# *OLTRE IL MODELLO STANDARD: SUPERSIMMETRIA (SUSY)*

Di seguito consideriamo dei sistemi fisici composti da campi bosonici $B(x)$ e campi fermionici $F(x)$ e ammettiamo la possibilità che i campi possano trasformarsi l'uno nell'altro.
Nel caso tali trasformazioni lascino invariata la lagrangiana diremo che esse rappresentino una operazione di supersimmetria (SUSY) per il sistema dato.
Se le trasformazioni dipendono da parametri costanti la supersimmetria sarà di tipo globale, mentre sarà di tipo locale se i parametri sono funzioni delle coordinate.
La simmetria locale può essere realizzata solo se il modello considerato è anche general-covariante, ossia se il modello viene formulato in uno spazio-tempo curvo e quindi include anche l'interazione gravitazionale.
Modelli gravitazionali che contengono sorgenti bosoniche e fermioniche e che sono localmente supersimmetrici sono detti modelli di supergravità (SUGRA).
Il più semlice esempio di supersimmetria globale è costituito da un sistema di particelle di spin 0 e spin 1/2 rappresentate da un campo scalare $\phi$ e da uno spinore di Majorana $\psi$ in uno spazio tempo di Minkowski.
Consideriamo la trasformazione
$\phi \to \phi + \delta\phi$
$\psi \to \psi + \delta\psi$
dove
$\delta\phi = \bar{\epsilon}\psi$
$\delta\psi = -\frac{i}{2}\gamma^\mu \epsilon \partial_\mu \phi$
e $\epsilon$ è uno spinore di Majorana a quattro componenti costante (indipendente dalle coordinate) per cui valela relazione $\epsilon^\dagger = C\epsilon$ secondo quanto detto nel paragrafo "dall'equazione di Maiorana a quella di Dirac, invarianza relativistica dell'equazione di Dirac"
con

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = i\gamma^2.$$

Il campo $\phi$ è un campo scalare reale per cui vale $\phi = \phi^*$
Facciamo di seguito alcune precisazioni:

- abbiamo indicato con $\epsilon$ un quadrispinore di Majorana da non confondere con il tensore di Ricci;
- per indicare il prodotto scalare tra due vettori $A$ e $B$ si usa la notazione $AB$ sottintendendo in realtà che il vettore A deve essere traspoto prima di effettuare il consueto prodotto righe per colonne. In definitiva se $A$ è un vettore si utilizza la stessa notazione per il suo trasposto $A^T$, così si utilizza la stessa notazione per il suo complesso coniugato $A^*$ e per l'hermitiano (coniugato trasposto) $A^\dagger$ per cui $A = A^T$ e $A^\dagger = A^*$
- per la matrice C valgono le seguenti proprietà
  $C^2 = 1; C^\dagger = C; C\gamma^0 C = -\gamma^0; C\gamma^0\gamma^\mu C = \gamma^{\mu T}\gamma^0$
- se $\alpha$ e $\beta$ sono due spinori valgono le proprietà di anticommutazione ossia soddisfano l'algebra di Grassmann$\{\alpha, \beta\} = \alpha\beta + \beta\alpha = 0$ e $\{\alpha, \bar{\beta}\} = \alpha\bar{\beta} + \bar{\beta}\alpha = 0$.
- per due spinori di Majorana vale la proprietà $\bar{\epsilon}\psi = \bar{\psi}\epsilon$ infatti
  $\bar{\epsilon}\psi = \epsilon^\dagger\gamma^0\psi = (C\epsilon)^T\gamma^0\psi = \epsilon^T C^T\gamma^0\psi = \epsilon^T C\gamma^0\psi = \epsilon^T C\gamma^0 C\psi^* = -\epsilon^T\gamma^0\psi^* =$
  $= -\epsilon^T(\psi^\dagger\gamma^{0T})^T = -\epsilon^T(\psi^\dagger\gamma^0)^T = -\epsilon^T\bar{\psi}^T = -\epsilon\bar{\psi} = \bar{\psi}\epsilon$
- per due spinori di Majorana vale la proprietà $\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi = \bar{\psi}\gamma^\mu\epsilon$ con $\mu = 1 \dots 3$ infatti
  $\bar{\epsilon}\gamma^\mu\psi = \epsilon^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi = (C\epsilon)^T\gamma^0\gamma^\mu\psi = \epsilon^T C^T\gamma^0\gamma^\mu\psi = \epsilon^T C\gamma^0\gamma^\mu\psi = \epsilon^T C\gamma^0\gamma^\mu C\psi^* =$
  $= \epsilon^T\gamma^{\mu T}\gamma^0\psi^* = \epsilon^T\gamma^{\mu T}(\psi^\dagger\gamma^{0T})^T = \epsilon^T\gamma^{\mu T}(\psi^\dagger\gamma^0)^T = \epsilon^T\gamma^{\mu T}\bar{\psi}^T = (\gamma^\mu\epsilon)^T\bar{\psi}^T =$

$$= (\gamma^\mu \epsilon)\bar{\psi} = -\bar{\psi}\gamma^\mu \epsilon$$

Vogliamo di seguito dimostrare che la trasformazione

$$\phi \to \phi + \delta\phi$$
$$\psi \to \psi + \delta\psi$$

dove

$$\delta\phi = \bar{\epsilon}\psi$$
$$\delta\psi = -\frac{i}{2}\gamma^\mu \epsilon \partial_\mu \phi$$

lascia invariata la lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi$$

a meno di una divergenza totale che non influenza l'equazione del moto.

$$\delta L = \partial_\mu \phi \partial^\mu \delta\phi + i\delta\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \delta\psi$$
$$\delta\bar{\psi} = \left(-\frac{i}{2}\gamma^\mu \epsilon \partial_\mu \phi\right)^\dagger \gamma^0 = \frac{i}{2}\partial_\mu \phi^* \epsilon^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \frac{i}{2}\partial_\mu \phi \epsilon^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 = \frac{i}{2}\epsilon^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger \gamma^0 \partial_\mu \phi$$

applicano le proprietà delle matrici di Dirac si ottiene facilmente $(\gamma^i)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^i$

$$\delta\bar{\psi} = \frac{i}{2}\epsilon^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \phi = \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu \partial_\mu \phi$$

sostituendo

$$\delta L = \partial_\mu \phi \bar{\epsilon}\partial^\mu \psi - \frac{i}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu \psi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^\nu \epsilon \partial_\mu \partial_\nu \phi$$

ma

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\mu \partial_\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^\nu)\partial_\mu \partial_\nu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu \partial_\nu = \blacksquare$$
$$\delta L = \partial_\mu(\bar{\epsilon}\psi)\partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\partial_\nu(\bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^\nu \psi)\partial_\mu \phi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^\nu \epsilon \partial_\mu \partial_\nu \phi$$
$$\delta L = \partial_\mu(\bar{\epsilon}\psi \partial^\mu \phi) - \bar{\epsilon}\psi \blacksquare \phi - \frac{1}{2}\partial_\nu\left(\bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^\nu \psi \partial_\mu \phi\right) + \frac{1}{2}(\bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^\nu \psi)\partial_\nu \partial_\mu \phi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \gamma^\nu \epsilon \partial_\mu \partial_\nu \phi$$
$$\delta L = \partial_\mu(\bar{\epsilon}\psi \partial^\mu \phi) - \bar{\epsilon}\psi \blacksquare \phi - \frac{1}{2}\partial_\nu\left(\bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^\nu \psi \partial_\mu \phi\right) + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\psi \blacksquare \phi + \frac{1}{2}\bar{\psi}\epsilon \blacksquare \phi$$
$$\delta L = \partial_\mu(\bar{\epsilon}\psi \partial^\mu \phi) - \bar{\epsilon}\psi \blacksquare \phi - \frac{1}{2}\partial_\nu\left(\bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^\nu \psi \partial_\mu \phi\right) + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\psi \blacksquare \phi + \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\psi \blacksquare \phi$$
$$\delta L = \partial_\mu(\bar{\epsilon}\psi \partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}\partial_\nu\left(\bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^\nu \psi \partial_\mu \phi\right)$$

La variazione della lagrangiana è nulla a meno di una una divergenza totale

$$\delta L = \partial_\mu K^\mu$$

con

$$K^\mu = \bar{\epsilon}\psi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\nu \gamma^\mu \psi \partial_\nu \phi = \bar{\epsilon}\psi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\bar{\epsilon}(-\gamma^\mu \gamma^\nu + 2\eta^{\mu\nu})\psi \partial_\nu \phi = \frac{1}{2}\bar{\epsilon}\gamma^\mu \gamma^\nu \psi \partial_\nu \phi$$

Calcoliamo ora il commutatore di due trasformazioni infinitesime

$$\delta_1 \phi = \bar{\epsilon}_1 \psi$$
$$\delta_2 \delta_1 \phi = \bar{\epsilon}_1 \delta_2 \psi = -\frac{i}{2}\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu \phi$$

E quindi

$$(\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2)\phi = -\frac{i}{2}\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu \phi + \frac{i}{2}\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1 \partial_\mu \phi = -\frac{i}{2}\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu \phi - \frac{i}{2}\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu \phi$$
$$(\delta_2 \delta_1 - \delta_1 \delta_2)\phi = -i\bar{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 \partial_\mu \phi$$

Il risultato sopra riportato mostra chiaramente che l'invarianza per tasformazioni globali di supersimmetria può essere mantenuta solo se il modello è invariante per una traslazione di coordinate

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \xi^\mu$$

con $\xi^{\mu}$ costante proporzionale a $i\bar{\epsilon}_1\gamma^{\mu}\epsilon_2$.
Se le equazioni sono tali da presentare un'invarianza per simmetria locale allora tale invarianza locale può essere mantenuta solo se il modello è invariante per una trasformazione infinitesima di coordinate
$x^{\mu} \longrightarrow x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$
con $\xi^{\mu}(x)$ funzione di $x$ e proporzionale a $i\bar{\epsilon}_1(x)\gamma^{\mu}\epsilon_2(x)$.
Per mantenere un'invarianza di supersimmetria locale occorre richiedere che le equazioni siano general covarianti e quindi che vengano formulate nel contesto di uno spazio curvo includendo l'interazione gravitazionale. Si arriva aquesto punto a modelli localmente supersimmetrici, anche detti modelli di supergravità.

Se ad ogni parametro spinoriale $\epsilon$ della trasformazione infinitesima $\delta\phi$ associamo un generatore $Q$ anch'esso di tipo spinoriale e di Majorana tale che $\delta\phi = \bar{\epsilon}\psi = (\bar{\epsilon}Q)\phi = (\bar{\epsilon}^A Q_A)\phi$ allora il commutatore di due trasformazioni diventa
$[\delta_2, \delta_1]\phi = (\delta_2\delta_1 - \delta_1\delta_2)\phi = \left(\bar{\epsilon}_2{}^A Q_A \bar{\epsilon}_1{}^B Q_B - \bar{\epsilon}_1{}^B Q_B \bar{\epsilon}_2{}^A Q_A\right)\phi =$
$= \left(\bar{\epsilon}_2{}^A Q_A \bar{Q}_B \epsilon_1{}^B - \bar{Q}_B \epsilon_1{}^B \bar{\epsilon}_2{}^A Q_A\right)\phi = \left(\bar{\epsilon}_2{}^A Q_A \bar{Q}_B \epsilon_1{}^B + \bar{Q}_B \bar{\epsilon}_2{}^A\, \epsilon_1{}^B Q_A\right)\phi =$
$= \left(\bar{\epsilon}_2{}^A Q_A \bar{Q}_B \epsilon_1{}^B + \bar{\epsilon}_2{}^A \bar{Q}_B Q_A \epsilon_1{}^B\right)\phi = \bar{\epsilon}_2{}^A \{Q_A, \bar{Q}_B\} \epsilon_1{}^B$
Confrontando quest'espressione con la precedente otteniamo
$\{Q_A, \bar{Q}_B\} = i\gamma^{\mu}{}_{AB}\partial_{\mu} = \left(\gamma^{\mu}P_{\mu}\right)_{AB}$
Abbiamo scritto esplicitamente gli indici spinoriali A e B delle matrici di Dirac e abbiamo indicato con $P_{\mu} = i\partial_{\mu}$ il generarore delle traslazioni (operatore impulso).
E' possibile così estendere il gruppo di Poincarè aggiungendo ai generatori di traslazione e rotazione $P_{\mu}$ e $J_{\mu\nu}$ il generatore spinoriale $Q_A$ si ottiene così il cosiddetto gruppo di "super-Poincarè" basato sull'insieme dei generatori $\{P_{\mu}, J_{\mu\nu}, Q_A\}$ che soddisfano l'algebra di Lie detta "gradata" o super algebra.