCOLI SINGOLI E REAZIONI

$$[K]_{nn} \{u\}_n = \{P\}_n$$

Siano

$\{u\}_s$ gli spostamenti nodali imposti come condizioni di vincolo (ad es. nulli) e
 $\{u\}_f$ i restanti spostamenti nodali per cui

$$\{u\}_n = \begin{Bmatrix} \{u\}_s \\ \{u\}_f \end{Bmatrix}$$

Partizionando la matrice di rigidezza e indicando con V le reazioni vincolari si ha

$$\begin{bmatrix} [K]_{ss} & [K]_{sf} \\ [K]_{fs} & [K]_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_s \\ \{u\}_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P\}_s \\ \{\underline{P}\}_f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{V\}_s \\ \{0\}_f \end{Bmatrix}$$

$$[K]_{ss} \{u\}_s - [K]_{sf} \{u\}_f = \{P\}_s + \{V\}_s$$

$$[K]_{fs} \{u\}_s + [K]_{ff} \{u\}_f = \{\underline{P}\}_f$$

Dalla seconda equazione si ricavano gli spostamenti liberi

$$\{u\}_f = [K]_{ff}^{-1} (\{\underline{P}\}_f - [K]_{fs} \{u\}_s) = [K]_{ff}^{-1} \{P\}_f$$

dalla prima le reazioni vincolari

$$\{V\}_s = [K]_{ss} \{u\}_s + [K]_{sf} \{u\}_f - \{P\}_s$$

$$[\lambda]_{fa} = \begin{bmatrix} [G]_{oa} \\ [I]_{aa} \end{bmatrix}$$

$$[K]_{aa}\{u\}_a = \{P\}_a$$

con

$$[K]_{aa} = [\lambda]_{fa}^T [K]_{ff} [\lambda]_{fa}$$

$$\{P\}_a = [\lambda]_{fa}^T \{P\}_f$$

SUPPORTI PER CORPI LIBERI

Un corpo elastico a cui sono permessi moti rigidi è detto corpo libero.

I corpi liberi possono avere degli spostamenti che non producono forze interne al corpo.

La matrice di rigidezza di un corpo libero è singolare e una serie di vincoli deve essere specificata affinché siano rimossi i moti rigidi per effettuare l'analisi statica.

Siano $\{u\}_r$ i vincoli imposti per eliminare i moti rigidi, l'equazione di equilibrio

$[K]_{aa}\{u\}_a = \{P\}_a$ si scrive:

$$\begin{bmatrix} [K]_{rr} & [K]_{rl} \\ [K]_{lr} & [K]_{ll} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_r \\ \{u\}_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P\}_r \\ \{P\}_l \end{Bmatrix}$$

Imponendo $\{u\}_r = 0$ e indicando con $\{V\}_r$ le reazioni vincolari

$$[K]_{rl}\{u\}_l - \{P\}_r = \{V\}_r$$

e dalla seconda equazione

$$\{u\}_l = [K]_{ll}^{-1}\{P\}_l$$

Se invece $\{P\}_r = 0$ e $\{u\}_r \neq 0$ si ottiene la relazione di corpo rigido

$$\{u\}_r - [K]^{-1}_{rr} [K]_{lr} \{u\}_r = [D]_{lr} \{u\}_r$$

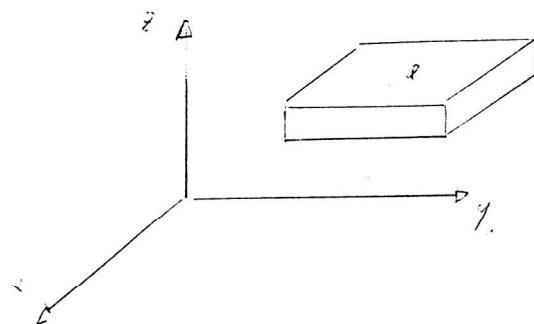
e

$$[K]_{rr} \{u\}_r + [D]_{lr} \{u\}_r = \{P\}_r$$

la matrice $[K]_{rr} + [D]_{lr}$ deve essere nulla.

In realtà per motivi di arrotondamenti, ridondanza o insufficienza di supporti, incompatibilità di vincoli multipli o ridondanza di vincoli singoli risulta essere solo approssimativamente uguale a zero.

FORMULAZIONE DELL'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO UTILIZZANDO IL
PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI



$\{u\}_e$ spostamenti nodali relativi all'elemento e

$\{v\}_e$ spostamenti nel dominio di e

$\{\varepsilon\}_e$ deformazioni in e

$\{P_m\}$ forze di volume definite in V

$\{P_s\}$ forze superficiali definite su A

$\{F\}_e$ forze nodali

Considerando gli spostamenti virtuali dei nodi $\delta\{u\}_e$ che implicano di conseguenza $\delta\{v\}_e$ e $\delta\{\varepsilon\}_e$ nell'intero volume, bisognerà eguagliare il lavoro di deformazione al lavoro, sempre virtuale, delle rimanenti forze che vanno

considerate come forze esterne, ovvero scrivendo con riferimento a tutto il volume

$$-\int_V \{\sigma\}_e^T \delta \{\varepsilon\}_e dV + \int_V \{P_m\}_e^T \delta \{v\}_e dV + \int_A \{P_s\}_e^T \delta \{v\}_e dV + \{F\}_e^T \delta \{u\}_e = 0$$

Richiamiamo le relazioni, ormai note, che ci consentono di passare dagli spostamenti ai nodi $\{u\}_e$ al campo di spostamenti in qualsivoglia punto. Tale passaggio lo si effettua attraverso le funzioni di forma $[N]_e$ relative all'elemento in considerazione.

$$\{v\}_e = \begin{Bmatrix} u(x_1, x_2, x_3) \\ v(x_1, x_2, x_3) \\ w(x_1, x_2, x_3) \end{Bmatrix}$$

ovvero

$$\{v\}_e = [N]_e \{u\}_e$$

$$\{v\}_e = [N]_e \{u\}_e$$

$$\{v\}_e = [N]_e \{u\}_e.$$

Introduciamo ora con $[A]$ la matrice di operatori tale che

$$\{\varepsilon\}_e = [\Delta]_e \{v\}_e$$

sarà

$$[\Delta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\}_e = [\Delta] [N]_e \{u\}_e$$

$$\{\varepsilon\}_e = [B]_e \{u\}_e$$

Inoltre valgono le relazioni tra i legami tra gli spostamenti virtuali

$$\delta \{v\}_e = [N]_e \delta \{u\}_e$$

$$\delta \{\varepsilon\}_e = [B]_e \delta \{u\}_e$$

Poiché intendiamo procedere usando il metodo degli spostamenti, sarà utile l'impiego del legame costitutivo per esprimere le forze-tensioni attraverso spostamenti-deformazioni.

Il legame costitutivo, in presenza di deformazioni $\{\varepsilon_o\}_e$ e coazioni impresse $\{\sigma_0\}_e$, si può esprimere $\{\sigma\}_e = [D]_e (\{\varepsilon\}_e - \{\varepsilon_o\}_e) + \{\sigma_0\}_e$

trasponendo si ha, tenendo conto della simmetria di $[D]_e$,

$$\{\sigma\}_e^T = \{\varepsilon\}_e^T [D]_e - \{\varepsilon_o\}_e^T [D]_e + \{\sigma_0\}_e^T$$

a questo punto introduciamo le relazioni trovate nell'equazione che esprime il P.L.V., osservando che

$$\{\sigma\}_e^T \delta \{\varepsilon\}_e = \{u\}_e^T [B]_e^T [D]_e [B]_e \delta \{u\}_e - \{\varepsilon_0\}_e^T [D]_e [B]_e \delta \{u\}_e - \{\sigma_0\}_e^T [B]_e \delta \{u\}_e$$

riportando quindi all'intero volume dell'elemento

$$\begin{aligned} & - \int_V \{u\}_e^T [B]^T [D]_e [B]_e \delta \{u\}_e dV + \int_V \{\varepsilon_0\}_e^T [D]_e [B]_e \delta \{u\}_e dV + \\ & - \int_V \{\sigma_0\}_e^T [B]_e \delta \{u\}_e dV + \int_V \{P_M\}_e^T [N]_e \delta \{u\}_e dV + \int_A \{P_S\}_e^T [N]_e \delta \{u\}_e dA + \\ & + \{F\}_e^T [N]_e \delta \{u\}_e = 0 \end{aligned}$$

Ricordando che $\{u\}_e^T$ è una quantità associata ai nodi mentre gli spostamenti virtuali, anch'essi associati ai nodi, sono congruenti e compatibili con i vincoli ma arbitrari, dovendo l'equazione valere per qualsiasi valore $\delta\{u\}_e$, esso può essere eliso essendo presente come moltiplicatore di ognuno dei termini.

Pertanto indicando sinteticamente le forze

$$\{F_M\}_e = \int_V [N]_e^T \{P_M\} dV \quad \text{forze di volume}$$

$$\{F_S\}_e = \int_A [N]_e^T \{P_S\} dA \quad \text{forze superficiali}$$

$$\{F_0\}_e = \int_V [B]_e^T [D]_e \{\epsilon_0\} dV - \int_V [B]_e^T \{\sigma_0\}_e dV \quad \text{forze impresse}$$

e quindi trasponendo

$$\left[\int_V [B]_e^T [D]_e [B]_e dV \right] \{u\}_e = \{F\}_e + \{F_M\}_e + \{F_S\}_e + \{F_0\}_e$$

individuando la matrice di rigidezza dell'elemento

$$[K]_{ee} = \int_V [B]_e^T [D]_e [B]_e dV$$

e raccogliendo le forze in $\{\bar{F}\}_e = \{F_M\}_e + \{F_S\}_e + \{F_0\}_e$

si ottiene l'equazione di equilibrio dell'elemento

$$[K]_{ee} \{u\}_e = \{F\}_e + \{\bar{F}\}_e$$

Da questo punto in poi il procedimento si ricongiunge con quello già adottato nella formulazione diretta con lo scopo di scrivere le relazioni valide in tutto il corpo ed ottenere la matrice di rigidezza della struttura assemblata (vedi analisi globale).

Se si tiene esplicito conto delle forze di massa e di quelle derivanti da dissipazioni di tipo viscoso e si scrive, più in dettaglio,

$$\{F_M\} = \int_V [N]_e^T \left[\{P_M\} - \rho_e [N]_e \{ii\}_e - \xi_e [N]_e \{iu\}_e \right] dV$$

$$\text{Indicando ora con } [M]_{ee} = \int_V \rho_e [N]_e^T [N]_e dV$$

e ancora con $[C]_{ee} = \int_V \xi_e [N]_e^T [N]_e dV$ si individuano queste ultime come matrice delle masse e degli smorzamenti.

Da ultimo si può quindi scrivere l'equazione dell'equilibrio in condizioni dinamiche $[M]_{ee} \{ii\}_e + [C]_{ee} \{iu\}_e + [K]_{ee} \{u\}_e = \{F\}_e + \{\bar{F}\}_e$ riconducendoci, in un contesto più specifico e generale, all'equazione già scritta.

VALUTAZIONE DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA PER ELEMENTI STRUTTURALI

La relazione generale che consente la valutazione dei termini della matrice di rigidezza ottenuta in precedenza utilizzando il p.l.v. è la seguente

$[K]_{ee} = \int_V [B]^T [D][B]dV$ in cui $[B]$ è la matrice delle derivate delle funzioni di

forma $[N]$

$[B]=[A][N]$ denotando con $[A]$ la matrice formata da operatori (derivate)

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

la matrice $[D]$ è quella che esprime il legame costitutivo, che, per i materiali isotropi ed omogenei, si scrive nel caso generale tramite

$$[D] = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & 1-v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-v}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-v}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix}$$

ELEMENTO STRUTTURALE MONODIMENSIONALE

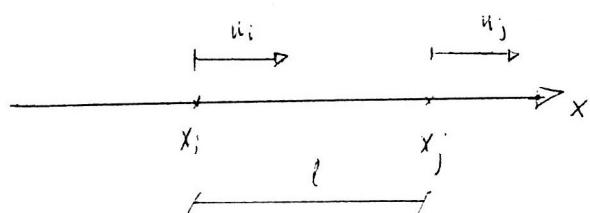
Nel caso monodimensionale si è trovata la matrice delle funzioni di forma

$$[N(x)] = [N_i(x) \quad N_j(x)]$$

che più specificatamente, esplicitando l'interpolazione lineare si esprime

$$[N(x)] = \left[\frac{x_j - x_i}{l} \quad \frac{x - x_i}{l} \right]$$

in cui $l = x_j - x_i$ con riferimento alla figura



In questo caso è più semplice calcolare la matrice $[B]$ che risulta in successione

$$[B] = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} x_j - x \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/l \end{bmatrix}$$

Ricordando ed applicando le relazioni già trovate in precedenza con riferimento ai gradi di libertà rappresentati dagli spostamenti u_i e u_j dei nodi i e j, i soli da noi riportati in conto nel caso in esame.

Si osserva che le deformazioni si riducono a

$$\{\varepsilon\} = [\Delta][N(x)]\{u\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \frac{u_j - u_i}{l} = \text{const}$$

risultano indipendenti dall'unica coordinata x e pertanto costanti.

Intanto il legame costitutivo nel caso monodimensionale si riduce a

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = E \frac{u_j - u_i}{l} \text{ e quindi } [D] = E; \text{ la matrice } [D] \text{ risulta composta del}$$

solo modulo elastico o modulo di Young del materiale.

Considerando che l'area della sezione A del materiale è ipotizzata anch'essa uniforme l'interpolazione sul volume può essere condotta in successione sull'area e sulla lunghezza come indicato successivamente

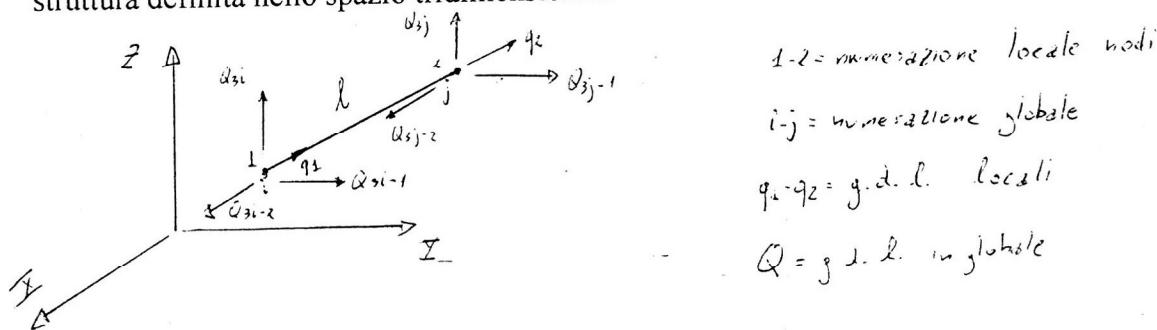
$$[K] = \int_{x_i}^{x_j} \int_A \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} dA dx$$

Elaborando in successione

$$\begin{aligned} [K] &= EA \int_{x_i}^{x_j} \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} dx = EA \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l^2} \\ -\frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} dx = \\ &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{x_j - x_i}{l} & -\frac{x_j - x_i}{l} \\ -\frac{x_j - x_i}{l} & \frac{x_j - x_i}{l} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ELEMENTO ASTA IN 3-D

In quanto segue svilupperemo ed estenderemo il caso dell'elemento tridimensionale, sostanzialmente già trattato, considerato come componente di struttura definita nello spazio tridimensionale



Assumiamo un modello di spostamenti lineare

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Le due costanti α_1 e α_2 sono valutabili in quanto sono note le condizioni alle estremità

$$u(x=0) = q_1 ; \quad u(x=l) = q_2$$

per cui risolvendo per il caso specifico

$$u(x) = q_1 + (q_2 - q_1) \frac{x}{l} = (1 - \frac{x}{l})q_1 + \frac{x}{l}q_2$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{q_2 - q_1}{l}$$

Raccogliendo in forma matriciale e ricordando che $[B] = [A]/[N]$ si ha in successione la funzione di forma come matrice

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{x}{l} \\ 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \frac{\partial}{\partial x} [N] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

$$\text{e se } \{q\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \text{ e } \{\varepsilon\} = [B]\{q\}^{(e)}$$

la relazione costitutiva $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ si riduce a $\sigma_x = E\varepsilon_x$.

Bisogna ora valutare, come si è già fatto in precedenza la matrice di rigidezza nel riferimento locale

$$[K]_{(loc)} = \int_V [B]^T [D] [B] dV = EA \int_0^l \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} \\ 1 \\ \frac{1}{l} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\{Q\}^{(e)}$ è il vettore dei gradi di libertà espresso nelle coordinate globali, si dovrà applicare la trasformazione di riferimento

$$q_1 = l_{ij} Q_{3i-2} + m_{ij} Q_{3i-1} + n_{ij} Q_{3i}$$

$$q_2 = l_{ij} Q_{3j-2} + m_{ij} Q_{3j-1} + n_{ij} Q_{3j}$$

indicando con $[T]$ la matrice di trasformazione che consente di scrivere

$$\{q\}_{6 \times 1}^{(e)} = [T]_{2 \times 6} \{Q\}_{6 \times 1}^{(e)}$$

essa sarà così configurata

$$[T] = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} \end{bmatrix}$$

Come si ricorda l_{ij}, m_{ij}, n_{ij} sono i coseni direttori della direzione ij rispetto alle direzioni OX, OY, OZ e pertanto sono valutabili attraverso le coordinate globali secondo le relazioni

$$l_{ij} = \frac{Xj - Xi}{l}; \quad m_{ij} = \frac{Yj - Yi}{l}; \quad n_{ij} = \frac{Zj - Zi}{l}$$

$$l^2 = (Xj - Xi)^2 + (Yj - Yi)^2 + (Zj - Zi)^2$$

Pertanto la matrice di rigidezza nelle coordinate globali sarà

$$\begin{aligned}
[K]_{(glob)} &= [T]^T [K]_{(loc)} [T] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ n & 0 \\ 0 & l \\ 0 & m \\ 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix} = \\
&= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

VETTORE DEI CARICHI

Vettore dei carichi dovuti a predeformazioni ed in particolare a deformazioni termiche iniziali

$$\{P_i\} = \int_V [B]^T [\Delta] \{\varepsilon_0\} dV = A \int_0^l \begin{Bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{Bmatrix} E \{\alpha T\} dx = EA\alpha \int_0^l \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Vettore dei carichi dovuti a forze di volume

$$\{P_M\} = \int_V [N]^T \{\phi\} dV \quad \text{nel caso di forze uniformemente distribuite del tipo } \rho A$$

$$\{P_M\} = A \int_0^l \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} \{\rho\} dx = \frac{\rho Al}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Forze sulle superfici di base ai nodi 1 e 2 dovute alla distribuzione di pressioni.

Se la pressione sulle superfici è $P_0 = P_x$ sia al nodo 1 sia al nodo 2 si ha rispettivamente

$$\{P_{S1}\} = \int_{S1} [N]^T \{P_x\} dS_1 = P_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \int_{S1} dS_1 = AP_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{e}$$

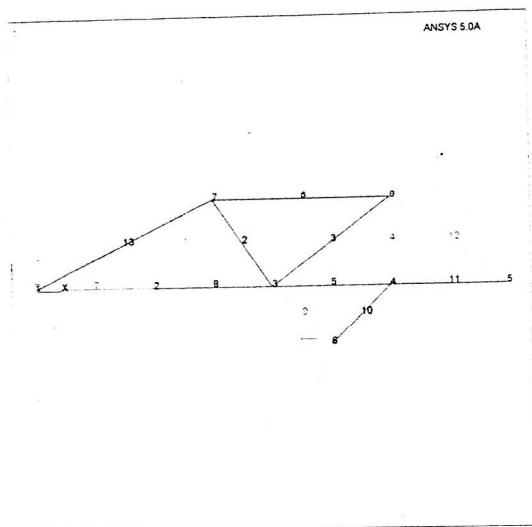
$$\{P_{S2}\} = AP_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Riassumendo il carico totale si ottiene sommando i termini considerati

$$\{P\}_c = \{P_i\} + \{P_M\} + \{P_{S1}\} + \{P_{S2}\}$$

RISOLUZIONE DI UNA TRAVATURA RETICOLARE

Si vuole risolvere la struttura reticolare mostrata in figura.



Numero nodi = 8

Numero aste = 13

Nodi	Coordinata X	Coordinata Y
1	0	0
2	2000	0
3	4000	0
4	6000	0
5	8000	0

Asta	Nodo iniziale	Nodo finale	$E \times 10^7$
1	2	7	21
2	3	7	21
3	3	8	21
4	4	8	21
5	3	4	21
6	7	8	21
7	1	2	42
8	2	3	42
9	3	6	42
10	4	6	42
11	4	5	42
12	5	8	42
13	1	7	84

Sono riportate in seguito le matrici di rigidezza di ogni asta della travatura considerata.

$[K1]$	=	$\begin{array}{ c c c c } \hline & 2 & & 7 \\ \hline 2 & 35842.17 & 53763.25 & -35842.17 & -53763.25 \\ \hline & 53763.25 & 80644.88 & -53763.25 & -80644.88 \\ \hline 7 & -35842.17 & -53763.25 & 35842.17 & 53763.25 \\ \hline & -53763.25 & -80644.88 & 53763.25 & 80644.88 \\ \hline \end{array}$
--------	---	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$[K2]$	=	$\begin{array}{ c c c c } \hline & 3 & & 7 \\ \hline 3 & 35842.17 & -53763.25 & -35842.17 & 53763.25 \\ \hline & -53763.25 & 80644.88 & 53763.25 & -80644.88 \\ \hline 7 & -35842.17 & 53763.25 & 35842.17 & -53763.25 \\ \hline & 53763.25 & -80644.88 & -53763.25 & 80644.88 \\ \hline \end{array}$
--------	---	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$[K3]$	=	$\begin{array}{ c c c c } \hline & 3 & & 8 \\ \hline 3 & 53760 & -40320 & -53760 & -40320 \\ \hline & -40320 & 30240 & -40320 & -30240 \\ \hline 8 & -53760 & -40320 & 53760 & 40320 \\ \hline & -40320 & -30240 & 40320 & 30240 \\ \hline \end{array}$
--------	---	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$[K4]$	=	$\begin{array}{ c c c c } \hline & 4 & & 8 \\ \hline 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 140000 & 0 & -140000 \\ \hline 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & -140000 & 0 & 140000 \\ \hline \end{array}$
--------	---	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

	3		4	
3	105000	0	-105000	0
	0	0	0	0
4	-105000	0	105000	0
	0	0	0	0

	7		8	
7	70000	0	-70000	0
	0	0	0	0
8	-70000	0	-70000	0
	0	0	0	0

	1		2	
1	210000	0	-210000	0
	0	0	0	0
2	-210000	0	210000	0
	0	0	0	0

	2		3	
2	210000	0	-210000	0
	0	0	0	0
3	-210000	0	210000	0
	0	0	0	0

3		6	
3	148492.4	-148492.4	-148492.4
	-148492.4	148492.4	148492.4
6	-148492.4	148492.4	148492.4
	148492.4	-148492.4	148492.4

4		6	
4	148492.4	148492.4	-148492.4
	148492.4	148492.4	-148492.4
6	-148492.4	-148492.4	148492.4
	-148492.4	-148492.4	148492.4

4		5	
4	210000	0	-210000
	0	0	0
5	-210000	0	210000
	0	0	0

8		5	
8	107520	-80640.01	-107520
	-80640.01	60480	80640.01
5	-107520	80640.01	107520
	80640.01	-60480	-80640.01
			60480

$$[K13] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 7 & \\ \hline 1 & 200351.7 & 100175.8 & -200351.7 & -100175.8 \\ \hline & 100175.8 & 50087.92 & -100175.8 & -50087.92 \\ \hline 7 & -200351.7 & -100175.8 & 200351.7 & 100175.8 \\ \hline & -100175.8 & -50087.92 & 100175.8 & 50087.92 \\ \hline \end{array}$$

Matrice di rigidezza

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	410351.7	100175.8	-210000	0	0	0	0	0
	100175.8	50087.9	0	0	0	0	-100175.8	-50087.92
2	-210000	0	453842.2	53763.25	-210000	0	0	0
	0	0	53763.25	80644.88	0	0	-35842.17	-53763.25
3	0	0	-210000	553094.6	-161935.7	-105000	0	0
	0	0	0	-161935.7	259377.3	0	0	-35842.17
4	0	0	0	0	-105000	0	0	0
	0	0	0	0	0	148492.4	-148492.4	-40320
5	0	0	0	0	0	-210000	0	0
	0	0	0	0	0	0	148492.4	-30240
6	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	-148492.4	0
7	-200351.7	-100175.8	-35842.17	-53763.25	-35842.17	53763.25	0	0
	-100175.8	-50087.9	-53763.25	-80644.88	-53763.25	-80644.88	0	-140000
8	0	0	0	0	0	-107520	80640.01	0
	0	0	0	-40320	-30240	0	0	-40320

Il sistema considerato ha il nodo 1 vincolato lungo x e lungo y , il nodo 5 vincolato solo lungo y. Sul nodo 6 c'è un carico verticale di -5000.

L'equazione di equilibrio si scrive :

$$[K]\{u\} = \{P\}$$

Distinguiamo nel vettore $\{u\}$ gli spostamenti u_v vincolati e quelli u_n non interessati a restrizioni.

$$\begin{bmatrix} [K]_{nn} & [K]_{nv} \\ [K]_{vn} & [K]_{vv} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_n \\ \{u\}_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P\}_n \\ \{P\}_v \end{Bmatrix}$$

$$\{P\}_n = [K]_{nn}\{u\}_n + [K]_{nv}\{u\}_v \quad (1)$$

$$\{P\}_v = [K]_{nv}\{u\}_n + [K]_{vv}\{u\}_v \quad (2)$$

Essendo $\{u\}_v$ un vettore noto si ha

$$[K]_{nn}\{u\}_n = \{P\}_n - [K]_{nv}\{u\}_v$$

e in definitiva

$$\{u\}_n = [K]^{-1}_{nn} (\{P\}_n - [K]_{nv}\{u\}_v)$$

sostituendo nella (2) si ottengono le reazioni vincolari.

$$\text{Nel nostro caso } \{u\}_n = [K]^{-1}_{nn} \{P\}_n$$

la matrice $[K]_{nn}$ da invertire è riportata di seguito

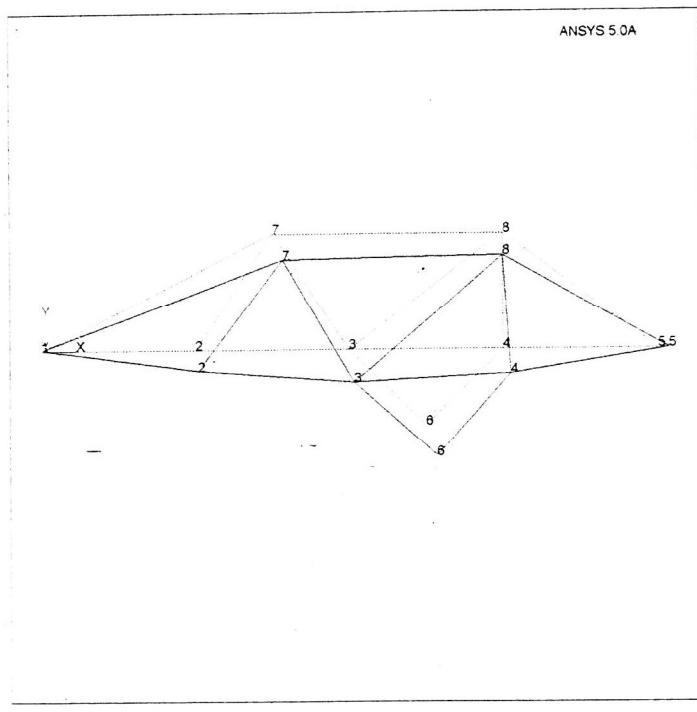
$$\{P\}_n = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -5000, 0, 0, 0, 0, \}$$

Matrice R11 da invertire

2	3	4	5	6	7	8
455842.2	53763.25	-210000	0	0	0	-35842.17
53763.25	80644.88	0	0	0	0	-53763.25
-210000	0	553094.6	-161935.7	-105000	0	-148492.4
0	0	-161935.7	259377.3	0	0	148492.4
0	0	-105000	0	463492.4	148492.4	-148492.4
0	0	0	148492.4	288492.4	-148492.4	0
0	0	0	-210000	0	317520	0
0	0	-148492.4	148492.4	-148492.4	0	296984.8
0	0	148492.4	-148492.4	-148492.4	0	296984.8
-35842.17	-53763.25	-35842.17	53763.25	0	0	342036
-53763.25	-80644.88	53763.25	-80644.88	0	0	100175.8
0	0	-53760	-40320	0	-107520	0
0	0	-40320	-30240	0	-100000	0
				80640.01	0	-40320
				0	0	230720

Spostamenti nodali lungo x	Spostamenti nodali lungo y
0	0
1.785713E-02	-.1415381
3.571427E-02	-.2212731
5.158726E-02	-.1678041
7.142853E-02	0
7.038523E-02	-.203438
6.914936E-02	-.1757329
-2.27925E-03	-.149947

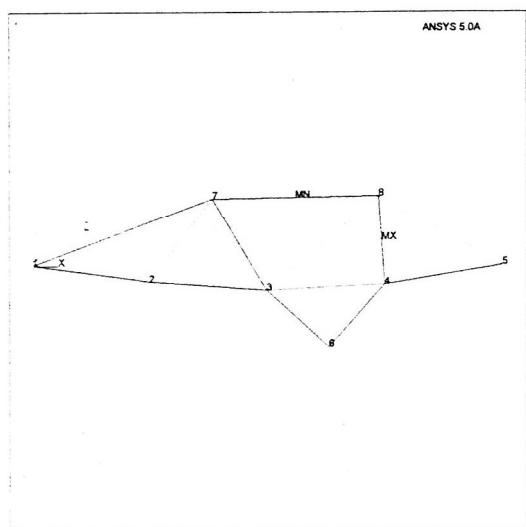
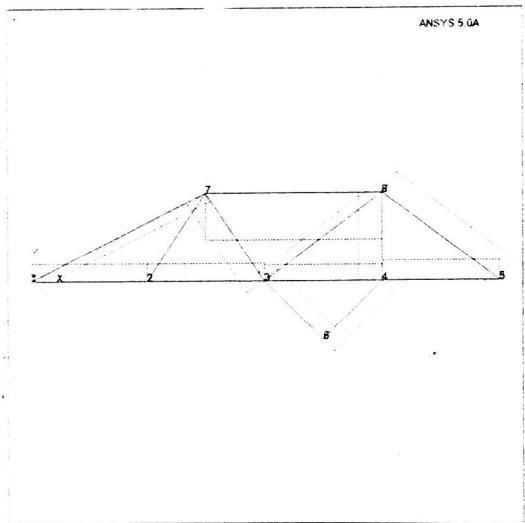
Componente x delle forze nodali	Componente y delle forze nodali
3.144188E-03	1875.001
-1.225218E-03	-9.531952E-04
8.634741E-03	-1.100436E-02
-6.707012E-03	-3.763199E-03
1.285204E-03	3124.999
1.346913E-03	-4999.991
1.400825E-03	3.263984E-03
-1.543208E-04	4.451752E-03



Il diagramma dello sforzo normale è riportato nelle figure seguenti

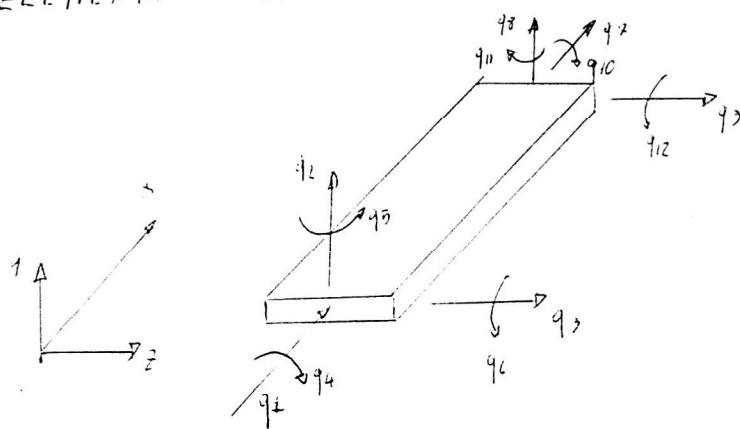
Forze agenti sulle aste

Asta 1	0	scarica
Asta 2	2253	trazione
Asta 3	1042	trazione
Asta 4	2500	trazione
Asta 5	1667	trazione
Asta 6	5000	compressione
Asta 7	3750	trazione
Asta 8	3750	trazione
Asta 9	3536	trazione
Asta 10	3536	trazione
Asta 11	4167	trazione
Asta 12	5208	compressione
Asta 13	4193	compressione

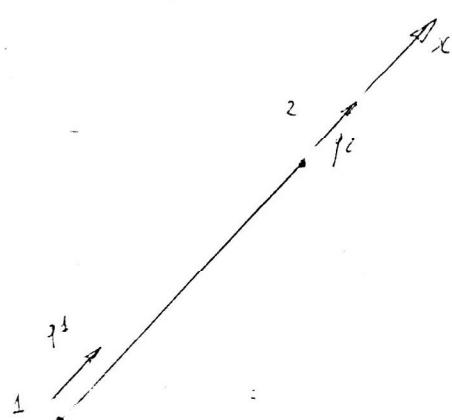


ELEMENTO TRAVE

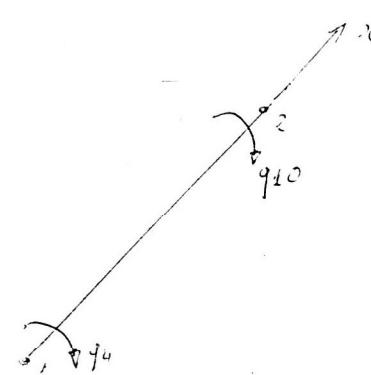
IN 3D



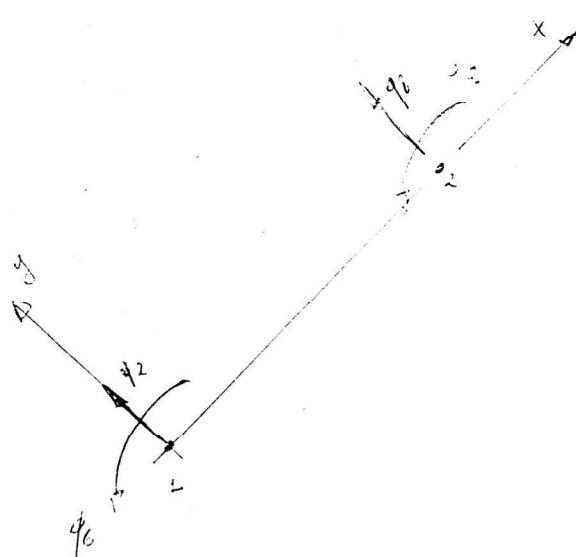
g.d.l. per nodo



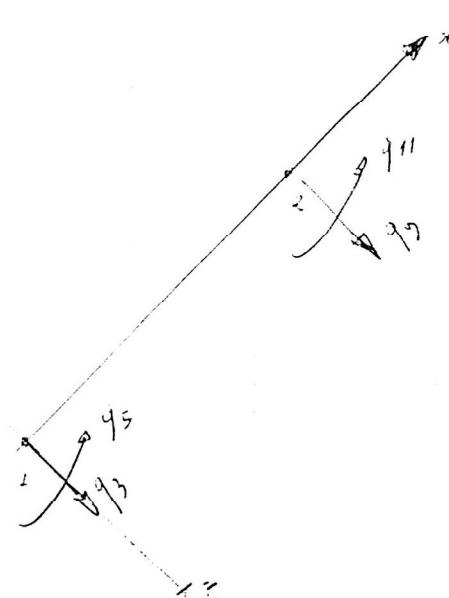
g.d.l. fissati



g.d.l. torsionali



inflessione nel piano xy



inflessione nel piano xz

ELEMENTO TRAVE IN 3-D

Con riferimento ai gradi di libertà rappresentati nella figura precedente, ci proponiamo di procedere per gruppi a riempire la matrice di rigidezza completa 12x12.

GRADI DI LIBERTÀ ASSIALI

Il grado di libertà assiale è stato già ampiamente trattato in precedenza ed in ogni caso ne richiamiamo i passaggi :

- modello di spostamenti

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

- condizioni per la determinazione delle coordinate generalizzate α_1 e α_2

$$u(x=0) = q_1; \quad u(x=l) = q_7$$

vettore rappresentativo dei 2 g.d.l. assiali $\{q_a\} = [q_1 \quad q_7]^T$

- funzione di forma da introdurre nella relazione

$$u(x) = [N(x)] \{q_a\}$$

$$[N(x)] = \left[\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \frac{x}{l} \right]$$

- matrice delle derivate della funzione di forma

$$[B] = \frac{\partial}{\partial x} [N(x)] = \left[-\frac{1}{l} \quad \frac{1}{l} \right]$$

- deformazioni nell'elemento

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q_a\} = \frac{q_7 - q_1}{l} = \varepsilon_x$$

- legame costitutivo

$$[D] = E$$

- tensioni

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = E \frac{q_7 - q_1}{l} = \sigma_x$$

- matrice di rigidezza relativa ai soli due termini considerati

$$[K_a]_{2x2} = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

	q_1	q_7
$[K_a]$	$\frac{EA}{l}$	$-\frac{EA}{l}$
	$-\frac{EA}{l}$	$\frac{EA}{l}$

GRADI DI LIBERTÀ TORSIONALI

I gradi di libertà che esprimono la rotazione intorno all'asse della trave (asse x) sono indicati con q_4 e q_{10} pertanto il modello da costruire è quello che esprime le rotazioni, che ipotizziamo variabili linearmente con x,

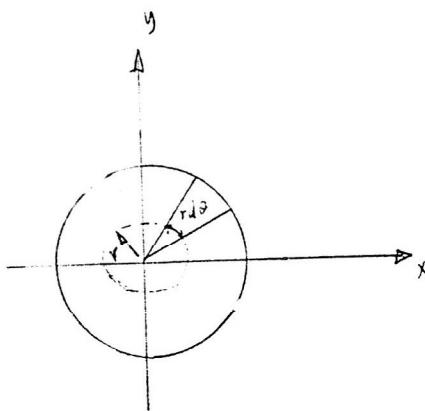
$$\theta(x) = \alpha_3 + \alpha_4 x$$

Procedendo in stretta analogia con quanto fatto per i g.d.l. assiali si ha, essendo

$$\{q_u\} = [q_4 \quad q_{10}]^T,$$

la funzione di forma

$$[N(x)] = [(1 - \frac{x}{l}) \quad \frac{x}{l}]$$



Possiamo determinare per via diretta la relazione $\{\varepsilon\} = [B]\{q_i\}$ in quanto è, in questo caso, presente il solo termine $\varepsilon_{\theta x}$ che, sulla base della osservazione illustrata in figura può essere scritto come

$$\varepsilon_{\theta x} = \frac{rd\theta}{dx} = r \frac{d}{dx}[N(x)]\{q_i\} = \left[-\frac{r}{l} \quad \frac{r}{l} \right] \{q_i\} \quad \text{da cui per confronto si individua}$$

$$[B] = \left[-\frac{r}{l} \quad \frac{r}{l} \right]$$

per quanto concerne le tensioni si osserva parallelamente che esiste solo

$$\tau_{\theta x} = G\varepsilon_{\theta x} \text{ in cui } G \text{ è il modulo di elasticità trasversale che risulta } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ e quindi in particolare } [D] = G.$$

Pertanto la matrice di rigidezza per i g.d.l. torsionali considerati da soli risulta

$$[K_t] = \int_V [B]^T [D][B] dV = G \int_A \int_0^l \left\{ \begin{array}{c} -\frac{r}{l} \\ \frac{r}{l} \end{array} \right\} \left[\begin{array}{cc} -\frac{r}{l} & \frac{r}{l} \\ \frac{r}{l} & \frac{r}{l} \end{array} \right] dA dx = G \int_A r^2 dA \int_0^l \left\{ \begin{array}{c} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{array} \right\} \left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{array} \right] dx$$

$$= \frac{GJ}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K_t] = \begin{array}{|c|c|} \hline & q_4 & q_{10} \\ \hline q_4 & \frac{GJ}{l} & -\frac{GJ}{l} \\ \hline -\frac{GJ}{l} & q_{10} & \frac{GJ}{l} \\ \hline \end{array}$$

INFLESSIONE NEL PIANO XY

In questo caso disponiamo di quattro gradi di libertà q_2, q_6, q_8, q_{12} e pertanto ci è consentito di assumere un modello cubico degli spostamenti

$$v(x) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 x^2 + \alpha_8 x^3$$

potendosi determinare le coordinate generalizzate con le condizioni

$$v(x=0) = q_2; \quad \frac{dv(x=0)}{dx} = q_6; \quad v(x=l) = q_8; \quad \frac{dv(x=l)}{dx} = q_{12}$$

Indicando con $\{q_{xy}\} = [q_2 \quad q_6 \quad q_8 \quad q_{12}]^T$

si può esprimere, come ormai noto,

$$v(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \{q_{xy}\}$$

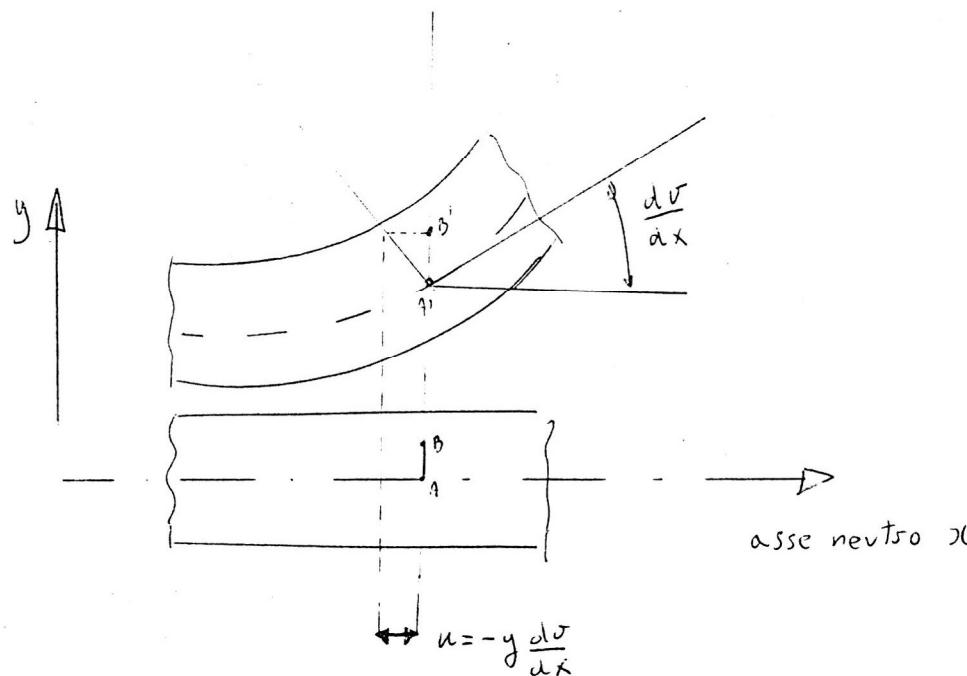
ed, a conti fatti, risulta

$$N_1(x) = \frac{2x^3 - 3lx^2 + l^3}{l^3}$$

$$N_2(x) = \frac{x^3 - 2lx^2 + l^2x}{l^2}$$

$$N_3(x) = -\frac{2x^3 - 3lx^2}{l^3}$$

$$N_4(x) = \frac{x^3 - lx^2}{l^2}$$



Le considerazioni effettuabili osservando la figura ci consentono di esprimere la deformazione assiale ε_x in funzione dello spostamento $v(x)$ trasversale di cui al modello stabilito

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

dovendo, in ogni caso, valere le relazioni

$$\varepsilon_x = [B] \{q_{xy}\} \quad \text{e}$$

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

si determina $[B] = -y \frac{\partial^2}{\partial x^2} [N(x)]$ ovvero

$$[B] = -\frac{y}{l^3} [(12x - 6l) \quad (6x - 4l)l \quad -(12x - 6l) \quad (6x - 2l)l]^T ;$$

ottenendo la matrice di rigidezza relativa ai g.d.l. considerati

$$[K_{xy}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = E \int_0^l dx \int_A [B]^T [B] dA$$

$$\text{Elaborando e ricordando che } I_{zz} = \int_A y^2 dA$$

$$[K_{xy}] = \frac{EI}{l^3}$$

q_2	q_6	q_8	q_{12}	
12	$6l$	-12	$6l$	q_2
$6l$	$-4l^2$	$-6l$	$2l^2$	q_6
-12	$-6l$	12	$-6l$	q_8
$6l$	$2l^2$	$-6l$	$-4l^2$	q_{12}

INFLESSIONE NEL PIANO XZ

Procedendo in maniera strettamente analoga si ottiene la matrice di rigidezza con riferimento ai g.d.l. $q_3; q_5; q_9; q_{11}$; con la sola osservazione che dovrà sostituirsi il momento d'inerzia $I_{yy} = \int_A z^2 dA$

q_3	q_5	q_9	q_{11}	
12	$6l$	-12	$6l$	q_3
$6l$	$-4l^2$	$-6l$	$2l^2$	q_5
-12	$-6l$	12	$-6l$	q_9
$6l$	$2l^2$	$-6l$	$-4l^2$	q_{11}

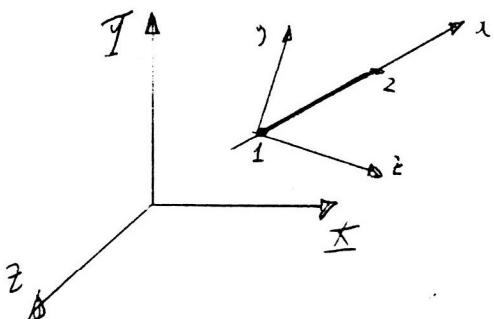
MATRICE DI RIGIDEZZA COMPLESSIVA

Per ottenere la matrice di rigidezza completa in coordinate locali basterà ora sistemare i termini al posto loro spettante di riga e colonna in relazione all'ordine dato ai g.d.l.

q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}
$\frac{E\cdot A}{l}$											q_1
0	$\frac{12EI_{zz}}{l^3}$										q_2
0	0	$\frac{12EI_{yy}}{l^3}$									q_3
0	0	0	$\frac{GJ}{l}$								q_4
0	0	$\frac{-6EI_{yy}}{l^2}$	0	$\frac{4EI_{yy}}{l}$							q_5
0	$\frac{6EI_{zz}}{l^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_{zz}}{l}$						q_6
$\frac{-E\cdot A}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{E\cdot A}{l}$					q_7
0	$\frac{-12EI_{zz}}{l^3}$	0	0	0	$\frac{-6EI_{zz}}{l^2}$	0	$\frac{12EI_{zz}}{l^3}$				q_8
0	0	$\frac{-12EI_{yy}}{l^3}$	0	$\frac{6EI_{yy}}{l^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_{yy}}{l^3}$			q_9
0	0	0	$\frac{-GJ}{l}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJ}{l}$		q_{10}
0	0	$\frac{-6EI_{yy}}{l^2}$	0	$\frac{2EI_{yy}}{l}$	0	0	0	$\frac{6EI_{yy}}{l^2}$	0	$\frac{4EI_{yy}}{l}$	q_{11}
0	$\frac{6EI_{zz}}{l^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_{zz}}{l}$	0	$\frac{-6EI_{zz}}{l^2}$	0	0	$\frac{4EI_{zz}}{l}$	q_{12}

SIM.

ELEMENTO IN 3-D . MATRICE DI TRASFORMAZIONE DI RIFERIMENTO



Indicando con l_{0x}, m_{0x}, n_{0x} ; l_{0y}, m_{0y}, n_{0y} ; l_{0z}, m_{0z}, n_{0z} ; le terne di coseni direttori rispettivamente degli assi x,y,z locali nel riferimento globale tra i quali è possibile esprimere

$$l_{0x} = \frac{X_j - X_i}{l}; \quad m_{0x} = \frac{Yj - Yi}{l}; \quad n_{0x} = \frac{Zj - Zi}{l}$$

Con relativa facilità essendo x coincidente con la retta congiungente l'asse della trave passante per i punti ij.

I coseni direttori degli assi y e z necessitano per il loro calcolo di ulteriori osservazioni. Si ricorda che essi sono stati scelti in maniera che il piano yz sia, ovviamente, parallelo alla sezione retta della trave.

Nel prosieguo indicheremo una procedura per la valutazione della matrice di trasformazione, intanto, almeno simbolicamente, possiamo scrivere le relazioni di trasformazione nella forma estesa

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccc} l_{0x} & m_{0x} & n_{0x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{0y} & m_{0y} & n_{0y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{0z} & m_{0z} & n_{0z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{0x} & m_{0x} & n_{0x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{0y} & m_{0y} & n_{0y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{0z} & m_{0z} & n_{0z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{0x} & m_{0x} & n_{0x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{0y} & m_{0y} & n_{0y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{0z} & m_{0z} & n_{0z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{0x} & m_{0x} & n_{0x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{0y} & m_{0y} & n_{0y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{0z} & m_{0z} & n_{0z} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} Q_{6i-5} \\ Q_{6i-4} \\ Q_{6i-3} \\ Q_{6i-2} \\ Q_{6i-1} \\ Q_{6i} \\ Q_{6j-5} \\ Q_{6j-4} \\ Q_{6j-3} \\ Q_{6j-2} \\ Q_{6j-1} \\ Q_{6j} \end{array} \right\}$$

Se indichiamo con $\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} l_{0x} & m_{0x} & n_{0x} \\ l_{0y} & m_{0y} & n_{0y} \\ l_{0z} & m_{0z} & n_{0z} \end{bmatrix}$ il blocco matriciale presente nella

matrice di trasformazione si ha

$$\underline{\lambda} = \begin{bmatrix} [\underline{\lambda}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\underline{\lambda}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\underline{\lambda}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\underline{\lambda}] \end{bmatrix}.$$

La trasformazione della matrice di rigidezza si otterrà

$$[K]^{(e)}_{glob} = [\underline{\lambda}]^T [K]^{(e)}_{loc} [\underline{\lambda}].$$

Rimane ora da specificare gli ulteriori termini della matrice $\underline{\lambda}$, per fare ciò possiamo procedere pensando di effettuare la trasformazione di assi in due stadi

passando ad una terna intermedia $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ con l'asse \bar{z} parallelo al piano XY per cui si avrebbe una prima trasformazione

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix}_{intermedia} = [\lambda_1] \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{glob}$$

e poi ruotando gli assi in modo da ottenere la trasformazione nella terna locale x,y,z

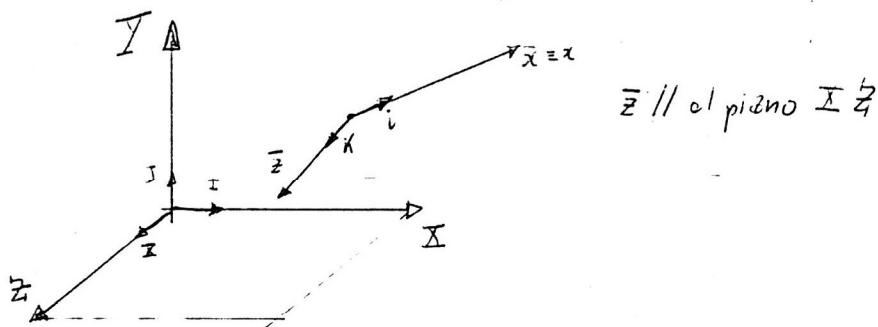
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{loc} = [\lambda_2] \begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix}_{intermedia}$$

Effettuando in catena le due trasformazioni

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}_{loc} = [\lambda_2][\lambda_1] \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{glob} \quad \text{ottenendo } [\lambda] = [\lambda_2][\lambda_1]$$

Prima trasformazione e calcolo di $[\lambda_1]$

Nella prima trasformazione si è portato anzitutto l'asse \bar{x} a coincidere con x , pertanto sarà $l_{0\bar{x}} = l_{0x}$; $m_{0\bar{x}} = m_{0x}$; $n_{0\bar{x}} = n_{0x}$ e quindi tutti valutabili essendo note le coordinate dei nodi ij.



L'asse \bar{z} è perpendicolare all'asse Y (essendo parallelo al piano XZ) ed all'asse $\bar{x} \equiv x$ pertanto il suo versore \bar{k} può essere valutato attraverso il prodotto vettoriale ridotto (diviso) nel rapporto con il modulo dello stesso (il versore è "unitario"). Si può scrivere pertanto

$$\bar{k} = \frac{\bar{i} \times \bar{J}}{|\bar{i} \times \bar{J}|} = \begin{vmatrix} I & J & K \\ l_{0x} & m_{0x} & n_{0x} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Poiché } |\bar{i} \times \bar{J}| = d = \sqrt{l_{0x}^2 + n_{0x}^2}$$

$$\bar{k} = \frac{1}{d} (-In_{0x} + Kl_{0x}).$$

Le componenti del versore \bar{k} sono i coseni direttori dell'asse \bar{z} che risultano nel riferimento X,Y,Z

$$l_{0\bar{z}} = -\frac{n_{0x}}{d} \quad ; \quad m_{0\bar{z}} = 0 \quad ; \quad n_{0\bar{z}} = \frac{l_{0x}}{d}.$$

Per trovare i coseni direttori dell'asse \bar{y} (versore \bar{j}) si osserva che esso è perpendicolare ad entrambi gli assi \bar{x} (versore \bar{i}) e \bar{z} (versore \bar{k}) per cui

$$\bar{j} = \bar{k} \times \bar{i} = \begin{vmatrix} I & J & K \\ l_{0\bar{z}} & m_{0\bar{z}} & n_{0\bar{z}} \\ l_{0x} & m_{0x} & n_{0x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & J & K \\ \frac{n_{0x}}{d} & 0 & \frac{l_{0x}}{d} \\ l_{0x} & m_{0x} & n_{0x} \end{vmatrix} =$$

$$= I\left(-\frac{l_{0x}}{d}m_{0x}\right) - J\left(-\frac{n_{0x}^2}{d} - \frac{l_{0x}^2}{d}\right) + k\left(-\frac{n_{0x}}{d}m_{0x}\right).$$

Nella terna scritta è possibile individuare i coseni direttori dell'asse \bar{y} nella terna X,Y,Z

$$X, Y, Z \quad l_{0\bar{y}} = -\frac{l_{0x}m_{0z}}{d} \quad ; \quad m_{0\bar{y}} = \frac{l_{0x}^2 + n_{0x}^2}{d} \quad ; \quad n_{0\bar{y}} = -\frac{m_{0x}n_{0x}}{d}.$$

Pertanto la matrice relativa alla prima trasformazione è

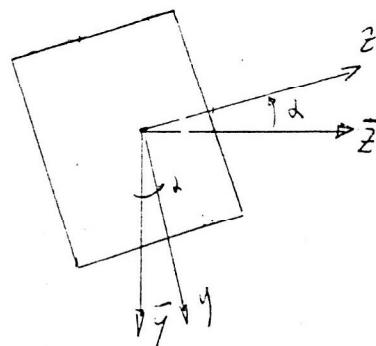
$$[\lambda_1] = \begin{bmatrix} l_{0\bar{x}} & m_{0\bar{x}} & n_{0\bar{x}} \\ l_{0\bar{y}} & m_{0\bar{y}} & n_{0\bar{y}} \\ l_{0\bar{z}} & m_{0\bar{z}} & n_{0\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{0x} & m_{0x} & n_{0x} \\ -\frac{l_{0x}m_{0x}}{d} & \frac{l_{0x}^2 + n_{0x}^2}{d} & -\frac{m_{0x}n_{0x}}{d} \\ -\frac{n_{0x}}{d} & 0 & \frac{l_{0x}}{d} \end{bmatrix}$$

in cui si ricorda che $d = \sqrt{l_{0x}^2 + n_{0x}^2}$ ed ancora

$$l_{0x} = \frac{X_j - X_i}{l^2} ; \quad m_{0x} = \frac{Y_j - Y_i}{l^2} ; \quad n_{0x} = \frac{Z_j - Z_i}{l^2} .$$

Per cui, una volta note le coordinate dei nodi i e j risulta definita la trasformazione degli assi come specificata in precedenza (asse \bar{z} parallelo al piano XZ).

Secondo passaggio di trasformazione. Rotazione nel piano normale a \bar{x} .



La rotazione intorno ad \bar{x} si rappresenta con la trasformazione solita in cui l'angolo α è un angolo opportunamente prescelto in relazione ad es. alla configurazione della sezione per cui

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = [\lambda_2] \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

e si individua $[\lambda_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$.

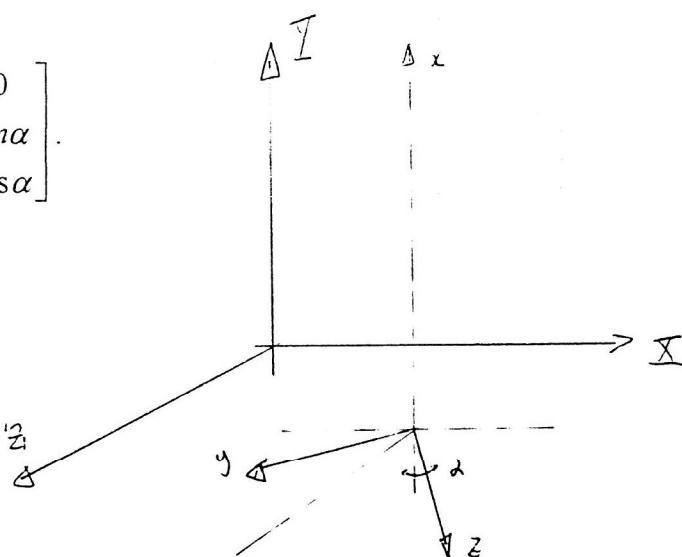
Osservazioni :

1) Nel caso in cui $\alpha = 0$ la matrice $[\lambda_2] = [I]$ è pertanto neutrale nella trasformazione complessiva.

2) Quando l'asse x (ovvero \bar{x}) è parallelo all'asse Y il valore di d si annulla rendendo indeterminati i termini che hanno d al denominatore e la procedura non può essere adottata.

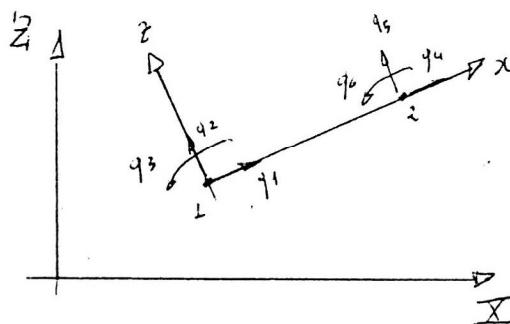
In tal caso la matrice complessiva si potrà ottenere semplicemente ruotando di α questa volta nel piano ZX per cui la matrice di trasformazione si semplifica e tenendo conto che $m_{0x}=I$ si ha

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$



Esempio.

Elemento trave nel piano XZ



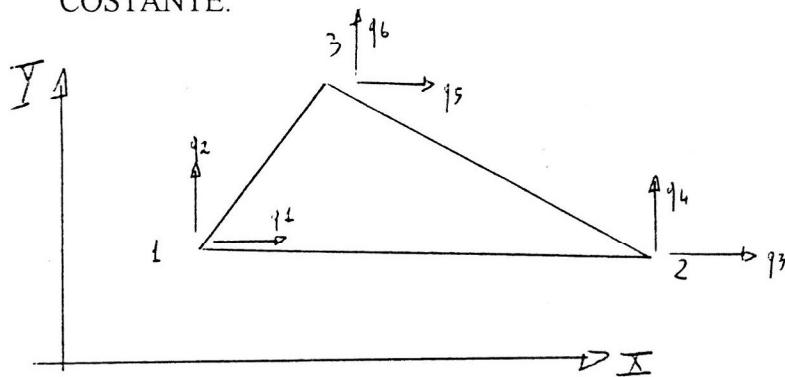
I gradi di libertà presi in considerazione sono quelli indicati in figura e cioè 3 per ogni nodo per cui particolarizzando la matrice di rigidezza

$$[K]_{6 \times 6} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I_w} & & & & & \\ 0 & 12 & & & & \\ 0 & 6l & 4l^2 & & & \\ \frac{Al^2}{I_{yy}} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I_{yy}} & & \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione diventa

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_{0x} & m_{0x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{0z} & m_{0z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{0x} & m_{0x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{0z} & m_{0z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ELEMENTO TRIANGOLARE MEMBRANALE A DEFORMAZIONE COSTANTE.



Un elemento piano a deformazione costante lo si può ottenere per imposizione delle condizioni

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{Bmatrix}$$

analizzandole nel dettaglio

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \bar{c}_1 \Rightarrow u(x,y) = \bar{c}_1 x + f_1(y) + \bar{c}_5$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \bar{c}_2 \Rightarrow v(x,y) = \bar{c}_2 y + f_2(x) + \bar{c}_6$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = \bar{c}_3 \quad (1)$$

Poiché f_1 è funzione della sola y ed f_2 della sola x e l'equazione (1) deve valere per ogni x e y dovrà essere

$$f_1 = \bar{a}_1 y + \bar{a}_2 \quad \text{ed} \quad f_2 = \bar{b}_1 x + \bar{b}_2.$$

Derivando si ha, per sostituzione nella (1) $\bar{a}_1 + \bar{b}_1 = c_3$ ed il campo di spostamenti, sostituendo f_1 ed f_2 , risulta lineare.

ANALISI DEGLI ELEMENTI MEMBRANALI

Nella teoria lineare delle piastre sottili lo spostamento trasversale w è indipendente dagli spostamenti nel piano della piastra u e v .

Conseguentemente la matrice di rigidezza degli spostamenti piani e trasversali sono indipendenti e possono essere calcolate separatamente.

L'elemento che può resistere solo a carichi nel piano è detto membranale, l'elemento plate resiste anche a carichi normali e momenti.

ELEMENTO MEMBRANALE

Secondo quanto detto precedentemente per un elemento triangolare piano con campo di spostamento lineare vale:

$$u(x,y) = \frac{1}{2A} [1, x, y] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$v(x,y) = \frac{1}{2A} [1, x, y] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

indicando con $\{q^{(e)}\}$ il vettore degli spostamenti nodali

$$\{q^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 + b_1x + c_1y & 0 & a_2 + b_2x + c_2y & 0 & a_3 + b_3x + c_3y & 0 \\ 0 & a_1 + b_1x + c_1y & 0 & a_2 + b_2x + c_2y & 0 & a_3 + b_3x + c_3y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = [B] \{q^{(e)}\}$$

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

sostituendo ai coefficienti d ,c i valori delle coordinate dei nodi nel sistema di riferimento locale e indicando con $x_{ij}=x_i-x_j$ e con $y_{ij}=y_i-y_j$ si ha

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{32} & 0 & -y_{31} & 0 & y_{21} & 0 \\ 0 & -x_{32} & 0 & x_{31} & 0 & -x_{21} \\ -x_{32} & y_{32} & x_{31} & -y_{31} & -x_{21} & y_{21} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \iiint [B]^T [D] [B] dV$$

se si indica con t lo spessore della lastra , considerando che la matrice B è costante

$$[K] = [B]^T [D] [B]$$

Se si considera un campo piano di tensione:

$$\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [D]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

con

$$[D]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \quad e \quad [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Per un campo di deformazione piana

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = \varepsilon_{zz} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

con

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Nel caso di tensione piana la matrice di rigidezza $[K] = [B]^T [D] [B]$ t A vale

$$[K] = [Kn] + [Ks]$$

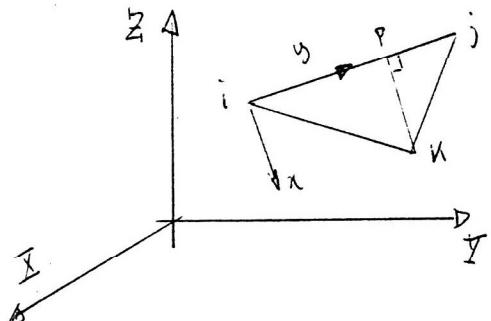
$$[Kn] = E t [4A(1-v^2)]^{-1}$$

y_{32}^2					
$-v y_{32} x_{32}$	x_{32}^2				
$-y_{32} y_{31}$	$v x_{32} y_{31}$	y_{31}^2			SIM.
$v y_{32} x_{31}$	$-x_{32} x_{31}$	$-v y_{31} x_{31}$	x_{31}^2		
$y_{32} y_{21}$	$-v x_{32} y_{21}$	$-y_{31} y_{21}$	$v x_{31} y_{21}$	y_{21}^2	
$-v y_{32} x_{21}$	$x_{32} x_{21}$	$v y_{31} x_{21}$	$-x_{31} x_{21}$	$-v y_{21} x_{21}$	x_{21}^2

$$[K_8] = E t [8A(1+v)]^{-1}$$

x_{32}^2						
$-x_{32} y_{32}$	y_{32}^2	SIM.				
$-x_{32} x_{31}$	$y_{32} x_{31}$	x_{31}^2				
$x_{32} y_{31}$	$-y_{32} y_{31}$	$-x_{31} y_{31}$	y_{31}^2			
$x_{32} x_{21}$	$-y_{32} x_{21}$	$-x_{31} x_{21}$	$y_{31} x_{21}$	x_{21}^2		
$-x_{32} y_{21}$	$y_{32} y_{21}$	$x_{31} y_{21}$	$-y_{31} y_{21}$	$-x_{21} y_{21}$	y_{21}^2	

MATRICE DI TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE



Coseni direttori della direzione ij assunta come asse y

$$l_{ij} = \frac{X_j - X_i}{d_{ij}} ; \quad m_{ij} = \frac{Y_j - Y_i}{d_{ij}} ; \quad n_{ij} = \frac{Z_j - Z_i}{d_{ij}}$$

$$\text{in cui } d_{ij}^2 = (X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2.$$

Mentre i coseni direttori della direzione ij sono direttamente determinabili essendo note le coordinate dei nodi ij, i coseni direttori della direzione pk parallela all'asse x

$$l_{pk} = \frac{X_k - X_p}{d_{pk}} ; \quad m_{pk} = \frac{Y_k - Y_p}{d_{pk}} ; \quad n_{pk} = \frac{Z_k - Z_p}{d_{pk}}$$

con ovvio significato per d_{pk} devono essere calcolati a partire dall'osservazione che le coordinate del punto p possono essere espresse come

$$X_p = X_i + l_{ij}d_{ip} ; \quad Y_p = Y_i + m_{ij}d_{ip} ; \quad Z_p = Z_i + n_{ij}d_{ip}$$

in cui è chiaramente d_{ip} la distanza, secondo la notazione ormai solita tra i e p.

Vale la relazione

$$d_{ip} = l_{ij}(X_k - X_i) + m_{ij}(Y_k - Y_i) + n_{ij}(Z_k - Z_i)$$

e quindi anche

$$d_{pk} = \sqrt{d_{ik}^2 - d_{ip}^2} = \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2 + (Z_k - Z_i)^2 - d_{ip}^2}.$$

In tal modo risultano noti i coseni direttori delle direzioni x (parallela a pk) ed y (direzione ij).

Raccogliendo in notazione matriciale sintetica la matrice di rigidezza in coordinate globali si scrive

$$[K]_{9x9}^{(glob)} = [\lambda]_{9x6}^T [K]_{6x6}^{(loc)} [\lambda]_{6x9}$$

essendo

	l_{pk}	m_{pk}	n_{pk}	0	0	0	0	0	0
	l_{ij}	m_{ij}	n_{ij}	0	0	0	0	0	0
$[\lambda] =$	0	0	0	l_{pk}	m_{pk}	n_{pk}	0	0	0
	0	0	0	l_{ij}	m_{ij}	n_{ij}	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	l_{pk}	m_{pk}	n_{pk}
	0	0	0	0	0	0	l_{ij}	m_{ij}	n_{ik}

Nel sistema di riferimento locale i vettori dei carichi valgono:

carichi termici

$$\{F_t\} = \int [B]^T [D] [\varepsilon_0] dV$$

con

$$[\varepsilon_0] = \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

forze di volume

$$\{F_v\} = \int [N]^T \{\phi\} dV$$

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix}$$

forze sulla superficie

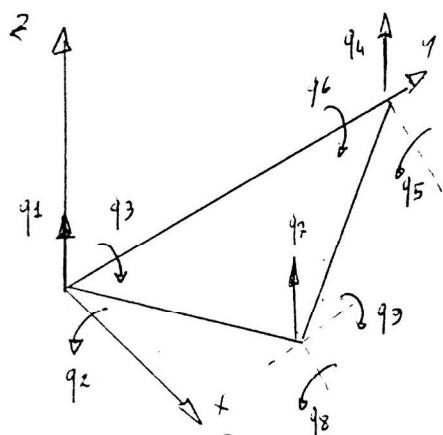
$$\{F_s\} = \int [N]^T \{P\} dS$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix}$$

Se si indica con $\{F\}$ la somma di tutti i carichi suddetti in un sistema di riferimento globale vale

$$[\lambda]^T [K]_{locale} [\lambda] = [\lambda]^T \{F\} + \{F\}_{nodali}$$

ELEMENTO TRIANGOLARE PLATE



Per descrivere il campo di spostamento di una piastra soggetta a carichi normali al piano con elementi triangolari si scelgono come gradi di libertà gli spostamenti nodali w ortogonali al piano e le rotazioni di ogni nodo intorno all'asse x e y.

$$w(x,y) = \{\eta\}^T \{\alpha\} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2 y + y^2 x) + \alpha_9 y^3$$

$$u(x,y) = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v(x,y) = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Per calcolare i coefficienti α in funzione dei gradi di libertà del sistema occorre tener conto delle condizioni:

$$q_1 = w(0,0)$$

$$q_2 = \frac{\partial w}{\partial y}(0,0)$$

$$q_3 = -\frac{\partial w}{\partial x}(0,0)$$

$$q_4 = w(0,y_2)$$

$$q_5 = \frac{\partial w}{\partial y}(0,y_2)$$

$$q_6 = -\frac{\partial w}{\partial x}(0,y_2)$$

$$q_7 = w(x_3, y_3)$$

$$q_8 = \frac{\partial w}{\partial y}(x_3, y_3)$$

$$q_9 = -\frac{\partial w}{\partial x}(x_3, y_3)$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y_2 & 0 & y_2^2 & 0 & 0 & 0 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2y_2 & 0 & 0 & 3y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -y_2 & 0 & 0 & -y_2^2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^2 & x_3^2y_3 + x_3y_3^2 & y_3^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & 2x_3y_3 + x_3^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -(y_3^2 + 2x_3y_3) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{bmatrix}$$

$$\{q^{(e)}\} = [\eta]\{\alpha\}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & -z & 0 & -2zx & 0 & -zy & -3zx^2 & -z(2xy + y^2) & 0 \\ 0 & 0 & -z & 0 & -2zy & -zx & 0 & -z(x^2 + 2xy) & -3zy^2 \\ 1 & x & y & x^2 & y^2 & xy & x^3 & x^2y + y^2x & y^3 \end{bmatrix} [\eta]^{-1}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2z & 0 & 0 & -6zx & -2zy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2z & 0 & 0 & -2zx & -6zy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2z & 0 & -2z(2x + 2y) & 0 \end{bmatrix} [\eta]^{-1}$$

$$[K] = \iiint [B]^T [D] [B] dV \quad \text{se si indica con } t \text{ lo spessore della piastra}$$

$z \in [-t/2, t/2]$

ELEMENTO PLATE CON CARICO NORMALE ED ASSIALE

Indichiamo con $[K_m]$ la matrice associata all'elemento membranale resistente solo a carichi nel piano xy e con $[K_b]$ la matrice associata all'elemento plate resistente a carichi normali al piano.

Partizionando le due matrici si ha:

$$[K_m] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline [K_{11}]_m & [K_{12}]_m & [K_{13}]_m \\ \hline [K_{21}]_m & [K_{22}]_m & [K_{23}]_m \\ \hline [K_{31}]_m & [K_{32}]_m & [K_{33}]_m \\ \hline \end{array}$$

La matrice $[K_m]$ ha dimensione 6x6 , ogni sottomatrice ha dimensione 2x2

$$[K_b] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline [K_{11}]_b & [K_{12}]_b & [K_{13}]_b \\ \hline [K_{21}]_b & [K_{22}]_b & [K_{23}]_b \\ \hline [K_{31}]_b & [K_{32}]_b & [K_{33}]_b \\ \hline \end{array}$$

La matrice $[K_b]$ ha dimensione 9×9 , ogni sottomatrice ha dimensione 3×3

Sia

$$\{q\} = \{u_1, v_1, w_1, \text{rot}_x 1, \text{rot}_y 1, \text{rot}_z 1, u_2, v_2, w_2, \text{rot}_x 2, \text{rot}_y 2, \text{rot}_z 2, u_3, v_3, w_3, \text{rot}_x 3, \text{rot}_y 3, \text{rot}_z 3\}$$

avendo indicato con rot_{xi} la rotazione intorno all'asse x del nodo i.

La matrice di rigidezza completa nel sistema di riferimento locale assume la forma

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}]m & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{12}]m & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{13}]m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K_{11}]b & 0 & 0 & 0 & [K_{12}]b & 0 & 0 & 0 & [K_{13}]b & 0 & & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 & & \\ [K_{21}]m & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{22}]m & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{23}]m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [K] = & 0 & 0 & [K_{21}]b & 0 & 0 & 0 & [K_{22}]b & 0 & 0 & 0 & [K_{23}]b & 0 & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ [K_{31}]m & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{32}]m & 0 & 0 & 0 & 0 & [K_{33}]m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & [K_{31}]b & 0 & 0 & 0 & [K_{32}]b & 0 & 0 & 0 & [K_{33}]b & 0 & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & & & \\ \end{bmatrix}$$

In un sistema di riferimento globale $[K_{\text{globale}}] = [\lambda]^T [K_{\text{locale}}] [\lambda]$

dove

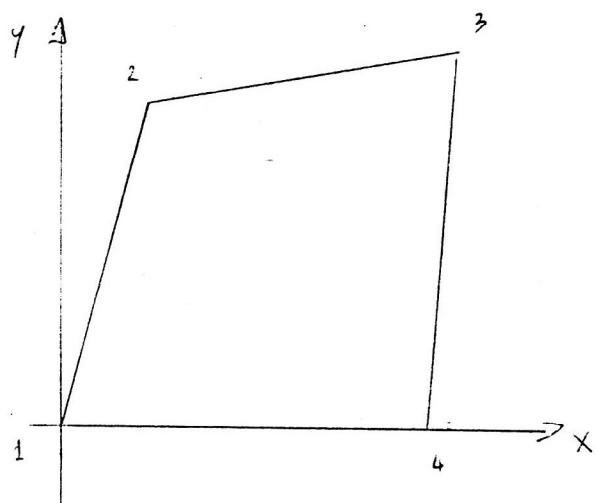
$$[\lambda]_{18 \times 18} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \underline{\lambda} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \underline{\lambda} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \underline{\lambda} \\ \hline \end{array}$$

e

$$[\lambda] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} & 0 & 0 & 0 \\ \hline l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} & 0 & 0 & 0 \\ \hline l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \\ \hline 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} \\ \hline 0 & 0 & 0 & l_{oz} & m_{oz} & n_{oz} \\ \hline \end{array}$$

ELEMENTO PLATE SECONDO MINDLIN

A differenza dell'elemento plate prima mostrato in cui secondo l'ipotesi di Kirchhoff valida per piastre sottili le sezioni restano ortogonali alla deformata della superficie media è possibile considerare un elemento per cui il taglio è non nullo.



indicando con β_x e β_y le rotazioni nei piani x-z e y-z tali grandezze si ritengono indipendenti dallo spostamento normale w per cui non valgono più le relazioni di Kirchhoff $\beta_x = -w_x$ e $\beta_y = w_y$.

Il campo di spostamento vale rispettivamente :

$$\begin{cases} u = z\beta_x(x, y) \\ v = -z\beta_y(x, y) \\ w = w(x, y) \end{cases}$$

il vettore delle deformazioni

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = z[B_p]\{q\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \end{Bmatrix} = [B_n]\{q\}$$

dove $\{q\}$ sono gli spostamenti e le rotazioni nodali.

La matrice di rigidezza si scrive :

$$[K] = \int_V z^2 [B_p]^T [C_p] [B_p] dV + \int_V [B_n]^T [C_n] [B_n] dV$$

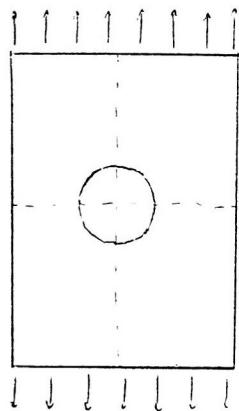
con

$$[C_p] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad [C_n] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

integrando in z

$$[K] = \int_A \frac{t^3}{12} [B_p]^T [C_p] [B_p] dV + \int_A t [B_n]^T [C_n] [B_n] dV$$

PIASTRA FORATA SOLLECITATA A TRAZIONE



a=400mm

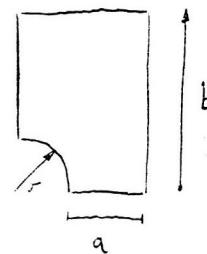
b=90mm

r=10mm

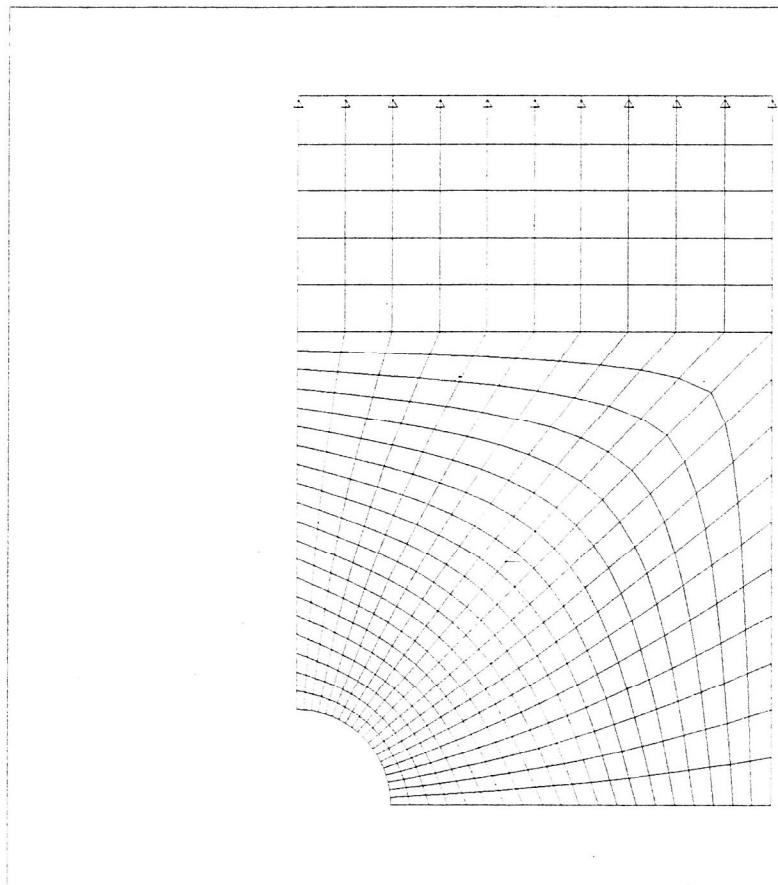
$\sigma_{\text{trazione}} = 200 \text{ N/mm}$

$E = 210000 \text{ N/mm}^2$

$\nu = 0.3$



La risoluzione numerica è in buon accordo con i valori teorici che prevedono nel punto maggiormente sollecitato una tensione pari a $3\sigma_{\text{trazione}}$.



discrete

JOINT

LOADS

LOAD

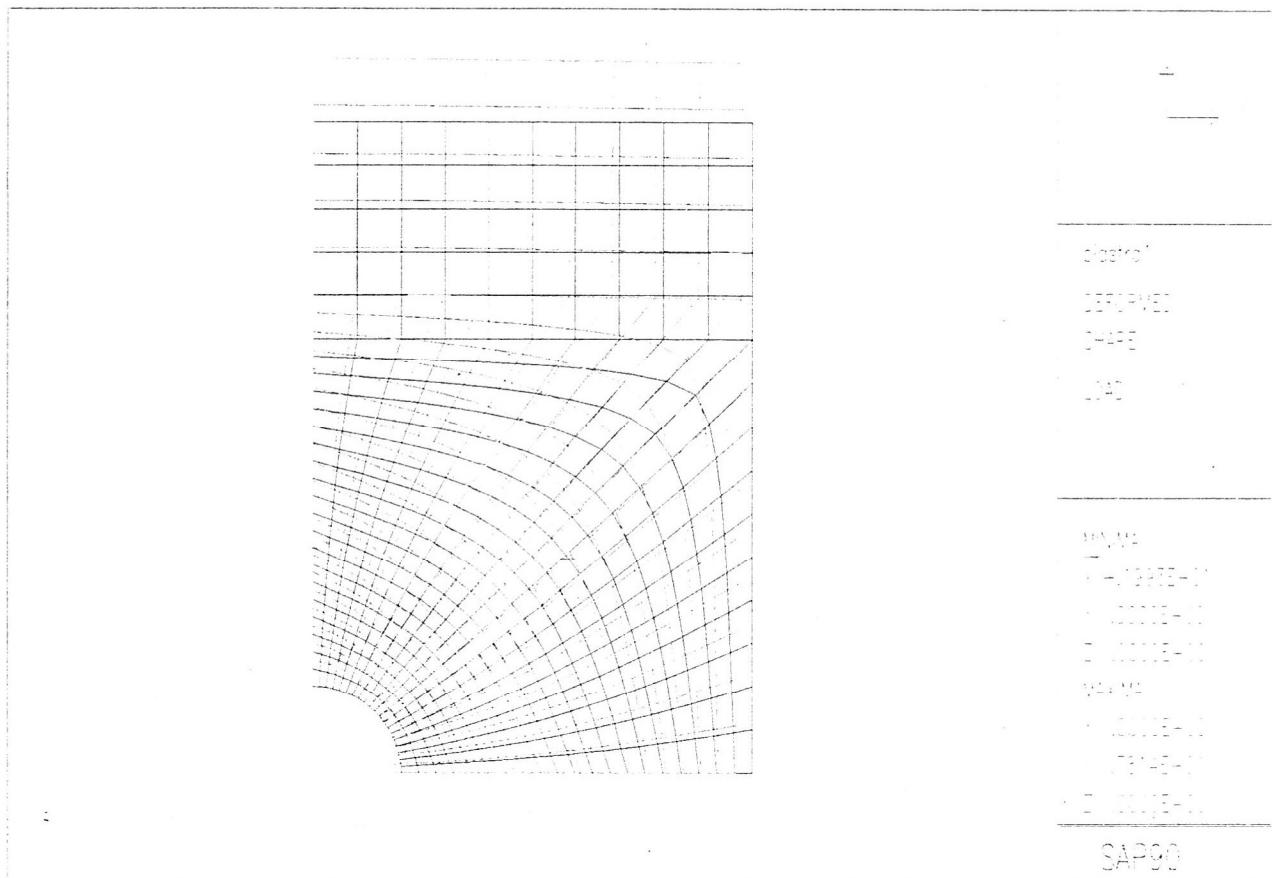
MINIMA

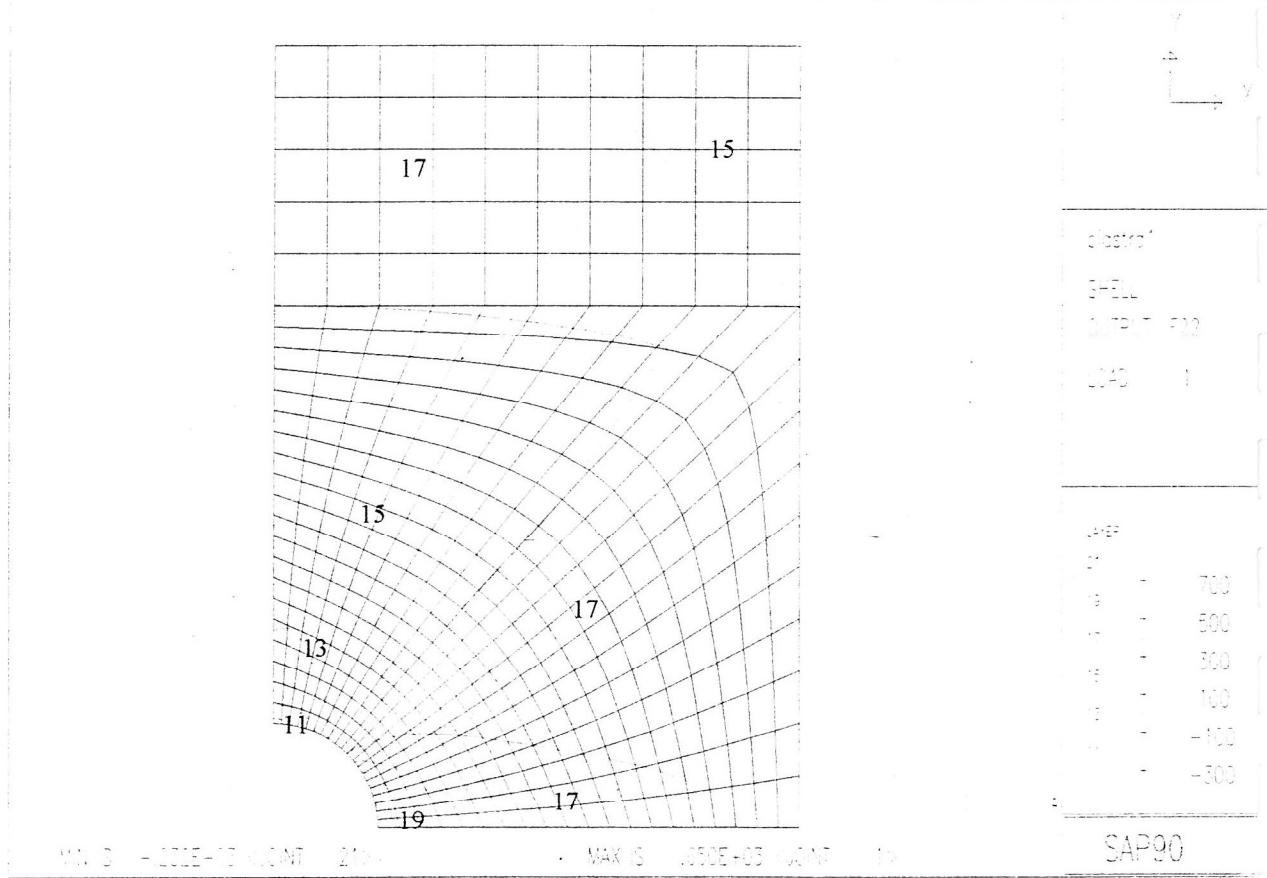
P=5000E-03

MAXIMA

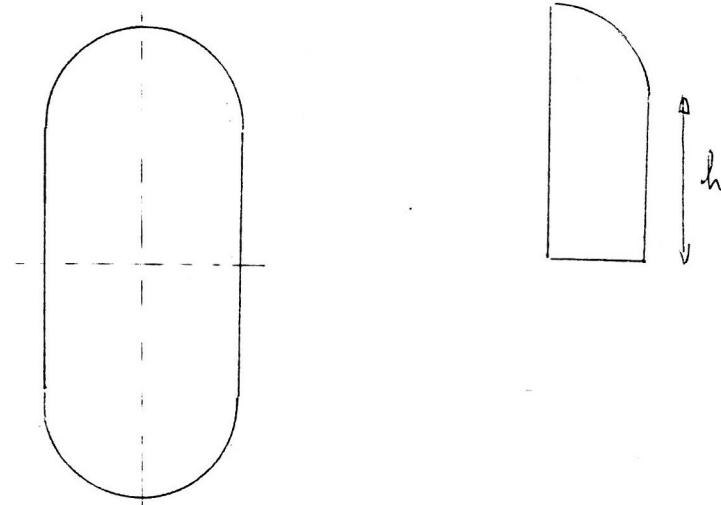
P=1000E-03

SAP90





RECIPIENTE CILINDRICO A SFONDO SFERICO IN PRESSIONE



$$r_{\text{cilindro}} = r_{\text{sfera}} = 1000 \text{ mm}$$

$$s = \text{spessore} = 10 \text{ mm}$$

$$h = 1500 \text{ mm}$$

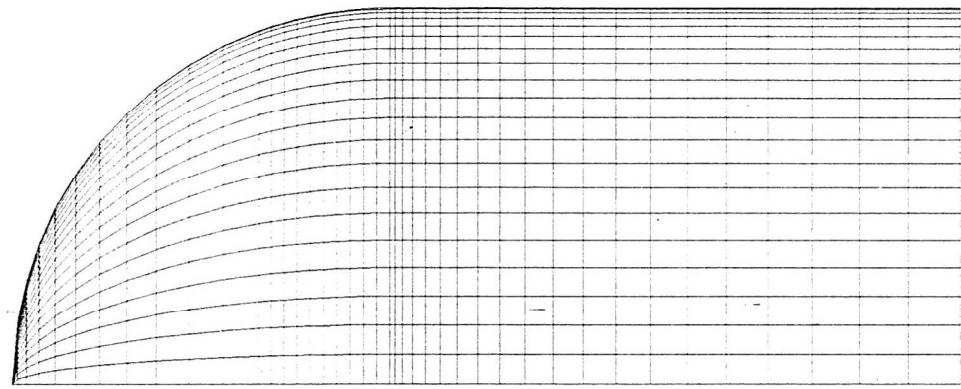
$$P = \text{pressione} = 100 \text{ N/mm}^2$$

La risoluzione numerica è in buon accordo con i valori teorici essendo la tensione tangenziale cilindrica

$$\sigma_{\theta\text{cil}} = pr/s = 10000 \text{ N/mm}^2$$

e la tensione tangenziale della sfera

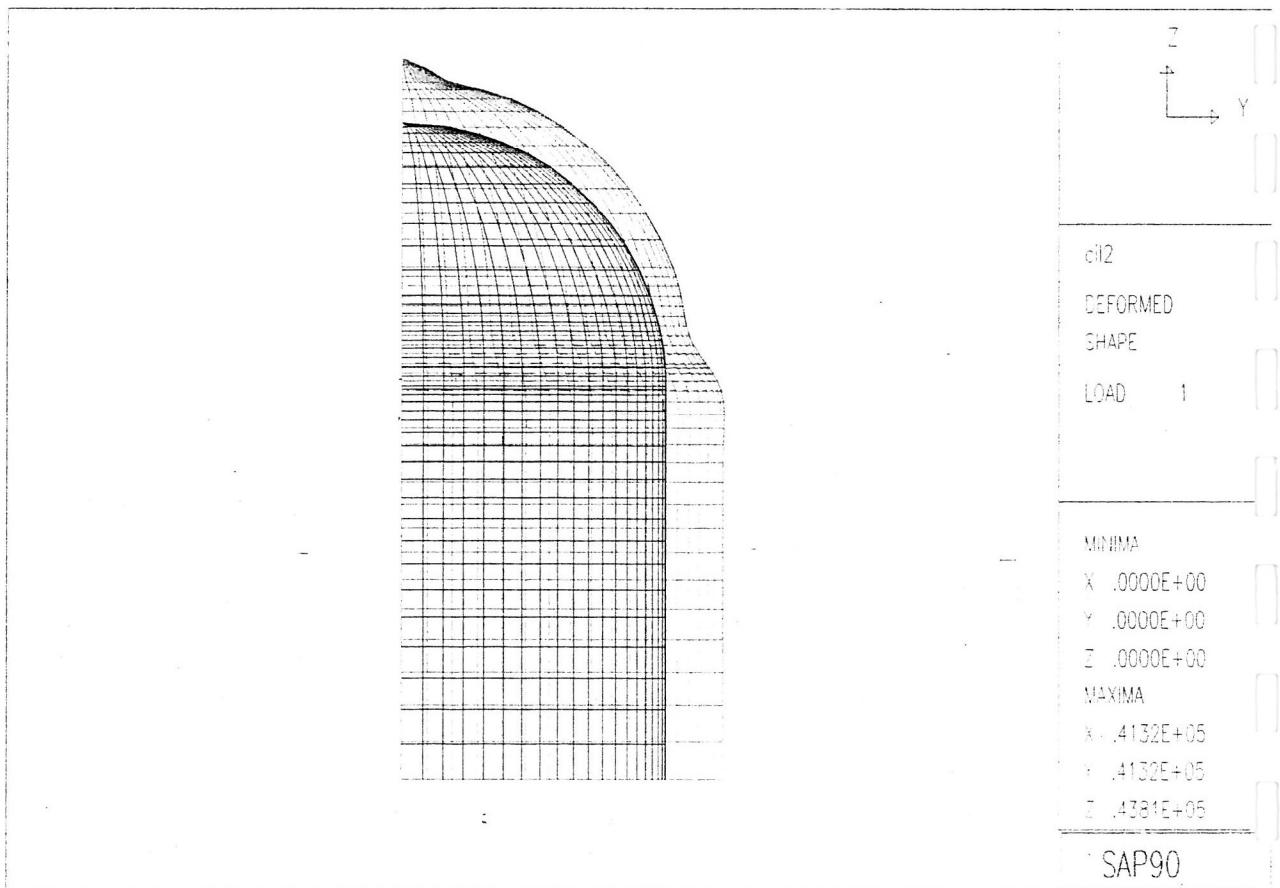
$$\sigma_{\theta\text{sfe}} = pr/(2s) = 5000 \text{ N/mm}^2$$

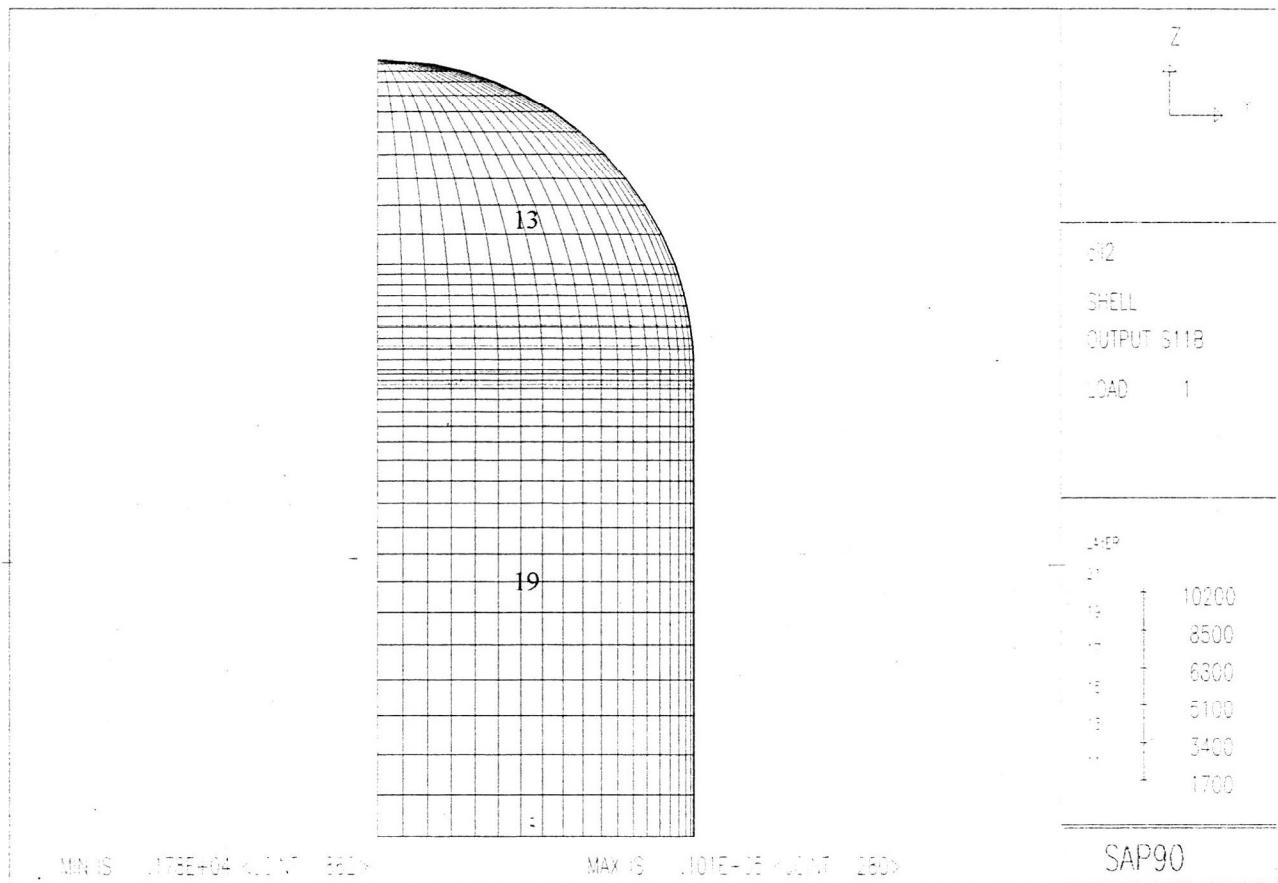


11

100 FRAME

24090





Trasmissione del calore

EQUAZIONI DIFFERENZIALI PER LA CONDUZIONE DEL CALORE

Il bilancio energetico può essere scritto :

quantità di calore entrante+generazione interna=quantità di calore uscente
+incremento di energia.

$$(q_x + q_y + q_z)dt + q_{gen}dxdydz = (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz})dt + \rho c dT dxdydz$$

dove q_x è il flusso termico entrante attraverso la faccia di normale x

$$q_x = -K \frac{\partial T}{\partial x} dy dz$$

e

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = -K \frac{\partial T}{\partial x} dy dz - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dy dz dx$$

Analogamente rispetto a y e z .

Sostituendo nell'equazione

$$K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

introducendo la notazione indiciale

$$KT_{,ii} - q_{gen} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

APPLICAZIONE DEL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

$$\int_V K T_{,ii} \delta T dV + \int_V q_{gen} \delta T dV = \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \delta T dV$$

$$\int_V K T_{,ii} \delta T dV = \int_V (K T_{,i} \delta T)_{,i} dV - \int_V (K T_{,i} \delta T_{,i}) dV = \int_A K T_{,i} n_i \delta T dA - \int_V (K T_{,i} \delta T_{,i}) dV =$$

Se sulla superficie A_1 è imposto il flusso come condizione al contorno e sulla superficie A_2 sono imposte condizioni convettive

$$\int_A K T_{,i} n_i \delta T dA = - \int_{A1} q \delta T dA - \int_{A1} h(T - T_\infty) \delta T dA$$

in definitiva

$$-\int_{A1} q \delta T dA - \int_{A1} h(T - T_\infty) \delta T dA - \int_V (K T_{,i} \delta T_{,i}) dV + \int_V q_{gen} \delta T dV = \int_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \delta T dV (*)$$

Assumendo $T(x,y,z,t) = [N(x,y,z)]\{T\}$

$$\delta T = [N]\{\delta T\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = [N]\{\dot{T}\}$$

Considerando che $T_{,i} \delta T_{,i} = N_{k,i} T_k N_{e,i} \delta T_e = \quad e=1\dots n \quad i=1\dots 3$

se si indica con $[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial N_n}{\partial x_1} & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$

$$KT_{,i}\delta T_{,i} = K\{\delta T\}^T[B]^T[B]\{\delta T\}$$

$$q\delta T = q\{\delta T\}^T[N]^T$$

$$hT\delta T = h\{\delta T\}^T[N]^T[N]\{\delta T\}$$

$$hT_x\delta T = h\{\delta T\}^T[N]^T T_x$$

$$q_{gen}\delta T = \{\delta T\}^T[N]^T q_{gen}$$

$$\rho c T \delta T = \rho c \{\delta T\}^T [N]^T [N]\{\delta T\}$$

indicando con

$$[K_1] = \int_V K[B]^T[B]dV$$

$$[K_2] = \int_{A_2} K[N]^T[N]dA_2$$

$$[K_3] = \int_V \rho c[N]^T[N]dV$$

$$\{P_1\} = \int_{A_1} q[N]^T dA_1$$

$$\{P_2\} = \int_{A_2} hT_\infty[N]^T dA_2$$

$$\{P_3\} = \int_V q_{gen}[N]^T dV$$

si ha

$$[K_3]\{\dot{T}\} + [K_1]\{T\} + [K_2]\{T\} = \{P_1\} + \{P_2\} - \{P_3\}$$

L'equazione (*) si può anche scrivere :

$$-\delta \int_{A1} q T dA - \delta \frac{1}{2} \int_{A1} h(T - T_\infty)^2 dA - \delta \frac{1}{2} \int_V K T_{,i}^2 dV + \delta \int_V q_{gen} T dV = \delta \int_V \rho c \dot{T} T dV$$

Calcolare il campo di temperatura in un corpo solido equivale a minimizzare l'integrale

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} \int_V \left\{ K \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + K \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + K \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 - 2(q_{gen} - \rho c \dot{T})T \right\} dV + \\ & + \int_{A1} q T dA_1 + \frac{1}{2} \int_{A2} h(T - T_\infty) dA_2 \end{aligned}$$

APPLICAZIONE DEL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI PER FLUIDI INCOMPRESIBILI NON VISCOSI

Per i fluidi incompresibili l'equazione di continuità si scrive

$$\operatorname{div}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

se si introduce una funzione potenziale ϕ tale che $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$

l'equazione di continuità diventa :

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Applicando il metodo di Galerkin

$$\phi = [N(x, y, z)] \{ \phi \}$$

$$\nabla^2 \phi = \int_V \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \delta \phi \, dV = 0$$

informa indiciale

$$\int_V \phi_{,ii} \delta \phi \, dV = \int_V (\phi_{,i} \delta \phi)_{,i} \, dV - \int_V \phi_{,i} \delta \phi_{,i} \, dV = \int_A \phi_{,i} n_i \delta \phi \, dA - \int_V \phi_{,i} \delta \phi_{,i} \, dV$$

$$\int_A \mathbf{v}_n \delta \phi \, dA = \int_V \phi_{,i} \delta \phi_{,i} \, dV$$

avendo indicato con v_n la velocità normale alla superficie.

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA DINAMICO

Ci si è fin qui occupati di esprimere le equazioni di governo dello stato di equilibrio di una struttura discretizzata in condizioni statiche.

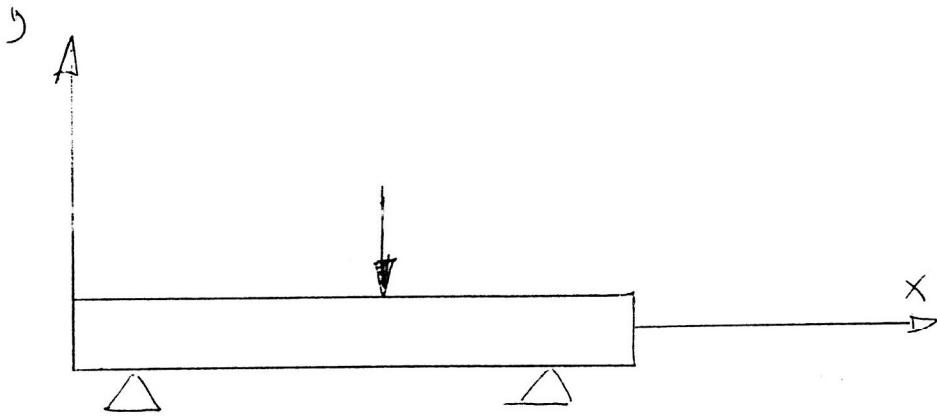
Si vuole ora estendere la formulazione introducendo o esplicitando anche gli effetti dovuti al moto in considerazione del fatto che sono ritenute non nulle sia le velocità che le accelerazioni nella struttura considerata.

Vi possono essere diversi modi di tener conto dei fenomeni dinamici che avvengono all'interno di una struttura sia quando la si consideri animata da moto libero di ampiezza relativamente ridotta intorno ad una posizione di equilibrio stabile (vibrazioni libere) , sia quando la si ritiene assoggettata a forze variabili nel tempo (vibrazioni forzate).

Va inoltre ricordato che lo studio può essere condotto con altrettanta efficacia , sia operando con le leggi del moto nel tempo (nel dominio del tempo) , sia operando nel dominio delle frequenze a seconda dell'opportunità.

Altre osservazioni riguardano il modello strutturale ed in particolare il modo di considerare le risposte significative alla luce degli obbiettivi dell'analisi strutturale.

Più precisamente ci si trova di fronte alla possibilità di poter considerare diversamente la fenomenologia in relazione alle informazioni ritenute significative e ovviamente alle tipologie strutturali.



La barra in figura soggetta ad un carico $P(t)$ può essere studiata come corpo in cui si propagano le onde di vibrazione (*) , come corpo-rigido oscillante su supporti elastici , ovvero come corpo elastico vibrante su vincoli infinitamente rigidi , oppure ancora tenendo conto della flessibilità sia dei vincoli che della struttura.

(*)

Nel caso di vibrazioni trasversali in una barra si considera il campo di spostamento funzione della sola x $v=v(x)$

$$\rho\{v\} = \text{div}[\sigma]$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

nel nostro caso

$$\rho v = \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Tale equazione viene detta della corda vibrante o di D'Alambert.

Si cerca una soluzione della forma $v=F(\eta)$ con $\eta=t+x \frac{b}{a}$ sostituendo

$$\rho F_{,\eta\eta} = G F_{,\eta\eta} \left(\frac{b}{a} \right)^2$$

da cui si ricava che la velocità di propagazione dell'onda $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

Analogamente per le onde normali la velocità di propagazione risulta $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$

VIBRAZIONI LIBERE DI SISTEMI NON DISSIPATIVI

Le vibrazioni libere intorno ad una posizione di equilibrio stabile sono governate dall'equazione che in assenza di forze esterne applicate si scrive :

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0.$$

Se si cerca una soluzione oscillatoria della forma $\{u\} = \{\underline{u}\} e^{i \omega t}$ e la si sostituisce nell'equazione da verificare si ottiene l'equazione omogenea nelle ampiezze $\{\underline{u}\}$

$$([K] - \omega^2[M]) = 0$$

che ammette soluzioni non corrispondenti alla quiete $\{\underline{u}\} = 0$ soltanto se

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0.$$

L'equazione delle frequenze si presenta come un polinomio di grado n in ω^2 pari al numero totale di gradi di libertà presenti.

SISTEMI ELASTICI LIBERI

a) $[K]$ singolare , $[M]$ non singolare

Poichè $[M]$ è non singolare possiamo moltiplicare per $[M]^{-1}$ e ottenere

$$(\omega^2[I]-[M]^{-1}[K])=0$$

che è una forma tipica di equazione agli autovalori.

Questo caso comprende la soluzione (autovalore) $\omega=0$ cui corrispondono le ampiezze (autovettori) $\{u_{rigid}\}$.

Infatti in questo caso si ha la compatibilità del sistema omogeneo omogeneo

$$[K]\{u\}=0$$

essendo $\det[K]=0$ la soluzione è $\{u\}=\{u_{rigid}\}$.

Le altre soluzioni in ω^2 sono (n-6) in 3D , (n-3) in 2D.

Per ogni autovalore ω_1^2 , ω_2^2 ...corrisponde un autovettore $\{u_1\}, \{u_2\}...$

b) $[K]$ singolare, $[M]$ singolare

Se anche la matrice delle masse risulta singolare (caso che si verifica se si trascurano alcune masse strutturali e si portano in conto solo alcune masse concentrate ai nodi) allora si dovrà effettuare una riduzione per partizione scrivendo:

$$[M] = \begin{bmatrix} Mc & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$-\omega^2 [Mc]\{u_1\} + [K_{11}]\{u_1\} + [K_{12}]\{u_2\} = 0$$

$$[K_{21}]\{u_1\} - [K_{22}]\{u_2\} = 0$$

ricavando $\{u_2\} = -[K_{22}]^{-1} [K_{21}]\{u_1\}$ e sostituendo nella prima

$$-\omega^2 [Mc]\{u_1\} - [K_{11}]\{u_1\} - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}]\{u_1\} = 0$$

$$-\omega^2 [Mc]\{u_1\} - [Kc]\{u_1\} = 0 \quad \text{con } [Kc] = [K_{11}] - [K_{12}][K_{22}]^{-1}[K_{21}]$$

premultipliando per $[M]^{-1}$ si ottiene l'equazione delle frequenze ridotta alla forma

$$\det(\omega^2 [I] - [Mc]^{-1} [Kc]) = 0$$

Gli autovettori corrispondenti ai moti rigidi verificano l'equazione $[K]\{u_{rigid}\}=0$.

SISTEMI VINCOLATI ISOSTATICAMENTO O IPERSTATICAMENTE

Se il sistema è vincolato almeno isostaticamente $\det[K] \neq 0$ pertanto si può scrivere l'equazione delle frequenze premoltiplicando per $1/\omega^2[K]^T$ nella forma

$$\det(1/\omega^2[I]-[K]^T[M])=0.$$

PROPRIETA' DEGLI AUTOVALORI E CONDIZIONI DI ORTOGONALITA'

L'equazione delle frequenze $(\omega^2[M]-[K])\{u\}=0$ può essere trasformata in un problema di autovettori moltiplicando per $[M]^T$

$$(\omega^2[I]-[M]^T[K])\{u\}=0$$

$$[M]^{-1}[K]\{u\} = \omega^2\{u\}$$

$$[M]^{-1}[K] = [M]^{-1/2}[M]^{1/2}[K][M]^{1/2}[M]^{-1/2} = [M]^{-1/2}[S][M]^{1/2} \quad \text{dove}$$

$[S] = [M]^{-1/2}[K][M]^{1/2}$ è una matrice simmetrica.

Se $[Q]$ è la matrice formata dagli autovettori ortonormali di $[S]$ e $[\Omega]^2$ la matrice diagonale degli autovalori allora

$$[M]^{-1/2}[K][M]^{1/2}[Q] = [\Omega]^2[Q]$$

$$[M]^{-1/2}[M]^{1/2}[K][M]^{1/2}[Q] = [\Omega]^2[M]^{-1/2}[Q]$$

$$[M]^{-1}[K][M]^{1/2}[Q] = [\Omega]^2[M]^{1/2}[Q]$$

indicando con $[P]$ la matrice degli autovettori della matrice $[M]^{-1}[K]$ si ha $[P] = [M]^{-1/2}[Q]$, gli autovalori della suddetta matrice sono gli stessi della matrice $[S]$.

Dalla risoluzione dell'equazione delle frequenze si determinano gli autovettori corrispondenti ai moti di vibrare di corpo rigido in numero di r $[P_r] = [\{P_1\}, \{P_2\}, \dots, \{P_r\}]$ e gli autovettori corrispondenti ai moti normali di vibrare (elastici) $[P_e] = [\{P_{r+1}\}, \{P_{r+2}\}, \dots, \{P_n\}]$ $[P] = [P_r, P_e]$.

Dalla relazione di ortogonalità dei vettori della matrice $[Q]$ si ottiene

$$[Q]^T[Q] = [I], \text{ poichè } [Q] = [M]^{1/2}[P] \text{ si ha}$$

$[P]^T [M]^{1/2} [M]^{1/2} [P] = [P]^T [M] [P] = [I]$ relazione di
ortogonalità dei modi normali.

Dalla relazione $[Q]^T [S] [Q] = [\Omega]^2$ si ottiene

$$[Q]^T [M]^{1/2} [K] [M]^{1/2} [Q] = [\Omega]^2$$

$$[P]^T [K] [P] = [\Omega]^2$$

L'autovalore relativo ad un moto di vibrare rigido è nullo pertanto

$$\{P_r\}^T [K] \{P_r\} = 0$$

VIBRAZIONI LIBERE DI SISTEMI SMORZATI

L'equazione di equilibrio per i sistemi smorzati (smorzamento viscoso) è

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = 0$$

la cui soluzione può essere posta sotto la forma complessa $\{u\} = \{q\}e^{pt}$

che sostituendo e semplificando diventa

$$(p^2[M] + p[C] + [K])\{q\} = 0$$

che fornisce soluzioni solo se $\det(p^2[M] - p[C] + [K]) = 0$.

L'equazione può essere ricondotta a forma standard con la posizione

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & C \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \quad \{u\} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \end{bmatrix}$$

$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = 0$ che con la soluzione $u = \{q\}e^{pt}$ fornisce

$$(p[A] - [B])\{q\} = 0$$

problema standard agli autovalori.

SMORZAMENTO CRITICO

Si fa riferimento ad un sistema ad un grado di libertà per il quale si può scrivere l'equazione di equilibrio

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = 0$$

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} \dot{u} + \frac{K}{m} u = 0$$

indicando con $\omega_n^2 = \frac{K}{m}$

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} \dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

Si cerca una soluzione della forma $u = e^{pt}$

sostituendo

$$p^2 + \frac{c}{m} p + \omega_n^2 = 0$$

$$p = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \omega_n^2}$$

$$p = -\frac{c}{2m} \pm \omega_n \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - 1}$$

indicando con $c_{crit}^2 = 4mk$

$$p = -\frac{c}{2m} \pm \omega_n \sqrt{\frac{c^2}{c_{crit}^2} - 1}$$

Se $c > c_{crit}$ il sistema perde il carattere oscillatorio, al limite per $c = c_{crit}$ si ha lo smorzamento critico.

RISPOSTA DINAMICA

E' stato fin qui considerato il caso delle oscillazioni libere di sistemi discretizzati lineari non dissipativi e dissipativi.

Per risposta dinamica s'intendono gli spostamenti ottenuti per effetto dell'applicazione di funzioni forzanti carichi o spostamenti.

L'equazione del moto di un sistema non dissipativo forzato si scrive:

$$[M]\{u\} + [K]\{u\} = P(t)$$

Se la funzione $P(t)$ è generica per ottenere la risposta nel dominio del tempo si può far riferimento a metodi numerici (passo dopo passo).

Soluzioni di casi particolari sono richiamate in seguito con riferimento ad un sistema ad 1 grado di libertà.

FORZA APPLICATA DI TIPO SINUSOIDALE

$$m \ddot{u} - k u = P_0 \sin \omega t$$

si cerca una soluzione particolare della forma

$$u = u_0 \sin \omega t, \text{ sostituendo si ha}$$

$$-m \omega^2 u_0 + k u_0 = P_0$$

$$u_0 = P_0 / (k - m\omega^2)$$

la soluzione generale è data dalla somma della soluzione particolare e della soluzione dell'omogenea associata

$$u(t) = A \cos \omega_n t - B \sin \omega_n t - P_0 / (k - m\omega^2)$$

FORZA APPLICATA A GRADINO

$$m \ddot{u} - k u = P_0 H(t)$$

dove $H(t)$ è la funzione a gradino o di Heaviside $= 0$ per $t < 0$ $= 1$ per $t > 1$

$$u = P_0 / K = P_0 / (\omega_n^2 m) \quad \text{è una soluzione particolare}$$

$u(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + P_0 / (\omega_n^2 m)$ è la soluzione generale.

Se $u(0) = u'(0) = 0$ $P_0 = I$

$$u(t) = A(t) = 1 / (\omega_n^2 m) (1 - \cos \omega_n t)$$

La funzione $A(t)$ viene denominata ammettenza indiciale.

Una funzione a gradino al tempo τ ha una risposta della forma $A(t-\tau)$

FORZA APPLICATA DI TIPO IMPULSIVO

Supponiamo che la forza $P(t) = \delta(t)$ dove la funzione delta di Dirac è nulla per $t \neq 0$

$$e \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = 1$$

(fisicamente l'impulso della forza istantanea applicata è 1).

L'equazione del moto si scrive:

$$m \ddot{u} + k u = \delta(t)$$

integrandolo l'equazione tra 0^- e 0^+ si ottiene

$$m \dot{u}(0^+) - m \dot{u}(0^-) = 1$$

se imponiamo le condizioni iniziali $\dot{u}(0^-) = 0$

$$\text{si ha } \dot{u}(0^+) = \frac{1}{m}$$

applicando queste condizioni iniziali alla soluzione del sistema libero

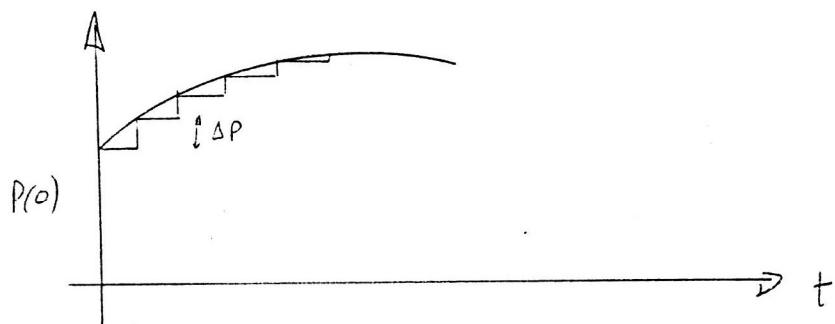
$u(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$ si ottiene la soluzione del problema di partenza

$$u(t) = h(t) = I / (m \omega_n) \sin \omega_n t.$$

La stessa soluzione si può ottenere osservando che essendo la funzione delta di Dirac la derivata della funzione di Heaviside, per la linearità delle equazioni del moto anche la soluzione è la derivata della soluzione del problema precedente.

$$H(t) = \frac{dA(t)}{dt}$$

FORZA VARIABILE CON LEGGE QUALSIASI INTEGRALE DI CONVOLUZIONE O DI DUHAMEL



Applicando la soluzione dovuta al gradino unitario e sommando i successivi contributi lo spostamento può essere espresso dalla relazione

$$u(t) = P(0)A(t) + \sum \Delta P A(t-\tau) = P(0)A(t) - \sum \frac{\Delta P}{\Delta \tau} A(t-\tau) \Delta \tau$$

passando al limite della sommatoria

$$u(t) = P(0)A(t) + \int_0^t \frac{dP(\tau)}{d\tau} A(t-\tau) d\tau$$

Integrando per parti

$$u(t) = P(0)A(t) + [P(\tau)A(t-\tau)]_{\tau=0}^{t=t} + \int_0^t P(\tau) \frac{dA(t-\tau)}{d\tau} d\tau$$

Se $P(0)=0$ e le condizioni iniziali su u e \dot{u} sono nulle $u(t) = \int_0^t P(\tau)h(t-\tau)d\tau$

nel caso di condizioni iniziali non nulle

$$u(t) = \frac{u(0)}{\omega} \sin \omega t + u(0) \cos \omega t + \int_0^t P(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

RISPOSTA DI UNA STRUTTURA PRIVA DI SMORZAMENTI E NON -VINCOLATA

Per ricostruire la risposta di un sistema discreto (o in via approssimata discretizzato) sollecitato da azioni forzanti generiche partiamo dall' equazione matriciale dell'equilibrio dinamico

$$[M]\{u\} - [K]\{u\} = \{P(t)\}.$$

Come si è visto quando si utilizzano i modi normali rigidi $[P_r]$ ed elastici $[P_e]$ si possono ottenere equazioni disaccoppiate e perseguiere la soluzione con maggiore facilità secondo le nuove "coordinate modali".

$$\{u\} = [P_r, P_e] \begin{Bmatrix} \{\phi_r\} \\ \{\phi_e\} \end{Bmatrix}$$

Sostituiamo ora la formula indicata per la risposta nell'equazione del moto ottenendo:

$$[M][P_r]\{\ddot{\phi}_r\} + [P_e]\{\ddot{\phi}_e\} + [K][P_r]\{\phi_r\} + [P_e]\{\phi_e\} = P(t)$$

Premoltiplicando per $[P_r]^T$

$$[P_r]^T[M][P_r]\{\ddot{\phi}_r\} + [P_r]^T[M][P_e]\{\ddot{\phi}_e\} + [P_r]^T[K][P_r]\{\phi_r\} + [P_r]^T[K][P_e]\{\phi_e\} = [P_r]^T P(t)$$

per l'ortogonalità dei moti rigidi rispetto agli elastici

$$[P_r]^T[M][P_e] = 0$$

poichè $[P_r]$ sono moti rigidi $[K][P_r] = 0$ e trasponendo $[P_r]^T [K] = 0$

per cui rimane solo il primo termine

$$[P_r]^T[M][P_r]\{\ddot{\phi}_r\} = [P_r]^T P(t)$$

introducendo le forze generalizzate

$$[F_r] = [P_r]^T P(t) \text{ e ricordando che } [P_r]^T[M][P_r] = [I]$$

si può ricavare l'equazione differenziale

$$\{\ddot{\phi}_r\} = [F_r]$$

che può essere risolta integrando due volte rispetto al tempo e tenendo conto delle condizioni iniziali $\dot{\phi}_r(0)$ e $\phi_r(0)$.

Premoltiplicando per $[P_e]^T$

$$[P_e]^T [M] [P_r] \{ \phi_r \} + [P_e]^T [M] [P_e] \{ \phi_e \} + [P_e]^T [K] [P_r] \{ \phi_r \} - \\ + [P_e]^T [K] [P_e] \{ \phi_e \} = [P_e]^T P(t)$$

ricordando che $[P_e]^T [K] [P_e] = [\Omega_e]^2$ avendo indicato con $[\Omega_e]^2$ la matrice diagonale formata dagli autovalori relativi ai moti normali elastici si ottiene

$$\{ \phi_e \} + [\Omega_e]^2 \{ \phi_e \} = \{ F_e \}$$

le equazioni sono disaccoppiate e possono essere risolte ciascuna in maniera indipendente applicando l'integrale di Duhamel.

Resta da trovare la relazione tra i valori dei moltiplicatori $\phi_r(0)$ $\phi_r(0)$ $\phi_e(0)$ $\phi_e(0)$ iniziali rispetto ai corrispondenti valori $u(0)$ e $u(0)$.

$$\begin{Bmatrix} \{u_r(0)\} \\ \{u_e(0)\} \end{Bmatrix} = [P_r \quad P_e] \begin{Bmatrix} \{\phi_r(0)\} \\ \{\phi_e(0)\} \end{Bmatrix}$$

$$\{u_r(0)\} = [P_r] \{\phi_r(0)\} + [P_e] \{\phi_e(0)\}$$

premultipliando per $[P_r]^T [M]$

$$[P_r]^T [M] \{u_r(0)\} = [P_r]^T [M] [P_r] \{\phi_r(0)\} + [P_r]^T [M] [P_e] \{\phi_e(0)\}$$

da cui si ricava

$$\{\phi_r(0)\} = [P_r]^T [M] \{u_r(0)\}$$

analogamente

$$\{\phi_e(0)\} = [P_e]^T [M] \{u_e(0)\}$$

ANALISI NON LINEARE ED INSTABILITÀ

L'analisi fin qui svolta è stata sviluppata a partire da ipotesi di linearità del legame costitutivo e da condizioni di equilibrio considerate valide sia per la configurazione indeformata che per quella deformata.

Nei casi reali è possibile trovare comportamenti di materiale che non consentono più l'ipotesi di linearità del legame (non linearità elastica , plasticità , viscoelasticità ecc...) nel tal caso si parla di "non linearità del materiale".

L'altro tipo di non linearità detta "geometrica" si verifica quando gli spostamenti a partire da una configurazione indeformata inducono cambiamenti tali nella geometria da alterare le condizioni che devono essere riscritte per la configurazione deformata.

NON LINEARITA' GEOMETRICHE

In presenza di spostamenti non più considerabili piccoli, le equazioni di equilibrio che valgono inizialmente e che sono note nella forma $[K]\{u\}=\{P\}$ vengono alterate dal fatto che la matrice di rigidità viene via via modificata in funzione degli stessi spostamenti (geometria) ma anche delle forze interne.

Esemplificando con procedura incrementale a partire dalla configurazione indeformata , a seguito dell'applicazione dei carichi esterni , si ottiene una configurazione caratterizzata da spostamenti non piccoli e dalla distribuzione di forze interne $\{P_I\}$ dall'equazione di equilibrio $[K_E]\{u\}=\{P_I\}$.

Volendo procedere , poichè gli spostamenti non sono piccoli la matrice di rigidezza sarà influenzata dalla configurazione fortemente alterata della struttura e si potrà scrivere:

$$[K'] = [K_E] + [K_G(u_I)]$$

Pur essendo in presenza di grandi spostamenti nell'analisi che stiamo svolgendo è possibile ritenere venga conservata in ogni caso la linearità tra le forze interelementari e i relativi spostamenti.

Se $\{P_I\}$ sono i carichi applicati alla struttura che inducono un'alterazione di rigidezza $[K_G]$ i carichi

$$\lambda[P_I] \text{ indurranno } \lambda[K_G].$$

Matrice di rigidezza Spostamento incrementale Forze interne

$$1 \quad [K_E] \quad \{\Delta u_1\} \quad \{F_1\}$$

$$2 \quad [K_E] + [K_G(u_1)] \quad \{\Delta u_2\} \quad \{F_2\}$$

$$3 \quad [K_E] + [K_G(u_2)] \quad \{\Delta u_3\} \quad \{F_3\}$$

$$n \quad [K_E] + [K_G(u_{n-1})] \quad \{\Delta u_n\} \quad \{F_n\}$$

dove $\{u_n\} = \sum_i \{\Delta u_i\}$ $i=1 \dots n$

INSTABILITÀ

Consideriamo una struttura con comportamento geometrico non lineare e pensiamo di applicare carichi gradualmente crescenti secondo un parametro λ .

Per quanto abbiamo detto l'incremento dei carichi $\{P\}$ secondo il parametro moltiplicatore comporta un'alterazione della matrice geometrica e se al carico $\{P\}$ corrisponde la matrice $[K_G]$, al carico

$\lambda\{P\}$ attiene la matrice $\lambda [K_G]$ mentre, almeno per un intervallo esteso di spostamenti la matrice $[K_E]$ la si può ritenere inalterata.

L'equazione di equilibrio nella generica condizione si può pertanto scrivere

$$([K_E] + \lambda [K_G])\{u\} = \lambda\{P\}$$

da cui si possono ricavare gli spostamenti

$$\{u\} = ([K_E] + \lambda [K_G])^{-1} \lambda \{P\}.$$

Se $\det([K_E] + \lambda [K_G]) = 0$ ci si trova di fronte a spostamenti indeterminati (infiniti) sotto l'azione di carichi $\lambda\{P\}$ in cui λ è il valore che annulla il determinante.

Un'ulteriore interpretazione può essere data pensando alla stessa condizione come compatibilità del sistema omogeneo

$$([K_E] - \lambda [K_G])\{u\} = 0$$

in cui λ sono autovalori e le soluzioni $\{u\}$ autovettori.

Il primo autovalore λ_{crit} è il moltiplicatore critico cui corrispondono i carichi di biforcazione $\lambda\{P\}$ o carichi critici o carichi di buckling lineare.