Il momento angolare in meccanica quantistica

Il momento angolare in meccanica quantistica

Diamo di seguito la definizione di operatore momento angolare.

<u>Def</u>

$$\hat{L}_x = \hat{y}\,\hat{p}_z - \hat{z}\,\hat{p}_y \qquad \hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\hat{L}_y = \hat{z}\,\hat{p}_x - \hat{x}\,\hat{p}_z \qquad \hat{x}_i = x_i$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\,\hat{p}_y - \hat{y}\,\hat{p}_x$$

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

Il momento angolare in due assi differenti è definito da operatori che non commutano tra di loro valendo la relazione

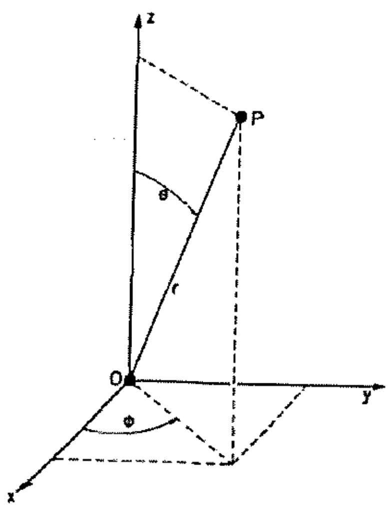
$[L_i, L_j] = i\hbar\,\varepsilon_{ijk} L_k$ pertanto non è

possibile misurare contemporaneamente per uno stato $|\alpha\rangle$ il momento angolare rispetto a due assi differenti.

Vale invece la commutazione tra $\hat{L}_i$ e $\hat{L}^2$

$[\hat{L}_i, \hat{L}^2]=0$ pertanto è possibile misurare per un sistema $|\alpha\rangle$ contemporaneamente il momento angolare totale e la sua proiezione su un asse ad esempio l'asse z.

Passiamo ora in coordinate sferiche



$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\phi\; sen\vartheta \\
y &= r sen\phi\; sen\vartheta \\
z &= r\cos\vartheta
\end{aligned}
\qquad \text{con} \qquad
\begin{aligned}
&0 \le r < \infty \\
&0 \le \vartheta \le \pi \\
&0 \le \phi < 2\pi
\end{aligned}
$$

e che

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\phi\; sen\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\phi\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r}\frac{sen\phi}{sen\vartheta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = sen\phi\; sen\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}sen\phi\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\phi}{sen\vartheta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}sen\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

$$\begin{cases} \hat{L}_z = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial \phi} \\ \hat{L}_x = i\hbar \left(\sin\phi \dfrac{\partial}{\partial \theta} + \cot\theta \cos\phi \dfrac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{L}_y = i\hbar \left(-\cos\phi \dfrac{\partial}{\partial \theta} + \cot\theta \sin\phi \dfrac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ \hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\dfrac{1}{\sin\theta} \dfrac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \dfrac{\partial}{\partial \theta} \right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta} \dfrac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \end{cases}$$

Si dimostra che le autofunzioni dell'operatore $\hat{L}^2$ sono dette <u>armoniche sferiche</u> e vale la relazione

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

con $\hbar^2 l(l+1)$ autovalori.

Poichè $\hat{L}^2$ commuta con $\hat{L}_z$ le armoniche sferiche sono autofunzioni anche per $\hat{L}_z$

e vale la relazione

$$\hat{L}_3 Y_{lm}(\theta,\phi) = m\hbar Y_{lm}(\theta,\phi)$$

con $l = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \pm l$

Le funzioni armoniche sono ortonormali.

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \qquad l=0$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta\, e^{i\phi} \\ Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\ Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\phi} \end{array}\right\} l=1$$

$$\left.\begin{array}{l} Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \operatorname{sen}^2\theta\, e^{2i\phi} \\ Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, e^{i\phi} \\ Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1) \\ Y_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, e^{-i\phi} \\ Y_{2-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \operatorname{sen}^2\theta\, e^{-2i\phi} \end{array}\right\} l=2$$