Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE
LI15 - SCIENTIFICO - SEZIONE AD INDIRIZZO SPORTIVO

(Testo valevole anche per le corrispondenti sperimentazioni internazionali e quadriennali)

Tema di: MATEMATICA e FISICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

PROBLEMA 1

Assegnate due costanti reali a e b (con $a > 0$), si consideri la funzione $q(t)$ così definita:

$$q(t) = at \cdot e^{bt}$$

1. A seconda dei possibili valori di a e b, discutere se nel grafico della funzione q è presente un punto di massimo o di minimo. Determinare i valori di a e b in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $q(t)$, in un piano cartesiano di coordinate (t, y), ha un massimo nel punto $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$.
2. Assumendo, d'ora in avanti, di avere $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, studiare la funzione
$$q(t) = 4t \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$
verificando, in particolare, che si ha un flesso nel punto $F\left(4, \frac{16}{e^2}\right)$.
Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto F.

3. Supponendo che la funzione $q(t)$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in C) che attraversa all'istante di tempo t (misurato in s) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti a e b sopra indicate. Sempre assumendo $a = 4$ e $b = -\frac{1}{2}$, esprimere l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante t; determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.

4. Indicando, per $t_0 \geq 0$, con $Q(t_0)$ la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo $[0, t_0]$, determinare a quale valore tende $Q(t_0)$ per $t_0 \to +\infty$.
Supponendo che la resistenza del conduttore sia $R = 3\Omega$, scrivere (senza poi effettuare il calcolo), un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$.

PROBLEMA 2

Una carica elettrica puntiforme $Q_1 = 4q$ (con q positivo) è fissata nell'origine O di un sistema di riferimento nel piano Oxy (dove x e y sono espressi in m). Una seconda carica elettrica puntiforme $Q_2 = q$ è vincolata a rimanere sulla retta r di equazione $y = 1$.

1. Supponendo che la carica Q_2 sia collocata nel punto $A(0, 1)$, provare che esiste un unico punto P del piano nel quale il campo elettrostatico generato dalle cariche Q_1 e Q_2 è nullo. Individuare la posizione del punto P e discutere se una terza carica collocata in P si trova in equilibrio elettrostatico stabile oppure instabile.

2. Verificare che, se la carica Q_2 si trova nel punto della retta r avente ascissa x, l'energia potenziale elettrostatica del sistema costituito da Q_1 e Q_2 è data da

$$\mathcal{U}(x) = k\,\frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

dove k è una costante positiva (unità di misura: $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{C}^2$).

3. Studiare la funzione $\mathcal{U}(x)$ per $x \in \mathbb{R}$, specificandone eventuali simmetrie, asintoti, massimi o minimi, flessi. Quali sono i coefficienti angolari delle tangenti nei punti di flesso?

4. A partire dal grafico della funzione $\mathcal{U}$, tracciare il grafico della funzione $\mathcal{U}'$, specificandone le eventuali proprietà di simmetria. Determinare il valore di $\int_{-m}^{m} \mathcal{U}'(x)\,dx$ (dove $m > 0$ indica l'ascissa del punto di minimo di $\mathcal{U}'$).

QUESITI

1. Determinare i valori di a e b in modo che la funzione $g\colon \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 3 - a\,x^2 & \text{per } x \le 1 \\ \dfrac{b}{x-3} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

sia derivabile in tutto il suo dominio. Tracciare i grafici delle funzioni g e g'.

2. Sia $\mathcal{R}$ la regione piana compresa tra l'asse x e la curva di equazione $y = 2e^{1-|x|}$. Provare che, tra i rettangoli inscritti in $\mathcal{R}$ e aventi un lato sull'asse x, quello di area massima ha perimetro minimo ed è un quadrato.

3. Una scatola contiene 16 palline numerate da 1 a 16.
   - Se ne estraggono 3, una alla volta, rimettendo ogni volta nella scatola la pallina estratta. Qual è la probabilità che il primo numero estratto sia 10 e gli altri due minori di 10?
   - Se ne estraggono 5 contemporaneamente. Qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia uguale a 13?

4. Scrivere, giustificando la scelta effettuata, una funzione razionale $y = \frac{s(x)}{t(x)}$, dove $s(x)$ e $t(x)$ sono polinomi, tale che il grafico della funzione:
   - incontri l'asse x nei punti di ascissa -1 e 2 e sia ad esso tangente in quest'ultimo punto;
   - abbia asintoti verticali di equazioni $x = -3$ e $x = 1$;
   - passi per il punto $P(7, 10)$.

   Rappresentare, qualitativamente, il grafico della funzione trovata.

5. Si consideri la superficie sferica S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z = 0$.
   - Dopo aver determinato le coordinate del centro e la misura del raggio, verificare che il piano π di equazione $3x - 2y + 6z + 1 = 0$ e la superficie S sono secanti.
   - Determinare il raggio della circonferenza ottenuta intersecando π e S.

6. Un punto materiale si muove di moto rettilineo, secondo la legge oraria espressa, per $t \geq 0$, da $x(t) = \frac{1}{9}t^2\left(\frac{1}{3}t + 2\right)$, dove $x(t)$ indica (in m) la posizione occupata dal punto all'istante t (in s). Si tratta di un moto uniformemente accelerato? Calcolare la velocità media nei primi 9 secondi di moto e determinare l'istante in cui il punto si muove a questa velocità.

7. Una sfera di massa m urta centralmente a velocità v una seconda sfera, avente massa $3m$ ed inizialmente ferma.
   a. Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che tale urto sia perfettamente elastico.
   b. Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che esso sia completamente anelastico. Esprimere, in questo caso, il valore dell'energia dissipata.

8. Un campo magnetico, la cui intensità varia secondo la legge $B(t) = B_0(2 + \mathrm{sen}(\omega t))$, dove t indica il tempo, attraversa perpendicolarmente un circuito quadrato di lato l. Detta R la resistenza presente nel circuito, determinare la forza elettromotrice e l'intensità di corrente indotte nel circuito all'istante t. Specificare le unità di misura di tutte le grandezze coinvolte.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Problema N 1

Studio della funzione $q(t) = a t e^{bt}$ con $a > 0$

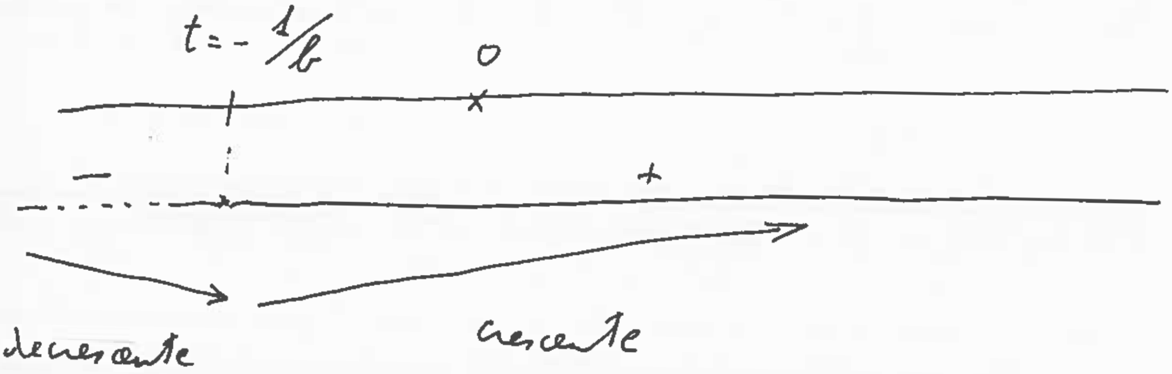
1 caso) $b > 0$

$$\frac{dq(t)}{dt} = a e^{bt} + a t b e^{bt} = a(1 + tb)e^{bt}$$

$$\frac{dq}{dt} > 0 \Rightarrow a(1 + tb)e^{bt} > 0$$

essendo $b > 0$ $\quad \frac{dq}{dt} > 0 \Rightarrow 1 + tb > 0 \Rightarrow t > -\frac{1}{b}$

Studio derivata caso $b > 0$

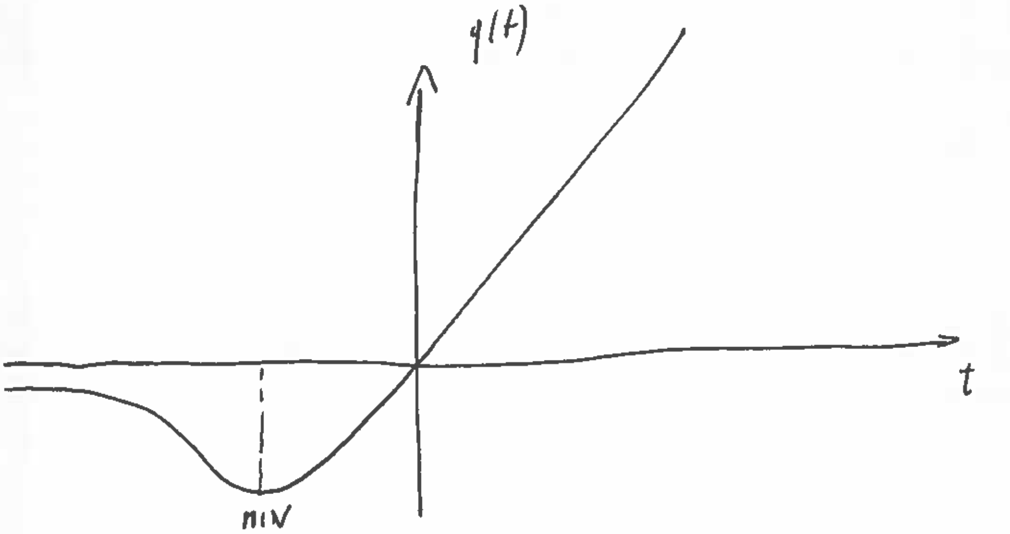


$$\lim_{t \to \infty} q(t) = \infty$$

$$\lim_{t \to -\infty} q(t) = 0$$

(2)

$y(t=0) = 0$



$$A \equiv \left(-\frac{1}{b} ; a\left(-\frac{1}{b}\right)e^{-1}\right) \equiv \left(-\frac{1}{b} ; -\frac{a}{eb}\right)$$

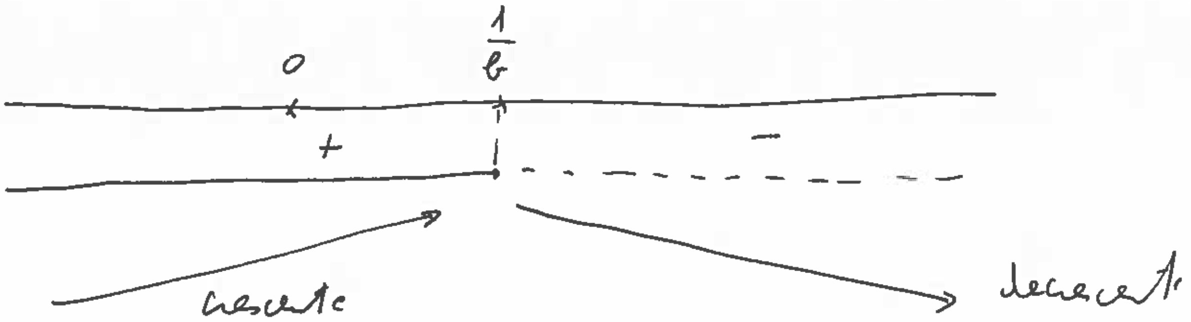
2 caso) $b<0$

$$\frac{dq}{dt} = a(1+tb)e^{bt}$$

$$\frac{dq}{dt} > 0 \Rightarrow (1+tb) > 0$$ essendo $b<0$

$$\frac{dq}{dt} > 0 \Rightarrow t < \frac{1}{b}$$

Studio derivata con $b<0$



$$\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$$

$$\lim_{t\to-\infty} q(t) = -\infty$$

MASSIMO $B \equiv \left(-\frac{1}{b} ; -\frac{a}{eb}\right)$ impongo il

massimo $B \equiv \left(2 ; \frac{8}{e}\right) \Rightarrow$

$$\begin{cases} -\frac{1}{b} = 2 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{2}} \\ \frac{8}{e} = -\frac{a}{eb} \Rightarrow 2a = 8 \\ \Rightarrow \boxed{a = 4} \end{cases}$$

Calcolo il flesso della funzione

$$q(t) = a\,t\,e^{bt} \qquad \text{con} \begin{cases} a > 0 \\ b = -\frac{1}{2} \\ e = 4 \end{cases}$$

$$\frac{dq}{dt} = a(1 + tb)\,e^{bt}$$

Calcolo del flesso

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[a\,e^{bt} + abt\,e^{bt}\right] =$$

$$= ab\,e^{bt} + ab\,e^{bt} + ab^2 t\,e^{bt} =$$

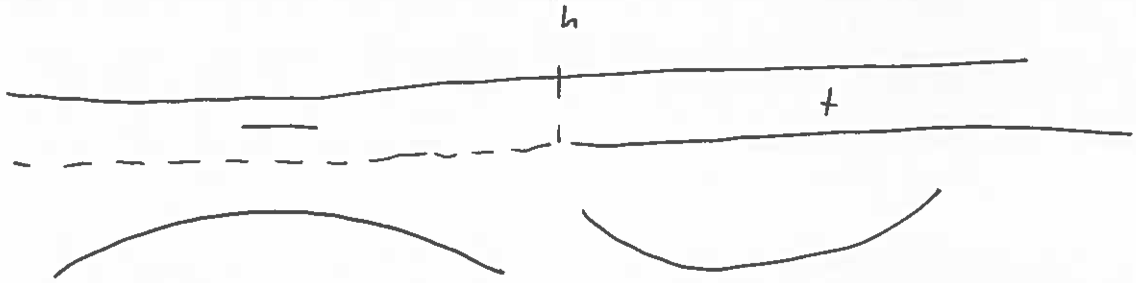
$$= 2ab\,e^{bt} + ab^2 t\,e^{bt}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} > 0 \qquad 2 + bt > 0 \Rightarrow \text{essendo } b < 0$$

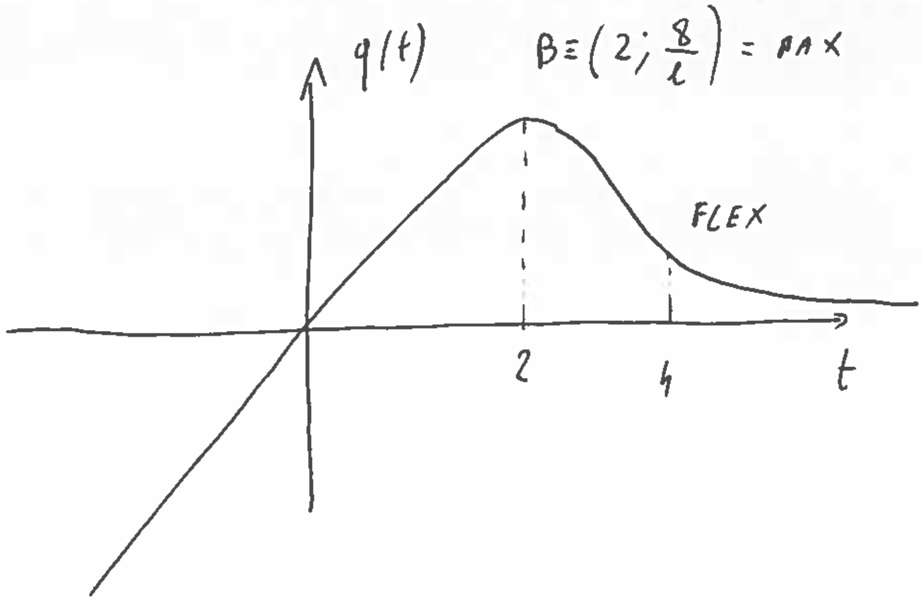
$$t > -\frac{2}{b} = 4$$

Studio flesso

Studio del flesso



Il flesso cade nel punto $F \equiv \left(4 ; \frac{16}{e^2}\right)$



$$q(t) = a t \cdot e^{bt}$$

$$[q(t)] = \text{Coulomb}$$

$$[a] = \text{Coulomb} \times \text{secondi}^{-1}$$

$$[b] = \text{secondi}^{-1}$$

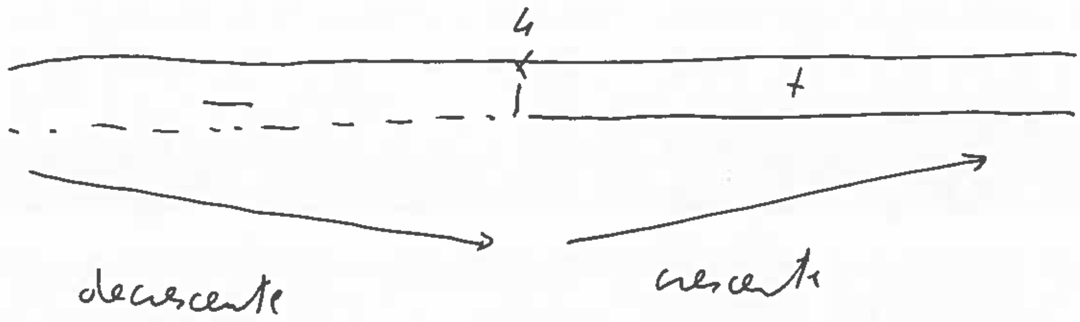
— · — · — ·

Calcolare la corrente per $t \in [0, \infty)$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = a(1 + tb)e^{bt} \qquad \begin{cases} a = 4 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$$

Studio della derivata di $i(t)$



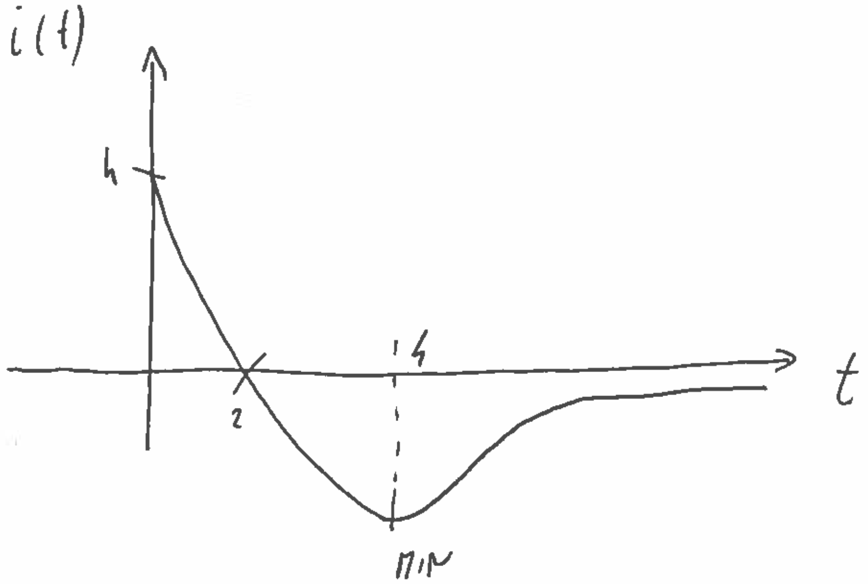
⑦

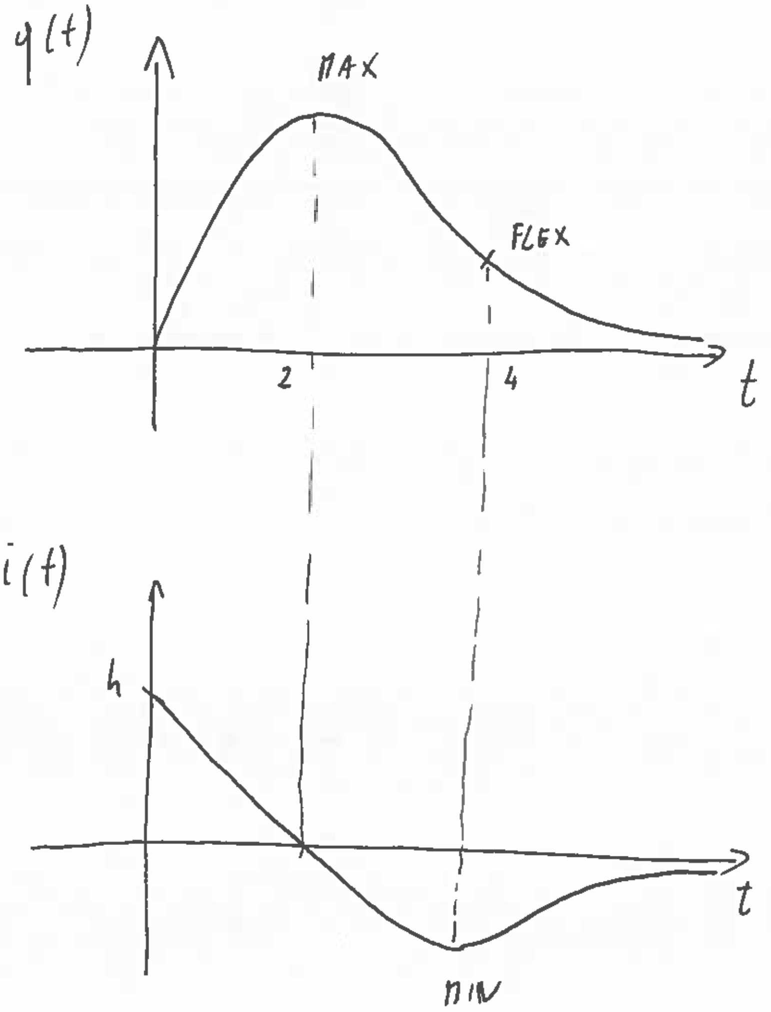
$i(t=0) = 4$

$\lim_{t \to \infty} i(t) = 0$

Zeri della funzione $i(t)$

$(1 + t b) = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{b} = 2$





$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

$Q(t_0)$ = somma delle cariche che attraversano il conduttore dal tempo $t=0$ al tempo $t=t_0$

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} q(t)\,dt$$ rappresenta l'area

sottesa alla curva $q(t)$

La potenza dissipata vale

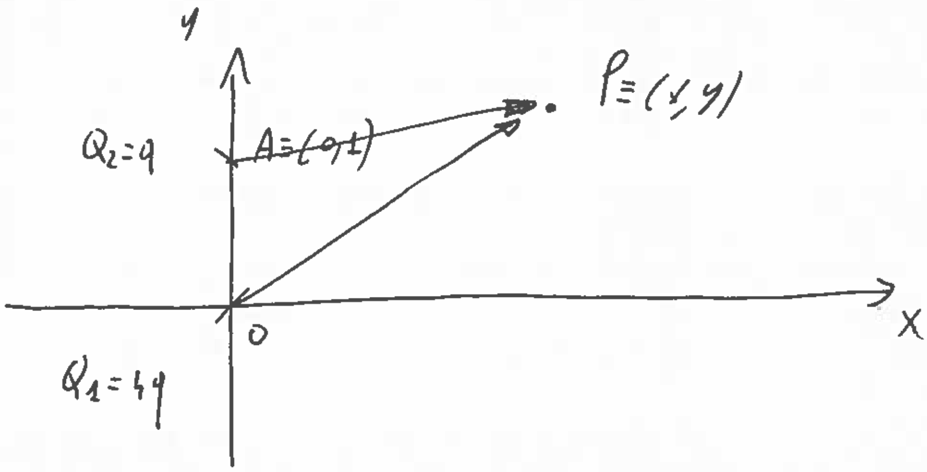
$W = R I^2$

L'energia dissipata nell'intervallo di tempo

$[0, t_0)$

$$E = \int_0^{t_0} R I^2 \, dt$$

Problema N°2



Il campo elettrico in un punto $P \equiv (x, y)$

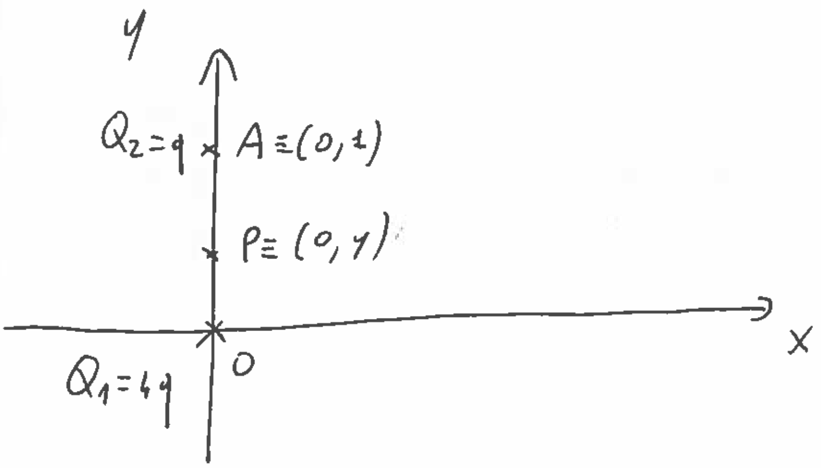
è dato dalla somma dei vettori

$K_1 (P-A) + K_2 (P-O)$. Questa somma

può essere nulla solo se i due vettori

hanno la stessa direzione cioè se il

punto P si trova sull'asse y.



per $y > 1$ i due campi ~~stesso~~ hanno le stesse direzione e verso pertanto non possono annullarsi

per $y < 0$ analogamente i due campi hanno le stesse direzione e verso e non possono annullarsi.

Consideriamo il caso in cui il punto P si trova [illegible] tra $y = 1$ e $y = 0$

$$E = \frac{4\cancel{q}}{\cancel{4\pi\varepsilon_0} y^2} - \frac{\cancel{q}}{\cancel{4\pi\varepsilon_0}(y-1)^2} = 0$$

$$\frac{4}{y^2} - \frac{1}{(y-1)^2} = 0$$

③

$$4(y-1)^2 - y^2 = 0$$

$$4(y^2+1-2y) - y^2 = 0$$

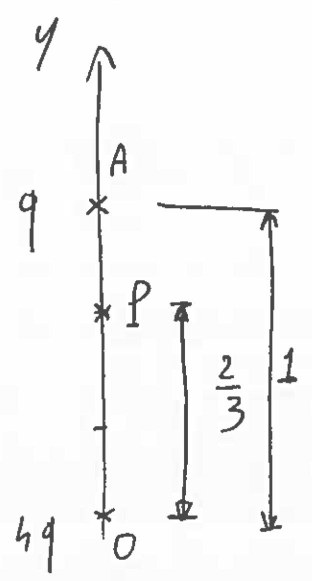
$$4y^2 + 4 - 8y - y^2 = 0$$

$$3y^2 - 8y + 4 = 0$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{3} = \frac{4 \pm 2}{3} \begin{cases} 2 & \text{(da scartare perché } y>1\text{)} \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

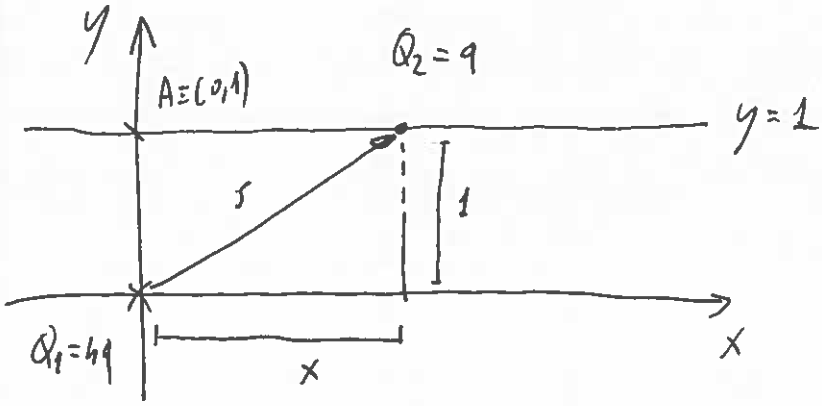
l'unico punto in cui il campo elettrico è nullo è

per $\boxed{y = \frac{2}{3}}$



$P \equiv (0, \frac{2}{3})$

4



$$U = \frac{4q^2}{4\pi \varepsilon_0 r} = \frac{4q^2}{4\pi \varepsilon_0 \sqrt{1+x^2}} = \frac{K 4 q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{x \to \infty} U(x) = 0$$

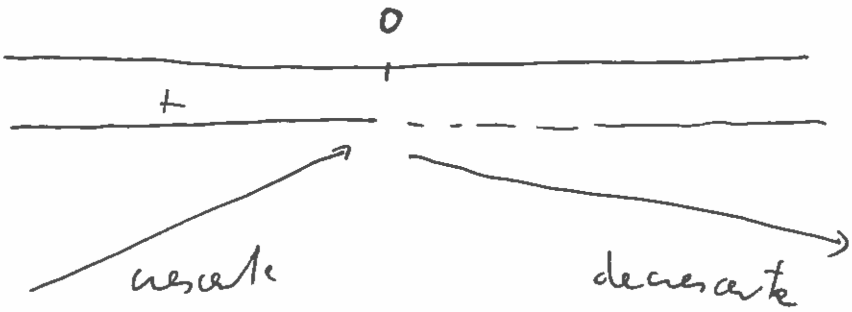
$$\lim_{x \to -\infty} U(x) = 0 \qquad U = \text{funzioni pari}$$

Studio le sue derivate $\qquad \alpha = 4q^2 K$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left[4q^2 K \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \alpha\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cancel{2} x$$

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{\alpha x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Derivata di $V(x)$ $\qquad \dfrac{dV}{dx} > 0 \Rightarrow x < 0$



Flesso di $V(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2} V(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{-\alpha\, x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] =$$

$$= -\alpha \frac{d}{dx}\left[x\,(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\right] =$$

$$= -\alpha\,(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} - \alpha\, x \left(-\frac{3}{\cancel{2}}\right)(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\, \cancel{2}x$$

$$= -\alpha\,(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} + 3\alpha\, x^2 (1+x^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} U(x) > 0 \Rightarrow$$

$$-1 + 3x^2(1+x^2)^{-1} > 0$$

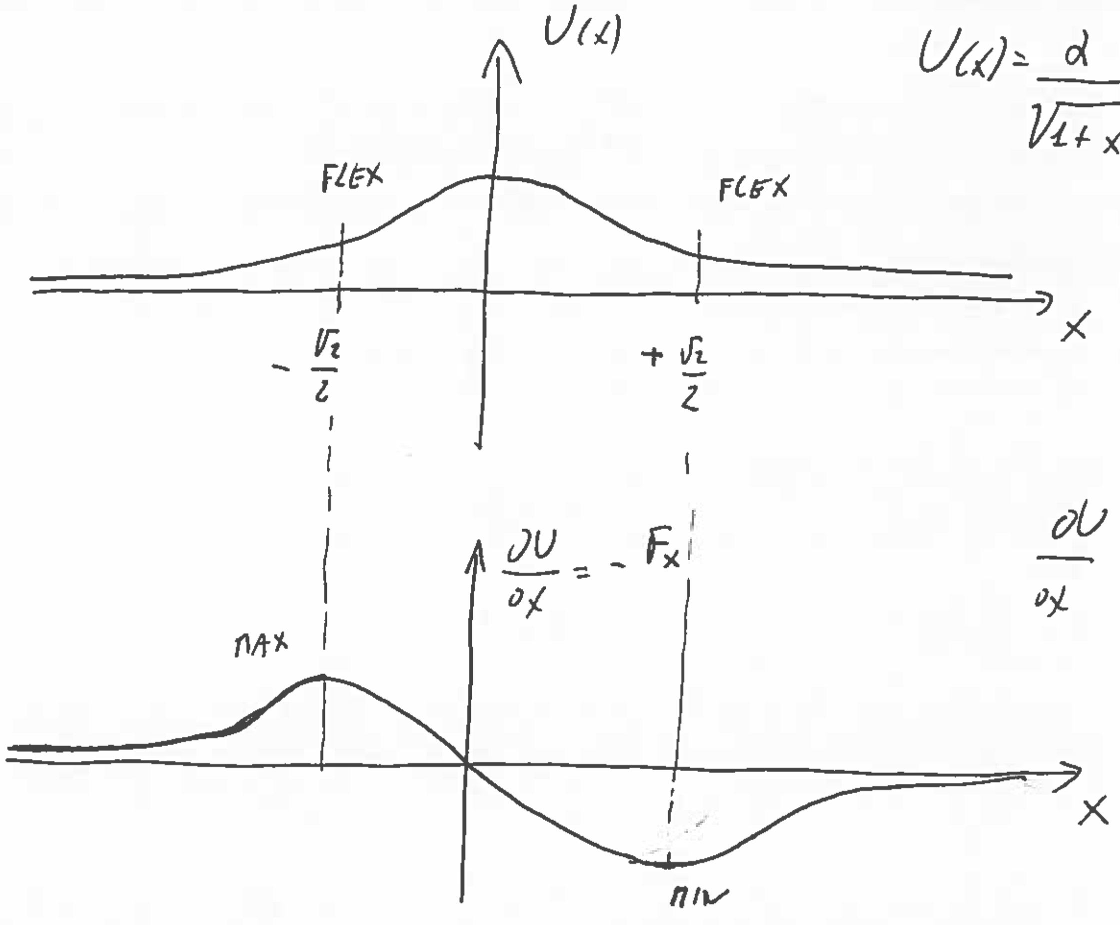
$$-1 + \frac{3x^2}{(1+x^2)} > 0$$

$$\frac{-1 - x^2 + 3x^2}{(1+x^2)} > 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 > 0$$

$$\begin{cases} x > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Studio $\frac{d^2 U(x)}{dx^2}$

$$U(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+x^2}}$$



$\frac{\partial U}{\partial x}$ è una funzione dispari

$$-F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\alpha x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

La forza si annulla nel punto di ascissa nulla.

Questo punto è di equilibrio instabile infatti se mi sposto lungo l'asse x positivo sulla carica agisce una forza pari a $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} > 0$ che l'allontana dalla posizione di equilibrio.

Analogamente se mi sposto lungo l'asse x negativo sulla carica agisce una forza pari a $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} < 0$ che l'allontana dalla posizione di equilibrio.

$$\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\partial U}{\partial x}\, dx = U\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - U\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

Quesito N°1

$$g(x) = \begin{cases} 3 - a x^2 & \boxed{\text{per } x \leq 1} \\ \dfrac{b}{x-3} & \boxed{\text{per } x > 1} \end{cases} \qquad g'(x) = \begin{cases} -2a x \\ \dfrac{-b}{(x-3)^2} \end{cases}$$

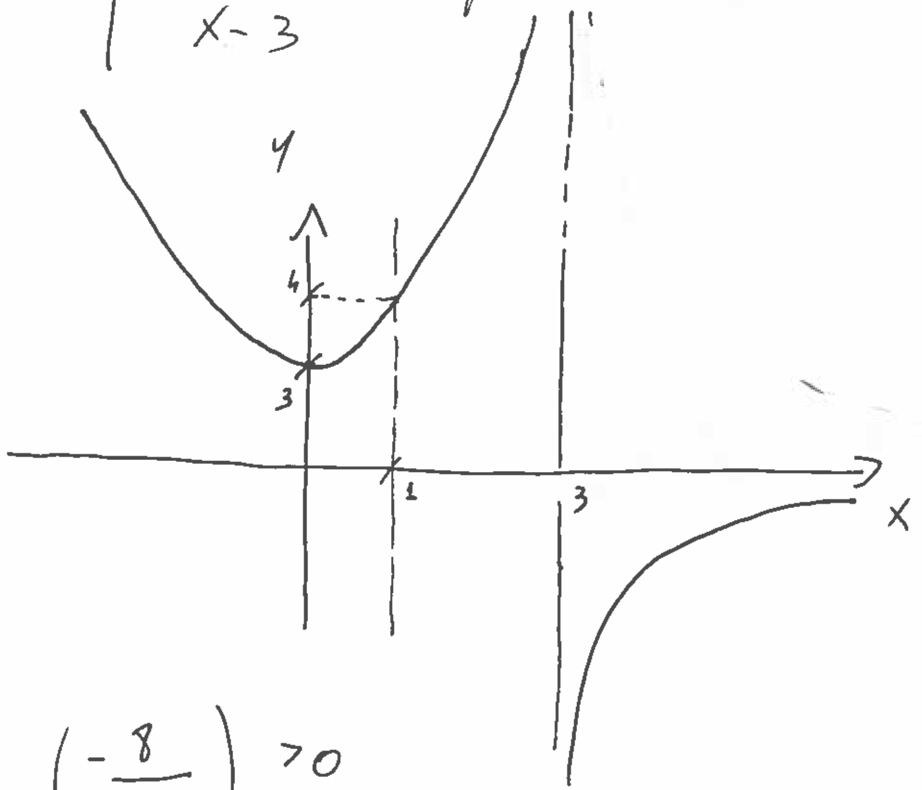
affinché $g(x)$ sia derivabile in tutto il suo dominio deve risultare che $g(x)$ sia continua e derivabile nel punto 1 essendo le due funzioni costituenti continue e derivabili nel dominio

$$\begin{cases} 3 - a \cdot 1 = \dfrac{b}{1-3} & \Rightarrow \quad a = 3 + \dfrac{b}{2} \Rightarrow b = 2a - 6 \\ -2a = -\dfrac{b}{4} & \Rightarrow b = 8a \end{cases}$$

$$\boxed{a = -1}$$

$$\boxed{b = -8}$$

$$g(x) = \begin{cases} +x^2+3 & \text{per } x \leq 1 \\ -\dfrac{8}{x-3} & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$



$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{8}{x-3}\right) > 0$$

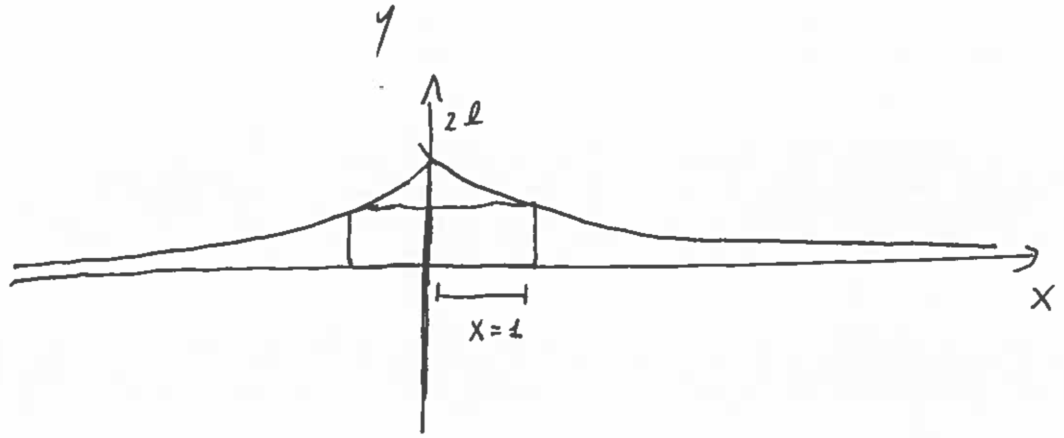
$$\frac{d}{dx}\left[-8(x-3)^{-1}\right] = +8(x-3)^{-2} > 0 \quad \forall x \neq 3$$

$$\lim_{x \to 3^-}$$

Quesito n°2

$$y = 2\, e^{1-|x|}$$

$$\begin{cases} y = 2\, e^{1-x} & \text{per } x>0 \\ y = 2\, e^{1+x} & \text{per } x<0 \end{cases}$$



$$A_{\text{rettangolo}} = 2x\, 2\, e^{1-x} = 4x\, e^{1-x}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0 \qquad 4\cancel{e^{1-x}} + 4x(-1)\cancel{e^{1-x}} = 0$$

$\boxed{x = 1}$ condizione massimizzazione aree

$$A_{MAX} = 4$$

$$P_{\text{rettangolo}} = 4x + 4\, e^{1-x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \qquad 4 - 4e^{1-x} = 0$$

$$1 = e^{1-x}$$

$$\ln 1 = 1 - x$$

$$\boxed{x = 1 - \underbrace{\cancel{\ln 1}}_{=0} \qquad \text{condizione minimo perimetro}}$$

Quesito n°3

Una scatola contiene 16 palline.

Calcolare:

1) Probabilità che con l'estrazione di 3 palline il primo numero sia 10 e gli altri due minori di 10

$$P(\text{estrarre } 10) = \frac{1}{16}$$

$$P(\text{estrarre} < 10) = \frac{9}{16}$$

$$P = P(\text{estrarre } 10)\, P(\text{estrarre} < 10)\, P(\text{estrarre} < 10) = \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} =$$

2) Se ne estraggono 5 contemporaneamente qual è la probabilità che il più grande dei numeri estratti sia 13.

Indico con

$P(A)$ = probabilità che su 5 estrazioni esca il numero desiderato ad esempio il 13

indico con

$P(B \backslash A)$ = probabilità di B condizionata ad A

la probabilità che una volta realizzata la $P(A)$ si realizzi la $P(B)$

Vale $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

$P(B|A)$ = probabilità che i numeri che compongono le altre 4 sfere estratte siano inferiore a 13

$$P(A) = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$$

Ricordando che

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ rappresenta il numero di combinazioni di n elementi presi k alla volta

$P(A)$

numero casi possibili $\binom{16}{5} = \frac{16!}{(16-5)!\,5!}$

numero casi favorevoli $\binom{15}{4} = \frac{15!}{(15-4)!\,4!}$

$$P(A) = \frac{15!}{(\cancel{15}-4)!\,4!} \quad \frac{5!\,\cancel{(16-5)}!}{16!} = \frac{5}{16}$$

Ricordando che

$$\binom{n}{K} = \frac{n!}{(n-K)!\,K!}$$ rappresenta il numero di combinazioni di n elementi presi K alla volta

$$P(B|A) = \frac{\text{numero casi possibili}}{\text{numero casi favorevoli}}$$

$$\text{numero casi possibili} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{(12-4)!\;4!}$$

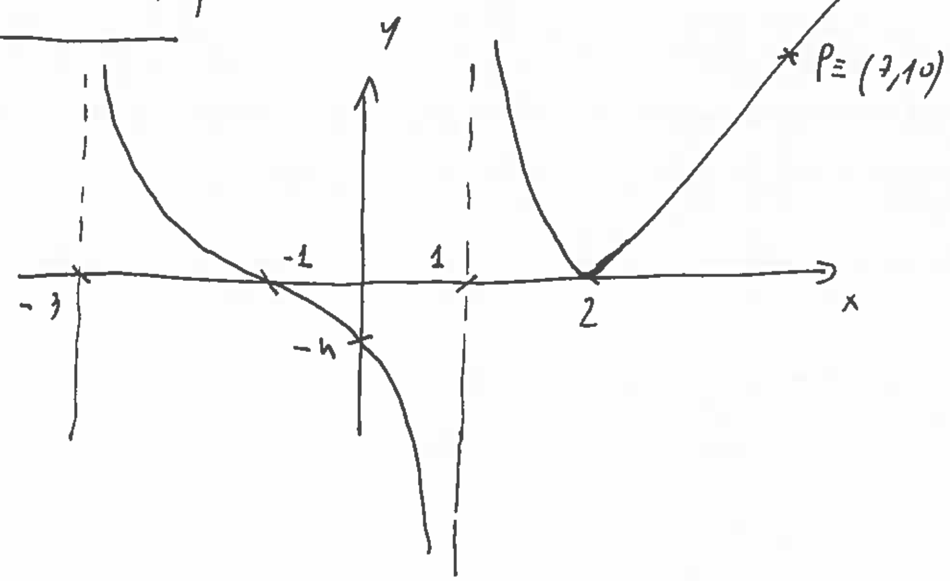
$$\text{numero casi favorevoli} = \binom{13}{5} = \frac{13!}{(13-5)!\;5!}$$

$$P(B|A) = \frac{5}{13}$$

$P(A \cap B)$ = probabilità di estrarre 13 e quattro numeri inferiori a 13

$$P(A \cap B) = \frac{5}{16} \cdot \frac{5}{13} = \frac{25}{208}$$

Quesito n°4



Per imporre il passaggio tra i punti di ascisse -1 e 2, gli asintoti verticali $-3 = x$ e $1 = x$ scelgo un rapporto di polinomi della forma

$$y = \frac{(x+1)(x-2)(ax+b)}{(x-1)(x+3)}$$

impongo il passaggio per il punto $P \equiv (7,10)$

$$10 = \frac{8 \times 5 \times (a7+b)}{6 \times 10} \Rightarrow \frac{\cancel{600}^{15}}{\cancel{40}} = 7a + b \Rightarrow b = 15 - 7a$$

②

$$y = \frac{(x+1)(x-2)(ax+15-7a)}{(x-1)(x+3)}$$

Calcolo ora la $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,(x+1)(x-2)(ax+15-7a)(x-1)^{-1}(x+3)^{-1} =$$

$$= (x-2)(ax+15-7a)(x-1)^{-1}(x+3)^{-1} + (x+1)(ax+15-7a)(x-1)^{-1}(x+3)^{-1} +$$

$$+ (x+1)(x-2)(a)(x-1)^{-1}(x+3)^{-1} +$$

$$+ (x+1)(x-2)(ax+15-7a)(-1)(x-1)^{-2}(x+3)^{-1} +$$

$$+ (x+1)(x-2)(ax+15-7a)(x-1)^{-1}(-1)(x+3)^{-2}$$

impongo $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 0$

$$(x+1)(ax+15-7a)(x-1)^{-1}(x+3)^{-1} = 0$$

$$2a + 15 - 7a = 0$$

$$5a = 15 \qquad \boxed{a = 3} \qquad \boxed{b = -6}$$

$$y = \frac{3(x+1)(x-2)(x-2)}{(x-1)(x+3)} = \frac{3(x+1)(x-2)^2}{(x^2+3x-x-3)} =$$

$$= \frac{3(x+1)(x^2+4-4x)}{(x^2+2x-3)} = \frac{3(x^3+\cancel{4x}-4x^2+x^2+4-\cancel{4x})}{(x^2+2x-3)} =$$

$$= \frac{3(x^3-3x^2+4)}{(x^2+2x-3)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(3x^2-6x)[x^2+2x-3]-3(x^3-3x^2+4)(2x+2)}{(x^2+2x-3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} > 0$$

$$(9x^2-18x)(x^2+2x-3)-(x^3-3x^2+4)(6x+6) > 0$$

$$9x^4+\cancel{18x^3}-27x^2-\cancel{18x^3}-36x^2+54x-(6x^4-18x^3+24x+$$
$$+6x^3-18x^2+24) > 0$$

$$9x^4-27x^2-36x^2+54x-6x^4+18x^3-24x-6x^3+18x^2-24 > 0$$

$$3x^4+12x^3-45x^2+30x-24 > 0$$

Applicando Ruffini

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4 + 12x^3 - 45x^2 + 30x - 24 & x-2 \\ \hline
3x^4 - 6x^3 & 3x^3 \\ \hline
// \quad 18x^3 - 45x^2 + 30x - 24 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
18x^3 - 45x^2 + 30x - 24 & x-2 \\ \hline
18x^3 - 36x^2 & 18x^2 \\ \hline
// \quad -9x^2 + 30x - 24 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
-9x^2 + 30x - 24 & x-2 \\ \hline
-9x^2 + 18x & -9x \\ \hline
// \quad 12x - 24 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
12x - 24 & x-2 \\ \hline
12x - 24 & 12 \\ \hline
// &
\end{array}
$$

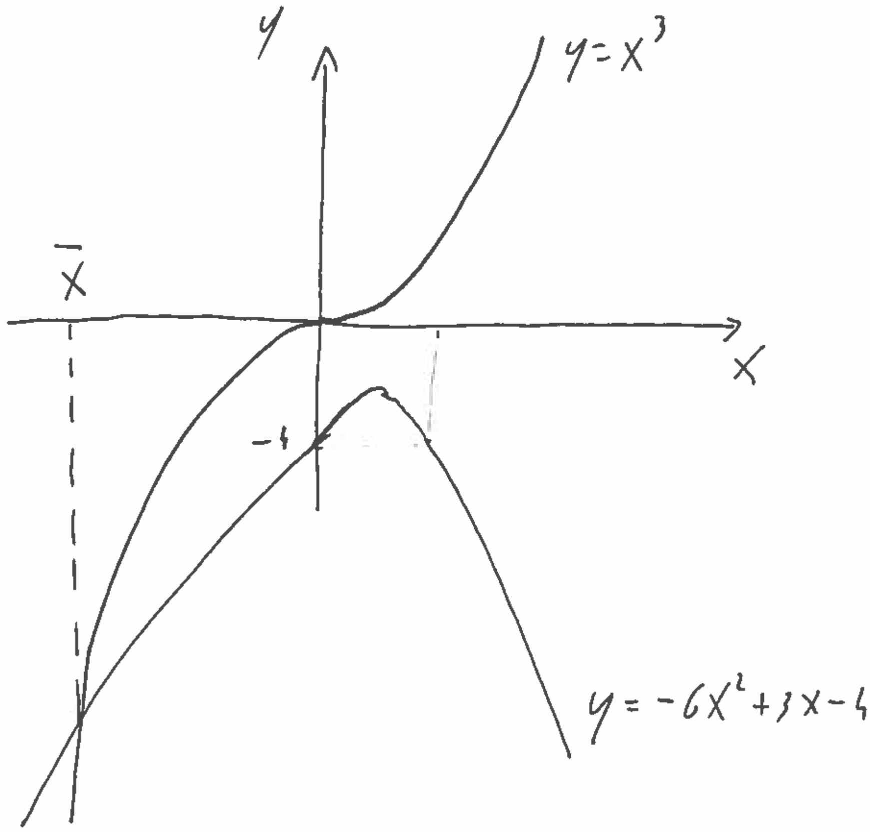
$$3x^4 + 12x^3 - 45x^2 + 30x - 24 = (x-2)\left(3x^3 + 18x^2 - 9x + 12\right)$$

~~Calcolo~~

$$3x^4+12x^3-15x^2+30x-24 = 3(x-2)(x^3+6x^2-3x+4)$$

Calcolo graficamente le radici di $x^3+6x^2-3x+4=0$

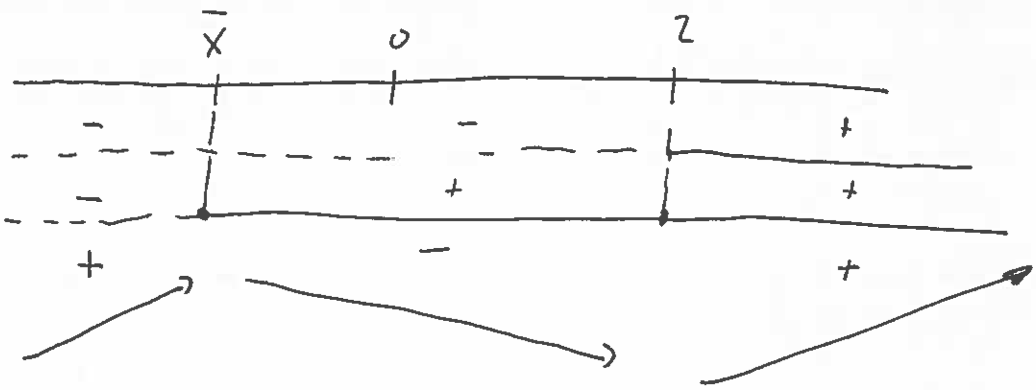
$$x^3 = -6x^2+3x-4$$



$x^3+6x^2-3x+4>0$ per $x>\bar{x}$

$x-2>0$ per $x>2$

Derivata > 0



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

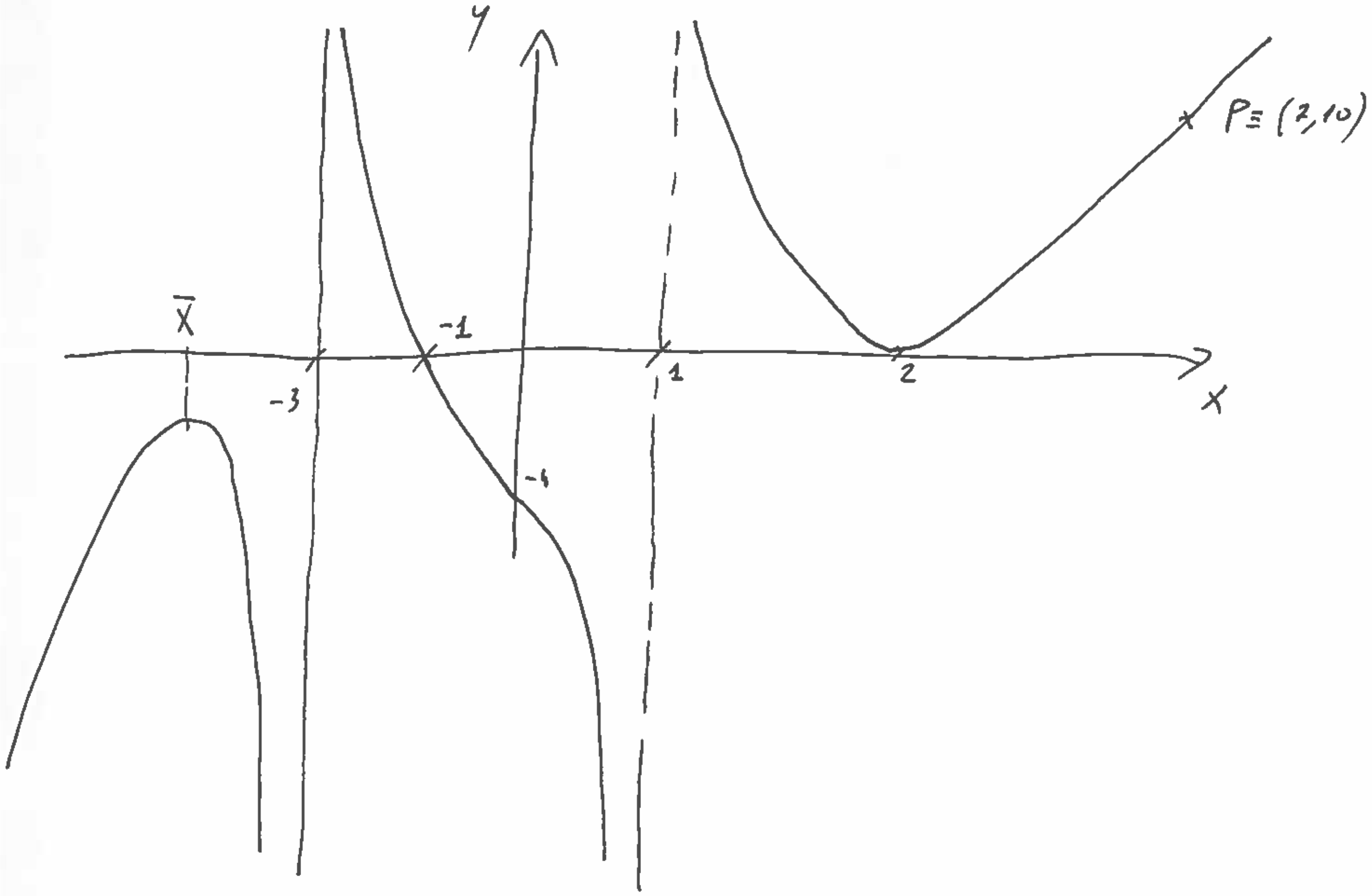
$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$


y
P ≡ (7,10)
$\bar{X}$
-1
-3
1
2
x
-4

$\boxed{\text{Quesito N°5}}$

equazione della sfera

$$\underline{x}^2+y^2+z^2-\underline{2x}+6z=0$$

1) Determinare il centro e il valore del raggio.

l'equazione di una sfera è della forma

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=r^2$$

l'equazione di partenza può essere scritta nella forma

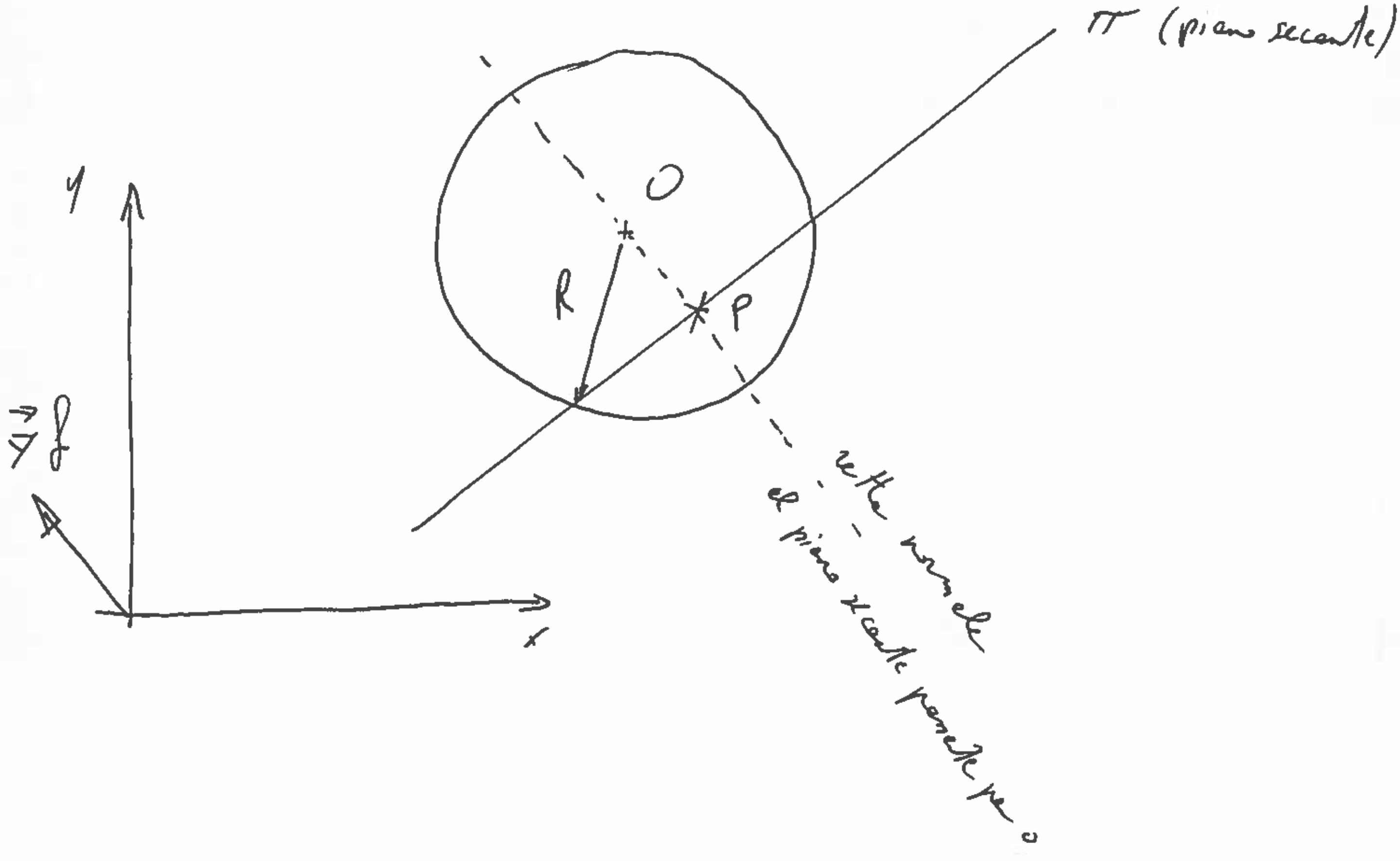
$$(x-1)^2-1+y^2+(z+3)^2-9=0$$

$$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=10$$

ha centro $O\equiv(1,0,-3)$ e raggio $R=\sqrt{10}$

Dato il piano per verificare se è secante alla sfera calcolo la distanza $\overline{PO}$ del piano dal centro della sfera e verifico che è minore di R.

Per calcolare la distanza del piano dato dal centro della sfera occorre scrivere l'equazione della retta normale al piano e passante per il centro della sfera; individuare il punto P di intersezione di questa retta con il piano e calcolare il modulo del vettore $(P-O)$ dove O è il centro della sfera.



1) Equazione della retta normale al piano secante passante per O

Se $3x-2y+6z+1=0$ è l'equazione del piano

indico con $f=3x-2y+6z+1$

l'equazione del piano può essere scritta come

$(\vec{\nabla} f)\cdot(x,y,z)=0$ da cui si ricava che

il $\vec{\nabla} f$ è normale al piano.

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (3;-2;6)$$

La retta normale al piano e passante per il centro della circonferenza ha equazioni parametriche

$$K(3;-2;6) + (1,0,-3)$$

Calcolo il punto P facendo l'intersezione della retta con il piano

$$3x - 2y + 6z + 1 = 0$$

$$3(3K+1) - 2(-2K) + 6(6K-3) + 1 = 0$$

$$9K + 3 + 4K + 36K - 18 + 1 = 0$$

$$49K = 14 \qquad K = \frac{14}{49}$$

Da cui

$$P = \frac{14}{49}(3;-2;6) + (1;0;3) = (1,85;-0.57;-1,28)$$

Se $O \equiv (1, 0, 3)$ è il centro della sfera

$$|P-O| = (1{,}85; -0{,}57; -1{,}28) - (1, 0, 3) =$$

$$= (0{,}85; -0{,}57; 1{,}72)$$

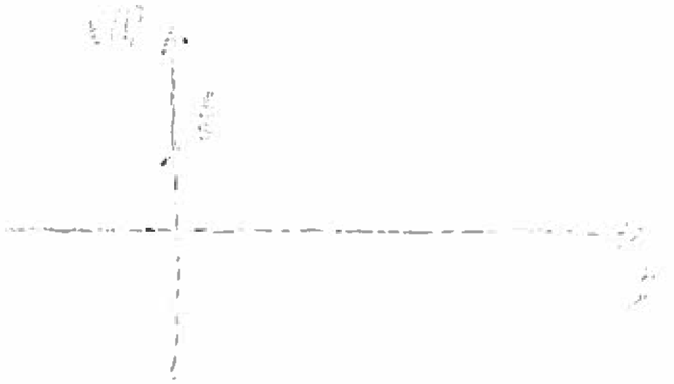
$$|P-O| = \sqrt{0{,}85^2 + 0{,}57^2 + 1{,}72^2} = 2 < R$$

Il raggio della sfera secante vale:

$$r = \sqrt{R^2 - \overline{PO}^2} = \sqrt{10 - 4} = \sqrt{6}$$

Quesito n° 6

$$x(t) = \frac{1}{9} t^2 \left(\frac{1}{3} t + 2 \right) = \frac{1}{27} t^3 + \frac{2}{9} t^2$$



$$\dot{x}(t) = \frac{1}{9} t^2 + \frac{4}{9} t = v(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{2}{9} t + \frac{4}{9} = a(t)$$

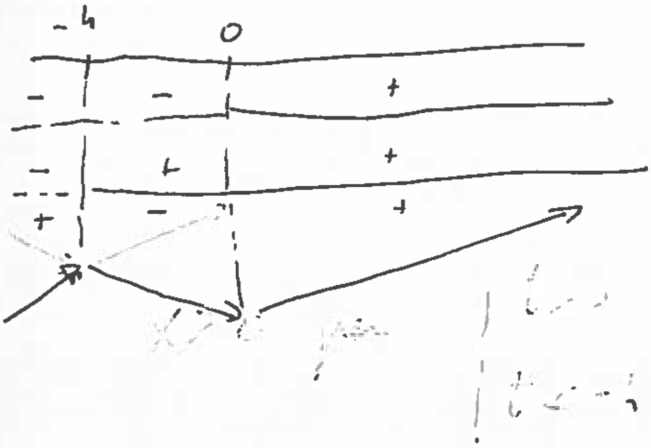
$$x(t) = \frac{1}{27} t^3 + \frac{2}{9} t^2 =$$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{9} t^2 + \frac{4}{9} t = v(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{2}{9} t + \frac{4}{9} = a(t)$$

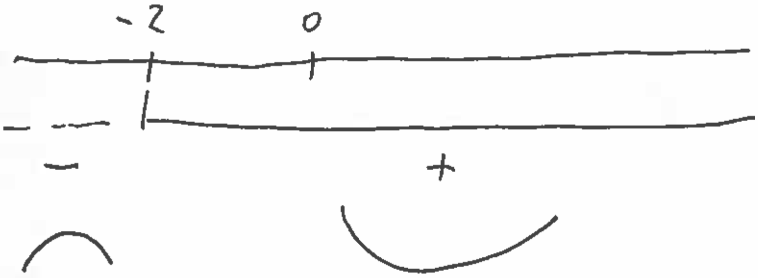
$\dot{x}(t) > 0$

$t(t+4) > 0$



$\ddot{x}(t) > 0$

$2t + 4 > 0 \qquad t > -2$



Gli zeri della funzione $x(t)$

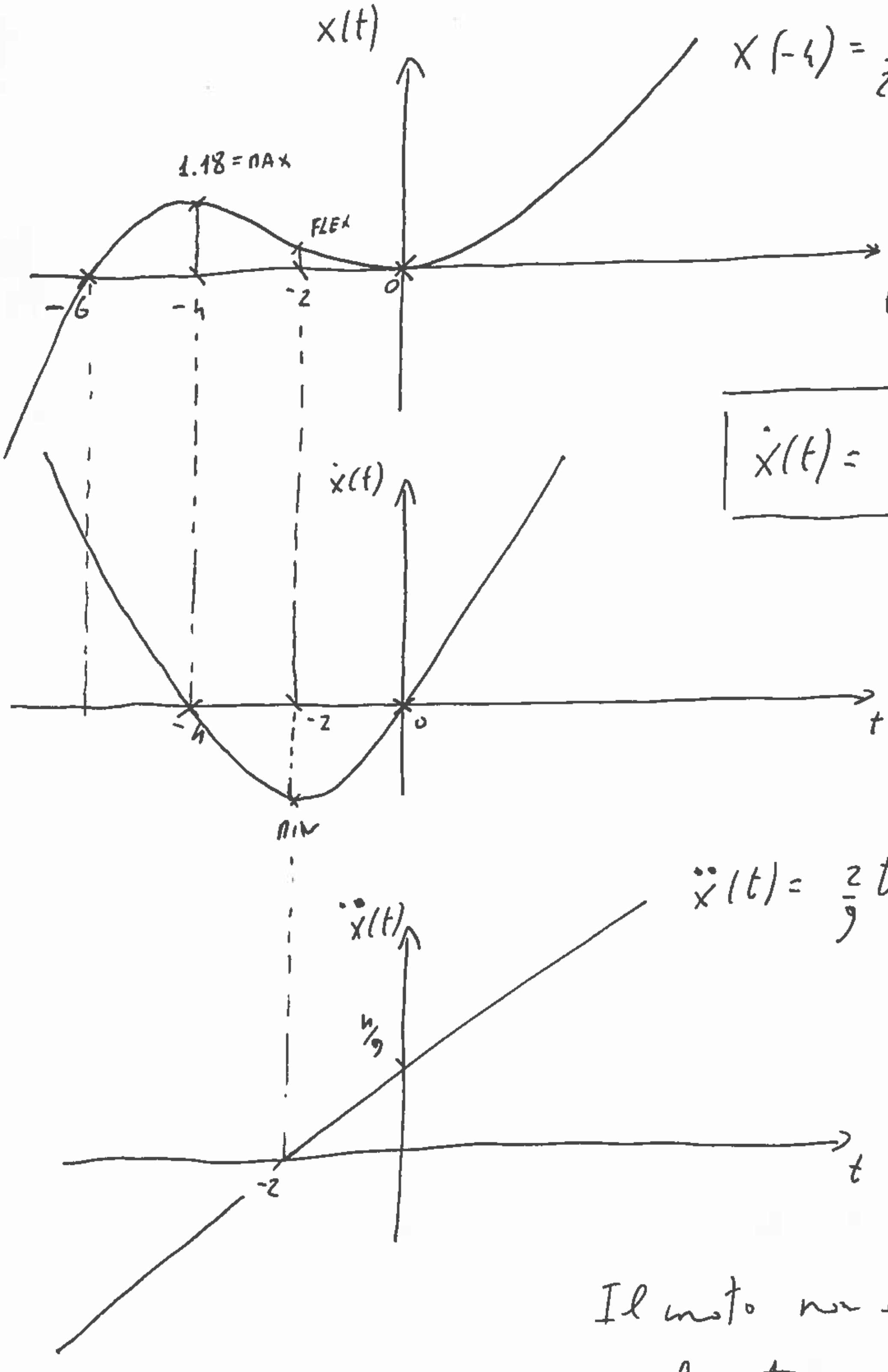
$t^2\left(\frac{1}{27}t + \frac{2}{9}\right) = 0 \qquad t = -\frac{2}{\cancel{9}} \times \cancel{27}^{\,3} = -6$

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = +\infty$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{27} t^3 + \frac{2}{9} t^2}$$

$$x(-4) = \frac{1}{27}(-64) + \frac{2}{9} 16 = 1.18$$



$$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{1}{9} t^2 + \frac{4}{9} t}$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{2}{9} t + \frac{4}{9} = a(t)$$

Il moto non è uniformemente accelerato poichè a non è costante

Velocità media nei primi 9 secondi

$$V_m = \frac{1}{9}\int_0^9 V(t)\,dt = \frac{1}{9}\int_0^9 \left(\frac{1}{9}t^2 + \frac{4}{9}t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{1}{27}t^3 + \frac{4}{18}t^2\right]_0^9 = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{27}9^3 + \frac{4}{18}9^2\right) =$$

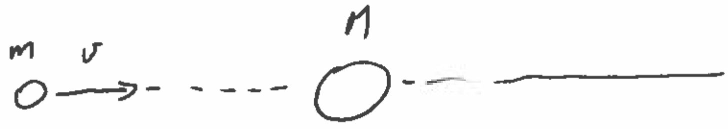
$$= \left(\frac{1}{27}9^2 + \frac{4}{\cancel{18}_2}\cancel{9}\right) =$$

$$\left(\frac{9}{3} + \frac{4}{2}\right) = \frac{30}{6} = 5$$

$\boxed{\text{Quesito n° 2}}$

Considero l'urto tra due sfere di masse

m e $M = 3m$. e velocità v e V



dalla conservazione dell'energia cinetica

$$\frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} M V_f^2$$

dalla conservazione della quantità di moto

$$m v_i = m v_f + M V_f$$

$$\begin{cases} \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} v_i^2 = \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m} v_f^2 + \cancel{\frac{1}{2}} 3 \cancel{m} V_f^2 \\ \cancel{m} v_i = \cancel{m} v_f + 3 \cancel{m} V_f \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_i^2 = v_f^2 + 3 V_f^2 \\ v_i = v_f + 3 V_f \end{cases}$$

$$v_f = v_i - 3 V_f$$

$$v_i^2 = (v_i - 3V_f)^2 + 3V_f^2$$

$$\cancel{v_i^2} = \cancel{v_i^2} + 9V_f^2 - 6 v_i V_f + 3V_f^2$$

$$0 = (\cancel{12}^{2} V_f^2 - \cancel{6} v_i V_f)$$

$$0 = (2V_f^2 - v_i V_f) = V_f (2V_f - v_i)$$

Si possono verificare due cose nell'urto elastico:

1) $V_f = 0$ la massa grande resta ferma dopo l'urto e la piccola torna indietro

2) $V_f = \frac{v_i}{2}$

$$v_f = v_i - \frac{3v_i}{2} = -\frac{v_i}{2}$$

la massa grande si muove con velocità $\frac{v_i}{2}$ e la piccola torna indietro con velocità $-\frac{v_i}{2}$.

Nel caso di urto anelastico si conserva solo la quantità di moto.

$$m v_i = (m + 3m) V_f$$

$$v_i = 4 V_f$$

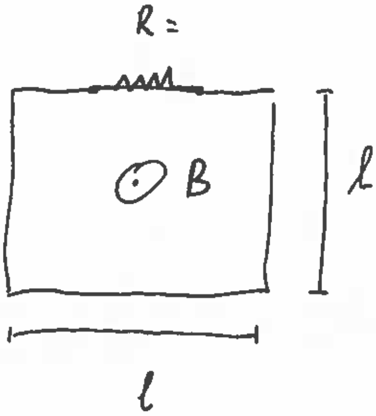
l'energia dissipata vale

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{1}{\cancel{2}} \overset{2}{\cancel{4}} m V_f^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_i^2 - 2m \left(\frac{v_i}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{m v_i^2}{8} = \frac{3}{8} m v_i^2$$

Quesito n°8

$$B(t) = B_0 (2 + \text{sen}\, \omega t)$$



Determinare la f.e.i. e la corrente i.

Dalla seconda equazione di Maxwell

$$f.e.i = -\frac{d\,\phi(\vec{B})}{dt}$$

Scrivo l'espressione del $\phi(\vec{B})$

$$\phi(\vec{B}) = B_0 (2 + \text{sen}\, \omega t)\, l^2 = 2 B_0 l^2 + B_0 l^2 \,\text{sen}\, \omega t$$

$$\frac{d\,\phi(\vec{B})}{dt} = B_0 l^2 (-\cos \omega t)\, \omega = -\omega B_0 l^2 \cos \omega t$$

$$f.e.i = \omega B_0 l^2 \cos \omega t$$

$[f.e.i] = V$ $[R] = \Omega$

$[l^2] = m^2$

$[B_0] = T$

$[\omega] = \text{secondi}^{-1}$

$$f.e.i = R I$$

$$I = \frac{\omega B_0 l^2 \cos\omega t}{R}$$