Derivate

Derivata

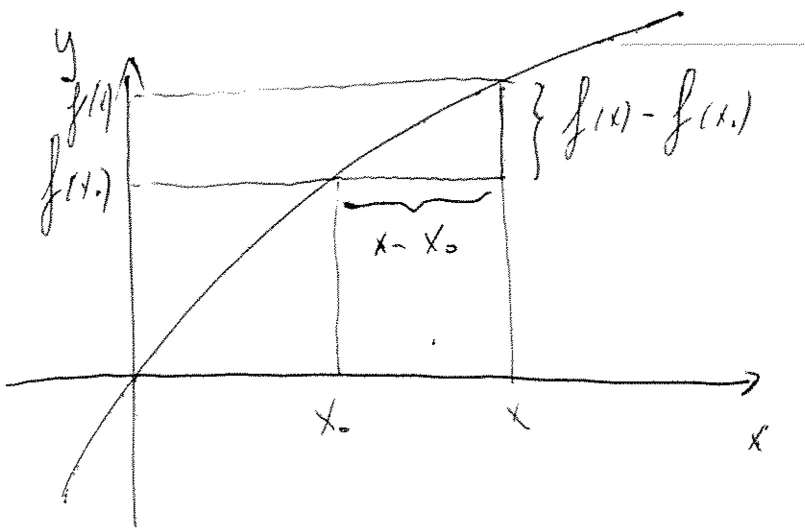
Sia $f : [a,b]$ e $x_0 \in [a,b]$

Si definisce rapporto incrementale

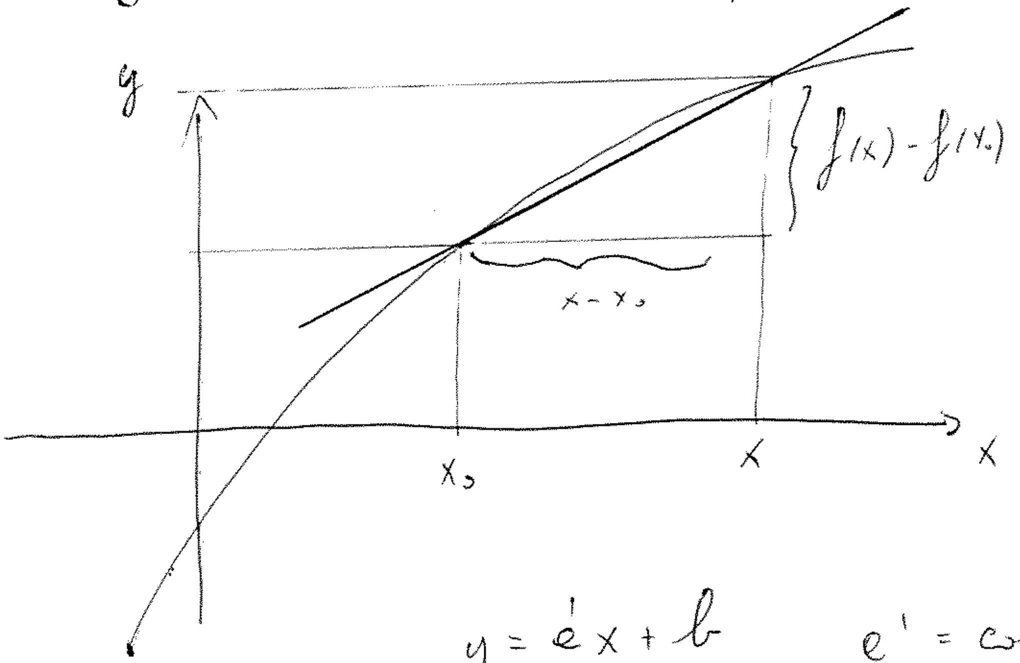
il valore $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ con $x \in [a,b]$

Si dice che $f(x)$ è derivabile in x_0 se

esiste ed è finito $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda$



Il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta passante per $f(x)$ e $f(x_0)$



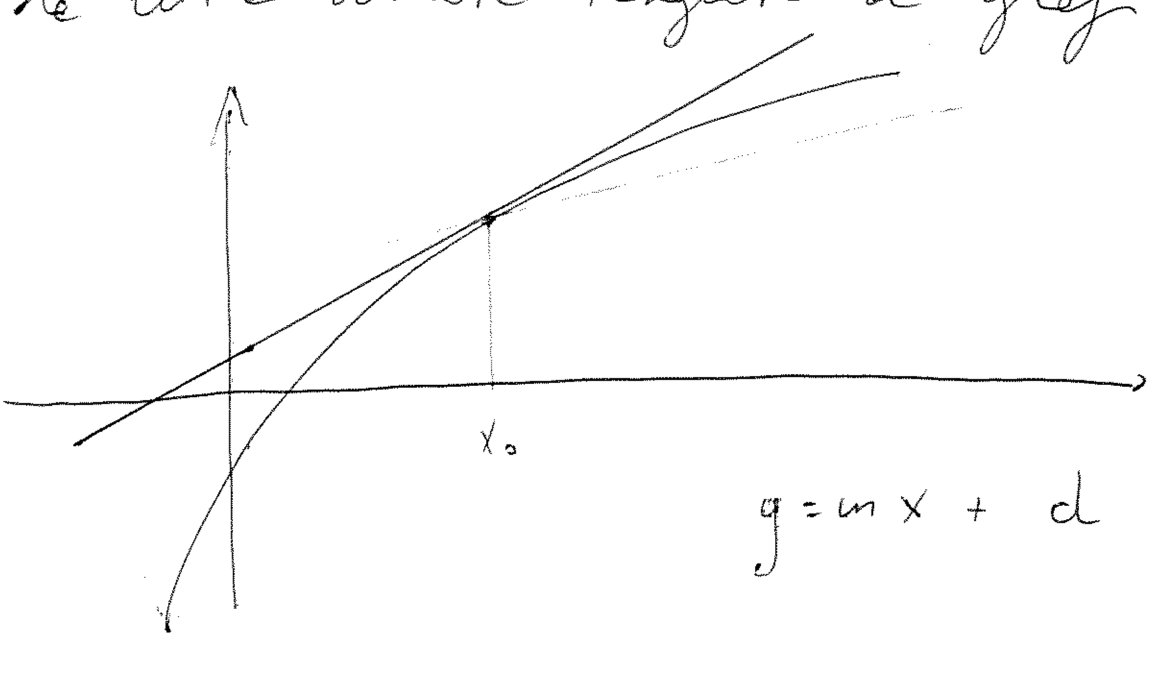
$y = e'x + b \qquad e' = $ coefficiente angolare.

Al tendere di $x \to x_0$

il segmento $f(x) - f(x_0) \to 0$

il segmento $x - x_0 \to 0$

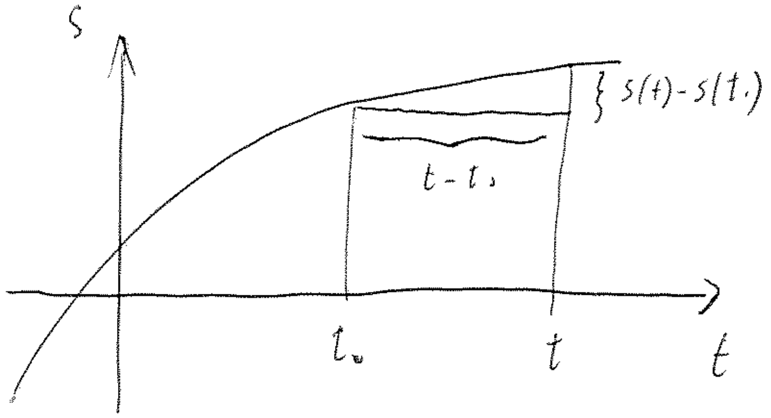
la retta diventa tangente al grafico in x_0



$y = mx + d$

m è il limite del rapporto incrementale per $x \to x_0$ e rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente in x_0.

Interpretazione fisica della velocità



La velocità media tra t e t_0 è il rapporto incrementale $\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$.

La velocità istantanea in t_0 è $\displaystyle\lim_{t\to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$

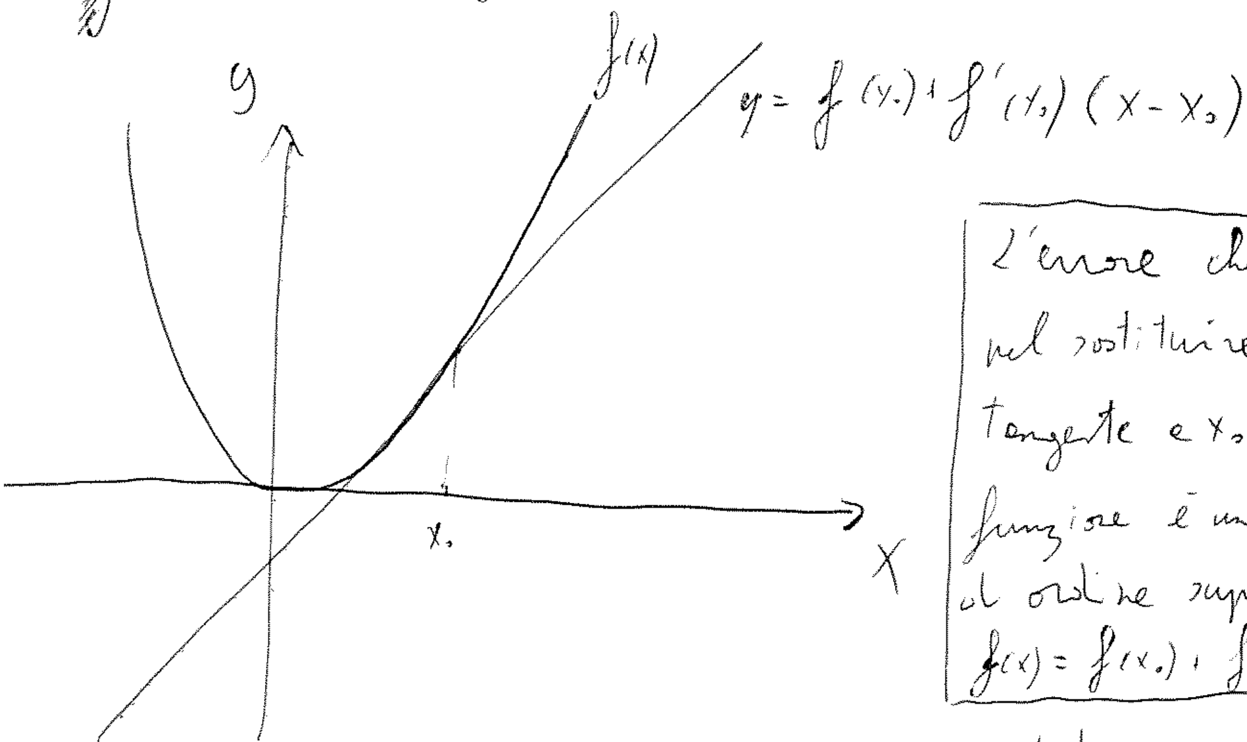
rappresenta la derivata di $s(t)$ nel punto t_0.

Graficamente rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente a $s(t)$ nel punto t_0.

Retta tangente ad una funzione data

Data una funzione $f(x)$ la retta tangente a $f(x)$ nel punto x_0 vale

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



L'errore che si commette nel sostituire la retta tangente a x_0 rispetto alla funzione è un infinitesimo di ordine superiore a $(x-x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

L'errore che si commette nella sostituzione di $f(x)$ con $y(x)$ vale $f(x) - y(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)$

Vale $\lim \left[f(x) - y(x)\right] / (x-x_0) = 0$

Derivate notevoli

1) funzione costante $f(x) = K$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \boxed{\frac{d}{dx} K = 0}$$

2) rette $f(x) = ax + b$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(ax+b) = a}$$

3) potenze $x^n = f(x)$

$$\boxed{\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}}$$

4) Sen x $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x}$$

5) $\cos x$ $\qquad f(x) = \cos x$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x}$$

6) esponenziale a^x $\qquad f(x) = a^x$

$$\boxed{\frac{d}{dx} a^x = a^x \log_e a}$$

7) esponenziale e^x $\qquad f(x) = e^x$

$$\boxed{\frac{d}{dx} e^x = e^x}$$

8) logaritmo $\qquad f(x) = \log x$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x}}$$

Regole di derivazione delle derivate

1) $$\frac{d}{dx}\left(f+g\right)=\frac{d}{dx}f+\frac{d}{dx}g$$

2) $$\frac{d}{dx}\left(K f(x)\right) \quad \text{con } K \text{ costante} \quad = K\frac{d}{dx}f(x)$$

3) $$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x)+f(x)\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)$$

4) $$\frac{d}{dx}\left(g\circ f\right)(x)=\cancel{g}\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

5) $$y=f(x) \qquad x=f^{-1}(y)$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(y)=\frac{1}{\frac{d}{dx}f(x)}$$

6) Derivata del rapporto

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) \cdot g(x) - f(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} g(x)\right)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Riassunto derivate notevoli

$f(x) = \text{costante}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = n\, x^{n-1}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \log(e)$
$f(x) = \log_e x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln(a)}$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$f(x) = \cot(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$	$f'(x) = +\frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$