Interazione forte

Interazione forte e cromodinamica quantistica ①

La cromodinamica quantistica è la teoria di campo sviluppata per interpretare l'interazione forte agente tra i quark.

I quark oltre a differenziarsi "sapori" (dall'inglese flavour) up, down, charm, strange top, bottom si differenziano anche per un'altra proprietà, il colore, introdotto per assicurare che i quark all'interno di particolari adroni rispettino il principio di esclusione di Pauli.

I quark, fermioni a spin $\frac{1}{2}$, sono dotati di colore, una sorta di carica, che può essere rosso, blu e verde (r, b, g), coerentemente gli antiquark sono dotati di colore anti-rosso, anti blu, anti verde $(\bar{r}, \bar{b}, \bar{g})$.

Una nuova proprietà occorre aggiungere
a seguito delle osservazioni sperimentali:
soltanto particelle neutre, cioè senza colore,
possono esistere come particelle libere
(tre particelle di colore diverso r, b, g
formano una particella neutra incolore).
L'interazione forte è mediata dai gluoni;
particelle di massa nulla e spin 1,
che si accoppiano alla carica di colore
in analogia alla forza elettromagnetica
in cui i fotoni sono particelle elettricamente
cariche.

La simmetria di colore è una simmetria $SU(3)$ e le matrici di Gell-Mann di seguito riportate sono le generatrici.

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_1 \qquad T_5 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_5$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_2 \qquad T_6 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_6$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_3 \qquad T_7 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_7$$

$$T_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_4 \qquad T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\lambda_8$$

$$[\lambda_i, \lambda_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\lambda_k \qquad tr[\lambda_i] = 0$$

$$\varepsilon_{123} = 2;\ \varepsilon_{147} = 1;\ \varepsilon_{156} = -1;\ \varepsilon_{246} = 1;\ \varepsilon_{257} = 1$$

$$\varepsilon_{345} = 1;\ \varepsilon_{367} = -1;\ \varepsilon_{458} = \sqrt{3};\ \varepsilon_{678} = \sqrt{3}$$

Tutti gli elementi le cui terne di indici non sono permutazioni delle terne precedenti sono uguali a ϕ.

Ricordando secondo la teoria di Gauge l'espressione della lagrangiana per i campi:

$$S = \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^{(a)} F^{\mu\nu(a)} d^4 x$$

Dove $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{(a)} T^{(a)} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu =$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig \left[A_\mu, A_\nu \right]$$

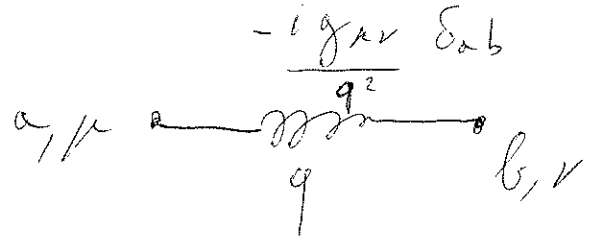
La corrente di transizione vale $J^{\mu(a)} = \bar{\psi} \gamma^\mu T^{(a)} \psi$ e la lagrangiana di interazione particella campo vale

$$S = g J^\mu A_\mu = g A_\nu \bar{\psi} \gamma^\nu T^{(a)} \psi$$

Nel caso in cui si trascurino i termini $ig[A_\mu, A_\nu]$ si ottiene minimizzando la lagrangiana la relazione che lega il campo alla corrente di transizione.

Da cui in analogia alla QED

$A^\mu = J^\mu / q^2$ dove q è il propagatore gluonico.



L'introduzione dei termini quadratici modifica la lagrangiana per cui

$$J^{\mu(a)} A_{\mu(a)} = L_0 - g f^{abc} \partial_\mu A_\nu^{(a)} A^{\mu(b)} A^{\nu(c)} -$$

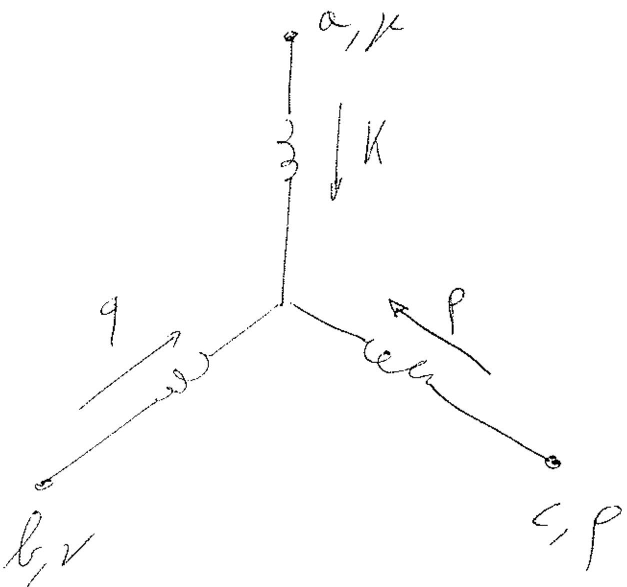
$$- \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A_\mu^{(b)} A_\nu^{(c)} A^{\mu(d)} A^{\nu(e)}$$

Dove f^{abc} sono le costanti del gruppo definite dalle relazioni $[T^{(a)}; T^{(b)}] = i f^{abc} T^{(c)}$ e L_0 sono i termini lineari del campo che definiscono i diagrammi di Feynmann nell'approssimazione sopra riportata.

Dal secondo termine nasce il diagramma di Feynmann a tre gluoni. Si osservi che la derivata $\partial_\mu A_\nu$ genera il termine $K_\mu A_\nu$ dove K_μ è l'impulso.

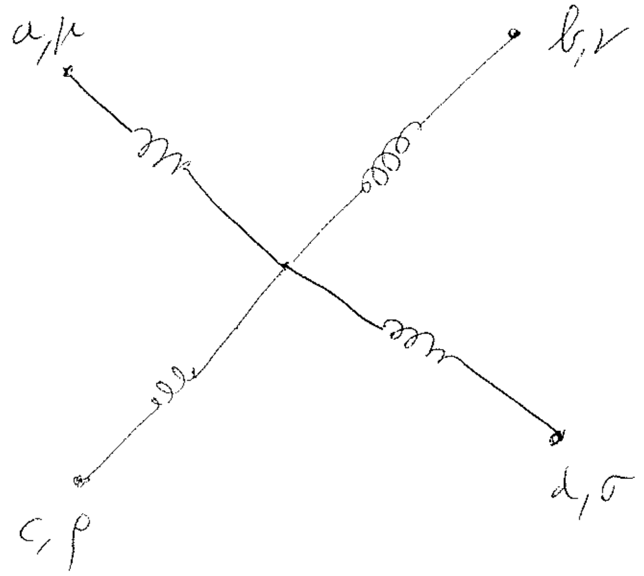
Dal terzo termine nasce il diagramma di Feynman a 4 gluoni.

1) Diagramma di Feynman a 3 gluoni



$$= g f^{abc}\left[g^{\mu\nu}(k-q)^{\rho} + g^{\nu\rho}(q-p)^{\mu} + g^{\rho\mu}(p-k)^{\nu}\right]$$

2) Diagramma di Feynman a 4 gluoni



$$= i g^{2}\left[f^{abe} f^{cde}\left(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}\right) + f^{ace} f^{bde}\left(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}\right) + f^{ade} f^{bce}\left(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}\right)\right]$$

Nella cromodinamica quantistica occorre introdurre anche altri diagrammi di Feynmann generati da campi non reali detti Ghost.

Di seguito si riporta una dimostrazione non rigorosa che vuole giustificare in modo intuitivo la uscita di questi Ghost.

Secondo la teoria sui cammini di Feynmann la probabilità che una particella ad esempio un fotone passi da una posizione iniziale ad una posizione finale vale

$$\langle x_f; y_f; z_f; t_f \; x_i; y_i; z_i; t_i \rangle = \int DA \, e^{iS}$$

all'integrale su tutti i cammini possibili che congiungono la posizione iniziale e quella finale moltiplicato per e^{iS} dove S è l'azione del campo.

Nello scegliere il campo A abbiamo utilizzato la condizione aggiuntiva di divergenza nulla oppure la condizione

$$g^a[A] = \partial^\mu A_\mu^{(a)}(x) + C^{(a)}(x) = 0$$

$C^{(a)}(x) = 0$ è un caso particolare per campi a divergenza nulla.

Tuttavia l'invarianza di Gauge non seleziona tutti i campi per cui è valida la condizione $g^{(a)}[A] = \partial^\mu A_\mu^{(a)}(x) + c^{(a)}(x) = 0$.

Per ottenere questo occorre aggiungere all'integrale sui cammini di Feynman due termini

$$\int DA\, e^{iS} \longrightarrow \int DA\, e^{iS}\, \delta(g[A])\, \Delta_{FP}[A]\, Dg$$

dove $\delta(g(A))$ [illegible] con δ pari alla delta di Dirac annulla i termini per cui non vale la selezione $g[A]$.

$\Delta_{FP}[A]$ è il determinante dell'integrale

FP = Faddeev-Popov sono i fisici che hanno studiato questo problema.

$U = e^{i\phi(x)}$ è la trasformata di gauge

per piccole trasformazioni

1) $U \simeq 1 + i\epsilon^{(a)}\lambda^{(a)} + \dots$

2) $A_\mu^U = U A_\mu U^{-1} + i(\partial_\mu \quad)U^{-1} = A_\mu + \delta A_\mu$

Sostituendo le 2) nelle 1)

$\delta A_\mu = i\epsilon^{(a)}[\lambda^{(a)}, A_\mu] - \partial_\mu \epsilon^{(a)}\lambda^{(a)} + o(\epsilon^2)$

$$\int DA\, Dg\; e^{iS}\, \delta(g[A])\, \Delta_{FP}[A]$$

Cambiando funzione di integrazione $Dg \to DU$

$$\int DA\, DU\; e^{iS}\, \delta(g[A])\, \Delta_{FP}$$

dove $\Delta_{FP} = \dfrac{\partial g}{\partial U} = \dfrac{\partial g^{(a)}}{\partial A_\mu^c} \dfrac{\partial A_\mu^c}{\partial \epsilon^{(b)}}$

$$\langle x_f, x_i \rangle \simeq \int DA\; e^{iS}\, \delta(g[A])\, \Delta_{FP}$$

$$\frac{\partial g^{(a)}}{\partial \epsilon^{(b)}} = \frac{\partial g^{(a)}}{\partial A_\mu^{(c)}} \cdot \frac{\partial A_\mu^{(c)}}{\partial \epsilon^{(b)}}$$

(13) $\delta A_\mu^c = 2i\epsilon^b \, tr\left(\lambda^c[\lambda^b, A_\mu]\right) - 2\partial_\mu \epsilon^b \, tr(\lambda^c \lambda^b) + O(\epsilon^2)$

$= i\epsilon^{(b)} \, tr\left(\lambda^c[\lambda^b, \lambda^d]\right) A_\mu^d - \partial_\mu \epsilon^b \delta_{bc}$

$= -2 f^{bde} \epsilon^b \, tr(\lambda^c \lambda^e) A_\mu^d - \partial_\mu \epsilon^b \delta_{bc}$

$= -f^{bde} \epsilon^b A_\mu^d - \partial_\mu \epsilon^b \delta_{bc}$

$$\frac{\partial A_\mu^c}{\partial \epsilon^b} = -\left[\partial_\mu \delta_{bc} + f^{bcd} A_\mu^d\right]$$

$$g^{(a)} = \partial^\mu A_\mu^{(a)} + c^{(a)}$$

$$\frac{\partial g^{(a)}}{\partial A_\mu^c} = \delta_{ac} \partial^\mu$$

$$\Delta_{FP} = \frac{\partial g^{(a)}}{\partial A_\mu^c} \frac{\partial A_\mu^c}{\partial \epsilon^b}$$

$$D_\mu^{ab}[A] = \delta_{ab}\partial_\mu - f^{abc} A_\mu^c$$

$$\Delta_{FP} = \mathrm{Det}\left(\partial^\mu D_\mu^{ab}[A]\right)$$

Si dimostra che

$$\mathrm{Det}[H] = \int D\eta \, D\bar{\eta} \, e^{i\int dx\, \bar{\eta} H \eta}$$

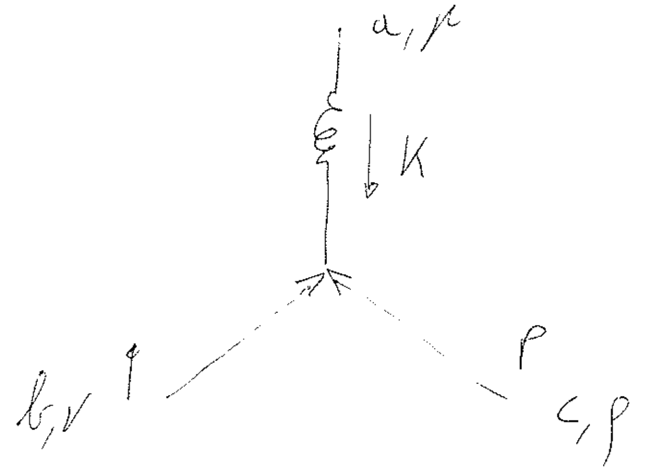
da cui

$$\mathrm{Det}\left(\partial^\mu D_\mu^{ab}[A]\right) = \int D\eta_a \, D\bar{\eta}_e \, e^{i\int dx\, \bar{\eta}_a \left(\partial^\mu D_\mu^{ab}\right)\eta_b}$$

Alla lagrangiana del campo si aggiunge un termine $-\bar{\eta}^{(a)} \partial^\mu D_\mu^{ab} \eta^{(b)}$

dove $D_\mu^{ab} = \delta_{ab} \partial_\mu - f^{abc} A_\mu^c$

Questo termine aggiuntivo è dato da un campo η fittizio detto Ghost di Faddeev-Popov.



$$g f^{abc} p_\mu$$

$K + q + p = 0$