Evoluzione dell'equazione di Klein Gordon in un campo esterno e sviluppo perturbativo di Dyson

$\boxed{\text{Evoluzione dell'equazione di Klein Gordon in un campo esterno.}}$

Di seguito vogliamo scrivere l'equazione di una particella di Klein Gordon che si muove in un campo esterno.

Partiamo dall'equazione della particella libera

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi = 0 \qquad \mu = 1,2,3,4$$

Per scrivere l'equazione nel caso di presenza di un campo esterno A_μ occorre effettuare la sostituzione minimale cioè sostituire

$$\partial_\mu \to \partial_\mu + ieA_\mu; \quad \partial^\mu \to \partial^\mu + ieA^\mu$$

$$\left[(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu) + m^2\right]\phi = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + ie\,\partial_\mu\left[A^\mu \phi\right] + ie\,A_\mu \partial^\mu \phi - e^2 A_\mu A^\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

Trascurando i termini in e^2

$$\underbrace{\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi}_{\text{equazione particella libera}} + \underbrace{ie\left(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu\right)\phi}_{\text{contributo dovuto al campo } A} = 0$$

Se indica con $\tilde{V} = -ie\left(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu\right)$

l'operatore potenziale di interazione le

equazioni di Klein Gordon si scrivono

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = \tilde{V} \phi}$$

L'equazione non omogenea per l'introduzione del

potenziale di interazione può essere risolta solo

tramite successive approssimazioni usando una

teoria perturbativa proposta da Dyson

matematico e amico di Feynman che aiutò il fisica nella formulazione dei suoi famosi diagrammi.

1) Approssimazione al primo ordine

Partendo dall'equazione

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi^{(1)} + m^2 \phi^{(1)} = \tilde{V} \phi^{(1)}$$

dove l'apice (1) indica l'approssimazione del primo ordine.

Sostituisco $\tilde{V}\phi^{(1)}$ con $\tilde{V}\phi^{(0)}$ dove $\phi^{(0)}$ è l'equazione della particella libera

$$\boxed{\partial_\mu \partial^\mu \phi^{(1)} + m^2 \phi^{(1)} = \tilde{V} \phi^{(0)}}$$ è la nuova

equazione da risolvere in prima approssimazione.

Considero $\phi^{(1)} = \tilde{V}\phi^{(0)} + \phi^{(0)}$

$$\partial_\mu \partial^\mu \left(\phi^{(0)} + \tilde{V} \phi^{(0)} \right) + m^2 \left(\phi^{(0)} + V \phi^{(0)} \right) = \tilde{V} \left(\phi^{(0)} + \tilde{V} \phi^{(0)} \right) \qquad (2)$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \left(\tilde{V} \phi^{(0)} \right) + m^2 \left(\tilde{V} \phi^{(0)} \right) = \tilde{V} \phi^{(0)} + \cancel{\tilde{V}^2 \phi^{(0)}}$$

Termine di ordine superiore