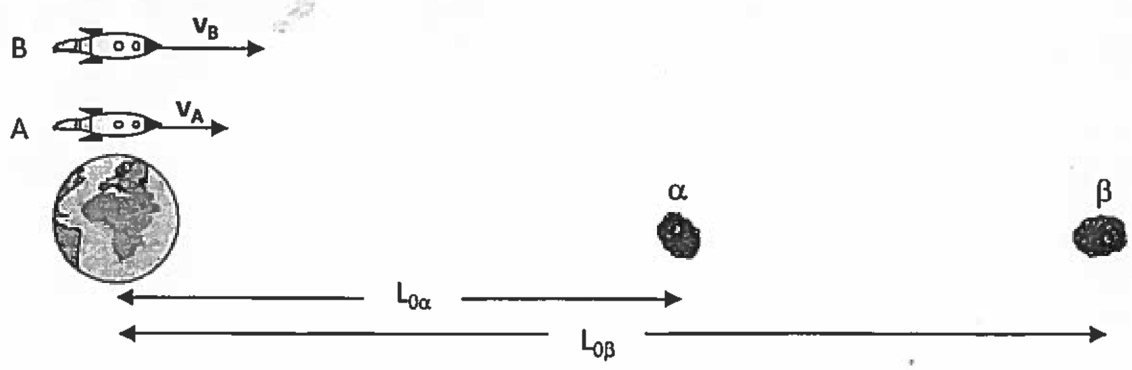
Esercitazione su

relatività ristretta

PROBLEMA [redacted]

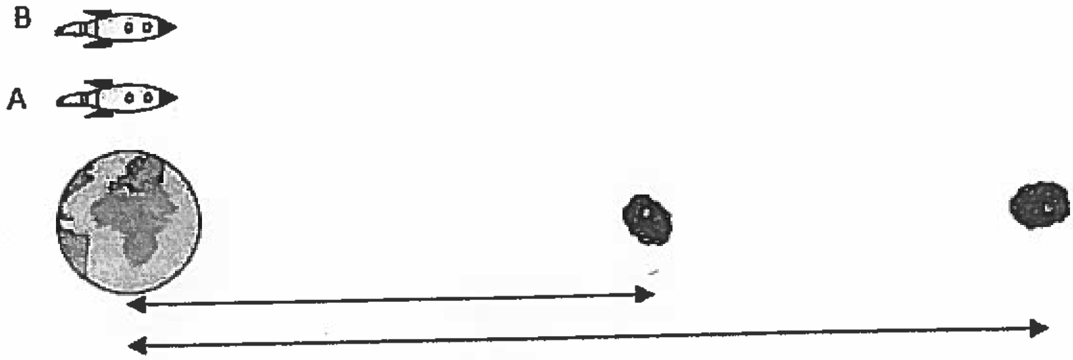
Due asteroidi, denominati α e β, sono stati individuati a distanze $L_{0\alpha} = 4\, ore\ luce$ (pari a $4{,}317 \cdot 10^{12} m$) e $L_{0\beta} = 7{,}5\ ore\ luce$ (pari a $8{,}094 \cdot 10^{12} m$) rispetto alla Terra. I due asteroidi sono allineati con la Terra e la loro velocità rispetto alla Terra è trascurabile. Due astronavi, A e B, partono nello stesso istante verso i due asteroidi per un volo di ricognizione. L'astronave A ha il compito di sorvolare l'asteroide α mentre l'astronave B ha il compito di sorvolare l'asteroide β.

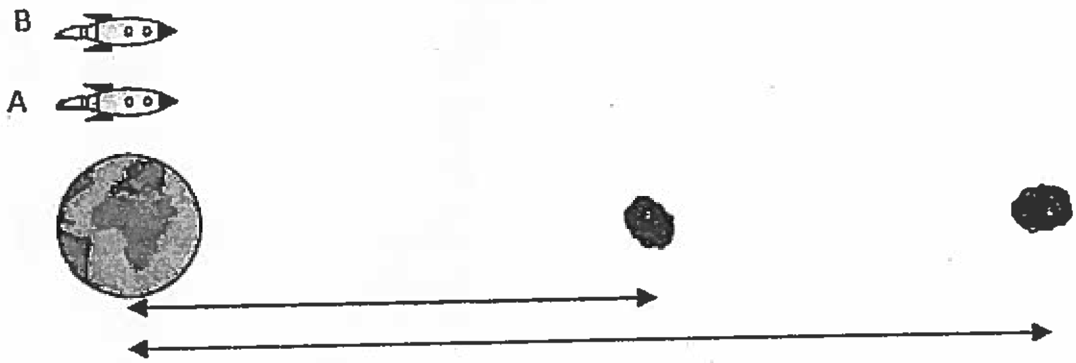
Le due astronavi viaggiano a velocità relativistiche con moto rettilineo uniforme. L'astronave B, che deve percorrere una distanza maggiore, utilizza dei propulsori più potenti e viaggia ad una velocità maggiore di quella dell'astronave A. Nel sistema di riferimento della Terra, all'istante iniziale $t = 0$, la situazione è quella rappresentata nella figura seguente:



[redacted]

Le due figure seguenti illustrano invece la situazione all'istante $t = 0$ nei sistemi di riferimento dell'astronave A e dell'astronave B.





1. Completa le due figure disegnando su ciascun oggetto un vettore che rappresenti la sua velocità nel sistema di riferimento in esame e scrivendo in corrispondenza di ciascuna distanza la relazione che permette di calcolarla. Spiega cosa cambia nei due sistemi di riferimento A e B rispetto al riferimento della Terra.

Il comandante della missione decide di premiare l'astronauta che per primo raggiungerà l'asteroide che gli è stato assegnato. I due astronauti si accordano di inviare all'altro il tempo di arrivo sull'asteroide obiettivo della propria missione.

2. Quando l'astronave A raggiunge l'asteroide α il suo orologio di bordo indica un tempo $t'_\alpha = 9h$ 9 min $54s$ $(pari\ a\ 3{,}299 \cdot 10^4 s)$ e quando l'astronave B raggiunge l'asteroide β, il suo orologio di bordo indica anch'esso il tempo $t'_\beta = 9h$ 9 min $54s$. Determina la velocità dell'astronave A e quella dell'astronave B (in unità c) rispetto alla terra. Determina anche la velocità relativa tra le due astronavi.

Quando l'astronauta A riceve l'informazione sul tempo di arrivo di B sull'asteroide β, ritiene di aver vinto e di avere quindi diritto al premio.

3. Dalle trasformazioni di Lorentz o dalle relazioni tra intervalli di tempo misurati in sistemi di riferimento diversi, deduci il tempo t'_β di arrivo di B sull'asteroide β come determinato da A e verifica che effettivamente egli giustamente ritiene di aver diritto alla promozione.

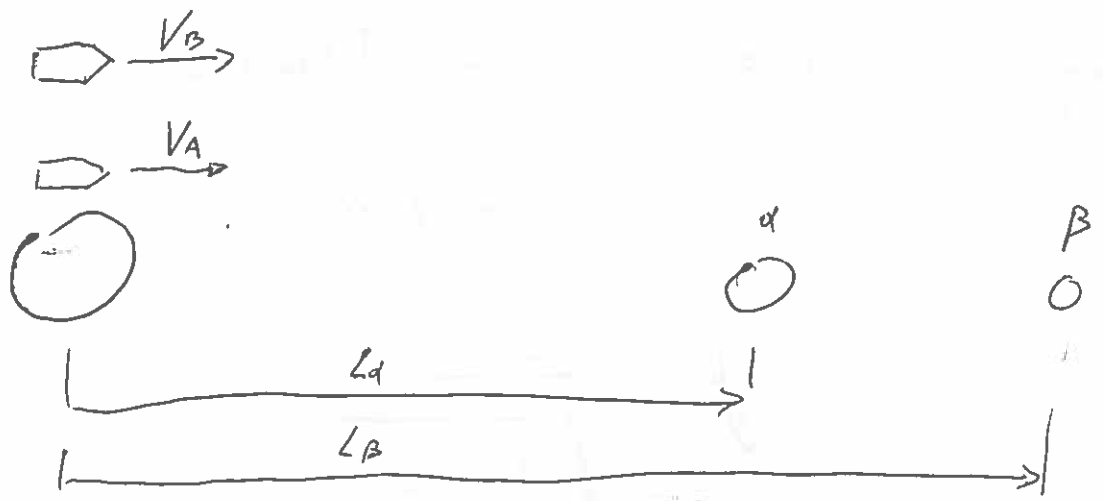
4. Ma anche l'astronauta B ritiene di aver vinto, in base alla sua misura del tempo t'_α impiegato da A. Utilizzando ancora una volta le trasformazioni di Lorentz o le relazioni tra intervalli di tempo misurati in sistemi di riferimento diversi, verifica la giustezza delle conclusioni tratte da B.

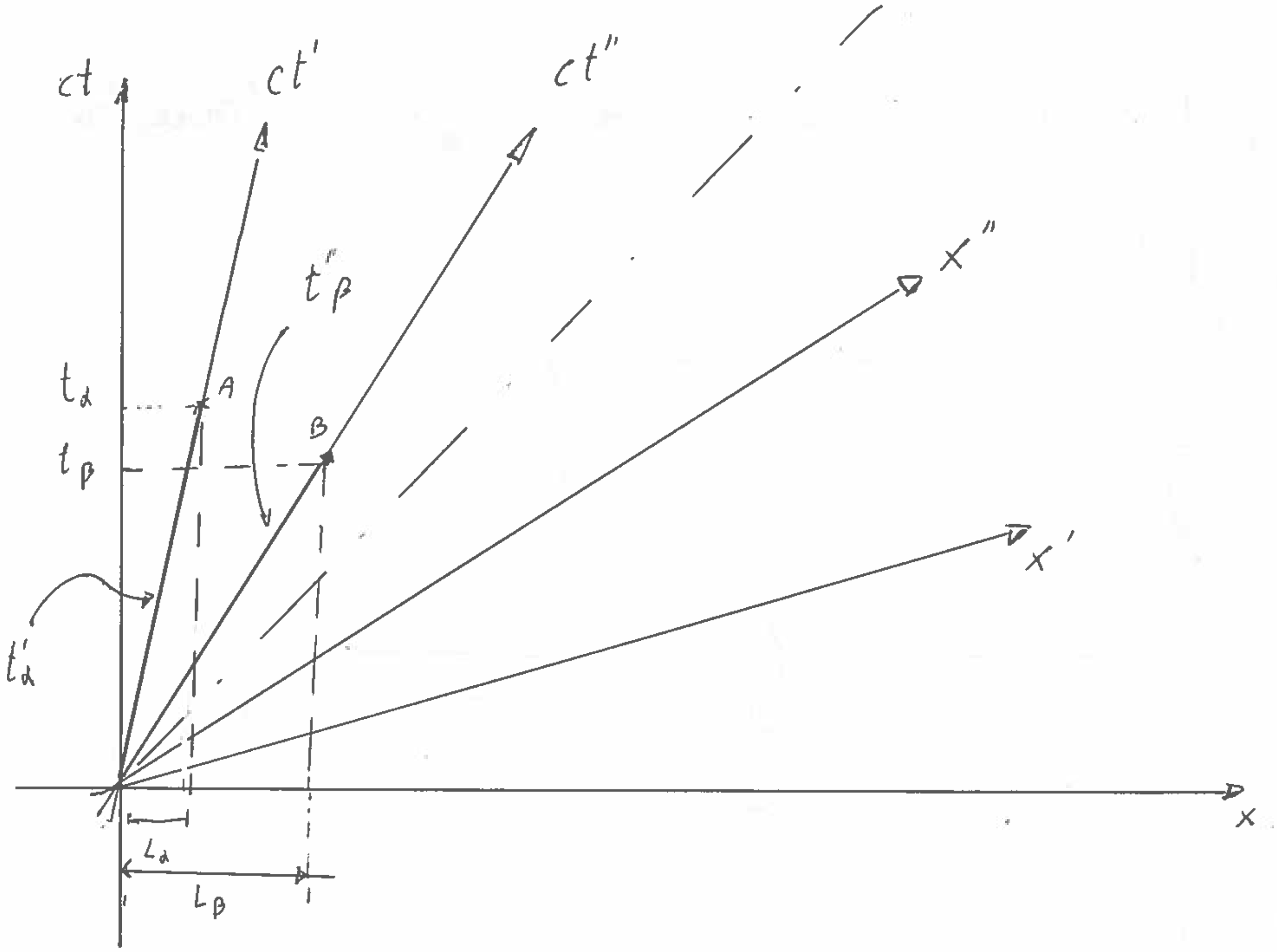
Il comandante della missione, consultato un testo di relatività, si scusa con i due astronauti e li premia entrambi: ha capito infatti che si è verificata una inversione temporale tra due eventi visti da osservatori diversi, da lui non prevista.

5. Spiega se questa inversione temporale è possibile, in quali condizioni si può verificare e se, nel caso in esame, è questa la ragione del contenzioso tra i due astronauti.

①

Sistema di riferimento terrestre





$L_\alpha = 4.317 \times 10^{12}$ m

$L_\beta = 8.094 \times 10^{12}$ m

$t'_\alpha = 3.299 \times 10^4$ s $\qquad t''_\beta = 3.299 \times 10^4$ s

t'_α = tempo misurato sull'astronave A

è un tempo proprio cioè un tempo

misurato in una stessa posizione.

$$t'_\alpha = \frac{1}{\gamma} t_\alpha \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

Rispetto al sistema di riferimento terrestre

$$t_\alpha = \gamma t'_\alpha$$

$$v_A = \frac{L_\alpha}{\gamma t'_\alpha} = \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} \; \frac{L_\alpha}{t'_\alpha}$$

$$\frac{v_A}{c} = \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} \; \frac{L_\alpha}{c t'_\alpha} = \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} \; K_A$$

$$\beta_A = \frac{v_A}{c}$$

$$\beta_A = \sqrt{1 - \beta_A^2} \; K_A$$

Considero lo sviluppo di Taylor

$$\sqrt{1-\beta_A^2} \simeq 1 - \frac{1}{2}\beta_A^2$$

$$K_A = \frac{L_\alpha}{t'_\alpha c} = \frac{4.317 \times 10^{12}}{2.9979 \times 10^8 \times 3.299 \times 10^4}$$

$$K_A = 0.43$$

$$\beta_A = \left(1 - \frac{1}{2}\beta_A^2\right) K_A$$

$$\beta_A = \left(1 - \frac{1}{2}\beta_A^2\right) K_A$$

$$\frac{1}{2}\beta_A^2 K_A + \beta_A - K_A = 0$$

$$\beta_A^2 K_A + 2\beta_A - 2K_A = 0$$

$$\beta_A = -1 \pm \sqrt{1 + 2K_A} = -1 \pm \sqrt{1 + 0.86}$$

$$\beta_A = -1 \pm 1.36$$

$\rightarrow \boxed{0.36}$

$\rightarrow -2.36$ (da scartare perché $v_A > c$)

Analogamente per l'astronave B rispetto al sistema di riferimento terrestre

$$\beta_B = \frac{v_B}{c}$$

$$\beta_B = -1 \pm \sqrt{1 + 2K_B}$$

$$K_B = \frac{L_B}{c\,t'_B} = \frac{8.094 \times 10^{12}}{2.9979 \times 10^{8} \times 3.299 \times 10^{4}}$$

$$K_B = 0.82$$

$$\beta_B = -1 \pm \sqrt{1 + 2 \times 0.82} = -1 \pm 1.62$$

$\rightarrow \boxed{0.62}$

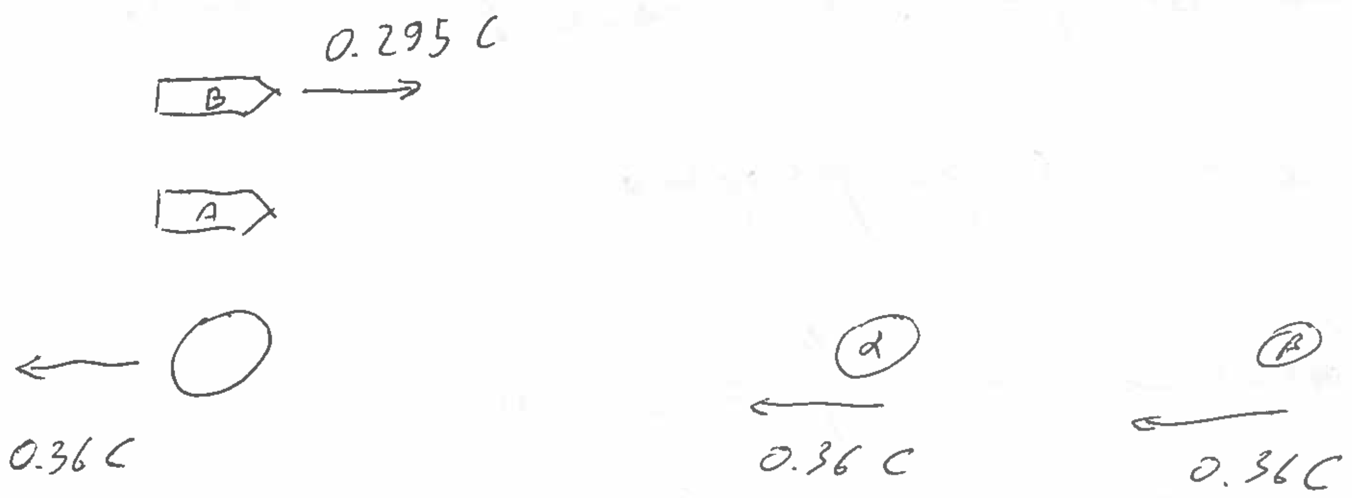
$\rightarrow -2.62$ (da scartare perché $v_B > c$)

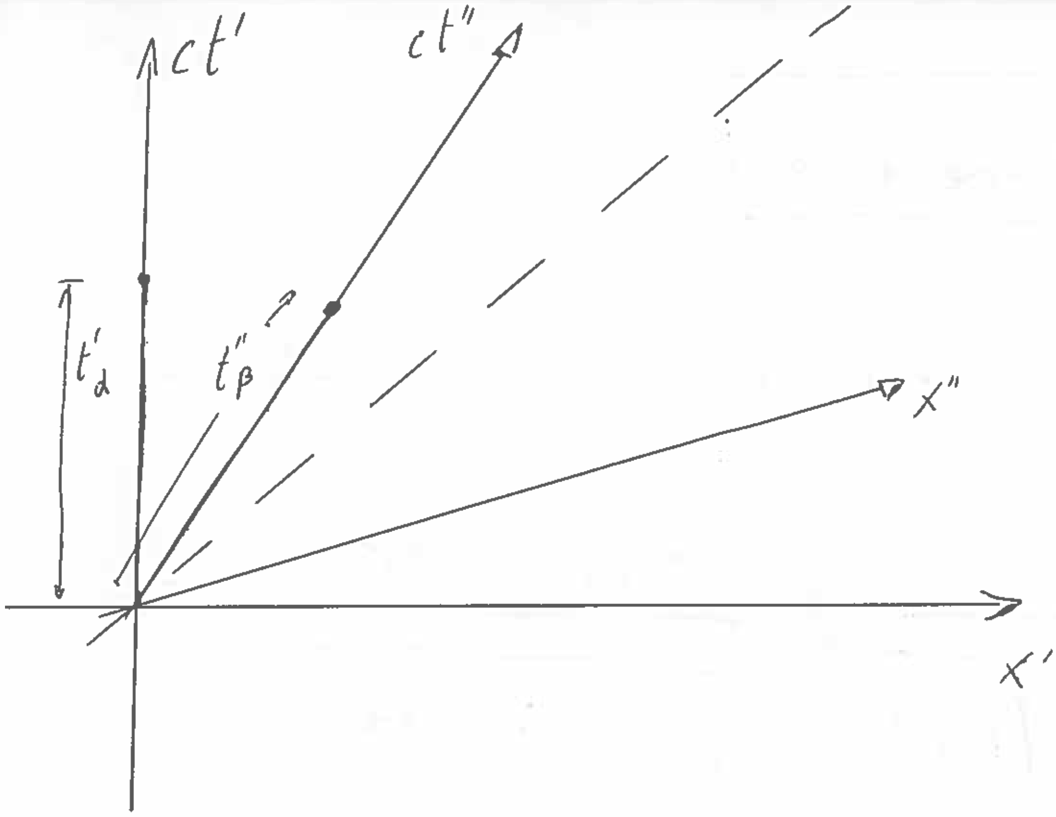
$\boxed{\text{Rispetto all'astronave A}}$

L'astronave B si muove con una velocità

$$\frac{v_B}{c} = \frac{\beta_B - \beta_A}{\sqrt{1 - \beta_B \beta_A}} = \frac{0.62 - 0.36}{\sqrt{1 - 0.62 \times 0.36}} =$$

$$= 0.295$$





Per l'astronave A il tempo t'_α è un tempo proprio così per l'astronave B il tempo t'_β è un tempo proprio.

Per l'astronave A $t''_\beta = \frac{1}{\gamma} t'_\beta$

$$t'_\beta = \gamma\, t''_\beta = \gamma\, t'_\alpha \qquad \text{con } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} > 1$$

Per l'astronave A

$t'_\beta = \gamma t'_\alpha$ con $\gamma > 1$

$t'_\beta > t'_\alpha$ per l'astronave A avviene prima il contatto tra l'astronave A e l'asteroide α e poi il contatto tra l'astronave B e l'asteroide β.

Per l'astronave B

$t'_\alpha = \frac{t''_\alpha}{\gamma}$

$t'_\alpha = \gamma t'_\alpha = \gamma t''_\beta$

$t''_\alpha > t''_\beta$

Per l'astronave B avviene prima

il contatto tra l'astronave B e l'asteroide β e poi il contatto tra l'astronave A e l'asteroide α.

Secondo la relatività ristretta la simultaneità è relativa al sistema di riferimento considerato.

Rispetto al sistema solidale all'astronave A l'evento "contatto astronave A e asteroide α" precede l'evento "contatto astronave B e asteroide β".

Rispetto al sistema solidale all'astronave B l'evento "contatto astronave A e

(5)

asteroide α" segue il evento "cattetto astronave β e asteroide β"