Circonferenza di Mohr (5 gennaio)

giovedì 26 dicembre 2019 11:56

Si sceglie una base di versori ortonormali $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ dello spazio e considera un tensore degli sforzi che ha in questa base la seguente rappresentazione matriciale:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \sigma \\ 0 & \sigma & \sigma \end{bmatrix} .$$

La direzione $\hat{i}$ è una direzione principale, associata all'autovalore nullo. Infatti:

$$\underline{\underline{T}}\,\underline{i} = \underline{0} .$$

Il vettore della tensione si mantiene sempre parallelo al piano identificato dai versori $\hat{j}$ e $\hat{k}$, chiamato piano della tensione. Si è nel caso di stato di tensione piano.

Per costruire la circonferenza di Mohr, si introduce un generico versore $\underline{n}$ ortogonale a $\underline{i}$ ed un versore $\underline{m}$ sempre ortogonale a $\underline{i}$ ma ruotato di $\pi/2$ in senso orario rispetto ad $\underline{n}$ (visto da $\underline{i}$).

Si indica con τ_{nm} la componente del vettore della tensione agente sul piano di normale $\underline{n}$ nella direzione $\underline{m}$ (tangenziale). Scegliendo opportunamente $\underline{n}$ ed $\underline{m}$ si possono identificare dei punti notevoli del piano di Mohr (avente σ_n in ascissa e τ_{nm} in ordinata) su cui basarsi per tracciare la circonferenza richiesta.

In particolare, scegliendo $\hat{n} = \hat{j}$ ed $\hat{m} = -\hat{k}$, si ottiene, usando la formula di Cauchy:

$$\sigma_y = \underline{j} \cdot \underline{\underline{T}}\,\underline{j} = \sigma \quad ;$$

$$\tau_{(\hat{j})(-\hat{k})} = -\sigma \quad .$$

Si identifica così il punto $A(\sigma, -\sigma)$.

Analogamente, scegliendo $\hat{n} = \hat{k}$ ed $\hat{m} = \hat{j}$ si ottiene:

$$\sigma_z = \sigma ;$$

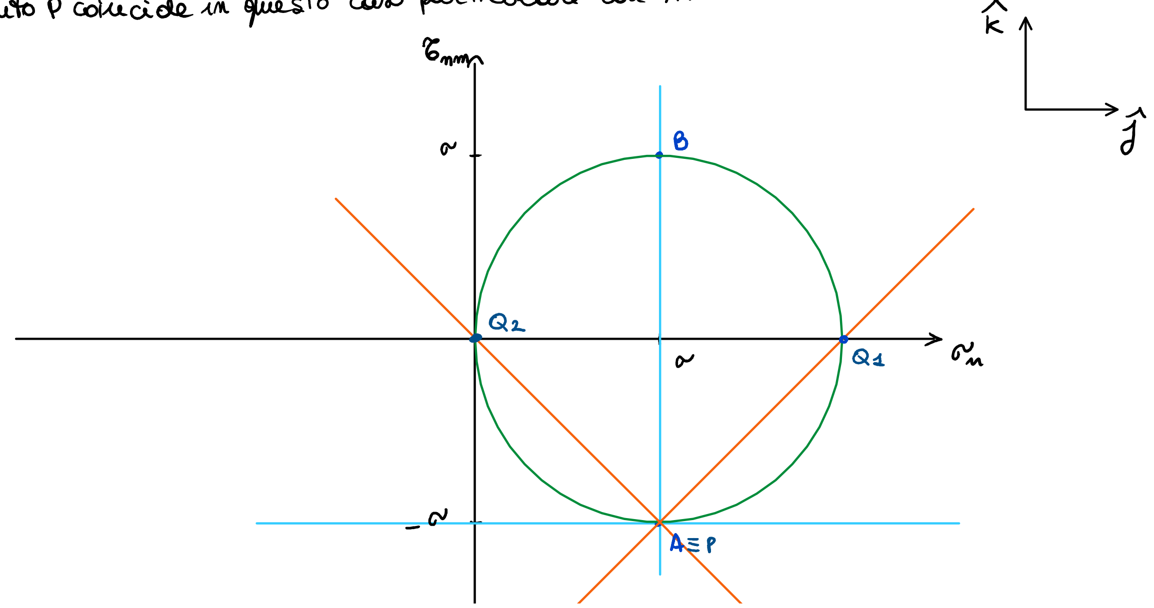
$$\tau_{(\hat{j})(\hat{k})} = \sigma ;$$

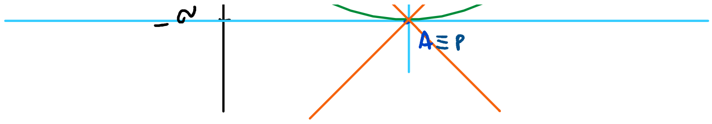
da cui il punto $B(\sigma, \sigma)$.

Si rappresentano i due punti sul piano di Mohr, avendo cura di orientare gli assi (σ_n, τ_{nm}) parallelamente agli assi (y, z). Il punto medio del segmento AB si trova sull'asse delle ascisse.

Dai punti A e B si tracciano le rette parallele alle normali corrispondenti, assi y e z rispettivamente.

La loro intersezione determina P, il polo della rappresentazione di Mohr. Si traccia la circonferenza di Mohr imponendo che questa passi per i punti A, B e P. Il suo centro coincide con il punto medio di AB. Il punto P coincide in questo caso particolare con A.





Il polo della rappresentazione di Mohr gode della proprietà grafica per cui qualsiasi retta passante per P incontra il cerchio di Mohr nel punto Q le cui coordinate (σ_n, τ_{nm}) forniscono le tensioni agenti sull'elemento piano del fascio di asse x la cui normale è parallela a PQ. I punti $Q_1(2\sigma, 0)$ e $Q_2(0,0)$ sono tali da avere ordinata nulla, ossia hanno in ascissa le tensioni principali.
Le direzioni principali sono dunque individuate dalle rette PQ_1 e PQ_2. Da considerazioni trigonometriche si osserva che sono inclinate rispettivamente di $\pi/4$ e $(\pi/4 + \pi/2)$ rispetto all'orizzontale.
Indicando con σ_1, σ_2 e σ_3 le tensioni principali lungo, rispettivamente, l'asse x, la retta PQ_1 e la retta PQ_2 (queste ultime scelte con verso tale da formare una terna destra in quest'ordine), dalle precedenti considerazioni si ottiene: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 2\sigma$, $\sigma_3 = 0$. Il tensore degli sforzi, rappresentato nella base principale ha la seguente forma:

$$\underline{\underline{T}}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi