Principio di minima azione e moto di una carica relativistica in un campo elettromagnetico

$\boxed{\text{Equazioni del moto di una carica relativistica puntiforme in un campo elettromagnetico}}$

Per scrivere le equazioni del moto di una particella relativisticamente puntiforme in un campo elettromagnetico occorre definire l'azione in modo relativisticamente invariante.

Definiamo a questo punto un potenziale vettore a 4 componenti

$$\begin{cases} A_i & i=0-3 \qquad A_i=(A_0, -A^1, -A^2, -A^3) \\ A^i & i=0-3 \qquad A^i=(A^0, A^1, A^2, A^3) \end{cases}$$

$$S=\int -m_0 c\, ds - \frac{e}{c} A_i\, dx^i = \int -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt - \frac{e}{c} A_i\, dx^i$$

$$= \int -m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt - \frac{e}{c} A_i v^i\, dt$$

Le equazioni del moto di Lagrange sono date ponendo

$\delta S = \phi$

A questo punto possiamo scrivere

$S = S_f + S_{fc}$

dove $S_f = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$ è la parte di azione

che dipende solo dalle proprietà delle particelle

ed è l'unico termine presente nel caso di particelle

libere.

Il termine $S_{fc} = -\frac{e}{c} A_i v^i\, dt$ è l'interazione tra

particelle e campo. Considerando $A_i = A_i(x; y; z; t)$

applicando le equazioni di Lagrange si ricavano

le equazioni del moto di una particella

soggetta al campo elettromagnetico.

Di seguito cercheremo di ricavare queste

equazioni.

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{e}{c} A_i(x,y,z,t)\, v^i \qquad i = 0 - 3$$

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{e}{c} A_i(x,y,z,t)\, v^i - \frac{e}{c} A_0(x,y,z,t)$$

Le equazioni del moto si scrivono

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} \qquad j : 1 - 3$$

1) Considero il primo termine

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\, v^j}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{e}{c} A_j(x,y,z,t) \right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\, v^j}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial t} - \frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x^\alpha} v^\alpha \right)$$

2) Considero il secondo termine

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} = -\frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^j} v^i - \frac{e}{c}\frac{\partial A_0}{\partial x^j}$$

Uguagliando i due termini

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0 v^j}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial t} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x^\alpha} v^\alpha - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^j} v^i - \frac{e}{c}\frac{\partial A_0}{\partial x^j}$$

$$= \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_j}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^j}\right) + \underbrace{\frac{e}{c}\frac{\partial A_j}{\partial x^\alpha} v^\alpha - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^j} v^i}$$

Considero il termine

$$\frac{\partial A_j}{\partial x^\alpha} v^\alpha - \frac{\partial A_i}{\partial x^j} v^i$$

per $j=1$

$$\cancel{\frac{\partial A_1}{\partial x^1} v^1} + \frac{\partial A_1}{\partial x^2} v^2 + \frac{\partial A_1}{\partial x^3} v^3 - \cancel{\frac{\partial A_1}{\partial x^1} v^1} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1} v^2 - \frac{\partial A_3}{\partial x^1} v^3$$

$$v^2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \frac{\partial A_2}{\partial x^1}\right) + v^3\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \frac{\partial A_3}{\partial x^1}\right) = \left(\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{A}\right)_{j=1}$$

Analogamente per $j=2$ il termine vale $\left(\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{A}\right)_{j=2}$

$j=3$ $\left(\vec{v} \times \mathrm{rot}\,\vec{A}\right)_{j=3}$

In definitiva

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{e}{c}\left(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}A_0\right) + \frac{e}{c}\left(\vec{v}\times \mathrm{rot}\,\vec{A}\right)$$

Se pongo $A_0 = c\varphi$ e $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$ ed $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{c\,\partial t}$

ritrovo le equazioni di Lorentz

$$\frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{d}{dt}\vec{p} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{B}$$

Calcolo dell'energia meccanica

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} A^i(x,y,z,t)\, v^i - \frac{e}{c} A_0(x,y,z,t)$$

$$H = v^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} - L$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} = \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} A^i(x,y,z,t) = p^i + \frac{e}{c} A^i \qquad i = 1,2,3$$

$$v^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v^i} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A}\vec{v}$$

$$H = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \cancel{\frac{e}{c} \vec{A}\vec{v}} - m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \cancel{\frac{e}{c} \vec{A}\vec{v}} + \frac{e}{c} A_0$$

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} A_0$$

Sostituzione minimale

Considero l'Hamiltoniana

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} A_0$$

esprimo H in funzione dell'impulso generalizzato

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = \pi^i = p^i - \frac{e}{c} A^i \qquad i = 1 - 3$$

$$\left(H - \frac{e}{c} A_0\right)^2 = \frac{m_0^2 c^4}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = m_0^2 c^4 - m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} =$$

$$= m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 c^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 + c^2 p^2 = m_0^2 c^4 + c^2\left(\vec{\pi} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2$$

$$\left(H - \frac{e}{c} A_0\right)^2 - c^2\left(\vec{\pi} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = m_0^2 c^4$$

$$\frac{\left(H - \frac{e}{c} A_0\right)^2}{c^2} - \left(\vec{\pi} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 = m_0^2 c^2$$

Se per una particella libera valgono le relazioni

$$\begin{cases} E\phi = i \dfrac{\partial \phi}{\partial t} \\ p_x \phi = -i \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ p_y \phi = -i \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ p_z \phi = -i \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases}$$

con $E^2 - p^2 = m_0^2$

$$p_i = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad i = 1-3$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

per una particella soggetta a potenziale valgono le relazioni

$$\begin{cases} H\phi = i \dfrac{\partial \phi}{\partial t} \\ \pi_x \phi = -i \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ \pi_y \phi = -i \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ \pi_z \phi = -i \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases}$$

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} A_0 = E + \frac{e}{c} A_0$$

$$\pi^i = p^i + \frac{e}{c} A^i$$

$$= \frac{m_0 v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} A^i$$

La sostituzione minimale è di particolare importanza perché permette di passare dall'equazione di una particella libera all'equazione di una particella soggetta a potenziale elettrostatico.

Basta sostituire le variabili E con H e p^i con π^i sfruttando le relazioni

$$\begin{cases} H = E + \frac{e}{c} A_0 \\ \pi^i = p^i + \frac{e}{c} A^i \end{cases}$$

Ad esempio se per una particella libera vale la relazione

$E^2 - p^2 = m_0^2$ nel caso di una particella soggetta ad un campo elettromagnetico

$$\left(H - \frac{e}{c} A_0\right)^2 - \left(\pi^i - \frac{e}{c} A^i\right)^2 = m_0^2$$

Considerando invece l'operatore

$$H = i\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \left(E + \frac{e}{c}A_0\right) = i\frac{\partial}{\partial t}$$

possiamo scrivere

$$i\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{old} + \frac{e}{c}A_0 = i\frac{\partial}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{old} + \frac{ie}{c}A_0 = -\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{old} - \frac{ie}{c}A_0 = \frac{\partial}{\partial t}$$

La sostituzione minimale consiste nel sostituire alla derivata $\frac{\partial}{\partial t}$ della particella libera l'operatore

$\frac{\partial}{\partial t} + ieA_0$ cioè $\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + ieA_0}$

Considero l'operatore

$$\Pi_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i} \Rightarrow \left(p_i + \frac{e}{c}A_i\right) = -i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

possiamo scrivere

$$-i\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{old} + \frac{e}{c}A_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{old} + \frac{ie}{c}A_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

La sostituzione minimale consiste nel sostituire alla derivata $\frac{\partial}{\partial x_i}$ della particella libera l'operatore

$\frac{\partial}{\partial x_i} - ieA_i$ cioè $\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} - ieA_i}$

Particolarizzazione sostituzione minimale per coordinate varianti e controvarianti

Riporto la sostituzione minimale l'indice basso indice in questo caso solo le componente del vettore -

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t} + ie A_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \dfrac{\partial}{\partial x_i} - ie A_i \end{cases}$$

particolarizziamo per coordinate covarianti e controvarianti

$$\begin{cases} \partial_0 = \dfrac{\partial}{\partial x^0} \rightarrow \partial_0 + ie A^0 = \partial_0 + ie A_0 \\ \partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow \partial_i - ie A^i = \partial_i + ie A_i \end{cases}$$

in definitiva

$$\begin{cases} \partial^\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow \partial^\mu + ie A^\mu \\ \partial_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \partial_\mu + ie A_\mu \qquad \mu = 0 - 3 \end{cases}$$