<u>Il propagatore fermionico per una particella</u>

<u>di Dirac</u>

Il propagatore fermionico per una particella di Dirac.

L'equazione di Dirac per una particella libera si scrive

$$i(\hat{\partial}_\mu - m)\psi = 0$$

Per scrivere l'equazione di Dirac per una particella in un campo A^μ si effettua la sostituzione minimale.

$$\hat{\partial}_\mu \to \hat{\partial}_\mu + ie\hat{A}_\mu$$

$$i(\hat{\partial}_\mu + ie\hat{A}_\mu)\psi - m\psi = 0$$

$$\boxed{i(\hat{\partial}_\mu - m)\psi = -ie\hat{A}_\mu\psi} \quad (1)$$

Una soluzione dell'equazione (1) può essere ottenuta come somma di successive approssimazioni della funzione ψ.

La prima approssimazione della funzione ψ è il primo termine della serie di Dyson e soddisfa l'equazione

$$\boxed{i(\hat{\partial}_\mu - m)\psi = ie\hat{A}_\mu \psi^{(0)}} \quad (2)$$

dove $\psi^{(0)}$ è la soluzione dell'omogenea associata cioè l'equazione della particella libera.

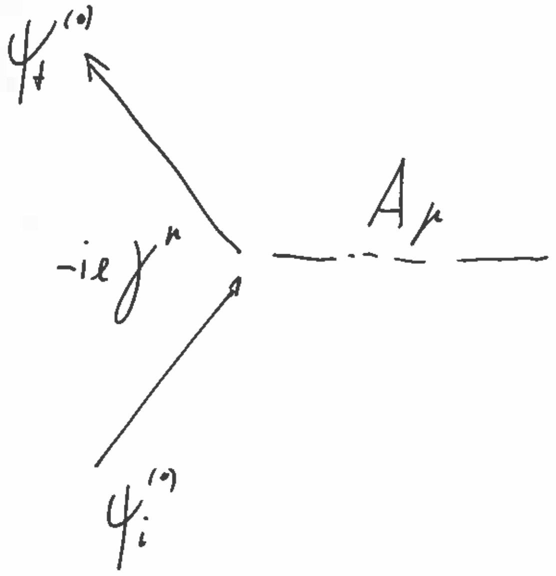
$$\psi^{(1)} = ie\hat{A}_\mu \psi^{(0)} = ie\gamma^\mu A_\mu \psi^{(0)}$$

$\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}$ (prime due componenti della serie di Dyson) l'apice (1) sulla ψ indica che la soluzione è

l'approssimazione del I ordine della serie di Dyson.

Rappresento graficamente l'ampiezza di transizione

$\langle \psi_f | S^{(1)} | \psi_i \rangle$



l'approssimazione del II ordine $\psi^{(2)}$ soddisfa

l'equazione

$$i(\hat{\partial}_\mu - m)\psi = ie\hat{A}_\mu \psi^{(1)} = ie\gamma^\mu A_\mu(x)\, ie\gamma^\mu A_\mu(y)\psi^{(0)}$$

$$= -e^2 \gamma^\mu A_\mu(x) \gamma^\mu A_\mu(y) \psi^{(0)} \qquad (7)$$

La soluzione della (3) si ottiene come integrale

$$\psi^{(2)} = \int -e^2 \gamma^\mu A_\mu(\vec{x})\, \tilde{G}(\vec{x}-\vec{y})\, \gamma^\mu A_\mu(\vec{y})\, \overset{\circ}{\psi}\, d^4x\, d^4y$$

dove $\tilde{G}(\vec{x}-\vec{y})$ è la soluzione dell'equazione di Green.

$$i(\hat{\partial}_\mu - m)\psi = \delta^4(\vec{x}-\vec{y})$$

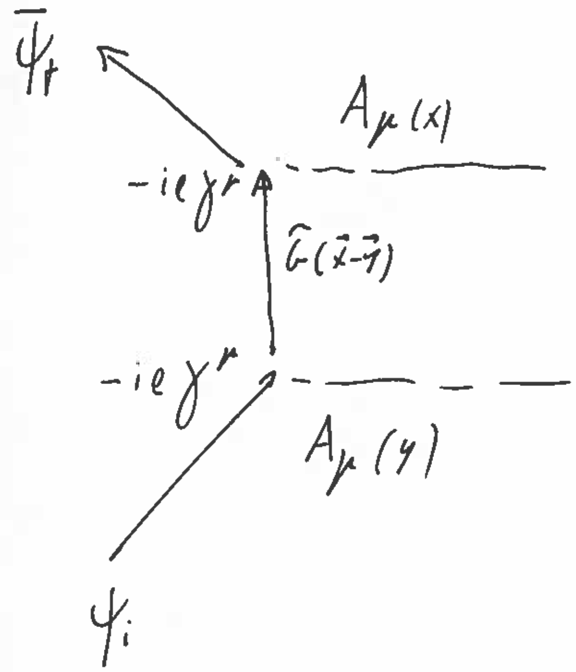
con $\delta^4(\vec{x}-\vec{y})$ delta di Dirac.

La funzione $\tilde{G}(\vec{x}-\vec{y})$ è detto propagatore fermionico di Dirac.

L'apice (2) sulla ψ indica che la soluzione è l'approssimazione del II ordine della serie di Dyson

Rappresento graficamente l'ampiezza di transizione

$$\langle \psi_f | S^{(2)} | \psi_i \rangle$$



Il propagatore è una particella "virtuale" perché per essa non vale la condizione $E^2 - p^2 = m^2$. Condizione valida per i funzioni entranti ψ_i e uscenti ψ_f.

Calcolo del propagatore fermionico

Per calcolare il propagatore di Dirac $\tilde{G}(\vec{x}-\vec{y})$ occorre trovare una soluzione

dell'equazione

$$i(\hat{\partial}_x - m)\,\tilde{G}(\vec{x}-\vec{y}) = \delta^4(\vec{x}-\vec{y})$$

Scrivo $\delta^4(\vec{x}-\vec{y}) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}\, e^{-i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})}$

$$\tilde{G}(\vec{x}-\vec{y}) = \int \frac{S(p)}{(2\pi)^4}\, e^{-i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})}\, d^4 q$$

sostituendo

$$i(\hat{\partial}_\mu - m)\int \frac{S(p)}{(2\pi)^4}\, e^{-i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})}\, d^4 q = \int \frac{d^4 q\, e^{-i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})}}{(2\pi)^4}$$

da cui si ricava

$$(\hat{q} - m)\, S(p) = I$$

Dove

$S(p)$ è una matrice 4×4.

Moltiplicando per $(\hat{q}+m)$

$$(\hat{q}-m)(\hat{q}+m)\,S(p) = (\hat{q}+m)$$

$$(q^2-m^2)\,S(p) = (\hat{q}+m)$$

$$S(p) = \frac{(\hat{q}+m)}{q^2-m^2}$$

L'espressione del propagatore è così

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = \int \frac{(\hat{q}+m)}{(q^2-m^2)} \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-i\vec{q}(\vec{x}-\vec{y})} d^4q$$

Ma $\vec{q} = (p_0, -\vec{p})$

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = \int \frac{(\hat{q}+m)}{(q^2-m^2)} \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} d^3p \int \frac{e^{-ip_0(t-t_0)}}{(2\pi)} dp_0$$

Integro in dp_0 il propagatore

Poiché $\vec{q} = (p_0, \vec{p})$ $\quad q^2 = p_0^2 - p^2$

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = \int \frac{(\hat{q}+m)}{(p_0^2 - p^2 - m^2)} \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} d^3p \int \frac{e^{-ip_0(t-t_0)}}{(2\pi)} d^1p_0$$

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = \int \frac{(\hat{q}+m)}{(p_0^2 - E)} \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} d^3p \int \frac{e^{-ip_0(t-t_0)}}{2\pi} d^1p_0$$

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = \int \frac{(\hat{q}+m)}{(p_0 - E)(p_0 + E)} \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} d^3p \int \frac{e^{-ip_0(t-t_0)}}{2\pi} d^1p_0$$

l'integrale presenta due poli in cui si annulla il denominatore $p_0 = \pm E$. Va risolto con il metodo dei residui ed il lemma di Jordan.

Si considera p_0 una variabile complessa e l'integrale va esteso su una semicirconferenza nel piano complesso estesa all'infinito avendo cura che l'integrale sull'arco di circonferenza sia nullo.

1) Considero il caso in cui $t > t_0$

Per usare il lemma di Jordan e far sì che l'integrale sull'arco di circonferenza si annulli occorre chiudere l'integrale con un semicerchio all'infinito per $\text{Im}\, p_0 < 0$ ed essendo in tal caso l'integrale sulla retta reale all'inverso rispetto al senso antiorario avremo:

$$G(\bar{x}-\vec{y}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\hat{q}+\hat{m}\right) e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \operatorname*{Res}_{p_0 = E-i\epsilon} \frac{e^{-ip_0(t-t_0)}}{\left(p_0-(E-i\epsilon)\right)\left(p_0+(E-i\epsilon)\right)}$$

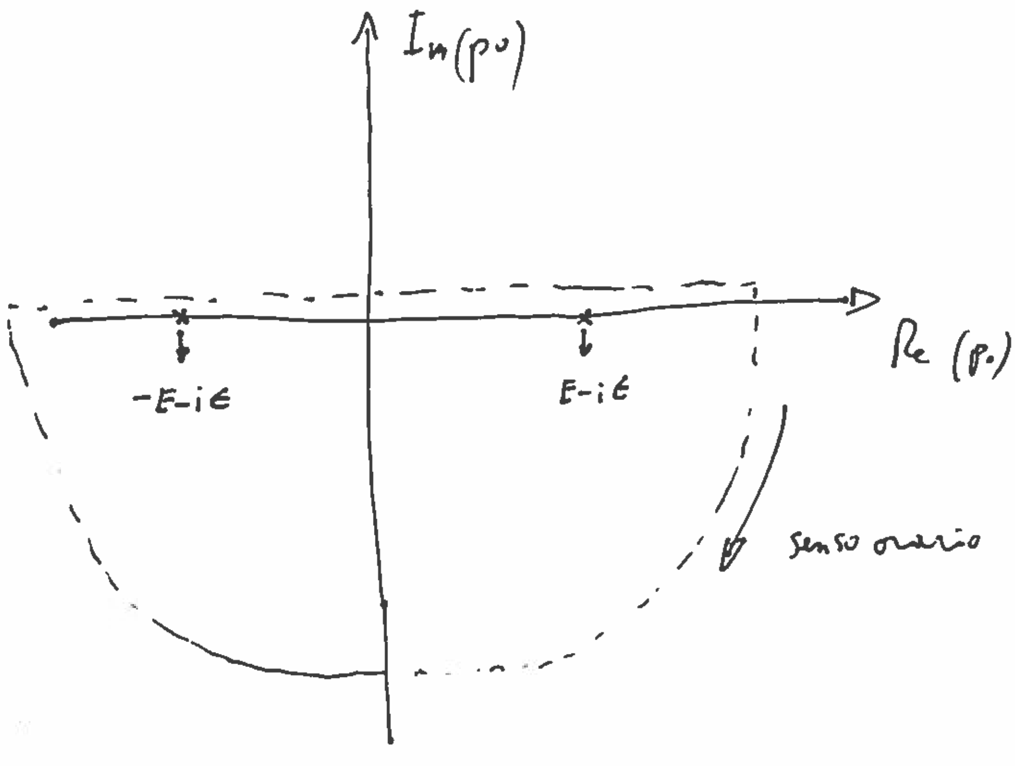
Con

$$\operatorname*{Res}_{p_0 = E - i\epsilon} \frac{e^{-ip_0(t-t_0)}}{\left(p_0 - (E - i\epsilon)\right)\left(p_0 + (E - i\epsilon)\right)} =$$

$$= -2\pi i \lim_{p_0 = E - i\epsilon} (p_0 - E + i\epsilon) \frac{e^{-ip_0(t-t_0)}}{(p_0 - E + i\epsilon)(p_0 + E - i\epsilon)}$$

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = -i \int \frac{m(\hat{q} + m)}{2Em} e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} e^{-iE(t-t_0)} d^3p \, \theta(t-t_0)$$

$$\theta(t-t_0) = \text{funzione a gradino} = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases} \qquad \boxed{E > 0}$$



2) Considero il caso in cui $t < t_0$

Per usare il lemma di Jordan e far sì che l'integrale sull'arco di circonferenza si annulli sull'arco di circonferenza occorre chiudere l'integrale con un semicerchio all'infinito per $\mathrm{Im}\, p_0 > 0$ ed essendo in tal caso l'integrale sulla retta reale nel verso in senso antiorario avremo:

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, \hat{q} + \hat{m}\; e^{i\vec{p}(x-y)} \operatorname*{Res}_{p_0=-E-i\epsilon} \frac{e^{-ip_0(t-t_0)}}{\big(p_0-(E+i\epsilon)\big)\big(p_0+E+i\epsilon\big)}$$

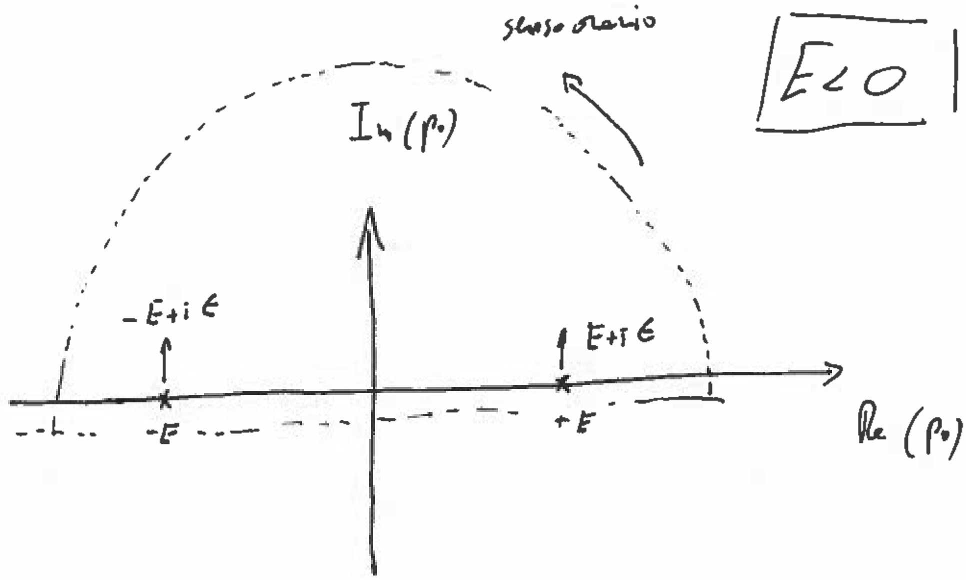
Con

$$\operatorname*{Res}_{p_0=-E-i\epsilon} \frac{e^{-ip_0(t-t_0)}}{\big(p_0-(E+i\epsilon)\big)\big(p_0+E+i\epsilon\big)} =$$

$$= 2\pi i \lim_{p_0 \to E+i\epsilon} \frac{\big(p_0-(E+i\epsilon)\big)\, e^{-ip_0(t-t_0)}}{\big(p_0-(E+i\epsilon)\big)\big(p_0+E+i\epsilon\big)}$$

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = i\int \frac{(m-\hat{q})\,m}{2Em}\, e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\, e^{iE(t-t_0)}\, d^3p\, \vartheta(t_0-t) \quad (12)$$

$$\theta(t_0-t) = \text{funzione a gradino} = \begin{cases} 0 & t>t_0 \\ 1 & t<t_0 \end{cases}$$



$$\boxed{E<0}$$

Osserviamo che il propagatore $G(\vec{x}-\vec{y})$ è una matrice 4 X 4 definita da $\frac{(\hat{q}+m)}{m}$ e $\frac{(\hat{q}-m)}{m}$.

Riscriviamo di seguito l'espressione del propagatore fermionico.

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = -i\,\theta(t-t_0)\int \frac{m}{EV}\,\frac{(m+\hat{q})}{2m}\, e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\, e^{-iE(t-t_0)}\, d^3p$$

$$+i\,\theta(t_0-t)\int \frac{m}{EV}\,\frac{(m-\hat{q})}{2m}\, e^{-i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}\, e^{iE(t-t_0)}\, d^3p$$

$G(\vec{x}-\vec{y})$ è una matrice 4×4.

Il I termine da origine ad una particella di energia positiva E che si propaga avanti nel tempo; il II termine da origine ad una particella di energia negativa che si propaga indietro nel tempo (antiparticella).

La grandezza $\frac{1}{V}$ è stata aggiunta per normalizzare la funzione d'onda in un volume V.

Ricordiamo le soluzione ottenute risolvendo l'equazione omogenea $i(\hat{\partial}_\mu - m)\psi = 0$

1) Per $E > 0$

$$\psi = u(p)\, e^{i\vec{p}\vec{x}}\, e^{-iEt}$$

$$u_{\uparrow E^+} = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_3}{E+m} \\ \frac{p_1+ip_2}{E+m} \end{pmatrix} \qquad u_{\downarrow E^+} = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_1-ip_2}{E+m} \\ -\frac{p_3}{E+m} \end{pmatrix}$$

2) Per $E < 0$

$$\psi = u(p)\, e^{-i\vec{p}x}\, e^{Et}$$

$$u_{\uparrow E^-} = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \frac{p_3}{E-m} \\ \frac{p_1+ip_2}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_{\downarrow E^-} = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \frac{p_1-ip_2}{E-m} \\ -\frac{p_3}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gli spinori sono stati calcolati considerando la condizione di normalizzazione

$$u^{+}_{\uparrow E^+} u_{\uparrow E^+} = 1 \qquad u^{+}_{\uparrow E^+} u_{\downarrow E^+} = 0$$

$$u^{+}_{\downarrow E^+} u_{\downarrow E^+} = 1 \qquad u^{+}_{\downarrow E^+} u_{\uparrow E^+} = 0$$

$$u^{+}_{\uparrow E^-} u_{\uparrow E^-} = -1 \qquad u^{+}_{\uparrow E^-} u_{\downarrow E^-} = 0$$

$$u^{+}_{\downarrow E^-} u_{\downarrow E^-} = -1 \qquad u^{+}_{\downarrow E^-} u_{\uparrow E^-} = 0$$

$$u^{+}_{\uparrow E^+} u_{\downarrow E^-} = u^{+}_{\downarrow E^+} u_{\uparrow E^-} = u^{+}_{\uparrow E^-} u_{\downarrow E^+} = u^{+}_{\downarrow E^-} u_{\uparrow E^+} = 0$$

In realtà si considera una normalizzazione sulla I componente della corrente J^0

$$\bar{u}_\alpha u_\beta = \delta_{\alpha\beta} \qquad \alpha, \beta = 1,2 \qquad \text{(energia positiva)}$$

$$\bar{v}_\alpha v_\beta = -\delta_{\alpha\beta} \qquad \alpha, \beta = 1,2 \qquad \text{(energia negativa)}$$

$$\bar{u}_\alpha v_\beta = \bar{v}_\alpha u_\beta = 0 \qquad \alpha, \beta = 1, 2$$

In questo caso agli spinori se aggiunto un fattore $\sqrt{\frac{m}{EV}}$.

Infine un ultimo modo per scrivere l'equazione del propagatore è quello di utilizzare i proiettori

1) Per $E > 0$

$$\left(u_{\uparrow E^+} \bar{u}_{\uparrow E^+} + u_{\downarrow E^+} \bar{u}_{\downarrow E^+}\right) = \frac{m + \hat{q}}{2m} = \sum_{\alpha=1,2} u_{(\alpha)} \bar{u}_{(\alpha)}$$

2) Per $E < 0$

$$\left(u_{\uparrow E^-} \bar{u}_{\uparrow E^-} + u_{\downarrow E^-} \bar{u}_{\downarrow E^-}\right) = \frac{m - \hat{q}}{2m} = \sum_{\alpha=1,2} v_{(\alpha)} \bar{v}_{(\alpha)}$$

Le relazioni sopra riportate (ricordiamo che sono matrici 4x4) sono molto importanti e permettono di semplificare calcoli molto lunghi per il calcolo dello scattering delle particelle.