Onde elettromagnetiche

Onde elettromagnetiche

Prima di scrivere le equazioni di Maxwell in modo differente dobbiamo dimostrare due importanti Teoremi:

1) Il Teorema della divergenza
2) Il Teorema di Stokes.

Teorema della divergenza

Se $\vec{E}$ un vettore allora vale la relazione

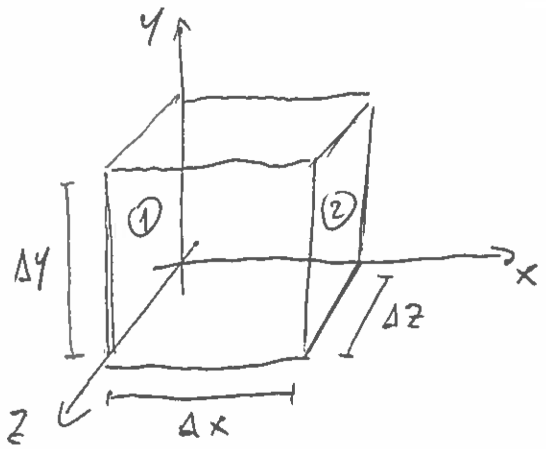
$$\phi(\vec{E}) = \int_{\Omega} \vec{E}\,\hat{n}\,dS = \int_{V} \vec{\nabla}\,\vec{E}\,dV$$

dove $\vec{\nabla}\,\vec{E}$ = divergenza di $\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)(E_x, E_y, E_z)$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial y};\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(E_x;E_y;E_z\right) =$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Per dimostrare questo Teorema considero un volume elementare.



Il contributo al flusso attraverso le superfici ① e ② ortogonali all'asse x vale

$$-E_x \Delta z \Delta y + \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x\right)\Delta z \Delta y = \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

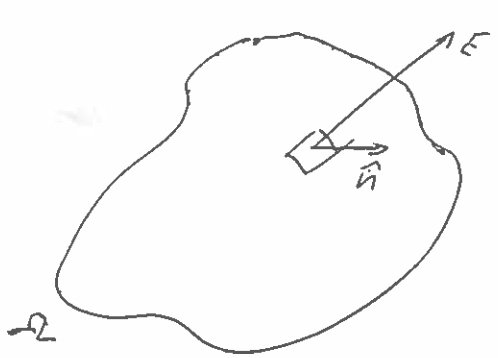
analogamente considerando il contributo del flusso attraverso le superfici ortogonali all'asse y e z possiamo scrivere

$$\phi(\vec{E}) = \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial E_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\int_{\Omega \text{ elementare}} \vec{E}\,\hat{n}\,dS = \int_{V \text{ elementare}} \vec{\nabla}\,\vec{E}\,dV$$

Poiché il flusso attraverso una generica superficie Ω può essere visto come la somma dei flussi attraverso le superfici dei singoli cubetti elementari che riempiono il volume definito da Ω possiamo scrivere

$$\int_{\Omega} \vec{E}\,\hat{n}\,dS = \int_{V} \vec{\nabla}\,\vec{E}\,dV.$$



Teorema di Stokes

Se $\vec{E}$ è un vettore allora vale la relazione

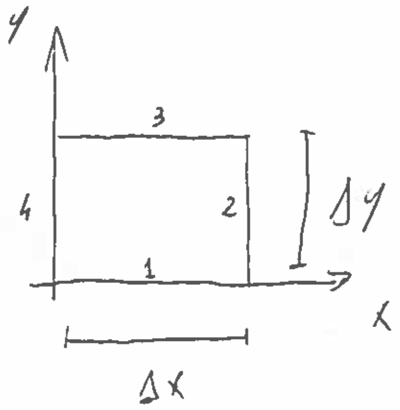
$$\Gamma(\vec{E}) = \oint \vec{E}\, d\vec{s} = \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \vec{E})\, \hat{n}\, dS$$

dove Ω è una superficie aperta che poggia sulla curva di integrazione.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \text{rotore di } \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (E_x; E_y; E_z)$$

$$= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}; \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}; \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

Per dimostrare questo teorema considero una curva chiusa elementare nel piano xy



$$\oint_{\Omega \text{ elementare}} \vec{E}\, d\vec{s} = E_x(1)\,\Delta x + E_y(2)\,\Delta y - E_x(3)\,\Delta x - E_y(4)\,\Delta y$$

$$E_x(3) = E_x(1) + \frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y$$

$$E_y(2) = E_y(4) + \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x$$

sostituendo

$$\oint_{\Omega \text{ elementare}} \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta x\,\Delta y + \frac{\partial E_y}{\partial x}\Delta x\,\Delta y =$$

$$= \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y$$

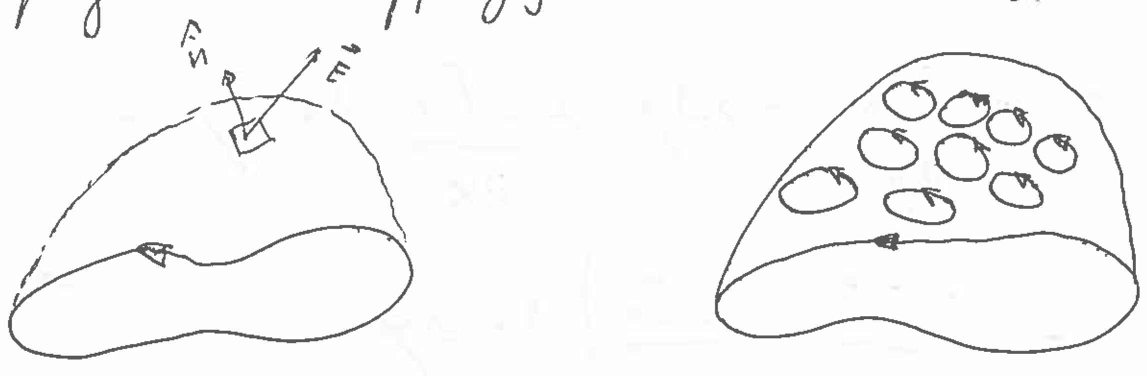
La grandezza $\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$ rappresenta

la componente z del vettore $\vec{\nabla} \times \vec{E}$

In generale possiamo scrivere

$$\underset{\text{curva elementare}}{\oint} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \underset{\text{superficie elementare}}{\int} (\vec{\nabla} \times \vec{E})\, \hat{n}\, dS$$

Poiché la circuitazione attraverso una generica curva chiusa può essere vista come la somma delle circuitazioni attraverso le curve chiuse elementari che riempiono la superficie Ω appoggiata alla curva



possiamo scrivere

$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} = \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \vec{E})\, \hat{n}\, dS$$

I due teoremi dimostrati ci permettono di trasformare le equazioni di Maxwell da una forma integrale ad una forma puntuale.

1) Equazione

$$\phi(E) = \int_{\Omega} \vec{E}\, \hat{n}\, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV$$

$\Downarrow$

teorema divergenza

$\Downarrow$

$$\int_V \vec{\nabla}\, \vec{E}\, dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

2) Equazione

$$\Gamma(\vec{E}) = \oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\phi(\vec{B}) = -\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \vec{B}\,\hat{n}\, dS$$

$\Downarrow$

Teorema di Stokes

$\Downarrow$

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla}\times\vec{E})\,\hat{n}\, dS = \int_{\Omega} -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,\hat{n}\, dS$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

3) Equazione

$$\phi(\vec{B}) = \oint_{\Omega} \vec{B}\,\hat{n}\,dS = 0$$

$\Downarrow$

teorema della divergenza

$\Downarrow$

$$\int \vec{\nabla}\,\vec{B}\,dV = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\,\vec{B} = 0}$$

4) Equazione

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\,\phi(\vec{E})}{dt} \right)$$

$$\Downarrow$$

teorema di Stokes

$$\Downarrow$$

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \vec{B})\, \hat{n}\, dS = \int_{\Omega} \mu_0 \vec{J}\, \hat{n}\, dS + \mu_0 \varepsilon_0 \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}\, \hat{n}\, dS$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

Equazioni di Maxwell in forma puntuale

$$
\begin{cases}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\[2ex]
\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\[2ex]
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\[2ex]
\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{cases}
$$

Osservazione

Finora abbiamo utilizzato l'operatore nabla $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ in due maniere differenti.

A seconda del contesto l'operatore nabla può essere un gradiente, in questo caso aumenta di un grado l'oggetto su cui agisce es.

$\vec{\nabla}\phi$ = gradiente ϕ trasforma lo scalare ϕ in un vettore a 3 componenti.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ = gradiente di $\vec{E}$ trasforma il vettore a 3 component. $\vec{E}$ in una matrice 3×3

oppure una divergenza in questo caso riduce di 1 il grado dell'oggetto su cui agisce es.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ = divergenza di $\vec{E}$ trasforma il vettore a tre componenti $\vec{E}$ in uno scalare

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}$ = divergenza di $\vec{\sigma}$ trasforma la matrice 3×3 $\vec{\sigma}$ in un vettore a 3 componenti.

$$\text{grad}\ \phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix}$$

$$\text{grad}\ \vec{E} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_x}{\partial x} ; & \dfrac{\partial E_x}{\partial y} ; & \dfrac{\partial E_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} ; & \dfrac{\partial E_y}{\partial y} ; & \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial x} ; & \dfrac{\partial E_z}{\partial y} ; & \dfrac{\partial E_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{div.}\ \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\text{div.}\ \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Consideriamo nulle le fonti generatrici del campo $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$.

Le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

facciamo il rotore della II e della IV equazione

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}) - \nabla^2 \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\cancel{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \dfrac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{cases}$$

Osservando che $\mu_0 \varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2}$ dove

c è la velocità della luce nel vuoto

le equazioni si scrivono:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

analogamente per il campo magnetico

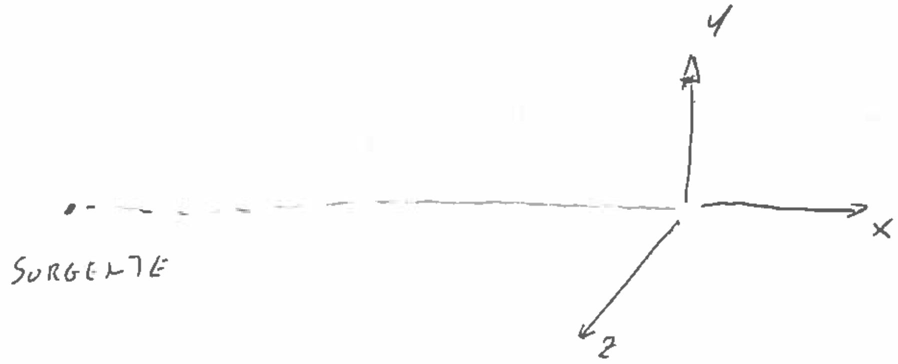
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

La cui soluzione è una funzione della forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{x} - ct)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0(\vec{x} - ct)$$

Consideriamo una soluzione particolare dell'equazione: l'onda elettromagnetica piana.



Nell caso di onde piane possiamo scrivere che le grandezze $\vec{E}$ e $\vec{B}$ non variano rispetto all'asse y e z ma solo rispetto all'asse x.

Quindi $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial y} = \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial z} = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial y} = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial z} = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(0; -\frac{\partial E_z}{\partial x}; \frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = \left(-\frac{\partial B_x}{\partial t}; -\frac{\partial B_y}{\partial t}; -\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(0; -\frac{\partial B_z}{\partial x}; \frac{\partial B_y}{\partial x}\right) = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}; \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}; \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}\right)$$

Poiché $\dfrac{\partial B_x}{\partial t} = \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = 0$ le componenti x del campo elettrico e del campo magnetico

sono nulle.

Supponiamo di avere un campo elettrico polarizzato

lungo l'asse y.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(0 ; \; 0 ; \; \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = \left(-\frac{\partial B_x}{\partial t} ; \; -\frac{\partial B_y}{\partial t} ; \; -\frac{\partial B_z}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

Le componenti B_y e B_x sono nulle.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \left(0 ; \; -\frac{\partial B_z}{\partial x} ; \; 0 \right) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} ; \; \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} ; \; \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \right)$$

$$\begin{cases} E_y = E_y(x - ct) \\ B_z = B_z(x - ct) \end{cases}$$

indicando con $u = x - ct$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial u} = \frac{1}{c^2}(-c)\frac{\partial E_y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial u} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial u}$$

$$\Downarrow$$

$$c B_z = E_y$$

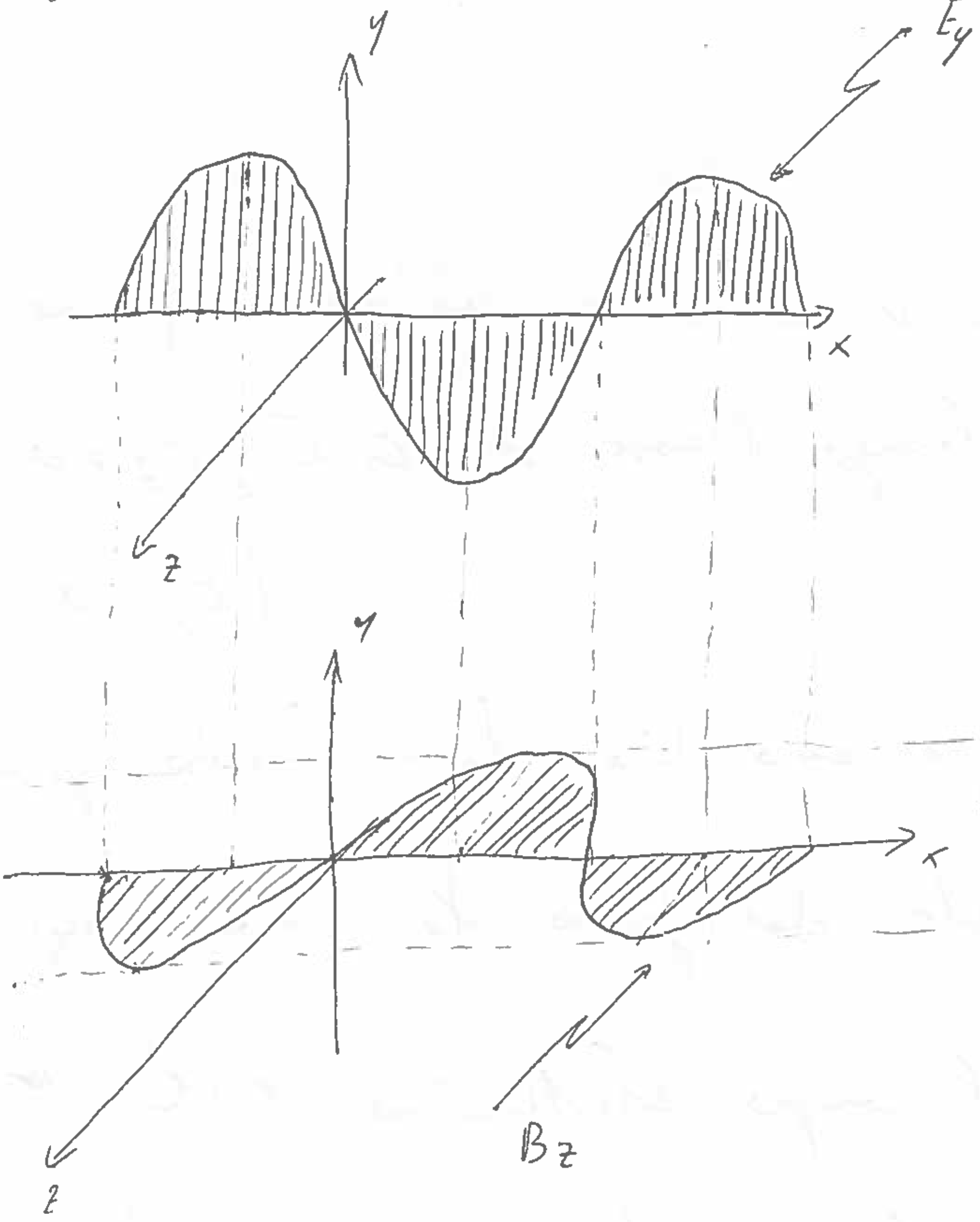
Analogamente se considero un'onda piana polarizzata lungo l'asse z cioè $\begin{cases} E_z \neq 0 \\ E_y = 0 \end{cases}$

In definitiva possiamo dire che l'onda piana è caratterizzata dal fatto che la direzione del moto, il campo elettrico e il campo magnetico formano una terna levogira.

Il campo magnetico vale c volte il valore del campo elettrico.

Estrambi sono funzioni del tipo

$f = f(x - ct)$.



Equazione del potenziale ritardato

Ritorniamo all'equazione di Maxwell

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Vogliamo trovare un'espressione più semplice per poter risolvere le equazioni.

Si introduce ~~...~~ un potenziale vettore A

tale che $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Ciò è possibile perché $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$.

La definizione di A non è univoca infatti

se considero

$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi$ con ϕ un campo scalare

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi)}_{= 0}$$

il campo A' e A generano lo stesso campo magnetico B.

Me

$$\vec{\nabla}\vec{A}' = \vec{\nabla}\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\phi)$$

$$\vec{\nabla}\vec{A}' = \vec{\nabla}\vec{A} + \nabla^2\phi$$

avendo indicato con ∇^2 il Laplaciano $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Essendo ϕ una funzione arbitraria possiamo dire che il potenziale vettore può essere definito a meno di un valore arbitrario della sua divergenza.
Scegliamo la $\vec{\nabla}\vec{A}$ in modo da semplificare il più possibile le nostre equazioni (scelta di Gauge)

Tornando alle equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = -\left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Si definisce un potenziale scalare V

tale che $\boxed{\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V}$

Ritornando alla IV equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 J - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 J - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

Per l'arbitrarietà di $\vec{\nabla} \vec{A}$ impongo

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}}$$ sostituendo e semplificando

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}} \quad (*)$$

ritornando al potenziale

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \vec{A} = -\nabla^2 V$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{= \frac{\rho}{\varepsilon_0}} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\nabla^2 V$$

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (*)(*)$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \\[2ex] \nabla^2 V - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_0 J_x \\[2ex] \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = -\mu_0 J_y \\[2ex] \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu_0 J_z \\[2ex] \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

introducendo l'operatore dalembertiano

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases} \Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \\[2ex] \Box V = -\rho/\varepsilon_0 \end{cases}$$

Le equazioni

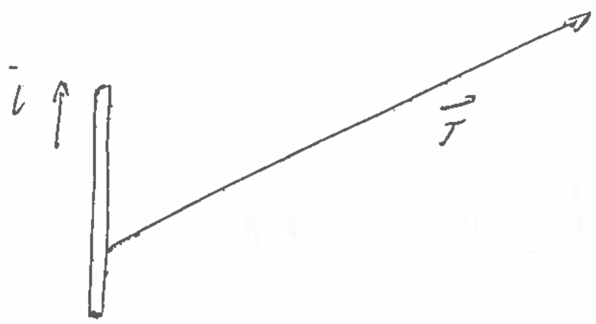
$$\begin{cases} \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \\ \square V = -\rho/\varepsilon_0 \end{cases}$$

vengono dette dei potenziali ritardati poiché la forma della soluzione è

$$\begin{cases} V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \displaystyle\int_V \dfrac{[\rho]}{r}\, dV \\ \vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \displaystyle\int_V \dfrac{[\vec{J}]}{r}\, dV \end{cases}$$

dove $[\rho]$ e $[\vec{J}]$ rappresentano la distribuzione della densità di carica e di corrente nel tempo $t - \frac{r}{c}$.

Applicando le equazioni dei potenziali ritardati voglio calcolare il campo dell'onda elettromagnetica prodotta da una spira percorsa da corrente sinusoidale.



$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[i]}{r}\,d\vec{l}$$

$$d\vec{B} = \vec{\nabla} \times d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{\nabla} \times \left(\frac{[i]}{r}\,d\vec{l}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{\nabla}\left(\frac{[i]}{r}\right) \times d\vec{l} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[i]}{r}\,\vec{\nabla} \times d\vec{l}}_{=\,0}$$

$d\vec{l}$ = costante

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla}\left(\frac{[i]}{r}\right) \times d\vec{\ell}$$

me

$$\vec{\nabla}\left(\frac{[i]}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{[i]}{r}\right)\nabla r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{[i]}{r}\right)\hat{r} =$$

$$= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial [i]}{\partial r} - \frac{1}{r^2}[i]\right)\hat{r}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial [i]}{\partial r} - \frac{1}{r^2}[i]\right)\hat{r} \times d\vec{\ell}$$

$$[i] = i_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\frac{\partial [i]}{\partial r} = -\frac{1}{c}\frac{\partial [i]}{\partial t}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} d\vec{\ell} \times \left(\frac{1}{rc}\frac{\partial [i]}{\partial t} + \frac{[i]}{r^2}\right]\hat{r}$$

Il II termine rappresenta l'equazione di Laplace $d\vec{B} = \frac{\mu_0 [i]}{4\pi} d\vec{l} \times \frac{\hat{r}}{r^2}$

che definisce il campo magnetico generato da un tratto $d\vec{l}$ percorso da corrente elettrica.

Il I termine il campo dell'onda elettromagnetica.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{rc} \omega i_0 \operatorname{sen} \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) d\vec{l} \times \hat{r}$$

Tali campi vanno all'infinito con $\frac{1}{r}$

pertanto a grandi distanze la loro influenza è maggiore di quelli prodotti da campi stazionari che vanno all'infinito

con $\frac{1}{r^2}$. Tuttavia essi sono rilevanti

soltanto per pulsazioni ω molto elevate.

(Il fattore $\frac{\mu_i}{c}$ e μ_0 li rende trascurabili).