ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

MOLTIPLICAZIONE RIGA PER COLONNA

$\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\underline{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Calcolare il prodotto $\underline{a}\,\underline{b}$

Risposta: 7

$$\underline{a}\,\underline{b} = 2 \times 3 + 1 \times 1 + 3 \times 0 = 7$$

ALGEBRA LINEARE

MOLTIPLICAZIONE DI MATRICI

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{B} = ?$$

R: $\begin{bmatrix} ? & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$

DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE

Es:

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sono vettori linearm. indipendenti?

R: no

Def: $\underline{v}_1 \dots \underline{v}_n$ lin. ind. sse nessun vettore è combinaz. lin. degli altri.

RANGO DI UNA MATRICE

$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Calc. rango A , rango B

R: rango A = 2 rango B = 2

Def: max # colonne o righe lin. ind.

- $[2\ 4\ 2] = 2 \times [1\ 2\ 1]$
- 1^a, 3^a lin. indp (non prop.^{li})

1^a, 2^a non prop.^{li} => lin. in

RANGO DI UNA MATRICE

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

rango $A = 2$ rang. $B = 2$

Def: max # colonne o righe lin. ind.

n righe, m colonne

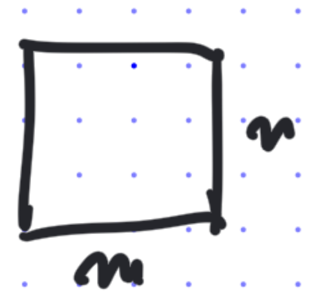
$p = \text{rango } A \leq \min(m, n)$

se vale $=$ A ha <u>rango massimo</u>

$n > m$

rett. alta

$m = n$



quadrata

$p \leq m$
$p \leq n$

$n < m$

rett. bassa $p \leq n$

MINORI DI UNA MATRICE

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Minore di ordine k

Sottomatrice ottenuta selezionando k righe e k colonne

$k = 2$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ...

$k = 1$ $[1]$ ....

$k = 3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Minore complementare di un elemento a_{ij}

riga $\quad$ colonna

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad a_{32} = 2$$

M_{ij} = sottomatrice ottenuta eliminando la riga i e la colonna j

ES:

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

DETERMINANTE DI UNA MATRICE (QUADRATA)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcolare il det. di $\underline{A}$

R: 3

SARRUS ← non è la definizione di determinante!

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}$$

$1 \times 1 \times 3 + 0 + 6 - 6 - 0 - 0$

$= 3$

ATTENZIONE!

def. det → libro di testo
video notebook onenote
↓
complemento algebrico (rivedere)

APPLICAZIONE:

CALCOLO DEL RANGO

- Rango $\underline{A}$ ≡ ordine massimo dei minori aventi determinante non nullo.

Esempio già visto:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A unico minore di ordine 3 $\Rightarrow$ rango $\underline{A} < 3$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -4 \Rightarrow \text{rango } \underline{A} = 2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \text{rango } \underline{B} = 2$$

SISTEMI LINEARI E MATRICI

$$3x + 4y - 6 = 0$$
$$2y + 3z = 9$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = 6$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} = 9$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{\equiv\ \underline{A}} \underline{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

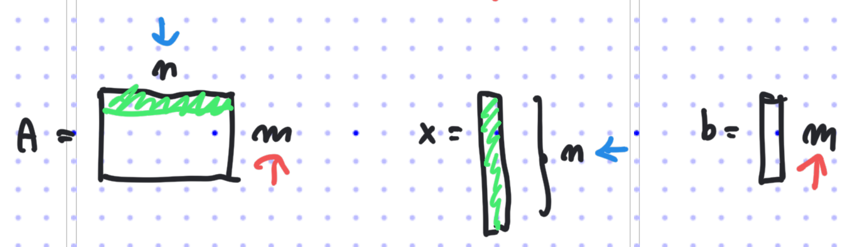
$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

m equazioni $\leftarrow$ righe di A

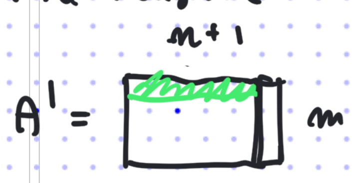
n incognite $\leftarrow$ colonne di A

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ — m eq.ni, n incognite



Esiste soluzione?



matrice orlata

$p = \text{rango } A \qquad p' = \text{rango } A'$

Oss: $p \leq p'$

TEOREMA R-C

$$p = p' \Rightarrow \exists\ \infty^{n-p} \text{ soluz.ni}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} 3x + 4y - 6 = 0 \\ 2y + 3z = 9 \end{cases} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$m = 2 \quad n = 3$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underline{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

$p = \text{rango } A =$ righe non prop.li

$$A' = \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

$p' = \text{rango } A' \leq 2 = \text{rango } A = p \leq p'$

$p' = 2 = p$

$\exists\ \infty^{3-2} = \infty^1$ soluz.ni

$$\begin{cases} 3x + 4y - 6 = 0 \\ 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione

$3x = -4y + 6$

$3z = 9 - 2y \qquad z = 3 - \frac{2}{3}$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}y + 2 \\ y \\ 3 - \frac{2}{3}y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1 parametro (y)

parametro x

$$\begin{cases} 3x + 4y - 6 = 0 \Rightarrow 4y = 6 - 3x \Rightarrow y = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x \\ 2y + 3z = 9 \Rightarrow 3z = 9 - 2y \Rightarrow z = 3 - \frac{2}{3}y \end{cases}$$

$z = 3 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}x\right)$

$= 3 - 1 + \frac{1}{2}x = 2 + \frac{x}{2}$

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ $\qquad m$ eq.ni

$\qquad\qquad\qquad n$ incognite

$\rho = $ rango A $\qquad \rho' = $ rango A'

TEOREMA R-C

$$\rho = \rho' \Rightarrow \exists\, \infty^{n-\rho} \text{ soluz.ni}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} 3x + 4y - 6 = 0 \\ 6x + 8y = 9 \end{cases} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad [6\ 8\ 0\ 12]$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ x2 "

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 6 \\ 6 & 8 & 0 & 9 \end{array}\right]$$ non prop.li

$\uparrow$

A $\qquad$ rango $A = 1$ $\qquad$ rango $A' = 2$

$\Rightarrow$ non $\nexists$ soluzione

Provare con il metodo di sostituz.

Le due equaz. non sono indip. tra loro

$6x + 8y = 9 \Rightarrow 3x + 4y = \frac{9}{2} \qquad 3x + 4y = 6$

→

Metodo di sostituzione

$3x = -4y + 6$

$3z = 9 - 2y \qquad z = 3 - \frac{2}{3}$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{4}{3}y + 2 \\ y \\ 3 - \frac{2}{3}y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1 parametro (y)

parametro x

$3x + 4y - 6 = 0 \quad \Rightarrow 4y = 6 - 3x \Rightarrow y = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x$

$2y + 3z = 9 \quad \Rightarrow 3z = 9 - 2y \Rightarrow z = 3 - \frac{2}{3}y$

$z = 3 - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}x\right)$

$= 3 - 1 + \frac{1}{2}x = 2 + \frac{x}{2}$