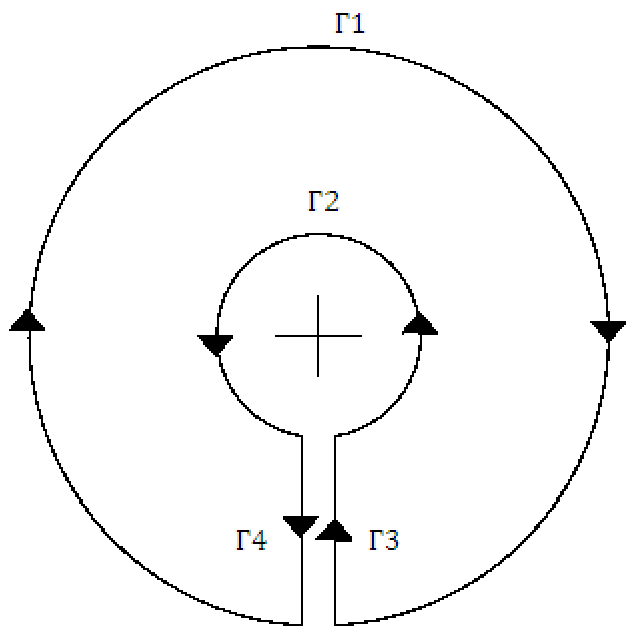
INTEGRAZIONE CON IL METODO DEI RESIDUI

Consideriamo una funzione complessa $f(z): Z \to Z$ nella variabile complezza z
la variabile $z = x + iy$ appartiene al campo dei numeri complessi mentre le variabili x e y rispettivamente parte reale e immaginaria di z appartengono al campo dei numeri reali.
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è olomorfa in una regione Ω se esiste la derivata prima $f'(z)$ in Ω
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ è analitica in una regione Ω se è infinitamente derivabile in Ω

- Se una funzione complessa $f(z)$ è derivabile nella funzione $z = x + iy$ allora valgono le condizioni di Cauchy-Riemann
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$
- Se una funzione complessa $f(z)$ è analitica su una regione Ω allora sfruttando le condizioni di Cauchy-Riemann si può dimostrare che
$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$
qualsialsi sia il contorno chiuso Γ considerato.

Consideriamo una particolare funzione nel campo complesso
$$f(z) = \frac{1}{z}$$
Tale funzione presenta un punto di singolarità nello zero.
Passando in coordinate polari calcoliamo
$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\exp(i\vartheta)} d\exp(i\vartheta) = \int_0^{2\pi} id\vartheta = 2\pi i$$
Se la funzione presenta un punto di singolarità l'integrale su un cammino chiuso che contiene tale punto non è nullo come dimostrato dal calcolo precedente.
L'integrale su un cammino chiuso contenente un punto di singolarità non dipende dal percorso scelto.
Consideriamo una funzione che contiene un unico punto di singolarità, il cammino $\Gamma = \Gamma 1 + \Gamma 2 + \Gamma 3 + \Gamma 4$ definisce una regione priva di singolarità, pertanto l'integrale della funzione su tale cammino è nullo.



Segue immediatamente che dovendosi annullare a vicenda i contributi dovuti ai cammini $\Gamma 3$ e $\Gamma 4$ l'integrale della funzione sul cammino $\Gamma 1$ assume lo stesso valore in modulo dell'integrale della funzione sul cammino $\Gamma 2$. Il segno dei due integrali è opposto avendo considerato i due percorsi rispettivamente orari e antiorari.

- In generale se $f(z)$ è analitica su una regione Ω tranne un che per un punto di singolarità z_0 allora

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} \frac{h(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i h(z_0)$$

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{h(z)}{z - z_0}dz$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{h(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

$$h'(z) = \frac{dh(z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{h(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi$$

$$h^n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{h(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

CALCOLO DEI RESIDUI PER UN POLO DEL PRIMO ORDINE

Consideriamo una funzione della forma

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - a_k)(z - b_k)}$$

con $h(z)$ funzione analitica sulla regione Ω

con

$a_k \neq a_h$ punti apparteneti a Ω

$b_k \neq b_h$ punti apparteneti apparteneti a Γ allora

$$\int_{\Gamma} \frac{h(z)}{(z - a_k)(z - b_k)} dz = 2\pi i \sum_k Residui\, f(z) = 2\pi i(h(a_k) + 1/2\ h(b_k))$$

Dove i residui di $f(z)$ valgono $h(a_k)$ per i punti contenuti in Ω e $h(b_k)/2$ per i punti apparteneti al cammino Γ.

L'utilizzo di questa formula è di particolare interesse è il calcolo dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz$$

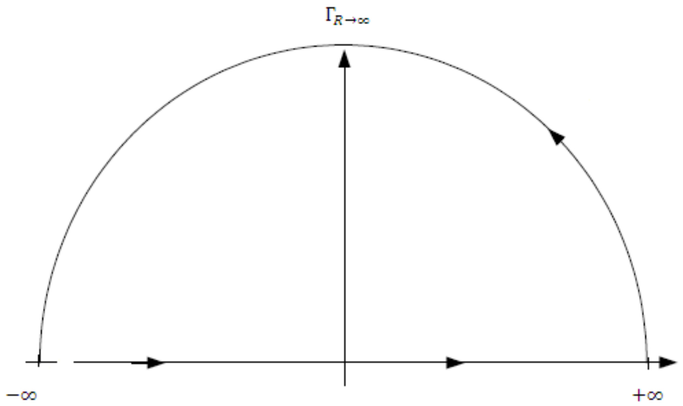
per particolari tipi di funzioni che godono della proprietà di essere infinitesimi di ordine superiore rispetto a $1/|z|$ per $|z| \to \infty$.

Considerando un cammino come quello indicato nella figura, se la funzione $f(z)$ gode della proprietà sopra indicata allora il contributo all'integrale di $f(z)$ sul semicerchio è nullo per $R \to \infty$ e

$$\int_{\Gamma} \frac{h(z)}{(z - a_k)(z - b_k)} dz$$

si riduce a

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz$



Spesso su aggiraoe i poli b_k presenti sull'asse reale utilizzando il metodo di Feynmann e introducendo la funzione a scalino come mostrato nei paragrafi "Equazioni di Helmholtz e funzione di Green", "Trasformata Fourier del propagatore, "Propagatore per l'equazione di Klein-Gordon".

CALCOLO DEI RESIDUI PER UN POLO DEL SECONDO ORDINE

Consideriamo una funzione della forma

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a_k)^2(z-b_k)^2}$$

con $h(z)$ funzione analitica sulla regione Ω

con

$a_k \neq a_h$ punti apparteneti a Ω

$b_k \neq b_h$ punti apparteneti apparteneti a Γ

ricordando che

$$h'(\mathrm{z}) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{h(\xi)}{(\xi - \mathrm{z})^2} \mathrm{d}\xi$$

$$\int_\Gamma \frac{h(z)}{(z-a_k)^2(z-b_k)^2} dz = 2\pi i \sum_k Residui\, f(z) = 2\pi i (h'(a_k) + 1/2\ h'(b_k))$$

Dove i residui di $f(z)$ valgono $h'(a_k)$ per i punti contenuti in Ω e $h'(b_k)/2$ per i punti apparteneti al cammino Γ.

L'utilizzo di questa formula è di particolare interesse è il calcolo dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz$$

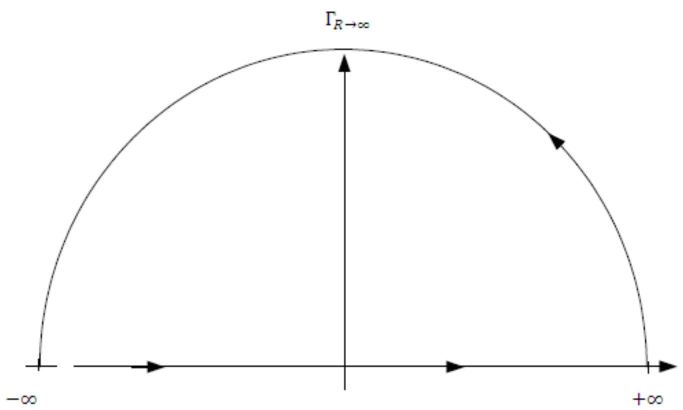
per particolari tipi di funzioni che godono della proprietà di essere infinitesimi di ordine superiore rispetto a $1/|z|$ per $|z| \to \infty$.

Considerando un cammino come quello indicato nella figura, se la funzione $f(z)$ gode della proprietà sopra indicata allora il contributo all'integrale di $f(z)$ sul semicerchio è nullo per $R \to \infty$ e

$$\int_\Gamma \frac{h(z)}{(z-a_k)^2(z-b_k)^2} dz$$

si riduce a

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\, dz$



Un esempio di integrazione con il metodo dei residui per un polo del second'ordine è stata effettuata nel paragrafo "Sezione d'urto di una particella scalare in un campo elettrostatico esterno".