Prove esame 2019

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO
(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Tema di: MATEMATICA e FISICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f(x) = ax^2 - x + b \qquad\qquad g(x) = (ax + b)\, e^{2x - x^2}.$$

- Provare che, comunque siano scelti i valori di a e b in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$, la funzione g ammette un massimo e un minimo assoluti. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali i grafici delle due funzioni f e g si intersecano nel punto $A(2, 1)$.

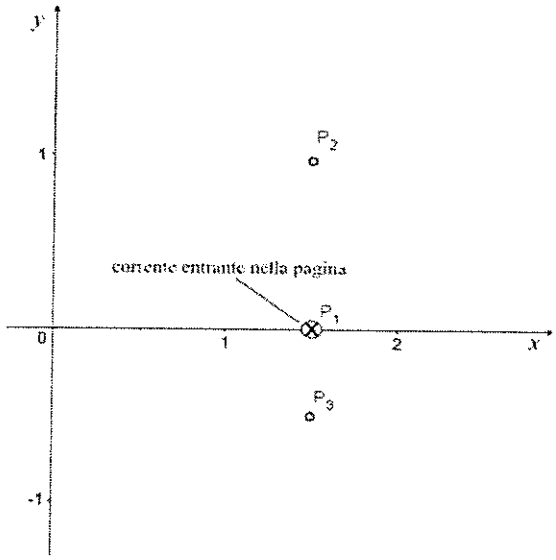
- Si assuma, d'ora in avanti, di avere $a = 1$ e $b = -1$. Studiare le due funzioni così ottenute, verificando che il grafico di g ammette un centro di simmetria e che i grafici di f e g sono tangenti nel punto $B(0, -1)$. Determinare inoltre l'area della regione piana S delimitata dai grafici delle funzioni f e g.

- Si supponga che nel riferimento Oxy le lunghezze siano espresse in metri (m). Si considerino tre fili conduttori rettilinei disposti perpendicolarmente al piano Oxy e passanti rispettivamente per i punti:

  $P_1\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, $P_2\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ e $P_3\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

  I tre fili sono percorsi da correnti continue di intensità $i_1 = 2{,}0$ A, i_2 e i_3. Il verso di i_1 è indicato in figura mentre gli altri due versi non sono indicati.

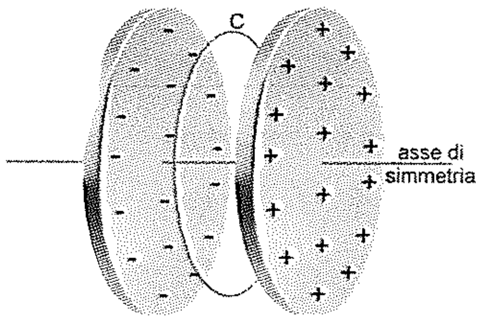
  Stabilire come varia la circuitazione del campo magnetico, generato dalle correnti i_1, i_2 e i_3, lungo il contorno di S, a seconda dell'intensità e del verso di i_2 e i_3.



- Si supponga, in assenza dei tre fili, che il contorno della regione S rappresenti il profilo di una spira conduttrice di resistenza $R = 0{,}20\ \Omega$. La spira è posta all'interno di un campo magnetico uniforme di intensità $B = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ T perpendicolare alla regione S. Facendo ruotare la spira intorno all'asse x con velocità angolare ω costante, in essa si genera una corrente indotta la cui intensità massima è pari a 5,0 mA. Determinare il valore di ω.

PROBLEMA 2

Un condensatore piano è formato da due armature circolari di raggio R, poste a distanza d, dove R e d sono espresse in metri (m). Viene applicata alle armature una differenza di potenziale variabile nel tempo e inizialmente nulla.



All'interno del condensatore si rileva la presenza di un campo magnetico $\vec{B}$. Trascurando gli effetti di bordo, a distanza r dall'asse di simmetria del condensatore, l'intensità di $\vec{B}$, espressa in tesla (T), varia secondo la legge:

$$|\vec{B}| = \frac{kt}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}}\, r \qquad \text{con } r \leq R$$

dove a e k sono costanti positive e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale, espresso in secondi (s).

- Dopo aver determinato le unità di misura di a e k, spiegare perché nel condensatore è presente un campo magnetico anche in assenza di magneti e correnti di conduzione. Qual è la relazione tra le direzioni di $\vec{B}$ e del campo elettrico $\vec{E}$ nei punti interni al condensatore?

- Si consideri, tra le armature, un piano perpendicolare all'asse di simmetria. Su tale piano, sia C la circonferenza avente centro sull'asse e raggio r. Determinare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo C e da essa ricavare che il flusso di $\vec{E}$, attraverso la superficie circolare delimitata da C, è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{2k\pi r^2}{\mu_0 \varepsilon_0}\left(\frac{-1}{\sqrt{t^2 + a^2}} + \frac{1}{a}\right)$$

  Calcolare la d.d.p. tra le armature del condensatore.
  A quale valore tende $|\vec{B}|$ al trascorrere del tempo? Giustificare la risposta dal punto di vista fisico.

- Per $a > 0$, si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = -\frac{t}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$. Verificare che la funzione $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a}$ è la primitiva di f il cui grafico passa per l'origine. Studiare la funzione F, individuandone eventuali simmetrie, asintoti, estremi. Provare che F presenta due flessi nei punti di ascisse $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a$ e determinare le pendenze delle rette tangenti al grafico di F in tali punti.

- Con le opportune motivazioni, dedurre il grafico di f da quello di F, specificando cosa rappresentano le ascisse dei punti di flesso di F per la funzione f. Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico di f, l'asse delle ascisse e le rette parallele all'asse delle ordinate passanti per gli estremi della funzione. Fissato $b > 0$, calcolare il valore di $\int_{-b}^{b} f(t)\, dt$.

QUESITI

1. Una data funzione è esprimibile nella forma $f(x) = \frac{p(x)}{x^2+d}$, dove $d \in \mathbb{R}$ e $p(x)$ è un polinomio. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascisse 0 e $12/5$ ed ha come asintoti le rette di equazione $x = 3$, $x = -3$ e $y = 5$. Determinare i punti di massimo e di minimo relativi della funzione f.

2. È assegnata la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots + x^{2017} + x^{2019}$$

Provare che esiste un solo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $g(x_0) = 0$. Determinare inoltre il valore di

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{1{,}1^{\,x}}$$

3. Tra tutti i parallelepipedi rettangoli a base quadrata, con superficie totale di area S, determinare quello per cui la somma delle lunghezze degli spigoli è minima.

4. Dati i punti $A(2, 0, -1)$ e $B(-2, 2, 1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T(-10, 8, 7)$ appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S.

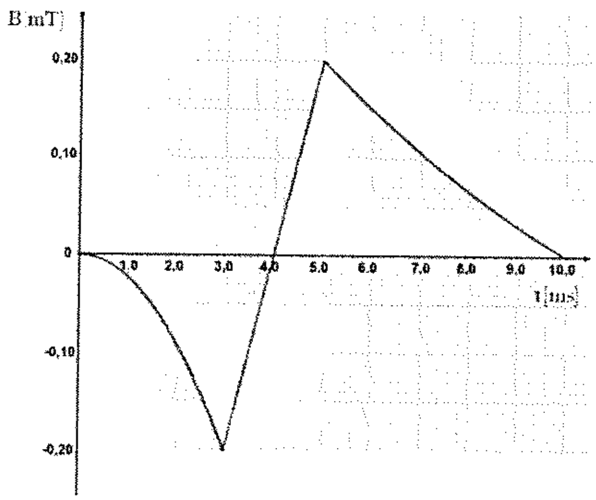
5. Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.
   - Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
   - Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
   - Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

6. Una spira di rame, di resistenza $R = 4{,}0\ \mathrm{m\Omega}$, racchiude un'area di $30\ \mathrm{cm}^2$ ed è immersa in un campo magnetico uniforme, le cui linee di forza sono perpendicolari alla superficie della spira. La componente del campo magnetico perpendicolare alla superficie varia nel tempo come indicato in figura. Spiegare la relazione esistente tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta. Calcolare la corrente media che passa nella spira durante i seguenti intervalli di tempo:

   a) da 0,0 ms a 3,0 ms;

   b) da 3,0 ms a 5,0 ms;

   c) da 5,0 ms a 10 ms.



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

7. In laboratorio si sta osservando il moto di una particella che si muove nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento ad esso solidale. All'istante iniziale, la particella si trova nell'origine e in un intervallo di tempo di 2,0 ns percorre una distanza di 25 cm. Una navicella passa con velocità $v = 0{,}80\ c$ lungo la direzione x del laboratorio, nel verso positivo, e da essa si osserva il moto della stessa particella. Determinare le velocità medie della particella nei due sistemi di riferimento. Quale intervallo di tempo e quale distanza misurerebbe un osservatore posto sulla navicella?

8. Un protone penetra in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $|\vec{B}| = 1{,}00\ \text{mT}$. Esso inizia a muoversi descrivendo una traiettoria ad elica cilindrica, con passo costante $\Delta x = 38{,}1\ \text{cm}$, ottenuta dalla composizione di un moto circolare uniforme di raggio $r = 10{,}5\ \text{cm}$ e di un moto rettilineo uniforme. Determinare il modulo del vettore velocità e l'angolo che esso forma con $\vec{B}$.

COSTANTI FISICHE		
carica elementare	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}$
massa del protone	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$
velocità della luce	c	$2{,}998 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Probleme n° 1

$\boxed{\text{Considero le funzioni}}$

$$g(x) = (ax+b)\,e^{2x-x^2}$$

$$f(x) = ax^2 - x + b$$

Impongo l'intersezione nel punto $A \equiv (2,1)$

$$\begin{cases} (2a+b)\,e^{4-4} = 1 \\ a4 - 2 + b = 1 \quad (\text{passaggio } f(x) \text{ per } A) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 4a + b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + 1 - 2a = +3 \\ 2a = +2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} g(x) = (x-1)\,e^{2x-x^2} \\ f(x) = x^2 - x - 1 \end{cases} \Longrightarrow \text{passaggio per } A \equiv (2,1)$$

Studiare la funzione

$$g(x) = (x-1)\, e^{2x - x^2}$$

Considero un cambio di variabile

$$x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$$

$$g(t) = t\, e^{2(t+1) - (t+1)^2} =$$

$$= t\, e^{\cancel{2t} + 2 - t^2 - 1 - \cancel{2t}} = t\, e^{1-t^2}$$

$$\boxed{g(t) = t\, e^{(1-t^2)}}$$

$\boxed{g(t) \text{ è una funzione dispari infatti}}$

$$g(-t) = -t\, e^{(1-t^2)} = -g(t)$$

$g(t) = t\, e^{(1-t^2)}$

(e)

→ Studio la funzione per $t > 0$ e poi sfrutto la simmetria

$$\lim_{t\to\infty} t\, e^{(1-t^2)} = \lim_{t\to\infty} t\, \frac{e}{e^{t^2}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

applico l'Hopital

$$\lim_{t\to\infty} t\, e^{(1-t^2)} = \lim_{t\to\infty} \frac{et}{e^{t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t\to\infty} \frac{e}{e^{t^2}\cdot 2t} = \frac{e}{\infty} = \emptyset$$

c

$$g(t) = t\, e^{(1-t^2)}$$

$$g'(t) = e^{(1-t^2)} + t\, e^{(1-t^2)}(-2t)$$

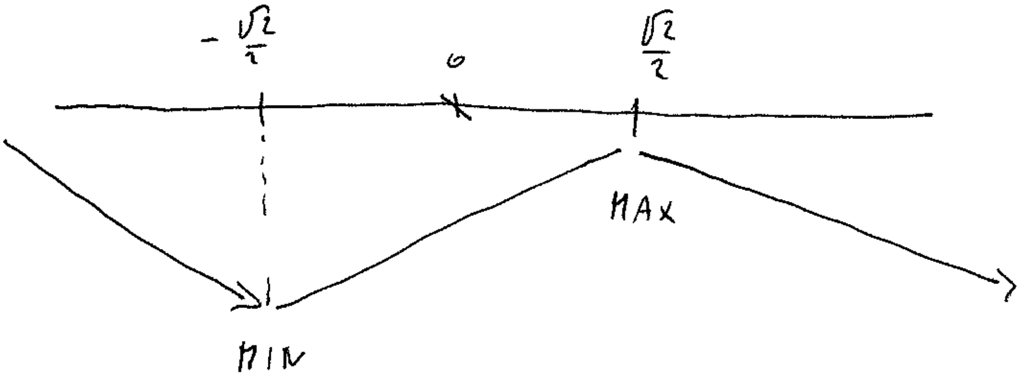
$$= e^{(1-t^2)}\left[1 + t(-2t)\right] =$$

$$= e^{(1-t^2)}\left[1 - 2t^2\right]$$

$$g'(t) > 0 \implies 1 - 2t^2 > 0$$

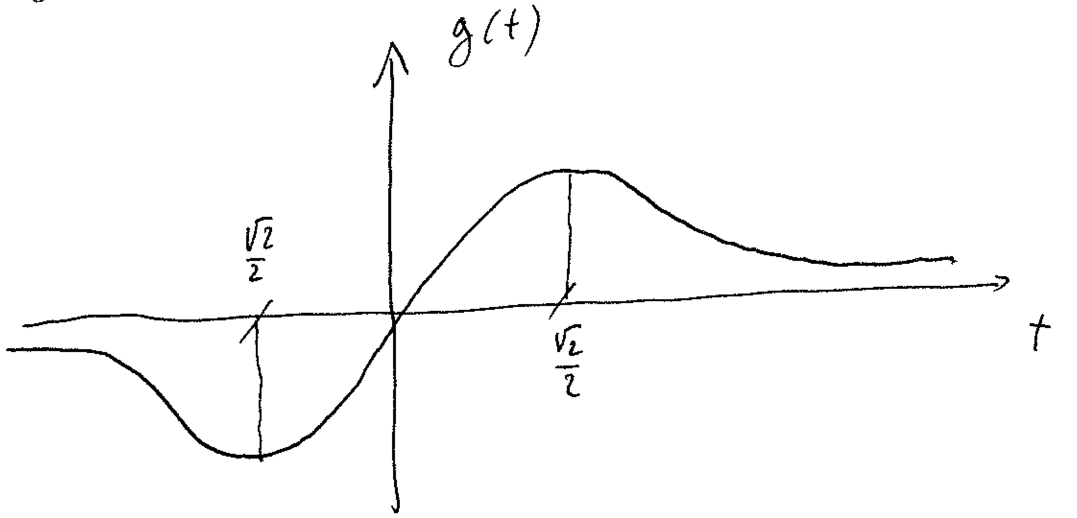
$$2t^2 < 1$$

$$\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2} \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

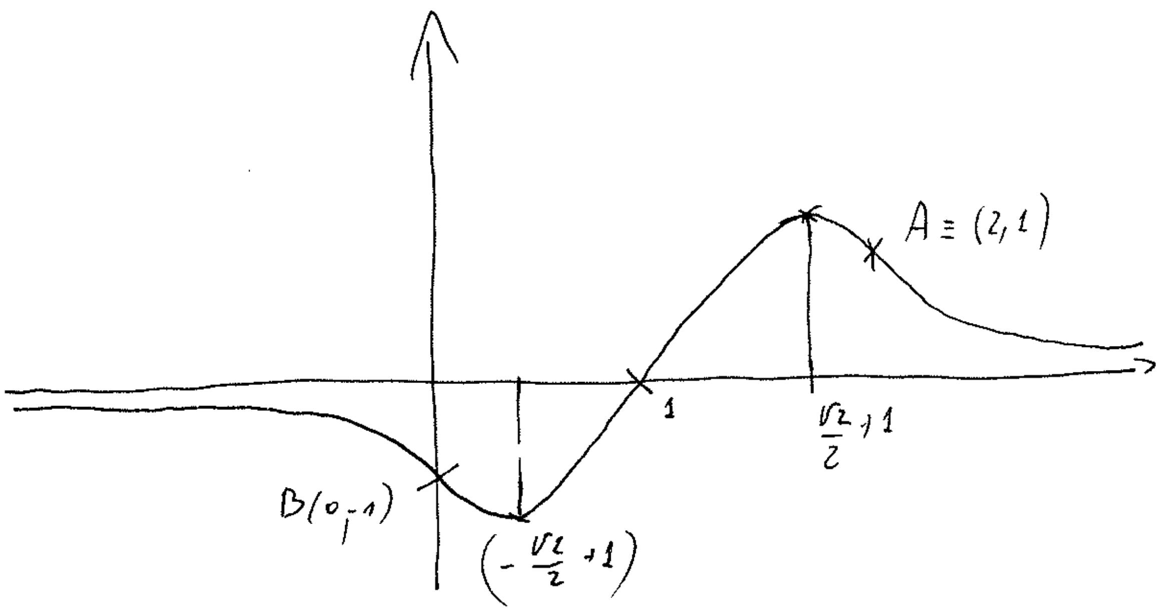


d

$g(t) = t\,e^{(1-t^2)}$

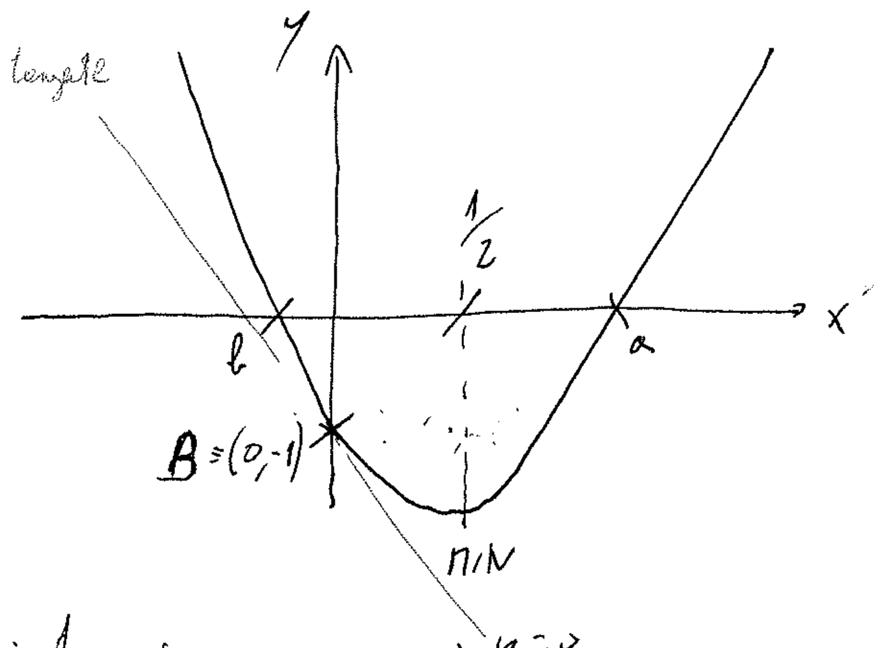


$g(x)$ si ottiene da $g(t)$ traslando la funzione di 1 lungo l'asse x



Studio della funzione

$f(x) = x^2 - x - 1$



intersezione assi $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = a \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} = b \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ $A \equiv (0,-1)$

$f'(x) = 0$ $\quad 2x - 1 = 0$ $\quad \boxed{x = \frac{1}{2}}$ min

2

Verifico che $f(x)$ e $g(x)$ sono tangenti in $B \equiv (0,-1)$

→ Abbiamo già visto che le due funzioni passano per $B \equiv (0,-1)$

→ $f'(x)$ calcolato nel punto $x=0$

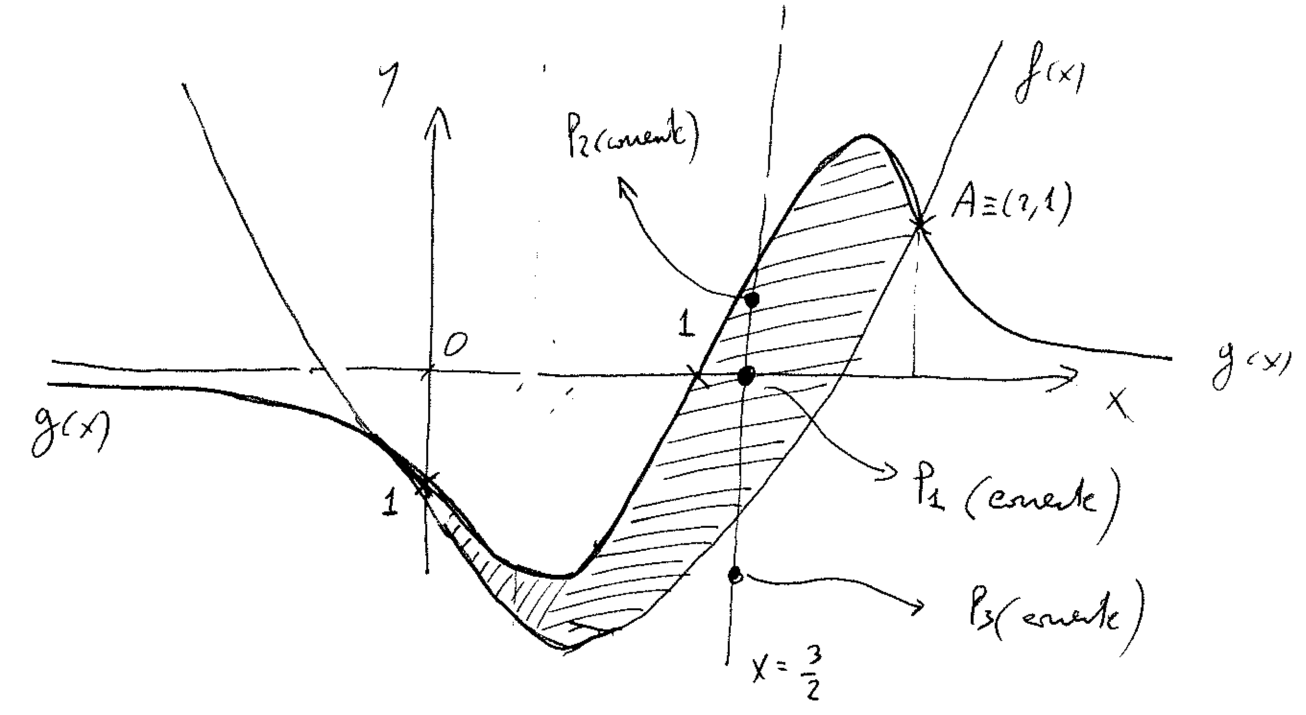
$f'(x) = 2x - 1$ per $x=0$ $\quad f'(0) = -1$

→ $g'(x)$ calcolato nel punto $x=0$

$$g'(x) = e^{2x-x^2} + (x-1)\, e^{2x-x^2}(2-2x)$$

$$g'(0) = 1 - 1\,(2) = 1 - 2 = -1$$

$$g'(0) = f'(0) = -1$$



Calcolo l'area racchiusa tra $f(x)$ e $g(x)$

$$S = \int_0^2 \left[g(x) - f(x)\right] dx = \int_0^2 \left[(x-1)e^{2x-x^2} - x^2 + x + 1\right] dx$$

$$= \underbrace{\int_0^2 (x-1)e^{2x-x^2} dx}_{= 0} - \int_0^2 f(x)\, dx$$

$$S = \int_0^2 (x^2 - x - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 =$$

$$= \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 2 = \frac{4}{3}$$

I fili percorsi da corrente elettrica hanno coordinate

$P_1 \equiv \left(\frac{3}{2}, 0\right) \qquad P_2 \equiv \left(\frac{3}{2}, 1\right) \qquad P_3 \equiv \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Considerando S la superficie racchiusa tra le due funzioni si può far vedere che solo i fili P_1 e P_2 sono concatenati ad S mentre P_3 è esterno.

Dalla $\underline{IV}$ equazione di Maxwell

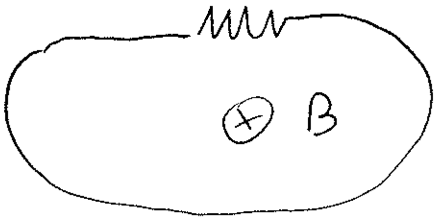
$$\oint \vec{B} \, d\vec{l} = \sum \mu_0 i$$

escludendo la i_3 che non si concatena e non contribuisce alla circuitazione

$$\oint \vec{B} \, dl = \mu_0 (i_1 + i_2).$$

Problema della spira

R = 0.2 Ω



$B = 1.5 \times 10^{-2}\ T$

Dalle leggi di Maxwell

$$f.e.i = -\frac{d\,\phi(B)}{dt}$$

Indico con $\begin{cases} S = \text{regione spira compresa tra le 2 funzioni} \\ B = \text{campo uniforme} \end{cases}$

$$\phi(B) = B\,S\cos(\omega t)$$

$$f.e.i = -\frac{d}{dt}\left[\phi(B)\right] = B\,S\,\omega\ \text{sen}\,\omega t$$

Dalla legge di Ohm.

$$f.e.i = R\,i = B\,S\,\omega \,\mathrm{sen}(\omega t)$$

da cui

$$i = \frac{B\,S\,\omega}{R}\,\mathrm{sen}(\omega t) = i_0 \,\mathrm{sen}(\omega t)$$

essendo posto $i_0 = \dfrac{B\,S\,\omega}{R}$

i_0 è la corrente massima data.

$$i_0 = \frac{B\,S\,\omega}{R} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{i_0\,R}{B\,S}}$$

Problème N°2

Tra le armature circolari di un condensatore viene data la funzione che descrive il modulo del campo magnetico

$$B = \frac{K t r}{\sqrt{(t^2 + a^2)^3}} \qquad \text{con } r \leq R \text{ (raggio condensatore)}$$

→ Determino la funzione che descrive il $\phi(\vec{E})$ tra le facce del condensatore.

In analogia alla II equazione di Maxwell che mette in relazione la circuitazione del campo elettrico con il flusso del campo magnetico, Maxwell modificò la IV equazione aggiungendo un termine e mettere in relazione il flusso del campo elettrico con la circuitazione del campo magnetico.

IV Equazione di Maxwell

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \sum \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\,\phi(\vec{E})}{dt} \right)$$

$\Downarrow$

termine aggiuntivo.

nel nostro caso

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\,\phi(\vec{E})}{dt}$$

Per ragioni di simmetria le linee del campo magnetico tra le facce del condensatore sono circolari e concentriche all'asse del condensatore mentre il campo elettrico è ortogonale alle facce del condensatore.

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\,\phi(\vec{E})}{dt}$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \frac{Kt}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}\, r \quad 2\pi r = \frac{2\pi K t r^2}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$$

$$\frac{d\,\phi(\vec{E})}{dt} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{2\pi K t r^2}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}} = \frac{At}{\sqrt{(t^2+a^2)^3}}$$

dove $A = \dfrac{2\pi K r^2}{\mu_0 \varepsilon_0}$

$$\phi(\vec{E}) = \int_0^t \frac{At}{\sqrt{(t^2+e^2)^3}}\, dt = \int_0^t \frac{A\, d(t^2+a^2)}{2\sqrt{(t^2+e^2)^3}}$$

$$\phi(\vec{E}) = \frac{A}{2} \int (t^2+e^2)^{-\frac{3}{2}}\, d(t^2+e^2) = \left[\frac{A}{\cancel{2}} (t^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} (-\cancel{2})\right]_0^t$$

(5)

$$\phi(\vec{E}) = -\frac{A}{\sqrt{t^2+a^2}} + \frac{A}{a} =$$

$$\phi(E) = A\left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+e^2}} + \frac{1}{e}\right) = \frac{2\pi V r^2}{\mu \cdot \varepsilon_0}\left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+e^2}} + \frac{1}{a}\right)$$

da cui il valore di E tra le facce del condensatore

$$\boxed{E = \frac{\phi(E)}{r^2\pi}} \quad e \quad \boxed{V = Ed}$$

Studio della funzione

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}} - \frac{1}{a} \qquad \text{con } a>0$$

$$\boxed{\lim_{t\to\pm\infty} F(t) = -\frac{1}{a}}$$

Poiché $F(-t) = F(t)$ la funzione è pari.

Intersezione con l'asse y

$$\begin{cases} t=0 \\ F(0)=0 \end{cases} \qquad O \equiv (\phi,\phi)$$

$$F'(t) = -\frac{\cancel{2}t}{(t^2+a^2)}\left(+\frac{1}{\cancel{2}}\right)\frac{}{(t^2+e^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{t}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = f(t)$$

$$F'(t)>0 \implies -t>0 \qquad t<0$$

$$\boxed{F''(t) > 0}$$

$$F''(t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{t}{(t^2+e^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{d}{dt}\left(-t\,(t^2+e^2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

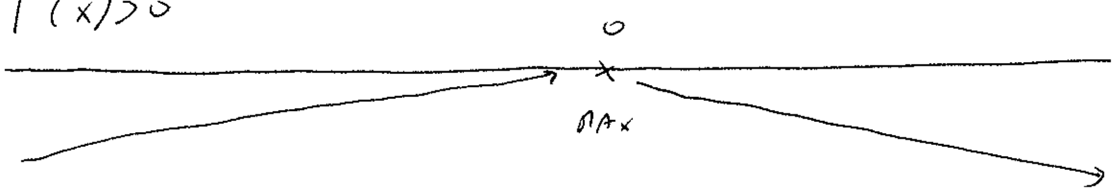
$$F''(t) = -(t^2+e^2)^{-\frac{3}{2}} - t\left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)(t^2+e^2)^{-\frac{5}{2}}\,\cancel{2}t$$

$$= -(t^2+e^2)^{-\frac{3}{2}} + 3t^2(t^2+e^2)^{-\frac{5}{2}} =$$

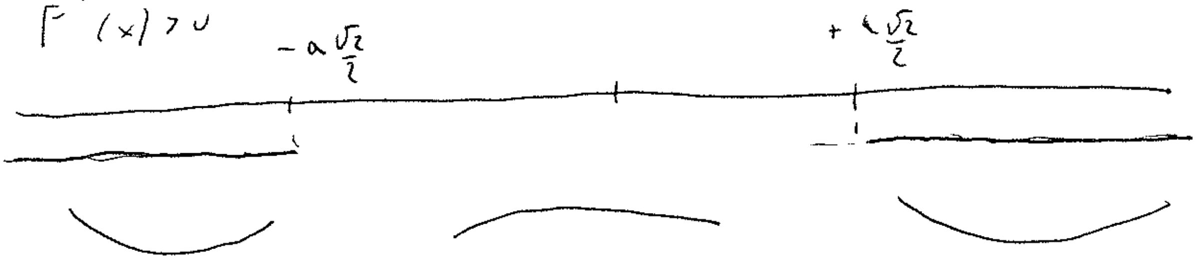
$$= \frac{-(t^2+a^2)+3t^2}{(t^2+e^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-t^2-a^2+3t^2}{(t^2+e^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2t^2-e^2}{(t^2+e^2)^{\frac{5}{2}}}$$

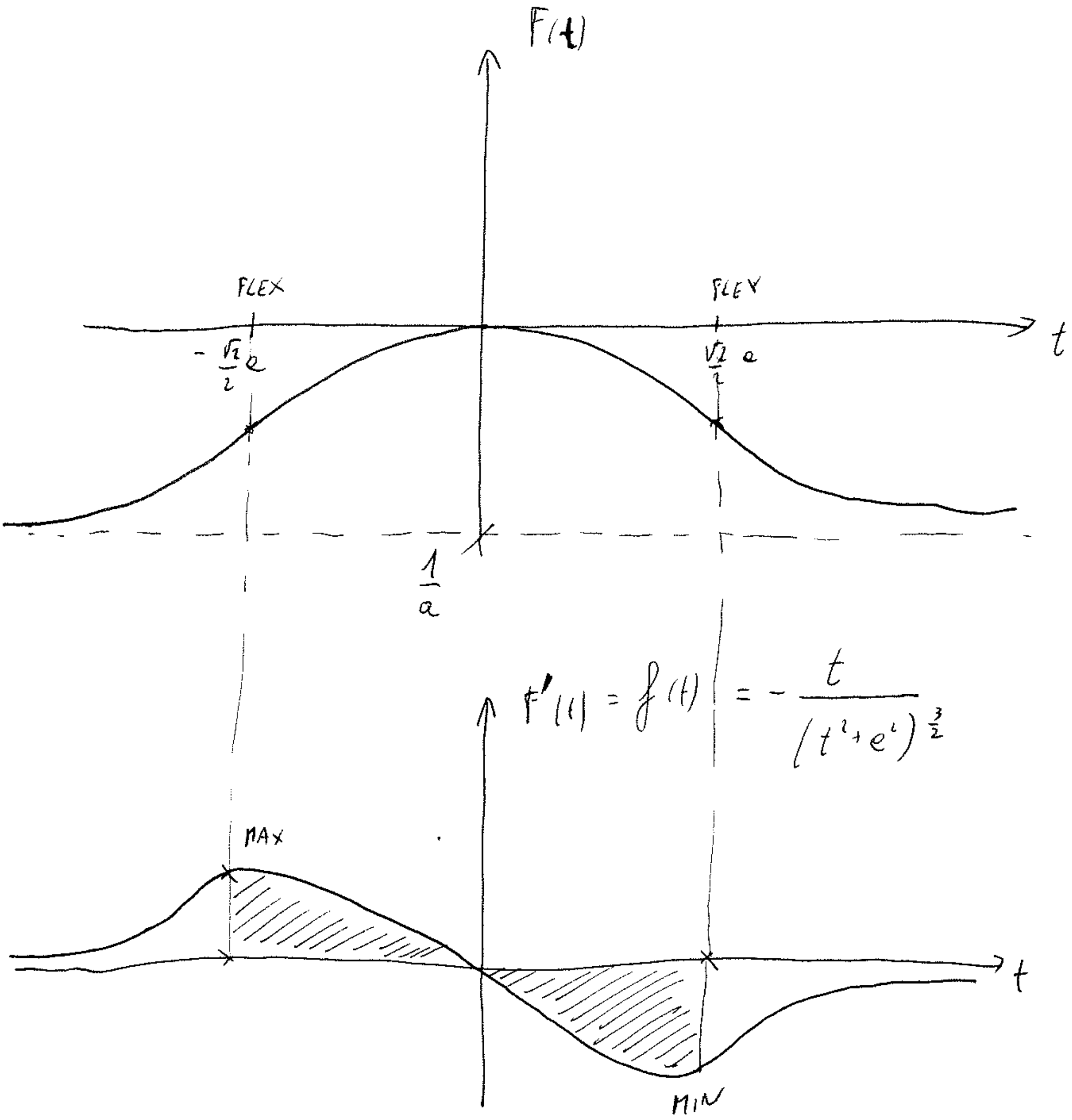
$$F''(t) > 0 \Rightarrow 2t^2 - e^2 \geq 0 \quad t$$

$F'(x) > 0$



$F''(x) > 0$





Calcolo area

$$2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \frac{t}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,dt = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

8

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} (t^2+a^2) \; d\,(t^2+e^2)$$

$$= \left[-2\left(t^2+e^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}e} =$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}a^2+a^2\right)^{-\frac{1}{2}} + 2a^{-1} =$$

$$= -2\left(\frac{3}{2}a^2\right)^{-\frac{1}{2}} + 2e^{-1} = -2\,\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}\,a} + \frac{2}{a} =$$

$$= -\frac{2}{a}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{e}$$

olfe

Quesito 1

1)
$$f(x) = \frac{p(x)}{x^2 + d}$$

intersezione con asse x

$A \equiv (0;0) \qquad B \equiv \left(\frac{12}{5};0\right)$

Poichè $f(x)$ ha un asintoto orizzontale

$\boxed{y = 5}$

si ha $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$

$p(x)$ deve assumere la forma

$p(x) = 5x^2 + bx + d$

$$\boxed{p(x) = 5x^2 + bx + c}$$

calcolo b e c imponendo il passaggio per

$A \equiv (0,0)$ e $B \equiv \left(\frac{12}{5}, 0\right)$

$$\begin{cases} c = 0 \\ \cancel{5} \times \left(\frac{12}{\cancel{5}}\right)^2 + b\left(\frac{12}{\cancel{5}}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ b = -12 \end{cases}$$

$$\boxed{p(x) = 5x^2 - 12x}$$

essendo presenti due asintoti verticali

$x = -3$ e $x = 3$

il denominatore deve annullarsi per questi valori di x

$x^2 + d = 0 \qquad x = \pm\sqrt{-d}$ (gemma)

$\Downarrow$

$\pm\sqrt{-d} = \pm 3 \Rightarrow \sqrt{-d} = 3 \Rightarrow d = -9$

$$\boxed{f(x) = \frac{5x^2 - 12x}{x^2 - 9}}$$

$$f'(x) = \frac{(10x-12)(x^2-9) - (5x^2-12x)2x}{(x^2-9)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{10x^3} - 90x - 12x^2 + 108 - \cancel{10x^3} + 24x^2}{(x^2-9)^2}$$

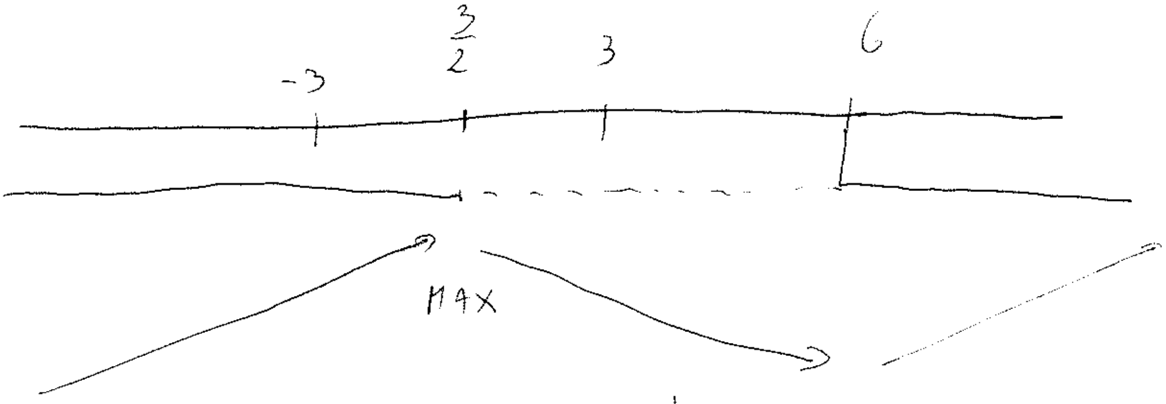
$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{\overset{2}{\cancel{12}}x^2 - \overset{15}{\cancel{90}}x + \overset{18}{\cancel{108}}}{(x^2-9)^2} = \frac{2x^2 - 15x + 18}{(x^2-9)^2}$$

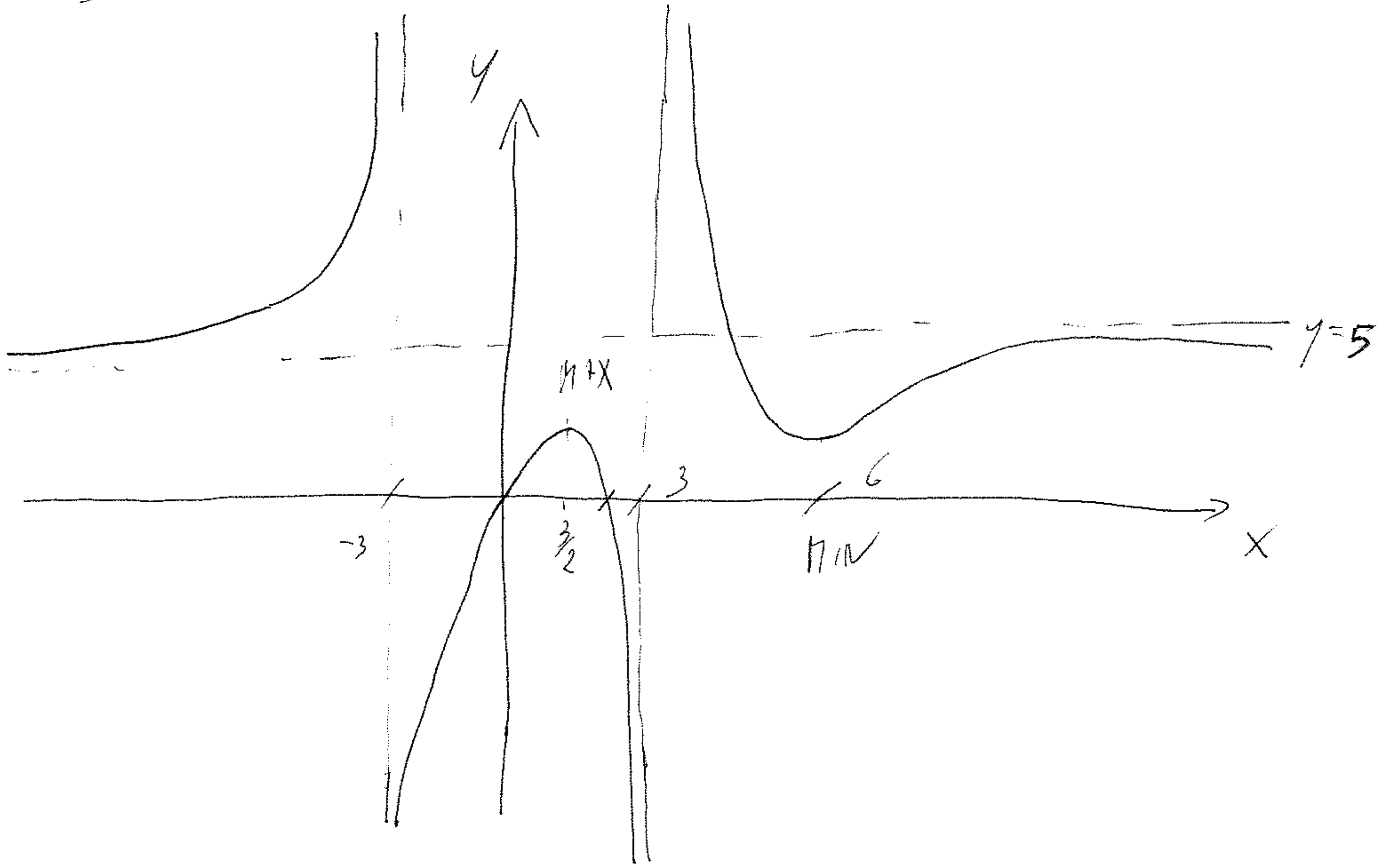
$$x = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 144}}{4} = \frac{15 \pm 9}{4} = \begin{cases} 6 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$f'(x) > 0 \quad \begin{cases} x > 6 \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$f'(x) > 0$

delta





Quesito n°2

Considero $g'(x) = \sum_{n=1}^{1010} x^{2n-1} = x + x^3 + x^5 + \dots + x^{2017} + x^{2019}$

mettendo x in evidenza

$$g'(x) = x\left(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2016} + x^{2018}\right)$$

$g'(x)$ è il prodotto di x e di un numero positivo

perché somma di 1 con funzioni di potenze

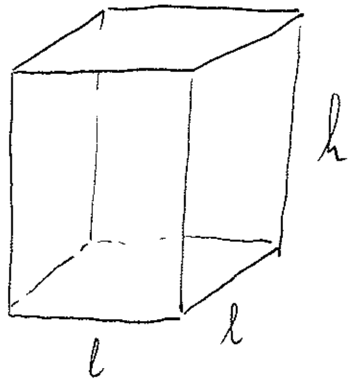
pari quindi sempre positive.

Pertanto $g'(x)=0$ ammette un'unica soluzione.

$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{1.1^x} = 0$ per la gerarchia

degli infiniti $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ se $a>1$

Quesito n°3



Parallelepipedo a base quadrata con S = superficie totale finata

Minimizzo la funzione $f(x)$: somma lunghezze spigoli

$$S = 2l^2 + 4lh \Rightarrow h = \frac{S-2l^2}{4l}$$

$$f(l) = 8l + 4h$$

$$f(l) = 8l + \cancel{4}\,\frac{S-2l^2}{\cancel{4}l} = 8l + \frac{S}{l} - 2l$$

$$f'(l) = 8 - \frac{S}{l^2} - 2 = 0$$

$$6 - \frac{S}{l^2} = 0 \Rightarrow S = 6l^2 \Rightarrow l = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

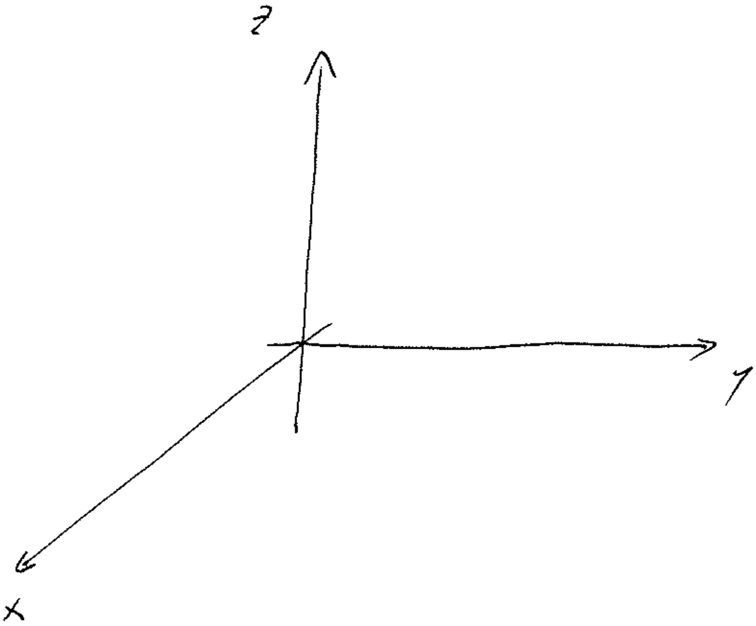
$$\Rightarrow \quad S' = 6 l^2$$

sostituendo

$$6 l^2 = 2 l^2 + 4 l h \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = l}$$

Il cubo è il parallelepipedo con superficie totale fissata che minimizza la "somma delle lunghezze degli spigoli".

Quesito n°4



$A \equiv (2,0,-1) \quad B \equiv (-2,2,1)$

$P \equiv (x,y,z)$

$$\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$$

$$\overline{PA} = \sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2+(z+1)^2}$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$(x-2)^2+y^2+(z+1)^2 = 2(x+2)^2+2(y-2)^2+2(z-1)^2$$

$$x^2+4-4x+y^2+z^2+1+2z = 2x^2+8+8x+2y^2+8$$
$$-8y+2z^2+2-4z$$

$$x^2+y^2+z^2+12x-8y-6z+13=0$$

$$x^2+12x+36-36+$$

$$y^2-8y+16-16+$$

$$z^2-6z+9-9+13=0$$

$$(x+6)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=48$$

Equazione di una sfera di raggio $\sqrt{48}$ e centro

$$C\equiv(-6;4;3)$$

Determino ora l'equazione del piano tangente alla sfera nel punto $T\equiv(-10;8;7)$.

1) $T-C\equiv(-10+6;8-4;7-3)\equiv(-4;4;4)$

è un vettore normale al piano cercato

Pertanto se indico con

$$\vec{\nabla} f = (-4, 4, 4)$$

l'equazione del piano è

$\vec{\nabla} f \cdot (x, y, z) = 0$ con x, y, z un punto del piano.

L'equazione del piano è allora

$$-4x + 4y + 4z + d = 0$$

dove d può essere calcolato imponendo il

passaggio per il punto T

$$40 + 32 + 28 = -d = 100$$

$$\boxed{-4x + 4y + 4z - 100 = 0}$$

$$\boxed{\pi : \quad +x - y - z + 25 = 0}$$

Quesito n° 5

1) Si lanciano 4 dadi qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?

I casi favorevoli sono riportati in Tabella e sono 5

DADO	1	2	3	4
Risultato	1	1	1	1
	1	1	1	2
	1	1	2	1
	1	2	1	1
	2	1	1	1

i casi possibili 6^4

$$P(1) = \frac{5}{6^4}$$

2) Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3.

I casi favorevoli sono dati dalla condizione che su almeno uno dei 4 dadi esce 3 o 6.

Cioè dalla probabilità complementare che su nessun dado esce 3 e 6

$$P = 1 - \left(\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{6}_{\,3}}\right)^4 = 1 - \frac{2^4}{3^4}$$

La probabilità dell'evento è dunque

$$1 - \frac{2^4}{3^4} = P(E_2)$$

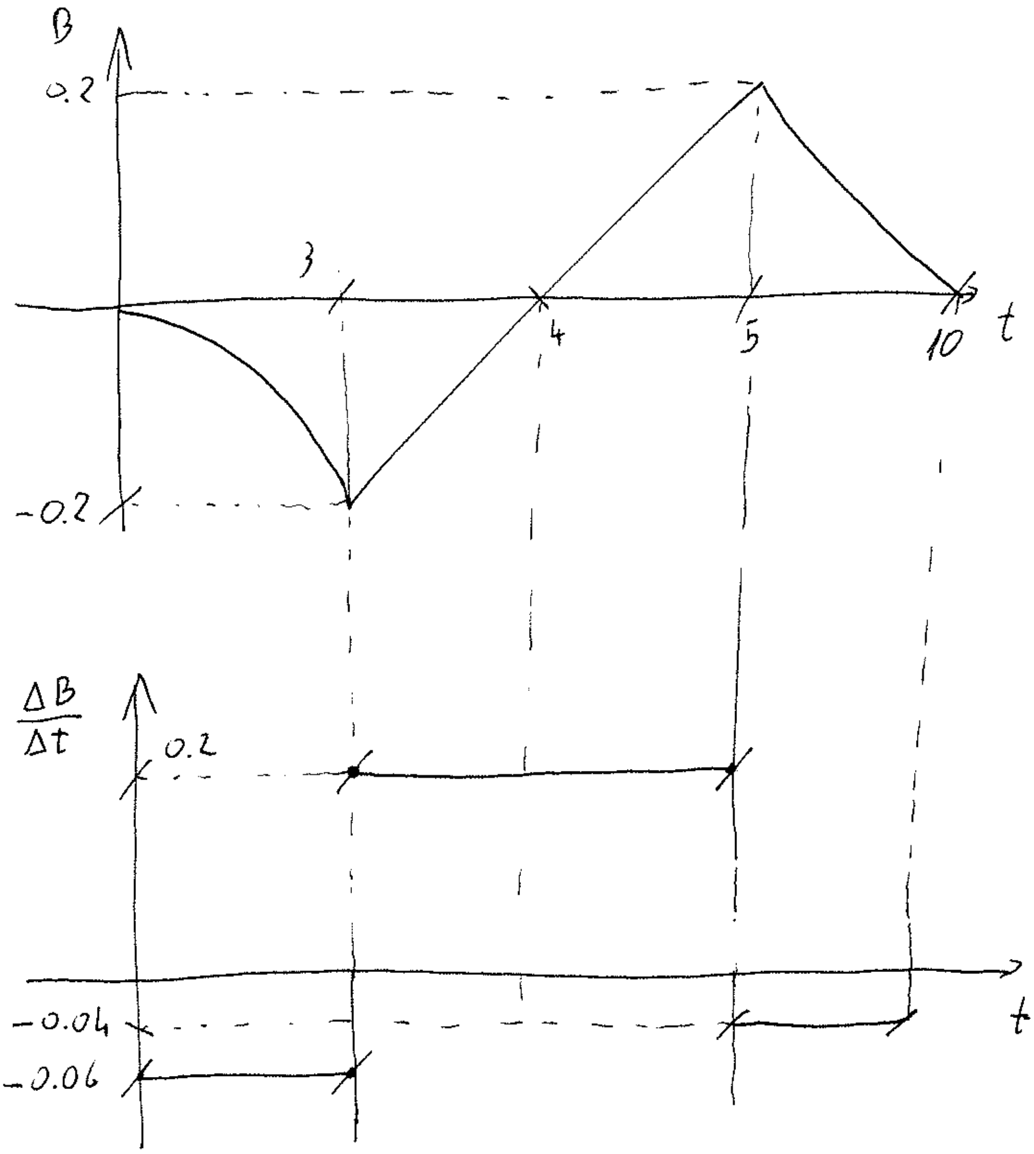
3) Qual è la possibilità che il massimo sia 4.

Considero i casi possibili che prevedono su ogni dado l'uscita di uno fra i numeri 1-2-3-4. Tali casi possibili sono 4^4

A questi casi possibili sottraggo i casi in cui su nessun dado esce 4 che valgono 3^4

Pertanto la possibilità che il massimo sia 4 ha probabilità $\dfrac{4^4-3^4}{6^4} = P(E_3)$

Quesito n°6



$$f.e.i = -\frac{d\phi(B)}{dt} = R\,i$$

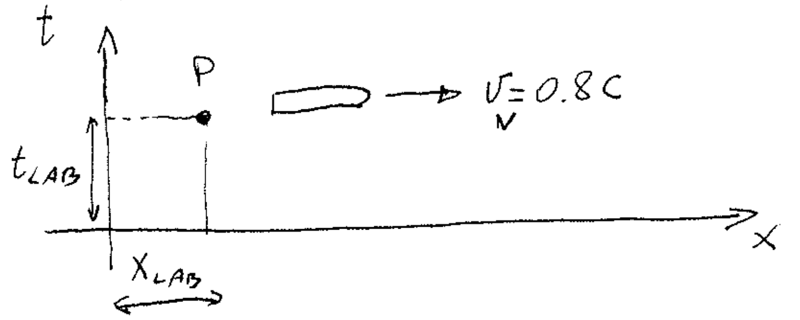
$$\langle i \rangle = -\frac{\Delta\phi(B)}{\Delta t\, R} = -S\,\frac{\Delta B}{\Delta t}\,\frac{1}{R}$$

$$\langle i \rangle_1 = -\frac{30 \times 10^{-4} \times (-0.06)}{4 \times 10^{-3}} = +45\ \mu A$$

$$\langle i \rangle_2 = -\frac{30 \times 10^{-4} \times (0.2)}{4 \times 10^{-3}} = -150\ \mu A$$

$$\langle i \rangle_3 = -\frac{30 \times 10^{4} \times (-0.04)}{4 \times 10^{-3}} = +30\ \mu A$$

Quesito N° 7



$$X_{LAB}(P) = 25 \times 10^{-2}$$

$$t_{LAB}(P) = 2 \times 10^{-9}$$

$$v_{LAB}(P) = \frac{X_{LAB}(P)}{t_{LAB}(P)} = \frac{25 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-9}} = 1.25 \times 10^{8} \frac{m}{s}$$

Per un sistema solidale alla navicella

$$V'(P) = \frac{v_{LAB}(P) - v_N}{1 - \frac{v_N V_{LAB}}{c^2}} = \frac{1.25 \times 10^{8} - 0.8 \times 3 \times 10^{8}}{1 - \frac{0.8 \times 3 \times 1.25}{3^2}} = -1.73 \times 10^{8}$$

(per un osservatore sulla navicella la particella si muove verso sinistra)

Considero le trasformate di Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma (x - v t) \\ t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x\right) \end{cases}$$

e sostituisco

$$v = v_N = 0.8 \times 3 \times 10^{8}$$

$$t = t_{LAB} = 2 \times 10^{-9}$$

$$x = x_{LAB} = 25 \times 10^{-2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_N^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 1.67$$

$$\beta = \frac{v_N}{c} = 0.8$$

$$\begin{cases} x' = 1.67 \left(25 \times 10^{-2} - 0.8 \times 3 \times 10^{8} \times 2 \times 10^{-9}\right) = -0.3841 \\ t' = 1.67 \left(2 \times 10^{-9} - \frac{0.8}{3 \times 10^{8}} \times 25 \times 10^{-2}\right) = 2.2 \times 10^{-9} \end{cases}$$

Verifico l'invarianza nei due sistemi di riferimento dell'intervallo

$$x^2 - c^2 t^2$$

$$X_{LAB}^2 - c^2 t_{LAB}^2 = X_N^2 - c^2 t_N^2$$

$X_{LAB}^2 = 0.0625$	$t_{LAB}^2 = 4 \times 10^{-18}$
$X_N^2 = 0.1475$	$t_N^2 = 4.84 \times 10^{-18}$

$$0.0625 - \left[3 \times 10^8\right]^2 \times 4 \times 10^{-18} = 0.1475 - \left[3 \times 10^8\right]^2 \times 4.84 \times 10^{-18}$$

$$0.0625 - 9 \times 10^{16} \times 4 \times 10^{-18} = 0.1475 - 9 \times 10^{16} \times 4.84 \times 10^{-18}$$

$$0.0625 - 36 \times 10^{-2} = 0.1475 - 43.56 \times 10^{-2}$$

$$-0.29.. = -0.29$$

Quesito N°8

$B = 1\,mT$

$\Delta X = $ passo $= 38.1$ cm

$R = 10.5$ cm

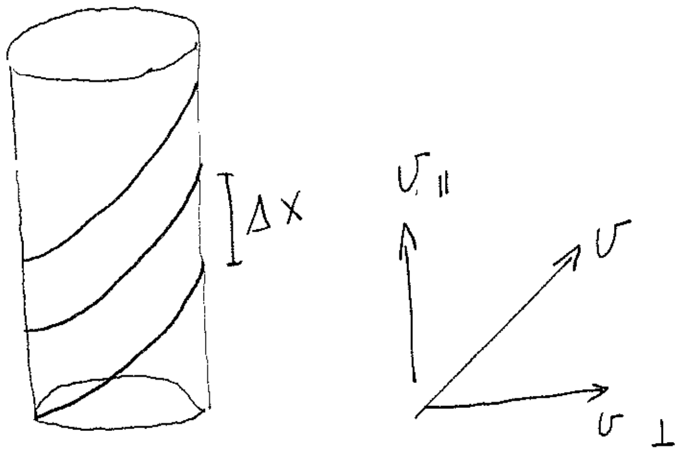
Dalla legge di Lorentz una carica immersa in un campo magnetico è soggetta ad una forza $\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$

La forza è ortogonale alla velocità pertanto bilancia la forza centrifuga e la carica compie un moto circolare dove

$$\underbrace{\frac{m v^{\cancel{2}}}{R}}_{F_{centrifuga}} = q \cancel{v} B$$

Da cui

$$v_\perp = q\frac{B\,R}{m} = \frac{1.602\times10^{-19}\times10^{-3}\times10.5\times10^{-2}}{1.673\times10^{-27}} = 10^{4}\ m/s$$



Il moto della particella è elicoidale e può essere visto come somma di un moto circolare con velocità $v_\perp$ e un moto rettilineo uniforme con velocità $v_{\parallel}$. (La prima ortogonale a B la seconda parallela)

Il periodo per compiere un giro vale

$$T = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{2\pi\,10.5\times10^{-2}}{10^{4}} = 65.9\times10^{-6}$$

$$v_{\parallel} = \frac{\Delta x}{T} = \frac{38.1 \times 10^{-2}}{65.9 \times 10^{-6}} = 5.8 \times 10^{3} = 0.58 \times 10^{4}$$

$$v = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2} = \sqrt{0.58^2 + 1} \times 10^4 = 1.2 \times 10^4$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = \frac{1}{0.58} = 1.7 \qquad \alpha = 59.5°.$$