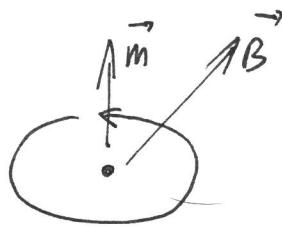


L'obiettivo è di dare un'interpretazione microscopica ai fenomeni di diamagnetismo, paramagnetismo e ferromagnetismo.

Iniziamo con l'osservare che un atomo può essere schematicamente rappresentato come una spira percorso da corrente elettrica di momento complessivo \vec{m} .

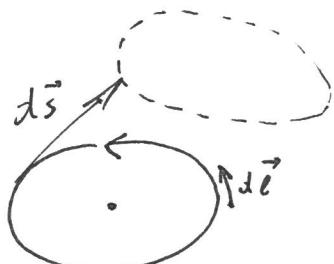


Se tale sistema viene immerso in un campo magnetico \vec{B} subisce un momento

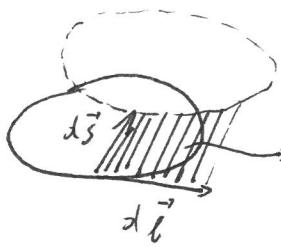
$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \text{inoltre è possibile dimostrare}$$

che è soggetto ad una forza $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$.

$$dU = -dU = -\vec{F} \cdot d\vec{s} = -i(d\vec{l} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = -i(d\vec{s} \times d\vec{l}) \vec{B}$$

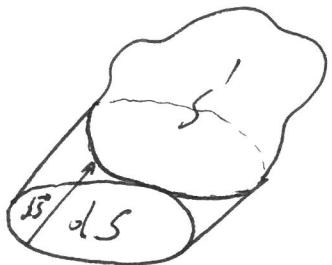


$$dU = i(d\vec{l} \times d\vec{s}) \vec{B} = i\vec{B} \cdot d\vec{s}$$



$d\vec{S}$ ($d\vec{S}$ è il vettore di modulo dS normale a S)

$$dU = i \vec{B} d\vec{S}$$



$\phi_i(\vec{B})$: flusso di \vec{B} attraverso la superficie che poggia sulle spine

nella posizione iniziale (è invariante rispetto alla sup. scelta)

$$\phi_i(\vec{B}) = \vec{B} d\vec{S} + \vec{B} \vec{S}' = \vec{B} d\vec{S} + \phi_f(\vec{B})$$

$$\vec{B} d\vec{S} = d\phi(\vec{B}) \quad (\text{attraverso una superficie appoggiata sulle spine})$$

$$dU = -i d\phi(\vec{B})$$

$$U = -i \phi \vec{B} = -i \vec{B} \vec{S}' \quad (\text{si può considerare } S' \text{ le sup. indicate})$$

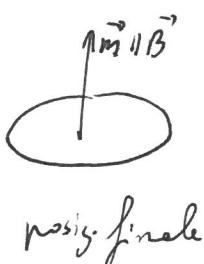


$$U = -i \vec{S} \cdot \vec{B} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

$$F = -\vec{\nabla} U = \vec{\gamma} (\vec{m} \cdot \vec{B})$$

Le spine soggette al campo \vec{B} a causa del movimento.

$$\vec{P} = \vec{m} \times \vec{B} \quad \text{allinee } \vec{m} \text{ e } \vec{B}$$



Allineati \vec{m} e \vec{B} le spine minimizza l'energia $U = \vec{m} \cdot \vec{B} = \vec{m} \cdot \vec{B}$

Così si porta nelle zone e campi magnetici più forte

\vec{m} ha il verso di \vec{B} altrimenti si porta nelle zone e campi magnetici inferiore.

(Une spine si comporta in modo identico ad un dipolo elettrico).

Nelle sostanze paramagnetiche e diamagnetiche gli atomi hanno momento magnetico proprio diverso da zero. Se tali sostanze vengono introdotte in un campo magnetico i momenti magnetici dei singoli atomi si orientano in senso e direzione paralleli al campo \vec{B} .

Le azioni meccaniche e cui tali sostanze sono soggette in presenza di un campo \vec{B} possono essere caratterizzate dalle spine descritte precedentemente.

Naturalmente le alte temperature favoriscono l'allineamento dei momenti magnetici e quindi gli effetti meccanici del magnetismo.

Le sostanze paramagnetiche e diamagnetiche introdotte in un campo \vec{B} si portano nelle zone in cui il campo è maggiore.

Risulta anomalo il comportamento delle sostanze diamagnetiche che si portano nelle zone di campo magnetico inferiore

Tale fenomeno è giustificato dalla precessione di Larmor.

Il momento magnetico complessivo degli atomi delle sostanze diamagnetiche è nullo tuttavia gli atomi soggetti al campo magnetico iniziano un moto di precessione intorno ad essi che determina un momento diverso da zero e opposto al campo \vec{B} .
(momento di Larmor)

Il momento di Larmor è presente anche nelle sostanze paramagnetiche e ferromagnetiche tuttavia il momento prodotto dall'orientamento degli atomi

prevede conoscendo il momento d'inerzia inercente.

Per un atomo abbiam visto che esiste una proporzionalità tra il momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}_e$ e il momento magnetico $m_o = \frac{l}{\text{periodo di rotazione}} \cdot \text{superficie atomica} = i S$



$$\vec{m}_o = -\frac{l}{2m_e} \vec{L}$$

Dalle II equazione cardinale della dinamica

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\eta} = \vec{m}_o \times \vec{B} = -\frac{l}{2m_e} \vec{L} \times \vec{B}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (L \hat{i}) = \frac{dL}{dt} \hat{i} + L \frac{d\hat{i}}{dt}$$

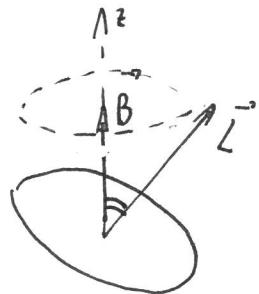
vettore ortogonale a L ($\frac{d\hat{i}}{dt} \perp \hat{i}$)

Poiché dalla I equazione risultò essere essere

$\frac{d\vec{L}}{dt} \perp \vec{L}$ stelle II ricava che $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ cioè

\vec{L} è costante in modulo.

\vec{L} descrive un cono intorno a \vec{B} .



Poiché \vec{L} è costante in modulo applica le formule di Poisson

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega}_L \times \vec{L} = \vec{B} \frac{l}{2me} \times \vec{L} \quad (\text{confrontandole con la I equazione})$$

$$\text{da cui: } \vec{\omega}_L = \frac{\vec{B}l}{2me}$$

Come il moto orbitale dell'elettrone composta una

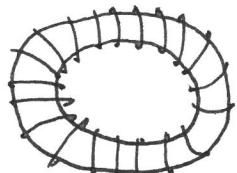
corrente atomica così la precessione di Larmor genera una corrente detta di Larmor.

Poiché $\vec{\omega}$ ha lo stesso verso di \vec{B} ; il moto delle cariche elettriche avviene in senso antiorario mentre il moto delle corrente in senso orario.

Il momento pulsato delle corrente di Larmor ha verso opposto rispetto a \vec{B} .

Circuito magnetico

Per circuito magnetico s'intende una regione di spazio ad alte permeabilità relativa μ_r in cui è possibile confinare un campo solenoidale con flusso d'espanso nullo.



Toro di materiale ferromagnetico $\mu_r \gg 1$

Le linee di forza di \vec{B} sono confinate all'interno.

Poiché il flusso d'espanso è nullo e $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(il flusso attraverso una superficie chiusa è nullo) si ha che

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BS = \text{costante}$$

S = sezione del toro

inoltre per il teorema di Ampere

$$Ni = Hl$$

N = numero di spire percorse da corrente i

(1)

l = lunghezza media del tow.

$$H = \frac{B}{l} = \frac{\Phi}{Sl} \quad \left(\text{si considera approssimativamente la dipendenza tra } H \text{ e } B \text{ lineare} \right).$$

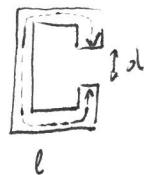
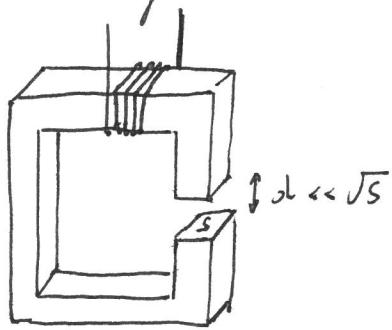
$$\frac{N_i}{\sim} = \frac{1}{l} \frac{l}{S} \frac{\Phi}{\sim}$$

↴ Resistenza
 lunghezza
 magnetica o inlettanza
 resistiva

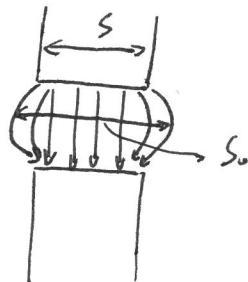
In tal modo è possibile risolvere un circuito magnetico nello stesso modo del circuito elettrico; inoltre le inlettanze in serie sono parallele somme delle inlettanze mentre l'inverso delle inlettanze di un circuito in parallelo è pari alle somme degli inversi delle inlettanze.

Elettromagnete

Un elettromagnete è un circuito magnetico dotato di un ferro.



Poiché d è molto piccolo



$S \approx S_0$ inoltre $B = B_0$ (la componente normale di B si conserva) pertanto $\phi = BS = \text{costante}$ uguale nel ferro e nel vuoto. (Il flusso disperso è nullo)

Si applicano le leggi del circuito magnetico in serie

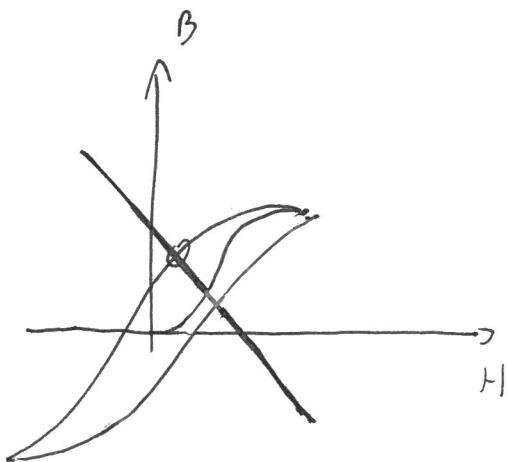
$$N_i = BS \left(\frac{l}{15} + \frac{0l}{\mu_0 S} \right)$$

de cui

$$B = \frac{\gamma_0 Ni}{\omega} - \frac{I \gamma_0 H}{\omega}$$
 uniformisce una relazione

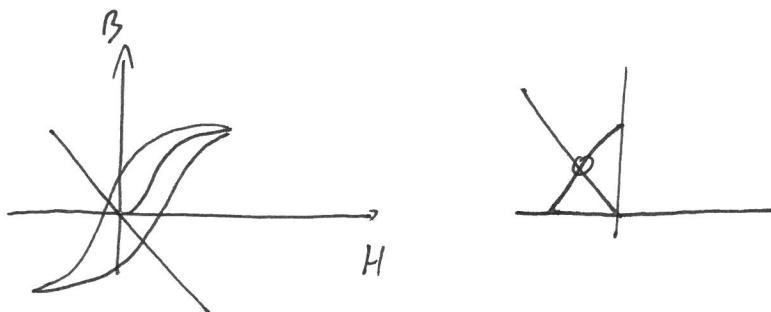
lineare tra B e H . (Rette descritte $B = B(H)$)

Posto lo rette e sisteme conciliali si ottengono i relativi valori di B (uguali nel trafilato nel materiale ferromagnetico) e il valore di H nel materiale ferromagnetico.



Se si blocca il passaggio delle corrente i si ha

$$B = -\frac{I \rho_0 H}{d}$$



intersezione con il ciclo d'isteresi mi determina il valore di B nel trafilco una volta interrotto il passaggio di corrente.

$B > 0$ ho ottenuto un magnete permanente il verso di B è opposto al vers. di H nel circuito.

*) Teorema delle circuitezioni di Ampere per il vettore campo magnetico \vec{H} .

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

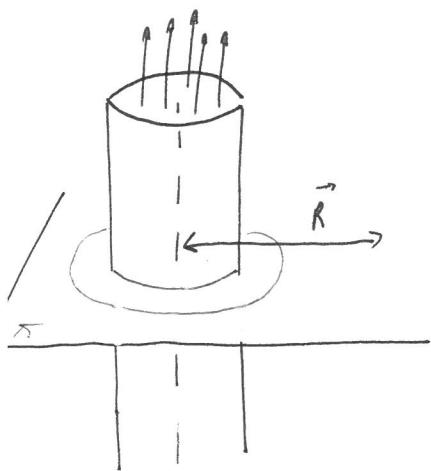


Supponiamo che le linee chiuse si concatenano alle correnti elettriche

$$\sum I = \int_S \vec{J} d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) d\vec{S} = \oint_L \vec{H} d\vec{l}$$

$$[H] = \frac{A}{m}$$

*) Considero un cilindro di lunghezza indefinita costituito da tenti conduttori attraversati da corrente I_i ($i = 1, \dots, N$). Determino il valore di \vec{H} ad una distanza \vec{R} dall'asse del cilindro.



Per ragioni di simmetria cilindrica il campo \vec{H} può avere direzione radiale, direzione parallela all'asse del cilindro o essere linee di forze circolari con centro sull'asse.

Poiché $\vec{J} \times \vec{H} = \vec{J} \neq 0$ le prime due ipotesi sono da scartare perché altrimenti la circuitazione lungo una circonferenza appartenente al piano π con centro sull'asse sarebbe nulla.

Q

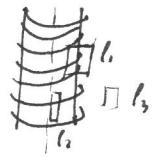
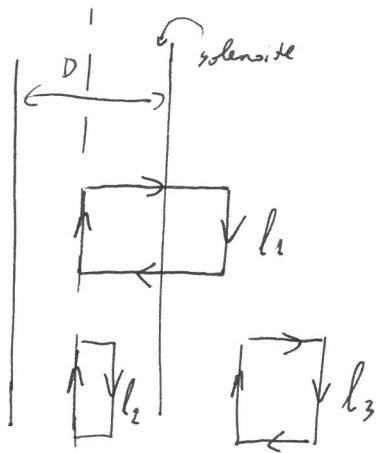
Il campo ha allora linee circolari applicando il teorema
della circuitazione di Ampère

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_i$$

$$H_{2\pi R} = ni$$

$$H = \frac{ni}{2\pi R} \quad (\text{il campo è uniforme su una circonferenza di raggio } R).$$

*) Determina il valore di \vec{H} dentro e fuori ad un solenoidi riempito da un mezzo.



Il campo \vec{H} può essere per ragioni di simmetria cilindrica
o parallelo all'asse del solenoidi o ortogonale a tale
asse con direzione radiale o circolare.

Negli ultimi due casi la circurazione lungo le linee
 l_1 sarebbe nulla il che è assurdo poiché tale linea
contiene correnti elettriche.

*) Il campo \vec{H} è parallelo all'asse del solenoidi.

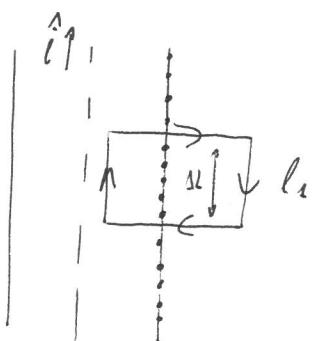
Considera le circuiti segnati lungo le spire l_1 e l_2

$$H \uparrow \begin{array}{c} \rightarrow \\ h \end{array} \downarrow \vec{H}' \int dl \quad H dl - H' dl = 0 \quad \text{al venire di } l$$

$$H = H'$$

All'esterno e all'interno del solenide il campo è costante

Poiché il campo non può essere costante all'infinito
all'esterno del solenide è nullo.



$$\oint \vec{H} dl = \Delta N i \quad (\Delta N = \text{numero di spire presenti nel solenide lungo il tratto } l_2)$$

$$H \Delta L = \Delta N i$$

$$\vec{H} = \frac{\Delta N}{\Delta L} i \hat{e}$$

$$\vec{H} = \underline{\vec{B}} - \vec{H}_0$$

noto \vec{H} è misurato il campo nel mezzo
all'interno del solenide possa ricavare \vec{H}_0 , 5

siccome noto \vec{H} ricavo \vec{B} .

Nel caso il solensibile fosse nel moto, $\vec{H} = 0$

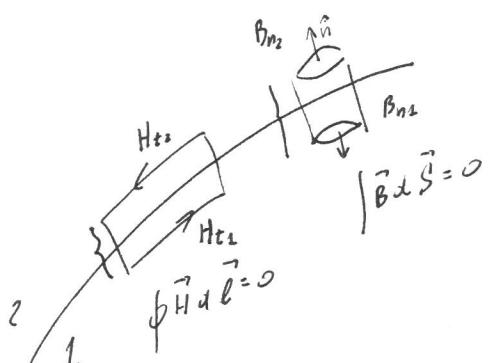
$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\gamma_0}$$

$\vec{B} = \gamma_0 \frac{dN}{dL} i \hat{l}$ campo presente all'interno di un solensibile nel moto.

* Condizioni di records per i campi \vec{B} e \vec{H} al passaggio da un mezzo materiale all'altro.

Considerando che $\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} \times \vec{H} = J \text{ (convenzione sonda)} = 0 \text{ (nulle sul record nel caso generico)} \\ \oint_{\ell} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \end{array} \right.$

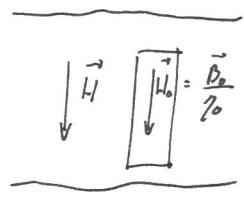
e che $\left\{ \begin{array}{l} \vec{D} \cdot \vec{B} = 0 \\ \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \end{array} \right.$ è possibile facilmente ricavare le condizioni di records per \vec{B} e \vec{H}



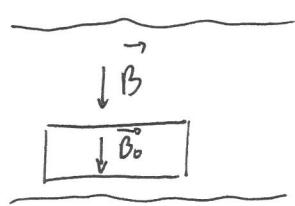
= dimensione infinitesima di ordine superiore
rispetto alle altre dimensioni lineari.

$$\left\{ \begin{array}{l} H|_{t_1} = H|_{t_2} \\ B|_{n_2} = B|_{n_1} \end{array} \right.$$

Queste caratteristiche di records permettono anche di stabilire un criterio di misura per \vec{H} e \vec{B} in un mezzo.



Se misuro $\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\rho}$ nelle penultime fette nel mezzo, esso sarà pari a \vec{H} nel mezzo d'onda
essere la componente tangenziale di \vec{H} uguale nel
passaggio dal vetro al mezzo.



Analogamente il campo \vec{B} sarà pari al
campo \vec{B}_0 misurato nelle penultime strati
a \vec{B} stessi.

*) Per i mezzi isotropi e omogenei i campi attoriali
 \vec{B} e \vec{H} risultano essere paralleli.

$\vec{B} = \gamma \vec{H}$ la quantità scalare γ è detta
permeabilità magnetica.

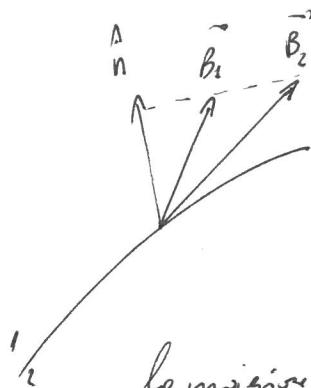
$\gamma = \gamma_0 \gamma_r$ - Per i corpi anisotropi le grandezze scalare
 γ è sostituita da un tensore.

Nel caso di mezzi isotropi ed omogenei vale la legge
di reciproco

$$\vec{B} = \gamma \vec{H}$$

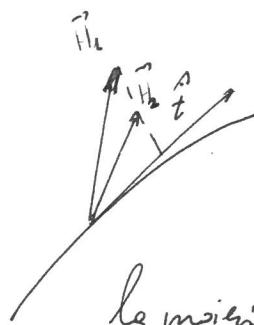
$$\begin{cases} B_{n_1} = B_{n_2} \\ \gamma_1 H_{n_1} = \gamma_2 H_{n_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{t_1} = H_{t_2} \\ \frac{B_{t_1}}{\gamma_1} = \frac{B_{t_2}}{\gamma_2} \end{cases}$$

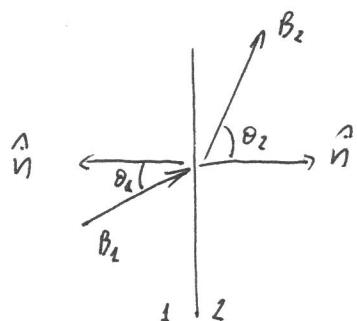


la proiezione di \vec{B}_1 e \vec{B}_2 sulla normale è lo stesso.

*) legge di rifrazione delle
linee di forza



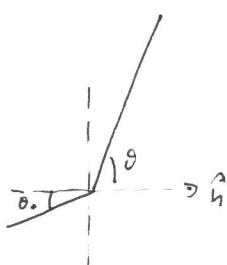
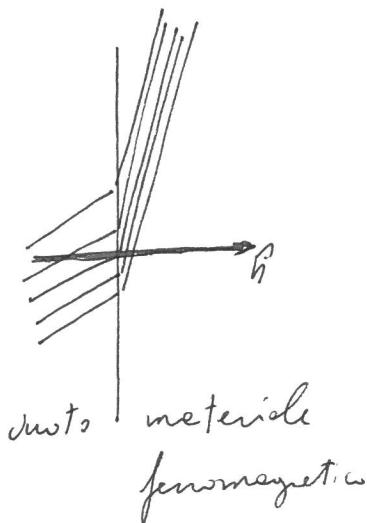
la proiezione di \vec{H}_1 e \vec{H}_2 sulla tangente è lo stesso.



$$\frac{B_{t_1}/B_{n_1}}{B_{t_2}/B_{n_2}} = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

$$\frac{H_{t_1}/H_{n_1}}{H_{t_2}/H_{n_2}} = \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

*) La permeabilità magnetica relativa di materiali ferromagnetici è spesso assai alta. Qualitativamente l'individuazione delle linee di forza di \vec{B} e \vec{H} nel passare dal vuoto a un materiale di tale natura è così schematizzata.



$$\frac{\theta_0}{\theta} = \frac{\gamma_0}{1} = \frac{1}{\gamma_r}$$

$$\theta = \gamma_r \theta_0 \Rightarrow \theta \gg \theta_0$$

Internamente al materiale ferromagnetico le linee di \vec{H} e \vec{B} tendono ad essere parallele alla superficie di separazione.

* Proprietà macroscopiche dei materiali diamagnetici; paramagnetici; ferromagnetici;

$$\vec{H} = \frac{\vec{B} - \gamma_0 \vec{H}}{\gamma_0} \quad \text{inoltre per i materiali isotropi}$$

$$\vec{B} = \gamma \vec{H}$$

$$\vec{H} = \gamma_r \vec{H} - \vec{P}$$

$$\vec{P} = (\gamma_r - 1) \vec{H} = \chi_m \vec{H} \quad \chi_m = (\gamma_r - 1) \quad \text{è detta suscettività magnetica.}$$

$$\gamma \vec{P} = \chi_m \vec{B}$$

Sostanze diamagnetiche

Le sostanze diamagnetiche se introdotte in un solenoide vengono respinte verso l'esterno con una forza molto debole.

Tali sostanze sono caratterizzate dall'essere $\chi_m < 0$ cioè $\gamma_r < 1$ ciò significa che il momento magnetico indotto nel materiale ha verso opposto rispetto al campo induttore.

Si osserva che per i materiali diamagnetici $\gamma_r \approx 1$ pertanto $\chi_m \approx 0^+$, risultando $\vec{B} \approx 0$ e la perturbazione portata alla configurazione dei campi dalle presenze di questi materiali è trascurabile.

Infine le sostanze diamagnetiche non presentano alcun tipo di saturazione cioè i valori di χ_m , γ sono costanti indipendentemente dai campi esterni e dalla temperatura.

* Sostanze paramagnetiche

Le sostanze paramagnetiche se poste in vicinanza di un solenoide vengono attratte all'interno con une forze relativamente deboli.

Tali sostanze sono caratterizzate dall'averie $\gamma > 1$ pertanto $\chi_m > 0$.

Il verso del momento magnetico \vec{M} indotto è lo stesso del campo \vec{B} inducente.

Con le temperature χ_m varia secondo la legge di Curie

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T}$$

ρ : densità materiale
 C : costante
 T : temperatura

A basse temperature per campi molto intensi c'è stata osservata una saturazione di \vec{M} in funzione di \vec{B} .

Il valore di \vec{M} misurato corrisponde all'orientamento

del 99% dei dipoli elementari.

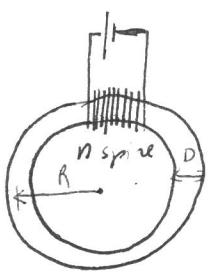
In condizioni standard si osserva che i materiali paramagnetici perturbano le misure trascurabili il campo magnetico.

*) Sostenze ferromagnetiche

Le sostenze ferromagnetiche poste in vicinanza di un solenoido vengono attirate con forze dell'ordine delle forze pes.

Le relazioni intercorrono tra \vec{B} e \vec{H} nei materiali ferromagneticci non solo non sono lineari ma non sono nemmeno unioche.

Eperimentalmente le curve $\vec{B} = \vec{B}(\vec{H})$ di un materiale ferromagnetico viene misurate eperimentalmente nel seguente modo :



Il circuito che avvolge l'anello di materiale ferromagnetico genera un campo \vec{B} che all'interno dell'anello si mantenga parallelo alle superfici di separazione; le linee di forza di \vec{B} e di \vec{H} sono circolari. (cioè i dorso all'alto valore di B_0 per i materiali ferromagnetici).

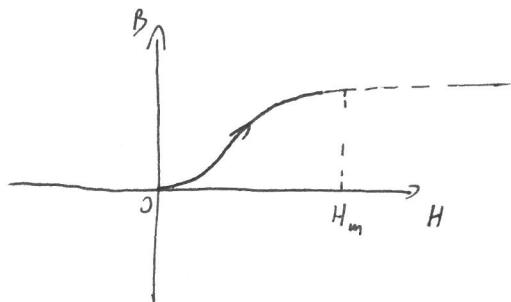
Se $R - \frac{D}{2} < r < R + \frac{D}{2}$ il valore di H può essere determinato con il teorema delle circuitazioni di Ampere

$$H 2\pi r = Ni$$

$$H = \frac{Ni}{2\pi r} \quad \text{mentre } B \text{ può essere misurato.}$$

Si osserva che \vec{B} , \vec{H} e \vec{N} assumono sempre

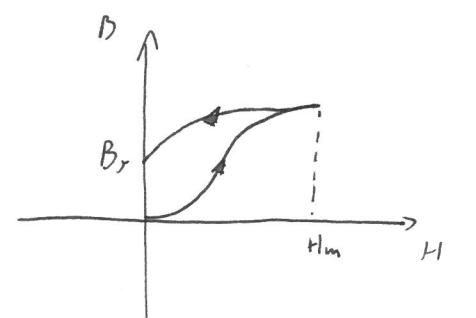
dirigioni parallele pertanto è possibile rappresentare in formaolare la funzione $B(H)$.



*) curve di prima magnetizzazione

Dal valore H_m in poi $B(H)$ aumenta proporzionalmente a $\% H$
 (l'asintoto è praticamente orizzontale essendo $\gamma_0 \approx 0^\circ$)

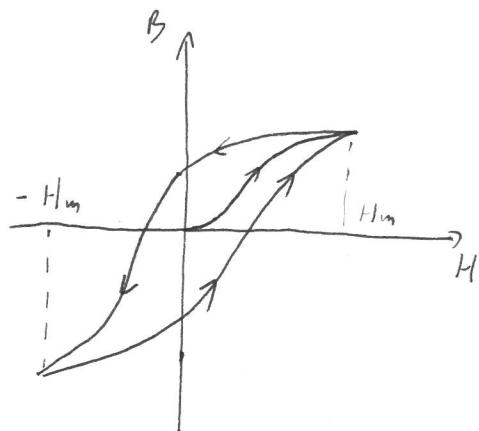
Poiché $\vec{B} = \gamma_0 \vec{H} + \gamma_0 \vec{M}$ per $H > H_m$ si ottiene la
 saturazione di M .



*) magnetizzazione residue

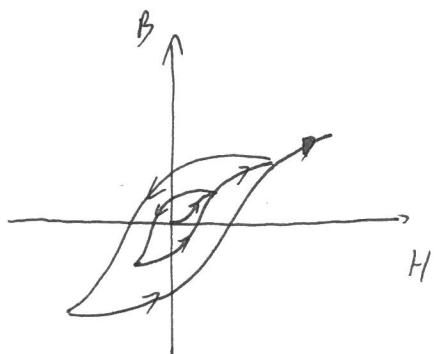
facendo diminuire H le curve segne l'orientamento
 in figura ; per $H=0$ $B_r > 0$ (tale valore viene detta
 induzione magnetica residue)

* Ciclo di isteresi



Se si fa varire il valore di H da $-H_m$ a H_m otteniamo una curva elicoidale più ristretta chiamata curva di isteresi.

Se invece di far varire H tra $\pm H_m$ lo si fa varire entro un intervallo più ristretto si ottengono dei cicli più piccoli sempre simmetrici rispetto all'origine.



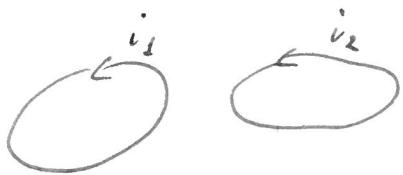
Se si fa varire H come indicato delle piccole fasi il materiale ferromagnetico si magnetizza, se il verso di H è opposto il materiale si demagnetizza.

Siderebbe curie le scoperte del fatto che esiste
una temperatura critica al di sopra della quale
un materiale paramagnetico si comporta come
un materiale ferromagnetico.

Induttanza

*

Considero due spire attraversate da corrente elettrica i_1 e i_2 .

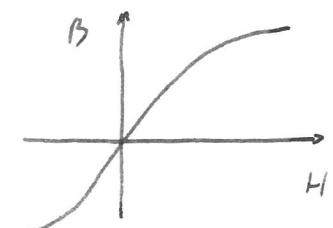


Il flusso del campo \vec{B} attraverso una superficie S_2 poggiate sulle spire 2 vale

$$\oint_2 (B) = A i_1 + B i_2 \quad (\text{dove } A \text{ e } B \text{ sono coefficienti})$$

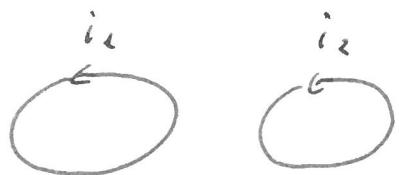
costanti dipendenti soltanto dalle forme delle due spire e dalle loro distanze).

Tale relazione vale anche se le due spire sono immerse in materiali paramagnetici, diamagnetici o nel caso di materiali ferromagnetici la curva d'isteresi è lineare.



(curva d'isteresi del ferro dolce : i valori di B non variano e la curva è ben approssimabile con una retta). 19

Avremo per i 2 circuiti considerati:



$$\dot{\Phi}_2(B) = A i_1 + B i_2$$

$$\dot{\Phi}_1(B) = C i_2 + D i_1$$

i coefficienti B, C vengono detti coefficienti di autoinduzione per il secondo e il primo circuito, si

indicano con le lettere L (L_1, L_2)

i coefficienti A, D sono detti di mutua induzione vengono indicati con le lettere M e risultano essere sempre uguali tra loro.

$$\dot{\Phi}_2(B) = M i_1 + L_2 i_2$$

$$\dot{\Phi}_1(B) = L_1 i_2 + M i_1$$

Per un circuito isolato

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = L i$$

$L = \frac{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}}{i}$ viene detta induttanza

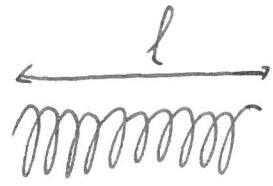
$$[L] = \frac{Wb}{A} = \frac{Tm^2}{A} = H \text{ (henry)}$$

Dalle leggi di Faraday - Neumann

$$f_i = - \frac{d \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}}{dt}$$

$$f_i = -L_i \frac{di_1}{dt} - N \frac{di_2}{dt}$$

*) Considera un solenoidale di lunghezza l



$$B = \mu_0 \frac{N i}{l} \quad N = \text{numero spire.}$$

$$\Phi(B) = N S B = \frac{S N^2 \mu_0 i}{l}$$

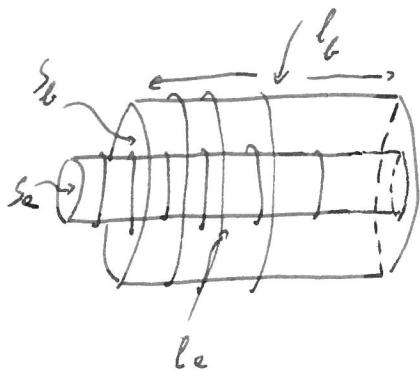
$$L = \frac{\Phi(B)}{i} = \frac{S N^2 \mu_0}{l}$$

$$\text{Se } S = 10 \text{ cm}^2, l = 1 \text{ m}, N = 10^3 \quad H \approx 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ H.}$$

Si introduce nel solenoidale una lamina Si fissa sollecitando il valore dell'induttanza cresce notevolmente

$$L = \frac{S N^2 \mu_0 \mu_r}{l}$$

* Consider two solenoids as in fig.



$$L_e = \mu_0 \frac{S_e N_e^2}{l_e}$$

$$L_b = \mu_0 \frac{S_b N_b^2}{l_b}$$

determine i coefficienti di mutua induzione e verifica che essi sono uguali.

$$M_e = \frac{\text{flusso attraverso } S_e \text{ di } B_b}{i_b}$$

$$M_e = S_e N_e \underbrace{\frac{l_b}{l_e}}_{\text{Cooper del}} \cdot \mu_0 \frac{N_b}{l_b}$$

solenoid e due
 $B_b \neq 0$

$$\Pi_b = S_e \cdot N_b \cdot \frac{N_e}{l_e}$$

↳ superficie solenoidale b
dove $B_e \neq 0$

$$\Pi_b \cdot \Pi_e = M$$

$$M = \frac{S_e \cdot \mu_0 \cdot N_b \cdot N_e}{l_e}$$

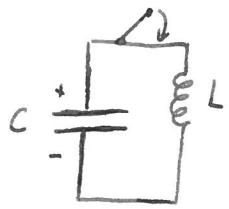
Sì può scrivere in questo caso particolare una relazione
in generale

$$M = K \sqrt{L_1 L_2}$$

$0 \leq K \leq 1$ ($K=1$ nel caso i circuiti sono elettricamente
connessi; $K=0$ se non c'è distanza infinita).

*) Circuito LC

In un circuito l'induttanza L viene schematizzata con



Il condensatore è inizialmente carico con una differenza di potenziale V_0 .

Per velocità di correnti basse rispetto alle velocità delle luci vale la legge di Ohm anche se le corrente non sono istantanee.

$$\sum f_i = R_i \quad (\text{nel nostro caso } R = \omega)$$

$$\Delta V - f_i = R_i = \omega$$

$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V = \text{differenza di potenziale del condensatore} \\ f_i = \text{forza elett. indotta opposta a } \Delta V. \end{array} \right.$

$$\frac{q(t)}{C} - L \frac{di}{dt} = \omega$$

$q(t) = \text{carica presente sul condensatore.}$

$$i(t) = - \frac{dq(t)}{dt}$$

$$\frac{q(t)}{c} + L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} = - \frac{q(t)}{LC} \quad (\text{equazione del moto armonico})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \\ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{array} \right.$$

$\varphi = 0$ (q_0 è la massima carica presente nel condensatore)

$$q(t) = A \cos \omega t$$

$$q(t=0) = C \cdot V_0 = A$$

$q(t) = (V_0 \cos \omega t)$ (la carica oscilla sulle armature del condensatore con frequenza ω che cresce al crescere dello $C e L$)

$$i(t) = -\frac{dq}{dt} = C \cdot \omega \cdot \cos \omega t = \overbrace{\omega \sqrt{\frac{C}{L}}}^{\omega} \cos \omega t$$

Anche le corrente oscilla con uno spostamento di

$\frac{\pi}{2}$ rispetto alla corrente del condensatore

(Quando la corrente sul condensatore è massima la corrente è nulla e viceversa).

*) Tali relazioni non valgono per correnti massime e quelle delle linee non valgono le leggi di Ohm.

* Problema energetico del circuito CL

L'energia del condensatore vale $E = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} Q^2$

noi si $Q(t) = V_0 \cos \omega t$

$$E(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 \cos^2 \omega t$$

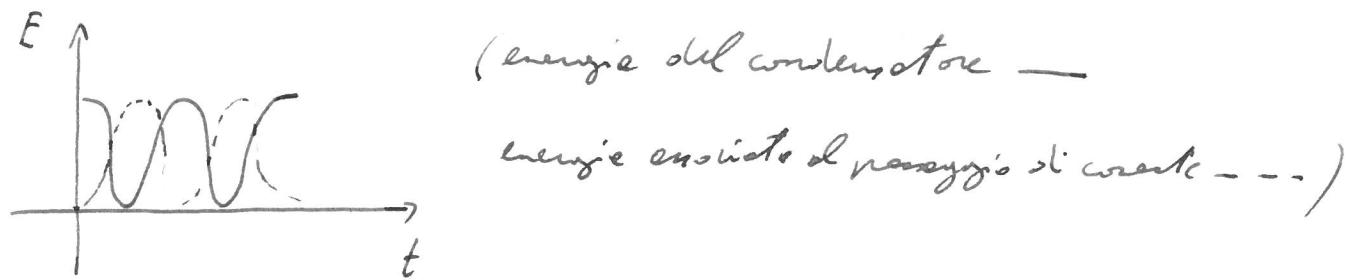
Riconoscendo che $i(t) = i_0 \sin \omega t$ $i_0 = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$

$$E(t) = \frac{1}{2} CV_0^2 (1 - \sin^2 \omega t) = \frac{1}{2} CV_0^2 - \frac{1}{2} CV_0^2 \sin^2 \omega t$$

$$\left(i_0^2 = V_0^2 \frac{C}{L} \Rightarrow \frac{1}{2} CV_0^2 = \frac{1}{2} L i_0^2 \right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} L i_0^2}_{\frac{1}{2} L i^2} - \frac{1}{2} L i^2$$

↪ $\frac{1}{2} L i^2$ è l'energia associata al passaggio di corrente elettrica.



Ora si considererà l'energia associata al passaggio di corrente per giustificare la conservazione dell'energia.

$$E_{(\text{condensatore})} + E_{(\text{corrente})} = \bar{E}_0 = \frac{1}{2} C V_0^2$$

*) Densità di energia associata al campo magnetico

Come per il campo elettrico così anche per il campo magnetico è possibile definire una densità di energia ed essa è associata.

Alliamo istante l'energia associata al parag.:

$$di cui ente vale E = \frac{1}{2} L i^2$$

Considero ora un solenoidale

$$L = \mu_0 S N^2 / l \quad B = \mu_0 i N / l$$

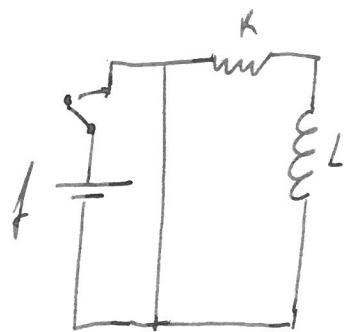
$$E = \frac{1}{2} \mu_0 S N^2 / l \cdot \frac{B^2 l^2}{N^2 \mu_0 l} = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \frac{l S}{l} \rightarrow \tau \text{ (volume solenoidale)}$$

In generale si dimostra che

$$E = \frac{1}{2 \mu_0} \int B^2 d\tau \quad \text{che } \frac{dE}{d\tau} = \frac{1}{2 \mu_0} B^2 \text{ (densità di energia)}$$

*) circuito RL

Considera il circuito disegnato.



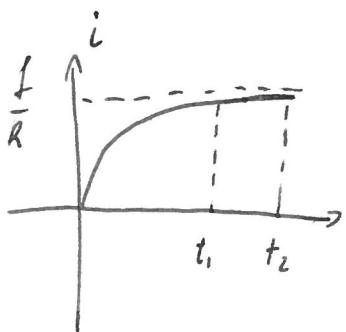
Se il circuito viene chiuso la legge di Ohm dice

$$f - L \frac{di}{dt} = Ri \quad \text{la soluzione è della forma}$$

$$i = Ae^{-\frac{R}{L}t} + f \frac{1}{R}$$

$$\phi = A + f \frac{t}{R} \quad i = f \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \tau = \frac{L}{R}$$

le corrente e i posti rispettivamente al valore
che avrebbe nel caso forse nulla l'induttanza L .



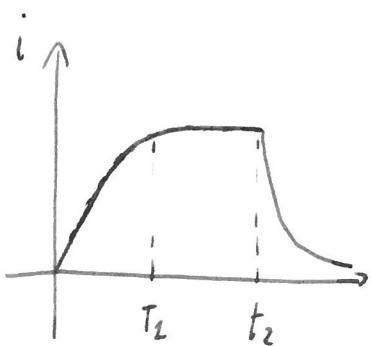
Al tempo t_2 supera le forze elettromotrici generate dal circuito.

La legge di Ohm per il circuito RL di Henrtz vale

$$-L \frac{di}{dt} = Ri$$

$$i = f \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

l'induttanza i tende la corrente di corrente che tende comunque esponenzialmente a



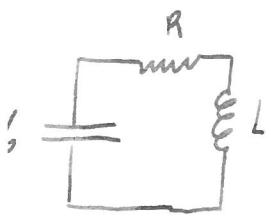
Quando diminuisce il circuito la corrente s'espone gradualmente, l'energia dissipata sarà

$$E = \int_0^\infty R i^2 dt = R i_0^2 \int_0^\infty e^{-\frac{Rt}{L}} dt = -\frac{L}{2} R i_0^2 \left[e^{-\frac{Rt}{L}} \right]_0^\infty =$$

$$= \frac{L}{2} R i_0^2 = \frac{L}{R} \frac{R i_0^2}{2} = \frac{1}{2} L i_0^2 \quad i_0 = \frac{f}{R}$$

L'energia dissipata una volta stabilita il generatore è pari all'energia che è stata fornita dal generatore all'induttanza quando la corrente si è stabilita al valore $i_0 = \frac{f}{R}$.

Circuiti RCL



Le leggi di Ohm si scrive

$$\frac{q}{C} - L \frac{di}{dt} = Ri$$

derivando rispetto al tempo

$$\frac{dq}{dt} \cdot \frac{1}{C} - L \frac{d^2i}{dt^2} = R \frac{di}{dt}$$

ricordando che $\frac{dq}{dt} = - \frac{di}{dt}$

$$-\frac{1}{C} \frac{di}{dt} - L \frac{d^2i}{dt^2} = R \frac{di}{dt}$$

equazione diff. della forma

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{CL} = 0 \quad \omega^2 = \frac{1}{CL}$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + i\omega^2 = 0$$

eq. diff. omogenea lineare
polinomi caratteristici

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \omega^2} \quad \text{forma soluz. } i(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$$

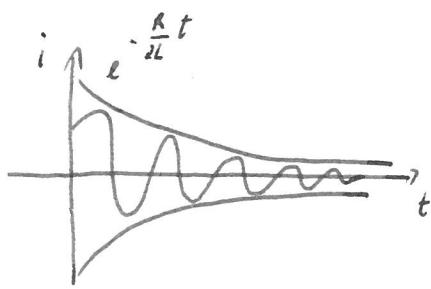
1) lessioni le resistenze non è molti chiuse

$$\frac{R^2}{4L^2} - \omega^2 < 0$$

la forma delle soluzioine è

$$i(t) = A \cos(\omega' t - \varphi) \quad \omega' = \sqrt{\omega^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$$

la corrente compie delle oscillazioni smorzate

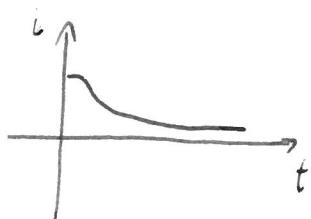


?/ Caso in cui $\frac{R^2}{4L^2} - \omega^2 = 0$

forma soluzione

$$i(t) = A e^{-\frac{R}{2L}t} + Bt e^{-\frac{R}{2L}t}$$

la corrente tende esponenzialmente a zero compiere alcune oscillazioni



3) Caso in cui $\frac{R^2}{4L^2} - \omega^2 > 0$

forma soluz. $i(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$

$$\omega \lambda_{12} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - c^2} \quad \text{sono entrambi reaz.}$$

Le corrente decresce esponenzialmente e come nel caso 2).

Oss

si osservano le analogie tra i sistemi elettrici e meccanici.

Circuito LC

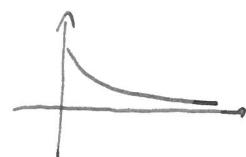
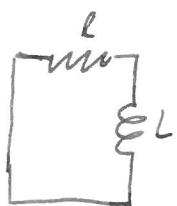
Sistemi punti materiali soggetti forze elastiche



~~fissa~~ oscillatore
armico

Circuito RL

mot. corpo fluido viscoso



Circuito RCL

forze elastiche fluido viscoso

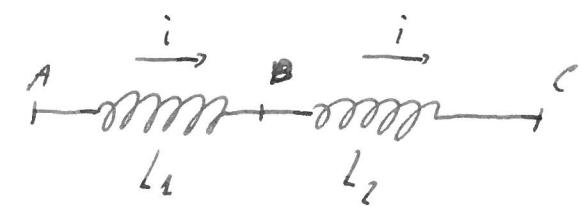


oscillatore armico
smorzato. 36

4)

Per un sistema di induttori in serie in cui sono trascurabili le mutue induttori vale

$$L = L_1 + L_2$$



$$(V_A - V_B) - L_1 \frac{di}{dt} = 0$$

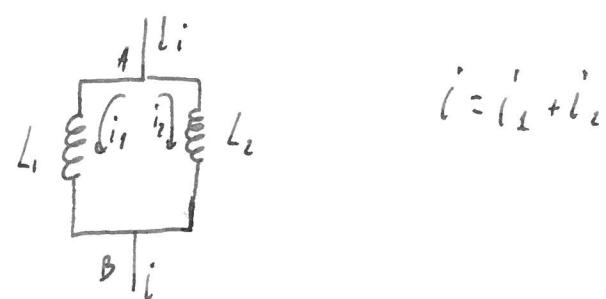
$$(V_B - V_C) - L_2 \frac{di}{dt} = 0$$

$$V_A - V_C - (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} = 0$$

$$L = L_1 + L_2$$

* Per un sistema di induttori in parallelo
è comunque la somma delle induzioni sole

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$



$$i = i_1 + i_2$$

$$V_A - V_B = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$V_A - V_B = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di_1}{dt}$$

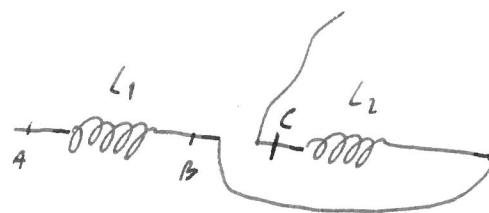
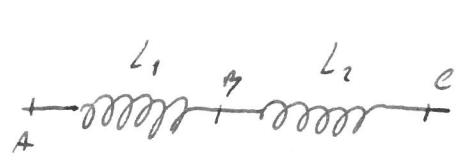
$$\frac{di_2}{dt} = \frac{di}{dt} \frac{L_2}{L_1 + L_2}$$

$$V_A - V_B = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \frac{di}{dt}$$

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

* Considera una rete di induttori in cui la mutua induzione non è trascurabile.

Il circuito può essere realizzato in uno dei seguenti modi:



Siche

$$(V_A - V_B) - L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = 0$$

$$(V_B - V_C) - L_2 \frac{dc}{dt} + M \frac{dc}{dt} = 0$$

$$V_A - V_C - \underbrace{\left[L_1 + L_2 \pm M \right]}_{L} \frac{di}{dt} = 0$$

L : L'induttanza complessiva
del circuito

Solviamo L_+ , l'induttanza complessiva del 1° circuito
e L_- l'induttanza complessiva del 2° circuito.

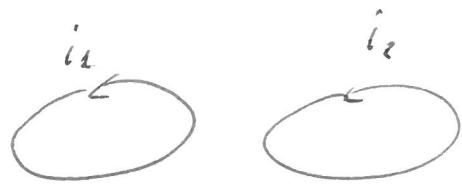
$$L_+ = L_1 + L_2 + 2M$$

$$L_- = L_1 + L_2 - 2M$$

$$L_+ - L_- = 4M$$

$$M = \frac{L_+ - L_-}{4} \quad (\text{metodo sperimentale per determinare le mutue induttanze}).$$

* Consider two circuits with resistive constants i_1 and i_2 .



$$\Phi_1(B) = L_1 i_1 + M_{i_2} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot \hat{n} dS + \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot \hat{n} dS =$$

$$= \int_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_1) \cdot \hat{n} dS + \int_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_2) \cdot \hat{n} dS =$$

$$= \oint_{L_1} \vec{A}_1 d\vec{l} + \oint_{L_2} \vec{A}_2 d\vec{l}$$

$$A = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}}{r}$$

$$\Phi_1(B) = L_1 i_1 + M_{i_2} = \underbrace{\left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint_1 \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} \right] i_2}_{L_1} + \underbrace{\left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_2 \oint_2 \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r} \right] i_2}_{M_{i_2}}$$

Dall'espansione scritta possiamo ricavare che
le matrice induttiva M_i avrà per i circuiti:

112.

* Energia associate a circuiti attraversati da corrente elettrica.

L'energia associate ad un solo circuito vale

$$E = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \phi(B) i$$

Per un sistema di più circuiti:

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i(B) i_i \quad \text{dove } B \text{ è il campo generato}$$

da tutti i circuiti e $\phi_i(B)$ è il flusso del campo attraverso il circuito i -esimo.

$$E = \frac{1}{2} \sum_i \left[\iint_{S_i} \vec{B} \cdot \hat{n} dS \right] i_i = \frac{1}{2} \sum_i \left[\iint_{S_i} [(\vec{V} \times \vec{A}) \cdot \hat{n}] dS_i \right] i_i :$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i \oint_{l_i} \vec{A} \cdot \vec{dl}_i i_i = \frac{1}{2} \sum_i \int_{S_i} \vec{j}_i \cdot \hat{n} dS_i \oint_{l_i} \vec{A} \cdot \vec{dl}_i$$

$$E = \frac{1}{2} \sum' \int_{S_i} \phi \vec{J}_i \vec{A} \cdot d\vec{S}_i d\vec{l}_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum' \int_{S_i} \phi J_i dS_{i(\text{normal})} \vec{A} \cdot \vec{l}_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum' \int_{S_i} \phi \vec{J}_i \vec{A} \underbrace{dS_i d\vec{l}_i}_{d\tau_i} = \frac{1}{2} \sum' \int_{\tau_i} \vec{J}_i \vec{A} d\tau_i$$

$$E = \frac{1}{2} \int \vec{J} \vec{A} d\tau$$

osserviamo che

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{J}$$

$$B^i = \vec{\nabla}(\vec{A} \times \vec{B}) + A_{j0} \vec{J}^j$$

$$E = \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau} \left(\frac{B^2}{\mu_0} - \frac{\vec{D}(\vec{A} \times \vec{B})}{\mu_0} \right) d\tau$$

$$E = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\tau_0}^{\tau} B^2 d\tau - \frac{1}{2\mu_0} \int_{\tau_0}^{\tau} \vec{D}(\vec{A} \times \vec{B}) d\tau = \frac{1}{\mu_0} \int_{\tau_0}^{\tau} B^2 d\tau - \frac{1}{\mu_0} \int_{\tau_0}^{\tau} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{D} d\tau$$

l'integrale può essere esteso in un volume qualunque

$$B \approx \frac{1}{r^2}$$

$$A \approx \frac{1}{r}$$

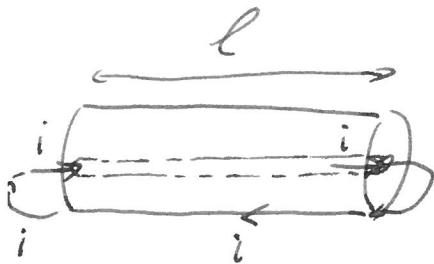
$$dS' \approx \frac{1}{r^2}$$

All'infinito il flusso del vettore $\vec{A} \times \vec{B}$ è null perciò.

$$E = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\tau_0}^{\tau} B^2 d\tau \quad \tau = \text{volume infinito.}$$

Esercizio

Considero il seguente circuito assiale:



a = raggio cilindro piccolo

b = raggio cilindro grande

Supponiamo che le correnti i attraversino prima il filo
di raggio a e poi attraversino il mantello del cilindro
di raggio b per ritornare nel filo.

1) Determina il valore L dell'induttanza del
circuito ottenuto.

$$L = \frac{\Phi(B)}{i}$$

la superficie attraverso la quale va calcolata
il flusso di B deve poggiare sul circuito.

Considero la superficie tratteggiata



Poiché le regioni di simmetria il campo B deve esserlo
le linee di forza circolari

Applichiamo il teorema delle circuitazioni

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i$$

$$B 2\pi r = \mu_0 i$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (\text{le linee di forza sono normali}\text{ alla superficie } S)$$

$$\oint B dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi} l \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} l \ln \frac{b}{a}$$

ha cresciuto il campo all'interno del conduttore

di raggio e essendo $\epsilon = 20$.

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \ell \ln \frac{l}{a}$$

Il circuito considerato è un circuito CL se considerate capacità C del tubo coassiale (condensatore cilindrico)

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 \ell}{\ln \frac{l}{a}}$$

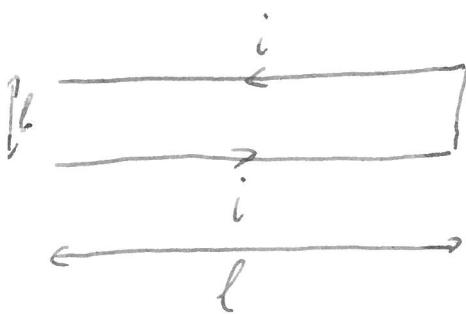
la pulsazione

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} = \frac{\ln \frac{l}{a} \cdot 2\pi}{4\pi \epsilon_0 \ell \rho l \ln \frac{l}{a}} = \frac{1}{\epsilon_0 \rho l^2} = \frac{C^2}{l^2}$$

La pulsazione dipende solo dalla lunghezza del canale.

Pb)

Determinare l'induttanza del circuito disegnato considerando $b \ll l$ e il raggio del conduttore per $\epsilon = 1$.



Essendo $b \ll l$ posso applicare la legge di Biot-Savart per determinare il valore di B .

Il flusso di B attraverso la superficie che poggia sul circuito consiste nel contributo del primo e del secondo tratto di circuito di lunghezza l

$$\phi(B) = \bar{\phi}_1(B) + \bar{\phi}_2(B) = 2\bar{\phi}_1(B)$$

$$\bar{\phi}_1(B) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} l \int_a^{b-e} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \frac{b-e}{a}$$

$$\phi(B) = \underbrace{\frac{2\pi l}{L} \ln \frac{b-a}{e}}_i$$

* Equazioni di Maxwell

Dalla legge sperimentale $\vec{F}_1 = \frac{q_1 q_2 \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

possibile definire $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_2}$ e dimostrare il teorema

$$\text{di Gauss } \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \bar{\phi}(\vec{E}) = \sum_i \frac{Q_i}{\epsilon_0}$$

tramite il teorema delle divergenze possiamo

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{P}{\epsilon_0} \quad (\text{I eq. Maxwell con stazioni})$$

Poiché inoltre il campo è conservativo, si ha

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (\text{II legge Maxwell conservativa}).$$

In presenza di un campo magnetico non stazionario si ha un campo elettrico non conservativo.

Sia la legge di Faraday - Neumann

$$f_i = - \frac{d \Phi(\vec{B})}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d \Phi(\vec{B})}{dt} \quad \text{rispetto a un circuito}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{eq. di Maxwell campo elettrico in corri non stazionari})$$

Per i campi magnetici si osserva che non esistono
in natura monpoli magnetici pertanto le
linee di forza uscenti da un punto devono
necessariamente ritornarci.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{III eq. Maxwell})$$

Dalla legge sperimentale di Biot e Savart

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{t}$$

\hat{t} = tangente alle curve regole concentriche
di filo attraversato. Se concentriche
si ricava

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{IV eq. Maxwell})$$

(il campo magnetico non è conservativo, il potenziale
non è regolare).

Vediamo ora le forme che assume la II eq.

di Maxwell in caso non stazionario.

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ se faccio la differenza di entrambi i termini

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{\text{II}} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

0

$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ Ricordando l'equazione di continuità delle correnti

$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\delta \rho}{\delta t}$ vediamo che la II eq. di Maxwell può valere solo nel caso di correnti stazionarie.

Il problema consiste nel trovare un vettore \vec{j}'
 tale che $\vec{\nabla} \vec{j}' = 0$ sempre e tale che $\vec{j}' = \vec{j}$ in
 condizioni stazionarie. In tal modo potremo ricavare
 le eq. di Maxwell nel caso generale.

$$\vec{\nabla} \vec{j} = - \frac{\delta p}{\delta t} = - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = - \vec{\nabla} \left(\epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} \right)$$

$$\vec{\nabla} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} \right) = 0$$

Ma allora $\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t}$ potrebbe essere proprio il vettore
 \vec{j}' cercato.

L'equazione di Maxwell diventa

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} \right) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t}$$

Eperimentalmente si può verificare che
tale esigenza è effettivamente corretta.

$$\vec{D} \times \vec{E} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$$

un campo magnetico variabile nel
tempo determina un campo elettrico



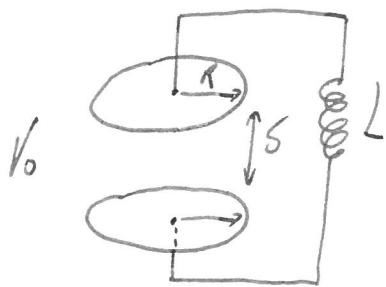
$$\vec{D} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\vec{S} \vec{E}}{\delta t}$$

($\vec{S} = 0$)

un campo elettrico variabile
nel tempo determina un
campo magnetico.



Pb) Considera il circuito (1 mostrato in figura e determina il campo magnetico generato tra le facce del condensatore.



Le cariche sulle facce del condensatore variano secondo la legge

$$q(t) = q_0 \cos \omega t \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

da cui

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$E(t) = \frac{V_0}{\delta} \cos \omega t \quad \text{il campo determinato tra le armature.}$$

Leq. di Maxwell

$$\vec{D} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t}$$

$$\int_{S} (\vec{D} \times \vec{B}) d\vec{S} = \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} d\vec{S}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \Phi(\vec{E})$$

ricavando che $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (le linee del campo sono linee) e per regioni di simmetrie le linee di \vec{B} sono circolari concentriche alle facce del condensatore.

$$B_{z \text{ eff}} = \mu_0 \epsilon_0 \underbrace{\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{V_0}{\delta} \cos \vartheta \right) \cdot r^2 \theta \right]}_{\Phi(\vec{E})}$$

$$zB = \mu_0 \epsilon_0 \frac{V_0}{s} r \text{ e vett}$$

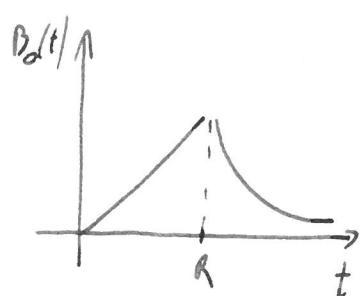
$$B = \frac{1}{c^2} \frac{V_0}{s} r \text{ e vett } (r \leq R)$$

per $r \geq R$ considerando l'esterno del condensatore

$$\vec{E} = 0$$

$$B_{2\pi r} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{V_0}{s} R' \pi \text{ e vett}$$

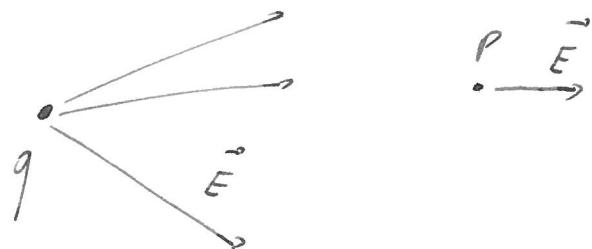
$$B = \frac{1}{c^2} \frac{V_0}{s} \omega R' \text{ e vett}$$



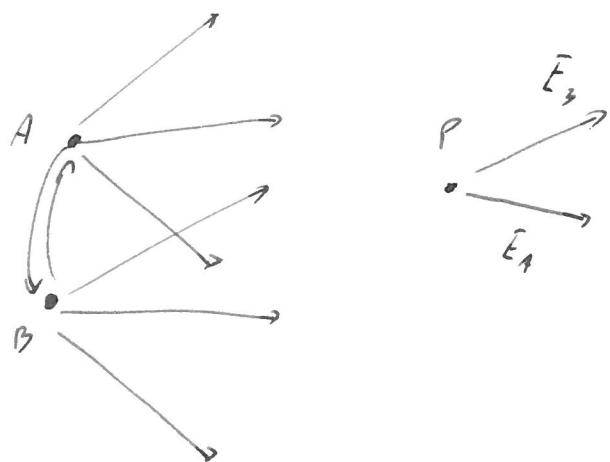
Il valore di B è proporzionale a ω , solo per pulsazioni molt. elevate è misurabile per mezzo di

Proiezione del campo elettrico e magnetico (onde elettromagnetiche)

*) Luce ferma nel mt.



*) Luce in mt. dal punto A e B c'è



Nel punto P , ci ha una variazione del campo elettrico, estendendo su tutti i punti dell'oggetto. Determiniamo come si proietta 58

questo campo variaibile ai punti della spaz.

*) onde nel vuoto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta \vec{E}}{\delta t}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\parallel} - \nabla' \vec{E}$$

$$\nabla' \vec{E} = - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \vec{\nabla} \times \left(- \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \right) = \frac{\delta}{\delta t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 \vec{E}}{\delta t^2}$$

per il campo magnetico

$$\nabla' \vec{B} = - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = - \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{c^2} \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} \right) = - \frac{1}{c^2} \frac{\delta}{\delta t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 \vec{B}}{\delta t^2}$$

*) il campo magnetico delle sospensioni
stesse ragione -

Le propagazione del campo magnetico elettrico
nello spazio è la stessa legge.

* Considero l'equazione

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad \text{supponiamo che il campo}$$

\vec{A} sia scindibile solo lungo l'asse x (onda piana)

$$\frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2}$$

trovare una soluzione delle forme $\vec{f}(x-ot)$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_L$$

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = \frac{df}{du} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{-o} = -o \frac{df}{du}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_L$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} = o^2 \frac{d^2 f}{du^2}$$

sostituendo f nell'eq. differenziale

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^2} = \frac{1}{c^2} v^2 \frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial u^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 0$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = 0 \quad c^2 = v^2$$

funzioni delle forme

$$\vec{f}(x + ct)$$

$\vec{f}(x - ct)$ soddisfano l'equazione differenziale proposte.

Il valore delle funzioni $f(x)$ deve essere determinato da altre condizioni.

*) Propagazione delle onde meccaniche

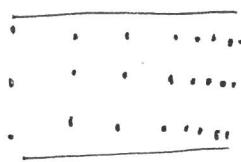
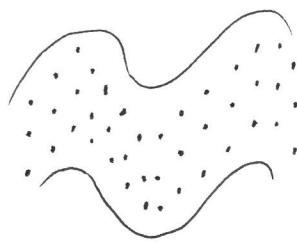
L'onda è una perturbazione che si propaga nello spazio;
le onde meccaniche e le onde sonore hanno bisogno
di un supporto (mediamente fisso nel tempo) per propagarsi;
le onde luminose si propagano anche nel vuoto.

Esistono due principali tipi di onde:

le onde trasversali caratterizzate dal fatto che lo spostamento del supporto meccanico avviene in direzione ortogonale rispetto alla propagazione dell'onda;

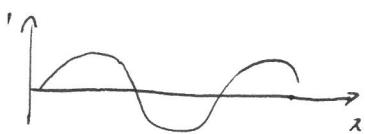
le onde longitudinali caratterizzate dal fatto che lo spostamento del mezzo attraverso il quale le onde si propagano è la causa delle onde.

'Un esempio di onde trasversali è fornito da una corda tesa pizzicata; le onde che si propagano all'interno di un pezzo di ferro colpito da un martello e le stesse onde sonore sono di tipo longitudinale.

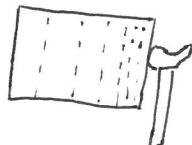


onde trasversali

onde longitudinali



corda pizzicata



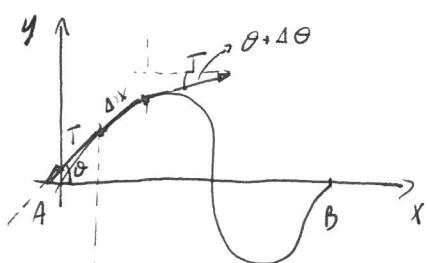
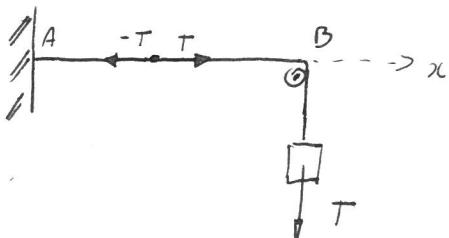
ferro colpito da un martello

4) Velocità di propagazione di un'onda in una corda pizzicata

? il caso di un'onda trasversale rappresentata da una funzione $\sigma_y(x \pm ct)$ che soddisfa l'equazione di 'Alambert

$$\nabla^2 \vec{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 \vec{A}}{\delta t^2} \quad \text{in una direzione} \quad \frac{\delta^2 A}{\delta x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\delta^2 A}{\delta t^2}$$

(la velocità di propagazione è c)



il grafico rappresenta la funzione
 $\sigma_y(x)$ funzione della sola x

Considero le forze agenti su un tratto Δx di corda supponendo che lo spostamento $\sigma_y(x)$ sia piccolo. 64

le forze agenti su Δx sono $\Delta F_y = T_{\text{ren}}(\theta + \Delta\theta) - T_{\text{ren}}\theta \approx T\Delta\theta$

$$\Delta F_y = T_{\text{ren}}\theta \cos \Delta\theta + T_{\text{ren}}\theta \sin \Delta\theta - T_{\text{ren}}\theta$$

essendo $\sigma_y(x)$ piccolo è possibile fare le seguenti

approssimazioni:

$$\cos \Delta\theta \approx 1$$

$$\sin \Delta\theta \approx \Delta\theta$$

$$\sin \theta \approx t_y \theta \approx \frac{\delta(\sigma(x \pm \Delta t))}{\Delta x} \approx \theta$$

$$\cos \theta \approx 1$$

$$\Delta F_y = T \cancel{\frac{\delta(\sigma(x,t))}{\Delta x}} - T \cancel{\frac{\delta(\sigma(x,t))}{\Delta x}} + T\Delta\theta \quad \left. \right\}$$

$$\underline{\frac{\Delta F_y}{\Delta x}} = T \frac{\Delta\theta}{\Delta x} \approx T \frac{\Delta t \theta}{\Delta x} = T \Delta \left(\frac{\partial(\sigma(x,t))}{\partial x} \right) / \Delta x$$

$$\underline{\frac{\Delta F_y}{\Delta x}} = T \frac{\delta^2(\sigma(x,t))}{\Delta x^2} \Delta x$$

me applicando la II legge di Newton

$$dF_y = dm \alpha = \rho \alpha dx$$

$$\alpha = \frac{\delta^2(\sigma(x,t))}{\delta t^2} \quad \text{pertanto}$$

$$\frac{T \delta^2(\sigma(x,t))}{\delta x^2} dx = \rho \frac{\delta^2(\sigma(x,t))}{\delta t^2} dx \quad \text{equazione di Almansi}$$

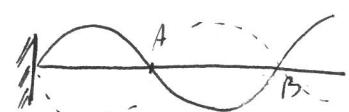
la velocità di propagazione dell'onda è pari a

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{se } T = 10 \text{ Kg} \\ \rho = \text{densità lineare} = 10^{-2}$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{10^{-2}}} = 31.6 \frac{m}{s}$$

*) Giunte all'estremo delle corde l'onde può riflettersi e tornare indietro, si ottengono così sovrapposizioni di onde più onde -

Per une corde pizzicate queste sovrapposizioni di onde fanno alcuni punti delle corde detti nodi restano costantemente fissi.



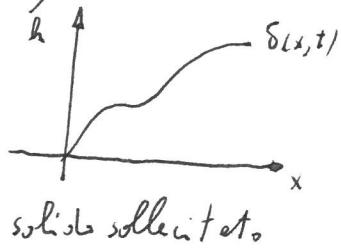
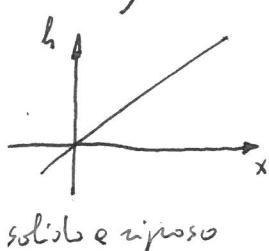
* Velocità di propagazione

Le leggi di Young afferma che per comprimere un solido di un valore Δx occorre esercitare una forza $F = KS \frac{\Delta h}{x}$

K = modulo di Young

S = sezione solido x = lunghezza e verso.

Consideriamo un solido soggetto ad una sollecitazione e il grafico che riporta sull'asse x la distanza dei punti e verso e sull'asse h la distanza dei punti sotto l'azione delle sollecitazioni



$$F = KS \frac{h - x}{x} \quad \text{la forza } \Delta F \text{ agente sul tratto } \Delta L \text{ vale}$$

$$\Delta F = F_2 - F_1 = KS \left(\frac{h_2}{x_2} - x - \frac{h_1}{x_1} + x \right) = KS \Delta \frac{\partial (\delta(x, t))}{\partial x}$$

$$\frac{dF}{dx} = KS \frac{\partial^2 (\delta(x, t))}{\partial x^2}$$

$$dF = \alpha \rho S dx = \frac{\partial^2 (\delta(x, t))}{\partial t^2} \rho S dx \quad \rho = \text{densità di mase}$$

$$KS \frac{\partial^2 (\delta(x, t))}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (\delta(x, t))}{\partial t^2} \rho S \quad \text{equazione d'Almansi}$$

la velocità di propagazione dell'onda è

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

La propagazione di un'onda nel fuo avviene con velocità

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 10^7}{8 \times 10^3}} \approx 5000 \frac{m}{s}$$

*) Anche l'onda sonora è un'onda longitudinale
che si trasmette nell'aria

La trasmissione delle onde nell'aria avviene
adiabaticamente

$$\rho V^\gamma = \text{costante} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

differenziando

$$\gamma dP + P \gamma V^{\gamma-1} dV = 0$$

$$V^{\gamma-1} dP + P \gamma V^{\gamma-2} dV = 0$$

$$dP = -P \gamma \frac{dV}{V} \quad \text{comparabile con} \quad \frac{dF}{S} = -K \frac{dx}{x}$$

ricaviamo che P_f rappresente il modulo di Young

Pertanto la propagazione delle onde sonore nell'aria

avrà una velocità $v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$

Per i gas reali vale

$$PV = \frac{m}{M} RT$$

$$\frac{PV}{m} = \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1.4 \cdot 8.31 \cdot 293}{29 \cdot 10^{-3}}} \approx 300 \frac{m}{s}$$

* | La velocità del suono varia con la temperatura.

Onde elettromagnetiche piane

Le onde elettriche e le onde magnetiche devono soddisfare l'equazione d'Altenber

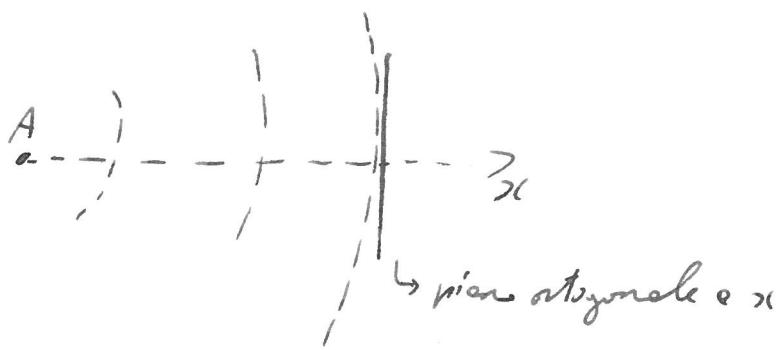
$$\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad \square \vec{A} = 0 \quad (\text{in simboli})$$

↳ dilatamenti

Supponiamo che le onde vengano prodotte in un punto A, esse per regioni di simmetria si estendono radialmente.

A distanze molto grandi da A la superficie dell'onda può essere assimilata ad un piano e tal condizioni l'onda è detta piana e può essere considerata uniforme su una superficie S (sufficientemente piatta) estesa oltre al

piani ortogonali e x (o fig)



In tali condizioni l'onda \vec{A} sarà tale che

$$\frac{\delta \vec{A}}{\delta y} = \frac{\delta \vec{A}}{\delta z} = 0 \quad \text{onda uniforme lungo y, z.}$$

L'equazione d'Alembert assume la forma più semplice

$$\frac{\delta^2 \vec{A}}{\delta x^2} = \rho_0 E_0 \frac{\delta^2 \vec{A}}{\delta t^2} \quad (\text{onda a grande distanza dalla sorgente}).$$

considerando le equazioni di Maxwell e osservando
che a grande distanza dalle sorgenti $\frac{\delta \vec{B}}{\delta y} = \frac{\delta \vec{B}}{\delta z} =$

$$= \frac{\delta \vec{E}}{\delta y} = \frac{\delta \vec{E}}{\delta z} = 0 \quad \text{otteniamo}$$

$$\text{I) } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \frac{\delta E_x}{\delta x} = 0$$

$$\text{II) } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \frac{\delta B_x}{\delta x} = 0$$

$$\text{III) } \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta B_x}{\delta t} = 0 \\ \frac{\delta E_z}{\delta x} = \frac{\delta B_y}{\delta t} \\ \frac{\delta E_y}{\delta x} = - \frac{\delta B_z}{\delta t} \end{cases}$$

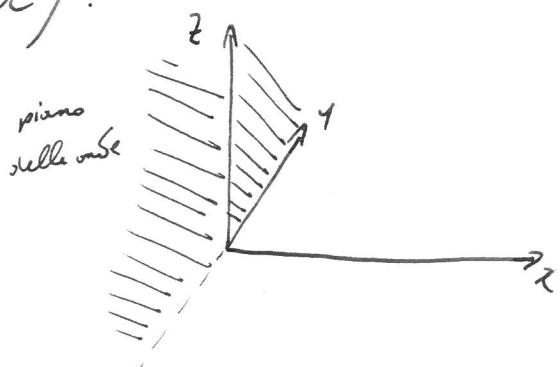
$$\text{IV) } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta E_x}{\delta t} = 0 \\ \frac{\delta B_z}{\delta x} = - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\delta E_y}{\delta t} \\ \frac{\delta B_y}{\delta x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\delta E_z}{\delta t} \end{cases}$$

Dalle equazioni $\frac{\delta E_x}{\delta x} = 0$ $\frac{\delta E_x}{\delta t} = 0$ (analoga per B)

ricaviamo che E_x e B_x sono costanti nel tempo e
uniformi nello spazio pertanto tali componenti
di \vec{E} , \vec{B} non contribuiscono alla propagazione
di onde elettromagnetiche le sono fuori
scalo con il tempo lo spazio.

Possiamo affermare che

* le onde elettromagnetiche sono puramente
trasversali. Appartengono a un piano ortogonale
 (x, z) .



In generale onde che si sviluppa lungo il piano \mathcal{Z} può essere viste come somme di un'onda diretta lungo l'asse \mathcal{Z} e un'onda diretta lungo l'asse \mathcal{Y} (onde polarizzate)

Considera un'onda elettrica E_y polarizzata secondo l'asse \mathcal{Y} . E_y varia con il tempo e con la posizione x .

Dalle equazioni di Maxwell

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

osservi che necessariamente a tale onda elettrica deve essere associata un'onda magnetica diretta lungo l'asse \mathcal{Z} .

*) Si parla sempre di ondelettromagnetiche

Inoltre B_z è l'unica componente dell'onda magnetica associata all'onda elettrica polarizzata diversa da 0 infatti:

$$\frac{\delta B_y}{\delta t} = \frac{\delta E_z}{\delta x} = 0 \quad (E_z = 0)$$

$$\frac{\delta B_y}{\delta x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\delta E_z}{\delta t} = 0$$

Non c'è onda magnetica lungo l'asse y .

*) In un'onda elettromagnetica campo elettrico e magnetico sono tre vettori ortogonali ed entrambi appartenenti al piano ortogonale alle direzioni di propagazione delle onde.

* Determinare il rapporto fra l'intensità
del campo elettrico e magnetico di un'onda
sotto forma di onda.

$$\vec{E} = \vec{E}(x - ct)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(x - ct)$$

$$E_y = E_y \underbrace{(x - ct)}_{\zeta u}$$

$$B_z = B_z \underbrace{(x - ct)}_{\zeta u}$$

$$\frac{\delta E_y}{\delta x} = - \frac{\delta B_z}{\delta t}$$

$$\frac{\delta E_y}{\delta x} = \frac{d E_y}{du} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{d E_y}{du}$$

$$\frac{\delta B_z}{\delta t} = \frac{d B_z}{du} \cdot \frac{\delta u}{\delta t} = - \frac{d B_z}{du} c$$

ricercate

$$\frac{dE}{du} = c \frac{dB}{du}$$

$$\frac{d}{du} (E - cB) = 0$$

$$E = cB + \underbrace{\text{costante}}$$

↪ non contribuisce alla propagazione
delle onde

$$E = cB$$

Conservazione dell'energia e utore Poynting

considere un solido di volume τ ; la densità di energia elettrica e magnetica presente in tale volume

è allora

$$\omega = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E} \vec{E} + \frac{1}{2\mu} \vec{B} \vec{B}$$

$$-\frac{\delta \omega}{\delta t} = -\epsilon \vec{E} \frac{\delta \vec{E}}{\delta t} - \frac{1}{\mu} \vec{B} \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} =$$

$$= -\epsilon \vec{E} \left(\frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\epsilon \mu} - \frac{\vec{J}}{\epsilon} \right) + \frac{1}{\mu} \vec{B} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) =$$

$$= -\frac{1}{2} \vec{E} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{E} \vec{J} + \frac{1}{\mu} \vec{B} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\vec{B} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right] + \vec{E} \vec{J}$$

ricordando che

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\frac{S\omega}{St} = \frac{1}{t} \int_{\tau} \vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \vec{j}$$

$$E = \int_{\tau} \alpha d\tau \quad \frac{dE}{dt} = \int_{\tau} \frac{S\omega}{St} d\tau$$

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{t} \int_{\tau} \vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{B}) d\tau + \int_{\tau} \vec{E} \vec{j} d\tau$$

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{1}{t} \int_{\tau} \phi(\vec{E} \times \vec{B}) + \int_{\tau} \vec{E} \vec{j} d\tau$$

chiamo rette Pointing $\frac{1}{t}(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{N}$ ottenendo

$$-\frac{dE}{dt} = \phi(\vec{N}) + \int_{\tau} \vec{E} \vec{j} d\tau = \phi(\vec{N}) + \int_{\tau} \rho S^2 d\tau$$

(considerando la legge di Ohm $\vec{E} = \vec{J}$)

$\int_T \rho J^2 d\tau$ rappresenta le potenze dissipate

nel volume $d\tau$ per effetto Joule

potenze dissipate effetto Joule.

$$dW = \vec{J} d\tau \cdot \vec{F} = \vec{J}_d n q (\vec{E} + \vec{J}_d \times \vec{B}) d\tau$$

$$= \vec{J}_d n q \vec{E} d\tau$$

$$dW = \vec{J} \vec{E} d\tau$$

*) La diminuzione per unità di tempo

dell'energia in un volume $d\tau$ è pari alle somme delle potenze dissipate per effetto Joule più $\oint \vec{N}$ attraverso la superficie di contorno. 82

Nel caso in cui non ci siano percorri, si conosce

$$-\frac{dE}{dt} = \vec{J}(\vec{N}) \quad (\text{la variazione di energia è dovuta all'onda elettromagnetica})$$

Il vettore Poynting rappresenta l'energia che l'onda elettromagnetica trasporta nell'unità di tempo attraverso una superficie S .

$$[\vec{N}] = \frac{W}{S}$$

N.B. $\int_T \vec{E} \vec{J} d\tau = \iint \vec{E} \vec{J} d\vec{l} d\vec{s} = \int \vec{E} d\vec{l} \left[\int \vec{J} d\vec{s} \right] = A V i = W$

*) La luce è un'onda elettromagnetica, di venire delle frequenze dell'armonico principale ricade nelle bande dell' infrarosso - ottico - ultravioletto - raggi X - raggi gamma. (lunghezze d'onda λ decrescenti).

È facile calcolare quantitativamente il flusso di potere delle onde elettromagnetiche provenienti dal sole

$$h = \frac{e \text{ col}}{\text{cm}^2 \text{ min}} = \frac{4 \cdot 18 \cdot 2}{10^4 \cdot 10} = 1400 \frac{W}{m^2}$$

h rappresenta la misura $|\vec{N}|$

$$h = \frac{1}{\gamma} |\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{1}{\gamma c} E^2$$

*) \vec{N} è diretto nel verso delle proiezione dell'onda ortogonale a \vec{E} e \vec{B} ^{8h}

Considérons la ononde principale

$$E = E_0 \sin \omega t \quad \tilde{E}^2 = \tilde{E}_0^2 \sin^2 \omega t \text{ et } \approx \text{moyenne sur un période}$$
$$\approx \frac{\tilde{E}_0^2}{2}$$
$$h = \frac{1}{2} \frac{\tilde{E}_0^2}{2c}$$

$$\tilde{E}_0 = \sqrt{2cqh} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-2} \cdot 14 \cdot 10^3} \approx 10^3 \frac{V}{m}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 3 \times 10^{-4} T$$

* la potenza che le tempeste assorbe dal sole
sola

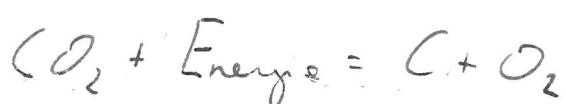
$$W_T = h \pi R_t^2$$



$$W_T = 1.4 \cdot 10^3 \pi 6.4^2 \cdot 10^{12} = 1.8 \cdot 10^{12} W$$

Potenza enorme considerando che la potenza
di una centrale elettrica è dell'ordine di $10^9 W$.

Soltane parte piccolissime di tale energia
si tramuta in energia cinetica (espressione
scure etc...) una piccolissima parte è
assorbita dalle piante per la regione



Tutta l'energia ceduta dal sole viene riflessa
dalle terre sole l'equazione

$$W = \sigma S T^4 \quad \sigma = \text{costante} = 5.67 \cdot 10^{-8}$$

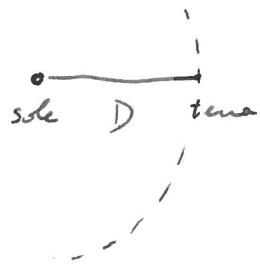
S = superficie terre

T = Temperatura terrestre

$$T = \sqrt[4]{W/S} = \sqrt[4]{1.8 \cdot 10^{12} / 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot \pi \cdot 6.4^2 \cdot 10^{12}} = 280 \text{ } ^\circ\text{K}$$

(la temperatura di ogni pianeta è proporzionale
a W cioè proporzionale a S).

* Potenza emessa dal sole



$$D = 150 \cdot 10^6 \text{ Km}$$

Poiché $h = (\text{potenza su unità di superficie}) \cdot e^-$
rispetto alla terra e sole $h = 1.4 \cdot 10^3$

la potenza dissipata dal sole è

$$W_s = h \cdot 4\pi D^2 = 1.4 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot \pi \cdot (150 \cdot 10^6)^2 = 4 \cdot 10^{26} W$$

L'energia sprigionata dal sole è fornita
dalla fusione di due atomi di idrogeno per
formare un atomo di elio

In tale fusione si ha una perdita di massa dell'1%,
 tale massa viene trasformata in energia secondo
 l'equazione $E = mc^2$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t c^2} = \frac{W_s}{c^2}$$

la perdita di massa del sole è dell'ordine di

$$\frac{4 \cdot 10^{26}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 4 \cdot 10^9 \frac{\text{Kg}}{\text{s}}$$

Considerando che attualmente il sole è costituito

solo $2 \cdot 10^{30}$ Kg di idrogeno, potranno essere

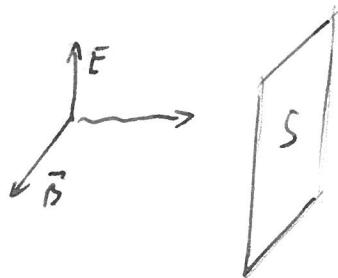
$$\text{trasformate in energia ancora } \frac{2 \cdot 10^{30}}{100} = 2 \cdot 10^{28} \text{ Kg}$$

il sole finirà di emettere energia tre

$$\frac{2 \cdot 10^{18}}{4 \cdot 10^9} \text{ secondi} = 5 \cdot 10^8 \text{ s} \quad \text{cioè} \quad \frac{5 \cdot 10^{18}}{3.14 \cdot 10^7} : 10^6 \text{ anni.}$$

Interazione tra onde elettromagnetiche e metane
(penetrazione d'onda).

Considera un'onda elettromagnetica che incide su una lastra come in figura



l'onda elettromagnetica interagisce con tutte le particelle che rientrono delle presenze di \vec{E} e \vec{B}

Se sulla lastra è presente una carica q essa risente di una forza $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ le potenze dissipate dalla carica q vale $W = q\vec{E}\vec{v}$

le forze media agenti sulla carica è

$$\langle \vec{F} \rangle = q \underbrace{\langle \vec{E} \rangle}_{\text{!}} + q \langle \vec{v} \times \vec{B} \rangle$$

$$\langle W \rangle = q \langle \vec{E} \vec{v} \rangle$$

poché la velocità \vec{v} è parallela a \vec{E} , $\vec{B} \perp \vec{E}$

$$|\langle \vec{F} \rangle| = q \langle v B \rangle$$

$$\langle W \rangle = q \langle E v \rangle$$

$$\frac{|\langle \vec{F} \rangle|}{\langle W \rangle} = \frac{\langle B \rangle}{\langle E \rangle} = \frac{1}{c}$$

le pressioni associate all'onda sulla superficie S' vale

$$P = \frac{\langle F \rangle}{S} = \frac{\langle W \rangle}{\langle S \rangle} = (\text{se la superficie assorbe tutta l'energia dell'onda})$$
$$= \frac{|\langle \vec{N} \rangle|}{c}$$

Il campo elettrico presente nelle onde elettromagnetiche provenienti dal sole è delle forme

$$E = E_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad E_0 = 10^3 \frac{V}{m}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{c} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{\vec{E}}{c}$$

$$\langle \vec{N} \rangle = \frac{\vec{E}^2}{2c}$$

pressione associata all'onda $p = \frac{\langle \vec{N} \rangle}{c} \cdot \frac{E_0}{2c} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$

$$p = 0.5 \cdot 10^{-11} \cdot 10^6 = 10^{-5} \frac{N}{m^2} \quad (\text{pressione inlevante})$$

Un effetto visibile della pressione delle onde elettromagnetiche è la deviazione delle corde di una cometa in vicinanza del sole.



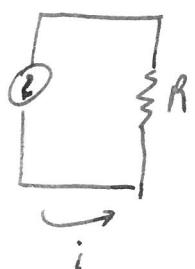
Correnti alternate

Consideriamo spire in presenza di un campo magnetico sinusoidale.

Le forze elettromotrici indotte nelle spire è delle forme $f(t) = f_0 \sin \omega t$

Se si ricade (la pulsazione delle corrente industriale può essere considerata tale) è possibile applicare le leggi di Ohm e di Kirchhoff.

1) circuito R



$$f_0 \sin \omega t = R i$$

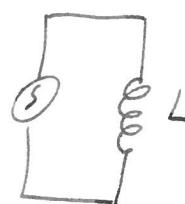
$$i(t) = \frac{f_0}{R} \sin \omega t$$



corrente alternata.

2) Circuito L (L =induttanza)

$$f_o \sin \omega t - L \frac{di}{dt} = 0$$



$$\frac{di}{dt} = \frac{f_o}{L} \sin \omega t$$

$$i = -\frac{f_o}{L \omega} \cos \omega t = \frac{f_o}{L \omega} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

3) Circuito C (C =capacità)

$$f_o \sin \omega t - \frac{q}{C} = 0$$

$$q = f_o C \sin \omega t \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$i = f_o C \omega \cos \omega t = f_o C \omega \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

Osserviamo che nei circuiti più generali possibili, in
presenza di un alternatore la corrente i assume delle
forme

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi) = \frac{f_0}{Z} \sin(\omega t + \varphi)$$

Z = impedenza

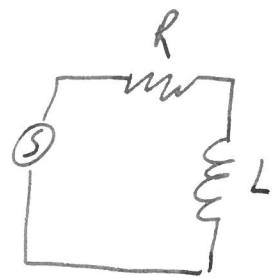
In presenza sola resistenza $Z = R$ $\varphi = 0$

In presenza dell'induttanza $Z = \omega L$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$

In presenza di un condensatore $Z = \frac{1}{\omega C}$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

4) circuito RL

$$\text{forza elettrica} - L \frac{di}{dt} = R i$$



$$L \frac{di}{dt} + R i = \text{forza elettrica} \quad (\text{equazione differenziale lineare non omogenea})$$

la soluzione dell'omogenea associata è delle forme $i(t) = i_0 t^{-\frac{R}{L}}$ decresce esponenzialmente; però, il suo contributo è irrilevante nell'analisi della soluzione generale.

Ricerca una soluzione particolare delle forme $i(t) = i_0 \sin(\omega t - \phi)$

$$L_{i,\theta} \cos(\omega t - \varphi) + R_{i,\theta} \sin(\omega t - \varphi) = f_0 \sin \omega t$$

$$L_{i,\theta} [\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi] + R_{i,\theta} [\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi] = f_0 \sin \omega t$$

$$L_{i,\theta} \cos \omega t \cos \varphi + L_{i,\theta} \sin \omega t \sin \varphi + R_{i,\theta} \sin \omega t \cos \varphi - R_{i,\theta} \cos \omega t \sin \varphi = f_0 \sin \omega t$$

$$[L_{i,\theta} \cos \varphi - R_{i,\theta} \sin \varphi] \cos \omega t + [R_{i,\theta} \cos \varphi + L_{i,\theta} \sin \varphi] \sin \omega t = f_0 \sin \omega t$$

$$L_{i,\theta} \cos \varphi - R_{i,\theta} \sin \varphi = 0$$

$$L_{i,\theta} \sin \varphi + R_{i,\theta} \cos \varphi = f_0$$

$$\tan \varphi = \frac{L_{i,\theta}}{R}$$

$$\sin \varphi = \frac{t_3 \varphi}{\sqrt{1+t_3^2 \varphi}}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t_3^2 \varphi}}$$

$$t_3 \varphi : \frac{L \omega}{R}$$

$$i_o = \frac{f_o}{L \sin \varphi + R \cos \varphi}$$

$$i_o = \frac{f_o}{\frac{L^2 \omega^2}{R \sqrt{1+\frac{L^2 \omega^2}{R^2}}} + \frac{R}{\sqrt{1+\frac{L^2 \omega^2}{R^2}}} } = \frac{f_o}{\frac{L^2 \omega^2}{\sqrt{R^2+L^2 \omega^2}} + \frac{R^2}{\sqrt{R^2+L^2 \omega^2}}} =$$

$$= \frac{f_o \sqrt{R^2+L^2 \omega^2}}{R^2+L^2 \omega^2} = \frac{f_o}{\sqrt{R^2+L^2 \omega^2}}$$

$$Z = \sqrt{R^2+L^2 \omega^2} \quad \varphi = \arctg \frac{L \omega}{R}$$

5) Per il circuito RC vale

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega RC}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

6) Per il circuito RCL

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

* Potenze dissipate per effett Joule

$$W(t) = f(t) \cdot i(t) = i_0 f_0 \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= \frac{i_0 f_0}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]$$

$$\langle W \rangle = \frac{i_0 f_0 \cos \varphi}{2} - \underbrace{\frac{i_0 f_0}{2} \langle \cos(2\omega t - \varphi) \rangle}_{\stackrel{11}{0}}$$

$$\langle W \rangle = \frac{i_0 f_0}{2} \cos \varphi$$

se circuito privo di resistenza allora risulta

$$\text{che } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\langle W \rangle = 0.$$

fol

*) misuratore di corrente alternata.

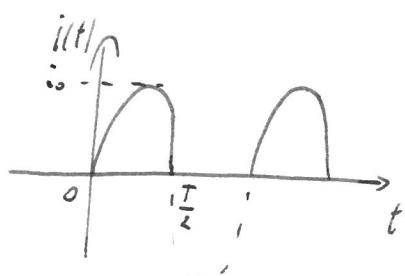
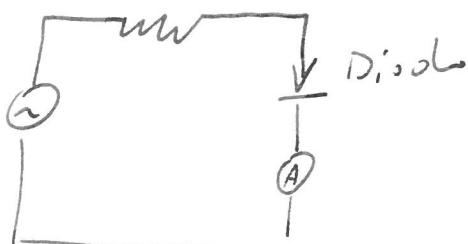
Una corrente alternata nelle forme

$i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ è immediatamente nulla, se ci

piccole il . . . come amperometro rileva

$\langle i \rangle$ pertanto oscilla intorno allo zero.

Per misurare tale corrente occorre applicare
in serie all'amperometro un diodo che lascia
passare corrente solo in un verso



l'intensità media di corrente misurata

dall'impensato vale

$$\langle i \rangle = \frac{i_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} u \cos \omega t dt = \frac{i_0}{\omega T} \int_0^{\frac{T}{2}} e \cos \omega t dt =$$

$$= \frac{i_0}{2\pi} \left[e \sin \omega t \right]_0^{\frac{T}{2}} = - \frac{i_0}{2\pi} \left[-1 - 1 \right] = \frac{i_0}{\pi}$$

Metodo simbolico

Il metodo simbolico consente di risolvere le reti in corrente alternata in modo formalmente analogo alle reti in corrente continua.

A una grandezza $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$ si associa

la grandezza complessa $I_c(t) = I_0 (\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)) =$

$$= I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = I_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t}$$

Siccome ad una grandezza complessa

$I_c(t) = I_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} = (a + ib) e^{i\omega t}$ associa la

grandezza $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$$I_0 = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{b}{a}$$

Il vantaggio di posse le corrente alternate
i in forme complesse consiste nell'essere
una semplice relazione tra le tensioni ai capi:
di una resistenza, induttanza o condensatore e
la corrente i.

$$\left\{ \begin{array}{l} V_L(t) = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}) = LI_0 i\omega e^{i(\omega t + \varphi)} = i\omega L I \\ V_C(t) = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{C} \int I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} dt = \frac{1}{C i \omega} I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = -\frac{i}{C \omega} I \\ V_R(t) = RI \end{array} \right.$$

Per un qualunque componente vale
la relazione complessa

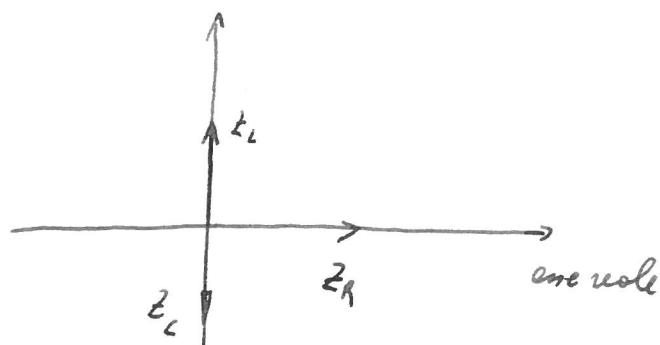
$$V = Z I \quad Z = \text{impedenza complessa} . \quad 105$$

$$Z_L = i\omega L$$

asse immaginario

$$Z_C = -\frac{i}{\omega C}$$

$$Z_R = R$$

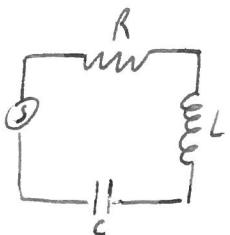


Considerando che anche nel caso di corrente alternata valgono le leggi di Ohm e di Kirchhoff possiamo affermare che l'impedenza complessa - totale di un circuito - vale

$$Z_s = \sum z_i \quad (\text{circuiti in serie})$$

$$\frac{1}{Z_s} = \sum \frac{1}{z_i} \quad (\text{circuiti in parallelo})$$

* Risolviamo con il metodo simbolico il circuito RLC.



$$f = (Z_R + Z_L + Z_C) I = Z I$$

$$Z = R + i \omega L - \frac{i}{\omega C} = Z_0 e^{i\varphi}$$

$$I = \frac{f}{Z} = \frac{f_0 e^{i\omega t}}{Z_0 e^{i\varphi}} = \frac{f_0}{Z_0} e^{i(\omega t - \varphi)}$$

la corrente reale associata a I è dello stesso

$$I = \frac{f_0}{Z_0} \cos(\omega t - \varphi)$$

Z_0 e φ possono essere determinati considerando

$$\text{che } z = R + i\omega t - \frac{i}{\omega C} = Z_0 e^{i\varphi}$$

$$z = R + i\left(\omega t - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$Z_0 = |z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega t - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

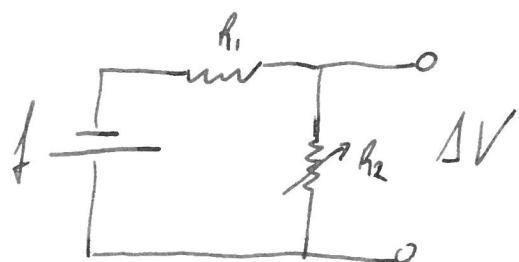
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega t - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Le I complesse ottenute sono soluzioni particolari dell'equazione differenziale, per la linearità di tali equazioni la parte reale e la parte immaginaria di I soddisfano entrambe l'equazione differenziale.

Le I reale pertanto è una soluzione particolare eq. differenziale, poiché la soluzione dell'omogenea tende rapidamente a zero esse può essere 108

considerate la soluzione generale del circuito considerato.

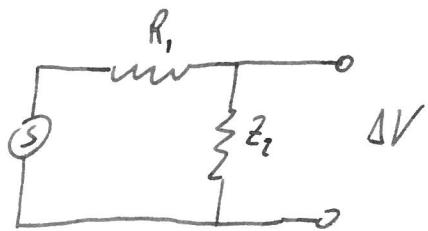
f) Per un circuito e corrente continua è facile risalire con una resistenza variabile una forza elettromotrice f



$$\Delta V = R_2 i = \underline{R_2 f} \\ \underline{R_1 + R_2}$$

Per un circuito e corrente alternata non solo è possibile varicare V_0 ($\Delta V = V_0 \cos(\omega t + \varphi)$) facendo varicare opportunamente R_2 ma i

anche possibile selezionare correnti aventi particolari frequenze realizzando filtri.



Se vogli: per misurare basse frequenze collega un

condensatore $Z_2 = -\frac{i}{\omega C}$ (al limite $\omega = 0$)

corrente continua $\Delta V = f$ essendo $Z_2 \rightarrow \infty$)

$$\frac{\Delta V}{f} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{-\frac{i}{\omega C}}{R_1 - \frac{i}{\omega C}} = -\frac{i}{\omega C} \cdot \frac{\omega C}{\omega C R_1 - i} =$$

$$= -\frac{i(\omega C R_1 + i)}{\omega^2 C^2 R_1^2 + 1} = \frac{-i\omega C R_1 + 1}{\omega^2 C^2 R_1^2 + 1} = \frac{1 - i\omega C R_1}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2} = \text{Complesso}$$

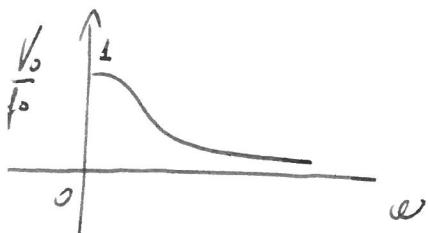
$$\frac{\Delta V}{f} = \frac{V_o e^{i\omega t} e^{-i\phi}}{f e^{i\omega t}}$$

$$\frac{V_o}{f_0} = |\text{complesso}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R_1^2 C^2}} \quad 110$$

$\varphi = \omega$ saranente tra le due faze ellittometriche

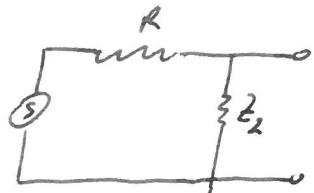
$$t_j \varphi = \omega c R$$

$$\frac{V_o}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$



La differenza di potenziale
 $\Delta V = V_o \cos(\omega t + \varphi)$ è una onda
ossinale se $\varphi \rightarrow 0$.

Se voglio far passare alte frequenze collegate
in'induttanza

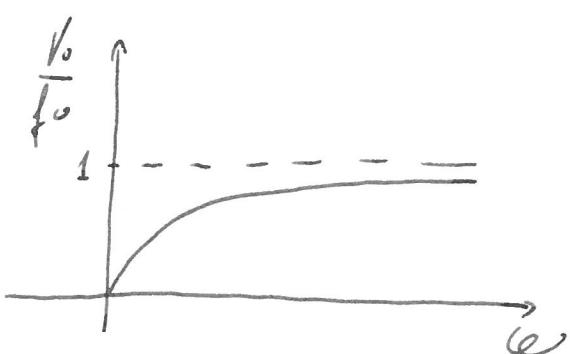


$$Z_2 = i\omega L$$

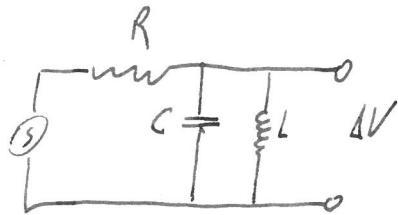
(Per ω alte $Z_2 \rightarrow \infty$, $IV \rightarrow f$)

$$\frac{IV}{f} = \frac{Z_2}{R + Z_2} = \frac{i\omega L}{R + i\omega L} = \frac{i\omega L(R - i\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\omega^2 L^2 + i\omega L R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\frac{V_o}{f_o} = \frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} \sqrt{\omega^4 L^4 + \omega^2 L^2 R^2} = \frac{\omega L \sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}{R^2 + \omega^2 L^2}$$



È possibile infine realizzare un filtro che lascia passare prevalentemente frequenze di ampiezza ω_0 .
(Filtro passe banda)



$$\frac{\Delta V}{f} = \frac{Z}{R+Z} \quad Z = \text{parallelo } C e L$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{i\omega L} - \frac{\omega C}{i} = \frac{1 - \omega^2 LC}{i\omega L}$$

$$Z = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

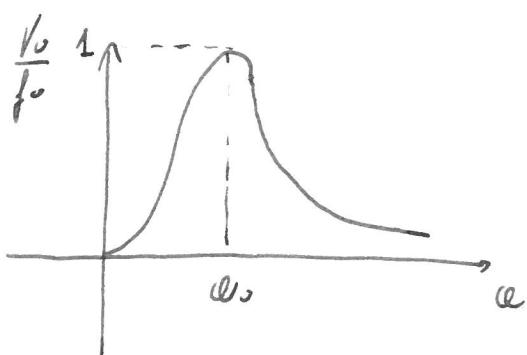
$$\frac{\Delta V}{f} = \frac{\frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}}{R + \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \cdot \frac{1 - \omega^2 LC}{R(1 - \omega^2 LC) + i\omega L}$$

$$\frac{\Delta V}{f} = \omega L \frac{\omega L + iR(1-\omega^2LC)}{\omega^2L^2 + R^2(1-\omega^2LC)^2}$$

$$\frac{V_0}{f_0} = \frac{\omega L}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2(1-\omega^2 LC)^2}}$$

$$\text{Se } R^2(1-\omega^2 LC)^2 = 0 \quad \text{cioè} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{si}$$

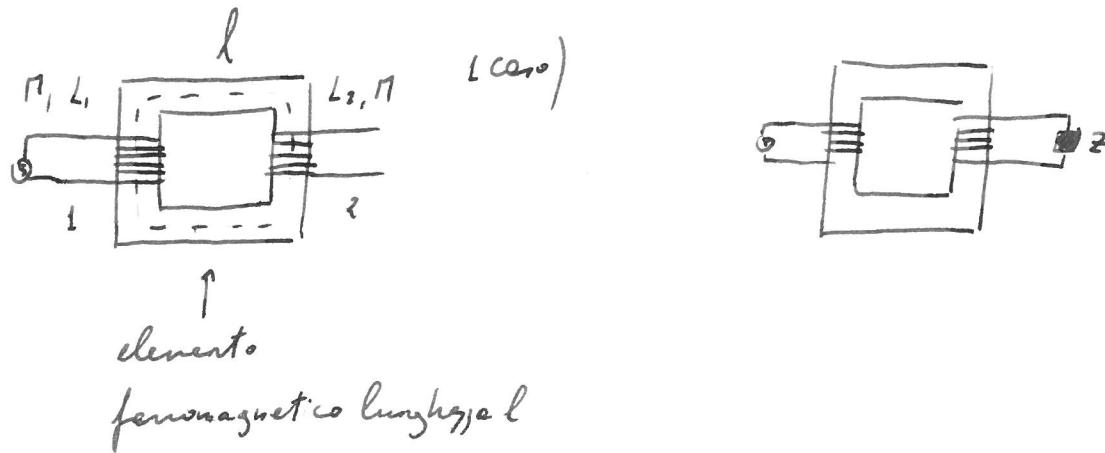
ha la condizione di risonanza in tal caso $f_0 = V_0$



ffh

Trasformatore statico

Un Trasformatore statico permette di modificare l'ampiezza di una forza elettromotrice alternata senza modificare la frequenza.



Poiché le linee del campo B si mantengono all'interno del materiale ferromagnetico (il flusso disperso è nullo) $B S_L = B S_C = \phi(B)$

Vogliono le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = \frac{N_1 \phi}{i_1} \\ L_2 = \frac{N_2 \phi}{i_2} \end{array} \right. \quad M_1 = N_2 = \frac{N_2 \phi}{i_2} = \frac{N_1 \phi}{i_2}$$

Se nel 1° circuito le resistenze e trascurabile
il 2° è aperto allora

$$f_1 = Z_1 i_1 = i \omega L_1 i_1$$

$$f_2 = i \omega M i_1 \quad (i = \sqrt{-1})$$

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_2 \phi}{j\omega} \cdot \frac{j\omega}{N_1 \phi} = \frac{N_2}{N_1}$$

Supponiamo ora di chiedere il secondo
cicuito su un'impedenza Z e determiniam
le differenze di potenziale ai capi di Z

$$f_1 = i \omega L_1 i_1 + i \omega M i_2$$

$$f_2 = \text{diff. pt. capi di } Z = i \omega L_2 i_2 + i \omega M i_1$$

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{L_2 i_2 + M i_1}{L_1 i_1 + M i_2} = \frac{N_2 \phi + N_2 \phi}{N_1 \phi + N_1 \phi} = \frac{N_2}{N_1} \quad 116$$

*) Considera un circuito soggetto ad una forza elettromotrice f e attraversato da una corrente i .

La potenza $P = fi$

non è possibile determinare P con il metodo simbolico poiché la corrispondenza binomiale tra i numeri complessi è la loro parte reale conserva le applicazioni lineari quali le derivate e gli integrali ma non conserva il prodotto.

$$P = \operatorname{Re}(f) \cdot \operatorname{Re}(I) \quad f = f_0 e^{i\omega t} \quad i = i_0 e^{i(\alpha t - \varphi)}$$

$$\text{Se } z = a + ib \text{ vale } \operatorname{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i}$$

$$z^* = a - ib$$

117

$$P = (f + f^*)/(i + i^*) \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{1}{4} (fi + f^*i^* + f^*i + i^*f) = \frac{1}{4} f_0 i_0 \left(e^{i(\omega t - \varphi)} + e^{-i(\omega t - \varphi)} + e^{-i\varphi} + e^{i\varphi} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} f_0 i_0 (2\cos(\omega t - \varphi) + 2\cos\varphi)$$

$$P = \frac{f_0 i_0}{2} (\cos(\omega t - \varphi) + \cos\varphi)$$

$$\langle P \rangle = \frac{f_0 i_0}{2} \cos\varphi$$

Equazioni fondamentali del campo elettrico e magnetico
in condizioni non stazionarie.

Le equazioni di Maxwell nel caso non stazionario sono:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Poiché $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ è possibile introdurre il potenziale vettore \vec{A} tale che $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ (il potenziale vettore è definito a meno di $\vec{\nabla} \lambda$)

Il campo elettrico \vec{E} non è conservativo tuttavia sostituendo nella 3^a equazione $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$\vec{\nabla} \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0$ è possibile definire un potenziale V tale che

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \vec{A} - \nabla^2 V \quad (*)$$

(il valore $\vec{\nabla} \vec{A}$ può essere fissato a piacere)

Consideriamo le IV equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \gamma \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \gamma \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ricordando la definizione di V

$$\vec{V}(\vec{\sigma}\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \gamma \vec{j} + \mathcal{E}_1 \frac{1}{\epsilon_0} \left[-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\sigma} V \right]$$

$$\vec{V}(\vec{\sigma}\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = \gamma \vec{j} - \mathcal{E}_1 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{V}\left(\mathcal{E}_1 \frac{\partial V}{\partial t}\right)$$

$$\vec{V}\left(\vec{\sigma}\vec{A} + \mathcal{E}_1 \frac{\partial V}{\partial t}\right) - \nabla^2\vec{A} = \gamma \vec{j} - \mathcal{E}_1 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

posso fissare A tale che

$$\vec{V}\vec{A} = -\mathcal{E}_1 \frac{\partial V}{\partial t} \quad \text{a Henry}$$

$$I) \quad \nabla^2\vec{A} - \mathcal{E}_1 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\gamma \vec{j}$$

II) sostituendo $\vec{V}\vec{A}$ nelle (*)

$$\vec{V}\vec{E} = \mathcal{E}_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \nabla^2 V$$

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \mathcal{E}_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \nabla^2 V$$

led

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\gamma \vec{j} \\ \nabla^2 V - \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right.$$

usando il simbolo d'Alembertian \square

$$\left\{ \begin{array}{l} \square \vec{A} = -\gamma \vec{j} \quad (\text{in condizioni stazionarie, si} \\ \text{ristiene la formula di Poisson}) \\ \square V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}) \end{array} \right.$$

Le forme delle soluzioni di queste equazioni differenziali è

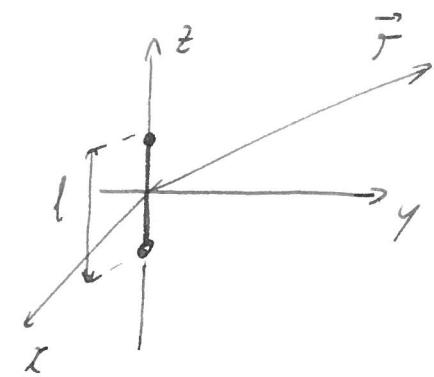
$$\vec{A} = \frac{\gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^t \frac{[\vec{j}]}{r} d\tau \quad [\vec{j}] = \vec{j}(r, t - \frac{r}{c})$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho]}{r} d\tau \quad [\rho] = \vec{\rho}(r, t - \frac{r}{c})$$

Tali equazioni vengono dette dei poteri, si ritardati; perché per determinare il valore di $\vec{A}_0 + \vec{V}$ in un punto \vec{r} bisogna integrare sul volume dove \vec{j} e ρ sono diversi da zero e tener conto non del valore istantaneo di \vec{j} e ρ ma del loro valore al tempo $t - \frac{r}{c}$.

$\frac{r}{c}$ rappresenta il tempo che occorre al campo magnetico o elettrico per trasmettersi al punto \vec{r} .

Determinare il campo magnetico generato da un circuito rettilineo di lunghezza l ad una distanza $\vec{r} \gg l$.



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}] d\tau}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}] dS dl}{r} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{dl}{r}$$

poiché $r \gg l$ può essere considerato costante

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \vec{l}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{i}{r} \vec{l} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\left(\vec{\nabla} \frac{i}{r} \right) \times \vec{l} + \underbrace{\frac{i}{r} \vec{\nabla} \times \vec{l}}_{=0 \text{ essendo } \vec{l} \text{ costante}} \right]$$

124

$$\vec{B} = \frac{q}{4\pi} \left(\vec{\nabla} \frac{[i]}{r} \right) \times \vec{l}$$

$$\frac{[i]}{r} = F(r)$$

$$\vec{\nabla} F(r) = \left(\frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial r} \vec{\nabla} r = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{r}$$

$$\vec{B} = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{[i]}{r} \right) \hat{r} \times \vec{l} \right]$$

(lungo l'asse z , il campo \vec{B} è nullo mentre
è massimo nel piano x, y).

$$[i] = i \left(t - \frac{r}{v} \right) = i(u)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{[i]}{r} \right) = - \frac{[i]}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [i] = - \frac{[i]}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d[i]}{du} \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{[i]}{r} \right) = - \frac{[i]}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d[i]}{du}$$

$\hookrightarrow -\frac{1}{r}$

$$\frac{d[i]}{du} = \frac{\partial [i]}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{[i]}{r^2} + \frac{1}{rv} \frac{\partial [i]}{\partial t} \right) \vec{l} \times \hat{r}$$

Se la corrente i è stazionaria si ottiene le formule di Laplace $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r^2} \vec{l} \times \hat{r}$ ($[i] = i$)

Il campo \vec{B} è costituito da un primo termine che dipende da i e da un secondo termine che dipende dalla variazione di i . 186

nel tempo.

Il secondo termine rappresenta il campo magnetico \vec{B} tremoso nelle onde elettromagnetiche, se all'infinito come $\frac{1}{r}$ varia e lunghe distanze è più forte del I termine.

Se la corrente i è alternata

$$i = i_0 \cos \omega t$$

$$[i] = i_0 \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

$$\frac{d[i]}{dt} = \omega i_0 \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_0 \omega \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{4\pi \rho c} \vec{l} \times \hat{r}$$

Essendo \vec{l} denominatore il campo \vec{B}_2 si avverte solo, in pulsazioni e molto de.

Il campo elettrico \vec{E}_2 che si diffonde nell'onda elettromagnetica vale

$$E_2 = c B_2 \quad \text{inoltre il suo senso è tale che}$$

$\vec{E}_2, \vec{B}_2, \vec{F}$ formano una triade levogira.

Pb)

Considera un solenoide torsionale

$$N = 5000 = \text{numero spire}$$

$$r_1 = 10 \text{ mm} = \text{raggio singola spira}$$

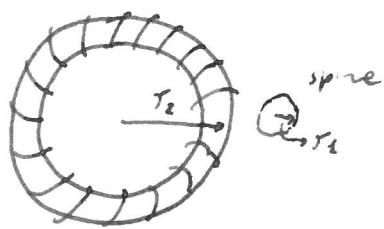
$$r_2 = 500 \text{ mm} = \text{raggio medio tors}$$

$$d = 0.500 \text{ mm} \quad \text{diametro filo}$$

$$\tau = 1.22 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$$

$$! = f_0 \text{ zen et} \quad f_0 = 250 \text{ V}$$

$\theta = 10^{\circ} 000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ Determinare la potenza media
 $\langle W \rangle$ dissipata per effett Joule



$$N = 5000$$

$$r_1 = 10 \text{ mm}$$

$$r_2 = 500 \text{ mm}$$

$$d = 3.500 \text{ mm}$$

$$\rho = 1.72 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$$

$$f = \text{frequenza} \quad f_0 = 250 \text{ V}$$

$$\omega = 10.000 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad < W > = ?$$

Il circuito attraversato da corrente elettrica può essere assimilato ad un circuito RL

$$R = \rho \frac{L}{S} = \rho \frac{N 2\pi r_2}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{1.72 \cdot 10^{-8} \cdot 10^4 \cdot 10^{-3}}{\frac{0.5^2 \cdot 10^{-6}}{4}} = 27.5 \Omega$$

Determina l'induttanza L

$$L_{\text{spire}} = \frac{\phi(B)}{i}$$

Determina il campo B all'interno del solenoidale

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = N_{\text{po}} i$$

$$B = \frac{N_{\text{po}} i}{l}$$

$$L_{\text{spire}} = \frac{N_{\text{po}} S}{l} \quad S = \text{superficie di 1 spire}$$

$$L_{\text{totale}} = \frac{N_{\text{po}}^2 S}{l} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r_2^2}{2 \pi r_2} = \frac{4 \pi \cdot 10^{-7} \cdot 25 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 0.5} = 3.14 \cdot 10^{-3} \text{ H}$$

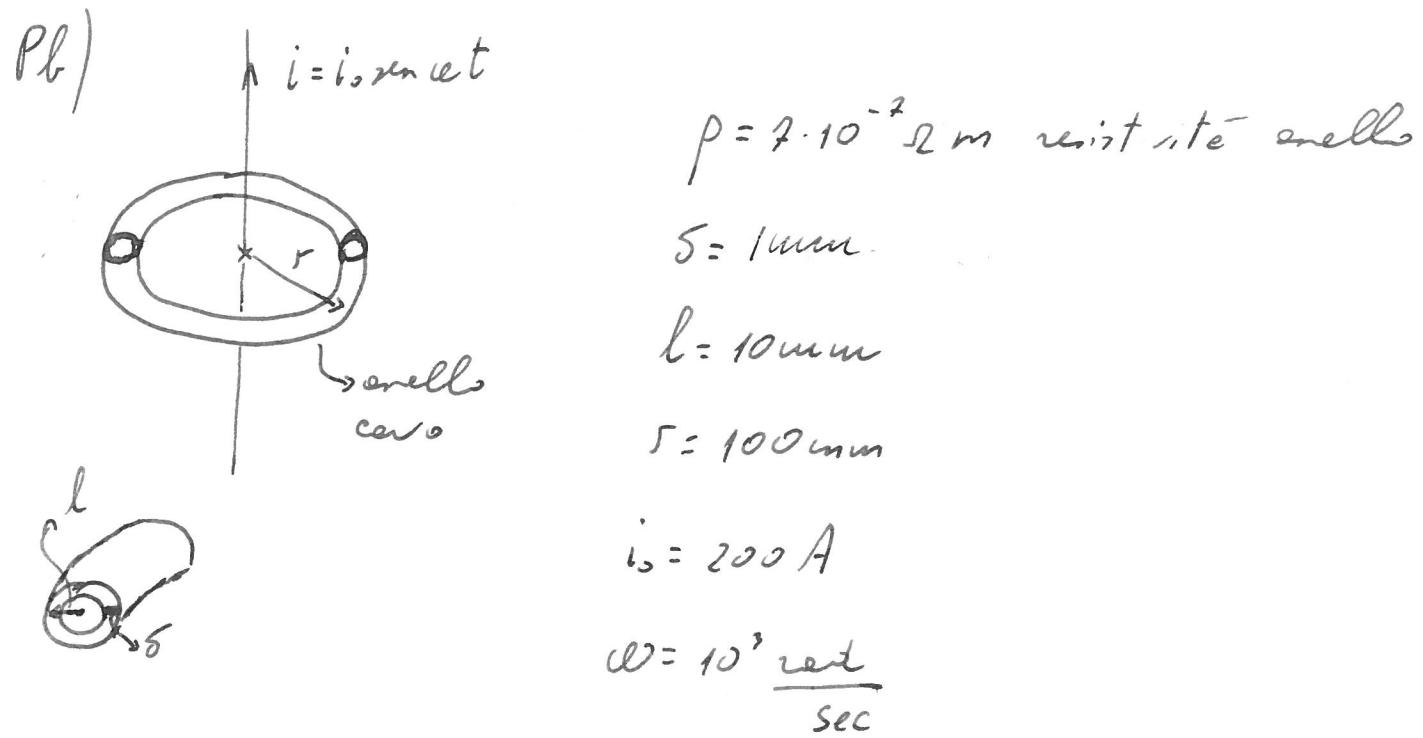
Nel circuito RL

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 41.8 \Omega$$

$$i = \frac{f_0}{Z} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\langle W \rangle = \langle R i^2 \rangle = \frac{R f_0^2}{Z^2} \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \frac{R f_0^2}{Z^2}$$

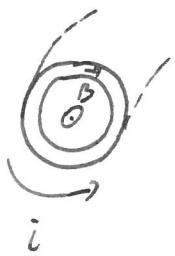
$$= \frac{1}{2} \cdot 22.52 \cdot \frac{250^2}{41.8^2} = 492 \text{ W}$$



$\langle W \rangle = ?$ potenza dissipata dall' snello per effetto Joule.

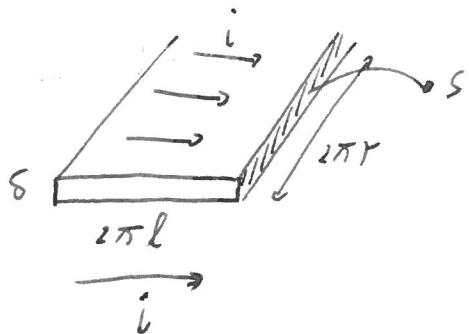
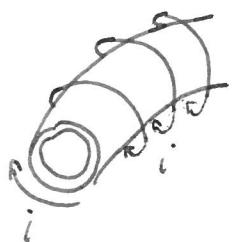
Le corrente elettrica che attraversa il filo determina un campo magnetico le cui linee di forza sono circolari.

Per la legge di Biot-Savart all'interno dell'snello il campo B vale $B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}$



B può essere supposto uniforme all'interno dell'anello

Il campo \vec{B} variabile determina un paesaggio di corrente attraverso il centro dell'anello come mostrato.



$$R = \rho \frac{l}{s} = \rho \frac{2\pi l}{2\pi r s}$$

le forze elettromotrici indotte e cause del campo variabile è

$$f_i = \frac{d\phi(B)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} \cdot l^2 \right) = \frac{\mu_0 i_0 l^2}{2\pi r} \frac{d}{dt} (\text{var})$$

$$= \frac{\rho_0 i_0 l^2}{2 \cdot r} \omega \cos \vartheta$$

$$f_i = i R \quad i = \frac{f_i}{R}$$

$$\langle W \rangle = \frac{f_i^2}{R} = \frac{\rho_0 i_0^2 l^4 \omega^2 \cos^2 \vartheta}{4 \cdot \pi^2 \rho l} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\rho_0^2 i_0^2 l^4 \omega^2 \cos^2 \vartheta}{8 \cdot \pi^2 \rho} = \frac{8}{8} \cdot \frac{\pi^2 \cdot 10^{-14} \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2}}{0.1 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}$$

$$= 1.1 \cdot 10^{-4} W$$

*) Potenze dissipate da un dipolo oscillante

Considera un dipolo $\vec{p} = q\vec{l}$

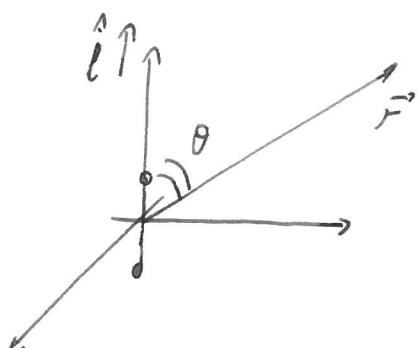
$P = P_0 \cos \varphi$ (dipolo oscillante)

$$\frac{dP}{dt} = i = P_0 \omega \sin \varphi$$

$$\frac{di}{dt} = P_0 \omega^2 \sin \varphi$$

Ricordando che il campo \vec{B} che si trasmette sotto forma di onde elettromagnetiche a distanza $r \gg l$ vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{di}{dt} \vec{l} \times \hat{r}$$



$$B = \frac{\mu_0 P_0 \omega^2 \sin \varphi \sin \theta}{4\pi r^2}$$

Il vettore Pointing diretto nel verso delle propagazione dell'onda ha modulo

$$N = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0^2 P_0^2 c^4}{16 \pi^2 r^2 C^2} \right) \sin^2 \omega t \sin^2 \theta$$

medio nel tempo

$$N = \frac{\rho_0 (P_0 \omega^2)^2}{32 \pi^2 C} \cdot \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta$$

per determinare la potenza media del dipolo devo integrare N su una superficie sferica.

$$\langle W \rangle = \frac{\rho_0 (P_0 \omega^2)^2}{32 \pi^2 C} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 r}{8\pi} \sin \theta d\theta \sin^2 \theta$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\frac{4}{3}}$

$$\langle W \rangle = \frac{P_0 (\rho_0 \omega')^2}{12 \pi C}$$

Un dipolo oscillante può essere realizzato
con un circuito LC , in tal caso

$$i = i_0 \cos \omega t$$



$$\frac{dq}{dt} = i_0 \cos \omega t$$

$$q = \frac{i_0}{\omega} \sin \omega t \quad \vec{p} = q \vec{l} = q l \hat{l}$$

$$q_0 = \frac{i_0}{\omega} l$$

In generale se una carica muore con moto
uniforme inserita onde elettromagnetiche.
Se la relazione di Larmor che le potenze
dissipate per una carica di statore di accelerazione e
sia

$$W = \frac{1}{6\pi c} q^2 v^2 \quad (\text{per } v \ll c)$$

È questo un limite delle energie
di portata circolari (per velocità alle
acceleratore) tante l'energia fornita per
accelerare viene dissipata.

Le dissipazione di energia sotto forma di
onde non si vede a livello microscopico.

Si così fosse un elettrone in orbita intorno al
nucleo perderebbe energie cinetiche e collazionali
nell'ordine di 10^{-9} sec.

*) Interazione onde elettromagnetiche - materia

Le velocità delle onde elettromagnetiche in un mezzo isotropo omogeneo è

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}}$$

$\mu_r \approx 1$ nei mezzi paramagnetici e diamagnetici

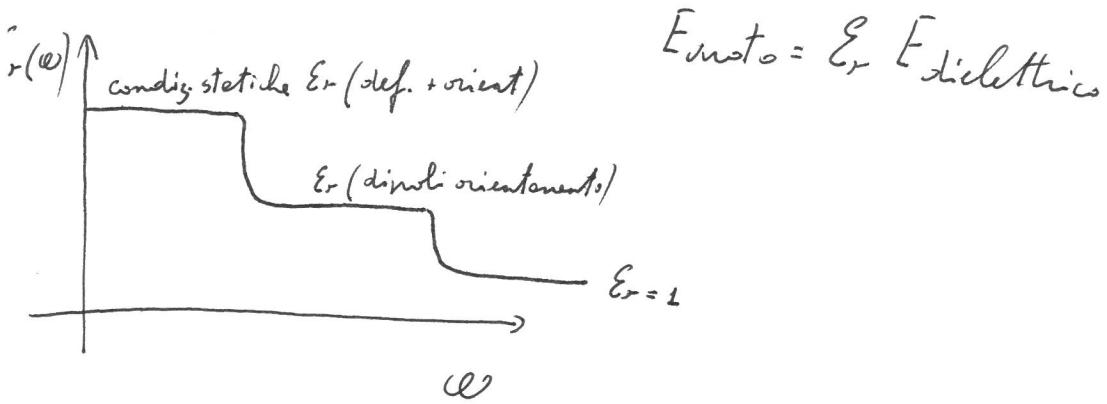
$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$\epsilon_{\text{resto}} = \epsilon_{\text{dielettrico}} \epsilon_r$$

$\epsilon_r > 1$ infatti il campo elettrico all'interno di un isolante cala per le formazione di dipoli (dipoli per orientamento e per deformazione) che creano un controcampo.

160

Se il campo elettrico è variabile
 $\{E = E_0 \cos(\omega t + \varphi)\}$ per pulsazioni basse i dipoli riescono
a seguire l'orientamento del campo pertanto E_r
risulta essere lo stesso misurato per un campo E costante;
il crescere delle pulsazioni e il momento d'inerzia
dei dipoli non permette di seguire l'orientamento
del campo pertanto i dipoli iniziano ad oscillare
intorno alla posizione iniziale $\langle \text{dipoli orient.} \rangle = 0$
 E_r diminuisce.
Per ulteriori megiori risonanze i dipoli per deformazione
riescono a seguire il campo così per $\omega \rightarrow \infty$
 $E_r \rightarrow 1$ valore che assume nel moto.



Un conduttore dispone le sue cariche all'interno in modo che $E = 0$

E_r conduttore $= +\infty$ (la velocità di propagazione delle onde in un conduttore è nulla)

Nel caso di campi aventi pulsazione e molte le cariche all'interno del conduttore non riescono ad orientarsi in modo da annullare il campo, restano mediamente ferme oscillando intorno alla posizione iniziale.

Per pulsazioni e molt. alte anche un conduttore si lascia attraversare dalle onde come nel moto.

In generale le onde elettromagnetiche non si propagano in un conduttore, il campo elettrico visibile portato dalle onde determina un moto di cariche nel conduttore e quindi un passaggio di corrente elettrica.

Le potenze dissipate per effetto Joule esauriscono rapidamente l'energia dell'onda che si trasforma in energia termica riscaldando il conduttore.

Velocità di propagazione delle onde in un conduttore.

Considerare le equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \gamma \vec{J} + \gamma \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_{\text{II}} - \vec{\nabla}^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\gamma \vec{J} + \gamma \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\gamma \vec{J} \right) + \gamma \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \gamma \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \gamma \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\square \vec{E} = \gamma \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\hookrightarrow = 0$ nel caso di isolanti; $\sigma = \omega = \frac{1}{\rho}$

il termine $\gamma \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ rappresenta un termine dissipativo

In assenza del termine dissipativo una soluzione dell'equazione d'Alembert è l'armonica

$$E = E_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \quad \text{onda piana.}$$

Supponiamo che tale soluzione valga anche per

l'equazione $\square \vec{E} = \gamma \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ e determiniamo ω .

Usando il simbolismo

$$E = E_0 e^{i\omega(t - \frac{x}{v})}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \gamma \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \gamma \sigma \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = - E_0 \frac{i\omega}{v} e^{i\omega(t - \frac{x}{v})}$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = - E_0 \frac{\omega^2}{v^2} e^{i\omega(t - \frac{x}{v})} = - \frac{\omega^2}{v^2} E$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = i\omega E$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = - \omega^2 E$$

sostituendo nell'equazione d'Alembert

$$-\frac{\omega^2}{\sigma^2} E + \gamma \epsilon \omega^2 E = \gamma \sigma i \omega^2$$

$$\frac{1}{\sigma^2} = \gamma \epsilon - \frac{\gamma \sigma i}{\omega} = \gamma \left(\epsilon - \frac{\sigma i}{\omega} \right) = \gamma \epsilon_0 \left(\epsilon_r - \frac{\sigma i}{\epsilon_0 \omega} \right)$$

Per un buon conduttore $\sigma \approx 10^8$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \approx 10^{19}$$

$\epsilon_r = 1$ (in presenza di un campo elettrico reale, le
il conduttore si comporta come il metallo)

Le perte reale del numero complesso $\frac{1}{\sigma^2}$ può essere
trascritte rispetto alle perte immaginarie

$$\frac{1}{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{\omega}} \sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1}{\omega}} \frac{1}{\sqrt{2}} (1-i)$$

[l'espressione fatta non vale per ω elevate in
tal caso le perte immaginarie sono nulle, $\sigma = \frac{1}{\sqrt{\gamma \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma \epsilon_0}}$]

il conduttore si comporta come il resto].

$$E = E_0 e^{i\omega(t - \alpha \sqrt{\frac{2\sigma}{\epsilon}}(1-i))}$$

$$E = E_0 e^{i\omega(t - \alpha \sqrt{\frac{2\sigma}{\epsilon}})} e^{-\alpha \epsilon \sqrt{\frac{2\sigma}{\epsilon}}}$$

Squartando il simbolismo dei numeri complessi

otteniamo che il campo elettrico che si propaga nel conduttore decresce esponenzialmente a zero e vale

$$E = E_0 \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) e^{-\alpha \sqrt{\frac{2\sigma\epsilon}{\epsilon}}}$$

Se $\alpha = \sqrt{\frac{2}{\sigma\epsilon}}$ l'ampiezza $E = \frac{E_0}{e}$ (l'ampiezza del campo si riduce più delle metà).

Nell'HCW $\omega \approx 10^{14}$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{\sigma\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-2} \cdot 10^9 \cdot 10^{14}}} \approx 10^{-8} \text{ m}$$

(Un conduttore di spessore 10^{-8} m risulta già essere spesso più che abbastanza per proteggere dalle onde elettromagnetiche).

148

Consideriamo un atomo soggetto ad un campo elettrico variabile, l'equazione del moto delle cariche negative può essere approssimativamente descritta dall'equazione differenziale

$$m\ddot{x} + \beta \dot{x} + m\omega_0^2 x = eE_0 \cos \omega t$$

ω_0^2 rappresenta il termine di rilassamento a cui è soggetto il baricentro delle cariche negative quando le cause del campo elettrico esterno non coincidono con il baricentro delle cariche positive.

La forza viscosa $\beta \dot{x}$ tiene conto dell'energia dissipata sotto forme di onde elettromagnetiche

Risolviendo l'equazione differenziale si ottiene che
la massima ampiezza del doppio è

$$x_0 = \frac{e E_0}{m} \sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right) + \left(\frac{\beta}{m}\right)^2 \omega^2}$$



è possibile determinare le potenze $\langle W \rangle$ dissipate
dell'atomo

$$\langle W \rangle = \frac{1}{12 \pi c} P_0^2 \omega^4 \quad P_0 = x_0 e$$

Le medie del vettore Pointing dell'onda elettronica
che colpisce l'atomo sono

$$\langle |\vec{N}| \rangle = \frac{1}{12 \pi c} \frac{E_0^2}{\epsilon}$$

Si dimostre che

$$\sigma = \text{regione unitaria} = \frac{\langle W \rangle}{\langle |\vec{V}| \rangle} = \frac{\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 \omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2 + i\beta)^2 \omega^2} \xrightarrow[3]{\substack{8 \\ 75}}$$

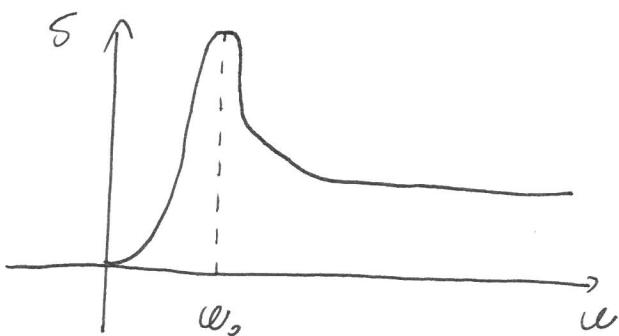
$\omega = R (\text{raggio classico elettron})$

$$\sigma = \frac{8\pi R^2 \omega^4}{3(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \beta^2 \omega^2}$$

Se $\omega \gg \omega_0$ $\sigma = \text{costante} = \frac{8}{3}\pi R^2$

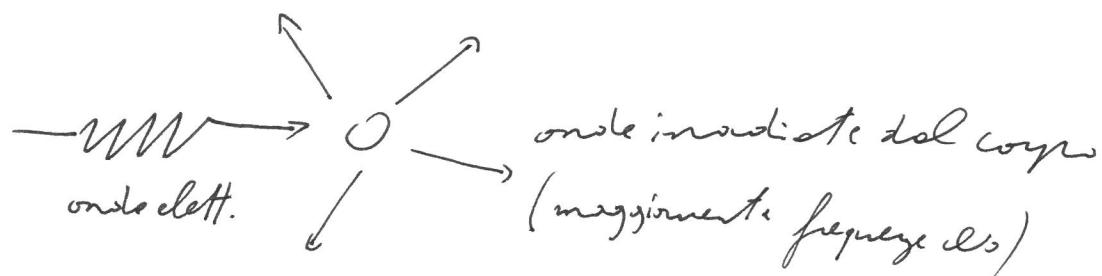
Se $\omega = \omega_0$ $\sigma = \text{massima} = \frac{8\pi R^2 \omega^2}{3\beta^2}$

Se $\omega \ll \omega_0$ $\sigma = \frac{8}{3}\pi R^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^4}$



Il sistema riflette maggiormente le onde
in frequenza ω_s (il valore di ω_s dipende dalle
strutture del corpo).

Il parameter ω_s caratterizza i colori dei vari
corpi.



166

Ottico

Eperimenti per la misurazione delle velocità della luce nel vuoto.

Già Galileo Galilei compì degli esperimenti per misurare le velocità della luce ma tali esperimenti non permisero di rivelare una velocità finita.

L'anno dopo una stima di tale velocità fu fatta da Galileo il quale osservò che il periodo di eclissi di un satellite di Giove non era costante, tale periodo risultava minore quando la Terra si avvicinava a Giove, maggiore quando si allontanava.

Tenendo conto del numero di eclissi in un anno
è possibile determinare il periodo reale
dell'eclissi del satellite. (42 ore)

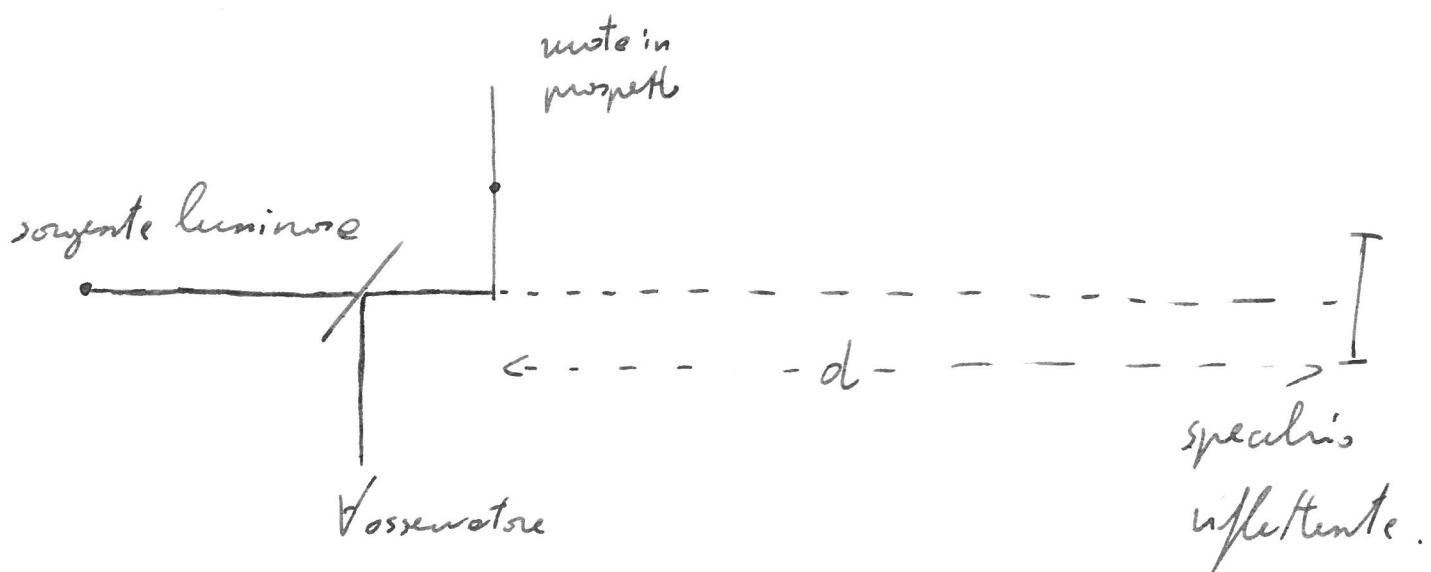
Rivener osservò che l'eclissi del satellite
quando le Terre si trova più vicino a Giove
era anticipata di circa 22 minuti rispetto
all'eclissi che sarebbe stata avvenuta
considerando il periodo costante e portato
dal giorno di massime distanze delle Terre
da Giove. (mesi prima).

Attribuendo tale anticipo alla velocità
di propagazione delle luce nel vuoto ricevó

$$c = \frac{2 \text{ Raggi Terrestri}}{15 \text{ minuti}} \approx \frac{3 \cdot 10''}{22 \cdot 60} \approx 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Il valore delle velocità della luce fu misurato con maggiore precisione Se Fizeau usò metodi non estromessici:

Egli si servì di una ruota dentata, queste vennero in rotazione e attraverso i suoi denti veniva fatto passare un fascio di luce riflessa da uno specchio come in figura.



denti delle ruote frangono così il fascio luminoso
in tanti segmenti luminosi uguali.

Se il segmento luminoso di monitoraggio traversa
un dente l'osservatore non riceglie alcun
segnale emesso anche gli altri segmenti;
finché degli altri denti delle ruote che si
frangono e causa della rotazione regolare
delle ruote.



ω : velocità angolare ruote che
realizzano il binario per l'osservatore.

$\frac{\omega}{sd}$ = tempo impiegato dal
segmento luminoso per
percorrere sd .

$$c = \frac{sd \omega}{sd}$$

L'esperienza di Fizeau ha l'inconveniente che le distanze L deve essere molto grande affinché l'esperimento rieca.

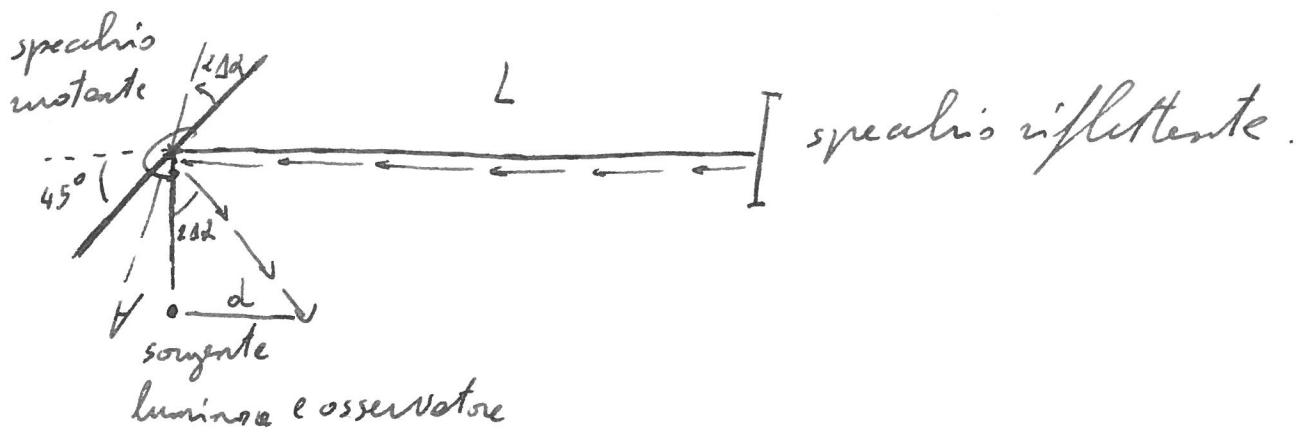
$$C = \frac{2L\omega}{\Delta\alpha}$$

Se $L = 3 \text{ km}$ e lo moto è composto da 360 denti:

$$\Delta\alpha = \frac{2\pi}{360}$$

$$\frac{\omega}{2\pi} = V = \frac{C}{2L \cdot 360} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 360} \simeq 46 \text{ Hz} \text{ (giardiscond.)}$$

L'esperienza di Foucault permise una misurazione a distanze più brevi.



Il fascio di luce emesso dalla sorgente luminosa giunge sullo specchio riflettente solo se lo specchio instante forma un angolo di 45° con l'orizzontale come in figura. In tal caso il raggio di luce percorre la distanza $2L$ e ritorna sullo specchio instante che si sarà spostato di un angolo 2α .

Note le velocità angolare dello specchio, le distanze d dalla sorgente e L è possibile determinare la velocità delle luce.

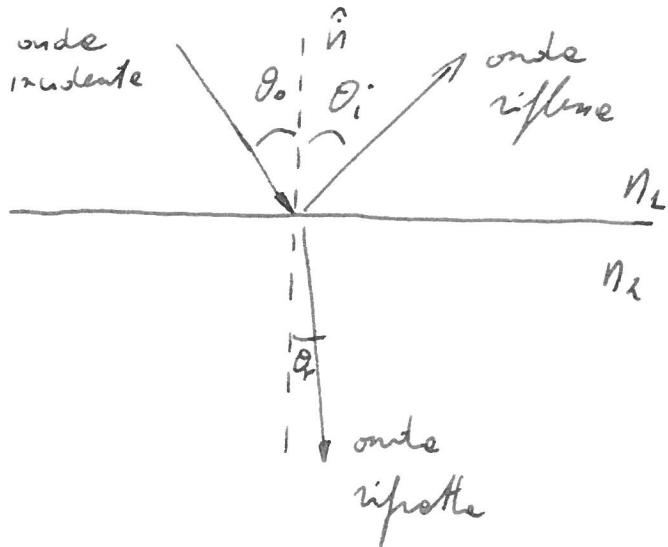
Poiché le distanze L e d non sono molto grandi:

Tali esperimenti permette di calcolare anche
le velocità della luce in altri materiali
riprendendo con simile spazio percorsa dal segnale.

Il valore attualmente accettato delle velocità
della luce è di $299.792.458 \frac{m}{s}$, le misure
più precise si ottengono dalla misurazione
di E. e g.

Riflessione e Rifrazione (Leggi di Snell)

Supponiamo di avere due dielettrici trasparenti, omogenei e isotropi aventi una superficie in comune

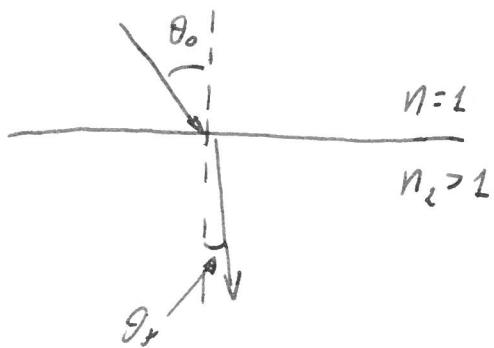


Risultano da considerazioni sperimentali che i tre raggi si trovano nello stesso piano e in particolare $\theta_o = \theta_i$ mentre

$$\frac{\sin \theta_o}{\sin \theta_r} = \frac{n_2}{n_1} = \text{costante dipendente dai 2 mezzi.}$$

Per il vuoto $n=1$, per gli altri dielettrici $n>1$

Supponiamo che il primo mezzo sia il vetro

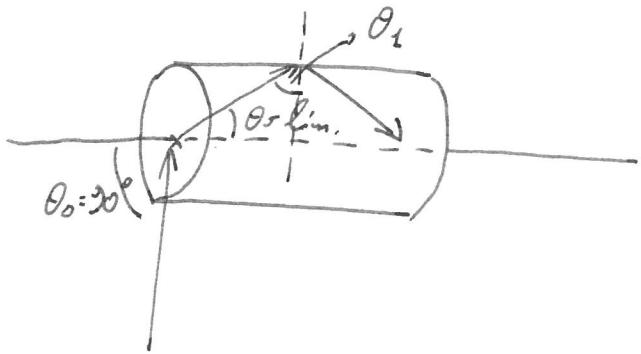


$$\frac{\sin \theta_o}{\sin \theta_r} = n_2$$

Esiste un angolo limite (massimo valore θ_r), esso

solle $\sin \theta_r (\text{limite}) = \frac{1}{n_2}$

In base a tale valore di θ_r limite è possibile costruire una guida di luce cioè uno strumento tale che ogni raggio di luce entrante da una luce viene riemesso dall'altra.



Guiste di luce

$$[\sin \theta_2 = \frac{1}{n}]$$

Una guista di luce è tale che l'angolo θ_1 permette solo un raggio riflesso e non riflett.

Ciò avviene se $\theta_1 > \theta_2$ lim cioè $\sin \theta_1 > \frac{1}{n}$

Mentre θ_1 e θ_2 sono collegati infatti

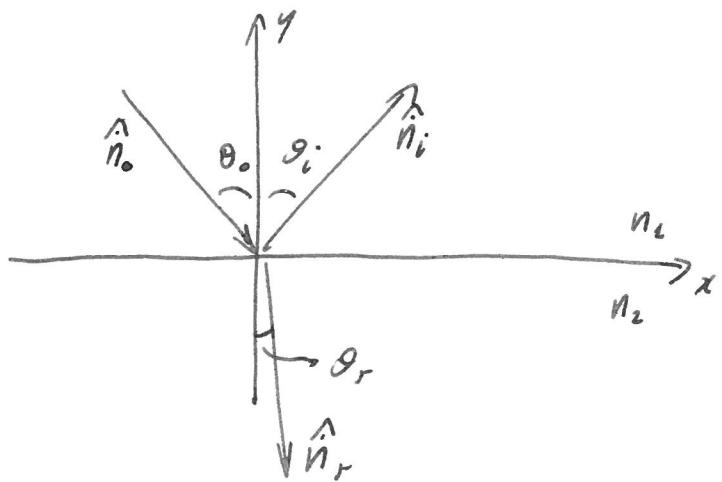
$$\sin \theta_1 = \cos \theta_2$$

$$\cos \theta_2 > \frac{1}{n}$$

$$\sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} > \frac{1}{n} \quad \text{ricordando che } \sin \theta_2 = \frac{1}{n}$$

$$\sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2}} > 1 \quad n^2 - 1 > 1 \quad n > \sqrt{2}$$

le relazioni tra l'onda incidente, riflette e riflessa
possono essere ricavate anche dalle equazioni di
Maxwell.

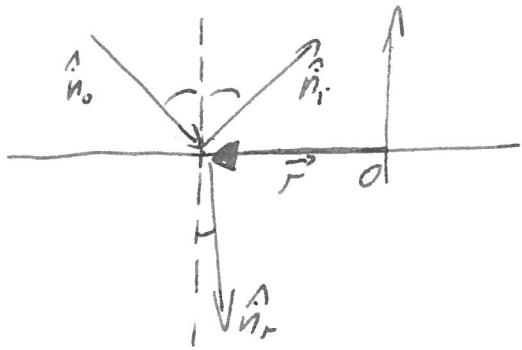


Le onde incidente, riflessa e rifratta si trovano
nello stesso piano. Indico con \hat{n}_o , \hat{n}_i e \hat{n}_r i
versori rispettivi delle direzioni dell'onda
incidente, riflessa e rifratta e con \vec{r} il vettore
posizione $\vec{r} = (x, y)$.

Il campo elettrico in un generico punto $\vec{r} = (x, y)$

appartiene al piano ortogonale a \hat{n}_o e ha
 modulo $E_o \sin \left[\omega_o \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}_o}{v_2} \right) \right]$ per l'onda
 incidente, appartiene al piano ortogonale a
 \hat{n}_i e ha modulo $E_i \sin \left(\omega_i \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}_i}{v_2} \right) + \varphi_i \right)$ per
 l'onda riflessa infine appartiene al piano
 ortogonale a \hat{n}_r e ha modulo $E_r \sin \left(\omega_r \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}_r}{v_2} \right) + \varphi_r \right)$
 per l'onda riflette.

Le equazioni di records dei campi elettrici
 in 2 dielettrici velide anche in casi non
 stazionari gerent'sce nel caso di $\vec{r} = (x, 0)$
 l'uguaglianza dei 3 argomenti si verifichi
 di x e t .



$$\vec{F} \cdot \hat{n}_0 = x \sin \theta_0$$

$$\vec{F} \cdot \hat{n}_i = x \sin \theta_i$$

$$\vec{F} \cdot \hat{n}_r = x \sin \theta_r$$

$$\omega_0 \left(t - \frac{x \sin \theta_0}{v_s} \right) = \omega_i \left[\left(t - \frac{x \sin \theta_i}{v_s} \right) \right] + \varphi_i =$$

$$= \omega_r \left[\left(t - \frac{x \sin \theta_r}{v_s} \right) \right] + \varphi_r \quad \forall x, t$$

$\omega_0 = \omega_r = \omega_i$: le sonde hanno la stessa frequenza.

$\varphi_i = \varphi_r$ ma sono spaziate

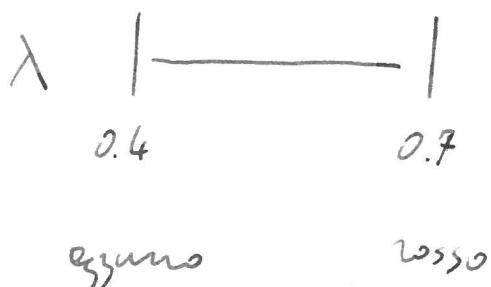
$$\frac{\sin \theta_o}{\sin \theta_i} = \frac{v_o}{v_i} = \frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i}$$

$\theta_o = \theta_i$ l'angolo incidente è uguale all'angolo riflesso.

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2} \quad \left. \begin{array}{l} n_1 = \frac{c}{v_1} \\ n_2 = \frac{c}{v_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{indice di} \\ \text{rifrazione} \end{array}$$

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{legge di Snell.}$$

le onde elettromagnetiche visibili sono caratterizzate da lunghezze d'onda comprese tra 0.4 e 0.7 micron

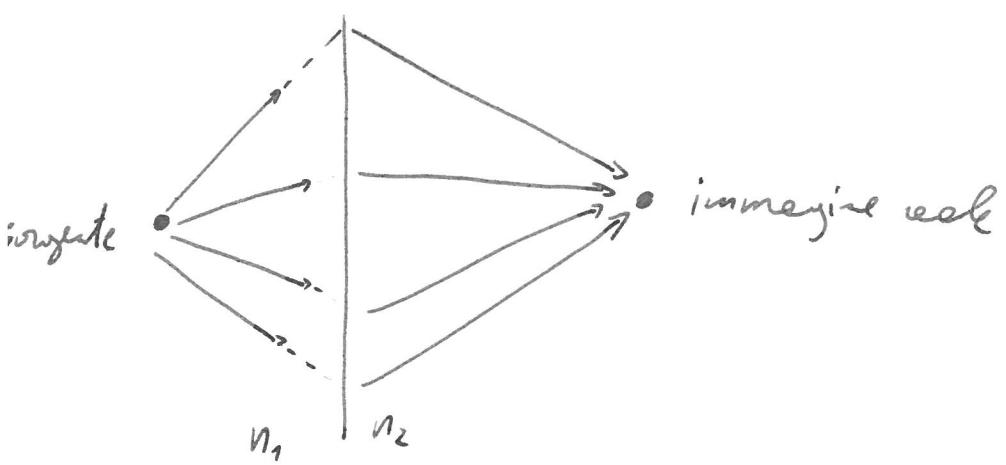


le sovrapposizioni di più onde determinano

le formazioni di diversi colori quali il bianco istituito dalla somma di tutte le onde dell'H.c.w.

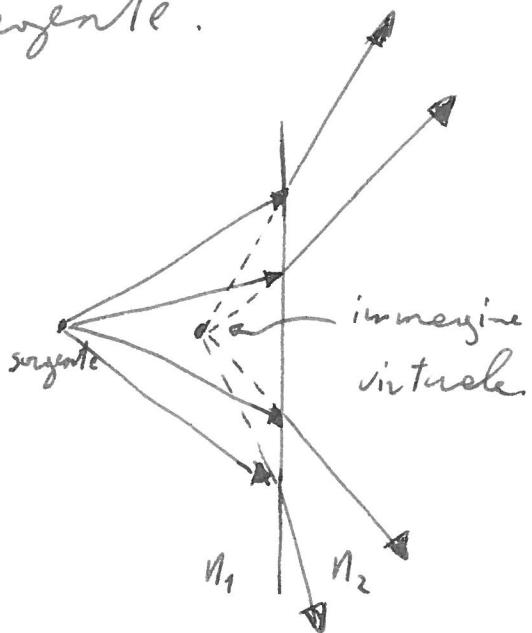
Una sorgente genera onde elettromagnetiche, tali onde sono formate dal moto degli elettroni ad esempio in un filo riscaldato reso incandescente.

La confluenza dei raggi di una sorgente puntiforme
è detta immagine reale. L'immagine reale è
come solta una sorgente.

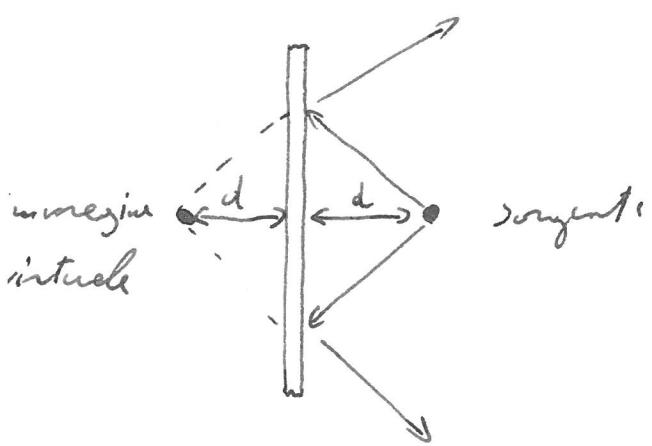


In un mezzo omogeneo non si ha confluenza
di raggi pertanto non si creano immagini reali:

L'immagine virtuale è il punto di convergenza del proseguimento all'interno dei raggi stelle sorgente.

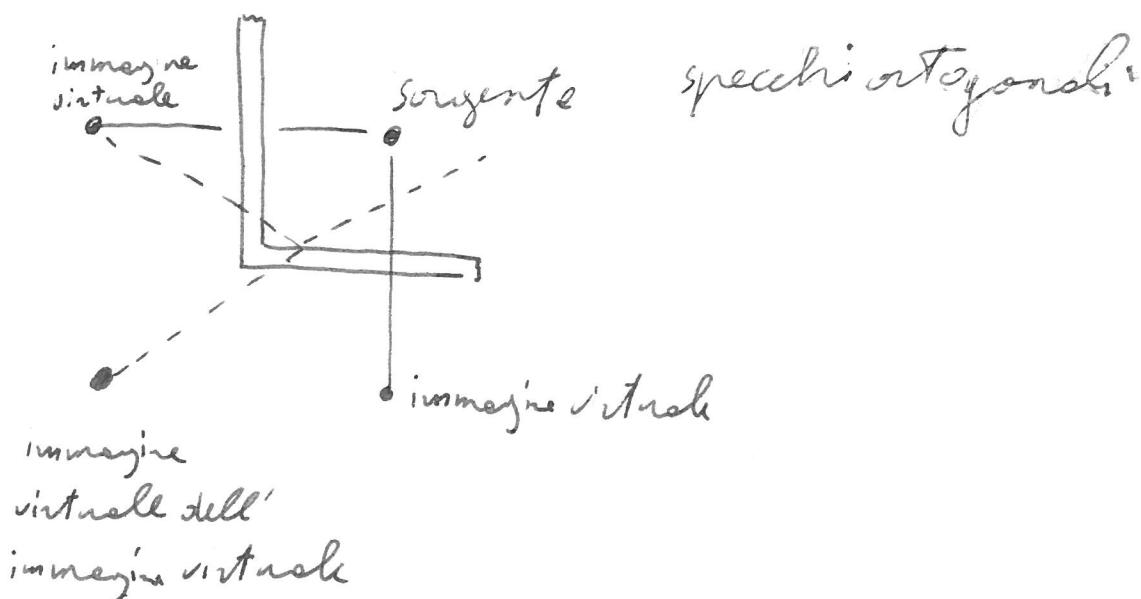


Consideriamo un specchio.



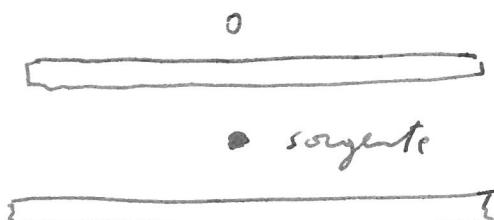
Per le considerazioni fatte sugli angoli di incidenza

e di riflessione l'immagine virtuale è alla stessa distanza d'oggetto dell'immagine reale.



specchi paralleli

- ° le immagini virtuali sono infinite
- °



°

°

Principio di Fermat

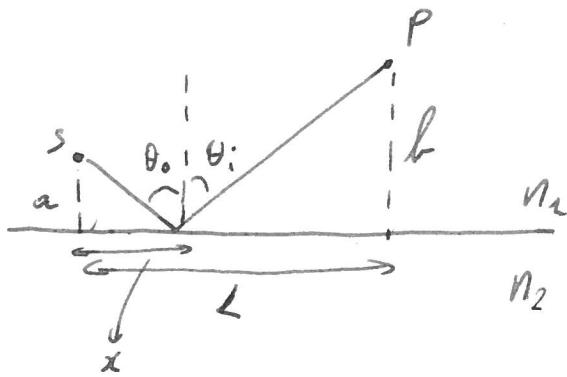
Le leggi di Snell possono essere viste come una conseguenza del principio di Fermat

Date una sorgente luminosa puntiforme S, un osservatore P e una configurazione di mezzi con indici di rifrazione n_i .

La luce deve percorrere il tragitto tale da minimizzare il cammino ottico $L = \int_s^p n dl$.

Ricordando che $n_i = \frac{c}{v_i}$ è equivalente

dire che la luce percorre il tragitto che minimizza il tempo di percorrenza.



$$L = n \sqrt{x^2 + e^2} + n \sqrt{(L-x)^2 + b^2} \quad \text{minimizing } L(x)$$

$$\frac{dL}{dx} = \frac{1 \cdot x}{\sqrt{x^2 + e^2}} + \frac{x(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + b^2}} = 0$$

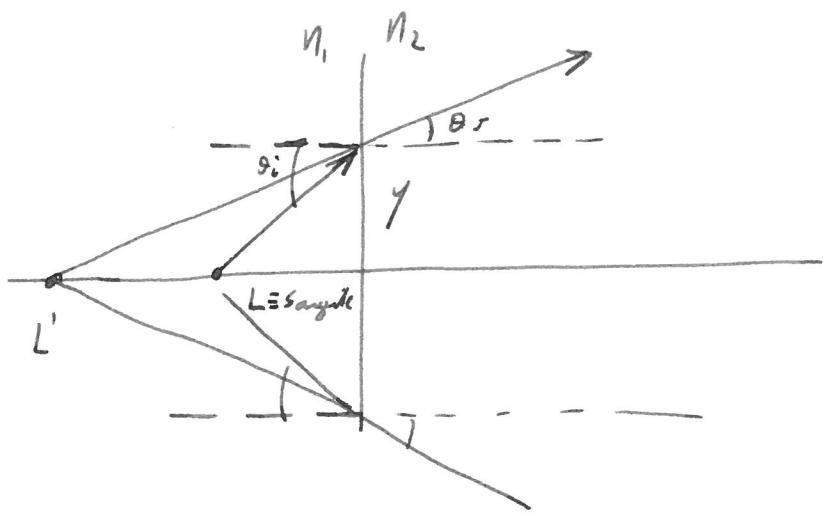
$$n_1 \sin \theta_i - n_2 \sin \theta_r = 0 \quad (\text{legge di Snell})$$

incidenza rifrazione:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + e^2}} - \frac{n_2 (L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + b^2}} = 0$$

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_r$$

Confluenza dei raggi in un'immagine virtuale



I due raggi in figura generano un'immagine virtuale in L' , tale punto è di confluenza anche degli altri raggi e θ_i è sufficientemente piccolo.

$$\frac{y}{l} = \tan \theta_i$$

$$\frac{l'}{l} = \frac{\tan \theta_i}{\tan \theta_r} = \frac{\frac{n_2}{n_1}}{\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i}} \cdot \frac{\cos \theta_r}{\cos \theta_i}$$

$$\frac{y}{l'} = \tan \theta_r$$

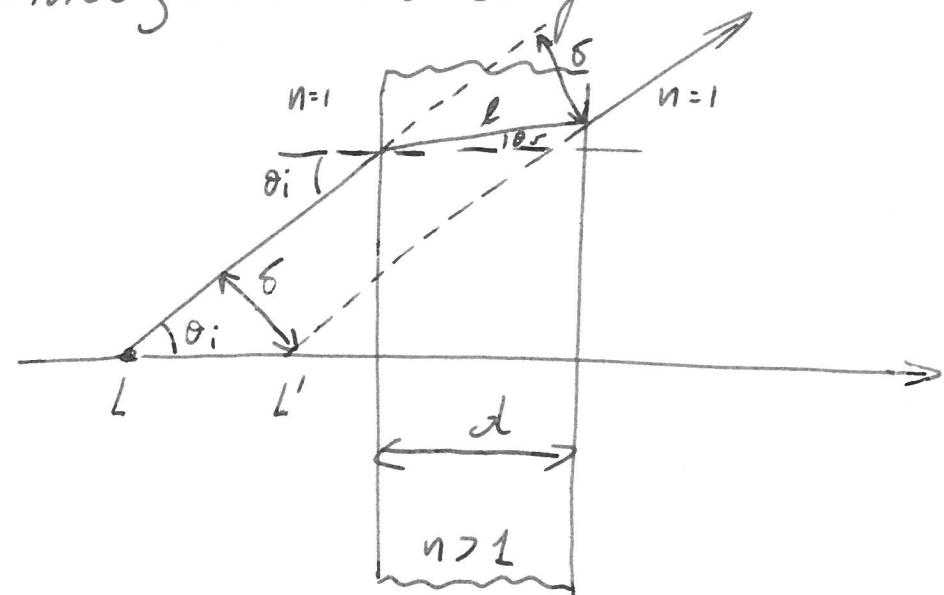
$$\frac{l'}{l} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{\cos \theta_r}{\cos \theta_i}$$

Se θ_i e θ_r sono sufficientemente piccoli: $\cos \theta \approx 1$

$L' = L \frac{n_2}{n_1}$: costante non dipende dall'angolo d'incidenza.

Per θ piccolo l'immagine virtuale compare puntiforme come la sorgente, l'immagine è detta estigmatica (estigmatica quando compare come un segmento - una macchia).

immagine virtuale formata da un retrospetto



$$S = l \cdot v_n(\theta_i - \theta_r)$$

$$l = \frac{d}{\cos \theta_r}$$

$$S = d \cdot \frac{v_n \theta_i (\cos \theta_r - \cos \theta_i) v_n \theta_r}{\cos \theta_r} = d (v_n \theta_i - \cos \theta_i \tan \theta_r)$$

$$S = d \left(v_n \theta_i - \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_r} \frac{v_n \theta_r}{v_n \theta_i} v_n \theta_i \right) = d v_n \theta_i \left(1 - \frac{1}{n} \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_r} \right)$$

Se θ_i è sufficientemente piccolo

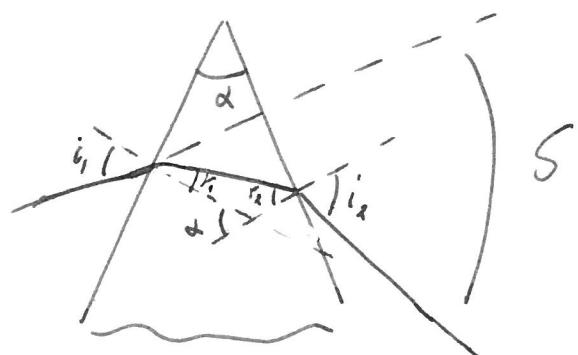
$$S = d \sin \theta_i \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\bar{I}I' = \frac{S}{\sin \theta_i} = d \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ è indipendente dall'}$$

angolo di incidenza.

Metodo per ricavare gli indici di rifrazione

Considera un prisma fatto di un materiale trasparente di cui si vuole conoscere l'indice di rifrazione n .



Si verifica sperimentalmente che quando ruota il prisma esiste un angolo i_c di incidenza per cui S è minimo.

$$S = i_1 - r_1 + i_2 - r_2 = i_1 + i_2 - (r_1 + r_2)$$

$$r_1 + r_2 = d$$

$$\delta = i_1 + i_2 - d \quad \frac{d\delta}{di_1} = 1 + \frac{di_2}{di_1}$$

Dalle leggi di Snell

$$\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = n \quad \frac{\sin i_2}{\sin r_2} = n$$

$$\begin{cases} \sin i_1 = n \sin r_1 \\ \sin i_2 = n \sin r_2 \end{cases} \quad \text{differenziamo}$$

$$\begin{cases} \cos i_1 di_1 = n \cos r_1 dr_1 & r_1 = d - r_2 \\ \cos i_2 di_2 = n \cos r_2 dr_2 & dr_1 = -dr_2 \end{cases}$$

$$\frac{di_2}{di_1} = - \frac{\cos i_1}{\cos i_2} \frac{\cos r_2}{\cos r_1}$$

$$\frac{d\delta}{di_1} = 1 - \frac{\cos i_1}{\cos i_2} \cdot \frac{\cos r_2}{\cos r_1} = 0$$

L'angolo δ è minimo quando $i_1 = i_2$ e $r_1 = r_2$

$$S_{\min} = 2i - 2r$$

$$r = d$$

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin \frac{S_{\min} + d}{2}}{\sin \frac{d}{2}}$$

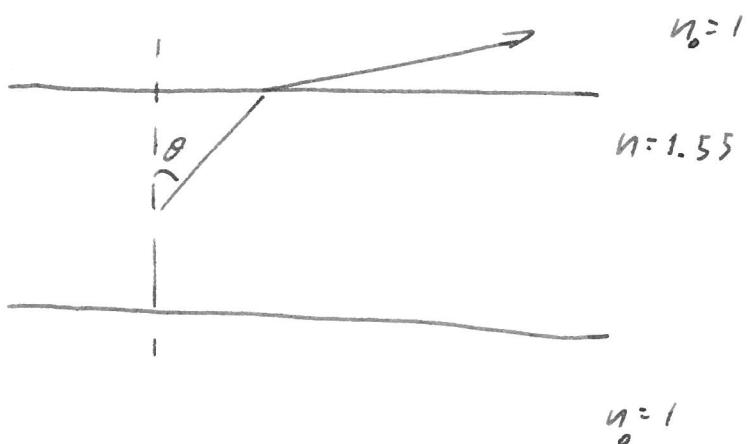
Pb)

Considere una sorgente di luce puntiforme posta in un dielettrico con $n = 1.55$.

Determinare le frange di luce che formano nel caso

a) emissione di luce isotropa

b) emissione con intensità $I \propto \cos^2 \theta$



L'angolo limite per cui il dielettrico rifunge è

$$=\frac{1}{n} \quad \theta^* = 40.2^\circ$$

a) emissione isotropa

$$\frac{I_{\text{uscita}}}{I_{\text{tot}}} = \frac{\int_0^{\pi} 2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} =$$

$$= (1 - \cos \theta^*) \approx 24\%$$

b) emissione proporzionale a $\cos^3 \theta$

$$\frac{I_{\text{uscita}}}{I_{\text{tot}}} = \frac{\int_0^{\pi} 2\pi \sin \theta \cos^3 \theta d\theta}{\int_0^{\pi} 2\pi \sin \theta d\theta} = \frac{\cos^3 \theta}{\cos^3 \theta} \Big|_0^{\pi} =$$

$$= 1 - \cos^3 \theta^* \approx 55\%$$

Leggi di Fresnel

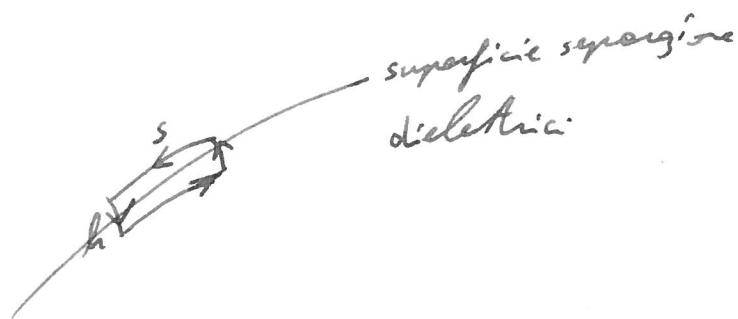
Le leggi di Fresnel permettono di determinare la frazione di energia trasportata dalle onde elettromagnetiche che viene riflessa o riflette.

Prima di scrivere le equazioni di Fresnel consideriamo le relazioni di ricordo tra due dielettrici che in superficie di separazione ha sensità di curva σ e d'onda j nulle.

Ricordando le equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \gamma \vec{j} + \gamma \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) d\vec{s} = \int - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}$$

applicando il teorema di
Stokes

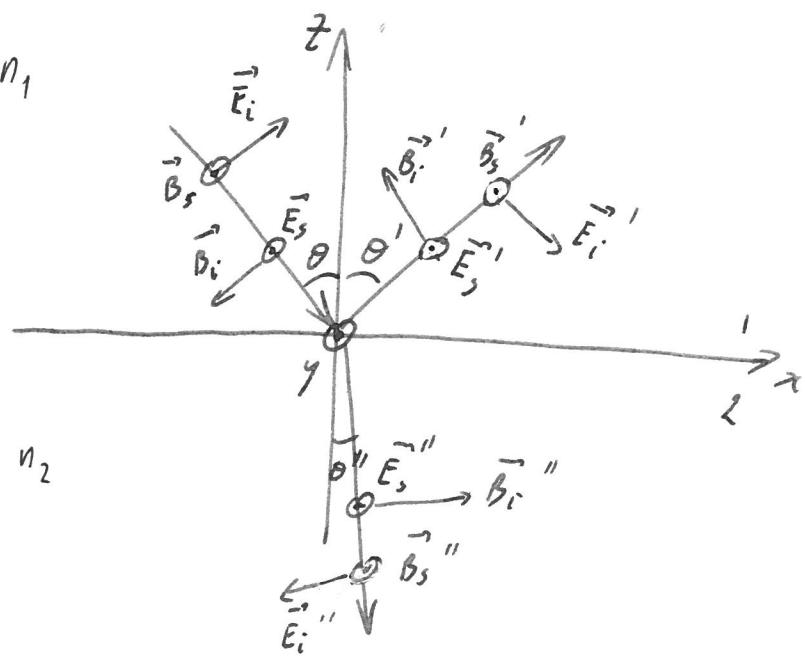
$$\oint \vec{E} d\vec{l} = \int - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s}$$

le linee chuse l' come mostrato, figure è tale che i lati h sono infinitesimi di ordine superiore rispetto a s . Facendo tendere i lati h e quindi la superficie dS tende a zero l'integrale di

secondo membro risulta nullo.

Si ottiene $E_t^{(1)} s_1 = E_t^{(2)} s_2$ cioè le componenti tangenziali del campo elettrico si conservano al passare di un piano dielettrico.

Analogamente si ottiene che le componenti tangenziali di \vec{H} si conservano.



○ vettore uscente
dal piano del foglio.

i = piano su cui appartengono le 3 onde
s = piano ortogonale a i.

Il campo elettrico dell'onda incidente, riflessa

e riflette può essere scritto come somma di
due onde polarizzate una nel piano i, l'altra
nel piano s.

Dalla conservazione delle componenti tangenziali
del campo \vec{E} e \vec{H} e considerando che nel mezzo 1
è presente sia l'onda incidente che riflessa
mentre nel mezzo 2 è presente solo l'onda
riflette ricaviamo le 4 equazioni:

$$E_x + E'_x = E''_x \quad \frac{B_x}{\gamma_1} + \frac{B'_x}{\gamma_1} = \frac{B''_x}{\gamma_2}$$

$$E_y + E'_y = E''_y \quad$$

$$\frac{B_y}{\gamma_1} + \frac{B'_y}{\gamma_1} = \frac{B''_y}{\gamma_2}$$

Consideriamo prima un'onda elettromagnetica polarizzata con il campo \vec{E} ortogonale al piano se il campo \vec{B} è i.

$$E_s + E'_s = E''_s \quad (\text{conservazione del campo elettrico lungo l'asse } y)$$

$$\frac{B_i \cos \theta}{\mu_1} - \frac{B'_i \cos \theta}{\mu_2} = \frac{B''_i \cos \theta}{\mu_2} \quad (\text{conservazione del campo magnetico lungo l'asse } x; \text{ si è tenuto conto che il campo elettrico ha lo stesso verso nell'onda incidente e riflessa secessivamente il campo magnetico cambia verso nell'onda riflessa})$$

μ : permeabilità magnetica relativa.

Ricordando la relazione tra \vec{B} e \vec{E}

$$B = \frac{E}{c} = \frac{\epsilon}{\sigma} \frac{E}{c} = \frac{\eta E}{c}$$

$$\frac{E_s \cos \theta n_1}{\rho_1} - \frac{E_s' \cos \theta n_2}{\rho_1} = \frac{E_s'' \cos \theta'' n_2}{\rho_2}$$

Sipuò pone in mezzo trasparente; $\rho_1 = \rho_2 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_s + E_s' = E_s'' \\ (E_s - E_s') n_2 \cos \theta = E_s'' n_2 \cos \theta'' \end{array} \right.$$

Sostituendo nella II equazione ad $E_s' = E_s'' - E_s$

$$(2E_s - E_s'') n_2 \cos \theta = E_s'' n_2 \cos \theta''$$

$$2E_s n_1 \cos\theta = E_s'' (n_1 \cos\theta + n_2 \cos\theta'')$$

$$\frac{E_s''}{E_s} = T_S = \frac{2n_1 \cos\theta}{n_1 \cos\theta + n_2 \cos\theta''} = \frac{2 \frac{n_1}{n_2} \cos\theta}{\frac{n_1}{n_2} \cos\theta + \cos\theta''}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\theta''}{\sin\theta}$$

$$T_S = \frac{\frac{2 \sin\theta''}{\sin\theta} \cos\theta}{\frac{\sin\theta'' \cos\theta + \cos\theta''}{\sin\theta}} = \frac{2 \sin\theta'' \cos\theta}{\sin\theta'' \cos\theta + \sin\theta \cos\theta''} =$$

$$= \frac{2 \sin\theta'' \cos\theta}{\sin(\theta + \theta'')}$$

$$\tau_S = \frac{E'_s}{E_s} = T_S - 1 \quad (\text{si ricava dalla I eq. del sistema})$$

$$\tau_S = \frac{2 \sin\theta'' \cos\theta - \sin\theta'' \cos\theta - \sin\theta \cos\theta''}{\sin(\theta + \theta'')} = - \frac{\sin(\theta - \theta'')}{\sin(\theta + \theta'')} \quad 189$$

Analogamente si ricevono i rapporti ρ_i e T_i per il campo elettrico dell'onda riflessa e riproiettata polarizzate nel piano i.

$$\rho_s = - \frac{\operatorname{vn}(\theta - \theta'')}{\operatorname{vn}(\theta + \theta'')}$$

$$T_s = \frac{2 \operatorname{vn} \theta'' \cos \theta}{\operatorname{vn}(\theta + \theta'')}$$

$$\rho_i = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \theta'')}{\operatorname{tg}(\theta + \theta'')}$$

$$T_i = \frac{2 \operatorname{vn} \theta'' \cos \theta}{\operatorname{vn}(\theta + \theta'') \cos(\theta - \theta'')}$$

Nel caso $\delta = 0$ non posso considerare il rapporto.

$$\frac{n_1}{n_2} - \text{Ottengo}$$

$$P_i = P_s = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$T_i = T_s = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Se $n_2 > n_1$ $P_i = P_s < 0$ tale valore è negativo perché il campo elettrico cambia di segno nell'onda riflessa rispetto all'onda incidente.

Eccezione delle considerazioni energetiche

$$\vec{P} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\gamma} \quad \text{vettore pointing -}$$

$|\vec{P}|$ rappresenta la potenza trasportata

dell'onda nell'unità di superficie ortogonale
all'onda stessa.

$$|\vec{P}| = \frac{E^2}{\nu \gamma}$$

γ = permeabilità relativa ≈ 1

ν = velocità onde nel dielettrico.

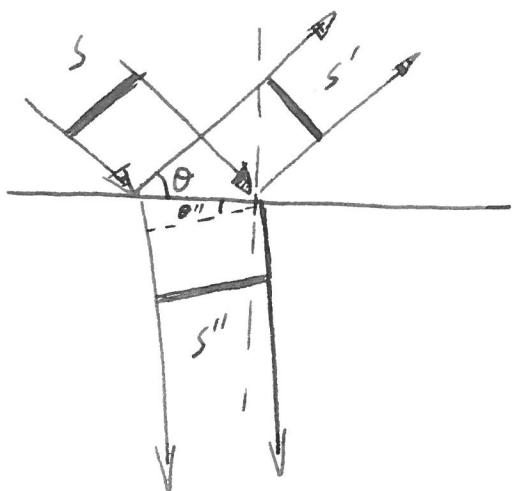
Il rapporto tra il modulo del vettore pointing
dell'onda riflessa e incidente vale

$$\frac{P'}{P} = \frac{E'^2}{E^2} = \begin{cases} \rho_i & \text{onde polarizzate in } i \\ \rho_s & \text{onde polarizzate in } s \end{cases}$$

I rapporti tra l'intensità del settore Pisingy dell'onda riflette e quelle incidente vale

$$\frac{P''}{P} = \frac{E''^2}{E^2} \cdot \frac{v_2}{v_1} = T^2 \frac{n_2}{n_1} = \begin{cases} T_i^2 \frac{n_2}{n_1} \\ T_s^2 \frac{n_2}{n_1} \end{cases}$$

Possiamo un'onda elettromagnetica incidente su una superficie di separazione di 2 dielettrici (siano S , S' e S'' le superfici normali rispettivamente all'onda incidente, riflessa e riflette).



$$S = S'$$

$$\frac{S''}{S} = \frac{\cos \theta''}{\cos \theta}$$

Le potenze dell'onda incidente $P \cdot S$, dell'onda riflessa $P' S'$ e dell'onda riflette $P'' S''$

Il rapporto tra l'energia posseduta dall'onda riflessa e quella incidente è detta Riflettanza

$$R = \frac{P'}{P} = \rho_{s,i}^2$$

Il rapporto tra l'energia posseduta dall'onda riflette e quella incidente è detta Trasmittanza

$$T = \frac{P''S''}{PS} = T \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos \theta''}{\cos \theta} \quad (T_i \text{ oppure } T_s)$$

Per la conservazione dell'energia si ha

$$PS = P'S' + P''S'' \quad \text{dividendo per } PS$$

$$1 = \frac{P'S'}{PS} + \frac{P''S''}{PS} = T + R$$

Angolo di Brewster

osserviamo le equazioni di ρ_s, ρ_i, T_s, T_i valide
per $\theta'' < \theta \neq 0$ si osserva che se

$$\theta + \theta'' = \frac{\pi}{2} \quad \frac{\sin \theta}{\sin \theta''} = \frac{\sin \theta}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\rho_i = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \theta'')}{\operatorname{tg}(\theta + \theta'')} = 0$$

l'angolo $\theta_B = \operatorname{arctg} \frac{n_1}{n_2}$ è detto angolo di Brewster;

per tale angolo $\rho_i = 0$ cioè $E'_i = 0$

l'onda riflessa è polarizzata nel piano ortogonale
a quell di incidenza cioè il vettore \vec{E}' appartiene
sempre a tale piano. ($\vec{E}' = \vec{E}_s'$)

Considero due dielettrici aventi rispettivamente

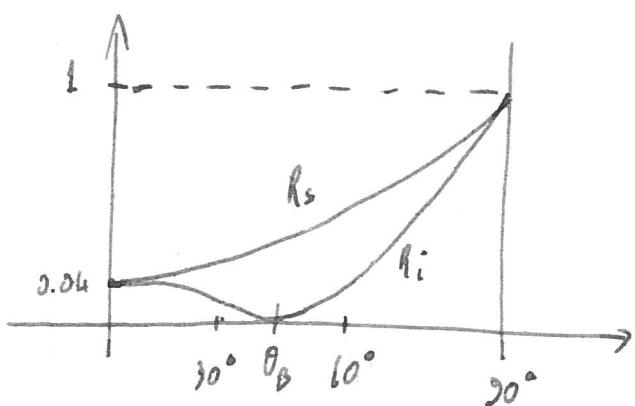
indici di rifrazione $n=1$, $n=1.5$.

Calcolo le riflessione e venire dell'angolo
di incidenza θ .

$$\theta = 0 \quad R_s = R_i = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = 0.2 \quad R = 0.04$$

$$T = 1 - 0.04 : 0.96$$

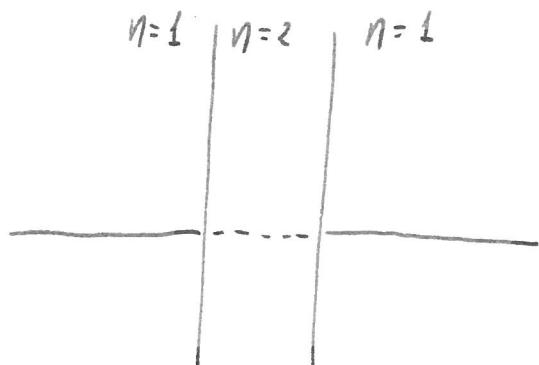
Se l'angolo di incidenza è ortogonale al dielettrico
quasi tutto la luce rifrange (90%).



θ_B = angolo d' Brewster = sen 1.5.

Considero una lente con indice di rifrazione $n=2$.

Determino le percentuali di luce che l'attraversa.

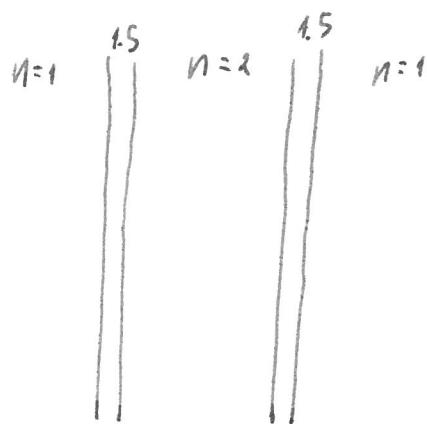


$$\theta = 0$$

$$P = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$T = (1-P^2)(1-P^2) = 0.79$$

Se si aggiungono altre dieci lenti: $n=1.5$ l'umento
risulta avere una maggiore frazione di luce



$$P_1 = \frac{1.5 - 1}{2.5} = 0.2$$

$$P_2 = \frac{2 - 1.5}{3.5} = 0.14$$

$$T = (1 - P_1^2)(1 - P_2^2)(1 - P_1^2)(1 - P_2^2) = (1 - P_1^2)^2(1 - P_2^2)^2 = 0.88.$$

Le pourcentage de l'axe de otherwise le lastre
est 88%.

Un conduttore ha un indice di rifrazione
molto alto.

$$D = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \approx -1$$

$T \approx 0$ in un conduttore quasi l'intera
onde elettromagnetiche viene
riflessa