

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Effetti di diffrazione ottica in gocce generate in una
piattaforma opto-microfluidica in niobato di litio

Relatore

Prof.ssa Cinzia Sada

Correlatore

Dr. Leonardo Zanini

Laureando

Giuseppe Simionato

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione	1
1 Il Niobato di Litio e la piattaforma opto-microfluidica	3
1.1 Piattaforma opto-microfluidica in $LiNbO_3$	4
2 Studio del fenomeno della diffrazione	5
2.1 Diffrazione da fenditura ad ampiezza costante	5
2.2 Formulazione di un modello per descrivere la goccia nel canale	6
3 Segnale e parametri	9
3.1 Intensità e lunghezza d'onda	9
3.2 Intensità e posizione della goccia	11
3.2.1 Posizione guida-goccia	12
3.3 Intensità e larghezza del canale	13
3.4 Intensità e lunghezze d'onda telecom	14
4 Studio delle approssimazioni	15
4.1 Trascurare la curvatura	15
4.1.1 Guida in input	16
4.1.2 Guida in output	17
4.2 Approssimazione piccoli angoli	17
4.3 Approssimazione onda piana uniforme	18
Conclusioni	19

Introduzione

Per opto-microfluidica si intende la manipolazione e l'analisi di fluidi su scala dell'ordine dei micron nei quali vengono integrate componenti ottiche in un'unica configurazione molto compatta. Di fatto gli stadi ottici integrati si basano sulla capacità di modificare le proprietà ottiche del mezzo in modo molto veloce e questo può essere utilizzato per esempio per la realizzazione di guide d'onda riconfigurabili. Integrando guide di luce con canali microfluidici è possibile analizzare la risposta ottica quale la trasmittanza in liquidi con diverso indice di rifrazione. Lo sviluppo di dispositivi optofluidici ha dato un grande contributo nelle performance della tecnologia dei così detti lab-on-a-chip (LOC), grazie alla realizzazione di piattaforme integrate con applicazione in svariati campi, come per esempio la chimica e la biologia.

Il lavoro di questa tesi si inserisce in un progetto di ricerca focalizzato sulla realizzazione di una piattaforma opto-microfluidica integrata su un unico substrato e che coniughi le prestazioni dell'ottica integrata con le performance proprie della microfluidica. La piattaforma opto-microfluidica è costituita da un substrato di niobato di litio in cui sono state realizzate delle guide di luce rettilinee integrate. Si tratta di regioni del materiale che sono state localmente modificate in composizione al fine di innalzare l'indice di rifrazione rispetto l'ambiente circostante. Tale condizione, se opportunamente realizzata attraverso un adeguato contrasto di indice di rifrazione, permette il confinamento della luce per riflessione totale interna similmente a quanto si osserva nelle famose fibre ottiche. Le guide di luce così realizzate sono state integrate con il circuito microfluidico, ottenuto scavando dei canali della dimensione di 100 micrometri di spessore e 200 micrometri larghezza.

La configurazione scelta mira a realizzare un canale che interrompa la guida di luce in modo che essa venga ad esser costituita da due parti auto-allineate rispetto all'asse e con le stesse caratteristiche fisiche dato che le due parti sono ricavate dalla stessa guida. Ad una estremità la luce si propaga confinata nella parte di guida sino a raggiungere l'interruzione in corrispondenza al canale microfluidico. Tale porzione di guida si comporta come sorgente di luce illuminante il canale microfluidico e quindi di seguito è chiamata guida di input. La luce che illumina il canale stesso interagisce col mezzo ivi contenuto: la parte trasmessa è raccolta dall'estremità opposta della parte di guida che si trova a partire dall'altra parete del canale, che si comporta quindi come collettore e perciò di seguito indicata come guida di output.

Lo studio di come la luce interagisce con il fluido contenuto nel canale micro-fluidico è di fondamentale importanza dato che l'analisi della trasmissione ottica attraverso il fluido contiene informazioni sulla sua natura e sui parametri geometrici di costruzione del canale stesso. In particolare quando si genera nel canale micro-fluidico una fase dispersa come delle gocce (droplets-based microfluidics) in una fase continua, l'interazione della luce trasmessa dipende anche dalla forma della stessa fase dispersa. Per natura, la luce che si propaga nella guida di luce è confinata per riflessione totale interna e quindi giunge al canale micro-fluidico con una certa distribuzione spaziale di intensità regolata dalle condizioni al contorno della geometria della guida stessa. In caso di guide monomodali come quelle usate nel presente lavoro di tesi la distribuzione spaziale dell'intensità è gaussiana e subisce gli effetti rifrattivi nel passare l'interfaccia determinata dalla parete del canale micro-fluidico. L'indice di rifrazione del materiale e della guida di luce sono prossimi a 2.2 - 2.3 a seconda della direzione di propagazione giacché il materiale è birifrangente ma decisamente superiore all'aria (canale vuoto) o al canale riempito da fluido (i.e. acqua che ha indice di rifrazione dell'ordine di 1.3).

A seguito di tale cambio di matrice, il fascio luminoso per effetti rifrattivi si allarga spazialmente con

modalità che dipendono dalla geometria del canale. Come mostrato in Fig.1(a) se il canale è costruito in modo simmetrico (schema di destra) il fascio luminoso all'uscita dalla guida si apre in modo spazialmente omogeneo. Se invece la guida di luce è posizionata sulla superficie del canale ecco che il fascio luminoso in uscita da esso sperimenta condizioni al contorno diverse a seconda che si proietti verso la copertura del canale (che può essere in niobato di litio o in PDMS materiale polimerico) piuttosto che in basso all'interno del canale dove vi sono le fasi continue e dispersa che transitano. Ad oggi non ci sono studi teorici che analizzino l'interazione luce goccia al variare della geometria come qui esposta.

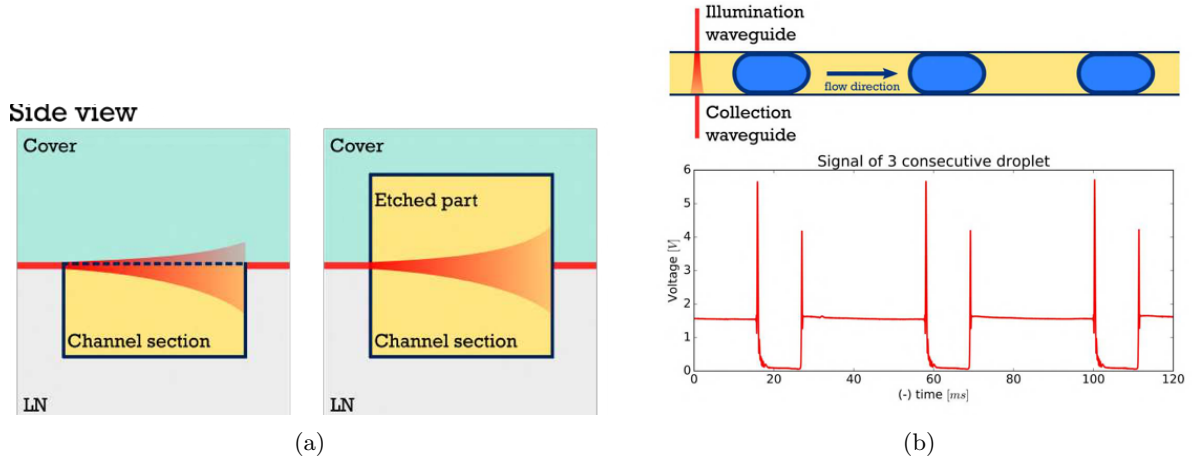


Figura 1

Di fatto si osserva che a seconda della forma della goccia e da come essa si presenta di fronte alla guida la luce trasmessa attraverso di essa cambia in modo drastico ma riproducibile. In Fig.1(b) si mostra la visione dall'alto del canale con delle gocce disperse che transitano ad intercettare la guida di luce (colore rosso). Al passaggio della goccia di fronte alla guida di luce si osserva una modifica dell'intensità della luce trasmessa, qui espresso in funzione di una grandezza correlata che produce un segnale con unità di misura di una tensione (voltage) in funzione del tempo si transito delle gocce nel canale. Il segnale è estremamente riproducibile: gocce della stessa dimensione forniscono lo stesso segnale.

L'analisi del profilo di intensità trasmessa attraverso il canale mostra inoltre interessanti fingerprint legati non solo alla composizione della goccia ma alla sua forma: si osservano in particolare dei picchi secondari che dipendono in modo non banale ma inequivocabile dall'elemento costitutivo della goccia rendendo quindi la piattaforma opto-microfluidica estremamente sensibile a questa caratteristica. Tale evidenza sperimentale la qualifica quindi come sensore non solo di indice di rifrazione ma anche di altre caratteristiche del mezzo che hanno grande interesse in ambito biologico dove le gocce possono esser sostituite da cellule piuttosto che altri elementi agglomerati organici.

Il presente lavoro di tesi mira a investigare gli effetti indotti dall'interazione della luce in uscita dalla guida di luce che si affaccia al canale micro-fluidico in modo da discernere cosa contribuisce alla formazione del segnale di trasmissione ottica e individuare ciò che è dipendente dalla natura della goccia da ciò che è derivante da effetti rifrattivi e diffrattivi. La guida di luce ha infatti una sezione dell'ordine di $2 \times 3 \mu m^2$ e nel caso in esame essa è disposta superficialmente e si possono promuovere effetti diffrattivi non ancora studiati.

Capitolo 1

Il Niobato di Litio e la piattaforma opto-microfluidica

Fin dalla sua scoperta il Niobato di Litio ($LiNbO_3$) è stato uno dei materiali più utilizzati come substrato per diversi dispositivi, questo grazie alla sua ampia varietà di proprietà ottiche che consentono di realizzare ad esempio modulatori ottici nel telecom e recentemente anche per dispositivi opto-microfluidici.

In tutto ciò il Niobato di Litio, un cristallo ferroelettrico artificiale, rappresenta un interessante substrato per nuovi sviluppi grazie alle sue diverse proprietà. Il materiale presenta una configurazione compatta esagonale leggermente distorta dove piani di ossigeno sono intervallati da una sequenza di Li, Nb e vacanze: a $T < T_c$ tale disposizione crea un momento di dipolo permanente (fig.1.1). Il litio e il niobio nella struttura cristallina tuttavia cambiano la loro posizione rispetto agli atomi di ossigeno se la temperatura è superiore o inferiore a quella di Curie ($T_c \approx 1140^\circ C$), facendo passare il materiale da ferroelettrico a paraelettrico. Le principali proprietà sono:

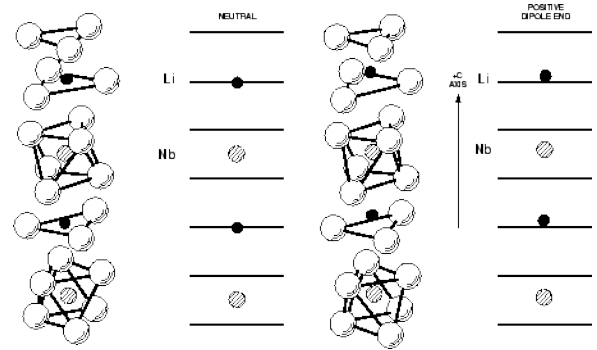


Figura 1.1: Struttura di $LiNbO_3$

- **Trasparenza:** il materiale puro è trasparente nella zona dello spettro tra $0.35 \mu m$ e $5 \mu m$;
- **Effetto elettro-ottico:** gli indici di rifrazione del materiale possono essere modificati applicando un campo elettrico;
- **Effetto piroelettrico:** la struttura di $LiNbO_3$ è sensibile alla temperatura dal momento che le posizioni di Li e Nb variano con essa: la polarizzazione spontanea del materiale cambia quindi con T;
- **Effetto piezoelettrico:** la polarizzazione spontanea può variare applicando una sollecitazione meccanica al materiale;
- **Effetto fotovoltaico:** ad opportuna lunghezza d'onda produzione di corrente generata dagli elettroni eccitati nel materiale tramite l'assorbimento di radiazione ha una direzione preferenziale a causa della struttura non simmetrica rispetto al centro;
- **Effetto fotorefrattivo:** se il materiale è illuminato da un segnale luminoso non uniforme con un'opportuna lunghezza d'onda, i portatori di carica sono indotti a muoversi dalla regione illuminata a quella buia e possono essere catturati dagli accettori. Questo fatto porta ad una distribuzione di carica non uniforme che genera un campo elettrico, detto campo di carica spaziale che modula di conseguenza l'indice di rifrazione (effetto elettro-ottico).

1.1 Piattaforma opto-microfluidica in $LiNbO_3$

In questo lavoro verrà considerato il dispositivo realizzato con il canale microfluidico in $LiNbO_3$, capace di aprire grandi sviluppi nel campo dei LOC grazie alle proprietà appena presentate. Si può osservare in fig.1.2 un'immagine del dispositivo realizzato dal gruppo LN-optomicrofluidico del Dipartimento di Fisica e Astronomia dell'Università di Padova. La peculiare struttura microfluidica permette la formazione di piccoli volumi (cioè le gocce nel range pL-nL) del fluido definito in fase dispersa e circondato da quello detto in fase continua. Ogni singola goccia rappresenta un ambiente isolato che può essere facilmente monitorato e studiato, rendendola il perfetto vettore per campioni biologici o reattori chimici, migliorando il rendimento delle diverse analisi. Le gocce inoltre sono una delle migliori soluzioni per la miscelazione infatti muovendosi nel canale favoriscono il mescolarsi del fluido all'interno.

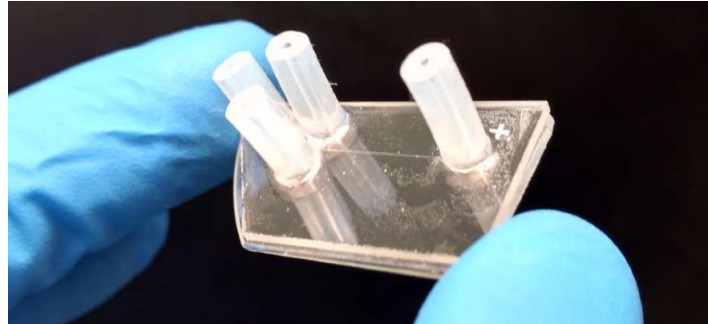


Figura 1.2: Chip realizzato nel DFA a Padova

Il dispositivo contiene una guida di luce accoppiata al canale microfluidico e realizzata in questo caso con la tecnica detta *Ti-indiffusion*: questa tecnica consiste nella variazione dell'indice di rifrazione mediante il drogaggio locale attraverso la diffusione di ioni di titanio nel materiale. La *Ti-indiffusion* è il procedimento più studiato e diffuso nell'applicazione dell'ottica integrata grazie alla sua flessibilità e relativa semplicità, riuscendo a creare delle buone guide di luce. Di fatto gli indici di rifrazione riescono ad essere modificati dalla diffusione degli ioni Ti rendendo possibile la propagazione guidata di entrambi i modi dell'onda elettromagnetica, TE e TM.

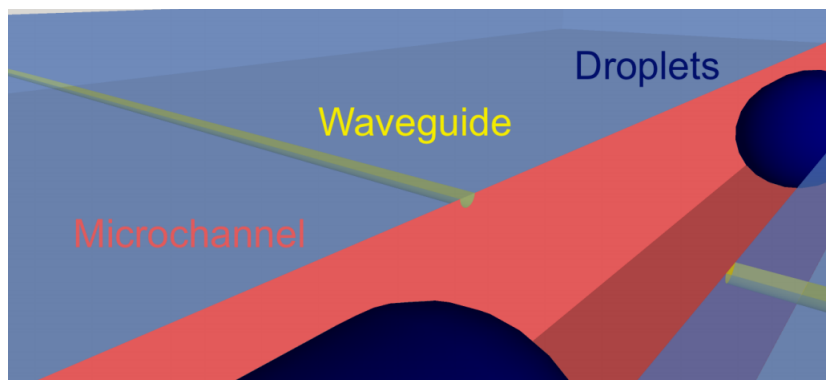


Figura 1.3: Schema del dispositivo

L'accoppiamento tra la guida e il canale vede quest'ultima dividere in due unità la prima: un'unità funge da ingresso mentre l'altra da uscita. Questa configurazione è interessante perché il segnale che viene raccolto in uscita contiene diverse informazioni sulle proprietà del materiale all'interno del canale e sarà proprio su questo punto che si concentrerà l'attenzione nei successivi capitoli. Nel presente lavoro di tesi ci si occupa di studiare gli effetti di interazione tra la luce e le gocce nel canale microfluidico nella geometria illustrata in figura 1.3.

Capitolo 2

Studio del fenomeno della diffrazione

2.1 Diffrazione da fenditura ad ampiezza costante

In questo primo capitolo verrà studiata la connessione tra la geometria della goccia e il segnale raccolto in trasmittanza dalla guida di output, indirizzando la spiegazione del fenomeno verso la diffrazione ad ostacolo; il tutto verrà fatto formulando un primo modello matematico capace di interpretare la geometria di rivelazione e di spiegarne i diversi effetti osservati.

In fisica la diffrazione è un fenomeno che ha luogo quando un'onda incontra una fenditura con apertura paragonabile alla sua lunghezza d'onda. Le principali grandezze da considerare nello studio di tale fenomeno sono: l'ampiezza della fenditura D , la lunghezza d'onda λ , la distanza dello schermo di osservazione L e l'angolo di osservazione θ rispetto all'asse ortogonale alla fenditura.

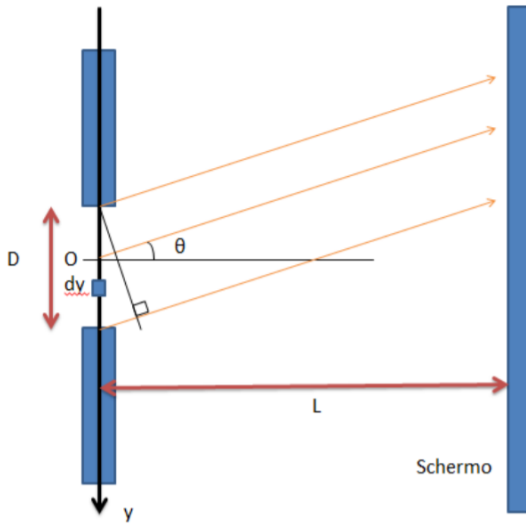


Figura 2.1: Diffrazione da fenditura [Zanini-2020]

per cui la curvatura del fronte d'onda è trascurabile è possibile approssimare le onde emesse dai diversi punti della fenditura come onde piane. Questa approssimazione in realtà è valida solo sotto le condizioni di Fraunhofer, vale a dire se la distanza dello schermo è molto maggiore dell'ampiezza della fenditura (numero di Fresnel $N_F = \frac{D^2}{L\lambda} \ll 1$).

Il campo prodotto da dy avrà dunque l'ampiezza proporzionale a $A \cdot dy$ (con A costante che rappresenta l'ampiezza dell'onda incidente) e ritardo di fase pari a $k y \sin \theta$ (vedi Fig. 2.1):

$$dE = e^{i(\omega t - k y \sin \theta)} \cdot A dy \quad (2.1)$$

Integrando il campo elettrico su tutta la fenditura per determinare E in θ si ottiene:

$$\begin{aligned}
 E(\theta) &= \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} dE = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} e^{i(\omega t - k y \sin \theta)} A dy = A e^{i\omega t} \left[\left(-\frac{1}{ik \sin \theta} \right) e^{-ik y \sin \theta} \right]_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} = \\
 &= A e^{i\omega t} \left[\left(-\frac{1}{ik \sin \theta} \right) e^{-ik \frac{D}{2} \sin \theta} + \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) e^{ik \frac{D}{2} \sin \theta} \right] = \\
 &= A e^{i\omega t} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) \left[e^{ik \frac{D}{2} \sin \theta} - e^{-ik \frac{D}{2} \sin \theta} \right] = \\
 &= A e^{i\omega t} \left(\frac{1}{ik \sin \theta} \right) \left[2i \cdot \sin \left(\frac{kD}{2} \sin \theta \right) \right] = \\
 &= A e^{i\omega t} \left(\frac{D}{D i \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta} \right) \left[2i \cdot \sin \left(\frac{2\pi D}{\lambda} \sin \theta \right) \right] = \\
 &= A D e^{i\omega t} \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta \right)}{\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta} \right] \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

Può essere adesso stimata l'intensità ad un angolo θ come proporzionale al modulo quadro del campo mediato su un periodo di tempo T :

$$I(\theta) \propto \langle |E(\theta)|^2 \rangle_T = \frac{1}{2} D^2 A^2 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta \right)}{\frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta} \right]^2 = \frac{D^2 A^2}{2} \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi D}{\lambda} \frac{y}{L} \right)}{\frac{\pi D}{\lambda} \frac{y}{L}} \right]^2 \tag{2.3}$$

2.2 Formulazione di un modello per descrivere la goccia nel canale

È necessario ora applicare tale effetto nello studio del caso specifico della goccia: prima di tutto si vede che quest'ultima attraversando il canale incontra la guida di luce in ingresso considerata come sorgente e in uscita il detector (o in altre parole lo schermo descritto in precedenza). Si può pensare allo spazio tra la goccia e il coperchio come a una fenditura variabile nel tempo dipendente dalla curvatura della goccia, mentre si trascurano il profilo trasverso e la luce trasmetta nella goccia considerando quest'ultima come un corpo opaco (assunzione valida per un primo modello [Zanini-2020]). In questi termini è quindi opportuno descrivere matematicamente l'ingresso della goccia nel cono di luce generato dalla guida interrotta con un fenomeno di diffrazione ad ostacolo: quando la goccia entra nel cono di luce i raggi che escono dalla guida vengono deviati andando a formare uno schema diffrattivo.

È importante anche stabilire un opportuno sistema di riferimento per agevolare lo studio del fenomeno, in questo caso mostrato in figura 2.2: un asse (x) è orientato parallelamente alla direzione del moto della goccia nel canale microfluidico ed è solidale ad essa. Per la direzione ortogonale al canale si sono considerati due assi orientati allo stesso modo ma con origine in punti differenti, uno chiamato y con origine in $D(x)$ e un altro ξ solidale al coperchio. La dipendenza dell'ampiezza della fenditura da x , chiamata $D(x)$, fa sì che quest'ultima dipenda dalla posizione della goccia e grazie alla scelta del sistema di riferimento è possibile considerare x come una coordinata temporale, permettendo di vedere il moto della goccia nel tempo e quindi della fenditura stessa. Si considera qui una geometria compatibile con quella realizzata sperimentalmente (fig.2.2).

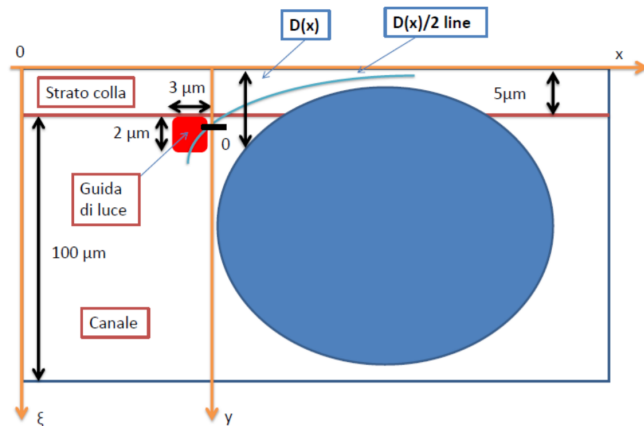


Figura 2.2: Goccia nel canale [Zanini-2020]

Analizzando la situazione dal punto di vista matematico si ha che la luce in uscita dalla guida, centrata in $\xi_0 = 6 \mu m$ e ampia lungo tale asse $\Delta\xi = 2 \mu m$, presenta un carattere gaussiano traducibile in un fattore per il campo elettrico pari a: $e^{-\frac{1}{2}(\frac{y-y_0}{\sigma})^2}$ con $y_0 = \xi_0 - \frac{D(x)}{2}$ picco centrato nel centro di emissione della guida e σ larghezza del fascio in uscita.

L'approccio utilizzato è lo stesso fatto in precedenza, però poiché si è di fronte a un fenomeno fisico più complesso è necessario fare alcune approssimazioni per la sua risoluzione. Le principali approssimazioni sono:

- 1) si trascura la curvatura del fronte d'onda (sotto le condizioni di Fraunhofer già esposte) che viene considerato costante
- 2) utilizzando l'ipotesi di piccoli angoli si approssima il seno con la tangente, in questo caso corrisponde al rapporto tra la distanza dal centro di emissione (y) e la distanza dal centro della fenditura alla guida in out ($W/2$ con $W = 200 \mu m$):

$$\text{sen}\theta \approx \frac{y}{L} = \frac{\xi - \frac{D(x)}{2}}{W/2} \quad (2.4)$$

L'integrazione è simile al caso con D costante e risulta:

$$dE = Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-y_0}{\sigma}\right)^2} e^{i(\omega t - k y \text{sen}\theta)} dy \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} E(x, y) &= \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(6 \mu m) + \frac{D(x)}{2}}{\sigma}\right)^2} e^{i(\omega t - k y \text{sen}\theta)} dy = \\ &= \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} Ae^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(6 \mu m) + \frac{D(x)}{2}}{\sigma}\right)^2} e^{i\left(\omega t - k y \left(\frac{(6 \mu m) - \frac{D(x)}{2}}{W/2}\right)\right)} dy \end{aligned} \quad (2.6)$$

Il problema dal punto di vista della fisica è descritto da questo integrale, la difficoltà di risoluzione tuttavia rende necessaria un'ulteriore approssimazione:

- 3) si trascura il termine gaussiano considerando di avere un'Onda Piana Monocromatica che incide sulla goccia, in altre parole si considera A costante e si va a correggere a posteriori con un fattore A(x), ottenendo:

$$E(x) = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} Ae^{i\left(\omega t - k y \left(\frac{(6 \mu m) - \frac{D(x)}{2}}{W/2}\right)\right)} dy = D(x) Ae^{i\omega t} \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi D(x)}{\lambda} \left(\frac{(6 \mu m) - \frac{D(x)}{2}}{W/2}\right)\right)}{\frac{\pi D(x)}{\lambda} \left(\frac{(6 \mu m) - \frac{D(x)}{2}}{W/2}\right)} \right] \quad (2.7)$$

$$I(x)_{A=\text{cost}} \propto <|E(\theta)|^2>_T = \frac{1}{2} D(x)^2 A^2 \left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi D(x)}{\lambda} \left(\frac{(6 \mu m) - \frac{D(x)}{2}}{W/2}\right)\right)}{\frac{\pi D(x)}{\lambda} \left(\frac{(6 \mu m) - \frac{D(x)}{2}}{W/2}\right)} \right]^2 \quad (2.8)$$

Il valore di A è stato qui considerato costante al fine di risolvere l'integrale agevolmente, tale approssimazione ha comportato l'eliminazione della guida in ingresso con la goccia investita da luce piana, uniforme e omogenea lungo il piano longitudinale. Avendo poi ancorato la rivelazione al valore di $\xi = 6 \mu m$, imposto dall'angolo di rivelazione fissato in precedenza, si prevedono i seguenti andamenti dell'intensità al variare di D(x):

- **D(x) divergente:** l'intensità rilevabile si appiattisce uniformemente lungo la fenditura, andamento non coerente con la situazione fisica perché per D(x) grandi porta a cali di I(x) non reali, dove invece le due guide dovrebbero incontrarsi direttamente. Fuori dalla goccia I(x) deve essere costante, mentre per D(x) piccoli passa poca luce poiché la goccia (supposta opaca) copre la guida.

- **D(x) intermedio:** si ipotizza che in questa regione sia accettabile l'assunzione di avere un'onda piana. Osservando che lo strato di colla e la guida di luce formano insieme $7 \mu m$ e che lo spot della luce in uscita sia intorno ai $10 \mu m$, si può assumere che la goccia crei diffrazione quando $D(x) < 17 \mu m$ (vedi figura 2.3).

A partire dalla formula appena ricavata per $I(x)$ si nota che il denominatore si annulla per $(6 \mu m) - \frac{D(x)}{2} = 0$ (con $D(x)$ continua) portando a una forte crescita di $I(x)$ per $D \approx 12 \mu m$ e a una prevalenza degli effetti diffrattivi per $5 \mu m < D(x) < 20 \mu m$. Questo va a confermare l'affermazione fatta in precedenza della presenza della diffrazione per valori di $D(x)$ inferiori ad una certa soglia. Si osserva anche che tale soglia è fissata dalla geometria del sistema e dal tipo di fenomeno, non dalla scelta del valore di A che non contiene la fisica del sistema ma ha solo lo scopo di modulare $I(x)$. Viene ora considerata una correzione a posteriori per l'ampiezza dell'onda che non è costante ma variabile in x : l'idea è di valutare una funzione a gradino che tenga conto che l'intensità va quasi a zero quando la guida è coperta ed è costante quando non c'è la goccia:

$$A(x)^2 = \frac{\beta}{1 + \frac{\beta\gamma}{D(x)^2}} \quad (2.9)$$

con i parametri β e γ da valutare in base alle caratteristiche della goccia (in altre parole in base a $D(x)$) in modo che il primo restituisca un buon valore del fondo e il prodotto dei due il modo di discesa del gradino. I limiti al variare di x sono:

$$\lim_{D(x) \rightarrow \infty} A(x)^2 = \beta \quad (2.10)$$

$$\lim_{D(x) \rightarrow 0} A(x)^2 = \frac{D(x)^2}{\gamma} \quad (2.11)$$

Per come è stato costruito lo studio del fenomeno $A(x)^2$ costituisce sia un fattore di forma dell'intensità calcolata precedentemente, sia il valore del fondo in assenza della goccia, portando all'espressione:

$$\begin{aligned} I(x) &= A(x)^2 \left\{ 1 + \delta \frac{D(x)^2}{2} \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi D(x)}{\lambda} \left(\frac{(6 \mu m) - \frac{D(x)}{2}}{W/2} \right) \right)}{\frac{\pi D(x)}{\lambda} \left(\frac{(6 \mu m) - \frac{D(x)}{2}}{W/2} \right)} \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{\beta}{1 + \frac{\beta\gamma}{D(x)^2}} \left\{ 1 + \delta \frac{D(x)^2}{2} \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi D(x)}{\lambda} \left(\frac{(6 \mu m) - \frac{D(x)}{2}}{W/2} \right) \right)}{\frac{\pi D(x)}{\lambda} \left(\frac{(6 \mu m) - \frac{D(x)}{2}}{W/2} \right)} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si osserva che δ (detto termine di rescaling) tiene conto del fatto che non tutti i raggi della guida creano diffrazione, ma alcuni vengono assorbiti dalla goccia o proseguono senza interferenze.

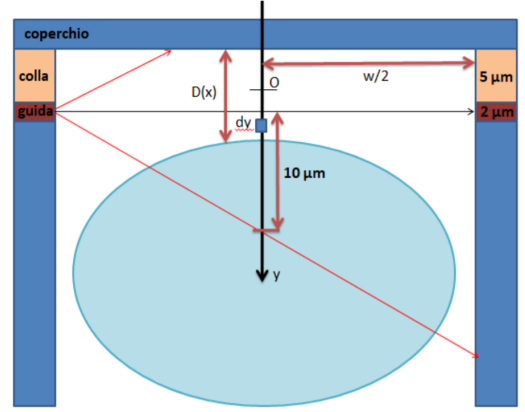


Figura 2.3: Sezione trasversale [Zanini-2020]

Capitolo 3

Segnale e parametri

La bontà di un modello che descrive un fenomeno fisico si valuta sia sul fatto di riuscire a spiegare i fenomeni noti e già osservati e sia dalla sua capacità di fare previsioni. Per questo si è deciso di valutare la funzione dell'intensità ricavata in precedenza (formula 2.12) al variare dei diversi parametri che la costituiscono (λ , D , W), al fine di determinarne la correttezza e di capirne più profondamente le varie dipendenze.

Nello studio della relazione tra la goccia all'interno del canale e il segnale osservato sono stati associati l'inizio e la fine del segnale al minimo successivo al primo massimo secondario. Utilizzando quindi la funzione $I(x)$ ottenuta si stimano i suoi minimi in funzione di $D(x)$ e dei diversi parametri da cui dipende (ponendo anche la posizione della guida $\xi_0 = 6 \mu m$ come un parametro), in questo modo si individuano i minimi del segnale come gli zeri del termine diffrattivo, ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{1 + \frac{\beta\gamma}{D(x)^2}} \cdot \delta \frac{D(x)^2}{2} \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{\pi D(x)}{\lambda} \left(\frac{\xi_0 - \frac{D(x)}{2}}{w/2} \right) \right)}{\frac{\pi D(x)}{\lambda} \left(\frac{\xi_0 - \frac{D(x)}{2}}{W/2} \right)} \right]^2 &= 0 \\ \text{sen} \left(\frac{\pi D(x)}{\lambda} \left(\frac{\xi_0 - \frac{D(x)}{2}}{W/2} \right) \right) &= 0 \\ \frac{\pi D(x)}{\lambda} \left(\frac{\xi_0 - \frac{D(x)}{2}}{W/2} \right) &= m\pi \quad \text{con } m = \pm 1, \pm 2, \dots \\ \pi D(x)(2\xi_0 - D(x)) &= m\pi\lambda W \\ D(x)^2 - 2\xi_0 D(x) + m\lambda W &= 0 \\ D(x) &= \frac{2\xi_0 \pm \sqrt{(2\xi_0)^2 - 4m\lambda W}}{2} = \xi_0 \pm \sqrt{\xi_0^2 - m\lambda W} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Il primo ordine dei minimi ($m = \pm 1$) corrisponde all'inizio e alla fine del segnale, perciò grazie alle condizioni di esistenza della radice, al fatto che $D(x) > 0$ e sapendo che $\xi_0 \approx \mu m$ e $\lambda W \approx 10^2 \mu m$ allora è possibile affermare che $m = -1$, cioè si osservano minimi solo a sinistra del picco principale. Il valore per cui la goccia inizia a creare segnale, in funzione dei parametri, è dato da:

$$D(x)_{in} = \xi_0 + \sqrt{\xi_0^2 + \lambda W} \quad (3.2)$$

3.1 Intensità e lunghezza d'onda

La guida di luce in esame come presentato inizialmente è stata realizzata con la tecnica detta Ti-indiffusion nella quale lo spessore della guida può variare da pochi micron a decine di micron in base alla lunghezza d'onda che poi si andrà ad utilizzare. La descrizione a livello matematico della propagazione di un'onda elettromagnetica in una guida nasce dalle equazioni di Maxwell e va a descrivere il fenomeno studiando i modi guidati all'interno della guida stessa. Il campo può essere visto come una

combinazione lineare di modi di propagazione dove ogni singolo modo è una precisa configurazione del campo che si propaga immutata nella guida. Ad ogni modo si associa una diversa costante di propagazione che determina le caratteristiche dell'onda nella guida (per esempio la velocità di fase) ed è possibile stimare la lunghezza d'onda massima che si può propagare nella guida (sopra tale λ_{max} non ho eccitazione dei modi e quindi propagazione) e la lunghezza d'onda nella guida (λ_g) diversa da quella della sorgente (λ_s), come:

$$\lambda_{max} = 2 \cdot a \quad (3.3)$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda_s}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_{max}}\right)^2}} \quad (3.4)$$

con a lunghezza del lato maggiore della guida. Le diverse scelte nella realizzazione del chip e della guida di luce fanno sì che per l'intervallo di lunghezze d'onda ora preso in esame, $400 \text{ nm} \leq \lambda \leq 1600 \text{ nm}$, sia garantito che la guida sia monomodo, cioè capace di trasmettere un raggio luminoso ad una singola lunghezza d'onda. Nonostante le guide multimodo permettano generalmente una maggiore trasmissione della luce, quelle monomodo rendono più semplice lo studio dell'interazione della luce dalla guida con il canale, dato che il profilo del campo è a campana.

A partire dalla formula 3.2 fissando $W = 200 \text{ } \mu\text{m}$ e $\xi_0 = 6 \text{ } \mu\text{m}$ è possibile studiare la dipendenza di $D(x)_{in}$ dalla lunghezza d'onda. Si osserva che al calare di λ anche il valore dell'ampiezza della fenditura iniziale diminuisce, ma se diminuisce $D(x)_{in}$ allora la goccia interagirà con la guida di luce per un tempo minore perché dovrà essere "più vicina per essere vista" da quest'ultima. In altre parole con profilo invariato della goccia, se la si illumina con luce verde ($\lambda \approx 532 \text{ nm}$) il tempo misurato del segnale sarà minore rispetto a quello misurato con luce rossa ($\lambda \approx 632.8 \text{ nm}$). L'andamento viene riportato in figura 3.1(a) dove è stata rappresentata la funzione $D(\lambda, W)_{in}$ con W larghezza del canale. Matematicamente si può dire che la condizione di minimo per $I(x)$, cioè il primo picco dell'intensità osservato che segna l'arrivo della goccia, è raggiunta con un valore crescente di $D(x)$ e quindi della lunghezza d'onda. A livello pratico si avrà che all'aumentare di λ si osserverà un primo picco più intenso di $I(x)$ con valori della posizione della goccia minori (coordinata x):

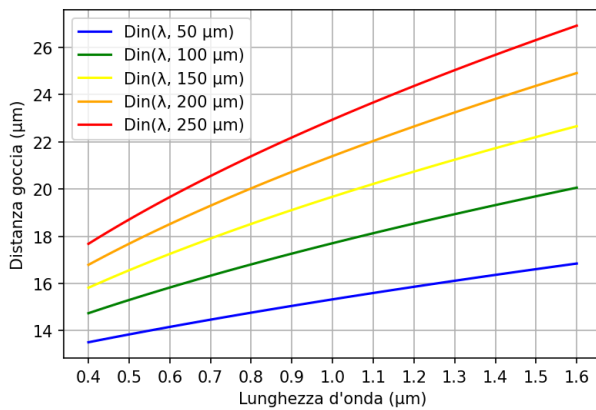
$$D(x)_{in|_{\lambda=632.8 \text{ nm}}} \approx 18.75 \text{ } \mu\text{m}$$

$$I(x)_{in|_{\lambda=632.8 \text{ nm}}} \approx 16.80 \text{ V}$$

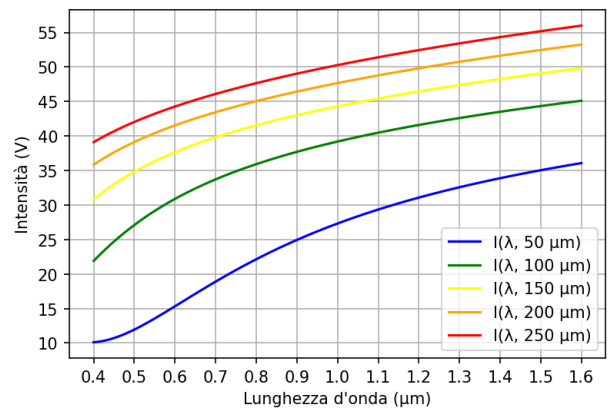
$$D(x)_{in|_{\lambda=532.0 \text{ nm}}} \approx 17.93 \text{ } \mu\text{m}$$

$$I(x)_{in|_{\lambda=532.0 \text{ nm}}} \approx 16.05 \text{ V}$$

dove i valori utilizzati per i parametri W e ξ_0 sono quelli già esposti, mentre si è scelto $\delta = 0.05$, $\beta = D(x)_{in}$ e $\gamma = 2.5$ in modo che $A(x)^2$ sia simile a $D(x)$.



(a) D_{in} vs λ



(b) Intensità vs λ

Figura 3.1

Si procede ora nello studio dell'intensità osservando la dipendenza da λ per valori di D in un opportuno intervallo e confrontando il modello con i dati raccolti in laboratorio. La distanza della goccia dalla guida di luce per quanto già esposto sarà sempre minore di $D(x)_{in}$ mentre per le caratteristiche di costruzione (la presenza di uno strato di colla) non sarà mai inferiore a $5 \text{ } \mu\text{m}$, perciò

$5 \mu m \leq D(x) \leq D(x)_{in}$. Osservando l'intensità al variare della lunghezza d'onda e fissando D all'interno di questo intervallo si nota che I cresce con l'aumentare di λ con un andamento simile a quello in figura 3.1(a) e mostrato in 3.1(b) (fissando $D = 10 \mu m$). Se si illumina quindi una goccia nel canale con una luce verde per esempio si osserverà non solo un tempo di transizione della goccia minore, ma tutto il segnale verrà registrato ad un'intensità inferiore rispetto ad uno raccolto illuminando con luce rossa.

Al variare della larghezza del canale si nota da entrambi i grafici in figura 3.1 che le funzioni vengono traslate verso l'alto, questo fisicamente significa che a parità di lunghezza d'onda D_{in} ha una maggiore apertura di ingresso della goccia con la conseguenza che il fenomeno della diffrazione si osserva per un intervallo maggiore di ampiezze. A parità di λ l'intensità assume valori crescenti e quindi si ha un segnale più intenso per valori di W sempre più grandi. Si nota in particolare il grafico per il valore $W = 50 \mu m$: l'intensità presenta un flesso che ne cambia la curvatura e conferisce un andamento differente rispetto a quello per valori di W maggiori.

3.2 Intensità e posizione della goccia

Il segnale in uscita che viene registrato dipende da diversi fattori, non solo dalla luce che percorre la guida ma anche dalla forma della goccia che percorre il canale, elemento fondamentale da comprendere per l'analisi e lo studio degli effetti diffrattivi del sistema in esame. Verrà in questa sezione analizzata la funzione dell'intensità al variare della distanza della goccia dal coperchio $D(x)$ percorrendo il seguente approccio: per prima cosa si definisce una funzione $D(x)$ che descriva opportunamente il profilo di una goccia in funzione della posizione nel canale, poi verrà analizzata la funzione $A(x)^2$ inizialmente fissando dei ragionevoli valori di β e γ in modo che siano coerenti con la situazione fisica in esame. Successivamente si andrà ad osservare come al variare della posizione della guida di luce cambi il segnale nella guida in out.

Si fissano la lunghezza d'onda a $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, $W = 200 \mu m$, $\delta = 0.05$ e $\xi_0 = 6 \mu m$. Per descrivere l'intensità è necessario fare un'ipotesi sulla forma della goccia e vedere come $I(x)$ varia in relazione ad essa. Il profilo più comune e semplice è quello in regime di dripping che conferisce a $D(x)$ un andamento sferico:

$$D(x) = W\mu - \sqrt{\left(\frac{W}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{W}{2}\right)^2} \quad (3.5)$$

scegliendo $\mu = 0.575$ che fissa la posizione della goccia rispetto al punto ξ_0 (la funzione è definita in modo che sia centrata vicino al centro del canale). Analizzando ora meglio $A(x)^2$ è necessario determinare i valori dei parametri che la costituiscono in modo da poter modulare correttamente $I(x)$, per questo si assegna a $\gamma = 2.5$ e a β il $D(x)$ critico, in questo caso $\beta = 18.75 \mu m$. Vengono riportate nel seguente grafico le funzioni $D(x)$, $A(x)^2$, $I(x)$ e la posizione della guida di luce ξ_0 .

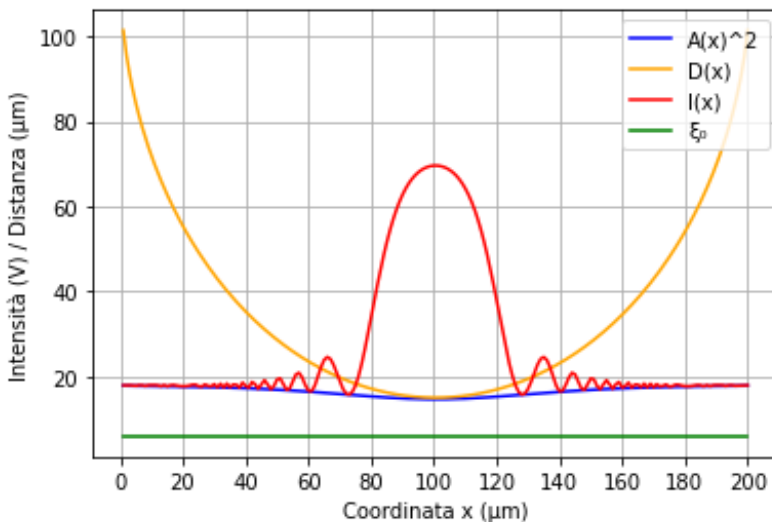


Figura 3.2

Osservando $D(x)$ si nota innanzitutto che il centro della goccia grazie al parametro μ abbia un valore minimo un po' al di sotto di $D(x)$ critico, mentre per $A(x)^2$ si vede che, quando la goccia entra nel cono di luce della guida, tale funzione curva leggermente verso il basso per la sottrazione di luce dovuta alla presenza della goccia stessa. I valori scelti per i parametri β e γ emergono essere una buona scelta, poiché restituiscono l'andamento richiesto per il valore del fondo, in particolare si nota il comportamento ai due limiti stimati

in precedenza: in assenza della goccia il comportamento è costante (dato da β) e per i valori di D fino al punto critico l'andamento discendente segue il profilo della goccia ($\beta\gamma$). La funzione dell'intensità mette in luce il picco molto forte caratteristico del dripping quando D interagisce con la guida per valori poco inferiori ai $20\text{ }\mu\text{m}$ ($\approx 15\text{ }\mu\text{m}$). Si possono osservare anche i piccoli picchi prima e dopo l'ingresso della goccia: essi sono da associare al fenomeno della diffrazione ad ostacolo che sempre si estende oltre la fenditura. Per valori di $D(x)$ sufficientemente grandi il fenomeno cessa di avere un ruolo rilevante e si nota come correttamente il termine di fondo prevalga, questo perché la goccia non è abbastanza vicina alla guida per interagire. È importante evidenziare che le divergenze che emergono dal grafico sono la conseguenza della diffrazione ad ostacolo in relazione ai parametri già descritti λ , $D(x)$, W e ξ_0 .

3.2.1 Posizione guida-goccia

Verrà ora mostrato il ruolo della posizione della guida in relazione alla goccia andando a variare il valore del parametro μ e osservando il variare dell'intensità tenendo fissi gli altri parametri (analogamente poi con ξ_0). I seguenti grafici mostrano le funzioni che descrivono il fenomeno con tre diversi valori di μ :

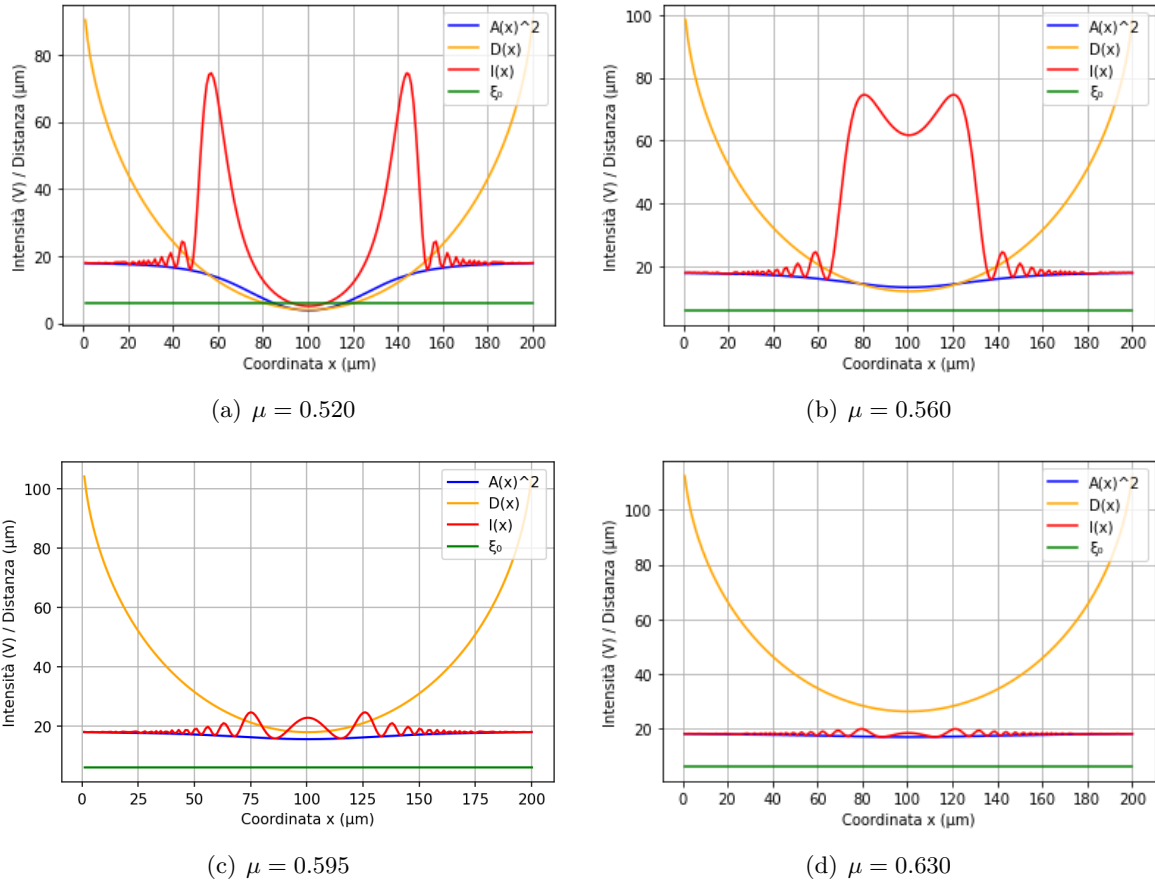
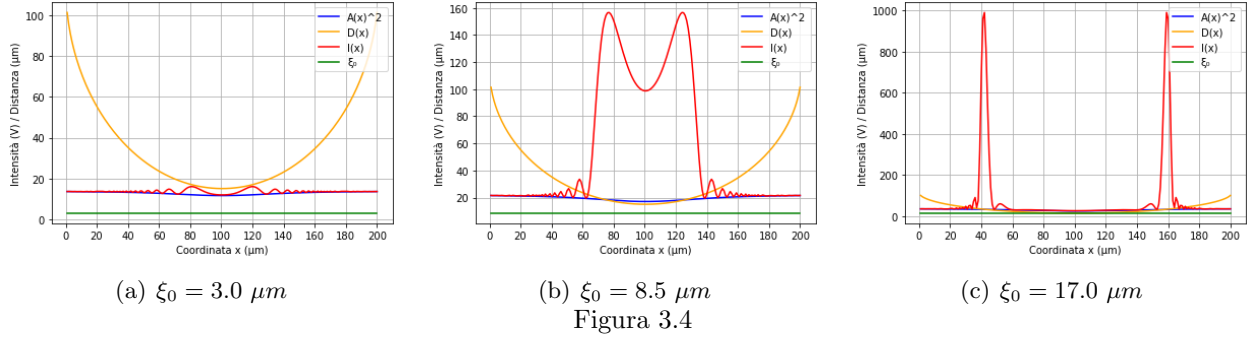


Figura 3.3

Dai grafici si nota subito che allontanando la goccia dalla guida (μ crescenti) il fondo tende ad appiattirsi, mentre il segnale diffrattivo cala di intensità fino a non avere più nessun picco. Avvicinando la goccia quello che succede è di andare a coprire la guida in input creando un fondo nell'effetto di diffrazione e una profonda buca nell'intensità, prima però passando per una divisione del picco principale in due meno intensi.

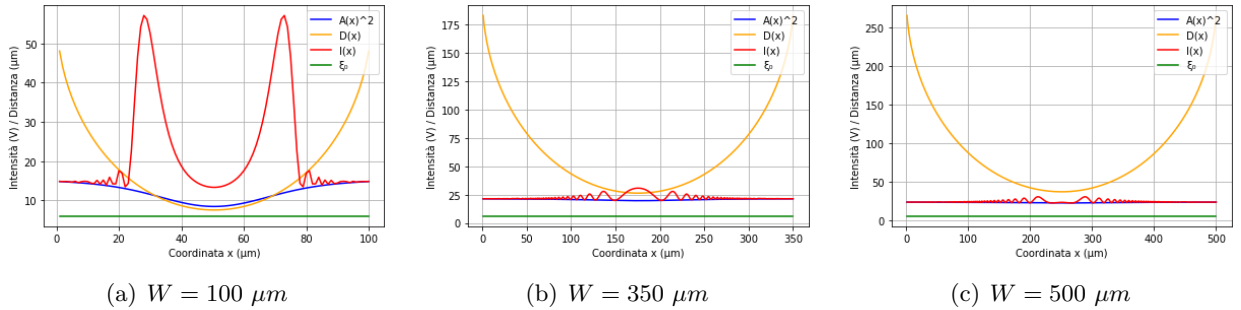
Variando invece ξ_0 si ha per valori decrescenti un andamento simile a quello per μ crescenti e per valori via via maggiori il picco diventa più intenso e largo fino a dividersi in due, generando un intervallo dove $I(x)$ è costante, questo poiché la guida è coperta dalla presenza della goccia. Si può osservare che per posizioni sufficientemente profonde della guida si formano due picchi molto alti e distanti tra loro che segnano il momento in cui la goccia entra ed esce nel cono di luce.



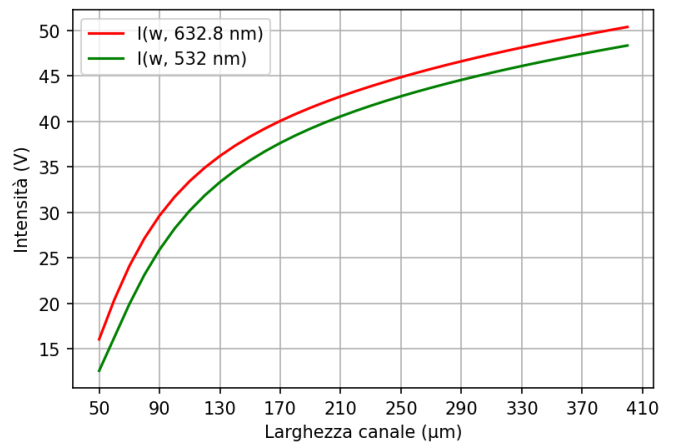
In entrambi questi due casi poiché $D(x)$ cambia con i parametri in esame quando la distanza della goccia dalla guida inizia ad essere sopra i $10 \mu m$ il valore del numero di Fresnel supera l'unità mettendo in luce come l'ipotesi di diffrazione di Fraunhofer perda di validità, entrando nella formulazione di Fresnel che tuttavia non si considera perché il rapporto $\frac{\lambda}{D}$ diventa molto piccolo e la diffrazione trascurabile. Da quest'analisi emerge quindi che non tutte le posizioni della guida rispetto alla goccia sono ottimali per la ricezione del segnale, ma in base ai parametri del sistema è necessario valutare la configurazione che favorisce il singolo picco tipico del dripping e che permetta al fascio in uscita di essere raccolto e interpretato correttamente.

3.3 Intensità e larghezza del canale

Una caratteristica importante del dispositivo in esame è la larghezza del canale W che finora è stata assunta pari a $200 \mu m$. Utilizzando lo stesso profilo della goccia della sezione precedente (formula 3.5), fissando i seguenti parametri a $\lambda = 632.8 nm$, $\xi_0 = 6 \mu m$ e $\mu = 0.575$ si studia l'andamento dell'intensità al variare della larghezza W .



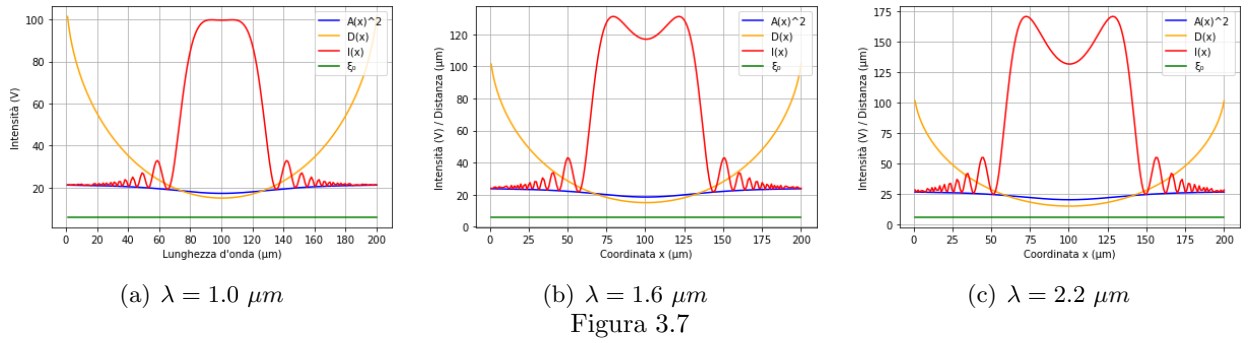
Da questi grafici emerge che per valori sempre più piccoli del canale il segnale si fa meno intenso rispetto per esempio a quello in figura 3.2 e per valori abbastanza piccoli forma due picchi e non più uno solo. A causa del canale troppo stretto infatti la goccia interagirà con il fascio generando un effetto di diffrazione non più sotto le condizioni di Fraunhofer poiché $N_F \approx 3 > 1$ (con $D = 10 \mu m$ valore intermedio), rendendo inesatto il modello teorizzato. Quando W cresce quello che avviene è una rapida decrescita dell'intensità del segnale fino ad appiattirsi totalmente: questo è dovuto probabilmente al fatto che la goccia essendo di dimensioni inferiori rispetto al canale non incide in modo considerevole sul fascio e così l'effetto di diffrazione diventa trascurabile.



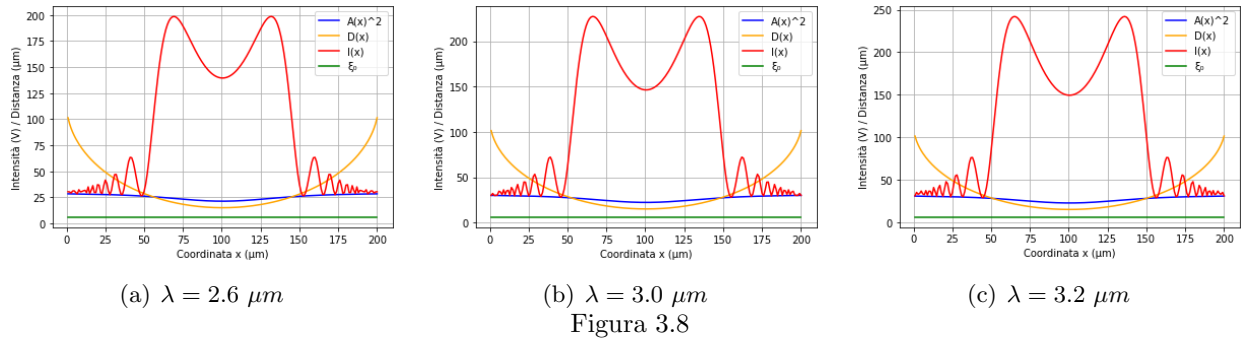
Complessivamente al variare di W , fissando due diversi valori di λ (632.8 nm e 532 nm), per $D = 10 \mu m$ si ha l'andamento mostrato in figura 3.6. Il grafico conferma le considerazioni fatte in precedenza in questo capitolo e nel capitolo sullo studio dell'intensità al variare della lunghezza d'onda, si vede infatti che con il crescere della larghezza del canale a parità di λ cresce anche l'intensità, mentre variando la lunghezza d'onda vengono traslati verticalmente tutti i valori di I , portando ad un segnale più o meno intenso.

3.4 Intensità e lunghezze d'onda telecom

Si conclude l'analisi dell'intensità in funzione dei suoi parametri considerando nuovamente le lunghezze d'onda, ma in un diverso range: $1.6 \mu m \leq \lambda \leq 3.2 \mu m$. Tali valori di λ sono tipici delle radiazioni infrarosse e può essere utile per applicazioni future lo studio del segnale in questo regime. Si osserva che con il crescere della lunghezza d'onda si formano due picchi sempre più marcati e distanti tra loro con intensità via via maggiori (già per valori di $\lambda \approx 1 \mu m$ iniziano a vedersi i due picchi).



Dai grafici emerge come l'effetto di diffrazione e l'interazione della goccia con la guida inizi per $D(x)$ sempre maggiori con il crescere di λ , questo è coerente con il fenomeno in esame poiché con grandi lunghezze d'onda la goccia necessita di distanze minori per generare il segnale diffrattivo. Come mostrato nell'equazione 3.2 il valore di $D(x)_{in}$ aumenta con λ .



Nonostante le gli elevati valori di λ il modello sembra descrivere ancora bene il fenomeno, in particolare il valore dell'intensità cala velocemente appena la goccia si allontana dalla guida. I numerosi picchi e oscillazioni all'inizio e alla fine del segnale sono il risultato del termine nell'equazione 2.12 all'interno delle parentesi graffe, non dipendono dal valore e dalla forma assunta per $A(x)^2$, questo perché la fisica del sistema è descritta dal solo contributo ottenuto dal risultato dell'integrale del campo.

L'analisi condotta evidenzia che è possibile ottimizzare la geometria del canale fissata la dimensione della goccia per massimizzare l'intensità e viceversa. Essendo il sistema sensibile alla posizione della goccia e alla sua estensione rispetto la dimensione del canale è possibile operare un riconoscimento a fingerprint dell'oggetto che passa (in questo caso una goccia perché fornisce trasmissioni differenti ma catalogabili con elementi caratterizzanti).

Capitolo 4

Studio delle approssimazioni

In questo capitolo verranno analizzate le approssimazioni introdotte in precedenza e utilizzate per la modellizzazione della diffrazione della goccia nel canale, al fine di determinare se il modello ottenuto è coerente con il fenomeno fisico che rappresenta o se in futuro può essere ulteriormente migliorato con uno studio più dettagliato.

4.1 Trascurare la curvatura

Nello studio del fenomeno della diffrazione con fenditura ad ampiezza variabile sono state introdotte diverse approssimazioni, la prima è stata quella sulla curvatura del fronte d'onda che è stata considerata costante. Questo è possibile grazie alle considerazioni esposte inizialmente sulla diffrazione di Fraunhofer, cioè poiché sono trascurabili le differenze nella distanza tra i vari punti della fenditura e la guida di rivelazione (questo avviene in quanto l'intensità è registrata sempre alla stessa coordinata e la rivelazione è allineata all'emissione che fa sì che vengano valutati solo piccoli angoli). La formula 2.6 è il risultato ottenuto per il campo elettrico trascurando tale contributo.

Per comprendere la bontà di questa approssimazione si è deciso di partire da una trattazione più generale del fascio gaussiano, il problema verrà comunque semplificato assumendo che la radiazione sia collimata, cioè che abbia una direzione di propagazione ben definita ma anche delle variazioni trasversali (tali variazioni sono comunque limitate rispetto a un'onda piana). È importante sottolineare che un fascio gaussiano non ha origine da una sorgente puntiforme, ma da una regione di dimensioni finite. Un'onda elettromagnetica che si propaga in un mezzo uniforme soddisfa l'equazione di Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \quad (4.1)$$

dove ψ è una qualsiasi componente del campo elettrico e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ il numero d'onda; si assume una variazione temporale con frequenza ω della forma $e^{i\omega t}$. Le ampiezze del campo elettrico e magnetico in un'onda piana sono costanti, con le direzioni perpendicolari tra loro ed entrambe perpendicolari al vettore di propagazione. Nel fascio qui considerato dove sono permesse delle variazioni dei campi ortogonali all'asse di propagazione, si assume che sia ancora valida l'ipotesi sulle mutue direzioni dei campi, cioè che siano ancora perpendicolari tra loro. Prendendo come direzione di propagazione l'asse z positivo si può descrivere la distribuzione per qualsiasi direzione del campo elettrico, trascurando per il momento la dipendenza da t , come:

$$E(x, y, z) = u(x, y, z) \cdot e^{-ikz} \quad (4.2)$$

con $u(x, y, z)$ una funzione scalare complessa che descrive la parte del fascio non piana. In coordinate cartesiane l'equazione di Helmholtz risulta:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k^2 E = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (4.4)$$

Tenendo conto del fatto che le variazioni del campo lungo z sono piccole (rispetto a λ) e trascurabili rispetto a quelle nelle altre due direzioni, si trascura il contributo $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, ottenendo quella che viene definita l'Equazione dell'Onda Parassiale in coordinate cartesiane:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (4.5)$$

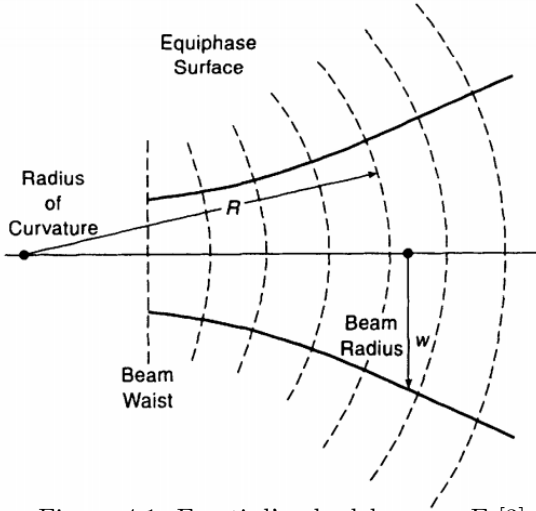


Figura 4.1: Fronti d'onda del campo E [3]

Si dimostra che la soluzione di questa equazione è data da $u(x, y, z) = \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w(z)^2} - ik \frac{(x^2+y^2)}{2R(z)} + i\phi(z)}$, sostituendo nell'espressione 4.2, aggiungendo la dipendenza temporale e normalizzando si ha:

$$E(x, y, z, t) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{i\omega t - ikz - \frac{x^2+y^2}{w(z)^2} - ik \frac{(x^2+y^2)}{2R(z)} + i\phi(z)} \quad (4.6)$$

dove (con riferimento alla figura 4.1):

- $w(z) = w_0 \sqrt{1 + (\frac{z}{z_0})^2}$ è chiamato beam radius, w_0 beam waist e z_0 Rayleigh range
- $R(z) = z(1 + (\frac{z}{z_0})^2)$ è il raggio di curvatura del fronte d'onda
- $\phi(z) = \arctg(\frac{z}{z_0})$ è il termine di fase

L'espressione ottenuta è molto più complessa di quella utilizzata fino a questo punto, per questo verranno ora analizzati sia per la guida in input sia per quella in output i limiti dell'approssimazione del fronte d'onda piano.

4.1.1 Guida in input

Il campo elettrico nella formula 4.6 mostra la forma dell'onda senza approssimazioni, si procede quindi con il ricavare da questa espressione quella utilizzata in precedenza (equazione 2.6) trascurando la curvatura, al fine di valutare i limiti dell'approssimazione stessa. Si osserva innanzitutto che l'ampiezza della fenditura $D(x)$ è posta alla distanza $z = \frac{w}{2} = 100 \mu m$ il che permette di ridurre le dipendenze in x e in z nell'equazione generale, poiché il campo $E(x, y)$ viene valutato come funzione di x attraverso $D(x)$: si includono nella costante A tutte le dipendenze da x e z dell'intensità. Esprimendo tutto nel sistema di riferimento di ξ le dipendenze da y e i termini rimasti della fase danno:

$$\begin{aligned} E(y(\xi), z(= 100 \mu m)) &= \left(E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{x^2}{w(z)^2} - ik \frac{x^2}{2R(z)}} \right) \cdot e^{i\omega t - ikz - \frac{y^2}{w(z)^2} - ik \frac{y^2}{2R(z)} + i\phi(z)} \\ &= A \cdot e^{i\omega t - ik \left(z + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2R(z)} \right) - \frac{(\xi - \xi_0)^2}{w(z)^2} + i\phi(z)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Utilizzando ora le caratteristiche del dispositivo in esame è possibile stabilire quanto le approssimazioni introdotte siano rilevanti. L'apertura angolare del sistema nel canale è $N.A. \approx 0.13$ e $w_0 = 2 \mu m$, vale dunque l'approssimazione $z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \approx 20 \mu m$ e di conseguenza per $z = 100 \mu m$ al centro del canale è valido $z \approx 5z_0$. Per queste considerazioni è possibile scrivere che (con $z = 100 \mu m$):

$$\begin{aligned} w(z) &\approx 10 \mu m \\ R(z) &\approx 100 \mu m \end{aligned}$$

Notando che il valore massimo al centro del canale per $(\xi - \xi_0)$ è uguale all'apertura del fascio, il valore di curvatura massimo con $D(x) = 17 \mu m$ sarà: $\frac{(\xi - \xi_0)^2}{2R(z)} \approx 0.5 \mu m$.

A questo punto è possibile concludere che la curvatura non è trascurabile poiché questo termine è all'esponente e indurrà un ritardo di fase in funzione di $(\xi - \xi_0)$. Osservando il massimo valore che

può assumere si vede che lo sfasamento è comparabile a λ : ciò rende inadeguata l'approssimazione introdotta e pone una limitazione al modello teorizzato. Assumere di avere un fronte d'onda piano con sorgenti in fase non è completamente coerente che il fenomeno fisico osservato, sarà quindi necessario implementare tale considerazione nei futuri modelli.

Si assume comunque per semplicità il fronte d'onda come piano tenendo conto del fatto che la guida in uscita è allineata a quella in ingresso e che al centro del canale $R(z) \approx 100 \mu m$ mentre $(\xi - \xi_0)$ massimo è 10 volte inferiore. Il campo che si ottiene a meno di un ritardo in fase è:

$$E(\xi, z) = A \cdot e^{-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{w(z)^2}} = A \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y - (6 \mu m) + \frac{D(x)}{2}}{\sigma} \right)^2} \quad (4.8)$$

dove si è passati al sistema di riferimento in y e con $w(z) = \sqrt{2}\sigma$. Senza la curvatura e considerando un fronte d'onda piano si ottiene quest'espressione che come è stato messo in luce non descrive propriamente il fenomeno, tuttavia è possibile trascurare per il momento le differenze in fase che introdurrebbe il termine del fronte d'onda gaussiano (con le opportune modifiche delle condizioni di interferenza) se ci si limita a considerare la parassialità della ricezione, cioè se ci si limita a osservare la guida di ricezione che raccoglie la luce trasmessa collineare all'emissione.

4.1.2 Guida in output

La guida di luce in uscita incontra lo schema diffrattivo prodotto dalle onde nella fenditura. Nell'integrale del campo elettrico svolto nel primo capitolo viene considerato il termine dell'onda piana $e^{i(\omega t - k_y \text{sen} \theta)}$ e trascurata la curvatura, dove l'esponenziale descrive la differenza di fase tra le sorgenti fittizie nella fenditura al variare di y . Grazie al principio di Huygens-Fresnel le diverse sorgenti associate ai diversi dy forniscono un contributo $\frac{A}{r} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, sapendo che la distanza tra la fenditura e la ricezione del segnale è $z = \frac{w}{2} = 100 \mu m$ e che $(\xi - \xi_0) = 10 \mu m$ allora:

$$r(z) = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + z^2} \approx z + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2R(z)}$$

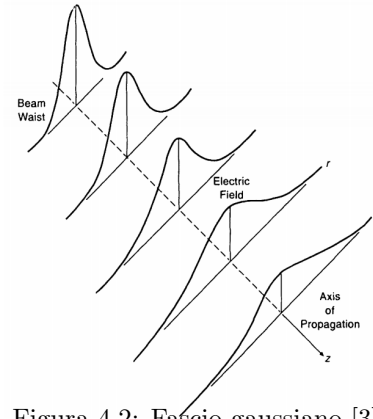


Figura 4.2: Fascio gaussiano [3]

L'assunzione che porta a trascurare la curvatura anche in questo caso pone come limite il valore del contributo della frazione nell'ultimo membro di questa equazione, se infatti si assume $\frac{A}{r} \approx \frac{A}{z}$. Come già detto in precedenza il termine in fase porta con sé un contributo che non si potrebbe trascurare perché implicherebbe condizioni di interferenza differenti. Sotto le condizioni già esposte nello studio della guida in input è possibile comunque approssimare per semplicità tutte le onde uscenti dalla fenditura come piane in direzione di un opportuno angolo θ e con ritardo in fase dato da $-ik_y \text{sen} \theta$, ottenendo il termine utilizzato inizialmente $e^{i(\omega t - k_y \text{sen} \theta)}$.

4.2 Approssimazione piccoli angoli

La seconda approssimazione introdotta nello studio della goccia è stata quella di considerare angoli piccoli di rivelazione, ciò consiste nell'assumere che $\text{tg} \theta \approx \text{sen} \theta$ arrivando all'equazione 2.4. L'angolo θ è definito come quello formato dalla linea $\frac{D(x)}{2}$ al centro della guida ($\xi_0 = 6 \mu m$), angolo che varia in base all'ampiezza $D(x)$ e che variando nel tempo rende anche l'angolo stesso variabile. Dalla geometria del sistema vale:

$$\text{tg} \theta = \frac{6 \mu m - D(x)/2}{W/2} \quad (4.9)$$

questa corrisponde alla condizione da verificare per il nostro sistema. Considerando che i valori di $D(x)$ vanno da un minimo di $0 \mu m$ (trascurando la presenza dello strato di colla) ad un massimo di

circa $20 \mu m$, valore maggiore per cui ho effetti diffrattivi, risulta che:

$$\begin{aligned} D(x) = 0 \mu m : & \quad \begin{cases} \arcsen\left(\frac{6 \mu m}{100 \mu m}\right) \simeq 3.4^\circ \\ \arctg\left(\frac{6 \mu m}{100 \mu m}\right) \simeq 3.4^\circ \end{cases} \\ D(x) = 17 \mu m : & \quad \begin{cases} \arcsen\left(\frac{6 \mu m - \frac{17}{2} \mu m}{100 \mu m}\right) \simeq -1.4^\circ \\ \arctg\left(\frac{6 \mu m - \frac{17}{2} \mu m}{100 \mu m}\right) \simeq -1.4^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

L'assunzione di avere angoli piccoli è verificata e si osserva che anche $tg\theta \approx \sen\theta$ è valida, rendendo buona l'approssimazione fatta in precedenza.

4.3 Approssimazione onda piana uniforme

La terza assunzione fatta nel secondo capitolo è quella di considerare l'onda come piana uniforme, rimpiazzando il termine gaussiano nell'integrale con una costante A , tenendo conto che poi si sarebbe dovuto applicare una correzione con un fattore di forma $A(x)^2$. Valutando l'ampiezza del campo per diversi valori di $D(x)$ è possibile avere una stima dell'errore introdotto da tale approssimazione, determinando dove l'assunzione fatta è migliore. Ricordando che:

$$E(\xi, (z = 100 \mu m)) = A \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\xi - (6 \mu m)}{\sigma} \right)^2} \quad (4.10)$$

la differenza maggiore si avrà per la massima apertura per cui si ha diffrazione $D(x) = 20 \mu m$ e confrontando l'ampiezza del campo in $\xi = 20 \mu m$ e $\xi = \frac{20}{2} \mu m$, cioè il punto più estremo e quello centrale della fenditura massima, si ottiene:

$$A \cdot e^{-\left(\frac{17 \mu m - (6 \mu m)}{10 \mu m}\right)^2} = 0.298 A \quad A \cdot e^{-\left(\frac{\frac{17}{2} \mu m - (6 \mu m)}{10 \mu m}\right)^2} = 0.939 A$$

dove $w(z) = \sqrt{2}\sigma \approx 10 \mu m$. La differenza evidente tra i due valori con il massimo valore di $D(x)$ per cui si ha diffrazione potrebbe portare ad affermare che l'approssimazione non è in nessun modo valida, tuttavia grazie al fattore di forma è possibile correggere questa imprecisione del modello. Tale correzione mette in luce come i contributi più esterni vengano sopravvalutati rispetto al loro reale valore, aspetto che andrebbe corretto migliorando il fattore di forma.

Per valori invece di $D(x)$ intermedi, come per esempio $D(x) = 10 \mu m$, l'approssimazione di onda piana uniforme è migliore, infatti:

$$A \cdot e^{-\left(\frac{10 \mu m - (6 \mu m)}{10 \mu m}\right)^2} = 0.852 A \quad A \cdot e^{-\left(\frac{\frac{10}{2} \mu m - (6 \mu m)}{10 \mu m}\right)^2} = 0.990 A$$

Si osserva quindi che l'assunzione è più esatta al calare di $D(x)$, rendendo il modello valido e le previsioni coerenti con il fenomeno osservato.

Conclusioni

Il lavoro di questi capitoli è partito dallo sviluppo di un modello per lo studio della goccia che attraversando il canale incontra la guida di luce. Considerata la guida in ingresso la sorgente e in uscita il detector si è pensato allo spazio tra la goccia e il coperchio come a una fenditura variabile nel tempo dipendente dalla curvatura della goccia: quando la goccia entra nel cono di luce i raggi che escono dalla guida vengono deviati andando a formare uno schema diffrattivo. La dipendenza dell'ampiezza della fenditura dalla coordinata spaziale fa sì che quest'ultima dipenda dalla posizione della goccia. Studiando la relazione tra la goccia nel canale e la luce sono stati associati l'inizio e la fine del segnale al minimo successivo al primo massimo secondario e utilizzando la funzione ottenuta per l'intensità sono stati stimati tali minimi in funzione di D e dei diversi parametri da cui dipende.

Al variare dei parametri è stato successivamente studiato il segnale, ottenendo che per diverse lunghezze d'onda il tempo di transizione e l'intensità sono differenti: se la goccia è illuminata con luce verde si avrà un tempo minore e un'intensità inferiore rispetto ad un segnale con luce rossa.

Il segnale in uscita che viene osservato dipende anche dalla forma della goccia e considerando il profilo in regime di dripping si è ottenuto che la funzione dell'intensità è caratterizzata da un picco molto forte quando D interagisce con la guida per valori inferiori ai $20\text{ }\mu\text{m}$, con piccoli picchi prima e dopo l'ingresso della goccia. Questi ultimi sono stati associati al fenomeno della diffrazione che si estende anche oltre la fenditura. Per valori di D sufficientemente grandi il fenomeno non ha più un ruolo rilevante e si nota che a prevalere è il termine di fondo, questo poiché la guida e la goccia non sono abbastanza vicine per interagire. Allontanando la goccia dalla guida il fondo si appiattisce e il segnale cala di intensità fino a che non c'è più nessun picco, avvicinando la goccia invece si finisce con il coprire la guida in input creando un fondo nell'effetto di diffrazione e dividendo il picco principale in due. Variando poi la larghezza del canale si osserva che per valori sempre più piccoli il segnale si fa meno intenso e per valori abbastanza piccoli forma due picchi. A causa del canale troppo stretto infatti la goccia interagisce con il fascio con un effetto di diffrazione non più sotto le condizioni di Fraunhofer, rendendo inesatto il modello.

Dalle diverse analisi emerge quindi che ci sono delle posizioni della guida e dei valori dei parametri che rendono ottimale la ricezione del segnale ed è necessario valutare la migliore configurazione che permetta al fascio di essere raccolto e interpretato correttamente.

Nello studio e formulazione del modello sono state introdotte anche alcune approssimazioni: prima di tutto è stata considerata costante la curvatura del fronte d'onda. Tale assunzione non è completamente coerente che il fenomeno fisico osservato e va quindi migliorata nei futuri modelli. È possibile comunque approssimare per semplicità tutte le onde uscenti dalla fenditura come piane in direzione di un opportuno angolo θ e con un preciso ritardo in fase dato da $-iky\sin\theta$. Dalla terza assunzione, quella che considera l'onda come piana uniforme, è emerso che i contributi più esterni (valori di D estremi) vengono sopravvalutati rispetto al loro reale valore, fatto che andrebbe corretto migliorando il fattore di forma. Al calare di D l'assunzione diventa invece più esatta rendendo il modello valido e le previsioni coerenti con il fenomeno fisico osservato.

In conclusione si potrebbe dire che il modello teorizzato è caratterizzato da una capacità predittiva molto più elevata di quella che si ottiene dalla semplice esperienza e consente applicazioni pratiche non realizzabili altrimenti. Per l'uomo i fenomeni della natura sono una pulsione innata e al tempo

stesso essenziali per la società poiché rendono possibile lo sviluppo tecnologico e il miglioramento delle condizioni di vita. Nonostante questo modello possa ancora essere migliorato, le sue capacità predittive consentono già di sfruttare il fenomeno osservato a proprio vantaggio, aprendo la strada a nuovi e sorprendenti dispositivi.

Bibliografia

- [1] G. Bettella, R. Zamboni, G. Pozza, A. Zaltron, C. Montevocchi, M. Pierno, G. Mistura, C. Sada, L. Gauthier-Manuel, M. Chauvet, *LiNbO₃ integrated system for opto-microfluidic sensing*, Sens. Actuators B: Chem. 282 (2019) 391-398, <https://doi.org/10.1016/j.snb.2018.10.082>
- [2] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *La fisica di Feynman*, Zanichelli, 2017
- [3] P.F. Goldsmith, *Quasioptical Systems*, Piscataway NJ 08855-1331, Wiley, 1998
- [4] ChaBum Lee, Abolfazl Zolfaghari, Gyu Ha Kim, Seongkyul Jeon, *An optical measurement technique for dynamic stiffness and damping of precision spindle system*, Measurement 131 (2019) 61-68, <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2018.08.049>
- [5] G. Pucci, D.M. Harris, L.M. Faria, J.W.M. Bush, *Walking droplets interacting with single and double slits*, J. Fluid Mech. (2018), <https://doi.org/10.1017/jfm.2017.790>
- [6] R. Zamboni, *Study of light driven phenomena for optofluidic applications in Lab-on-a-chip platforms in lithium niobate*, PhD thesis, University of Padova, Physics and Astronomy Department ‘Galileo Galilei’