Teorema di De L'Hopital

Teorema di De L'Hopital

Il Teorema di De L'Hopital permette di calcolare il limite di alcune forme indeterminate tipo:

(a) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$	(b) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$
(c) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$	(d) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

$\boxed{\text{DIMOSTRAZIONE (a)}}$

1) Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a, b]$ e $x_0 \in [a, b]$

con $f(x_0) = g(x_0) = 0$

2) Siano $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in $[a, b]$ eccetto al più il punto x_0

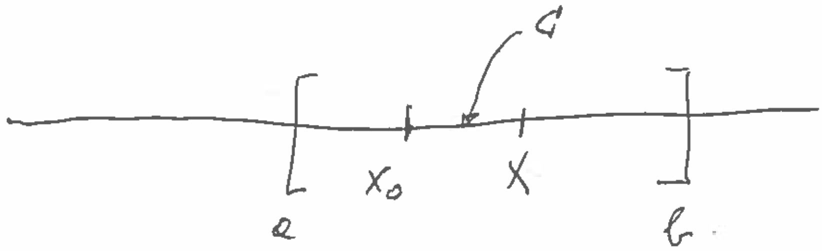
3) Esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$

4) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ eccetto al più x_0

Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

Dim.



Per ipotesi $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$

poiché Applicando il teorema di Cauchy

tra x e x_0 $\exists\, c$ t.c.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

passando al limite $x \to x_0$ $c \to x_0$

$f(x_0) = 0$ per ipotesi $g(x_0) = 0$ per ipotesi

Pertanto $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Vediamo il caso in cui

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

1) Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue in (x_0, b)

con $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

2) Siano $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in (x_0, b)

3) Esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$

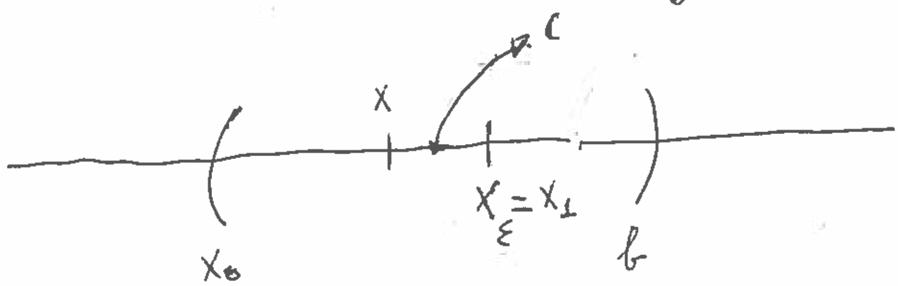
4) $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (x_0, b)$ eccetto al più x_0

Allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

<u>Dim</u>

Per ipotesi esiste $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$



Dalla definizione di limite

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x_\varepsilon = x_1$ t.c. $\forall x \in (x_0 ; x_1 = x_\varepsilon)$

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} \right| < \lambda - \varepsilon$$

$$\lambda - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < \lambda + \varepsilon$$

Applicando il teorema di Cauchy tra i punti x e x_1 $\exists\, c$ t.c.

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ma

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underbrace{\frac{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}}}_{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ma $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 1$ e $c \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$