Se U è anche uniforme la sollecitazione si dice conservativa e vale

$$L = U_f - U_i.$$

*) Lavoro di un sistema rigido

$\{P_s, m_s\}_{s=1-N}$ sistema rigido

$$\underline{V}_{P_s} = \underline{V}_0 + \underline{\omega}(t) \times (P_s - O)$$

$$dP_s = dO + \underbrace{\underline{\omega}(t)\,dt}_{\underline{\psi}} \times (P_s - O)$$ (essendo il sistema rigido $d(P_s - O) = 0$)

$$dP_s = dO + \underline{\psi} \times (P_s - O)$$

$$dL = \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s\, dP_s = \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s \left(dO + \underline{\psi} \times (P_s - O)\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s\, dO + \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s\, \underline{\psi} \times (P_s - O) =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s \, dO + \sum_{s=1}^{N} \psi \cdot (P_s - O) \times \underline{F}_s = \underline{R} \, dO + \underline{\psi} \, \underline{M}_o$$

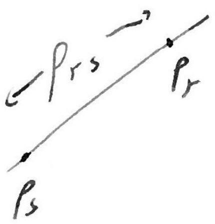
*) Nel caso di moti rigidi sollecitazioni aventi lo stesso $\underline{R}$ e lo stesso $\underline{M}_o$ compiono lo stesso lavoro; sollecitazioni equivalenti a 0 compiono lavoro nullo.

$$dL^{(i)} = \underline{R}^{(i)} dO + \underline{M}_o^{(i)} \underline{\psi} = 0$$

Se il moto è rigido le forze interne compiono lavoro nullo.

*) Considero il lavoro elementare $dL^{(i)}$ tra due punti P_s e P_r che interagiscono tra loro.

$(P_s, \underline{F})$ $\quad$ $(P_r, -\underline{F})$



$$dL^{(i)} = \underline{F}\, dP_s - \underline{F}\, dP_r = \underline{F}\, d(P_s - P_r)$$

generalmente il lavoro $dL^{(i)}$ non è nullo; è nullo se $P_s - P_r =$ costante (il sistema dei due punti è rigido.)

Principio d'indifferenza materiale

*) Il lavoro delle forze interne di un sistema di punti materiali è indipendente dall'osservatore.

$$dL^{(i)} = \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s^{(i)} \cdot \underline{v}_{p_s} \, dt$$

Considero due sistemi di riferimento

$$\underline{v}_{ps}^{(a)} = \underline{v}_{ps}^{(r)} + \underline{v}_{ps}^{(\tau)} \qquad \underline{v}_{ps}^{(\tau)} = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega}_\tau \times (P_s - O')$$

$$dL_i^{(a)} = \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s^{(i)} \left[\underline{v}_{ps}^{(r)} + \underline{v}_{ps}^{(\tau)} \right] dt =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s^{(i)} \underline{v}_{ps}^{(r)} dt + \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s^{(i)} \left[\underline{v}_{O'} + \underline{\omega}_\tau \times (P_s - O') \right] dt =$$

$$= \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s^{(i)} \underline{v}_{ps}^{(r)} dt + \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s^{(i)} \underline{v}_{O'} \, dt - \underline{\omega}_\tau \sum_{s=1}^{N} (P_s - O') \times \underline{F}_s^{(i)} =$$

$$= dL_i^{(r)} + \underbrace{\underline{R}^{(i)}}_{=0} \underline{v}_{O'} \, dt - \underline{\omega}_\tau \underbrace{\underline{\Pi}_{O'}^{(i)}}_{=0}$$

$$dL_i^{(a)} = dL_i^{(\tau)}$$

Teorema delle forze vive per un sistema di punti materiali

Definiamo energia cinetica di un sistema di punti materiali:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \underline{v}_{P_s}^{2}$$

*) La variazione di energia cinetica del sistema di punti materiali è pari al lavoro delle forze esterne ed interne sul sistema.

$$dT = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \, d\underline{v}_{P_s}^{2} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \underbrace{d(\underline{v}_{P_s} \cdot \underline{v}_{P_s})}_{} =$$

$$\hookrightarrow \underline{v}_{P_s} \, d\underline{v}_{P_s} + \underline{v}_{P_s} \, d\underline{v}_{P_s}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \sum_{s=1}^{N} m_s \cancel{2} \underline{v}_{P_s} \, d\underline{v}_{P_s}$$

$$dT = \sum_{s=1}^{N} m_s \underline{v}_{P_s} \underline{a}_{P_s} \, dt = \sum_{s=1}^{N} m_s \underline{a}_{P_s} \, dP_s$$

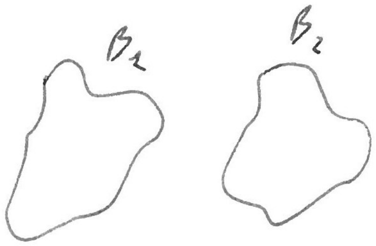
$$m_s \underline{a}_{P_s} = \underline{F}_s^{(i)} + \underline{F}_s^{(e)}$$

$$dT = \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s^{(i)} dP_s + \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s^{(e)} dP_s = dL^{(i)} + dL^{(e)}$$

Se il moto è rigido

$dT = dL^{(e)}$.

*) Considero il caso di due sistemi rigidi che interagiscono tra loro B_1, B_2



Anche se il lavoro delle forze interne di B_1 e il lavoro delle forze interne di B_2 è nullo il lavoro delle forze interne di $S = B_1 \cup B_2$ è diverso da 0.

Tale lavoro corrisponde all'interazione di punti del corpo B_2 con punti del corpo B_2.

$$dL_{(S)} = dL^{(i)}_{(S)} + dL^{(e)}_{(S)}$$

*/ Potenza.

Si definisce potenza istantanea la derivata del lavoro rispetto al tempo

$$W_t = \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dL^{(e)}}{dt} + \frac{dL^{(i)}}{dt} = W_t^{(e)} + W_t^{(i)}.$$

Statica

La statica è la parte della meccanica che ha per oggetto lo studio dell'equilibrio dei sistemi materiali:

$\{(P_s, m_s)\}_{s=1-N}$ (sistema punti materiali)

$\{(P_s, F_s^{(e)})\}_{s=1-N}$ (sistema forze esterne)

$\{(P_s, F_s^{(i)})\}_{s=1-N}$ (sistema forze interne).

$\underline{R}^{(e)}$ = risultante forze esterne $\qquad$ $\underline{M}_o^{(e)}$ = risultante dei momenti rispetto al polo O.

Se il sistema è libero
$$\begin{cases} \underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(a)} \\ \underline{M}_o^{(e)} = \underline{M}_o^{(e)} \end{cases}$$

dove con $\underline{M}_o^{(e)}$ e $\underline{R}^{(e)}$ indichiamo il risultante dei momenti e delle forze attive sul sistema (effettive e apparenti).

Se il sistema è vincolato
$$\begin{cases} \underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} \\ \underline{M}^{(e)} = \underline{M}^{(a)} + \underline{M}^{(v)} \end{cases}$$

$\underline{M}^{(v)}$, $\underline{R}^{(v)}$ risultante dei momenti e delle forze vincolari.

Vale l'equazione cardinale della dinamica

$$\begin{cases} \underline{M}_o^{(e)}(P_1 - P_N, \dot{P}_1 - \dot{P}_N, t) = \dfrac{d\underline{K}_o}{dt} \\ \underline{R}^{(e)}(P_1 - P_N, \dot{P}_1 - \dot{P}_N, t) = \dfrac{d\underline{Q}}{dt} \end{cases}$$

Diciamo che un sistema di punti materiali è in equilibrio se l'equazione del moto è $P_s(t) = P_s^{(0)}$ $\quad s = 1 - N$, $\quad t \in I \subset \mathbb{R}^+$

Se un sistema di punti materiali è in equilibrio

$$\begin{cases} P_s(t) = P_s^{(0)} & \forall s = 1 - N \\ \dot{P}_s(t) = 0 \end{cases}$$

si avrà pertanto

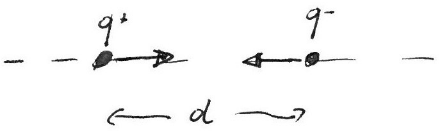
$$\begin{cases} \underline{\Pi}_0 (P_1 - P_N, t) = 0 \\ \underline{R} \ (P_1 - P_N, t) = 0 \end{cases}$$

l'atto di moto è sempre nullo, non c'è dipendenza da $\dot{P}_1 - \dot{P}_N$.

Le equazioni sopra scritte sono necessarie ma non sufficienti affinché un sistema di punti materiali sia in equilibrio.

Se infatti $\underline{\Pi}_0 = 0$, $\underline{R} = 0$ numerevoli sono i moti possibili per un sistema di punti materiali al variare delle forze interne.

Consideriamo ad esempio due cariche elettriche poste a distanza d.



Su tali cariche non agiscono forze esterne ($\underline{R}=0$, $\underline{M}=0$) tuttavia il sistema non è in equilibrio.

*) Se il sistema è vincolato

$$\begin{cases} \underline{R}^{(v)} + \underline{R} = 0 \\ \underline{M}_O^{(v)} + \underline{M}_O = 0 \end{cases}$$

La condizione necessaria affinché un sistema soggetto a vincoli fissi sia in equilibrio è che il vincolo sia capace d'esplicare una forza risultante $\underline{R}^{(v)}$ opposta a $\underline{R}$ e un momento $\underline{M}_O^{(v)}$ opposto a $\underline{M}_O$.

*) Se il sistema di punti materiali è rigido si dimostra che l'equazione del moto è univocamente determinata noti $\underline{M}^{(e)}(P_1 - P_N, \dot{P}_1 - \dot{P}_N, t)$ e $\underline{R}^{(e)}(P_1 - P_N, \dot{P}_1 - \dot{P}_N, t)$ e le condizioni iniziali

$$\begin{cases} P_s(t_0) = P_s^{(0)} \\ \dot{P}_s(t_0) = \dot{P}_s^{(0)} \end{cases} \quad s = 1 - N$$

Se il sistema è rigido e vale

$$(*) \begin{cases} \underline{R} = 0 \\ \underline{M}_0 = 0 \end{cases} \qquad \text{ed inoltre} \qquad \begin{cases} P_s(t_0) = P_s^{(0)} \\ \dot{P}_s(t_0) = 0 \end{cases}$$

l'equazione $P_s(t) = P_s^{(0)}$ $\forall s = 1 - N$ (sistema in equilibrio) è soluzione delle $(*)$; essa è anche unica.

*) Se il corpo è rigido ed inizialmente in quiete condizione necessaria e sufficiente affinché sia in equilibrio è

$$\begin{cases} \underline{R} = 0 \\ \underline{M}_0 = 0 \end{cases}.$$

*) Considero un corpo rigido B soggetto a vincoli esterni.
Suppongo che il corpo è in equilibrio, valgono le relazioni

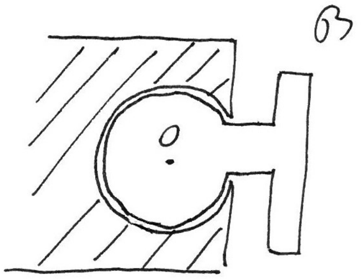
$$\begin{cases} \underline{R}^{(e)} + \underline{R}^{(v)} = 0 \\ \underline{M}_0^{(e)} + \underline{M}_0^{(v)} = 0 \end{cases}$$

Se, note le forze esterne agenti sul corpo B, è possibile ricavare in modo univoco dalle equazioni sopra scritte le reazioni esplicate dei vincoli il problema si dice staticamente determinato.

Sollecitazioni vincolari

Considero un corpo rigido $\mathcal{B}$ soggetto a vincoli privi di attrito tali che un solo punto O del sistema resti fisso al variare delle sollecitazioni esterne

Una cerniera sferica ad esempio permette di realizzare tale sistema



Si verifica che $\underline{M}_O^{(v)} = 0$

*) Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo rigido con un punto fisso privo di attrito sia in equilibrio è $\underline{M}_O^{(e)} = 0$

1) La condizione è necessaria.

$\mathcal{B}$ eq. in $\varphi_0(\mathcal{B}) \Rightarrow \underline{M}_0^{(a)} = 0$

Se $\mathcal{B}$ è in equilibrio valgono

$$\begin{cases} \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} = 0 \\ \underline{M}_0^{(a)} + \underline{M}_0^{(v)} = 0 \end{cases}$$

Poiché $\underline{M}_0^{(v)} = 0$ risulterà $\underline{M}_0^{(a)} = 0$

2) La condizione è sufficiente

$\underline{M}_0^{(a)} = 0 \Rightarrow \exists\ \Sigma^{(v)}$ esplicabile dal vincolo tale che

$\Sigma^{(v)} \cup \Sigma^{(a)} \equiv 0$ (il sistema delle forze vincolari e attive sia equilibrato).

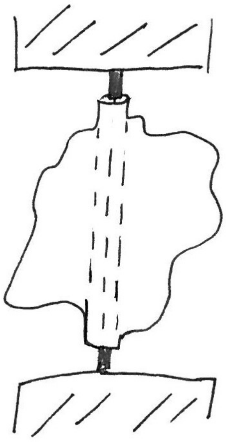
Una reazione compatibile al vincolo scelto è

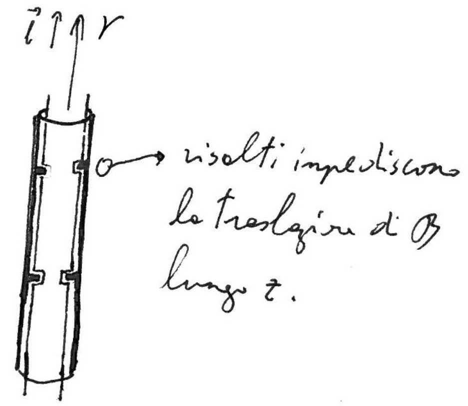
$(0, \underline{R}^{(v)})$ tale reazione vincolare soddisfa anche

le equazioni della statica se $\underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} = 0$

essendo $\underline{M}_o^{(e)} = 0$ per ipotesi e $\underline{M}_o^{(v)} = 0$.

*) Considero un corpo rigido $\mathcal{B}$ soggetto a vincoli privi di attrito tali che solo un asse del corpo resti fisso al variare delle sollecitazioni esterne.





Le rette di azione delle reazioni vincolari intersecano l'asse r.

Ricordando che il momento assiale è indipendente dei punti dell'asse scelti come polo

$M_r^{(v)} = 0$

$$M_r^{(v)} = \underline{M}_O^{(v)} \cdot \vec{e} = 0 \quad \begin{cases} \underline{M}_O^{(v)} = 0 \\ \underline{M}_O^{(v)} \perp r \end{cases}$$

$\forall O$ punto dell'asse

La caratteristica di un tale sistema è che il momento delle forze vincolari calcolato rispetto ad un polo O dell'asse è nullo o è ortogonale all'asse stesso.

*) Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema rigido B con un asse fisso r privo d'attrito si trovi in equilibrio è che $M_r^{(e)} = 0$

1) la condizione è necessaria

$$B \text{ è in equilibrio} \Rightarrow M_r^{(e)} = 0$$

Se il corpo B è in equilibrio

$$\begin{cases} \underline{R}^{(e)} + \underline{R}^{(v)} = 0 \\ \underline{M}_O^{(e)} + \underline{M}_O^{(v)} = 0 \end{cases}$$

$\underline{M}_O^{(e)} = -\underline{M}_O^{(v)}$ Se O è un punto dell'asse r essendo

$M_r^{(v)} = 0$ $\underline{M}_O^{(v)}$ e pertanto anche $\underline{M}_O^{(e)}$ risulteranno essere

nulli o ortogonali a r.

Da cui $M_r^{(e)} = 0$

2) La condizione è sufficiente

$M_r = 0 \Rightarrow \exists$ almeno una sollecitazione vincolare

tale che $\Sigma^{(v)} \cup \Sigma^{(e)} \equiv 0$.

Il vincolo considerato può esplicare una reazione

equivalente al sistema $\{(O, \underline{R}^{(v)}), (O, \underline{u}), (O', -\underline{u})\} = \Sigma^{(v)}$

$O, O' \in r$.

Tale reazione soddisfa le equazioni della statica

se $\underline{R}^{(v)} = -\underline{R}^{(e)}$

e $\underline{M}_O^{(a)} + \underline{M}_O^{(v)} = 0 \Rightarrow \underline{M}_O + (O-O') \times \underline{V} = 0$

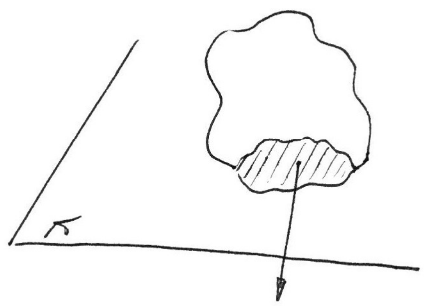
$\underline{V} \times (O-O') = \underline{M}_O$ ammette soluzione se

$\underline{M}_O \cdot (O-O') = 0$ il che è verificato essendo $M_r = 0$ $\begin{cases} \underline{M}_O = 0 \\ \underline{M}_O \perp (O-O') \end{cases}$

*) Considero un corpo rigido B poggiato su un piano π fisso in un numero finito di punti $O_1, O_2 — O_n$.

Chiamo poligono d'appoggio quel poligono convesso che contiene tutti i punti d'appoggio e ha per vertici esclusivamente punti d'appoggio.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo rigido B poggiato su un piano π fisso e privo di attriti si trovi in equilibrio è che le sollecitazione esterne attive sia sempre equivalente ad un'unica forza normale a π, orientata da B a π e applicata ad una retta intersecante il poligono d'appoggio.



$$\Sigma^{(v)} \equiv (O_i, \underline{\Phi}_i)_{i=1 \dots n}$$

$\phi_i \geq 0$ $\quad \underline{\Phi}_i$ sistema di vettori ortogonali al piano diretti verso l'alto.

$\Sigma^{(v)}$ è equivalente al vettore $\{(C, \underline{R}^{(v)})\}$

$\underline{R}^{(v)} = \sum_{i=1}^{n} \underline{\Phi}_i$ $\quad$ C = centro sistema è interno al poligono convesso d'appoggio.

1) condizione è necessaria

B è in equilibrio $\Rightarrow \Sigma^{(e)} \equiv (C, \underline{R}^{(e)})$, $\underline{R} \perp \pi$, $r \cap$ poligono $\neq \phi$

vers $\underline{R}$ da B a π.

La reazione esplicata dal vincolo è

$$\Sigma^{(v)} \equiv (C, \underline{R}^{(v)})$$

Dalle equazioni della statica considerando il polo C

$$\begin{cases} \underline{R}^{(e)} + \underline{R}^{(v)} = 0 \\ \underline{M}_C^{(e)} = 0 \end{cases}$$

$$\underline{M}_C^{(e)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} I = \underline{M}_C \cdot \underline{R} = 0 \\ \underline{R}^{(e)} = -\underline{R}^{(v)} \end{cases}$$ il sistema delle forze

attive è equivalente ad un vettore applicato in C

avente modulo pari a $R^{(v)}$ direzione ortogonale al piano

e verso dal corpo al piano.

2) la condizione è sufficiente

Se le sollecitazioni attive hanno le proprietà suddette $\Rightarrow$ esiste almeno una reazione vincolare $\Sigma'^{(v)}$ tale che

$$\Sigma'^{(v)} \cup \Sigma'^{(e)} \equiv 0.$$

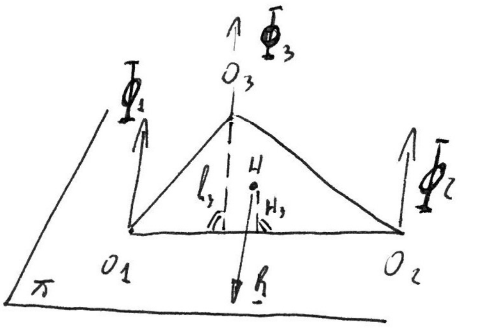
Una generica reazione vincolare è equivalente al sistema $\Sigma'^{(v)} \equiv (C, \underline{R}^{(v)})$ $\underline{R}$ ortogonale al piano avente verso del piano al corpo $\mathcal{B}$.

$\Sigma'^{(e)} \equiv (H, \underline{R}^{(e)})$ è un vettore ortogonale a π

$\Sigma'^{(v)} \cup \Sigma'^{(e)}$ è un sistema di vettori paralleli ortogonali a π

Condizione necessaria e sufficiente affinché $\Sigma'^{(v)} \cup \Sigma'^{(e)}$ sia un sistema di vettori equivalente a zero è che si annullino i momenti assiali rispetto a 3 rette non parallele giacenti su un piano non parallelo alla direzione dei vettori.

Supponiamo che i punti di appoggio di $\mathcal{B}$ siano solo 3



annullo i momenti rispetto alle rette passanti per:

1) (O_1, O_2) $\qquad h_3 \Phi_3 - H_3 R = 0$

2) (O_1, O_3) $\qquad h_2 \Phi_2 - H_2 R = 0$

3) (O_2, O_3) $\qquad h_1 \Phi_1 - H_1 R = 0$

$h_i \Phi_i - H_i R = 0 \quad i = 1,2,3$

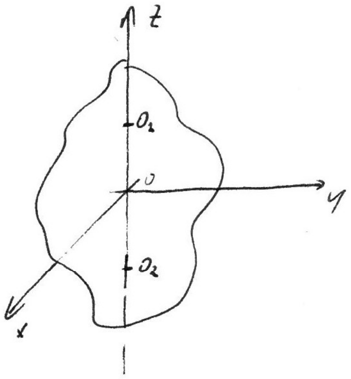
il problema è staticamente determinato e si ha

$\Phi_i = \dfrac{H_i}{h_i} R$ $\qquad$ la sollecitazione vincolare

$$\Sigma^{(0)} \equiv \left(O_i, -\frac{H_i}{h_i}\underline{R}\right)$$

Nell' ipotesi che il numero n dei punti di appoggio sia maggiore di 3 posso scegliere comunque 3 punti del poligono di appoggio tali che il triangolo avente per vertici tali punti intersechi la retta contenente $\underline{R}^{(e)}$, risolvere il problema come nel caso precedente e considerare le reazioni vincolari degli altri punti nulle.

*) Reazioni vincolari esplicate su un corpo rigido ed un asse fisso privo di attriti.



reazioni vincolari

$(O_1, \underline{\Phi}_1) \cup (O_2, \underline{\Phi}_2)$

Se il corpo è in equilibrio valgono le equazioni della statica

$$\begin{cases} \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} = 0 \\ \underline{M}_O^{(a)} + \underline{M}_O^{(v)} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{R} + \underline{\Phi}_1 + \underline{\Phi}_2 = 0 \\ \underline{M}_O + (O_1 - O) \times \underline{\Phi}_1 + (O_2 - O) \times \underline{\Phi}_2 = 0 \end{cases}$$

proiettando le equazioni sugli assi

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & z_i \\ \Phi_x^{(i)} & \Phi_y^{(i)} & \Phi_z^{(i)} \end{Vmatrix}_{i=1,2}$$

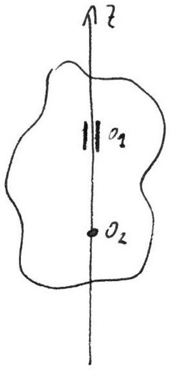
$$\begin{cases} R_x + \Phi_x^1 + \Phi_x^2 = 0 \\ R_y + \Phi_y^1 + \Phi_y^2 = 0 \\ R_z + \Phi_z^1 + \Phi_z^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_O^{(x)} - z_1 \Phi_y^{(1)} - z_2 \Phi_y^{(2)} = 0 \\ M_O^{(y)} + z_1 \Phi_x^{(1)} + z_2 \Phi_x^{(2)} = 0 \\ M_O^{(z)} = 0 \end{cases}$$

L'ultima equazione del sistema è un'identità, abbiamo un sistema di 5 equazioni in 6 incognite $\underline{\Phi}_1, \underline{\Phi}_2$.

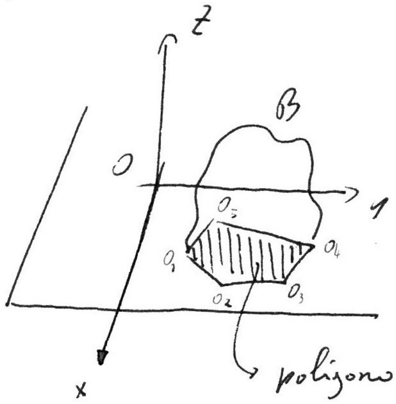
Il problema non è staticamente determinato.

Se realizzo il vincolo O_1 con un collare che a differenza del vincolo precedente non impedisce la traslazione lungo z



ottengo una sesta equazione $\Phi_1(z) = 0$ che rende il problema staticamente determinato

*) Reazioni vincolari esplicate da un piano liscio privo di attriti.



poligono appoggio corpo B.

Affinché sia in equilibrio $\Sigma^{(a)} \equiv (H, \underline{R})$

reazioni vincolari $\left\{(O_i, \underline{\Phi}_i)\right\}_{i=1-e}$

equazioni della statica

$$\begin{cases} \underline{R} + \sum_{i=1}^{e} \underline{\Phi}_i = 0 \\ (H - O) \times \underline{R} + \sum_{i=1}^{e} (O_i - O) \times \underline{\Phi}_i = 0 \end{cases}$$

proiettando le equazioni vettoriali sugli assi e scegliendo il polo O come origine degli assi

$$\begin{cases} -R_z + \sum_{i=1}^{e} \Phi_i = 0 \\ -y_H R_z + \sum_{i=1}^{e} y_i \Phi_i = 0 \\ x_H R_z - \sum_{i=1}^{e} x_i \Phi_i = 0 \end{cases}$$

$$\left\| \begin{matrix} x_H, & y_H, & 0 \\ 0, & 0, & -R_z \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{matrix} x_i, & y_i, & 0 \\ 0, & 0, & \Phi_i \end{matrix} \right\|$$

ottengo un sistema di 3 equazioni in e incognite.

Se $e > 3$ il problema è staticamente indeterminato.

Supponiamo che $e = 3$ e O_1, O_2, O_3 non siano allineati

$$\begin{cases} -R_z + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \\ -y_H R_z + y_1 \Phi_1 + y_2 \Phi_2 + y_3 \Phi_3 = 0 \\ x_H R_z - x_1 \Phi_1 - x_2 \Phi_2 - x_3 \Phi_3 = 0 \end{cases}$$

Applicando le regole di Cramer

$$\Phi_1 = \frac{R_z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_H & y_2 & y_3 \\ x_H & x_2 & x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix}} = \frac{R_z \Delta_1}{\Delta_2}$$

Si può dimostrare che il sistema ammette sempre soluzioni e $\Phi_i > 0$ $i = 1, 2, 3$. Tali soluzioni sono effettivamente esplicabili dal vincolo.

Se $e > 3$ il problema è staticamente indeterminato, le soluzioni del sistema sono infinite.

In tal caso una possibile soluzione è quella di determinare Φ_1, Φ_2, Φ_3 e di porre le altre reazioni vincolari uguali a zero;

Dalla continuità di Φ osservo che facendo variare le reazioni Φ_i $i > 3$ in un intorno destro di 0 le reazioni

$\Phi_1 \cdot \Phi_2 \; \Phi_3$ resteranno positive, ottenuto così un'infinità di soluzioni accettabili.

*) Il problema può essere reso staticamente determinato nell'ambito della statica dei corpi deformabili:

Supponiamo che il corpo B sia rigido ma che che il piano π sia deformabile elasticamente.

I punti O_1 — O_e si troveranno ancora su un piano essendo B rigido e le coordinate di $O_i \equiv \left(x_i, y_i, \underbrace{-K_i \Phi_i}\right)$

legge di Hooke.

K_i noti.

impongo che i punti si trovino sul piano

$$a x_i + b y_i - K_i \Phi_i c + d = 0$$

$$x_i + \frac{b}{a} y_i - \frac{K_i}{a} \Phi_i c + \frac{d}{a} = 0 \qquad i = 1 — e$$

ottengo così oltre a equazioni e 3 incognite

Sommando tali equazioni e quelle precedenti ottengo un sistema di $e+3$ equazioni in $a+3$ incognite e il problema è staticamente determinato.

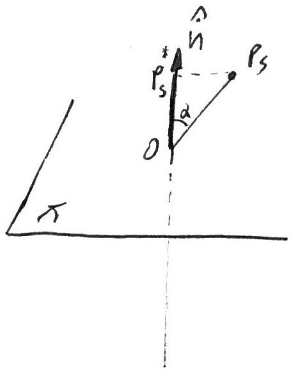
*) Momenti di inerzia

Considero un sistema di punti materiali

$$\{(P_s, m_s)\}_{s \in [1,N]}$$

Definisco momento d'inerzia del sistema rispetto al piano π

$$J_\pi = \sum_{s=1}^{n} m_s \left[(P_s - O)\hat{n}\right]^2 \qquad \hat{n} = \text{normale al piano}$$



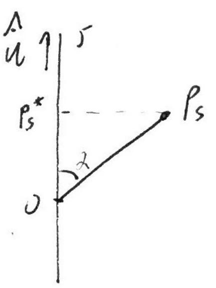
$$(P_s - O)\hat{n} = \overline{OP_s}\cos\alpha = \overline{P_s^* O} = \delta_s \quad (\text{distanza di } P_s \text{ dal piano})$$

$$J_\pi = \sum_{s=1}^{n} m_s \delta_s^2 \quad (\text{è indipendente dalla direzione della normale al piano}).$$

*) Definisco momento d'inerzia del sistema rispetto ad un punto O

$$I_O = \sum_{s=1}^{n} m_s \, \delta_{s,O}^2$$

*) Definisco momento d'inerzia del sistema rispetto ad una retta r

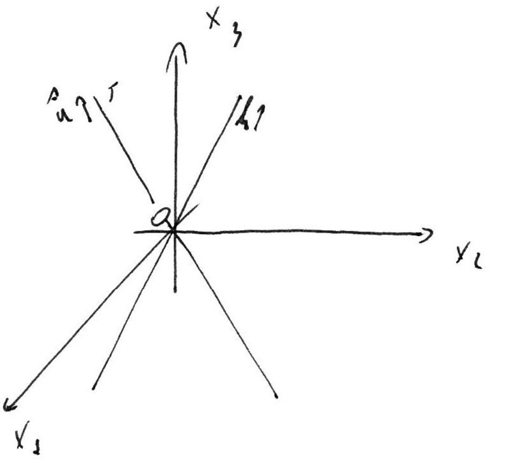


$$I_r = \sum_{s=1}^{n} m_s \left| \underline{u} \times (P_s - O) \right|^2 = \sum_{s=1}^{n} m_s \, \delta_s^2$$

$\left| \underline{u} \times (P_s - O) \right| = \overline{OP_s} \operatorname{sen} \alpha = \delta_s$ (distanza punto dal piano).

*) $S = \{(m_s, P_s)\}_{s \in [1,N]}$

determino come varia il momento d'inerzia di S al variare delle rette appartenenti alla stella di centro O.



$P_s \equiv (x_{1s}, x_{2s}, x_{3s})$ $\qquad$ $\underline{u} \equiv (u_1, u_2, u_3)$

$$\underline{u} \times (P_s - O) = (u_2 x_{3s} - u_3 x_{2s},\ u_3 x_{1s} - u_1 x_{3s},\ u_1 x_{2s} - u_2 x_{1s})$$

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ x_{1s} & x_{2s} & x_{3s} \end{matrix} \right\|$$

$$I_r = \sum_{s=1}^{n} m_s \left[(u_2 x_{3s} - u_3 x_{2s})^2 + (u_3 x_{1s} - u_1 x_{3s})^2 + (u_1 x_{2s} - u_2 x_{1s})^2 \right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} m_s \Big(u_2^2 x_{3s}^2 + u_3^2 x_{2s}^2 - 2 u_2 u_3 x_{3s} x_{2s} + u_3^2 x_{1s}^2 + u_1^2 x_{3s}^2 - 2 u_1 u_3 x_{1s} x_{3s} +$$

$$+ u_1^2 x_{2s}^2 + u_2^2 x_{1s}^2 - 2 u_1 u_2 x_{2s} x_{1s} \Big) =$$

$$= u_1^2 \sum_{s=1}^{n} m_s (x_{2s}^2 + x_{3s}^2) + u_2^2 \sum_{s=1}^{n} m_s (x_{1s}^2 + x_{3s}^2) + u_3^2 \sum_{s=1}^{n} (x_{1s}^2 + x_{2s}^2) m_s$$

$$- 2 u_2 u_3 \sum_{s=1}^{n} m_s x_{3s} x_{2s} - 2 u_1 u_3 \sum_{s=1}^{n} m_s x_{1s} x_{3s} - 2 u_1 u_2 \sum_{s=1}^{n} m_s x_{2s} x_{1s} .$$

$$I_r = A u_1^2 + B u_2^2 + C u_3^2 - 2 A' u_2 u_3 - 2 B' u_1 u_3 - 2 C' u_1 u_2$$

poiché $(x_{2s}^2 + x_{3s}^2)$ rappresenta la distanza di P_s dall' asse x_1 A = momento d'inerzia sistema rispetto x_1

analogamente B = " " rispetto x_2

C = " " rispetto x_3

Gli scalari A', B', C' vengono detti prodotti di inerzia.

Definisco matrice d'inerzia la matrice simmetrica

$$[I_{hk}] = \begin{bmatrix} A, & -C', & -B' \\ -C', & B, & -A' \\ -B', & -A', & C \end{bmatrix}$$

e considero il tensore

$$\underset{\sim}{I} = I_{hk} \, \underline{e}_h \otimes \underline{e}_k$$

$$\underset{\sim}{I} \, \underline{u} = I_{hk} \, \underline{e}_h \otimes \underline{e}_k \, \underline{u} = (I_{hk} u_k) \underline{e}_h$$

$$(\underset{\sim}{I} \, \underline{u}) \underline{u} = (I_{hk} u_k) \underline{e}_h \underline{u} = I_{hk} u_h u_k$$

è facilmente verificato che

$$(\underset{\sim}{I} \, \underline{u}) \underline{u} = I_r$$

L'elemento di posto hk della matrice I può essere definito nel seguente modo

$$I_{hk} = I_0 \underbrace{\delta_{hk}}_{\text{delta Kronecker}} - \sum_{s=1}^{n} m_s x_{hs} x_{ks}$$

I_0: momento d'inerzia all'origine

$$I_0 = \sum_{s=1}^{n} m_s \sigma_s^{(0)2} = \sum_{s=1}^{n} m_s \left(x_{1s}^2 + x_{2s}^2 + x_{3s}^2\right)$$

Si verifica subito che

$$I_{11} = I_0 - \sum_{s=1}^{n} m_s x_{1s}^2 = A$$

$$I_{22} = I_0 - \sum_{s=1}^{n} m_s x_{2s}^2 = B$$

$$I_{33} = I_0 - \sum_{s=1}^{n} m_s x_{3s}^2 = C$$

$$I_{12} = I_{21} = -\sum_{s=1}^{n} m_s x_{1s} x_{2s} = -C'$$

$$I_{13} = I_{31} = -\sum_{s=1}^{n} m_s x_{1s} x_{3s} = -B'$$

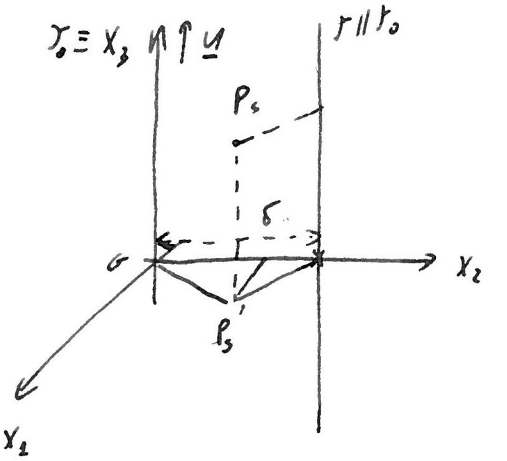
Teorema di Huygens

Permette di determinare la relazione tra i momenti d'inerzia di un sistema rispetto ad un fascio di rette parallele.

$\{(P_s, m_s)\}_{s\in[1,N]}$ $\quad r_0 \| r, \underline{u}$

r_0 è una retta passante per il baricentro G

$$I_r = I_{r_0} + m\delta^2 \qquad (\delta = \text{distanza retta } r \text{ da } r_0)$$



scelgo il sistema di riferimento in modo che $r_0 \equiv x_3$ e r intersechi x_2. $\quad P_s \equiv (x_{1s}, x_{2s}, x_{3s})$

$$I_r = \sum_{s=1}^{n} m_s \delta_s^2 = \sum_{s=1}^{n} m_s \left[(\delta - x_{2s})^2 + x_{1s}^2\right] =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} m_s \left(\delta^2 + x_{2s}^2 - 2\delta\, x_{2s} + x_{1s}^2\right)$$

$$I_r = \underbrace{\sum_{s=1}^{N} m_s (x_{1s}^2 + x_{2s}^2)}_{I_{r_0}} + \sum_{s=1}^{n} m_s \delta^2 - 2\delta_G \underbrace{\sum_{s=1}^{n} m_s x_{2s}}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

il 3° addendo è nullo infatti

$$m(G-O) = \sum_{s=1}^{n} m_s (P_s - O)$$, poichè nel nostro caso $O \equiv G$

$$\underline{0} = \sum_{s=1}^{n} m_s (P_s - O)$$ proiettando sull'asse x_2

$$0 = \sum_{s=1}^{n} m_s x_{2s} .$$

*) Il momento d'inerzia di un sistema calcolato rispetto ad una retta r è pari al momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta parallela a r passante per il baricentro più la massa totale del sistema moltiplicata per la distanza delle due rette.

Se $r' \parallel r \parallel r_0$

$$I_r = I_{r_0} + m\delta^2$$

$$I_{r'} = I_{r_0} + m\delta'^2$$

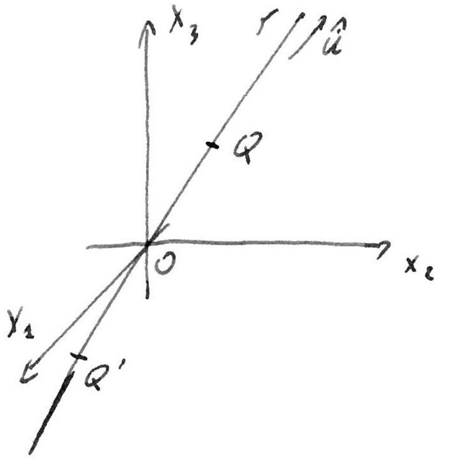
$$I_r = I_{r'} + m(\delta^2 - \delta'^2)$$

*) la retta baricentrale ha momento minimo rispetto alle altre rette ad essa parallele.

*) Ogni generatrice del cilindro di asse r_0 e raggio δ ha lo stesso momento d'inerzia.

Ellissoide d'inerzia

Sia r una retta generica appartenente alla stella di centro O.



Definisco il punto Q sulla retta r

$$(Q-O) = \frac{\underline{u}}{\sqrt{I_r}}$$

(Se il punto $Q \in r$ anche Q' simmetrico rispetto a O appartiene a r, basta considerare il versore di r $-\underline{u}$).

Supponiamo che $I_r \neq 0$ $\forall r$ cioè i punti del sistema non sono mai tutti allineati.

Descriviamo la superficie determinata dall'insieme dei punti Q al variare di r.

$$x_{1Q} = \frac{u_1}{\sqrt{I_r}} \quad ; \quad x_{2Q} = \frac{u_2}{\sqrt{I_r}} \quad ; \quad x_{3Q} = \frac{u_3}{\sqrt{I_r}}$$

$$u_i = x_i \sqrt{I_r} \qquad i = 1, 2, 3$$

$$I_r = A u_1^2 + B u_2^2 + C u_3^2 - 2A' u_2 u_3 - 2B' u_1 u_3 - 2C' u_1 u_2 = \sum_{hk}{}' I_{hk} u_h u_k$$

sostituendo a $u_i = x_i \sqrt{I_r}$

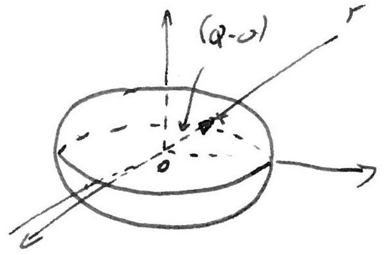
$$I_r = I_r \Big(\underbrace{A x_1^2 + B x_2^2 + C x_3^2 - 2A' x_2 x_3 - 2B' x_1 x_3 - 2C' x_1 x_2}_{\sum_{hk}{}' I_{hk} x_h x_k} \Big)$$

$$1 = \sum_{hk}{}' I_{hk} x_h x_k$$

Equazione di una quadrica.

Il punto Q descrive un ellissoide; tale ellissoide si dice ellissoide d'inerzia relativo al punto O.

*) Noto l'ellissoide d'inerzia relativo ad un punto O, il momento d'inerzia di una generica retta passante per O è pari all'inverso del quadrato del modulo del vettore ottenuto intersecando l'ellissoide con la retta stessa.

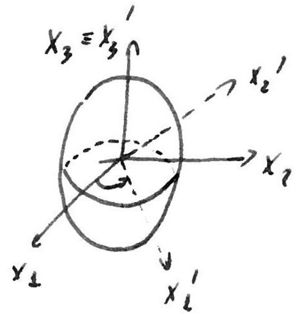


$$I_r = \frac{1}{\overline{OQ}^2}$$

*) Se conosco l'ellissoide <u>centrale</u> d'inerzia cioè l'ellissoide relativo al baricentro, tramite il Teorema di Huygens è possibile determinare il momento del sistema rispetto ad una qualsiasi retta dello spazio.

*) Se i m. d'in. dei 3 assi dell'ellissoide principale d'inerzia relativo ad O sono diversi allora esiste una sola terna principale d'inerzia (terna principale d'inerzia = sistema di riferimento con centro in O rispetto al quale l'ellissoide è scritta in forma canonica)

*) Se " " 2 assi dell'ellissoide " " d'inerzia sono uguali (ellissoide circolare) allora esiste una semplice infinità di terne principali



*) Se l'ellissoide d'inerzia relativo al punto o ha i m. d'inerz. dei 3 assi uguali (sfera) qualsiasi terna ortogonale con centro in o è una terna principale d'inerzia.

*) Rispetto ad una terna principale d'inerzia l'ellissoide d'inerzia assume la forma

$$A x_1^2 + B x_2^2 + C x_3^2 = 1$$

Se a_i $i=1,2,3$ sono gli assi dell'ellissoide

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

$$\frac{1}{a_i^2} = \underset{i=1}{A}, \underset{i=2}{B}, \underset{i=3}{C}$$

*) Rispetto alla terna principale d'inerzia la matrice d'inerzia si diagonalizza

$$\begin{pmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Gli assi della terna principale d'inerzia sono di simmetria ortogonale per l'ellissoide.

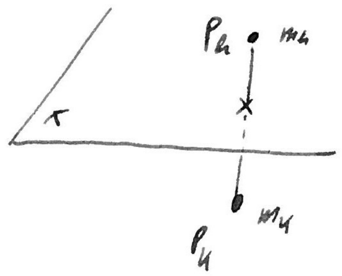
I piani generati da tali assi sono piani di simmetria ortogonale per l'ellisse.

Relazioni tra la struttura del sistema e gli ellissoidi d'inerzia

Un sistema di punti materiali ammette un piano π di simmetria materiale se per ogni punto $(P_h, m_h) \notin \pi$ esiste un punto (P_k, m_k) tale che

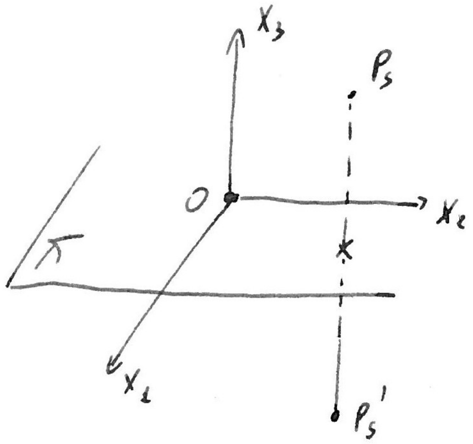
$m_h = m_k$

$(P_h - P_k) \perp \pi$ e la distanza di P_h da π è uguale alla distanza di P_k da π.



*) Se un sistema di punti materiali ammette un piano di simmetria materiale allora tale piano è di simmetria dell'ellissoide d'inerzia relativo ad ogni suo punto.

Sia π un piano di simmetria materiale per un sistema S e sia O un generico punto di π.



Rispetto al sistema di riferimento fissato

$$A' = \sum_s m_s \, x_{2s} \, x_{3s} = 0$$

i punti che appartengono al piano danno un contributo nullo ad A' essendo $x_{3s} = 0$ inoltre per ogni punto

$\{P_s \equiv (x_1, x_2, x_3), m_s\}$ esiste un punto $\{P_{s'} \equiv (x_1, x_2, -x_3), m_{s'} = m_s\}$

in modo che il contributo ad A' dei due punti

sia nullo.

Analogamente $B' = 0$

L'equazione dell'ellissoide d'inerzia relativo a O è

$$A x_1^2 + B x_2^2 + C x_3^2 - 2C' x_1 x_2 = 1$$

è evidente che il piano $\pi \equiv \{x_3 = 0\}$ formato dalle

rette x_1 e x_2 è di simmetria per l'ellissoide infatti

se il punto (x_1, x_2, x_3) appartiene all'ellissoide

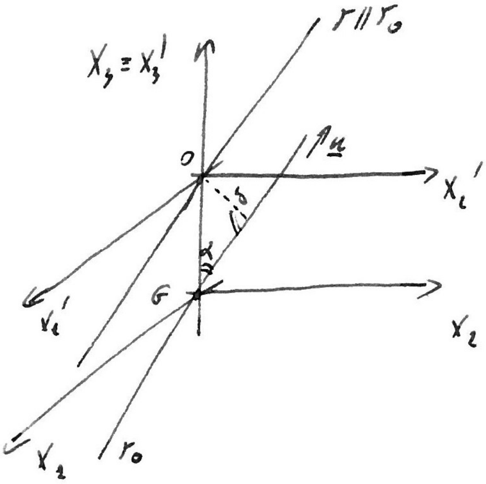
anche $(x_1, x_2, -x_3)$ vi appartiene.

*) Se il sistema di punti materiali ha 2 piani di simmetria materiale allora il baricentro G si trova sulla retta r d'intersezione dei due piani inoltre l'ellissoide centrale (relativo a G) ha centro su tale retta e inoltre r costituisce una delle 3 terne principali d'inerzia.

*) Se il sistema ha 3 piani di simmetria allora il baricentro G è dato dall'intersezione di tali piani, inoltre poiché essi sono di simmetria per l'ellissoide le rette definite dall'intersezione di tali piani costituiscono la terna principale d'inerzia - (Terna che diagonalizza I_{Gu}).

*) Considero un sistema materiale, sia G il suo baricentro e $\{G, X_1, X_2, X_3\}$ .. terna principale d'inerzia relativa a G.

Una qualsiasi terna $\{O, X_1', X_2', X_3'\}$ avente un asse ad esempio $X_3' \equiv X_3$ e $X_1' \parallel X_1$; $X_2' \parallel X_2$ è una terna principale d'inerzia relativa alla nuova origine.



Per il teorema di Huygens

$I_r = I_{r_0} + m\delta^2$ poiché $\{G, X_1, X_2, X_3\}$ è una terna principale

$$I_r = A_0 u_1^2 + B_0 u_2^2 + C_0 u_3^2 + m\delta^2$$

$$\delta^2 = \overline{OG}^2 \operatorname{sen}^2\alpha = \overline{OG}^2 (1-\cos^2\alpha) = \overline{OG}^2 (1-u_3^2)$$

poiché

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$

$$\delta^2 = \overline{OG}^2 (u_1^2 + u_2^2)$$ da cui

$$I_r = \underbrace{(A_0 + m\overline{OG}^2)}_{\text{momento d'inerzia di } x_1'} u_1^2 + (B_0 + m\overline{OG}^2) u_2^2 + C_0 u_3^2$$

" " " x_2'

" " " x_3'

$$I_r = A u_1^2 + B u_2^2 + C u_3^2$$

La terna è principale d'inerzia.

Posso affermare che un asse centrale d'inerzia è principale d'inerzia rispetto ad ogni suo punto

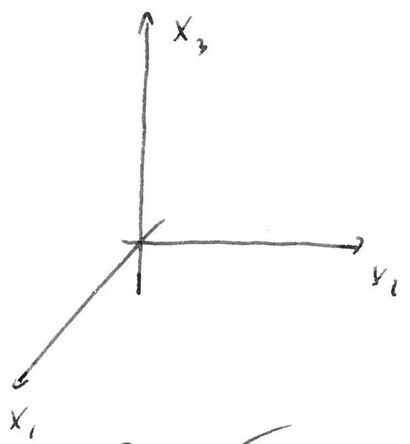
*) Se l'ellissoide centrale è rotondo è rotondo anche l'ellissoide relativo ad ogni punto dell'asse di simmetria circolare.

*) Consideriamo ora il caso in cui il momento d'inerzia del sistema S sia nullo rispetto ad una retta r (i punti del sistema sono allineati su r).

Definiamo la superficie descritta dal punto Q

$$(Q-O) = \frac{\vec{u}}{\sqrt{I_r}}$$

Considero un sistema di riferimento avente l'asse x_3 coincidente con r



$$P_s \in r \equiv x_3 \quad \forall s = 1 \ldots N$$

$$P_s = (0, 0, x_{3s})$$

Ricordando che l'equazione della superficie cercata è $A x_1^2 + B x_2^2 + C x_3^2 - 2A' x_2 x_3 - 2B' x_1 x_3 - 2C' x_1 x_2 = 1$

e osservando che $C=0$, $A=B$

$$A' = \sum m_s \underbrace{x_{2s}}_{=0} x_{3s} = 0$$

$$B' = \sum m_s \underbrace{x_{1s}}_{=0} x_{3s} = 0$$

$$C' = \sum m_s \underbrace{x_{1s}}_{=0} x_{2s} = 0$$

l'equazione ottenuta è quella di un cilindro a sezione circolare

$$A x_1^2 + A x_2^2 = 1 .$$

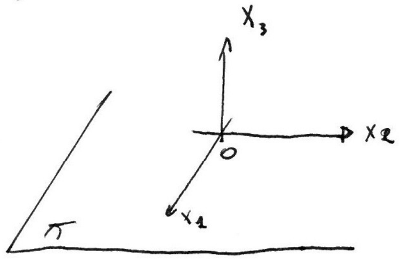
Giratore

Si definisce giratore si un sistema di punti materiali le grandezze ρ tali che

$I_r = m\rho^2$

ρ è la distanza che il centro massa dovrebbe avere dalla retta r affinché il suo momento rispetto alla retta r sia equivalente al momento di tutto il sistema rispetto a r.

*) Considero un sistema di punti materiali appartenenti ad un piano π e fisso un sistema di riferimento come in figura



$$P_s = (x_{1s}, x_{2s}, 0) \quad s = 1 - N$$

Sia

$$A = \sum_{s=1}^{n} m_s x_{2s}^2 \qquad B = \sum_{s=1}^{n} m_s x_{1s}^2$$

$$C = \sum_{s=1}^{n} m_s (x_{1s}^2 + x_{2s}^2) = A + B$$

Il momento d'inerzia di un sistema di punti materiali appartenenti a un piano π calcolato rispetto all'asse x_3 ortogonale a π è pari alla somma dei momenti d'inerzia rispetto a x_1 e x_2.

*) Dato un sistema di punti materiali $\{(P_s, m_s)\}$ e fissato un sistema di riferimento, la matrice d'inerzia I è definita positiva

$(I \underline{u})\underline{u} > 0 \quad \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^3$ inoltre la matrice

è simmetrica pertanto è sempre diagonalizzabile.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli autovalori e $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ gli autovettori

$$\begin{bmatrix} I_{11}, & I_{12}, & I_{13} \\ I_{21}, & I_{22}, & I_{23} \\ I_{31}, & I_{32}, & I_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

se $|\underline{a}_i| = 1 \quad i = 1 - 3$

$$(I \underline{a}_i)\underline{a}_i = \lambda_i \, \underline{a}_i \cdot \underline{a}_i = \lambda_i |\underline{a}_i|^2 = \lambda_i \qquad i = 1, 2, 3$$

gli autovalori rappresentano i momenti d'inerzia rispetto agli assi principali formati dagli autovettori.

Gradi di libertà di un sistema, coordinate lagrangiane

Il grado di libertà di un sistema rappresenta il numero di parametri indipendenti $(q_1 - q_n)$ definiti in un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ in corrispondenza biunivoca con le posizioni accessibili al sistema in un istante t.

Sia S_L un sistema materiale libero (non soggetto ad alcun vincolo) i parametri $(\lambda_1 - \lambda_e)$ occorrenti per determinare univocamente la posizione del sistema vengono detti coordinate normali.

Supponiamo che il sistema sia soggetto a vincoli bilaterali forniti dalle equazioni

$$\varphi_i(\lambda_1 - \lambda_e, t) = 0 \qquad i = 1 - m$$

Se tali vincoli sono indipendenti tra loro

Cioè se la matrice Jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial \lambda_l} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_m}{\partial \lambda_l} \end{bmatrix}$$ ha rango m

($l > r$ ciò assicura la mobilità del sistema)

allora i parametri indipendenti in corrispondenza biunivoca con le configurazioni del sistema diventano

$(l - m) = n$

Tali parametri $(q_1 - q_n)$ vengono dette coordinate Lagrangiane.

$$\begin{cases} P_1 = P_1(q_1 - q_n, t) \\ P_2 = P_2(q_1 - q_n, t) \\ P_3 = P_3(q_1 - q_n, t) \end{cases}$$

$P = P(q_1 - q_n, t)$ rappresenta l'insieme di tutte le possibili configurazioni del sistema.

Se i vincoli bilaterali sono fissi $P = P(q_1 - q_n)$

Fissate le coordinate lagrangiane $\bar{q}_1 - \bar{q}_n$ di un sistema è possibile determinare in modo univoco la configurazione del sistema.

Esisterà una funzione vettoriale $P_s = P_s(\bar{q}_1, - \bar{q}_n, t)$ che individua la posizione del punto $s \in [1, N]$

Supponiamo ora che oltre a vincoli bilaterali, il sistema sia soggetto a vincoli unilaterali espressi dalle disequazioni

$$\varphi_i(q_1 - q_n, t) \geq 0 \qquad i = 1 - m$$

Tali vincoli non modificano il grado di libertà del sistema ma restringono il dominio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ in cui varia $(q_1 - q_n)$.

*) Un punto vincolato su una superficie è soggetto ad un vincolo bilaterale, le coordinate lagrangiane e quindi il suo grado di libertà è 2.

Se il punto è vincolato ad una curva (intersezione di 2 superfici) è soggetto a due vincoli bilaterali, il suo grado di libertà è 1.

Un corpo rigido ha 6 gradi di libertà mentre un corpo rigido ad un asse fisso un solo grado di libertà

Due corpi tali che uno ha un asse fisso rispetto all'altro (es. compasso) è a 7 gradi di libertà (6 per individuare il 1 corpo uno per il secondo).

Considero un sistema di m punti materiali vincolato

$\{(P_s, m_s)\}_{s \in [1,m]}$ siano $q_1 - q_n$ le coordinate lagrangiane.

Le posizioni accessibili del punto s sono univocamente determinate da

$$P_s = P_s(q_1 - q_n, t)$$

Se i vincoli sono fissi

$$P_s = P_s(q_1 - q_n).$$

*) Per determinare il moto del sistema basta conoscere le funzioni $q_i = q_i(t)$ $i = 1 - n$

la velocità di un generico punto P_s vale

$$\underline{v}_{P_s} = \frac{dP_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial P_s}{\partial t}$$

$\{(P_s, \underline{v}_{P_s})\}_{s=[1,m]}$ rappresenta l'atto di moto del sistema.

*) Spostamenti possibili e spostamenti virtuali

Considero un sistema materiale fissate le coordinate lagrangiane $q_1 — q_n$ soggetto a vincoli olonomi.

Se P_s è un punto del sistema lo spostamento di P_s da una configurazione $S^{(q)}$ ammissibile al sistema ad un'altra configurazione $S^{(q+dq)}$ sempre ammissibile al sistema vale

$$\Delta P = P_s(q_1 + \Delta q_1, — q_n + \Delta q_n, t + \Delta t) - P_s(q_1 — q_n, t) =$$

$$= \partial P_s + o(\chi)$$

$$\chi = \sqrt{dq_1^2 + dq_2^2 + — + dq_n^2 + dt^2}$$

∂P_s è il differenziale di P_s e vale

$$\partial P_s = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial P_s}{\partial t} dt$$

Il differenziale $\partial P_s = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} d q_h + \frac{\partial P_s}{\partial t} dt$ rappresenta

lo spostamento elementare del punto P_s.

Noto il moto del sistema $q_1 = q_1(t)$ — $q_n = q_n(t)$ è

possibile determinare lo spostamento elementare dP_s:

$$d q_h = \dot{q}_h dt$$

$$d P_s = \left[\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \dot{q}_h(t) + \frac{\partial P_s}{\partial t} \right] dt$$

se si conosce la posizione iniziale del sistema

$\bar{q}_1 = q_1(0)$ — $\bar{q}_n = q_n(0)$ è possibile determinare

univocamente il moto del punto P_s.

Viceversa se si conosce lo spostamento elementare dP_s in un tempo $dt \neq 0$ esisterà un moto del sistema che realizza tale spostamento.

$$\partial P_s = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial P_s}{\partial t} dt$$

Se $dt \neq 0$ e gli spostamenti dq_h sono ammissibili dai vincoli del sistema allora ∂P_s rappresenta l'insieme degli spostamenti <u>possibili</u>.

Se $dt = 0$ ∂P_s rappresenta l'insieme degli spostamenti possibili supposti i vincoli fissi. Tali spostamenti vengono detti <u>virtuali</u>, essi non sono effettivamente realizzabili.

del sistema se i vincoli sono mobili:

$$\underline{v}_{P_s} = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_s}{\delta t}$$

se $\Delta t = 0$ e P_s è variabile con il tempo $\frac{\Delta P_s}{\Delta t} = \infty$

lo spostamento virtuale potrebbe essere realizzato

solo se la velocità del sistema fosse infinita.

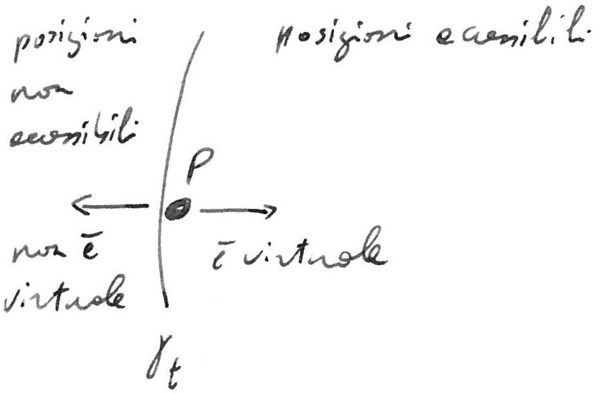
Lo spostamento virtuale viene indicato con

il simbolo

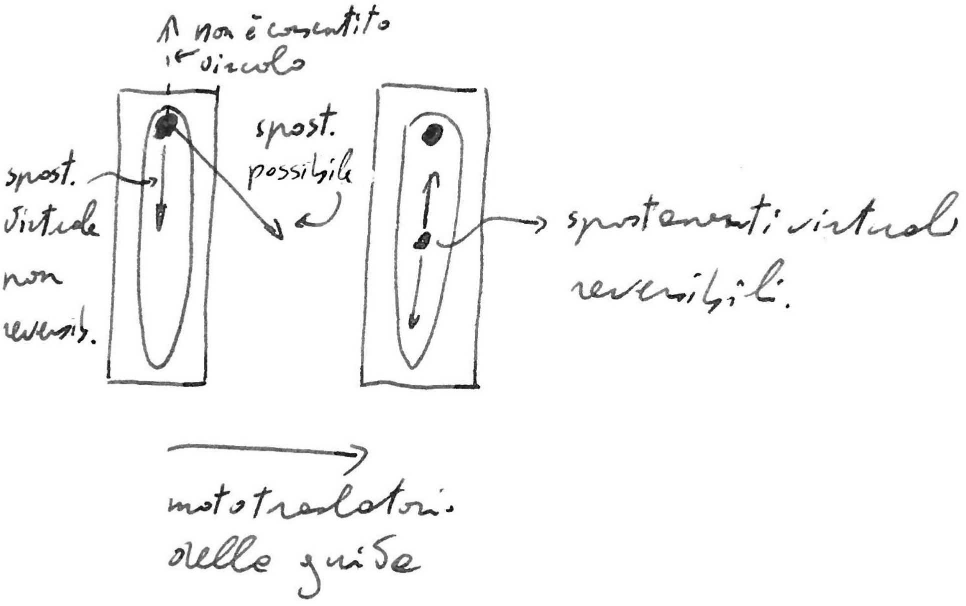
$$\delta P_s = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h$$

*) Uno spostamento virtuale è detto reversibile se anche lo spostamento opposto è virtuale.

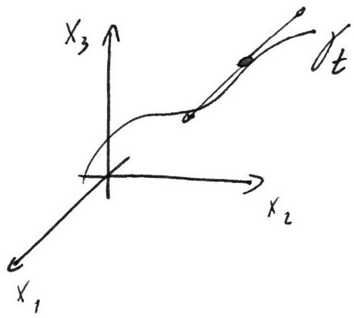
Supponiamo che il punto P si trovi al confine delle posizioni ammesse dai vincoli unilaterali



*) Nel caso i vincoli bilaterali siano fissi gli spostamenti virtuali coincidono con gli spostamenti possibili del sistema.



*) Considero un punto materiale vincolato a restare su una curva variabile con il tempo

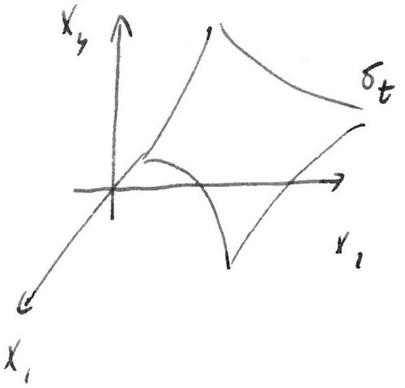


$\left\{ P_i = P_i(s,t) \right.$ $\quad i=1\dots3$ gli spostamenti virtuali del punto P nell'istante $\bar{t}$ sono

$$\delta P_i = \frac{\partial P_i}{\partial s}\,\delta s$$

sono tangenti alla curva supposta fissa nell'istante $\bar{t}$.

*) Se il punto materiale è vincolato a restare su una superficie variabile con il tempo



$\left\{ P_i = P_i(\lambda_1, \lambda_2, t) \right._{i=1\ldots3}$ gli spostamenti virtuali ammessi nell'istante $\bar{t}$ sono

$$\delta P_i = \frac{\partial P_i(\lambda_1, \lambda_2, \bar{t})}{\partial \lambda_1} \delta \lambda_1 + \frac{\partial P_i(\lambda_1, \lambda_2, \bar{t})}{\partial \lambda_2} \delta \lambda_2$$

sono tangenti alla superficie fissata nell'istante $\bar{t}$.

*) Considero un sistema materiale soggetto a vincoli olonomi variabili con il tempo.

Siano $\lambda_1 - \lambda_k$ le coordinate normali cioè le coordinate lagrangiane del sistema supposto libero e siano i vincoli olonomi espressi dalle equazioni

$\varphi_i(\lambda_1 - \lambda_k, t) = 0 \qquad i = 1 - r$

gli spostamenti virtuali ammissibili nell'istante $\bar{t}$ al sistema possono essere determinati considerando

$\varphi_i(\lambda_1 - \lambda_k, \bar{t}) = 0 \quad \Rightarrow$ differenziale di φ_i è nullo

$d\varphi_i = 0 \qquad i = 1 - r$

$\nabla\varphi_i \, d\lambda = 0 \qquad i = 1 - r \qquad \lambda = (\lambda_1 - \lambda_k)$

se $\nabla \psi_i \neq \underline{0}$ allora è normale alla superficie

$\psi_i(\lambda_1 — \lambda_n, \bar{t}) = 0$

Inoltre il verso di $\nabla \psi_i$ è quello orientato nella

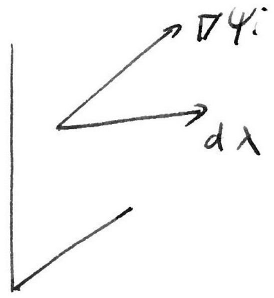
regione di spazio dove $\psi_i(\lambda_1 — \lambda_n, \bar{t}) > 0$

infatti se $d\lambda$ è tale che

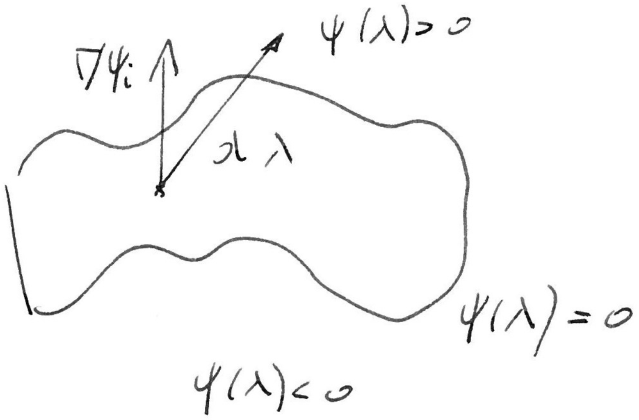
$\psi_i(\lambda_1 + d\lambda_1, — \lambda_n + d\lambda_n, \bar{t}) > 0$ allora

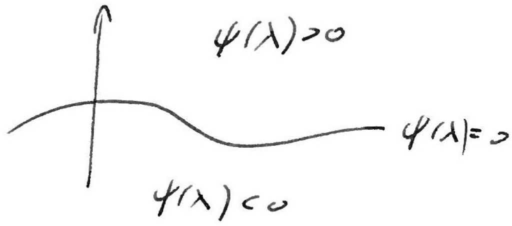
$\psi_i(\lambda + d\lambda, \bar{t}) - \psi_i(\lambda, \bar{t}) = \nabla \psi_i \, d\lambda + o(\lambda) > 0$

$\nabla \psi_i \, d\lambda > 0$



$\nabla \psi_i$ è orientato nello stesso semispazio di $d\lambda$





*) Supponiamo che il sistema sia vincolato a muoversi nella regione di spazio in cui

$f_i(\lambda_1 — \lambda_n, t) \geq 0$ vincoli unilaterali $i = 1 — r$

Se il sistema si trova in una posizione ordinaria cioè tale da verificare $f_i(\lambda_1 - \lambda_n, t) > 0$ gli spostamenti virtuali consentiti sono tutti quelli possibili indipendentemente dai vincoli unilaterali.

Se il sistema si trova in una posizione di confine cioè è verificata $f_i(\lambda_1 - \lambda_n, t) = 0$ gli spostamenti virtuali consentiti sono quelli tali che

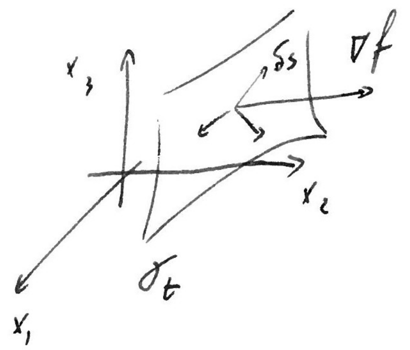
$$\nabla f_i \cdot \delta P \geq 0$$

dove $f_i(\lambda_1 - \lambda_n, \bar{t})$.

*) Se un punto materiale è soggetto a un vincolo bilaterale (vincolato su una superficie)

$f(x_1, x_2, x_3, t) = 0$

Gli spostamenti virtuali sono tangenti alla superficie



$\nabla f \cdot \delta P = 0$

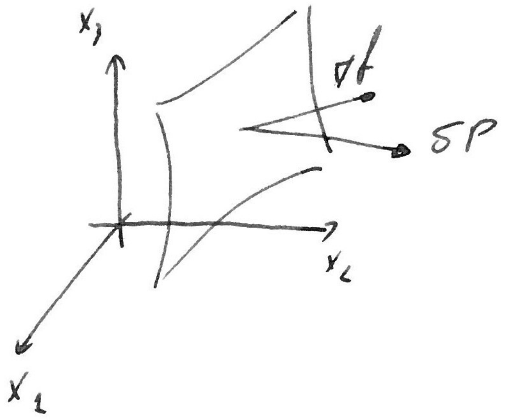
$\nabla f \perp \sigma_t$, δP tangente σ_t

Se il punto è vincolato ad una curva

$f_i(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad i = 1, 2$

$\nabla f_i \, \delta P = 0$

Se il punto materiale è soggetto ad un vincolo unilaterale, ad esempio è vincolato a restare nel semispazio dove $f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$



$$\nabla f \cdot \delta P \geq 0$$

*) Lavoro virtuale

Considero un sistema di punti materiali

$\{(P_s, m_s)\}_{s\in[1,N]}$ se $q_1 - q_n$ sono le coordinate

lagrangiane

$P_s = P_s(q_1 - q_n, t) \qquad \forall s \in [1, N]$

$\{(P_s, F_s)\}$ è l'insieme delle sollecitazioni a cui è

soggetto il sistema. Definisco lavoro virtuale

$$\delta L = \sum_{s=1}^{N} F_s \, \delta P_s$$

$$\delta P_s = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h$$ (differenziale di P_s a t costante)

$$\delta L = \sum_{s=1}^{N} F_s \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} \delta q_h$$

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n} \delta q_h \underbrace{\sum_{s=1}^{N} F_s \frac{\partial P_s}{\partial q_h}}_{Q_h}$$

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n} Q_h \, \delta q_h$$

Q_h è detta componente lagrangiana della sollecitazione.

Le componenti lagrangiane delle sollecitazioni sono

n = grado libertà del sistema.

Supponiamo che le sollecitazioni agenti sul sistema derivino da un potenziale

$$P_s = (x_{1s}, x_{2s}, x_{3s}) \qquad s = 1 - N$$

$$V = V(x_{11}, x_{21}, x_{31} \text{———}, x_{1N}, x_{2N}, x_{3N})$$

$$U = U\Big(x_{11}(q_1 - q_n, t), \text{———}, x_{3N}(q_1, - q_n, t)\Big) =$$

$$= U(q_1 - q_n, t)$$

è la trasformata di V rispetto alle relazione

$$P_s = P_s(q_1 - q_n, t) \qquad s = 1 - N$$

$$P_s = (P_{1s}, P_{2s}, P_{3s})$$

$$\delta L = \sum_{s=1}^{N} F_{1s}\,\delta x_{1s} + F_{2s}\,\delta_{x_{2s}} + F_{3s}\,\delta_{x_{3s}}$$

$$\delta L = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_{1s}}\,\delta x_{1s} + \frac{\partial V}{\partial x_{2s}}\,\delta x_{2s} + \frac{\partial V}{\partial x_{3s}}\,\delta x_{3s}$$

$\delta L =$ differenziale totale $V_{(x_{1s} \text{ — } x_{3N})}$

$\delta L = \delta V$

in coordinate lagrangiane

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n} Q_h\,\delta q_h$$

$$Q_h = \sum_{s=1}^{N} F_s \frac{\partial P_s}{\partial q_h}$$ in coordinate cartesiane

$$Q_h = \sum_{s=1}^{N} F_{1s} \frac{\partial x_{1s}}{\partial q_h} + F_{2s} \frac{\partial x_{2s}}{\partial q_h} + F_{3s} \frac{\partial x_{3s}}{\partial q_h}$$

$$Q_h = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_{1s}} \frac{\partial x_{1s}}{\partial q_h} + \frac{\partial V}{\partial x_{2s}} \frac{\partial x_{2s}}{\partial q_h} + \frac{\partial V}{\partial x_{3s}} \frac{\partial x_{3s}}{\partial q_h}$$

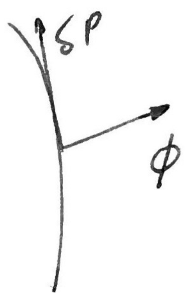
$$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h}$$

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n} Q_h \, \delta q_h = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_h} \, \delta q_h = \delta U$$

*) Considerazioni sugli spostamenti virtuali

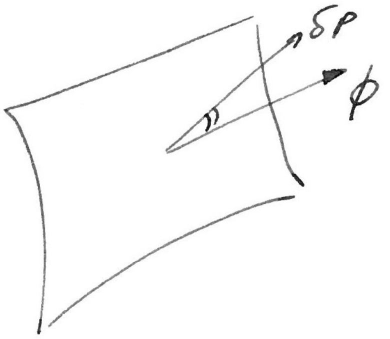
Se P è un punto materiale soggetto ad un vincolo olonomo bilaterale liscio (ad esempio una superficie) ricordando che la reazione vincolare ϕ è normale alla superficie e che gli spostamenti virtuali δP sono tangenti alla superficie si ottiene

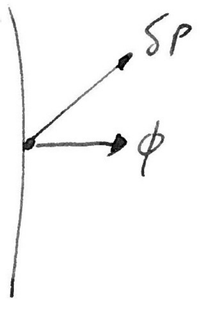
$$\delta L^{(v)} = \phi \, \delta P = 0$$



$$\phi \, \delta P = \delta L^{(v)} = 0$$

Se il punto materiale P è soggetto a vincoli olonomi unilaterali lisci (ad esempio è vincolato a restare nel semipiano positivo definito da una superficie) allora l'angolo formato tra lo spostamento virtuale δP e la reazione vincolare che viene espressa dal vincolo quando il punto P si trova in una posizione di confine è sempre minore o uguale a $\frac{\pi}{2}$





pertanto

$$\delta L^{(v)} = \phi\, \delta P \geq 0$$

Se tutti gli spostamenti del punto compatibili ai vincoli sono reversibili (punto materiale libero, oppure soggetto a vincoli bilaterali lisci)

avremo

$\delta L^{(v)} \geq 0 \qquad \delta L^{(v)} = \phi\, \delta P$

$-\delta L^{(v)} \geq 0 \qquad -\delta L^{(v)} = \phi\,(-\delta P)$

$$\underline{\underline{\delta L^{(v)} = 0}}$$

*)

Quanto detto per un punto materiale può essere esteso ad un sistema di punti materiali inoltre considerando che gli spostamenti virtuali sono tutti gli spostamenti ammissibili nel caso i vincoli siano fissi possiamo affermare che per un sistema di punti materiali libero o soggetto a vincoli bilaterali lisci vale $\delta L^{(v)} = 0$ mentre per un sistema di punti materiali soggetto a vincoli unilaterali $\delta L^{(v)} \geq 0$.

*) Principio dei lavori virtuali

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema soggetto a vincoli olonomi lisci e fissi sia in equilibrio in una posizione assegnata è che il lavoro virtuale delle forze attive agenti sul sistema sia non positivo per ogni spostamento virtuale a partire da tale configurazione (vale l'uguaglianza $\delta L = 0$ nel caso in cui tutti gli spostamenti virtuali siano reversibili ad esempio nel caso in cui il sistema è libero o soggetto a vincoli bilaterali).

$\{\mathcal{B}_s\}_{s\in[1,N]}$ sistema di corpi rigidi in equilibrio

Valgono le equazioni cardinali della statica

$$\underline{R}_s + \underline{R}_s^{(v)} = 0$$

$$\underline{M}_{os} + \underline{M}_{os}^{(v)} = 0 \qquad \forall s \in [1,N]$$

$$\delta L_s = \underline{R}_s \cdot \delta O_s + \underline{M}_{os} \cdot \underline{\psi}_s$$

$$\delta L_s^{(v)} = \underline{R}_s^{(v)} \delta O_s + \underline{M}_{os}^{(v)} \underline{\psi}_s$$

$$\delta L_s^{(v)} + \delta L_s = \left(\underline{R}_s + \underline{R}_s^{(v)}\right) \delta O_s + \left(\underline{M}_{os} + \underline{M}_{os}^{(v)}\right) \underline{\psi}_s = 0$$

$$\forall (\delta O_s, \underline{\psi}_s) \in V^3 \times V^3$$

$$\sum_{s=1}^{N} \delta L_s + \delta L_s^{(v)} = \delta L + \delta L^{(v)} = 0$$

$\delta L = -\delta L^{(v)} \leq 0 \quad \forall\, \delta S$ a partire configurazione assegnata.

Se i vincoli sono bilaterali oppure se il sistema è libero

$\delta L = 0$

*) Per dimostrare la sufficienza della proposizione occorre osservare che il lavoro fatto da vincoli fissi e lisci è nullo pertanto la variazione di energia cinetica del corpo corrisponde al lavoro delle forze attive $dT = dL^{(e)}$.

Se il corpo a partire da una configurazione verifica la condizione $\delta L^{(e)} = \underline{F}^{(e)} \delta S \leq 0 \quad \forall \delta S$ possibile necessariamente deve essere in equilibrio altrimenti $dL = \delta L = dT \leq 0$ avrebbe energia cinetica negativa il che è assurdo.

Considero un sistema soggetto a vincoli lisci fissi bilaterali.

$\delta L = 0 \quad \forall \delta s$ in condizioni di equilibrio

Se $(q_1 - q_n)$ sono le coordinate lagrangiane

$$\delta L = \sum_{h=1}^{n} Q_h \delta q_h = 0 \qquad \forall \delta q_h$$

ciò implica $Q_1, - Q_n, = 0$

Se le forze (attive) derivano da un potenziale

$U(q_1 - q_n)$ condizione necessaria e sufficiente

affinché un sistema soggetto a vincoli fissi

bilaterali e <u>lisci</u> sia in equilibrio è

che $Q_h = \dfrac{\partial U}{\partial q_h} = 0 \qquad h = 1 - n$

La relazione precedentemente scritta è molto importante perché permette di calcolare le posizioni di equilibrio indipendentemente dalle reazioni vincolari.

*) Applicazioni del principio dei lavori virtuali

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido. (vincoli fissi lisci)

$\delta L = 0 \quad \forall \delta P$ (equazione simbolica della statica)

$$\delta L = \underline{R} \cdot \delta O + \underline{M}_O \cdot \psi = 0 \quad \forall (\delta O, \psi) \in V_3 \times V_3$$

$$\Updownarrow$$

$\underline{R} = 0 \quad \underline{M}_O = 0$ ritrovo le equazioni cardinali della statica.

*) Condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un corpo rigido ed un punto fisso privo di attrito.

$\delta L = 0 \qquad \forall\, \delta P$

$\delta L = \cancel{\underline{R}\, \delta O} + \underline{\psi}\, \underline{M}_o$

$= 0$ perché O è fisso

$\delta L = \underline{\psi}\, \underline{M}_o = 0 \qquad \forall\, \underline{\psi} \in V_3$

$\Updownarrow$

$\underline{M}_o = 0$

*) Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido ad un asse fisso privo di attriti

$\delta L = 0 \quad \forall \delta P$

$$\delta L = \underbrace{\underline{R}\,\delta O}_{=0} + \underline{M}_o\,\underline{\psi} \qquad \underline{\psi} \parallel r = \text{asse fisso}$$

$$(\underline{\psi} = \underline{\omega}\,dt)$$

$$\delta L = \underline{M}_o\,\underline{\psi} = 0 \quad \forall \underline{\psi} \parallel r$$

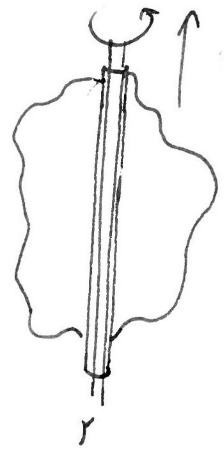
$$\Downarrow$$

$$\underline{M}_o\,\hat{r} = \underline{\underline{M_r = 0}}$$

viceversa se $M_r = \underline{M}_o\,\hat{r} = 0$ $\rightarrow \underline{M}_o = 0$ oppure $\rightarrow \underline{M}_o \perp \hat{r}$

in tutti e due i casi $\delta L = \underline{M}_o\,\underline{\psi} = 0$

*/ Condizione necessaria e sufficiente di equilibrio per un corpo rigido scorrevole su un asse fisso privo di attriti



$\delta L = 0 \qquad \forall\, \delta P$

$$\begin{cases} \delta L = \underline{R}\, \delta O + \underline{M}_O\, \underline{\psi} \\ \forall\, \delta O,\ \psi \parallel \hat{r} \end{cases} \qquad (\underline{\psi} = \underline{\omega}\, dt)$$

$$\Updownarrow$$

R_r (componente di $\underline{R}$ lungo r) e $M_r = 0$

*) Centro di gravità e centro di massa

Sia $\{(P_s, m_s)\}_{s\in[1,N]}$ un sistema di punti materiali

soggetto a $\{(P_s, \underline{p}_s)\}_{s\in[1,N]}$ $\underline{p}_s = m_s \underline{g}$

definisco centro di gravità $\left(\underline{p} = \sum \underline{p}_s\right)$

$$C - O = \frac{1}{\underline{p}} \sum_{s=1}^{N} \underline{p}_s (P_s - O)$$

$$C - O = \frac{1}{m\underline{g}} \sum_{s=1}^{N} m_s \underline{g} (P_s - O)$$

$\underline{g}$ può essere considerata

costante se l'estensione del sistema non è troppo

vasta.

$$C - O = \frac{1}{m} \sum_{s} m_s (P_s - O) = G - O$$

Il lavoro del sistema soggetto alle forze peso vale

$$dL = \sum_{s=1}^{N} \underline{p}_s \, dP_s = \underline{g} \sum_{s=1}^{n} m_s \, dP_s$$

$$m(C-O) = \sum_s m_s P_s$$ differenziando con O fisso

$$m \, dC = \sum_s m_s \, dP_s$$

$$dL = \sum_s m\underline{g} \, dC = \underline{p} \, dC$$

Il lavoro equivale al lavoro della forza

$$\Sigma' \equiv (C, m\underline{g})$$

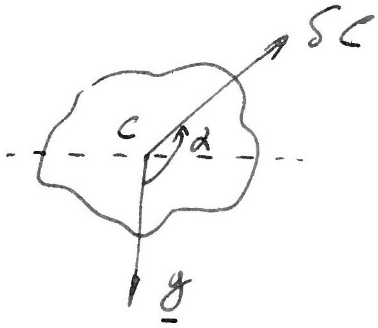
*) Configurazione di equilibrio rispetto ad un sistema di riferimento terrestre di un sistema materiale soggetto a vincoli fissi lisci unilaterali sotto l'azione della forza peso.

Applico il principio dei lavori virtuali considerando che le forze attive agenti sul sistema sono le forze peso (forza Newtoniana + forza trascinamento) e le forze di Coriolis

$$\underbrace{\text{forze di Coriolis}}_{= 0 \text{ essendo } \underline{\delta}_r = 0}$$

$$\delta L = \underline{p}\, \delta C \le 0 \quad \forall \delta C \quad \text{(relazione simbolica della statica)}$$

$$\delta L = m\underline{g}\,\delta C \leq 0$$



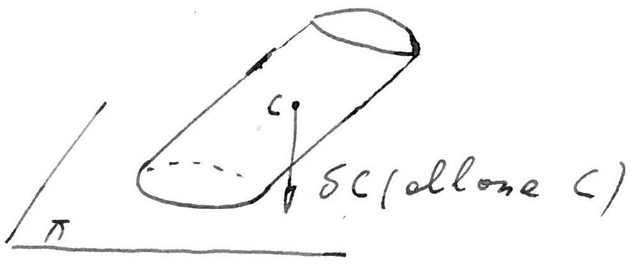
$$\delta L = m g |\delta C| \cos\alpha \leq 0$$

$$\cos\alpha \leq 0$$

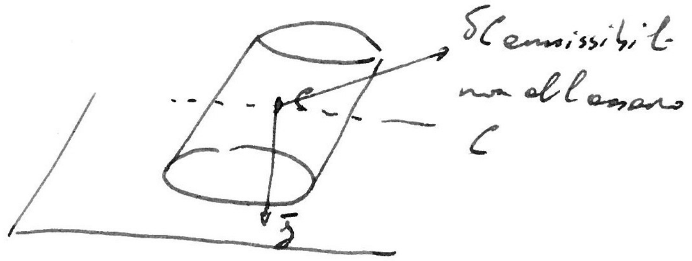
$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$$

*) Un sistema materiale soggetto alle forze peso nel sistema di riferimento terrestre (vincoli fissi lisci) è in equilibrio se e solo se tutti gli spostamenti virtuali non fanno alzare il centro di gravità.

(Teorema di Torricelli)



sistema non è in equilibrio



sistema è in equilibrio.

*) Principio di sovrapposizione

Sia $\{P_s, m_s\}$ $s \in [1,N]$ un sistema materiale soggetto a vincoli olonomi fissi e lisci. Se tale sistema è in equilibrio sotto le sollecitazioni $\Sigma^{(i)} = \{P_s, F_s^{(i)}\}$ $i = 1 — r$ allora è in equilibrio anche sotto l'unione delle r sollecitazioni.

$$\delta L_i^{(a)} \leq 0 \quad \forall \delta S \qquad i = 1 — r$$

$$\sum_{i=1}^{r} \delta L_i^{(a)} = \delta L \leq 0 \quad \forall \delta S$$

*) Principio di inversione

Considero un sistema soggetto a vincoli bilaterali fissi e lisci se è in equilibrio sotto la sollecitazione $\sum' \equiv (P_s, F_s)_{s \in [1,N]}$ allora è in equilibrio anche sotto la sollecitazione $\sum' \equiv (P_s, -F_s)$

Infatti $\delta L = 0 \quad -\delta L = 0$.

*) Principio di addittività dei vincoli

Se un sistema soggetto a vincoli lisci e fissi è in equilibrio allora è in equilibrio anche aggiungendo altri vincoli (non vale il viceversa).

$\delta L \leq 0 \quad \forall \delta P$ possibile sotto l'azione dei vincoli.

Aumentando i vincoli δP possibili diminuiscono continua a valere $\delta L \leq 0 \quad \forall \delta P$.

Calcolo delle reazioni vincolari mediante il principio dei lavori virtuali

Consideriamo un sistema materiale soggetto a vincoli olonomi fissi lisci e bilaterali.

Sia $\{(P_s, \underline{F}_s)\}_{s\in[1,N]}$ il sistema delle forze attive e

$\{(P_r, \phi_r)\}_{r\in[1,b]}$ il sistema delle reazioni vincolari:

Se il sistema è in equilibrio applicando il principio dei lavori virtuali

$$\delta L = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\delta L^{(a)}} + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\delta L^{(v)}} = \sum_{s=1}^{N} F_s\,\delta P_s + \sum_{r=1}^{b} \phi_r\,\delta P_r = 0$$

$\forall\ \delta P_s$ consentito al sistema.

Tale equazione non dà alcuna informazione sulle reazioni vincolari ϕ_r essendo

$$\sum_{r=1}^{b} \underline{\phi}_r \, \delta P_r = \delta L^{(v)} = 0$$

Considero ora il sistema S^* ottenuto sostituendo un vincolo con una forza attiva che uguaglia la reazione vincolare stessa.

Anche il sistema S^* è in equilibrio e vale

$$\delta L^* = \sum_{s=1}^{n+1} \underline{F}_s \, \delta P_s^* + \underbrace{\sum_{r=1}^{b-1} \underline{\phi}_r \, \delta P_r^*}_{=0} = 0 \quad \forall \delta P_s^*$$

spostamento virtuale consentito al sistema S^*.

Il grado di libertà del sistema S^* ottenuto sopprimendo una reazione vincolare e annoverandola tra le forze attive è maggiore o uguale al grado di libertà di S $(n^* \geq n)$

$$\sum_{s=1}^{n+1} \underline{F}_s \, \delta P_s^* = 0 \quad \forall \, \delta P_s^* \text{ consentito a } S^*$$

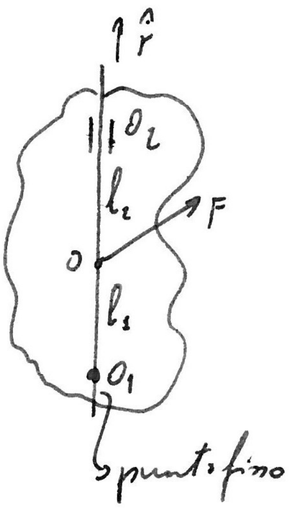
Se δP_s^* è uno spostamento virtuale consentito anche a S allora $\underline{F}_{n+1} \, \delta P_s^*$ si annulla identicamente pertanto non è possibile ricavare informazioni su $\underline{F}_{n+1}$ cioè sulla reazione vincolare incognita.

Pertanto per determinare la reazione $\underline{F}_{n+1}$ occorre imporre $\sum_{s=1}^{n+1} \underline{F}_s \, \delta P_s^* = 0 \quad \forall \, \delta P_s^*$ consentito a S^* ma non a S.

Esempio

Considero un corpo rigido ad un asse fisso il cui vincolo è realizzato da un punto fisso O_1 e un collare O_2.

Se il corpo è soggetto ad una forza $\vec{F}$ agente in un punto $O \in r$ (asse fisso), determino le reazioni vincolari all'equilibrio.



Si può dimostrare che il problema è staticamente determinato se il numero delle incognite (reazioni vincolari) è pari al grado di libertà del sistema privo di vincoli meno il grado di libertà del sistema soggetto a vincoli. ($N^* - N$ = incognite)

Nel nostro caso le incognite sono rappresentate dalle 2 componenti ortogonali a r di ϕ_2 e dalle 3 componenti di ϕ_1. (5 incognite)

$n^* - n = 6 - 1 = 5$

annovero la reazione vincolare ϕ_2 tra le forze attive

$\underline{F} \cdot \delta O^* + \underline{\phi_2} \cdot \delta O_2^* = 0$ gli spostamenti consentiti al sistema sono le rotazioni intorno al punto fisso O_1.

$$O_2 - O_1 = (l_2 + l_1)\hat{r}$$
$$O - O_1 = l_1 \hat{r}$$

$$O_2 - O_1 = \frac{l_2 + l_1}{l_1}(O - O_1)$$

$$\delta^* O_2 = \frac{l_2 + l_1}{l_1} \delta^* O$$

$$\underline{F} \cdot \delta O^* + \underline{\phi}_2 \frac{l_2 + l_1}{l_1} \delta O^* = 0 \qquad \delta O^* \neq 0$$

$$\left(\underline{F} + \underline{\phi}_2 \frac{l_2 + l_1}{l_1} \right) \delta O^* = 0 \qquad \delta O^* \perp r$$

$$\underline{F}^{\perp} = - \underline{\phi}_2 \frac{l_2 + l_1}{l_1}$$

abbiamo determinato le due componenti di ϕ_2

Sopprimo ora anche il vincolo $\underline{\phi}_1$ e lo annovero tra le forze attive, considero inoltre lo spostamento $\delta O^* = \delta O_1^* = \delta O_2^*$ lungo l'asse r l'unico non consentito dalla configurazione precedente

$$\underline{F}\,\delta o^* + \underbrace{\underline{\phi}_2\,\delta o^*}_{=0} + \underline{\phi}_1\,\delta o^* = 0$$

$\phi_{1,r} = -F_r$ ho determinato la componente di $\underline{\phi}_1$ lungo l'asse r.

Considero infine gli spostamenti virtuali δo_1^* realizzati tenendo O_2 fisso

ottengo $O_2 - O_1 = \hat{r}(l_1 + l_2)$

$O_2 - O = \hat{r}\, l_2$

$$O_2 - O_1 = \frac{l_1 + l_2}{l_2}\, O_2 - O$$

$$\delta o_1^* = \frac{l_1 + l_2}{l_2}\, \delta o^*$$

$$\underline{F}\,\delta O^* + \underbrace{\underline{\phi}_2\,\delta O_2^*}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underline{\phi}_1\,\delta O_1^* = 0$$

$$\underline{F}\,\delta O^* + \underline{\phi}_1\,\frac{l_1 + l_2}{l_2}\,\delta O^* = 0 \qquad \delta O^* \perp r$$

$$\underline{\phi}_1 \text{ (ortogonale a } r) = -\underline{F}\,\frac{l_2}{l_1 + l_2}$$

Principio di D'Alambert

Sia $\{(m_s, P_s)\}_{s\in[1,N]}$ un sistema materiale

soggetto a vincoli olonomi lisci e alle forze

attive $\{(P_s, \underline{F}_s)\}$ vale la relazione

$$m_s \underline{a}_s = \underline{F}_s(x, \dot{x}, t) + \underline{\phi}_s$$

*) Posso interpretare la grandezze $m\bar{a}$ come una forza fittizia "forza di inerzia".

*) Durante il moto del punto s si fanno equilibrio istante per istante le forze d'inerzie e le forze effettive (attive e vincolari) agenti su S.

$$\underline{F}_s(x, \dot{x}, t) - m_s \underline{a}_s = -\underline{\phi}_s$$

*) Considerando le forze fittizie come forze attive è possibile ricondurre un problema di dinamica ad un problema di statica e applicare il principio dei lavori virtuali:

$$\sum_{s=1}^{N} \left(\underline{F}_s(x_s, \dot{x}_s, t) - m_s \underline{a}_s\right) \delta P_s \leq 0$$

*) Dato un sistema materiale soggetto a vincoli

olonomi lisci, condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione soddisfi l'equazione del moto del sistema è che sia verificata

$$\sum_{s=1}^{N} \left(\underline{F}_s(x_s, \dot{x}_s, t) - m_s \underline{a}_s \right) \delta P_s \leq 0 \quad \forall \delta P_s \text{ consentito al sistema.}$$

Il principio d'Alembert permette di generalizzare la relazione simbolica della statica.

Considero un sistema materiale tale che

$$\delta L^{(e)} = \sum_{s=1}^{n} \underline{F}_s(x_s, \dot{x}_s, t) \delta P_s \leq 0 \quad \forall \delta P_s \text{ consentito}$$

dai vincoli fissi e lisci.

Il moto $m_s \underline{a}_s = 0 \ \forall s$ è consentito dai vincoli poiché soddisfa la relazione d'Alembert.

Fissate le condizioni iniziali $\begin{cases} X_s(0) = X_s^{\circ} \\ \dot{X}_s(0) = \dot{X}_s^{\circ} = 0 \end{cases}$

la quiete del sistema (equilibrio) è consentita dalle reazioni vincolari se e solo se $\delta L^{(a)} \leq 0$

Equazioni di Lagrange

Sia $\{(m_s, P_s)\}_{s \in [1,N]}$ un sistema materiale

siano $\{(P_s, \underline{F}_s)\}$, $\{(P_s, \underline{\phi}_s)\}$, $\{(-m_s \underline{a}_s, P_s)\}$ rispettivamente

le sollecitazioni attive, vincolari e d'inerzia agenti

sul sistema.

Dalle equazioni della dinamica abbiamo

$$\underline{F}_s + \underline{\phi}_s = m_s \underline{a}_s$$

$$(\underline{F}_s - m_s \underline{a}_s)\,\delta P_s = -\underline{\phi}_s\, \delta P_s = 0$$ (nel caso di

vincoli olonomi lisci)

$$\delta L^{(a)} = \sum_{s=1}^{N} \underline{F}_s\, \delta P_s$$

$$\delta L^{(m)} = \sum_{s=1}^{N} -m_s a_s\, \delta P_s$$

$\delta L^{(a)} + \delta L^{(in)} \geq 0$ (principio d'Alembert)

Nel caso di vincoli bilaterali

$\delta L^{(a)} + \delta L^{(in)} = 0$

Siano $(q_1, q_2 — q_n)$ le coordinate lagrangiane

del sistema

$$\delta L^{(a)} = \sum_{h=1}^{n} Q_h \, \delta q_h$$

$$Q_h = \sum_{s=1}^{N} F_s^{(a)} \frac{\partial P_s}{\partial q_h}$$ (sollecitazioni lagrangiane forze attive)

$$T_h = - \sum_{s=1}^{N} m_s \underline{a}_s \frac{\partial P_s}{\partial q_h}$$ (sollecitazioni lagrangiane forze d'inerzia)

$$\delta L^{(a)} + \delta L^{(in)} = (Q_h + T_h) \delta q_h = 0$$

$$-T_h = \frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{N} m_s \underline{v}_s \frac{\partial P_s}{\partial q_h} - \sum_{s=1}^{N} m_s \underline{v}_s \frac{d}{dt}\frac{\partial P_s}{\partial q_h}$$

$$\underline{v}_s = \frac{dP_s}{dt} = \frac{1}{dt}\left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial P_s}{\partial t} dt\right)$$

$$\underline{v}_s = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_h}\dot{q}_h + \frac{\partial P_s}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \underline{v}_s}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial P_s}{\partial q_h}$$ (I termine di $-T_h$)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial P_s}{\partial q_h} = \frac{\partial \underline{v}_s}{\partial q_h}$$ (per il teorema di Swartz)

$$-T_h = \frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{N} m_s \underline{v}_s \frac{\partial \underline{v}_s}{\partial \dot{q}_h} - \sum_{s=1}^{N} m_s \underline{v}_s \frac{\partial \underline{v}_s}{\partial q_h}$$

mettiamo ora in relazione T_h con l'energia cinetica T

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \, \underline{v}_s \cdot \underline{v}_s$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \frac{\partial}{\partial q_h} \left(\underline{v}_s \cdot \underline{v}_s \right) = \frac{1}{\cancel{2}} \sum_{s=1}^{N} \cancel{2} m_s \, \underline{v}_s \frac{\partial \underline{v}_s}{\partial q_h}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_h} = \sum_{s=1}^{N} m_s \underline{v}_s \frac{\partial \underline{v}_s}{\partial q_h}$$

Poiché $\delta L^{(a)} + \delta L^{(in)} = (Q_h + T_h)\, \delta q_h = 0$

al variare di δq_h si ottiene

$$Q_h = -T_h = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} \qquad h = 1 \ldots n$$

Tali equazioni vengono dette equazioni di Lagrange nella II forma.

È possibile dimostrare che le equazioni di Lagrange possono essere sempre ricondotte ad un sistema di equazioni differenziali del II ordine che ammette soluzione unica

noto $q_h(t_0)$ $h = 1 \ldots n$.

$\dot{q}_h(t_0)$

Supponiamo che le forze a cui è soggetto il sistema derivino da un potenziale

$\mathcal{U}(q_1, q_2 — q_n)$ $\qquad Q_h = \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_h}$

Le equazioni di Lagrange diventano

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_h} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial T}{\partial q_h}$$

osservando che $\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial \dot{q}_h} = 0$ possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T+\mathcal{U})}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial (T+\mathcal{U})}{\partial q_h} = 0$$

Se chiamo $\mathcal{L} = T + \mathcal{U}$ ottengo l'equazioni di

Lagrange nella I forma

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0$$

*) Le equazioni di Lagrange

$$Q_h = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} \qquad h = 1 - n \qquad \text{sono}$$

sempre riconducibili ad un sistema di equazioni differenziali del II ordine che ammette soluzione unica noti

$q_h(t_0)$ e $\dot{q}_h(t_0)$ $h = 1 - N$.

<u>Dim</u>

Considero l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n'} m_s v_s^2$$

$$\underline{v}_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial P_s}{\partial t}$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n'} m_s \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_s}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial P_s}{\partial t}\right)^2$$

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} m_s\left(\sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial P_s}{\partial q_i}\frac{\partial P_s}{\partial q_j}\dot q_i\dot q_j+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P_s}{\partial q_i}\frac{\partial P_s}{\partial t}q_i+\frac{\partial P_s}{\partial t}\cdot\frac{\partial P_s}{\partial t}\right)$$

$$T=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum_{ij=1}^{n}a_{ij}\dot q_i\dot q_j}_{\text{parte quadratica}}+\underbrace{2\sum_{i=1}^{n}a_i\dot q_i}_{\text{parte lineare}}+a\Big)$$

$$a_{ij}=\sum_{s=1}^{n} m_s\frac{\partial P_s}{\partial q_i}\frac{\partial P_s}{\partial q_j}$$

$$a_i=\sum_{s=1}^{n} m_s\frac{\partial P_s}{\partial q_i}\frac{\partial P_s}{\partial t}$$

funzioni di $(q\,;\,t)$

$$a=\frac{\partial P_s}{\partial t}\cdot\frac{\partial P_s}{\partial t}$$

Se i vincoli non dipendono dal tempo

$\frac{\partial P_s}{\partial t} = 0$ pertanto $a_i = a = 0$ e

$T = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ Poichè l'energia cinetica

è nulla solo quando il sistema è in quiete

cioè $\dot{q}_i = 0 \; \forall i = 1 \ldots N$ mentre è sempre positiva

negli altri casi la forma quadratica

$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$ è definita positiva.

$A = [a_{ij}]$ ha determinante diverso da zero

pertanto è invertibile.

Quanto detto vale anche nel caso in cui

i vincoli dipendono dal tempo poichè

è sempre possibile considerare i vincoli negli istanti successivi al tempo considerato

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\,\dot q_i \dot q_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i \dot q_i + a_0\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j + a_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, q_j + a_i\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\ddot q_j = F_i(q, q, t)$$ (funzione generica di q, q, t)

Poiché $\det a_{ij} \neq 0$ posso esplicitare

$$\ddot q_j = G_j(q, q, t) \qquad j = 1 - n.$$

Sistema di equazioni differenziali del II ordine.

*) <u>Potenziale generalizzato</u>.

Equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h(q, \dot{q}, t)$$

Se esiste una funzione $U(q, \dot{q}, t)$ tale che

$$Q_h(q,\dot{q},t) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_h}$$ allora la

funzione U è detto potenziale generalizzato

Le equazioni di Lagrange possono essere scritte

nella forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = Q_h \qquad \mathcal{L} = U + T$$

La funzione lagrangiana può essere introdotta

sia se $Q_i = \frac{\partial U(q,t)}{\partial q_i}$ sia se esiste un

potenziale generalizzato $Q_i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_i}$.

Un sistema meccanico per cui può essere definita

L è detto sistema lagrangiano.

*) Caratteristiche del potenziale generalizzato.

Il potenziale generalizzato ha una dipendenza lineare da $\dot{q}_i$.

$$U(\dot{q},q,t) = \sum_{i=1}^{n} l_i(q,t)\,\dot{q}_i + l_0(q,t)$$

<u>Dim</u>

$$Q_h = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U(\dot{q},q,t)}{\partial \dot{q}_h}\right) + \frac{\partial U(\dot{q},q,t)}{\partial q_h}$$

$$Q_h = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial t}\right) +$$

$$+\frac{\partial U}{\partial q_h}$$

$$Q_h = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i\,\partial \dot{q}_h}\ddot{q}_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\,\partial \dot{q}_h}\dot{q}_i - \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_h\,\partial t} + \frac{\partial U}{\partial q_h}$$

Poiché Q_h non è funzione di $\ddot{q}_i$ il termine

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_h} = 0 \qquad \forall i, h = 1 - n$$

Ciò equivale ad affermare che il potenziale generalizzato U dipende linearmente da $\dot{q}_h$.

*) Caratteristica delle sollecitazioni lagrangiane dipendenti da un potenziale generalizzato.

Se Q_h è una sollecitazione lagrangiana dipendente da un potenziale generalizzato allora ha una dipendenza lineare da $\dot{q}_i$

$$Q_h = \sum_{i=1}^{n} C_{ih}\, \dot{q}_i + F(q,t)$$ inoltre la matrice

$[C_{ih}]$ è antisimmetrica.

<u>Dim</u>

$$Q_h = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_h}\right) + \frac{\partial U}{\partial q_h}$$

$$Q_h = -\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_h}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i(q,t)\,\dot{q}_i + b_0(q,t)\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial q_h}\left[\sum_{i=1}^{n} b_i(q,t)\,\dot q_i + b_0(q,t)\right]$$

$$= -\frac{d}{dt}\, b_h(q,t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i(q,t)}{\partial q_h}\dot q_i + \frac{\partial b_0}{\partial q_h}$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_h}{\partial q_i}\dot q_i - \frac{\partial b_h}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial q_h}\dot q_i + \frac{\partial b_0}{\partial q_h}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial b_i}{\partial q_h} - \frac{\partial b_h}{\partial q_i}\right)\dot q_i + \frac{\partial b_0}{\partial q_h} - \frac{\partial b_h}{\partial t}$$

$$Q_h = \sum_{i=1}^{n} c_{ih}\,\dot q_i + F(q,t)$$

$$c_{ih} = \frac{\partial b_i}{\partial q_h} - \frac{\partial b_h}{\partial q_i}$$

$$c_{hi} = \frac{\partial b_h}{\partial q_i} - \frac{\partial b_i}{\partial q_h} = -c_{ih}.$$

Esempio di potenziale generalizzato

Una carica q in un campo magnetico è soggetta alla forza di Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Poiché $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ è possibile introdurre il potenziale vettore $\vec{A}$ tale che

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

La funzione $U = q\vec{v} \cdot \vec{A} = q(\dot{x}_1 A_1 + \dot{x}_2 A_2 + \dot{x}_3 A_3)$ è un potenziale generalizzato per la forza di Lorentz.

*) Momenti cinematici e trasformazioni di Legendre

Definisco momenti cinematici o variabili coniugate le grandezze

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(\dot{q}, q, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

È sempre possibile esprimere $\dot{q}_i$ in funzione di (q, p, t) $\qquad \dot{q}_i = f_i(q, p, t)$

$$\mathcal{L} = T + U$$

$$T = \frac{1}{2}\left[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} a_i \dot{q}_i + a_0\right]$$

$$U = \sum_{i=1}^{n} b_i \dot{q}_i + b(q, t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_h} = \sum_{j=1}^{n} a_{hj}(q,t)\dot q_j + \sum_{j=1}^{n} b_j(q,t)$$

Poiché a_{hj} ha determinante diverso da zero

posso invertirle e esprimere $\dot q_j = f_j(q,p,t)$

$\forall j = 1 — n$.

Equazioni di Hamilton

*) Ad ogni sistema lagrangiano verificante

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1 — n$$ è possibile

associare un sistema di 2n equazioni

chiamate Hamiltoniane o canoniche.

Introduciamo la funzione Hamiltoniana

$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ operando una

trasformazione di Legendre H può essere

considerata funzione di p q t

$H = H(p, q, t)$

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

$$dH = \cancel{\sum_{i=1}^{n} p_i \, d\dot{q}_i} + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, dp_i -$$

$$- \cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ inoltre $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0$

cioé $\dfrac{d}{dt} p_h = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h}$ $\qquad \dot{p}_h = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h}$

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \, dp_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \, dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

differenzio $H(p\, q\, t)$

$$dH = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Confrontando i due differenziali

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \dfrac{\partial H(p,q,t)}{\partial p_i} \\ \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H(p,q,t)}{\partial q_i} \end{cases} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

Equazioni differenziali in forma canonica

ammettono soluzione unica noti

$\dot{q}_i(t_0)$ $\dot{p}_i(t_0)$ $i = 1 - n$.

Osservazione

Quando la funzione lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo $H =$ costante è un integrale primo del moto.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \cancel{\left(-\dot{p}_i \dot{q}_i + \dot{p}_i \dot{q}_i \right)} + \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{dH}{dt} = 0$$

$H =$ costante.

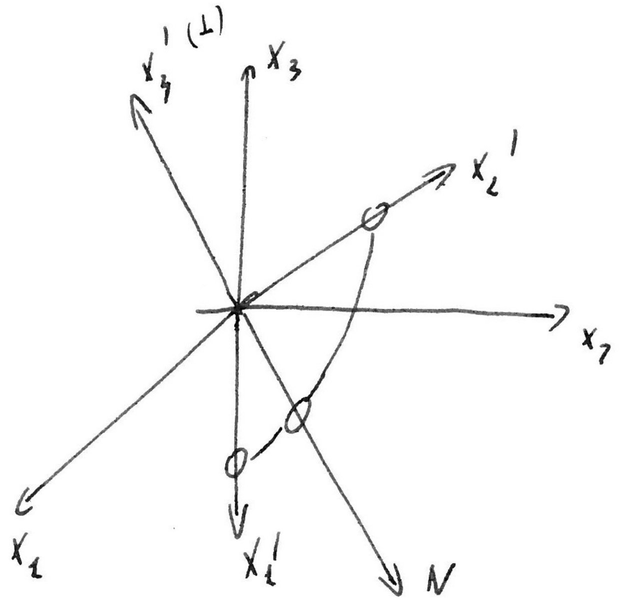
Moto di un corpo rigido ad un punto fisso

*) Angoli di Eulero

Sia $\{O, x_1, x_2, x_3\}$ il sistema di riferimento fisso e

$\{O, x_1', x_2', x_3'\}$ il sistema di riferimento solidale

al corpo



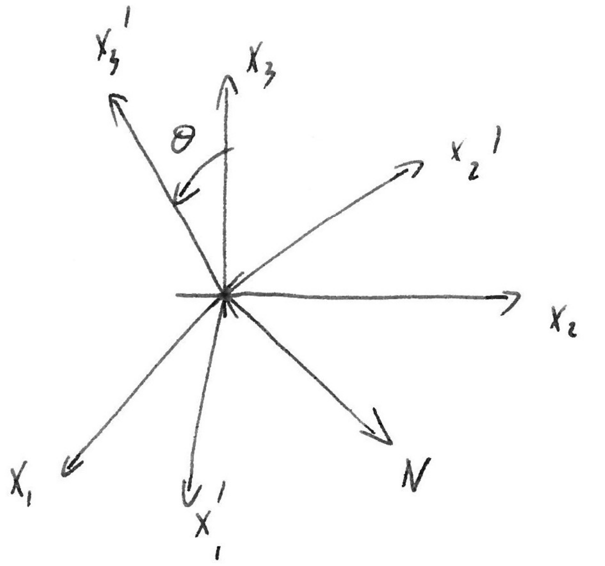
*) il simbolo ⚬—⚬ indica che le rette appartengono allo stesso piano

$\perp$ ortogonale a x_3'

N detta retta dei nodi è l'intersezione dei piani $\pi(x_1, x_2)$ e $\pi(x_1', x_2')$

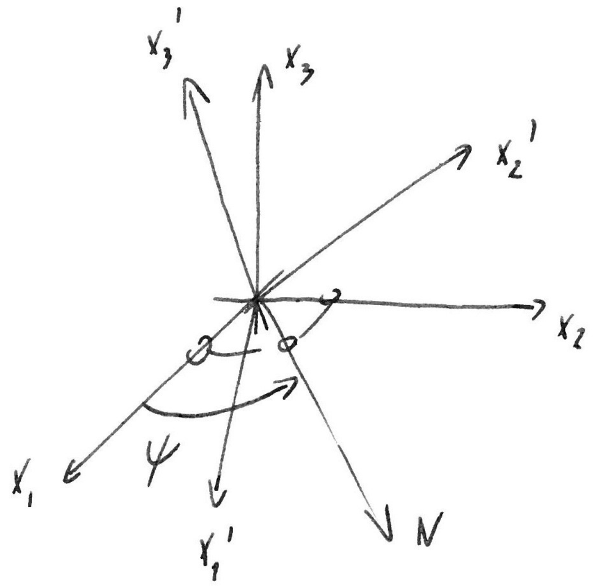
Gli angoli di Eulero θ, ψ, φ sono le 3 coordinate lagrangiane che permettono di individuare univocamente la posizione di un corpo rigido B vincolato ad un punto fisso.

*) θ = angolo di nutazione $0 < \theta < \pi$



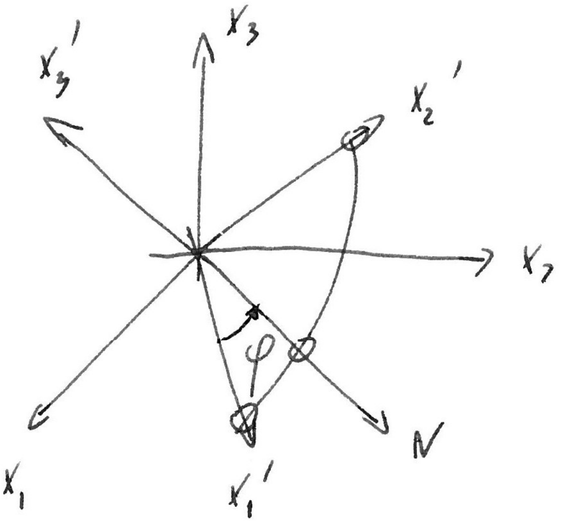
è orientato in modo che il verso di $\hat{N}$ risulti positivo...

*) ψ = angolo di precessione $\quad 0 \le \psi < 2\pi$

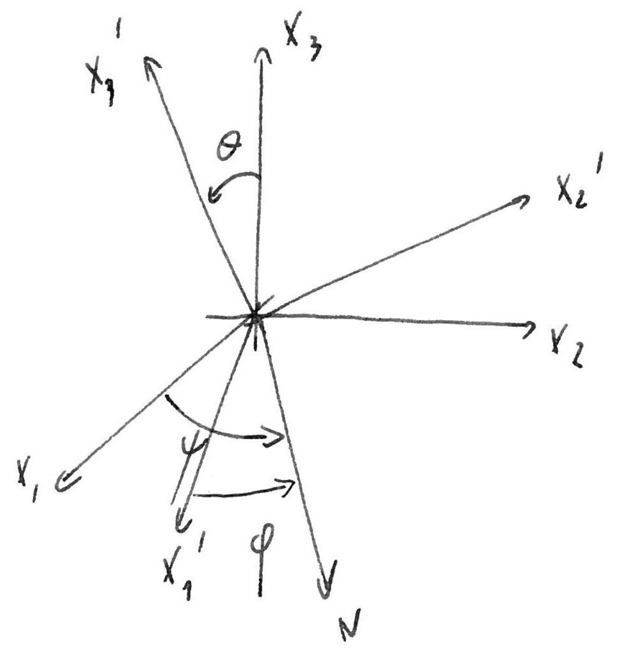


è orientato in modo che il verso di x_3 risulti positivo

*) φ: angolo di rotazione propria $0 \le \varphi < 2\pi$

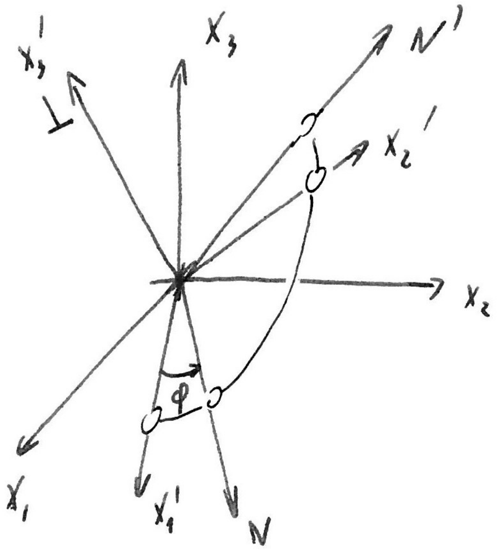


φ è tale che il verso di x_3' risulti positivo.



Occorre ora per poter scrivere le equazioni di Eulero determinare la relazione che intercorre tra gli angoli θ, ψ, φ e le coordinate del vettore $\underline{\omega}$ (= velocità angolare di (x_1', x_2', x_3') intorno a (x_1, x_2, x_3)) rispetto al sistema x_1', x_2', x_3'.

$$\underline{\omega} = \omega_1 \underline{l}_1' + \omega_2 \underline{l}_2' + \omega_3 \underline{l}_3'$$



N' è tale che $X_3' N N'$ sia levogira.

$\underline{\omega} = \underline{\omega}_r + \underline{\omega}_\tau$

$\underline{\omega}_r$ = velocità angolare di (X_1', X_2', X_3') intorno a

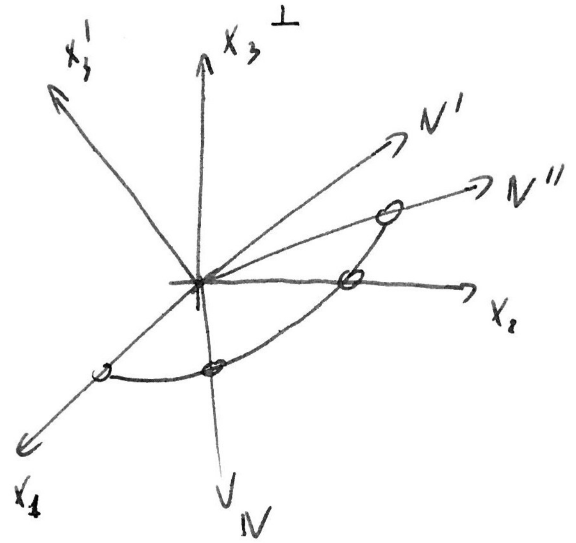
$(X_3', N, N') \quad = \quad \underline{\underline{\dot{\varphi}\, \underline{e}_3'}}$

$\underline{\omega}_\tau$ = velocità angolare di (X_3', N, N') intorno

a (X_1, X_2, X_3)

$\underline{\omega}_\tau = \underline{\Omega}$ $\qquad$ $\underline{\Omega}$: (velocità angolare)

(x_3', N, N') intorno a (x_1, x_2, x_3)



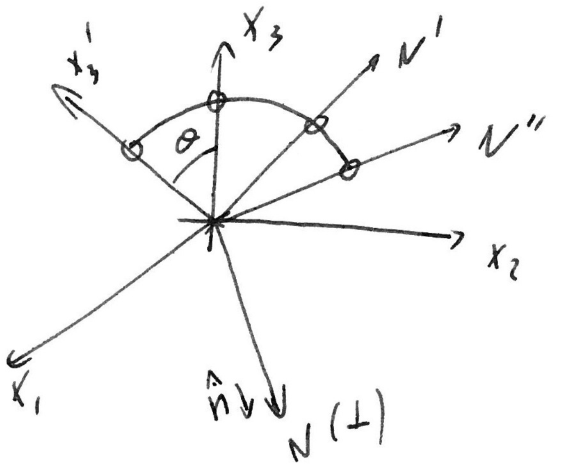
N'' tale che

(x_3, N, N'') sia levogira.

$\underline{\Omega} = \underline{\Omega}_r + \underline{\Omega}_\tau$

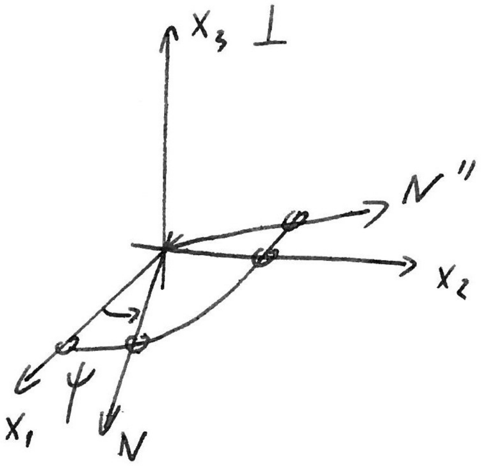
$\underline{\Omega}_r$ = velocità angolare di (x_3', N, N') intorno

a $(x_3, N, N'') = \underline{\underline{\dot{\theta}\,\hat{n}}}$



$\underline{\Omega}_T$: velocità angolare di (x_3, N, N'') intorno

a (x_1, x_2, x_3) $= \dot{\psi}\, \underline{e}_3$

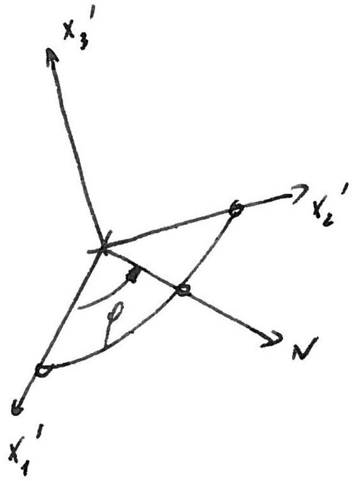


Pertanto

$$\underline{\omega} = \dot{\varphi}\, \underline{e}_3' + \dot{\theta}\, \hat{n} + \dot{\psi}\, \underline{e}_3$$

metto in relazione $\hat{n}$ e $\underline{e}_3$ con $(\underline{e}_1', \underline{e}_2', \underline{e}_3')$

*) $\hat{n} = f(\underline{l}_1', \underline{l}_2', \underline{l}_3')$



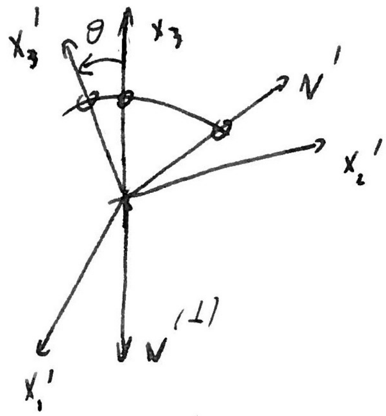
φ negativo

[Gli angoli si misurano a partire da N e x_3 nel verso indicato]

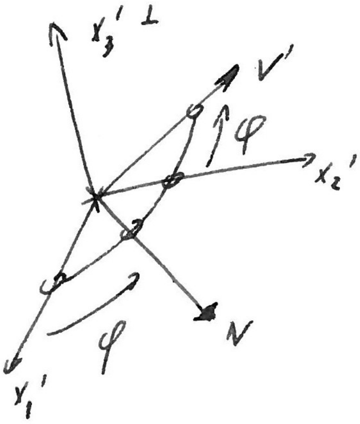
$$\hat{n} = \cos(-\varphi)\,\underline{l}_1' + \operatorname{sen}(-\varphi)\,\underline{l}_2'$$

$$\hat{n} = \cos\varphi\,\underline{l}_1' - \operatorname{sen}\varphi\,\underline{l}_2'$$

*) $\underline{l}_3 = f(\underline{l}_1', \underline{l}_2', \underline{l}_3')$



$$\underline{l}_3 = \cos\theta\,\underline{l}_3' + \operatorname{sen}\theta\,\hat{n}'$$



φ è negativo

$$\hat{n}' = \cos(-\varphi)\,\underline{l}_2' - \operatorname{sen}(-\varphi)\,\underline{l}_1' = \cos\varphi\,\underline{l}_2' + \operatorname{sen}\varphi\,\underline{l}_1'$$

$\underline{\omega} = \dot{\varphi}\,\underline{l}_3' + \dot{\theta}\,\hat{n} + \dot{\psi}\,\underline{l}_3$ sostituendo e proiettando

sugli assi $(\underline{l}_1', \underline{l}_2', \underline{l}_3')$ si ottiene

$$\omega_1 = \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$$

$$\omega_2 = \dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi + \dot{\psi}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta$$

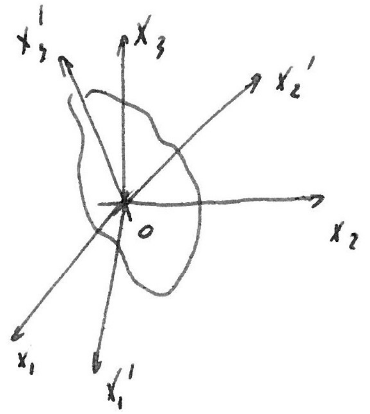
Risolvendo il sistema si ricava

$$\dot{\theta} = \omega_1 \cos\varphi - \omega_2 \,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\left(\omega_1 \,\mathrm{sen}\,\varphi + \omega_2 \cos\varphi\right)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_3 - \mathrm{cotg}\left(\omega_1 \,\mathrm{sen}\,\varphi + \omega_2 \cos\varphi\right)$$

*) Energia cinetica di un corpo rigido ad un punto fisso.



$$T = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s v_s^2 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s \underline{v}_s \underline{v}_s$$

$$\underline{v}_s = \underline{\omega} \times (S - O) = \underline{\omega} \times \underline{x}_s$$

$|\underline{v}_s|$ rispetto agli assi $(x_1' \; x_2' \; x_3')$ =

$$= \omega' x_s' \operatorname{sen} \widehat{\underline{\omega}\, \underline{x}_s}$$

x_s', ω' = componenti del vettore $(P_s - O)$ e $\underline{\omega}$ rispetto alla terna x_1', x_2', x_3'.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \omega'^2 x_s'^2 \operatorname{sen}^2 \widehat{\underline{\omega}\,\underline{x}_s}$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \omega'^2 x_s'^2 \left(1 - \cos^2 \widehat{\underline{\omega}\,\underline{x}_s}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \left[\sum_{hk=1}^{3} \omega'_h \omega'_k \delta_{hk} x_s'^2 - \left(\underline{\omega}' \cdot \underline{x}'_s\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \left[\sum_{hk=1}^{3} \omega'_h \omega'_k \delta_{hk} x_s'^2 - \left(\underline{\omega}' \cdot \underline{x}'_s\right) \cdot \left(\underline{\omega}' \cdot \underline{x}'_s\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N} m_s \left[\sum_{hk=1}^{3} \omega'_h \omega'_k \delta_{hk} x_s'^2 - \left(\sum_{h=1}^{3} \omega'_h x'_{hs} \right) \left(\sum_{k=1}^{3} \omega'_k x'_{ks} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{hk=1}^{N} \omega'_h \omega'_k \left[\underbrace{\sum_{s=1}^{N} \left(m_s \delta_{hk} x_s'^2 - m_s x'_{hs} x'_{ks} \right)}_{I_{hk}} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{hk=1}^{N} I_{hk} \omega'_h \omega'_k$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{I}\,\underline{\omega}\right)\cdot\underline{\omega}$$

I = matrice d'inerzia scritta rispetto al sistema $x_1'\,x_2'\,x_3'$

$$\underset{\sim}{I}\,\underline{\omega} = I_{hk}\,\underline{e}_h' \otimes \underline{e}_k'(\underline{\omega}) = \sum_{hk} I_{hk}\,\omega_k\,\underline{e}_h'$$

È possibile sempre diagonalizzare la matrice I in modo che

$$\underset{\sim}{I}\,\underline{\omega} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega_1 \\ B\omega_2 \\ C\omega_3 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{I}\,\underline{\omega}\right)\cdot\underline{\omega} \qquad \underline{\omega} = \omega_1'\,\underline{e}_1' + \omega_2'\,\underline{e}_2' + \omega_3'\,\underline{e}_3'$$

$$T = \frac{1}{2} I_{hk}\,\omega_h'\,\omega_k' \qquad \underset{\sim}{I} = \text{costante}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_j'} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{I}\,\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \omega_j'}\right)\underline{\omega} + \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{I}\,\underline{\omega}\right)\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \omega_j'}$$

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial \omega_j'} = \underline{e}_j'$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_j'} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{I}\,\underline{e}_j'\right)\cdot\underline{\omega} + \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{I}\,\underline{\omega}\right)\cdot\underline{e}_j'$$

Poiché il prodotto scalare è quello standard e e la matrice d'inerzia è simmetrica i due addendi sono uguali

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_j'} = \left(\underset{\sim}{I}\,\underline{\omega}\right)\underline{\ell}_j' \qquad (*)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N} m_s\,\underline{v}_s\,\underline{v}_s$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_j'} = \sum_{s=1}^{N} m_s\,\underline{v}_s\,\frac{\partial \underline{v}_s}{\partial \omega_j'}$$

$$\underline{v}_s = \left(\sum_i \omega_i'\,\underline{\ell}_i'\right) \times \left(\sum_j x_{sj}'\,\underline{\ell}_j'\right)$$

$\dfrac{\partial \underline{v}_s}{\partial \omega_j'}$ = derivata rispetto alla terna mobile =

$$= \underline{\ell}_j' \times (P_s - O)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_j'} = \sum_{s=1}^{N} m_s\,\underline{v}_s\,\underline{\ell}_j' \times (P_s - O) = \underbrace{\sum_{s=1}^{N}\left[(P_s - O)\times m_s\underline{v}_s\right]}_{\underline{K}_O}\cdot\underline{\ell}_j'$$

Confrontandola con la (*)

$\underline{K}_o = \underset{\sim}{I}\,\underline{\omega}$

Il momento della quantità di moto di un corpo rigido ad un punto fisso O è pari al prodotto della matrice d'inerzia $\underset{\sim}{I}$ calcolata rispetto alla terna solidale al corpo (è costante) per il vettore $\underline{\omega} = \omega_1' \underline{l}_1' + \omega_2' \underline{l}_2' + \omega_3' \underline{l}_3'$

$\underline{\omega}$ = velocità angolare del corpo intorno alla terna fissa.

$$\underset{\sim}{I}\,\underline{\omega} = \underline{K}_o = \sum_{hk} I_{hk}\, \underline{l}_h' \otimes \underline{l}_k' (\underline{\omega}) = \sum_{hk} I_{hk}\, \omega_h \omega_k$$

Sia $\underline{\omega} = \omega(t)\,\underline{u}(t)$

$\underline{u}(t) = \text{vers}\,\underline{\omega}$

$$\underline{K}_o = \underset{\sim}{I}(\underline{\omega}) = \omega(t)\,\underset{\sim}{I}\,\underline{u}(t)$$

$$\underline{K}_o\,\underline{u} = \omega(t)\left(\underset{\sim}{I}\,\underline{u}\right)\underline{u} = \omega(t)\,I_u$$

Il momento assiale parallelo a $\underline{\omega}$ è pari al modulo di $\underline{\omega}$ per il momento d'inerzia del sistema rispetto alla retta parallela a $\underline{\omega}$ passante per O.

Osservazione

Se $\underline{u}(t) = u_i \underline{l}_i'$ è un vettore posizione di $P \in \mathcal{B}$

$\frac{d_e \underline{u}}{dt}$ = la derivata di $\underline{u}$ nel sistema fisso:

$$= \dot{u}_i \underline{l}_i' + u_i \dot{\underline{l}}_i' = \dot{u}_i \underline{l}_i' + u_i \underline{\omega} \times \underline{l}_i' =$$

$$= \underbrace{\frac{d_s \underline{u}}{dt}} + u_i \underline{\omega} \times \underline{l}_i' = \frac{d_s \underline{u}}{dt} + \underline{\omega} \times u_i \underline{l}_i'$$

↳ derivata di $\underline{u}$ rispetto al sistema solidale al corpo

Se considero $\underline{\omega} = \omega_i' \underline{l}_i'$

$$\frac{d_e \underline{\omega}}{dt} = \frac{d_s \underline{\omega}}{dt} + \underbrace{\underline{\omega} \times \omega_i' \underline{l}_i'}_{\underline{\omega} \times \underline{\omega} = 0}$$

La derivata del vettore $\underline{\omega}$ rispetto al sistema fisso e solidale è la stessa.

*) Equazioni cardinali della dinamica di un corpo rigido ad un punto fisso privo di attrito.

$$\frac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^{(e)} + \underbrace{\underline{R}^{(v)}}_{=0}$$

$$\frac{d\underline{K}_0}{dt} = \underline{M}_0^{(a)} + \underbrace{\underline{M}_0^{(v)}}_{=0}$$

Considero la seconda equazione

$$\frac{d\underline{K}_o}{dt} = \underline{M}_o^{(a)}$$

$\underline{K}_o = \underset{\sim}{I}\,\underline{\omega}$ (scritto rispetto sistema riferimento solidale)

$$\frac{d_a \underline{K}_o}{dt} = \frac{d_s \underset{\sim}{I}\,\underline{\omega}}{dt} + \underline{\omega} \times \underset{\sim}{I}\,\underline{\omega}$$

$$\frac{d\underline{K}_o}{dt} = \underset{\sim}{I}\,\underline{\dot{\omega}} + \underline{\omega} \times \underset{\sim}{I}\,\underline{\omega} = \underline{M}_o^{(a)}(\theta, \psi, \varphi, \omega_1, \omega_2, \omega_3, t)$$

$\underline{M}_o^{(a)}$ è funzione della posizione e dell'atto di moto (angoli Eulero e $\underline{\omega}$)

$$\underset{\sim}{I}\,\dot{\underline{\omega}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_1' \\ \dot{\omega}_2' \\ \dot{\omega}_3' \end{pmatrix} = \left(A\dot{\omega}_1' ,\ B\dot{\omega}_2' ,\ C\dot{\omega}_3' \right)$$

(Supponendo la matrice d'inerzia diagonalizzata)

$$\underline{\omega} \times \underset{\sim}{I}\,\underline{\omega} = \begin{Vmatrix} \underline{e}_1' & \underline{e}_2' & \underline{e}_3' \\ \omega_1' & \omega_2' & \omega_3' \\ A\omega_1' & B\omega_2' & C\omega_3' \end{Vmatrix}$$

$\underline{M}_0 = \underset{\sim}{I}\,\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times I\underline{\omega}$ Equazione di Eulero, proiettata sugli assi otteniamo 3 equazioni scalari:

$$A\dot{\omega}_1' + C\omega_3'\omega_2' - B\omega_2'\omega_3' = M_0^{(1)}(\theta, \varphi, \psi, \omega_1', \omega_2', \omega_3', t)$$

$$B\dot{\omega}_2' + A\omega_1'\omega_3' - C\omega_1'\omega_3' = M_0^{(2)}(\underline{\qquad})$$

$$C\dot{\omega}_3' + B\omega_1'\omega_2' - A\omega_1'\omega_2' = M_0^{(3)}(\underline{\qquad})$$

$$A\dot{\omega}_1' - (B-C)\,\omega_2'\omega_3' = M_o^{(1)}(\text{———})$$

$$B\dot{\omega}_2' - (C-A)\,\omega_1'\omega_3' = M_o^{(2)}(\text{———})$$

$$C\dot{\omega}_3' - (A-B)\,\omega_1'\omega_2' = M_o^{(3)}(\text{———})$$

Sistema di 3 equazioni differenziali del primo ordine nelle variabili $\omega_1', \omega_2', \omega_3', \vartheta, \psi, \varphi$

Se considero le relazioni di Eulero

$$\dot{\theta} = f_1(\omega_1', \omega_2', \omega_3', \varphi, \vartheta, \psi, t)$$
$$\dot{\psi} = f_2(\text{———})$$
$$\dot{\varphi} = f_3(\text{———})$$

ottengo un sistema di sei equazioni

differenziali in sei incognite.

Poiché le equazioni differenziali sono del I ordine se $\underline{M}_o(\underline{\omega}, \varphi, \psi, \theta, t) \in C^1$ il sistema ammette soluzione unica note la configurazione iniziale e l'atto di moto iniziale

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 \\ \varphi = \varphi_0 \\ \psi = \psi_0 \\ \omega_1' = \omega_1'^{0} \\ \omega_2' = \omega_2'^{0} \\ \omega_3' = \omega_3'^{0} \end{cases}$$ all'istante $t = 0$

*) Il moto di un sistema rigido ad un punto fisso è univocamente determinato noto $\underline{M}_o$ -

Moti particolari di un corpo rigido ad un punto fisso.

I moti dei corpi rigidi ad un punto fisso che verificano le condizione $\underline{M}_O^{(e)} = \underline{0}$ vengono detti moti alla Poinsot o moti per inerzia.

In tal caso le equazioni di Eulero compaiono come due sistemi di equazioni differenziali di cui il primo nelle variabili $\dot{\omega}_1', \dot{\omega}_2', \dot{\omega}_3'$ è risolubile indipendentemente del secondo.

$$A\dot{\omega}_1' - (B-C)\,\omega_2'\omega_3' = 0$$

$$B\dot{\omega}_2' - (C-A)\,\omega_1'\omega_3' = 0$$

$$C\dot{\omega}_3' - (A-B)\,\omega_1'\omega_2' = 0$$

Risolviamo tale sistema sotto particolari condizioni dell'ellissoide d'inerzia

1) Supponiamo che l'ellissoide d'inerzia relativo al punto O sia una sfera in tal caso i momenti relativi ad ogni retta passante per O sono gli stessi, in particolare $A = B = C$.

Il sistema diviene

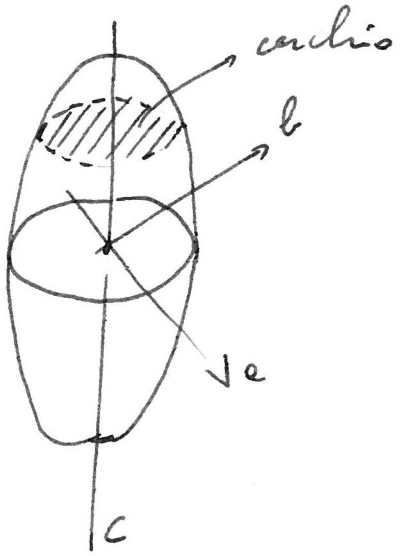
$A\dot{\underline{\omega}} = 0 \qquad \frac{d\underline{\omega}}{dt} = 0$

$\underline{\omega}$ = costante nel sistema di riferimento solidale.

Poiché $\frac{d_s\underline{\omega}}{dt} = \frac{d_a\underline{\omega}}{dt}$ $\underline{\omega}$ è costante anche nel sistema fisso.

2) Supponiamo che l'ellissoide d'inerzia sia rotondo intorno all'asse c, cioè

$A = B \neq C$ (i momenti di ogni retta passante per O ortogonale all'asse c sono uguali).



Si ottiene $C\dot{\omega}_3' = 0$ $\quad \omega_3' = \text{costante}$

Inoltre poiché $\underline{\Pi}_o = \dfrac{d\underline{K}_o}{dt} = 0$ $\quad \underline{K}_o = \text{costante}$

$$\underline{K}_o = \underset{\sim}{I}\,\underline{\omega} = A\omega_1'\underline{e}_1' + A\omega_2'\underline{e}_2' + C\underline{\omega}_3'\underline{e}_3' = \text{costante}$$

$$\underline{K}_0 = A(\omega_1' \underline{\hat{e}}_1 + \omega_2' \underline{\hat{e}}_2 + \omega_3' \underline{\hat{e}}_3) + (C-A)\,\omega_3' \underline{\hat{e}}_3$$

$$\underline{K}_0 = A\,\underline{\omega} + (C-A)\,\omega_3' \underline{\hat{e}}_3$$

$$\underline{\omega} = \underbrace{\frac{\underline{K}_0}{A}}_{\underline{\omega}_1} + \underbrace{\frac{(A-C)}{A}\,\omega_3' \underline{\hat{e}}_3}_{\underline{\omega}_2} \qquad \omega_3' = \text{costante}$$

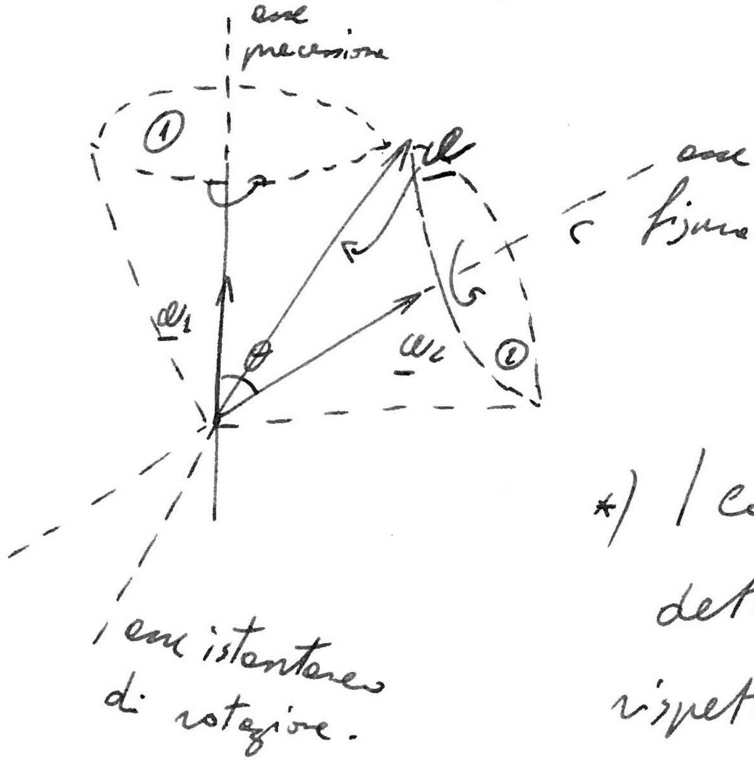
$\underline{\omega}_1 \downarrow$ costante spazio fisso

$\underline{\omega}_2 \downarrow$ costante nello spazio solidale

Il moto è di precessione regolare avente come asse di figura l'asse di rotazione $\underline{i}_3 = C$ e l'asse di precessione la retta passante per O e parallela a $\underline{K}_0$.

Un corpo rigido il cui ellissoide d'inerzia è rotondo rispetto ad un punto O è detto giroscopio.

$$\underline{\omega} = \underbrace{\frac{\underline{K}_0}{A}}_{\underline{\omega}_1} + \underbrace{\frac{(A-C)}{A}\,\omega_3'\,\underline{i}_3}_{\underline{\omega}_2}$$



θ = costante

*) I coni disegnati vengono detti di Poinsot, il ① è fisso rispetto al sistema assoluto, il ② rispetto al sistema solidale.

I due coni rotolano senza strisciare l'uno sull'altro.

*) Rotazioni permanenti

Se per un corpo rigido ad un punto fisso il momento delle forze esterne è nullo si avranno rotazioni permanenti ($\underline{\omega}$ costante) se e solo se $\underline{\omega}$ ha la direzione di un asse principale d'inerzia relativo al punto fisso O.

1 caso) $A \neq B \neq C$

$$A\dot{\omega}_1 - (B-C)\omega_2\omega_3 = 0$$

$$B\dot{\omega}_2 - (C-A)\omega_1\omega_3 = 0$$

$$C\dot{\omega}_3 - (A-B)\omega_1\omega_2 = 0$$

La velocità angolare ω è costante se e solo se è soddisfatto il sistema

$$\begin{cases} (B-C)\,\omega_2\,\omega_3 = 0 \\ (C-A)\,\omega_1\,\omega_3 = 0 \\ (A-B)\,\omega_1\,\omega_2 = 0 \end{cases}$$

Poiché $A \neq B \neq C$ ciò è verificato se e solo se almeno due componenti di $\underline{\omega}$ sono nulle cioè se e solo se $\underline{\omega}$ ha la direzione di uno dei tre assi principali.

<u>Oss</u>

Le equazioni sono scritte rispetto al sistema solidale al corpo tuttavia poiché

$$\frac{d_e}{dt}\underline{\omega} = \frac{d_s}{dt}\underline{\omega}$$

la velocità angolare è costante nel sistema fisso se e solo se è costante nel sistema solidale

2° caso)

$A = B \neq C$

La velocità angolare $\underline{\omega}$ è costante se e solo se le sue componenti soddisfano il sistema

$$\begin{cases} (B-C)\,\omega_2\,\omega_3 = 0 \\ (C-A)\,\omega_3\,\omega_1 = 0 \end{cases}$$

Ciò è verificato in uno dei due casi

$\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, 0)$

$\underline{\omega} = (0, 0, \omega_3)$

Nel primo caso $\underline{\omega}$ appartiene al piano generato dai due assi rispetto ai quali il momento d'inerzia del sistema vale $A = B$.

Poiché $A = B$ ogni retta passante per O e appartenente a tale piano è un asse principale d'inerzia.

Nel secondo caso $\underline{\omega}$ ha la direzione dell'asse principale d'inerzia rispetto al quale il momento d'inerzia del sistema vale C.

3° caso)

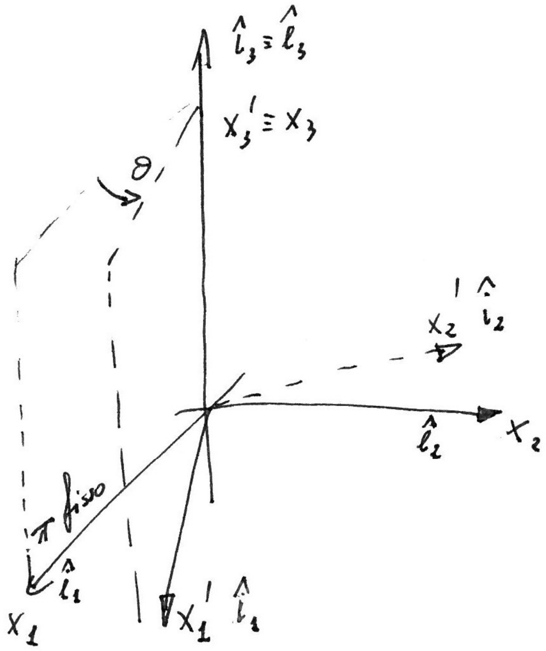
$A = B = C$ ogni velocità angolare $\underline{\omega}$ è costante.

Le rotazioni permanenti sono generiche rotazioni intorno ad una retta passante per O.

Poichè l'ellissoide d'inerzia è una sfera ogni retta passante per O è un asse principale d'inerzia.

Corpo rigido ad un asse fisso

Considero un corpo rigido avente l'asse x_3' fisso coincidente con l'asse x_3 di una terna fissa $\{O, x_1, x_2, x_3\}$



θ = parametro lagrangiano

$\underline{K}_0 = \underset{\sim}{I}\, \underline{\omega}$ $\qquad \underline{\omega} \equiv \omega_3' \hat{\underline{i}}_3'$

$$\begin{pmatrix} A & -C' & -B' \\ -C' & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B'\omega_3' \\ -A'\omega_3' \\ C\omega_3' \end{pmatrix}$$

$$\underline{K}_0 = -B'\omega_3' \underline{i}_1 - A'\omega_3' \underline{i}_2 + C\omega_3' i_3$$

Se il sistema è principale d'inerzia

$\underline{K}_0 = C\omega_3' \, \underline{i}_3$

Considero la I equazione cardinale della dinamica

$$\frac{d\underline{K}_0}{dt} = \underline{M}_0^{(e)}(\theta, \dot{\theta}, t) + \underline{M}_0^{(v)}(\theta, \dot{\theta}, t)$$

Inoltre $\underline{M}_0^{(v)} \, \underline{i}_3 = 0$

Proiettando le equazioni sull'asse $x_3 \equiv X_3'$

$$\frac{dK_3}{dt} = M_3^{(e)}(\theta, \dot{\theta}, t)$$

$\underline{K}_0 = C\omega_3' \, \underline{i}_3 = C\dot{\theta}\,\underline{i}_3$ $\qquad$ $\underline{i}_3$ costante

$$\frac{dK_3}{dt} = C\ddot{\theta} = M_3^{(e)}(\theta, \dot{\theta}, t)$$

$C\ddot{\theta} = M_3^{(e)}(\theta,\dot{\theta},t)$ è un'equazione differenziale

del II ordine ammette soluzione unica noti

$\theta(t_0) = \theta_0$

$\dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0$

l'atto di moto del sistema è $\{P_s, \dot{\theta}\, \underline{i}_3 \times (P_s - O)\}$

L'equazione del moto del corpo rigido ad asse fisso può essere ottenuta anche con il teorema delle forze vive.

$$dT = dL^{(e)} + dL^{(v)}$$

$$dL^{(e)} = \underbrace{\underline{R}^{(e)} \, dO}_{=\,0 \ (O \text{ fisso})} + \underbrace{\underline{M}_O^{(e)} \, \underline{\omega} \, dt}_{M_3^{(e)} \dot{\theta} \, dt}$$

$$dL^{(v)} = \underbrace{\underline{R}^{(v)} \, dO}_{=\,0} + \underbrace{\underline{M}_O^{(v)} \, \dot{\theta} \, \underline{e}_3 \, dt}_{=\,0}$$

$$\left(\text{essendo } \underline{M}_O^{(v)} \, \underline{e}_3 = M_3^{(v)} = 0 \right)$$

$$dT = dL^{(e)} = M_3^{(e)} \dot{\theta}\, dt$$

$$T = \frac{1}{2} C \underline{\omega}\, \underline{\omega} = \frac{1}{2} C \dot{\theta}^2$$

$$dT = C \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$C \dot{\theta} \ddot{\theta} dt = M_3^{(e)} \dot{\theta}\, dt$$

$$C \cancel{\dot{\theta}} \ddot{\theta} = M_3^{(e)} \cancel{\dot{\theta}}$$

Calcolo l'equazione del moto applicando le equazioni di Lagrange.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$T = \frac{1}{2} C \dot{\theta}^2 \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = C \dot{\theta}$$

$$C \ddot{\theta} = Q_\theta$$

$$dL^{(e)} = M_3^{(e)} \dot{\theta}\, dt = M_3^{(e)} d\theta = Q_\theta\, d\theta$$

$$M_3^{(e)} = Q_\theta$$

$$C \ddot{\theta} = M_3^{(e)}$$

*) Reazioni vincolari esplicate dall'asse intorno al quale ruota il corpo rigido.

Dalle equazioni cardinali della dinamica

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{K}_o}{dt} = \underline{M}^{(a)} + \underline{M}^{(v)} \\ m\ddot{\underline{G}} = \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} \end{cases}$$

G: baricentro sistema

$$\underline{K}_o = -B'\dot{\theta}\,\underline{i}_1 - A'\dot{\theta}\,\underline{i}_2 + C\dot{\theta}\,\underline{i}_3$$

$$\frac{d\underline{K}_o}{dt} = \left(-B'\underline{i}_1 - A'\underline{i}_2 + C\underline{i}_3\right)\ddot{\theta} - B'\dot{\theta}\frac{d\underline{i}_1}{dt} - A'\dot{\theta}\frac{d\underline{i}_2}{dt}$$

$$\frac{d\underline{i}_1}{dt} = \dot{\theta}\,\underline{i}_3 \times \underline{i}_1 = \dot{\theta}\,\underline{i}_2$$

$$\frac{d\underline{i}_2}{dt} = \dot{\theta}\,\underline{i}_3 \times \underline{i}_2 = -\dot{\theta}\,\underline{i}_1$$

Sostituendo

$$\frac{d\underline{K}_o}{dt} = \left(\dot{\theta}^2 A' - \ddot{\theta} B'\right)\underline{i}_1 + \left(-\dot{\theta}^2 B' - \ddot{\theta} A'\right)\underline{i}_2 + C\ddot{\theta}\,\underline{i}_3$$

Se il sistema di riferimento è principale d'inerzia $A' = B' = C' = 0$

$$\frac{d\underline{K}_o}{dt} = C\ddot{\theta}\,\underline{i}_3 = \underline{M}_o^{(v)} + \underline{M}_o^{(a)}$$

$$\underline{M}_o^{(v)} = C\ddot{\theta}\,\underline{i}_3 - \underline{M}_o^{(a)}$$

Considero la II equazione cardinale della dinamica

$$m\ddot{G} = \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)}$$

$$\ddot{G} = -\dot{\theta}^2 (G - G^*) + \ddot{\theta}\, \underline{i}_3 \times (G - G^*)$$

$$-m\dot{\theta}^2 (G - G^*) + m\ddot{\theta}\, \underline{i}_3 \times (G - G^*) - R^{(e)} = R^{(v)}$$

Se l'asse di rotazione è baricentrale

$-\underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(v)}$ se la terna è principale

d'inerzia $C\ddot{\theta}\, \underline{i}_3 - \underline{\Pi}_o^{(e)} = \underline{\Pi}_o^{(v)}$

*) La terna principale d'inerzia baricentrale

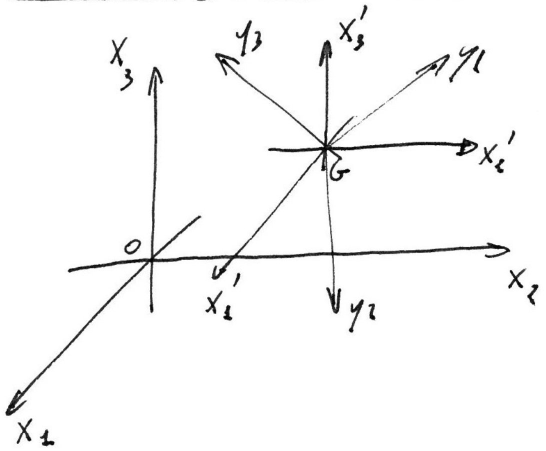
minimizza $\underline{R}^{(v)}$ e $\underline{\Pi}_o^{(v)}$ e inoltre se $\dot{\theta}$ è

costante

$\underline{\Pi}^{(v)} = -\underline{\Pi}^{(e)}$

$\underline{R}^{(v)} = -\underline{R}^{(e)}$

Corpo rigido libero



$\{O, x_1, x_2, x_3\}$ terna fissa

$\{G, x_1', x_2', x_3'\}$ terna baricentrale

$\{G, y_1, y_2, y_3\}$ terna solidale corpo rigido.

Il grado di libertà del corpo rigido è 6 i parametri lagrangiani sono le 3 coordinate di G e gli angoli di Eulero

$G \equiv (x_{1G}, x_{2G}, x_{3G})$, $\theta\ \psi\ \varphi$.

Il sistema di 9 equazioni differenziali in 9 incognite

$$A\dot{\omega}_1 - (B-C)\omega_2\omega_3 = M^{(e)}_{G, x_1}(\underline{x}_G, \dot{\underline{x}}_G, \theta, \psi, \varphi, \underline{\omega}, t)$$

$$B\dot{\omega}_2 - (C-A)\omega_1\omega_3 = M^{(e)}_{G, x_2}(\; " \qquad " \;)$$

$$C\dot{\omega}_3 - (A-B)\omega_1\omega_2 = M^{(e)}_{G, x_3}(\; " \qquad " \;)$$

$$m\ddot{x}_{1G} = R^{(e)}_{x_1}(\; " \qquad " \;)$$

$$m\ddot{x}_{2G} = R^{(e)}_{x_2}(\; " \qquad " \;)$$

$$m\ddot{x}_{3G} = R^{(e)}_{x_3}(\; " \qquad " \;)$$

$$\dot{\theta} = f_1(\underline{\omega}, \theta, \psi, \varphi)$$

$$\dot{\psi} = f_2(\; " \qquad " \;)$$

$$\dot{\varphi} = f_3(\; " \qquad " \;)$$

è in forma normale le variabili

$\vec{x}_G(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $\underline{\omega}(t)$ sono univocamente

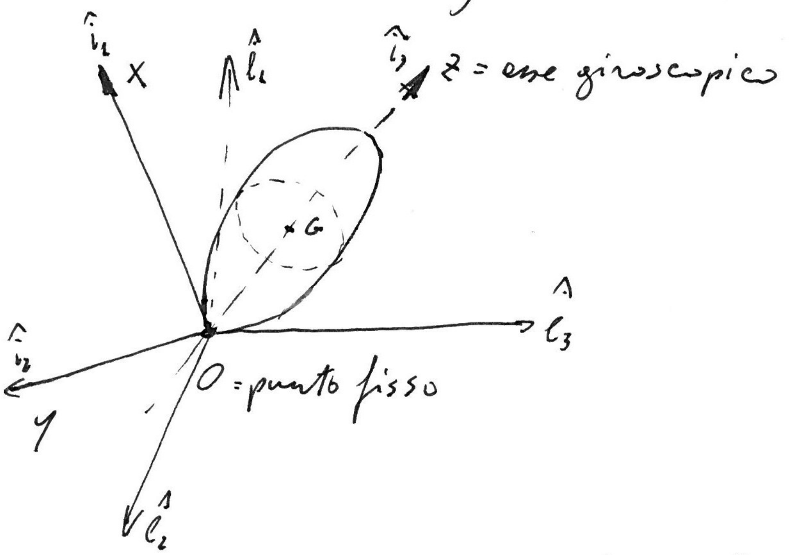
determinate note le condizioni iniziali

$\vec{x}_G(t_0)$, $\dot{\underline{x}}_G(t_0)$, $\underline{\omega}(t_0)$, $\theta(t_0)$, $\psi(t_0)$, $\varphi(t_0)$

Principio dell'effetto giroscopico

Diciamo che un corpo è a struttura giroscopica rispetto ad un punto O se l'ellissoide d'inerzia relativo a tale punto è rotondo.

Chiamo asse giroscopico la retta passante per O ortogonale al piano individuato dagli assi principali d'inerzia rispetto ai quali il momento d'inerzia vale $A = B$.



$\{O, x, y, z\}$ sistema solidale al giroscopio

Oss

Il giroscopio disegnato ha una forma di ellissoide circolare. L'ellissoide centrale d'inerzia E_G è rotondo per la struttura del giroscopio. Anche la terna scelta $\{O, x, y, z\}$ sarà rotonda principale d'inerzia. (Traslazione della terna centrale rispetto a z).

*) Nell'ipotesi che la sollecitazione esterna attiva agente sul giroscopio S abbia momento risultante nullo rispetto all'asse giroscopico z e che ad S sia impressa una forte rotazione iniziale intorno all'asse z allora

l'equazione

$$C\omega_3 \frac{d\hat{i}}{dt} = M_0^{(e)}$$ approssima il moto di S

a meno di un infinitesimo di ordine superiore

rispetto a $\dfrac{1}{\omega_3}$ -

((C = momento d'inerzia relativo a z).

<u>Ipotesi</u>

$$\begin{cases} A = B \\ M_z^{(e)} = 0 \qquad \omega_3 \gg 0 \\ O = \text{polo fisso.} \quad \omega_1(t=0) = \omega_2(t=0) = 0 \end{cases}$$

$$K_0 = I\underline{\omega} = A\omega_1 \hat{i}_1 + B\omega_2 \hat{i}_2 + C\omega_3 \hat{i}_3$$

Poiché $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$ mentre $\omega_3 \gg 0$

in un intorno di $t_0 = 0$ il momento K_0

può essere approssimato con

$$K_O \simeq C\omega_3 \hat{i}_3$$

l'equazione del moto in un intorno di $t_0 = 0$ può essere approssimata dall'equazione

$$\frac{dK_O}{dt} = M_O^{(e)} = C\omega_3 \frac{d\hat{i}_3}{dt}.$$

Supponiamo di applicare una forza $\vec{F}$ sull'asse giroscopico ad esempio in G (v. figura)

$$z_G \hat{i}_3 \times \vec{F} = C\omega_3 \frac{d\hat{i}_3}{dt}$$

$$\frac{d z_G \hat{i}_3}{dt} = z_G \frac{d\hat{i}_3}{dt}$$

sostituendo $\quad z_G \hat{i}_3 \times \vec{F} = \frac{C\omega_3}{z_G} \frac{d}{dt}\left(z_G \hat{i}_3\right)$

$$\frac{d}{dt}\left(z_G \hat{i}_3\right) = \frac{z_G^2}{C\omega_3}\, \hat{i}_3 \times \vec{F} = \underline{v}_G$$

(G punto qualsiasi dell'asse giroscopico)

*) La velocità con la quale si sposta l'asse giroscopico è tanto minore quanto più alta è ω_3.

*) Lo spostamento elementare di un punto dell'asse giroscopico non avviene in direzione della forza ma in direzione del suo momento.

Principi variazionali

Sia $F(x(t),t)$ il funzionale così definito

$$F(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt$$

Il valore di $F(x(t))$ cioè dell'integrale varia

al variare di $x(t)$.

Il problema consiste nel calcolare la funzione

$x(t) \in C^1(t_1, t_2)$ che rende stazionario $F(x(t))$.

Una generica funzione $x(t)$ è scritta nella

forma

$x_\varepsilon(t) = \bar{x}(t) + \varepsilon\, y(t)$ dove $\bar{x}(t)$ è una

funzione fissata $y(t)$ una generica funzione di classe $C^1(t_1, t_2)$ che verifica $y(t_1) = y(t_2) = 0$.

Affinché $\bar{x}(t)$ renda stazionario $F(x_\varepsilon(t))$ occorre

che $\left.\frac{d}{d\varepsilon} F(x_\varepsilon(t))\right|_{\varepsilon=0} = 0$ qualunque sia la

funzione y.

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} f(x_\varepsilon, \dot{x}_\varepsilon, t)\, dt\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$\left.\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\varepsilon} f(x_\varepsilon, \dot{x}_\varepsilon, t)\right|_{\varepsilon=0} = \left.\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_\varepsilon} \frac{d x_\varepsilon}{d\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_\varepsilon} \frac{d \dot{x}_\varepsilon}{d\varepsilon} \right\} dt\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

$$x_\varepsilon = \bar{x}(t) + \varepsilon y(t) \qquad \frac{d x_\varepsilon}{d\varepsilon} = y(t)$$

$$\dot{x}_\varepsilon = \dot{\bar{x}}(t) + \varepsilon \dot{y}(t) \qquad \frac{d \dot{x}_\varepsilon}{d\varepsilon} = \dot{y}(t)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_\varepsilon}\, y(t) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_\varepsilon}\, \dot{y}(t) \right\} dt \,\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

integrando per parti il secondo termine

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x_\varepsilon}\, y(t)\, dt \,\Big|_{\varepsilon=0} + \underbrace{\cancel{\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_\varepsilon}\, y(t) \right]_{t_1}^{t_2}}}_{=\,0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_\varepsilon}\, y(t)\, dt \,\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

essendo $y(t_1) = y(t_2) = 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\varepsilon} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_\varepsilon} \right) y(t)\, dt \,\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

L'uguaglianza deve essere verificata qualsiasi sia la funzione $y(t) \in C^1(t_1, t_2)$ pertanto deve essere

$$\frac{\partial f}{\partial x_\varepsilon} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_\varepsilon} \,\Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

il che equivale a dire

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{\bar{x}}} = 0$$

Tale condizione viene detta di Eulero.

*) Chiamo azione amiltoniana

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\, dt$$

<u>Principio variazionale di Hamilton</u>

Tra tutti i moti possibili sotto l'azione delle sollecitazioni si realizza il moto che rende stazionaria l'azione Hamiltoniana.

(Esso è unico note le condizioni iniziali $q(t_0)$; $\dot{q}(t_0)$)

$q_i^{\varepsilon} = \bar{q}_i + \varepsilon\, \eta_i(t) \qquad \eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0$

q^{ε} è un moto sincrono rispetto a $\bar{q}$.

Il valore di q^{ε} agli estremi t_1 e t_2 è lo stesso di $\bar{q}$.

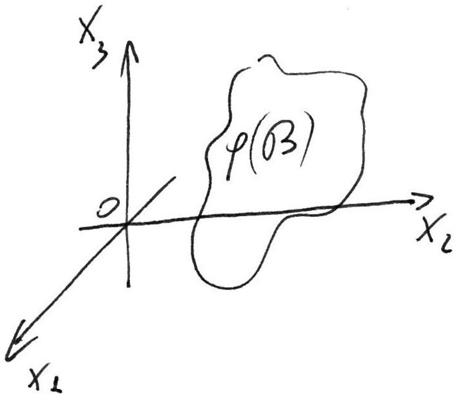
L'azione Hamiltoniana è stazionaria se e sol se vale la relazione di Eulero

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \eta_i(t)\, dt = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0 \qquad i = 1 \ldots n$$

Sono anche le equazioni di Lagrange che ammettono un'unica soluzione note le condizioni iniziali $q(t_0)$ e $\dot{q}(t_0)$.

Meccanica del continuo



Sia $\mathcal{E}_3$ lo spazio euclideo affine tridimensionale e $\mathcal{B}$ un generico corpo.

Si definisce localizzazione di $\mathcal{B}$ un'applicazione iniettiva

$$\varphi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{E}_3$$

$$: X \in \mathcal{B} \text{(particella di } \mathcal{B}) \longrightarrow P \in \mathcal{E}_3 .$$

Tale che $\varphi(\mathcal{B})$ sia un aperto connesso di $\mathcal{E}_3$ e la frontiera sia un insieme di superfici regolari di classe C_1.

Se φ e ψ sono due localizzazioni di $\mathcal{B}$

$\varphi \circ \psi^{-1}(\mathcal{B}) : \psi(\mathcal{B}) \longrightarrow \varphi(\mathcal{B})$ è detto spostamento

del corpo $\mathcal{B}$ dalla configurazione $\psi(\mathcal{B})$ alla

configurazione $\varphi(\mathcal{B})$

Se $\lambda : \varphi(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{E}_3$

l'applicazione $(\lambda \circ \varphi) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}_3$ è detta

deformazione di $\mathcal{B}$.

$A \subseteq \mathcal{B}$ è detto sottocorpo di $\mathcal{B}$

Se $A \subseteq \mathcal{B} \implies \varphi(A) \subseteq \varphi(\mathcal{B})$

Per ogni sottocorpo di $\mathcal{B}$ è possibile definire le funzioni suddette.

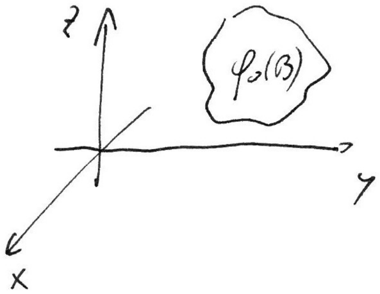
Esiste inoltre una funzione positiva sommabile $\rho(x) : \varphi(B) \to \mathbb{R}^+$ detta densità di massa tale che

$$\int_{\varphi(A)} \rho(x)\, dV = M(A) \geq 0$$ è detta massa totale di A.

*) Moto di un sistema continuo

Scelgo una localizzazione di $\mathcal{B}$

$\varphi_0(\mathcal{B})$ come configurazione di riferimento



$$\underline{\chi} : \varphi_0(\mathcal{B}) \times I_{[a,b]} \longrightarrow \mathcal{E}_3$$

$$: (\underline{X}, t) \longrightarrow \underline{x} \in \mathcal{E}_3$$

$\underline{\chi} \in C^2$ rispetto alle variabili $\underline{X}, t$ è detto

spostamento di $\mathcal{B}$.

Fissato t $\quad \underline{\chi}_t(\underline{X}, t) = \underline{x}$ è la posizione della

particella $\underline{X}$ nel tempo t.

$\varphi_t(\mathcal{B})$ è la configurazione di $\mathcal{B}$ all'istante t.

*) Per la proprietà di incomprimibilità della materia fissato t se $\underline{X}_1 \neq \underline{X}_2$

$\underline{\chi}(\underline{X}_1, t) \neq \underline{\chi}(\underline{X}_2, t)$ cioè $\underline{x}_1 \neq \underline{x}_2$

l'applicazione $\underline{\chi}$ è iniettiva pertanto invertibile

$$\underline{x} = \underline{\chi}(\underline{X}, t)$$

$$\underline{X} = \underline{\chi}^{-1}(\underline{x}, t)$$

Le variabili $\underline{X}$ sono dette variabili lagrangiane mentre le variabili $\underline{x}$ euleriane.

Fissato $\underline{X}$ $\quad \underline{\chi}(\underline{X}, t) = \underline{x}$ mi definisce

la posizione assunta dalla particella

$\underline{X} \in \mathcal{C}_0(\mathcal{B})$ configurazione iniziale nel tempo t.

Il moto di tale particella rappresentato

dalla funzione $\underline{\chi}$ è detto Lagrangiano.

Fissato $\underline{x}$ $\quad \underline{\chi}^{-1}(\underline{x}, t) = \underline{X}$ rappresenta

la particella $\underline{X} \in \mathcal{C}_0(\mathcal{B})$ che all'istante

t passa per il punto $\underline{x}$.

Il moto rappresentato dalla funzione

$\underline{\chi}^{-1}(\underline{x}, t)$ è detto Euleriano.

$\tilde{f}(\underline{X})$ = funzione nelle variabili lagrangiane

$\hat{f}(\underline{x})$ = funzione nelle variabili euleriane.

$$\tilde{f}(\underline{X},t) = \hat{f}(\chi^{-1}(\underline{x},t),t)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(\underline{X},t) = \frac{d}{dt}\hat{f}(\underline{x},t) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i} \hat{v}_i = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \nabla_x \hat{f}\, \hat{v}$$

In particolare $\tilde{\underline{v}} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{\chi}(\underline{X},t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{\underline{\chi}}(\underline{\chi}^{-1}(\underline{x},t),t) +$

$$+ \nabla_x \hat{\underline{\chi}}(\underline{\chi}^{-1}(\underline{x},t),t) \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$$

oppure

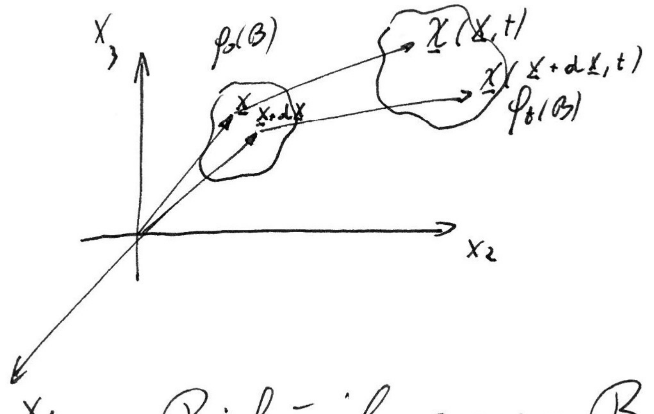
$$\tilde{a} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\hat{v} + \nabla_{\mathbf{x}} \hat{v}\, \hat{v}.$$

Fissato $\underline{X}$ $\tilde{v}(\underline{X},t)$ rappresenta la velocità della particella $\underline{X}$ al variare del tempo.

Fissato $\underline{x}$ $\hat{v}(\underline{x},t)$ rappresenta la velocità posseduta dalla particella che nel tempo t passa per $\underline{x}$.

$\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$ rappresenta variazione posizione dell' osservatore nel sistema Euleriano.

*) Gradiente di deformazione



Poichè il corpo B è deformabile non è detto che $d(\underline{X}, \underline{X}+d\underline{X}) = d(\underline{\chi}(\underline{X},t), \underline{\chi}(\underline{X}+d\underline{X},t))$

d = distanza.

$$\underline{\chi}(\underline{X}+d\underline{X},t) - \underline{\chi}(\underline{X},t) = d\underline{x} = \text{deformazione.}$$

$$\underline{\chi}(\underline{X}+d\underline{X},t) - \underline{\chi}(\underline{X},t) = \nabla_X \underline{\chi}(\underline{X},t)\, d\underline{X} + o(|d\underline{X}|)$$

Definisco gradiente di deformazione

$$\underset{\sim}{F} = \nabla_X \underline{\chi}(\underline{X},t) \qquad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

Se $t=0$ configurazione iniziale

$$F_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \text{matrice identità.}$$

Se $d\underline{X}$ è sufficientemente piccolo le deformazioni

$$d\underline{x} \simeq \underset{\sim}{F}\, d\underline{X} .$$

*) Tensore di dilatazione

$|d\underline{x}|^2 = d\underline{x} \cdot d\underline{x} = (\underset{\sim}{F}\, d\underline{X}) \cdot (\underset{\sim}{F}\, d\underline{X}) =$

$= d\underline{X} \cdot ({}^t\underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{F})\, d\underline{X}$

Indico con $\underset{\sim}{C} = {}^t\underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{F}$ il tensore di dilatazione o di Cauchy-Green.

$|d\underline{x}|^2 = d\underline{X} \cdot C\, d\underline{X}$

1) Il tensore C è definito positivo infatti

$(C\, d\underline{X}) \cdot d\underline{X} = |d\underline{x}|^2 > 0 \quad \forall\, d\underline{X}$

2) Il Tensore C è simmetrico quindi diagonalizzabile

${}^t({}^t\underset{\sim}{F}\, F) = {}^tF\, F$

Indico con allungamento unitario lo scalare

$$\delta = \frac{|d\underline{x}| - |d\underline{X}|}{|d\underline{X}|} = \frac{|d\underline{x}|}{|d\underline{X}|} - 1$$

$$|d\underline{x}| = \sqrt{d\underline{X} \cdot C\, d\underline{X}} = \sqrt{|d\underline{X}|\hat{\imath} \cdot C\, |d\underline{X}|\hat{\imath}}$$

$\hat{\imath}$ = versore direzione di $d\underline{X}$

$$\delta = \sqrt{\hat{\imath} \cdot C\, \hat{\imath}} - 1$$

*) Gradiente di velocità

Si definisce gradiente di velocità la grandezza euleriana $\underset{\sim}{L} = \nabla_x \hat{v}$

$$L_{ij} = \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j}$$ vale la relazione

$$\underset{\sim}{\dot{F}} = \frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial t} = \underset{\sim}{L} \cdot \underset{\sim}{F}$$

$$\left(\frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial t}\right)_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j}\hat{v}_i = \frac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_h} \cdot \frac{\partial x_h}{\partial X_j} =$$

$$= L_{ih} \cdot F_{hj}$$

Il tensore $D = \mathrm{Sym}(L) = \frac{1}{2}(L + {}^tL)$ è detto

Tensore velocità di deformazione esprime la variazione nell'unità di tempo di $|d\underline{x}|^2$.

$$\frac{d}{dt}|d\underline{x}|^2 = \frac{d}{dt}\left(d\underline{x}\cdot d\underline{x}\right) = 2\,d\underline{x}\cdot\frac{d}{dt}\,d\underline{x} =$$

$$= 2\,d\underline{x}\;\frac{d}{dt}\left(\underset{\sim}{F}\,d\underline{X}\right) = 2\,d\underline{x}\;\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{F}\,d\underline{X}$$

nella derivazione $d\underline{X}$ = costante.

$$\frac{d}{dt}|d\underline{x}|^2 = 2\,d\underline{x}\cdot L\,d\underline{x} = 2\,{}^tL\,d\underline{x}\cdot d\underline{x}$$

$$= 2\,d\underline{x}\left(\frac{L+{}^tL}{2}\right)d\underline{x} = 2\,d\underline{x}\cdot D\,d\underline{x}$$

Quando $\underset{\sim}{D}=0$ non vi è allungamento

del vettore $d\underline{x}$.

*) Condizione necessaria e sufficiente affinché l'atto di moto sia localmente rigido è che $\underset{\sim}{D}=0$.

Considero la grandezza Euleriana $\underline{\hat{v}}(\underline{x},t)$

$$\underline{\hat{v}}(\underline{x},t)=\underline{\hat{v}}(\underline{x}_0,t)+\underbrace{\nabla\underline{\hat{v}}(x_0,t)}_{L}(\underline{x}-\underline{x}_0)+o(x,x_0)$$

$$L=D+\Omega \qquad D=Sym(L)$$

$$\Omega=Emy(L)=\frac{L-{}^tL}{2}$$

$$\underline{\hat{v}}(\underline{x},t)=\underline{\hat{v}}(\underline{x}_0,t)+\underset{\sim}{D}(\underline{x}_0,t)(\underline{x}-\underline{x}_0)+\underset{\sim}{\Omega}(\underline{x}_0,t)(x-x_0)$$

Se $\underline{x}$ è sufficientemente vicino a $\underline{x}_0$ l'infinitesimo di ordine superiore può essere trascurato.

Poiché $\underset{\sim}{\Omega} \in \mathrm{Emy}(L)$

$$\underset{\sim}{\Omega}\,(\underline{x}-\underline{x}_0) = \underline{\omega} \times (\underline{x}-\underline{x}_0)$$

$$\underline{\omega} \equiv \left(-\Omega_{23},\ \Omega_{13},\ -\Omega_{12}\right)$$

$$\hat{\underline{v}}(\underline{x},t) = \hat{\underline{v}}(\underline{x}_0,t) + \underset{\sim}{D}\,(\underline{x}-\underline{x}_0) + \underline{\omega}\times(\underline{x}-\underline{x}_0)$$

Il moto è rigido in un intorno di $\underline{x}_0$ se e solo se $\underset{\sim}{D}=0$.

*) Il vettore $\underline{\omega}$ è detto vorticità.

Ricordando che $\underline{\Omega} = \frac{1}{2}\left(L - {}^tL\right)$ e che

$L_{ij} = \dfrac{\partial \hat{v}_i}{\partial x_j}$ otteniamo che $\underline{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \hat{v}$

Se $\nabla \times \hat{v} = 0$ cioè $\underline{\omega} = 0$ il moto è detto <u>irrotazionale</u> in tal caso il campo di velocità non presenta vortici.

Teorema del trasporto

Supponiamo di voler eseguire la seguente derivata

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(B)} \hat{f}(\underline{x},t)\, dv_t$$

dv_t = elemento di volume della configurazione $\varphi_t(B)$.

Poiché il dominio di definizione dell'integrale di volume $\varphi_t(B)$ varia con il tempo non è possibile portare la derivata sotto il segno di integrale.

Posso però operare un cambiamento di variabili e ricondurmi alla configurazione iniziale $\varphi_0(B)$.

La matrice Jacobiana associata al cambiamento di variabili è $F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$; $\det \underset{\sim}{F} = J$

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(B)} \hat{f}(\underline{x},t)\, dv_t = \frac{d}{dt}\int_{\varphi_0(B)} \tilde{f}(\underline{X},t)\, J\, dv_0$$

posso portare la derivata sotto il segno di integrale essendo la configurazione $\varphi_0(B)$ indipendente dal tempo.

Poiché le coordinate lagrangiane sono fisse

$$= \int_{\varphi_0(B)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{f}(\underline{X},t)\, J\right) dv_0 =$$

$$= \int_{\varphi_0(B)} \frac{\partial \tilde{f}(\underline{X},t)}{\partial t} J + \frac{\partial J}{\partial t} \tilde{f}(\underline{X},t)\, dv_0$$

consideriamo ora la grandezza $\dot{J} = \frac{\partial}{\partial t} J = \frac{\partial}{\partial t} \det F$

$$\frac{\partial}{\partial t} \det F = \det F \cdot \dot{F} : {}^tF^{-1}$$

$:$ = prodotto scalare di due tensori

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \cdot (L F) : {}^tF^{-1} = J\, t_2 \left(L F \circ F^{-1}\right) = J\, t_2 (L) =$$

$$= J L_{ii} = J \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = J \operatorname{div}(\hat{v}) = J \nabla_x \hat{v}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(B)} \hat{f}(\underline{x},t)\, dv_t = \int_{\varphi_0(B)} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(\underline{X},t)\, J + \tilde{f}(\underline{X},t)\, \nabla_x \hat{v}\, J\, dv_0 =$$

$$= \int_{\varphi_0(B)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(\underline{X},t) + \tilde{f}(\underline{X},t)\, \nabla_x \hat{v}\right) J\, dv_0$$ ritornando in

coordinate euleriane

$$= \int_{\varphi_t(B)} \frac{d}{dt}\hat{f}(\underline{x},t) + \hat{f}(\underline{x},t)\, \nabla_x \hat{v}\, dv_t =$$

$$= \int_{\varphi_t(B)} \frac{\partial}{\partial t}\hat{f}(\underline{x},t) + \nabla_x \hat{f}(\underline{x},t)\, \hat{v} + \hat{f}(\underline{x},t)\, \nabla_x \hat{v}\, dv_t$$

$$= \int_{\varphi_t(B)} \frac{\partial}{\partial t}\hat{f}(\underline{x},t) + \nabla_x\left(\hat{f}(\underline{x},t)\, \hat{v}\right) dv_t$$

Il teorema del trasporto afferma che

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(B)} \hat{f}(\underline{x},t)\, dv_t = \int_{\varphi_t(B)} \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(\underline{x},t) + \nabla_x\left(\hat{f}(\underline{x},t)\,\hat{v}\right) dv_t$$

Equazione di continuità della massa

Forma euleriana.

Poiché la massa si conserva

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(A)} \hat{\rho}(\underline{x},t)\, dv_t = 0$$ per il teorema del trasporto

$$\int_{\varphi_t(A)} \frac{\partial \hat{\rho}(\underline{x},t)}{\partial t} + \nabla\left(\hat{\rho}(\underline{x},t)\,\hat{v}\right) dv_t = 0$$

Per l'arbitrarietà di A sottocorpo di B deve

essere

$$\frac{\partial \hat{\rho}(\underline{x},t)}{\partial t} = -\nabla\left(\hat{\rho}(\underline{x},t)\,\hat{v}\right)$$

(equazione di continuità della massa in

forma euleriana.

In forma lagrangiana osservo che per la

conservazione della massa vale

$$dm = \tilde{\rho}(\underline{X}, 0)\, dv_0 = \hat{\rho}(\underline{x}, t)\, dv_t = \tilde{\rho}(\underline{X}, t)\, J\, dv_0$$

da cui $\tilde{\rho}(\underline{X}, 0) = \tilde{\rho}(\underline{X}, t)\, J$

(equazione di continuità della massa in

forma lagrangiana.

Considero

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(A)} \hat{f}(\underline{x},t)\,dm = \frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(A)} \hat{f}(\underline{x},t)\,\hat{\rho}(\underline{x},t)\,dv_t =$$

$$= \int_{\varphi_t(A)} \frac{\partial}{\partial t}\left(\hat{f}\hat{\rho}\right) + \nabla\left(\hat{f}\hat{\rho}\,\hat{\underline{v}}\right) dv_t =$$

$$= \int_{\varphi_t(A)} \hat{\rho}\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \hat{f}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \nabla(\hat{f}\hat{\rho})\,\hat{\underline{v}} + \hat{f}\hat{\rho}\,\nabla\hat{\underline{v}}\;dv_t$$

$$= \int_{\varphi_t(A)} \hat{\rho}\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \hat{f}\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \hat{f}\,\nabla\hat{\rho}\,\hat{\underline{v}} + \hat{\rho}\,\nabla\hat{f}\,\hat{\underline{v}} + \hat{f}\hat{\rho}\,\nabla\hat{\underline{v}}\;dv_t$$

$$= \int_{\varphi_t(A)} \hat{f}\left(\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \nabla\hat{\rho}\,\hat{\underline{v}} + \hat{\rho}\,\nabla\hat{\underline{v}}\right) dv_t + \int_{\varphi_t(A)} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \nabla\hat{f}\,\hat{\underline{v}}\right)\hat{\rho}\,dv_t$$

$$= \int_{\varphi_t(A)} \hat{f}\left(\underbrace{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \nabla(\hat{\rho}\,\underline{\hat{v}})}_{=\,0}\right) dv_t + \int_{\varphi_t(A)} \frac{d}{dt}\hat{f}\ \hat{\rho}\, dv_t$$

(eq. continuité masse)

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(A)} \hat{f}(\underline{x},t)\, dm = \int_{\varphi_t(A)} \frac{d}{dt}\hat{f}(\underline{x},t)\, dm$$

Tensore degli sforzi di Cauchy

Considero la I equazione della dinamica

$$\frac{d}{dt} Q_A = R_A^{(e)} + R_A^{(v)} .$$

Per un corpo continuo la I equazione della dinamica può essere espressa nella forma

$$\frac{d}{dt}\int_{\varphi_t(A)} \hat{v}(\underline{x},t)\, dm = \int_{\varphi_t(A)} \hat{b}(\underline{x},t)\, \hat{\rho}(\underline{x},t)\, d v_t + \int_{\partial\varphi_t(A)} \hat{t}(\underline{x},t,\underline{n})\, d\sigma_t$$

Il campo vettoriale $\hat{b}$ rappresenta la densità delle forze a distanza agenti sull'elemento di volume dv_t (forze gravitazionali, magnetiche, elettriche, forze peso etc...).

Il campo vettoriale $\hat{t}(\underline{x}, t, \underline{n})$ rappresenta la pressione esercitata sulla superficie infinitesima $d\sigma_t$ del sottocorpo A ad opera del continuo circostante alla sua superficie esterna (∂A = frontiera di A = sup. esterna).

$\hat{t}(\underline{x}, t, \underline{n})$ detto sforzo specifico dipende anche dall'orientamento della superficie e quindi dalla sua normale $\underline{n}$.

È possibile dimostrare che la dipendenza di $\hat{t}(\underline{x}, t, \underline{n})$ dalla normale alla superficie è lineare pertanto si può scrivere

$$\hat{t}(\underline{x}, t, \underline{n}) = \underset{\sim}{T}(\underline{x}, t)\, \underline{n}$$

$\underset{\sim}{T}(\underline{x}, t)$ è detto tensore di sforzo di Cauchy.

<u>Dim</u>

Considero la I equazione della dinamica

$$\frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(A)} \hat{v}(\underline{x}, t) \underbrace{\hat{\rho}(\underline{x}, t)\, d\sigma_t}_{dm} = \int_{\varphi_t(A)} \hat{b}(\underline{x}, t) \hat{\rho}(\underline{x}, t)\, d\sigma_t + \int_{\partial\varphi_t(A)} \hat{t}(\underline{x}, t\, \underline{n})\, d\sigma_t$$

è possibile portare la derivata sotto il segno di integrale se integro in dm.

$$\int_{\varphi_t(A)} \frac{d}{dt} \hat{v}(\underline{x},t)\, \hat{\rho}(\underline{x},t)\, dv_t = \int_{\varphi_t(A)} \hat{b}(\underline{x},t)\, \hat{\rho}(\underline{x},t)\, dv_t +$$

$$+ \int_{\partial\varphi_t(A)} \hat{t}(\underline{x},t,\underline{n})\, d\sigma_t$$

$$\int_{\varphi_t(A)} (\hat{a} - \hat{b})\, \hat{\rho}\, dv_t = \int_{\partial\varphi_t(A)} \hat{t}\, d\sigma_t \quad (*) \qquad \hat{a} = \frac{d}{dt} \hat{v}(\underline{x},t)$$

Per il teorema della media integrale

$$\int_{\varphi_t(A)} \left(\hat{a}(\underline{x},t) - \hat{b}(\underline{x},t)\right) \hat{\rho}(\underline{x},t)\, dv_t = \left(\hat{a}(\underline{x}^*,t) - \hat{b}(\underline{x}^*,t)\right) \hat{\rho}(\underline{x}^*,t)\, V_{\varphi_t(A)}$$

dove $\underline{x}^*$ è un punto di $\varphi_t(A)$.

Facendo tendere il volume di integrazione a zero si ha

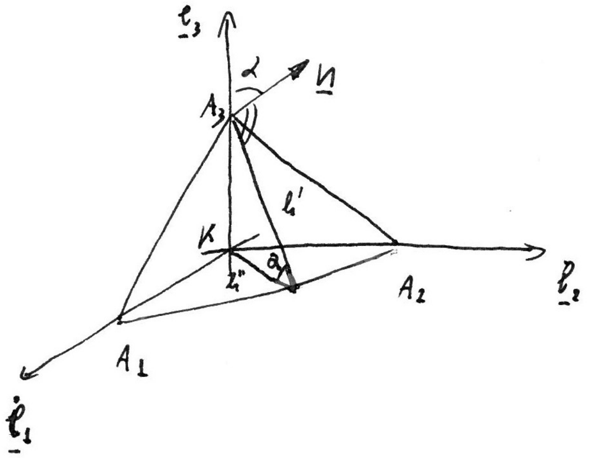
$$\lim_{v_{\varphi_t(A)} \to 0} \frac{1}{v_{\varphi_t(A)}} \int_{\varphi_t(A)} \hat{\rho}\,(\hat{a} - \hat{b})\, dv = \left(\hat{a}(\underline{x}^*,t) - \hat{b}(\underline{x}^*,t)\right)\hat{\rho}(\underline{x}^*,t)$$

dove $\underline{x}^*$ è il punto a cui si riduce il volume $v_{\varphi_t(A)}$ fatto tendere a zero.

Dall'uguaglianza $(*)$ segue che

$$\lim_{v_{\varphi_t(A)} \to 0} \frac{1}{v_{\varphi_t(A)}} \int_{\partial \varphi_t(A)} \hat{t}(\underline{x},t,\underline{n})\, dS_t = \underline{\phi}(x^*,t)$$

Consideriamo ora un tetraedro come in figura



$S_1 = A_2 K A_3$ normale $-\underline{i}_1$ $\partial\varphi(A) = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S$

$S_2 = A_1 K A_3$ " " $-\underline{i}_2$

$S_3 = A_1 K A_2$ " " $-\underline{i}_3$

$S = A_1 A_2 A_3$ " " $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$

Valgono le seguenti relazioni

$V = \frac{1}{3} S h$ dove h è l'altezza relativa a S.

$S = \frac{1}{2} \overline{A_1 A_2}\, h'$ $S_3 = \frac{1}{2} \overline{A_1 A_2}\, h''$

$$\frac{S_3}{S} = \frac{h''}{h'} = \cos\alpha = \underline{n}\,\underline{e}_3 = n_3$$

In generale $S_i = n_i S$ $i = 1, 2, 3$.

Considero le grandezze

$$\frac{1}{S}\int_{\partial\varphi(A)} \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n})\, d\sigma$$ se faccio tendere S a zero

tale grandezza sarà nulla essendo $\int_{\partial\varphi(A)} \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n})\, d\sigma$

un infinitesimo dello stesso ordine di $V\varphi(A)$.

$$\frac{1}{S}\int_{\partial\varphi(A)} \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n})\, d\sigma = \frac{h}{3V}\int_{\partial\varphi(A)} \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n})\, d\sigma$$

facendo tendere h a zero anche V tende a zero

così ha $$\lim_{h\to 0} h \cdot \frac{1}{3V}\int_{\partial\varphi(A)} \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n})\, d\sigma =$$

$$= \lim_{h\to 0} h \cdot \phi(\underline{x}^*, t, \underline{n}) = 0.$$

me

$$\frac{1}{S}\int_{\partial\varphi(A)} \underline{t}(\underline{x},t,\underline{n})\,d\sigma = \frac{1}{S}\int_{S} \underline{t}(\underline{x},t,\underline{n})\,d\sigma + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{S}\int_{S_i} \underline{t}(\underline{x},t,\underline{n}_i)\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{S}\int_{S} \underline{t}(\underline{x},t,\underline{n})\,d\sigma + \sum_{i=1}^{3} \frac{n_i}{S_i}\int_{S_i} \underline{t}(\underline{x},t,-\underline{e}_i)\,d\sigma$$

$$= \frac{1}{S}\int_{S} \underline{t}(\underline{x},t,\underline{n})\,d\sigma - \sum_{i=1}^{3} \frac{n_i}{S_i}\int_{S_i} \underline{t}(\underline{x},t,\underline{e}_i)\,d\sigma$$

considerando che $\underline{t}(\underline{x},t,-\underline{n}) = -\underline{t}(\underline{x},t,\underline{n})$

facendo tendere S e quindi S_i a zero e

applicando il teorema della media integrale

$$\underline{t}(\underline{x}^*,t,\underline{n}) - \sum_{i=1}^{3} n_i\,\underline{t}(\underline{x}^*,t,\underline{e}_i) = 0$$

Il tensore di sforzo $\underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n})$ è combinazione lineare di n_i pertanto si ha

$$t(\underline{x}, t, \underline{n}) = \underset{\sim}{T}(\underline{x}, t)\, \underline{n}$$

$\underset{\sim}{T}$ è detto tensore di sforzo o di Cauchy.