Operatori hermitiani

Operatori hermitiani

In meccanica quantistica una osservabile come una componente della quantità di moto, dello spin, il valore dell'energia, una componente del momento angolare etc... può essere rappresentato da operatori hermitiani.

Prima di dare la definizione di operatore hermitiano occorre definire un prodotto scalare hermitiano.

Un prodotto scalare hermitiano gode delle seguenti proprietà:

1) $\langle \beta | \alpha \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle^{*}$ dove $(*)$ è il complesso coniugato.

2) è definito positivo
$\langle \alpha, | \alpha \rangle \geq 0$ il segno di uguaglianza vale solo se $\alpha = 0$

Un operatore $\hat{A}$ è detto hermitiano se vale la relazione

$$\langle \beta, \hat{A}\,\alpha \rangle = \langle \alpha, \hat{A}\,\beta \rangle^* \quad \forall \alpha, \beta$$

Se ad esempio $\alpha = f(x)$ e $\beta = g(x)$ è

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx$$

la relazione diventa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)\, \hat{A} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f^*(x)\, \hat{A}\, g(x) \right)^* dx$$

Di seguito dimostriamo per esempio che l'operatore impulso $p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ è hermitiano.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left[f^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} g(x)\right)\right]^* dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} g^*(x)\right) dx$$

integrando per parti il secondo membro

$$= -\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\,g^*(x)\right]\right) dx}_{0} + \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right) dx$$

essendo le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ per motivi fisici nulle all'infinito.

Proprietà operatori hermitiani

Sia $\hat{A}$ un operatore hermitiano una volta definito un prodotto scalare $<,>$.

1) Se $|\alpha_i>$ è un autovettore dell'operatore $\hat{A}$ e a_i il suo autovalore allora:

a_i è reale cioè $a_i = a_i^*$

2) Se $|\alpha_j>$ è un ulteriore autovettore dell'operatore $\hat{A}$ e α_j il suo autovalore allora:

$<\alpha_i, \alpha_j> = \delta_{ij}$

I teoremi 1) e 2) affermano che se l'operatore $\hat{A}$ ha n autovettori $|\alpha_i>$ $i=1 \ldots n$ con n autovalori distinti $a_i \ldots a_n$ allora è possibile costruire una base ortonormale per il Ket $|\alpha>$ fatta degli autovettori di $\hat{A}$.

Il teorema può essere esteso anche nel caso di autovettori degeneri cioè autovettori che hanno lo stesso autovalore.

Dim 1)

Poichè $\hat{A}$ è hermitiano

$$\langle \alpha_i | \hat{A} | \alpha_i \rangle = \langle \alpha_i | \hat{A} | \alpha_i \rangle^* \qquad i = 1 \ldots n$$

$$a_i \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = a_i^* \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle^* = a_i \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$$

$$(a_i - a_i^*) \langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 0$$

Data la definizione di prodotto scalare $\langle , \rangle$ hermitiano definito positivo si ha $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle \geq 0$

$$a_i - a_i^* = 0 \implies a_i = a_i^*$$

Dim 2)

Sia $\hat{A}|\alpha_i\rangle = a_i|\alpha_i\rangle$

$$\hat{A}|\alpha_j\rangle = a_j|\alpha_j\rangle$$

$$\langle\alpha_j|\hat{A}|\alpha_i\rangle = a_i\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle \quad \text{con } i\neq j$$

$$\|$$

$$\langle\alpha_i|\hat{A}|\alpha_j\rangle^* = \left(a_j\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\right)^* = a_j^*\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle^* = a_j\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle$$

(poiché $\hat{A}$ è hermitiano) (per la def. $\langle\,,\,\rangle$)

uguagliando le due espressioni

$$(a_i - a_j)\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle = 0 \quad i\neq j$$

Per normalizzare la base basta sostituire

$$|\alpha_i\rangle \text{ con } \frac{|\alpha_i\rangle}{\sqrt{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}}.$$

Principio di indeterminazione di Heisenberg

Due osservabili definite dai rispettivi operatori A e B commutano tra di loro se vale la relazione

$$[A,B] = AB - BA = \phi .$$

Definito uno stato $|\alpha\rangle$ la grandezza

$\langle A \rangle = \langle \alpha, A\alpha \rangle$ è detto <u>valore di aspettazione</u> dell'osservabile A sullo stato $|\alpha\rangle$.

Può essere considerato come la media dei risultati ottenuti effettuando una serie di misurazioni della grandezza rappresentata dallo operatore A su un sistema fisico preparato, prima della misura, nello stato $|\alpha\rangle$.

Se considero $\Delta A = A - \langle A \rangle$ il valore

$\langle (\Delta A)^2 \rangle$ è detto dispersione di A.

La dispersione di A può essere considerata come la varianza o la deviazione quadratica media dei risultati ottenuti effettuando una serie di misurazioni della grandezza rappresentata dall'operatore A su un sistema fisico preparato, prima della misura, nello stato $|\alpha\rangle$.

Vale la disuguaglianza

$$\langle(\Delta A)^2\rangle \langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle [A,B] \rangle \right|^2$$

Dato uno stato $|\alpha\rangle$ non è possibile calcolare contemporaneamente due osservabili non commutabili tra di loro senza commettere un errore ricavabile dalla formula sopra riportata.

Regole di commutazione di alcune osservabili

Di seguito dimostriamo alcune regole di commutazione tra osservabili fisiche.

$$[x_i, x_j] = 0 \qquad [p_i, p_j] = 0$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\, \delta_{ij}$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} L_k$$

$$[L_i, L^2] = 0$$

<u>Dim</u>

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} \qquad \text{con } \hat{x} = x, \quad \hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

$$-ix\hbar\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x) + i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\left[x\varphi(x)\right] =$$

$$= \cancel{-ix\hbar\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)} + i\hbar\varphi(x) + \cancel{i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)} =$$

$$= i\hbar\varphi(x)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$$

Dim

Ricordiamo le regole di commutazione

$$[AB, CD] = A[B,C]D + AC[B,D] + [A,C]BD + C[A,D]B$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$$

$$\hat{L}_x = \hat{y}\,\hat{p}_z - \hat{z}\,\hat{p}_y \qquad \hat{p}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\hat{L}_y = \hat{z}\,\hat{p}_x - \hat{x}\,\hat{p}_z \qquad \hat{x}_i = x_i$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\,\hat{p}_y - \hat{y}\,\hat{p}_x$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = [\hat{y}\,\hat{p}_z - \hat{z}\,\hat{p}_y,\ \hat{z}\,\hat{p}_x - \hat{x}\,\hat{p}_z] =$$

$$= [\hat{y}\,\hat{p}_z, \hat{z}\,\hat{p}_x] + [\hat{z}\,\hat{p}_y, \hat{x}\,\hat{p}_z] = \hat{y}\,[\hat{p}_z, \hat{z}]\,\hat{p}_x + \hat{x}\,[\hat{z}, \hat{p}_z]\,\hat{p}_y =$$

$$= -i\hbar\,\hat{y}\,\hat{p}_x + i\hbar\,\hat{x}\,\hat{p}_y = i\hbar\,(\hat{x}\,\hat{p}_y - \hat{y}\,\hat{p}_x) = i\hbar\,\hat{L}_z$$

Dim

$$[\hat{L}_i, \hat{L}^2] = 0$$

ricordiamo la regola di commutazione

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_x^2] = [\hat{L}_x, \hat{L}_x \hat{L}_x] = \emptyset$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y^2] = [\hat{L}_x, \hat{L}_y \hat{L}_y] = [\hat{L}_x, \hat{L}_y]\hat{L}_y + \hat{L}_y[\hat{L}_x, \hat{L}_y] =$$

$$= i\hbar \hat{L}_z \hat{L}_y + \hat{L}_y i\hbar \hat{L}_z = i\hbar(\hat{L}_z \hat{L}_y + \hat{L}_y \hat{L}_z)$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_z^2] = -i\hbar(\hat{L}_z \hat{L}_y + \hat{L}_y \hat{L}_z)$$

Da cui si ricava

$$[\hat{L}_x, \hat{L}^2] = 0$$

in generale

$$[\hat{L}_i, \hat{L}^2] = 0 \quad \forall i.$$

Teorema fondamentale sulle osservabili commutanti

Se A e B sono due osservabili commutanti cioè vale la relazione $[A,B]=0$ allora definito un prodotto scalare hermitiano ... se

$|\alpha_1\rangle - |\alpha_n\rangle$ sono autovettori non degeneri per A lo sono anche per B.

Dim

$$\langle\alpha_i|\hat{A}\hat{B}|\alpha_j\rangle = \langle\alpha_i|\hat{B}\hat{A}|\alpha_j\rangle$$

con $\hat{A}|\alpha_i\rangle = a_i|\alpha_i\rangle$

$$a_i^*\langle\alpha_i|\hat{B}|\alpha_j\rangle = \langle\alpha_i|\hat{B}|\alpha_j\rangle a_j$$

$$(a_i^* - a_j)\langle\alpha_i|\hat{B}|\alpha_j\rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle\alpha_i|\hat{B}|\alpha_j\rangle = K_{ij}\,\delta_{ij} \qquad \text{cioè} \qquad \hat{B}|\alpha_j\rangle = K|\alpha_j\rangle$$

cioè $|\alpha_j\rangle$ è un autovettore anche per $\hat{B}$.