

Interazione debole

Decadimento beta

Con la scoperta della radioattività fu osservato un diverso comportamento delle particelle emesse dalle sostanze radioattive durante il decadimento. Alcune particelle emesse, sotto la presenza di un campo magnetico, venivano deviate presentando una curvatura rivolta da un lato, altre presentavano la curvatura dell'altro lato, ed infine un ultimo gruppo di particelle non veniva deviato dal campo. Al primo gruppo di particelle si diede il nome di particelle alfa (costituite da due protoni e due neutroni), al secondo il nome di particelle beta (elettroni) ed infine il terzo gruppo di particelle venne dato il nome di raggi gamma (fotoni).

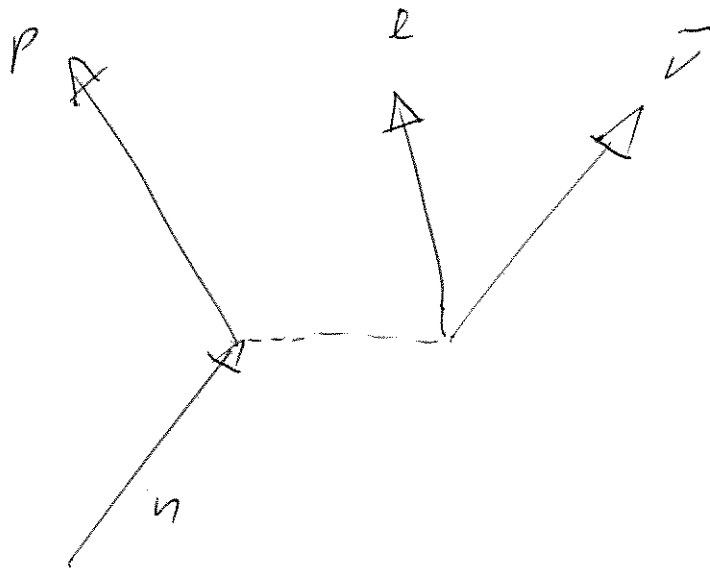
(2)

Numerosi studi chiedono i processi di decadimento ed in particolare lo studio del decadimento beta effettuato da Enrico Fermi chiedi come fosse possibile che un elettrone venga espulso da un nucleo composto da neutroni e protoni.

In un processo di decadimento beta un protone legato al nucleo atomico si trasforma in un neutrone che resta all'interno del nucleo più un elettrone ed un antineutrino che vengono emessi.

Responsabile di questo decadimento è una nuova forza che viene definite forze deboli che agisce secondo il diagramma di interazione sotto riportato.

(3)



L'ipotesi che oltre all'elettrone venga emessa dal nucleo anche un'altra particella fu formulata da Pauli per giustificare lo spettro di emissione dell'elettrone individuato e sotto riportato.



Da una semplice considerazione energetica
si ha infatti:

$$E_n = \sqrt{(m_n c^2)^2 + (p_n c)^2}$$

$$E_p = \sqrt{(m_p c^2)^2 + (p_p c)^2}$$

$$E_e = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2}$$

dal bilancio energetico supponendo che
il neutrone sia fermo e trascurando il rinculo
del protone

$$m_n c^2 - m_p c^2 = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2}$$

che fornisce un unico valore ammissibile
per l'impulso dell'elettrone.

Introducendo invece l'antinutrino di
massa nulla

$$m_n c^2 - m_p c^2 = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2} + p_{\bar{\nu}} c$$

⑤

l'elettrone può avere un impulso che va da 0 quando l'impulso dell'antineutrino è massimo

$$p_{\bar{\nu}} c = m_n c^2 - m_p c^2 - m_e c^2$$

ad un valore massimo quando l'impulso dell'antineutrino è nullo

$$m_n c^2 - m_p c^2 = \sqrt{(m_e c^2)^2 + (p_e c)^2} \quad -$$

Angolo di Cabibbo.

La forza debole è responsabile, tramite lo scambio dei bosoni W , del decadimento leptonic e del decadimento adronico.

Nel decadimento leptonic i leptoni si trasformano nei partner della stessa famiglia.

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$$

per cui si presenteranno le seguenti transizioni:

$$e^- \leftrightarrow \nu_e; \mu^- \leftrightarrow \nu_\mu; \tau^- \leftrightarrow \nu_\tau$$

Nel decadimento adronico i quark possono essere raggruppati in famiglie.

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

i diversi quark sono indicati con i diversi

sempre (flavors) u (up), d (down), c (charm),
 s (strange), t (top), b (bottom).

Nel caso dei quark si osservano transizioni
non solo all'interno di una delle famiglie,
come per i leptoni, ma anche da una
famiglia ad un'altra.

Tutte le interazioni deboli che avvengono
tramite lo scambio del bosone W possono
essere calcolate utilizzando un'unica
costante di accoppiamento, tuttavia
confrontando i valori teorici ottenuti nel
decadimento beta del neutrone, regioni
in cui un quark d si trasforma in un
quark u , con i valori sperimentali si
osserva che la costante di accoppiamento

(8)

dovrebbe risultare più piccole di

circa il 4% per far coincidere i valori.

Un'interpretazione di questi risultati venne proposta da Calibbo nel 1963.

Nello scambio del bosone W per le interazioni deboli il partner del quark u ~~non~~ non è solo l'antostato \bar{u} bensì una combinazione lineare di \bar{u} e s che indichiamo con \bar{u}' .

Analogamente il partner del quark c è una combinazione lineare di s e \bar{d} che si indica con s' .

Gli antostati \bar{u}' e s' per scambio del bosone W sono legati agli antostati \bar{u} e s attraverso la rotazione

②

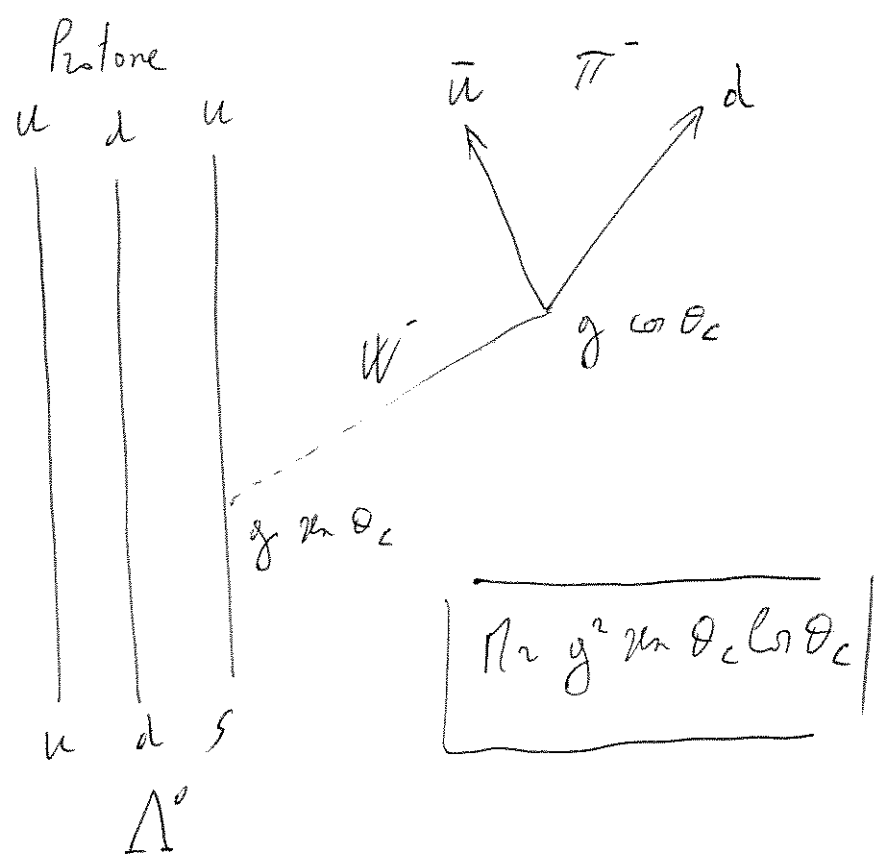
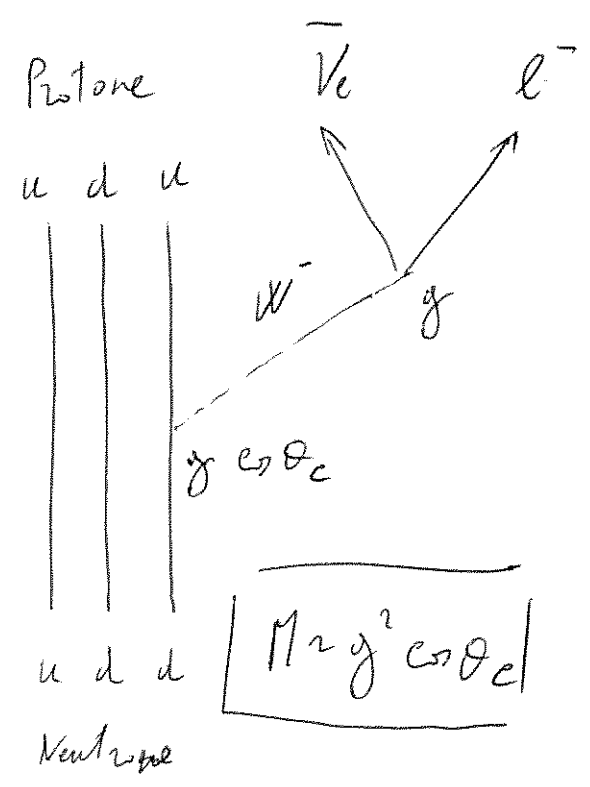
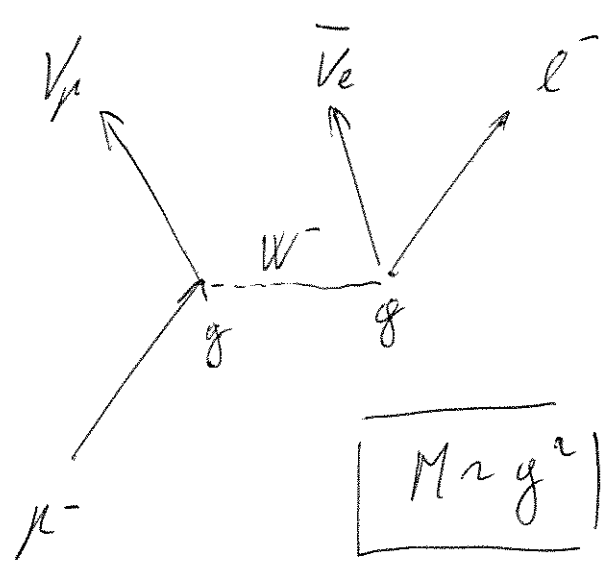
$$|d'\rangle = \cos \theta_c |d\rangle + \sin \theta_c |s\rangle$$

$$|s'\rangle = -\sin \theta_c |d\rangle + \cos \theta_c |s\rangle$$

Con

$$\sin \theta_c \approx 0.22$$

$$\cos \theta_c \approx 0.98$$



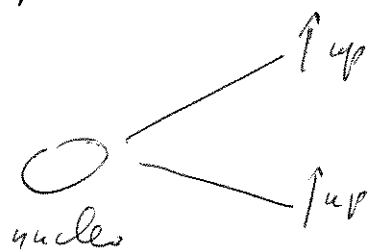
Transizioni Fermi e Gamow-Teller

(10)

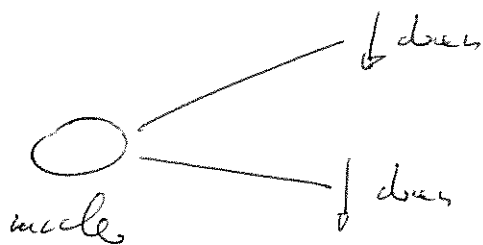
Esaminando i valori misurati in alcuni decadimenti beta si vede che il prodotto $g^2 |M_{fi}|^2$ dipende dalla variazione dello spin nelle transizioni del nucleo.

Essendo la variazione dello spin del nucleo uguale allo spin delle particelle emesse elettrone - neutrino, è possibile che tale

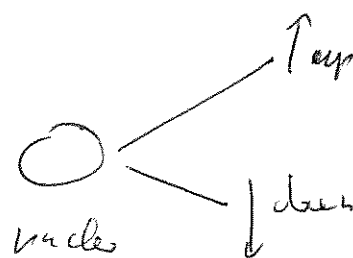
variazione sia nulla, in questo caso si parla di transizioni vettoriali di Fermi, o che tale variazione sia pari a ± 1 in questo caso si parla di transizioni assiali di Gamow-Teller.



GAMOW TELLER

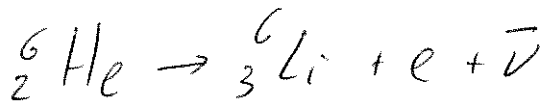


GAMOW TELLER



Fermi

Consideriamo il decadimento



stato iniziale dei neutroni $(1s)^2(1p)^2$

stato iniziale dei protoni $(1s)^2$

Nell' stato finale uno dei quattro neutroni si

trasforma in un protone

stato finale dei neutroni $(1s)^2(1p)^1$

stato finale dei protoni $(1s)^2(1p)^1$

Uno dei due neutroni inverte lo spin e si trasforma

in un protone attraverso una transizione di

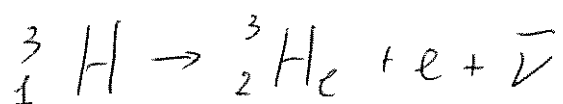
Gemore-Teller.

La molteplicità dello spin è 3 i protoni che possono trasformarsi 2 per cento

$$|M_{fi}|^2 = |R_{GT}|^2 = 6$$

Consideriamo il decadimento

(12)



stato iniziale dei neutroni $(15)^2$

stato iniziale del protone $(15)^1$

Allo stato finale uno dei due neutroni si trasforma
in un protone

stato finale neutroni $(15)^1$

stato finale del protone $(15)^2$

È possibile che il neutrone con spin down
decada nel neutrone a spin down, in questo
caso la variazione di spin tra lo stato
iniziale e finale è nulla, la transizione
è di Fermi, la molteplicità dello spin è
il valore che assume $|\mathcal{M}_{fi}|^2 = |\mathcal{M}_f|^2 = 1$.

E' possibile inoltre che il neutrone con spin

down decada nel protone con spin up -

In questo caso la variazione di spin tra lo stato iniziale e finale è 1h, la Transizione è di Gamow-Teller, la molteplicità dello spin è 3, il valore che assume $|M_{fi}|^2 = |M_{GT}|^2 = 3$

E' possibile scrivere l'elemento della matrice del decadimento beta nella forma -

$$g^2 [C_V^2 |M_F|^2 + C_A^2 |M_{GT}|^2]$$

dove

$$G_F = \frac{g}{(\hbar c)^3} = 1.16637 \times 10^{-15} \text{ GeV}^{-2}$$

$$\frac{|C_A|}{|C_V|} = 1.25 \quad C_V = 1$$

Il propagatore che assume la forma

(14)

$$\frac{1}{q^2 c^2 + m^2 c^4} \quad \text{dove } m \text{ è la massa del}$$

bosone scambiato in questo caso il bosone

W alle basse energie può essere

approssimato a

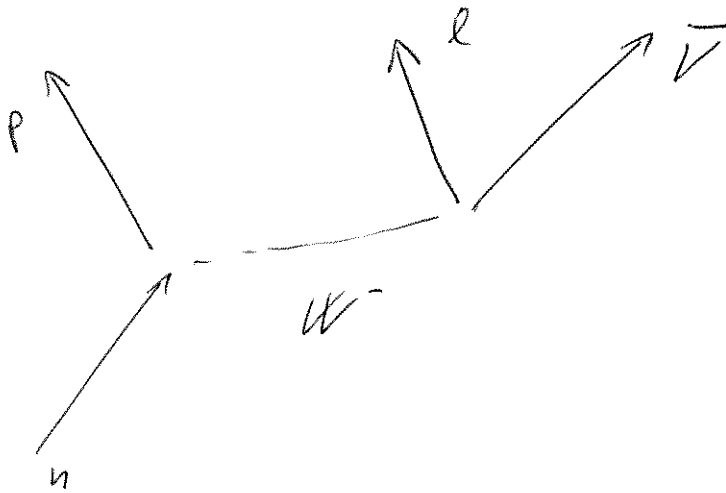
$$\frac{1}{m_W^2 c^4} \quad \text{e quindi costante secondo}$$

l'ipotesi di Fermi.

In questo caso si scrive $H(r_1 - r_2) = g \delta(r_1 - r_2)$

Legge di Sargent

(15)



Secondo le regole di Fermi

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle p; e; \vec{\nu}; H; n \rangle|^2 \rho(E_f) \delta(E_f - E_i) dE_f$$

$$\langle \dots \rangle = \int \varphi_p^*(\vec{x}) \varphi_e^*(\vec{x}) H(\vec{x} - \vec{y}) \varphi_n(\vec{y}) \varphi_\nu(\vec{y}) d\vec{x} d\vec{y}$$

Se l'interazione è a contatto come ipotizzato da Fermi il potenziale d'interazione può essere esatto pari a $H(\vec{x} - \vec{y}) = g \delta(\vec{x} - \vec{y})$

$$\langle p; e; |H|; n; \nu \rangle = g \int \varphi_p^*(\vec{x}) \varphi_e^*(\vec{x}) \varphi_n(\vec{x}) \varphi_\nu(\vec{x}) d\vec{x} \quad (16)$$

dove l'integrale \vec{x} è stato nella regione del nucleo.

$$\varphi_e(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i \vec{k}_e \vec{x}) = 1 + i \vec{k}_e \vec{x} + \dots \approx 1/\sqrt{V}$$

$$\varphi_\nu(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(i \vec{k}_\nu \vec{x}) = 1 + i \vec{k}_\nu \vec{x} + \dots \approx 1/\sqrt{V}$$

Le funzioni d'onda dell'elettrone e del neutrino possono essere approssimate a

$\frac{1}{\sqrt{V}}$ in prossimità del nucleo.

$$\langle p; e; |H|; n; \nu \rangle = \frac{g}{V} |M_{fi}|$$

Nel caso di Transizioni assiali, occorre sostituire

$$g^2 \text{ con } g^2 [C_V^2 |M_F|^2 + C_A^2 |M_{GT}|^2]$$

(17)

$$\rho(E_f) dE_f = \frac{V}{(2\pi \hbar)^6} 4\pi p_e^2 dp_e 4\pi p_\nu^2 dp_\nu$$

$$E_e^2 - p_e^2 c^2 = (m_e c^2)^2$$

$$p_e^2 = \frac{E_e^2}{c^2} - \left(\frac{m_e c^2}{c^2}\right)^2$$

$$p_e = \frac{1}{c} \sqrt{E_e^2 - (m_e c^2)^2}$$

$$dp_e = \frac{1}{c} \frac{E_e dE_e}{\sqrt{E_e^2 - (m_e c^2)^2}}$$

$$\boxed{p_e^2 dp_e = \frac{1}{c^3} \sqrt{E_e^2 - (m_e c^2)^2} E_e dE_e}$$

$$E_f = E_\nu + E_e + E_p$$

$$E_f = p_\nu c + E_e + m_p c^2$$

$$p_\nu = \frac{E_f}{c} - \frac{E_e}{c} - \frac{m_p c^2}{c}$$

$$p_\nu^2 dp_\nu = \frac{1}{c^3} (E_f - E_e - m_p c^2)^2 dE_f$$

$$\int_{E_f} \delta(E_f - E_i) dE_f = \delta(E_f - E_i) \frac{V}{(2\pi \hbar c)^6} 4\pi p_e^2 dp_e 4\pi p_\nu^2 dp_\nu = \quad (18)$$

$$= \frac{\delta(E_f - E_i) V}{(2\pi \hbar c)^6} (4\pi)^2 (E_f - E_e - m_p c^2)^2 dE_f \sqrt{E_e^2 - (m_e c^2)^2} E_e dE_e$$

integrando in dE_f

e ricordando che $E_f = E_i = m_n c^2$

$$= \frac{V (4\pi)^2}{(2\pi \hbar c)^6} (m_n c^2 - m_p c^2 - E_e)^2 \sqrt{E_e^2 - (m_e c^2)^2} E_e dE_e$$

indicando ora $E_0 = m_n c^2 - m_p c^2$

$$= \frac{V (4\pi)^2}{(2\pi \hbar c)^6} (E_0 - E_e)^2 \sqrt{E_e^2 - (m_e c^2)^2} E_e dE_e$$

trascurando il termine $m_e c^2$

(19)

$$= \frac{V (4\pi)^2}{(2\pi \hbar c)^6} \int_0^{E_0} (E_0 - E_e)^2 E_e^2 dE_e$$

$$\int_0^{E_0} (E_0^2 + E_e^2 - 2E_0 E_e) E_e^2 dE_e$$

$$= E_0^2 \frac{E_0^3}{3} + \frac{E_0^5}{5} - 2 E_0 \frac{E_0^4}{4} = \frac{E_0^5}{3} + \frac{E_0^5}{5} - \frac{E_0^5}{2} =$$

$$= \frac{(10+6-15) E_0^5}{30} = \frac{E_0^5}{30}$$

$$= \frac{V (4\pi)^2}{(2\pi \hbar c)^6} \frac{E_0^5}{30}$$

$$d\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{V (4\pi)^2}{(2\pi \hbar c)^6} \frac{E_0^5}{30} \frac{g^2 |M_{fi}|^2}{V}$$

$$= \frac{2\pi V (4\pi)^2 E_0^5 g^2 |M_{fi}|^2}{(2\pi)^6 \hbar (\hbar c)^6 30 V} = \frac{E_0^5 |M_{fi}|^2}{\pi^3 60 \hbar (\hbar c)^6}$$

(20)

$$\alpha \lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{E_0^5}{\pi^3 60 \hbar (\hbar c)^6} \cdot g^2 \left[C_V^2 |\mathcal{M}_F|^2 + C_A^2 |\mathcal{M}_{cr}|^2 \right]$$

Tale formula è detta di Sargent.

Afferma che la vita media nei processi di decadimento dipende dalla 5 potenza dell'energia disponibile.

Interazione elettrodebole

(21)

Secondo la teoria di Gange l'accoppiamento corrente campo per la forza elettrodebole si scrive

$$\frac{1}{2} g_Y J^Y B^Y + g_I (J^1 W^1 + J^2 W^2 + J^3 W^3)$$

dove

$$J^1 = \frac{1}{2} (\bar{\nu}, \bar{e})_L \gamma_\mu \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$$

$$J^2 = \frac{1}{2} (\bar{\nu}, \bar{e})_L \gamma_\mu \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$$

$$J^3 = \frac{1}{2} (\bar{\nu}, \bar{e})_L \gamma_\mu \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \frac{1}{2} \bar{e}_L \gamma_\mu e_L$$

sono le correnti fermioniche

$$\tau^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \tau^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \tau^3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

le matrici generatrici delle simmetrie $SU(2)$

$$J^Y = (\bar{\nu}, \bar{e})_L \gamma_\mu \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L - 2 \bar{e}_R \gamma_\mu e_R =$$

$$= -\bar{\nu}_L \gamma_\mu \nu_L - \bar{e}_L \gamma_\mu e_L - 2 \bar{e}_R \gamma_\mu e_R$$

la corrente neutra

$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice associata alle
corrente neutra per i fermioni sinistrari;
 $Y = 2$ per il singoletto destrorso e_R .

W^i i campi bosonici associati alle
rispettive correnti;

B^Y il campo associato alle corrente neutre.

I campi W^i responsabili dell'interazione debole
agiscono solo sui doppietti fermionici
sinistrari o anti-fermionici destrorsi.

Il campo B^Y agisce sia sui doppietti fermionici
sinistrari che sul singoletto destrorso e_R .

Se indichiamo con $\psi_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$ il doppietto

fermionico sinistrorso e con $\psi_R = e_R$ il

singoleto fermionico destrorso

possiamo scrivere la lagrangiana nella
forma

$$L = i \bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L + i \bar{\psi}_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R$$

le derivate covarianti sono date dalle
relazioni

$$D_\mu = \partial_\mu + i g_1 T^i W^i_\mu + \frac{1}{2} i g_Y Y B_Y$$

sul doppietto fermionico sinistrorso

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2} i g_Y Y B_Y$$

sul singoleto fermionico destrorso.

Alle lagrangiane sopra riportate se
aggiunta la parte relative ai campi:

$$L = -\frac{1}{4} (B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} (\vec{W}_{\mu\nu} \vec{W}^{\mu\nu})$$

con $\mu, \nu = 1 \dots 3$

$$\mu, \nu = 0 \dots 4$$

$$\vec{W}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu + g \vec{W}_\mu \wedge \vec{W}_\nu$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

L'espressione della lagrangiana è
invariante per trasformate di gauge.

Esse non presenta il termine di massa
per l'elettone ed il neutrino perché
sono le due masse differenti: il

termine $(\bar{\nu}, \bar{e})_L \begin{bmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & m_e \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L$

non è invariante.

Non sono presenti nemmeno i termini di
 massa per i campi bosonici W e B .

Per fornire alla lagrangiana i termini
 di massa per i campi fermionici e bosonici
 senza abbandonare l'approccio dell'invarianza
 di gauge fu introdotta da Higgs
 un campo scalare supplementare.

Consideriamo ora il termine dovuto
 all'interazione delle correnti neutre

$$\frac{1}{i} g_Y J^Y B^Y + g_I J^3 W^3$$

Ispostizziamo una matrice unitaria che

legge i campi B^Y e W^3 al campo

electromagnetic A e al campo generato
dal bosone Z

$$\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & \sin \theta_w \\ -\sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^Y \\ W^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B^Y \\ W^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix}$$

sostituendo

$$\frac{1}{2} g_Y J^Y B^Y + g_I J^3 W^3 =$$

$$= \frac{1}{2} g_Y J^Y (A \cos \theta_w - Z \sin \theta_w) + g_I J^3 (A \sin \theta_w + Z \cos \theta_w)$$

$$= \left(\frac{1}{2} g_Y J^Y \cos \theta_w + g_I J^3 \sin \theta_w \right) A + \left(-\frac{1}{2} g_Y J^Y \sin \theta_w + g_I J^3 \cos \theta_w \right) Z$$

Consideriamo il termine

$$\left(\frac{1}{2} g_Y J^4 \cos \theta_w + g_I J^3 \sin \theta_w \right) A$$

ponendo

$$g_Y \cos \theta_w = g_I \sin \theta_w = e \int^{em} A$$

$$\int^{em} = \left(\frac{1}{2} J^4 \right) + J^3 = -\bar{l}_L \gamma_\mu l_L - \bar{l}_R \gamma_\mu l_R$$

questo termine rappresenta l'interazione
elettromagnetica

L'ultimo termine

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2} g_Y J^4 \sin \theta_w + g_I J^3 \cos \theta_w \right) Z = \\ & = \frac{g_I}{\cos \theta_w} \left(J^3 - \int^{em} \sin^2 \theta_w \right) Z \end{aligned}$$

rappresenta l'interazione legata al

longe ventu Z.

(28)