Invarianza di Gauge

Invarianza di Gauge

Le teorie di gauge sono una classe di teorie fisiche di campo basate sull'idea che esistono alcune trasformazioni che lasciano invariata la lagrangiana del sistema (simmetrie).

La più semplice teoria di Gauge è l'elettromagnetismo.

Consideriamo la lagrangiana

$$S = \int \bar{\psi} \, (i\hat{\partial}_\mu - m) \, \psi \, d^4 x$$

La lagrangiana resta naturalmente invariata se si cambia la fase di ψ ossia se si effettua la sostituzione $\psi \to \psi \exp(-i\theta)$ dove θ è una costante.

Tale trasformazione è una trasformazione globale e le simmetrie ad esse associate

una simmetria globale.

Supponiamo ora di sostituire

$$\psi \to \exp(-ig\theta(\vec{x}))\,\psi = U\psi$$

dove $\theta(\vec{x})$ è una funzione dello spazio e del tempo invece di una costante come prima e g è una costante di accoppiamento.

Se la lagrangiana è invariante per una sostituzione di questo tipo si dice che la lagrangiana è invariante per simmetria locale.

Se vogliamo che la lagrangiana sia invariante (3)
per simmetria locale dobbiamo sostituire le
derivate ∂_μ con una derivata covariante
D_μ tale per cui vale la relazione

$D_\mu (U \phi) = U D_\mu \phi$.

Se si definisce $D_\mu = \partial_\mu - (\partial_\mu U) U^{-1}$

Ma essendo $U = \exp(-ig\,\theta(\vec{x}))$

$\partial_\mu U = -ig\,\theta(\vec{x})_{,\mu} \exp(-ig\,\theta(\vec{x}))$

$D_\mu = \partial_\mu - ig\,\theta(\vec{x})_{,\mu}$

Se si vuole passare dalla lagrangiana libera
alla lagrangiana in un campo $A_\mu(\vec{x})$ basta
effettuare la sostituzione minimale

$\partial_\mu \to \partial_\mu - ig A_\mu(x)$

La derivata covariante diventa

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\,\theta(\vec{x})_{,\mu} - ig\,A_\mu(\vec{x}) = \partial_\mu - ig\,A_\mu(\vec{x})$$

La lagrangiana in presenza di campi resta invariata per sostituzioni

$$\phi \to \exp(ig\,\theta(\vec{x}))\,\phi = U\phi$$

$$A_\mu(\vec{x}) \to A_\mu(\vec{x}) + \theta(\vec{x})_{,\mu}$$

Il potenziale elettromagnetico $A_\mu(\vec{x})$ possiede un'arbitrarietà che consiste nella possibilità di ridefinirlo aggiungendo il gradiente di una generica funzione $\theta(\vec{x})$ senza per questo modificare la lagrangiana e quindi l'equazione del moto.

L'invarianza di Gauge viene generalizzata per definire l'interazione forte e l'interazione debole.

Nel caso di interazione debole è richiesta una simmetria $SU(2)$ generata dalle matrici di Pauli σ^i.

$$T^1 = \frac{1}{2}\sigma^1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = \frac{1}{2}\sigma^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^3 = \frac{1}{2}\sigma^3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma_k$$

$$tr(\sigma_i) = 0$$

$$\sigma_i^2 = 1$$

Nel caso di simmetria $SU(2)$ il vettore ψ è composto dai doppietti fermionici

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}$$

oppure dalle famiglie di quark

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

u = (up) d = (down) c = (charm)

s = (strange) t = (top) b = (bottom)

Nel caso di interazione forte è richiesta una simmetria $SU(3)$ generata dalle matrici di Gell-Mann.

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_1 \qquad T_5 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_5$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_2 \qquad T_6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_6$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_3 \qquad T_7 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_7$$

$$T_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\lambda_4 \qquad T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8$$

$$[\lambda_i, \lambda_j] = i\,\varepsilon_{ijk}\,\lambda_k \qquad \mathrm{tr}(\lambda_i) = 0$$

$\varepsilon_{123} = 2$; $\varepsilon_{147} = 1$; $\varepsilon_{156} = -1$; $\varepsilon_{246} = 1$; $\varepsilon_{257} = 1$

$\varepsilon_{345} = 1$; $\varepsilon_{367} = -1$; $\varepsilon_{458} = \sqrt{3}$; $\varepsilon_{678} = \sqrt{3}$

Tutti gli elementi le cui terne di indici non sono permutazioni delle terne precedenti sono uguali a 0.

Nel caso di simmetria $SU(3)$ il vettore ψ

è composto dalle 3 cariche di colore r, b, g

(red, blue, green) che caratterizzano i quark.

I gluoni, particelle di massa nulla e spin 1,

scambiano le cariche di colore tra i quark

come i fotoni scambiano la carica elettrica

tra i fermioni.

I quark possono esistere solo come particelle

neutre cioè composte dai tre colori (r, b, g)

e gli antiquark da $(\bar{r}, \bar{b}, \bar{g})$ antired, antiblue e

antigreen.

Ritornando alla lagrangiana

$$S = \int \bar{\Psi} \left(i \hat{D} - m \right) \psi \, d^4 x$$

$$S = \int \bar{\Psi} \left(i \hat{\partial} - m \right) \psi \, d^4 x + \int g \, A_\mu^{(e)}(\vec{x}) \, J^{\mu\,(e)}_{(\vec{x})} \, d^4 x$$

dove $J^{\mu\,(e)}_{(\vec{x})} = \bar{\Psi} \gamma^\mu T^{(e)} \psi$

$e = 1 - 3 \quad (SU(2))$

$e = 1 - 8 \quad (SU(3))$

$\mu = 0 - 3$

Definita la lagrangiana d'interazione resta da definire l'ultimo termine della lagrangiana, quello relativo ai campi.

A tale proposito bisogna generalizzare il tensore elettromagnetico $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ sostituendo alla derivata la derivata covariante.

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig\left[A_\mu, A_\nu\right]$$

dove $A_\nu = A_\nu^{(a)} T^{(a)} = \vec{A}_\nu \vec{T}$

Possiamo anche scrivere

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^{(a)} T^{(a)} = \vec{F}_{\mu\nu} \vec{T}$$

$$\vec{T} = \left(T^1, T^2 \dots T^n\right)$$

$\mu, \nu = 1-3$
$n = 3$ per $SU(2)$
$n = 8$ per $SU(3)$

il termine $ig\left[A_\mu, A_\nu\right] = ig A_\mu^{(i)} T^{(i)} A_\nu^{(j)} T^{(j)} -$

$$- ig A_\nu^{(j)} T^{(j)} A_\mu^{(j)} T^{(i)} = g \vec{A}_\mu \wedge \vec{A}_\nu T^{(a)}$$

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu + \partial_\nu \vec{A}_\mu + g \vec{A}_\mu \wedge \vec{A}_\nu$$

A questo punto è possibile definire un'azione invariante di Gauge che sfrutti le proprietà dell'operatore Traccia e che possa essere generalizzata con il campo elettromagnetico

$$S = \frac{1}{2}\int tr\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)d^4x =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(F_{\mu\nu}^{(i)}F^{\mu\nu(j)}\right) tr\left(T^{(i)}T^{(j)}\right)d^4x$$

$$\begin{cases} tr\left(T^{(i)}T^{(j)}\right) = K\, tr\left(T^{(k)}\right) = 0 \text{ per } i \neq j \\ tr\left(T^{(i)}T^{(i)}\right) = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{4}\int \vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu}d^4x.$$

La presenza dei nuovi termini $ig[A_\mu, A_\nu]$ nell'espressione di $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$ è di fondamentale importanza fisica.

Nel caso del campo elettromagnetico

A_μ e A_ν sono scalari e $[A_\mu, A_\nu] = 0$.

Per simmetrie $SU(2)$ e $SU(3)$

$$ig[A_\mu, A_\nu] = ig[A_\mu^{(i)}T^{(i)}, A_\nu^{(j)}T^{(j)}] \neq 0$$

per la non commutatività delle matrici $T^{(i)}$.

È proprio questo termine responsabile della libertà asintotica osservata tra i quark costituenti del protone e del neutrone.

Tale proprietà fa sì che la forza attrattiva tra i quark cresca con la distanza e sia praticamente trascurabile a piccole distanze.

Non è possibile osservare quark liberi perché per allontanare le cariche occorre fornire energia (crescente con la distanza) e quando quest'energia è maggiore di $2m$ dove m è la massa a riposo del quark si formano delle coppie di quark-antiquark che si combinano in mesoni e barioni.
Tale proprietà è detta confinamento.

Infine riportiamo le trasformazione

dei campi a seguito della trasformazione

$$\phi \to U\phi$$

$$A_\nu \to U A_\nu U^\dagger - \frac{i}{g} U \partial_\nu U^\dagger$$

$$F_{\mu\nu} \to U F_{\mu\nu} U^\dagger$$