Principio di minima azione per particelle relativisticamente libere

Principio di minima azione per un campo di particelle relativistiche libere

Per campo s'intende un'applicazione che ad ogni punto dello spazio (e del tempo) associa un vettore.

Ad esempio il campo di velocità di un fiume che scorre tra i suoi argini associa ad ogni punto $\vec{x}$ la velocità delle particelle che al tempo t passa nella posizione $\vec{x}$.

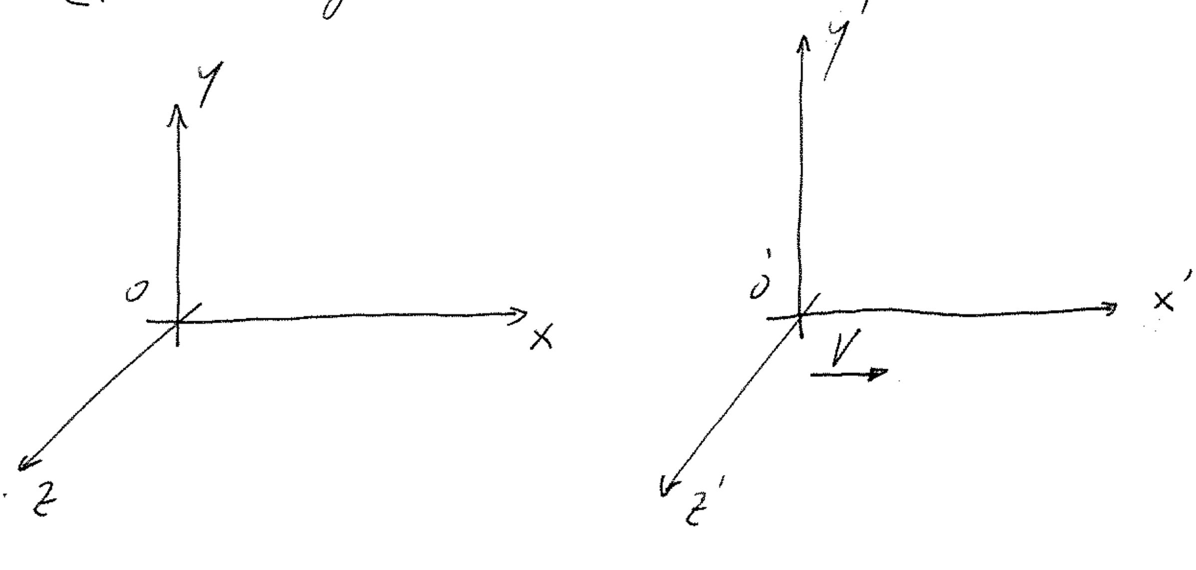
Un campo $\vec{\phi}$ è detto stazionario se $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial t} = 0$

cioè fissato un punto le grandezze misurate in quel punto non varia con il tempo.

Ad esempio nel fiume potrei considerare un punto per cui la velocità delle particelle che passano di lì hanno sempre la stessa velocità $\vec{V}$.

Prima di scrivere il principio di minima azione per un campo di particelle relativistiche libere riportiamo alcuni concetti di relatività ristretta.

Secondo la relatività ristretta si definisce quadrivettore un vettore a 4 componenti ad esempio $\vec{x} = (x, y, z, ct)$ per cui valgono le trasformazioni di Lorentz per passare da un sistema di coordinate O ad uno O' in moto rispetto al primo con velocità $\vec{v}$ uniforme.



Trasformate di Lorenz

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma (x - Vt) \\[2ex]
y' = y \\[1ex]
z' = z \\[1ex]
t' = \dfrac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{t - Vx}{c^2} \gamma
\end{cases}
$$

Un vettore si trasforma da un sistema di coordinate ad un altro in moto con velocità costante V rispetto al primo secondo le trasformate di Lorenz.

Uno scalare invece è una grandezza che resta invariata nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro.

Essendo la velocità della luce c indipendente dal sistema di riferimento considerato un osservatore solidale al sistema O

vede un'onda sferica partire da O nell'
istante in cui O' coincide con O.

Per quest'osservatore al tempo t l'onda sferica
ha equazione $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$.

Per l'osservatore solidale ad O' l'onda sferica
avrà equazione $ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt^2$.

Per quanto detto $ds' = ds$.

$$-ds = -ds' = \left[-\frac{dx^2}{dt^2} - \frac{dy^2}{dt^2} - \frac{dz^2}{dt^2} + c^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt$$

$$-ds = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \; c\, dt$$

*) Per un quadrivettore $\overbrace{\vec{V}^i = (V^0; V^1; V^2; V^3)}^{\text{controvariante}}$ valgono
le Trasformate di Lorentz.
Inoltre a $\vec{V}$ è associato il vettore covariante
$\vec{V}_i = (V_0, V_1, V_2, V_3) = (V^0, -V^1, -V^2, -V^3)$.
Lo scalare $V^i V_i$ è indipendente dal sistema di riferimento.

Partendo dal quadrivettore posizione

$\vec{x} = (x, y, z, ct)$ e moltiplicando per grandezze

invarianti ricavo il quadrivettore quantità di moto.

$$d\vec{x} = (dx, dy, dz, c\,dt)$$

$$m_0 c \frac{d\vec{x}}{ds} = m_0 c \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, \frac{c\,dt}{ds} \right)$$

sostituendo $ds = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, c\,dt$

$$\frac{m_0 \cancel{c}\, d\vec{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \cancel{c}\, dt} = \left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

Questo vettore a quattro componenti $\vec{p}$ rappresenta

la quantità di moto per particelle relativistiche.

Il termine $\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \simeq m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2$

è l'energia cinetica della particella

a cui si somma un nuovo termine $m_0 c^2$ che rappresenta l'energia legata alla massa delle particelle a riposo.

Si può scrivere anche $\vec{p} = \left(\frac{E}{c} ; m_0 v_x \gamma ; m_0 v_y \gamma ; m_0 v_z \gamma \right)$

con $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_0 c^2 \gamma$.

Infine come $dx_i dx^i = ds^2$ è un invariante anche $p_i p^i$ è un invariante.

Segue immediatamente l'equazione dell'energia per particelle relativistiche

$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \left(\frac{E}{c} \right)^2 = m_0^2 c^2$ che con la convenzione di porre $c = 1$ si scrive

$p^2 - E^2 = m_0^2$ -

Per quanto detto risulta plausibile scegliere come azione lagrangiana per una particella libera una grandezza relativisticamente invariante.

$$S = -\int m_0 c \, ds = -\int m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \, dt$$

A questo punto possiamo considerare una particella puntiforme con massa a riposo m_0

In questo caso ritroviamo le costanti del moto date da $\frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p_i$

cioè $\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0$ (conservazione energia)

$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0$ (conservazione componenti momento angolare)

Oppure possiamo considerare un campo in cui sia la velocità che la densità siano funzioni della posizione.

$$S = -\int \rho_0(x,y,z,t)\, c^2 \sqrt{1-\frac{v^2(x,y,z,t)}{c^2}}\, dt\, dV$$

Sostituendo m_0 con $\rho_0 dV$ ipotizziamo un osservatore in moto solidale con le particelle e con il volume dV.

Rispetto ad un osservatore fisso il volume dV si contrae di un fattore γ e quindi la densità $\rho_0(x,y,z,t) \rightarrow \rho_0(x,y,z,t)\gamma$ aumenta di un fattore γ.

Il quadrivettore quantità di moto diventa per un osservatore fisso

$$\vec{p} = \left(\frac{\gamma \rho_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \frac{\gamma \rho_0 v^x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \frac{\gamma \rho_0 v^y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} ; \frac{\gamma \rho_0 v^z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

1) Bilancio della componente zero (energia)

Considero un volume fisso Ω e

per la conservazione della quantità di

moto impongo che la variazione interna

al volume nell'unità di tempo è

pari al flusso uscente dalla superficie

che delimita il volume

$$\underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_0 \gamma c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) d\Omega}_{\text{variazione interna al volume}} + \underbrace{\oint_{S} \left(\frac{\gamma \rho_0 c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) v^i n_i \, dS}_{\text{flusso attraverso la superficie}} = 0$$

Applicando il teorema della divergenza

$$\frac{\partial}{c\,\partial t}\left(\rho_0 \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_0 \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{v^j}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = 0 \quad (1)$$

Se si indica con $T^{ij} = \rho_0 \frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{v^j}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ $\begin{cases} i,j = 0-3 \\ v^0 = c \end{cases}$

l'equazione (1) si scrive

$$\frac{\partial}{\partial x^j} T^{0j} = 0 \qquad j = 0-3$$

e rappresenta la conservazione dell'energia $\frac{\rho_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

2) Bilancio della componente i della quantità di moto

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma \rho_0 \frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) d\Omega + \int_S \left(\gamma \rho_0 \frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) v^j n_j \, dS = 0$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Variazione interna al volume}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{flusso attraverso la superficie}}$$

Applicando il teorema della divergenza

$$\frac{\partial}{c\,\partial t}\left(\rho_0 \frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\rho_0 \frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v^j}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = 0 \qquad (2)$$

l'equazione (2) si scrive

$$\frac{\partial}{\partial x^j} T^{ij} = \phi \qquad j = 0-3$$ rappresenta la

conservazione della componente i della quantità di moto $\dfrac{\rho_0 v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Il tensore

$$T^{ij} = \rho_0 \frac{v^i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{v^j}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad i,j = 0 - 3$$

è detto tensore energia impulso di una particella libera.

Le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto si scrivono nella forma

$$\frac{\partial}{\partial x^j} T^{ij} = 0$$

. La quadridivergenza del tensore energia impulso è nulla.