

Tensione

3

OBIETTIVI DEL CAPITOLO

In questo capitolo si passeranno in rassegna alcuni importanti principi della statica, mostrando il loro impiego per determinare le azioni risultanti all'interno di un corpo. In seguito saranno introdotti i concetti di tensione normale e tangenziale e si discuteranno alcune applicazioni specifiche relative all'analisi di elementi strutturali caricati assialmente o soggetti a taglio diretto.

3.1 Equilibrio di un corpo deformabile

La statica gioca un ruolo essenziale sia negli sviluppi teorici sia nelle applicazioni di **mecanica dei solidi e delle strutture**, quindi occorre avere una conoscenza profonda dei suoi principi fondamentali.¹ Questi principi, impiegati in tutto il testo, saranno esaminati di seguito.

Forze esterne. Un corpo può essere sottoposto a tipi differenti di forze esterne, ma ciascuna di esse è classificabile come forza di superficie o come forza di volume, come illustrato nella Figura 3.1.

Forze di superficie. Come suggerisce il nome, le **forze di superficie** sono causate dal contatto diretto tra le superfici di due corpi. In ogni caso, queste forze sono distribuite sull'*area* di contatto dei corpi. Se tale area è piccola in confronto con la superficie totale del corpo, la forza di superficie può essere *modellata* come una singola **forza concentrata**, applicata in un *punto* del corpo. Ad esempio, la forza esercitata dal terreno sulle ruote di una bicicletta può essere considerata una forza concentrata se si stanno studiando i carichi agenti sulla bicicletta. Se la forza di superficie è applicata su un'area ristretta attorno a una linea, può essere idealizzata come una **forza distribuita lungo una linea** $p(s)$. In questo caso, il carico viene misurato in termini di forza per unità di lunghezza ed è rappresentato graficamente da una serie di frecce lungo la linea s .

¹ Alcuni principi della statica sono stati già introdotti nel Capitolo 1.



Figura 3.1

Tabella 3.1 Alcuni vincoli e reazioni vincolari corrispondenti.

Tipo di connessione	Reazione vincolare	Tipo di connessione	Reazione vincolare
Cavo	Una incognita: F	Cerniera esterna	Due incognite: F_x, F_y
Carrello	Una incognita: F	Cerniera interna	Due incognite: F_x, F_y
Appoggio liscio	Una incognita: F	Incastro	Tre incognite: F_x, F_y, M

L'intensità della forza risultante F_R di $p(s)$ è pari all'area sottesa dalla curva della distribuzione ed è applicata nel centro geometrico C dell'area sottesa. Il carico distribuito lungo l'asse di una trave è un esempio classico di questo modello ideale.

Forze di volume. Una **forza di volume** si esercita tra due corpi in assenza di contatto fisico diretto. Tra i possibili esempi si considerino gli effetti del campo gravitazionale e del campo elettromagnetico terrestre. Sebbene le forze di volume agiscono su ciascuna delle particelle che compongono un corpo, esse sono rappresentate generalmente da una singola forza concentrata agente sul corpo. Nel caso della gravitazione terrestre, la forza è chiamata **peso** del corpo ed è applicata nel centro di gravità o baricentro del corpo.

Reazioni vincolari. Le forze di superficie che si manifestano in corrispondenza dei vincoli o dei punti di contatto tra corpi sono chiamate **reazioni vincolari**. Nei problemi piani, ovvero per i corpi soggetti a sistemi piani di forze, i vincoli più comuni sono illustrati nella Tabella 3.1. Si presti attenzione al modo in cui viene rappresentato ciascun vincolo e al tipo di reazione che esso esplica sul corpo posto a contatto. In generale si può sempre determinare il tipo di reazione vincolare considerando gli spostamenti e le rotazioni limitati dai vincoli.

Se il vincolo limita la traslazione in una direzione assegnata, in quella direzione si esplicherà, di conseguenza, una forza sul corpo vincolato. Allo stesso modo, se viene limitata una rotazione, sul corpo vincolato verrà esercitata una coppia. Ad esempio, un vincolo di carrello può solo impedire la traslazione nella direzione perpendicolare alla superficie di contatto, quindi esercita sul corpo vincolato una forza \mathbf{F} normale a questa. Dal momento che il corpo vincolato può ruotare liberamente rispetto al carrello, su di esso non si esercita alcuna coppia.



I componenti di molte macchine sono spesso collegati tra loro mediante cerniere che consentono la rotazione libera. Questo tipo di vincoli esercita sul corpo vincolato una forza, ma non una coppia.

Equazioni di equilibrio. Un corpo è in equilibrio se sono soddisfatti sia il **bilancio (o equilibrio) delle forze**, che impedisce il moto accelerato del corpo lungo una traiettoria rettilinea o curvilinea, sia il **bilancio (o equilibrio) dei momenti**, che impedisce la rotazione del corpo. Queste condizioni sono espresse in forma matematica dalle due equazioni vettoriali

$$\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F} &= \mathbf{0} \\ \Sigma \mathbf{M}_O &= \mathbf{0}\end{aligned}\quad (3.1)$$

in cui $\Sigma \mathbf{F}$ è la somma vettoriale di tutte le forze agenti sul corpo e $\Sigma \mathbf{M}_O$ è la somma vettoriale dei momenti di tutte le forze calcolati rispetto a un generico punto O . Se si introduce un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (O, x, y, z) , i vettori forza e momento possono essere scomposti in componenti lungo gli assi coordinati e le due equazioni precedenti possono essere riscritte in forma scalare come segue:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 & \Sigma F_y &= 0 & \Sigma F_z &= 0 \\ \Sigma M_x &= 0 & \Sigma M_y &= 0 & \Sigma M_z &= 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

Spesso nella progettazione strutturale i carichi agenti su un corpo sono rappresentabili come un **sistema piano di forze**. In questo caso, assumendo ad esempio che le forze giacciono nel piano $x-y$, sono sufficienti tre equazioni scalari a individuare la condizione di equilibrio del corpo:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma M_O &= 0\end{aligned}\quad (3.3)$$

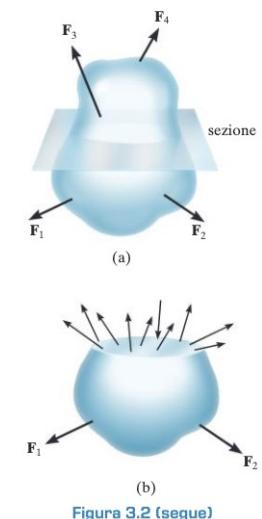
Affinché le equazioni di equilibrio siano scritte correttamente occorre individuare tutte le forze, note e incognite, che agiscono sul corpo. **Il modo migliore per tenere conto di queste forze consiste nel disegnare lo schema di corpo libero.**

Azioni interne risultanti. Una delle applicazioni più importanti della statica nell'analisi dei problemi di meccanica dei solidi consiste nel determinare la forza e il momento risultanti che, agendo all'interno di un corpo, sono necessari a tenerlo unito quando questo è soggetto a carichi esterni. Ad esempio, si consideri il corpo rappresentato nella Figura 3.2a, in equilibrio sotto l'azione di quattro forze esterne,² e si applichi il *metodo delle sezioni* allo scopo di determinare le forze interne che agiscono su una porzione specifica del corpo. Si supponga di suddividere il corpo in due parti per mezzo di una sezione ideale e si disegni lo schema di corpo libero di una delle due, Figura 3.2b. Affinché la parte disegnata sia in equilibrio, occorre postulare l'esistenza di forze interne che agiscono sulla sezione di separazione. Queste forze rappresentano l'azione che la porzione superiore del corpo esercita sulla porzione inferiore.

Sebbene l'esatta distribuzione delle forze interne sia *incognita*, le equazioni di equilibrio consentono di determinare univocamente, a par-



▶ Nel progetto degli elementi costruttivi di questo telaio è necessario prima di tutto determinare quanto valgono le azioni interne nelle differenti sezioni dell'elemento.

**Figura 3.2 (segue)**

² Il peso del corpo non è indicato, poiché si assume che esso sia trascurabile nel confronto con le altre forze.

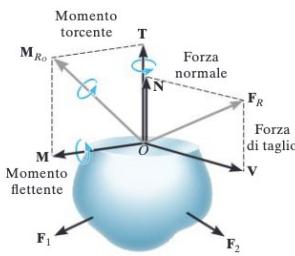
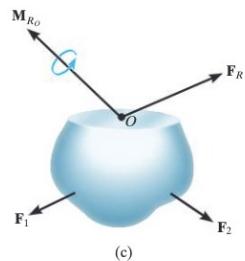


Figura 3.2 (continua)



Il peso di questo cartello e l'azione del vento su di esso causeranno forze normali e di taglio e momenti flettenti e torcenti nella colonna portante.

tire dalle forze esterne agenti sul corpo, la *forza risultante* \mathbf{F}_R e il *momento risultante* \mathbf{M}_{Ro} della distribuzione rispetto a un fissato punto O della sezione (Figura 3.2c). Si osservi che la forza risultante \mathbf{F}_R è applicata nel punto O , benché essa non dipenda dalla posizione di tale punto. Il momento risultante \mathbf{M}_{Ro} dipende, invece, dalla posizione del punto O , poiché a esso è riferito il braccio di ciascuna delle forze esterne presenti nello schema di corpo libero. Si mostrerà in seguito che il punto O viene fatto coincidere, nella maggior parte dei casi, con il *centro d'area (baricentro)* della sezione e si adotterà questa convenzione, a meno di indicazioni contrarie. Inoltre, se l'elemento strutturale possiede una dimensione prevalente rispetto alle altre due, com'è nelle aste o nelle travi, la sezione considerata è generalmente ortogonale all'asse longitudinale dell'elemento ed è denominata **sezione trasversale**.

Tre dimensioni. Nel seguito della trattazione si mostrerà come mettere in relazione le risultanti \mathbf{F}_R e \mathbf{M}_{Ro} alla distribuzione di forze interne agenti sulla sezione e si definiranno le equazioni da utilizzare nel problema strutturale. A tal fine occorre considerare le componenti di \mathbf{F}_R e \mathbf{M}_{Ro} agenti nel piano della sezione e in direzione ortogonale a essa, Figura 3.2d. Le quattro componenti dell'azione interna, dette anche *caratteristiche della sollecitazione*, sono definite come segue.

Forza normale, \mathbf{N} . Questa forza agisce ortogonalmente al piano della sezione e si manifesta quando le forze esterne inducono un allungamento o un accorciamento delle due porzioni del corpo.

Forza di taglio, \mathbf{V} . La forza di taglio giace nel piano della sezione e si manifesta quando le forze esterne causano lo scorrimento di una porzione del corpo rispetto all'altra.

Momento torcente, \mathbf{T} . Il momento torcente è indotto dalle forze esterne che tendono a far ruotare intorno all'asse normale alla sezione una porzione del corpo rispetto all'altra.

Momento flettente, \mathbf{M} . Il momento flettente è indotto dalle forze esterne che tendono a inflettere il corpo intorno a un asse appartenente al piano della sezione, ovvero a far ruotare intorno a tale asse una porzione del corpo rispetto all'altra.

In questo testo il momento flettente e il momento torcente sono rappresentati graficamente nello spazio tridimensionale come vettori e ne è indicato il verso mediante un arco di cerchio orientato. Secondo la *regola della mano destra*, il pollice indica il verso del vettore momento e le dita, chiudendosi sul palmo, indicano il verso del momento flettente e del momento torcente. Adottando un sistema di coordinate cartesiane ortogonali (O, x, y, z), ciascuna delle suddette componenti può essere determinata direttamente dalle sei equazioni di equilibrio scritte per ciascuna porzione del corpo.

Sistemi piani di forze. Se il corpo è soggetto a un *sistema piano di forze*, Figura 3.3a, le uniche componenti dell'azione interna ad agire sulla sezione sono la forza normale, la forza di taglio e il momento flettente, Figura 3.3b. Se si adotta il sistema di coordinate (O, x, y, z) indicato sulla porzione di sinistra del corpo, la forza normale \mathbf{N} è determinata dall'equazione di equilibrio $\sum F_x = 0$ e la forza di taglio \mathbf{V} dall'equazione di equilibrio $\sum F_y = 0$. Infine, il momento flettente \mathbf{M}_o può essere calcolato scrivendo l'equilibrio dei momenti rispetto al punto O (nella direzione dell'asse z) $\sum M_O = 0$, in modo da escludere i momenti indotti dalle forze incognite \mathbf{N} e \mathbf{V} .

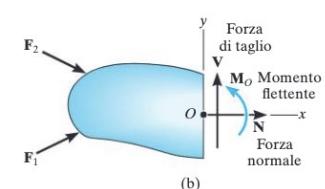
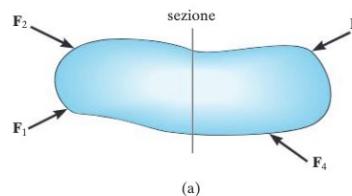


Figura 3.3

Punti salienti

- ▶ Le forze esterne sono applicabili su un corpo o come *forze di superficie, distribuite o concentrate*, o come *forze di volume*, agenti sull'intero volume del corpo.
- ▶ Le forze distribuite lungo una linea sono equivalenti a una *forza risultante di intensità* pari all'*area* sottesa dalla curva della distribuzione e applicata nel *centro* di questa area.
- ▶ Se un vincolo *impedisce la traslazione* del corpo vincolato in una assegnata direzione, in quella direzione esercita su di esso una *forza*; se invece ne *impedisce la rotazione*, esercita su di esso una *coppia*.
- ▶ Le equazioni di equilibrio $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ e $\sum \mathbf{M} = \mathbf{0}$ devono essere soddisfatte perché un corpo non acceleri traslando o ruotando.

Procedura di analisi

Il metodo delle sezioni è utilizzato per determinare le azioni *interne* risultanti rispetto a un punto appartenente a una sezione di un corpo. L'applicazione del metodo delle sezioni consta dei seguenti passaggi.

Reazioni vincolari

- ▶ In primo luogo si stabilisce quale porzione di corpo prendere in esame. Se tale porzione è vincolata al suolo o a un altro corpo, è necessario determinare le reazioni vincolari che agiscono su di essa prima di sezionare idealmente il corpo. Per fare ciò si disegna lo schema di corpo libero del *corpo non sezionato* e si applicano le equazioni di equilibrio per calcolare le reazioni vincolari.

Schema di corpo libero

- ▶ Si fissa la *posizione esatta* di tutte le forze esterne e coppie che agiscono sul corpo, quindi si suppone di suddividere idealmente il corpo in corrispondenza del punto in cui occorre calcolare le azioni interne.

- ▶ Se il corpo rappresenta un elemento di una struttura o di una macchina, si considera spesso una sezione ortogonale all'asse longitudinale dell'elemento.
- ▶ Si disegna lo schema di corpo libero della porzione di corpo considerata e si indicano sulla sezione le azioni interne incognite \mathbf{N} , \mathbf{V} , \mathbf{M} e \mathbf{T} , generalmente applicate nel punto che rappresenta il *centro d'area* della sezione, coincidente con il baricentro in caso di distribuzione uniforme di massa.
- ▶ Se l'elemento strutturale è soggetto a un *sistema piano di forze*, le uniche azioni non nulle sono \mathbf{N} , \mathbf{V} e \mathbf{M} .

³ Le quattro caratteristiche dell'azione interna sulla sezione sono indicate in letteratura anche come \mathbf{N} (forza normale), \mathbf{T} (forza di taglio), \mathbf{M} (momento flettente), \mathbf{M}_t (momento torcente) (N. d. Rev.).

- Si fissano gli assi coordinati x, y, z con origine nel centro d'area della sezione e si evidenziano le componenti incognite agenti lungo tali assi.

Equazioni di equilibrio

- I momenti devono essere calcolati in corrispondenza della sezione e rispetto a ciascuno degli assi

- coordinati, così si escludono i contributi delle forze incognite \mathbf{N} e \mathbf{V} e si calcolano direttamente \mathbf{M} (e \mathbf{T}).
Se risolvendo le equazioni di equilibrio per una componente si ottiene un valore negativo, il verso secondo il quale essa agisce è *opposto* a quello ipotizzato nello schema di corpo libero.

Esempio 3.1

Si determinino le caratteristiche della sollecitazione agenti sulla sezione trasversale C della trave rappresentata nella Figura 3.4a.

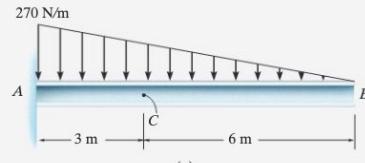
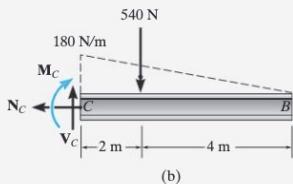


Figura 3.4 (segue)



SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Il problema viene risolto nel modo più rapido se si considera il tratto CB della trave, poiché non occorre calcolare le reazioni vincolari in A .

Schema di corpo libero. Se si suppone di suddividere idealmente la trave con una sezione ortogonale all'asse longitudinale, si ottiene lo schema di corpo libero mostrato nella Figura 3.4b. È importante considerare la distribuzione esatta del carico prima di tracciare la sezione. Solo successivamente si può sostituire alla distribuzione la sua risultante. Il valore che il carico distribuito assume nella sezione C si calcola dalla proporzione $p/6 \text{ m} = (270 \text{ N/m})/9 \text{ m}, p = 180 \text{ N/m}$ (Figura 3.4a). L'intensità della forza risultante è pari all'area sottesa dalla curva della distribuzione (triangolare) ed è applicata nel centro d'area della distribuzione. Segue $F = \frac{1}{2}(180 \text{ N/m})(6 \text{ m}) = 540 \text{ N}$, applicata a $1/3(6 \text{ m}) = 2 \text{ m}$ da C , come indicato nella Figura 3.4b.

Equazioni di equilibrio. Si scrivono le equazioni di equilibrio, ottenendo:

$$\rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$-N_C = 0$$

$$N_C = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0;$$

$$V_C - 540 \text{ N} = 0$$

$$V_C = 540 \text{ N}$$

$$\downarrow \sum M_C = 0;$$

$$-M_C - 540 \text{ N} (2 \text{ m}) = 0$$

$$M_C = -1080 \text{ N m}$$

OSSERVAZIONE: Il segno negativo indica che M_C agisce nel verso opposto a quello indicato nello schema di corpo libero. Si provi a risolvere il problema prendendo in considerazione il tratto AC dopo aver calcolato le reazioni vincolari in A , mostrate nella Figura 3.4c. Il carico trapezoidale è stato scomposto in una parte uniforme e in una parte triangolare.

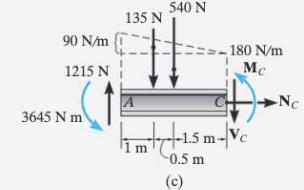


Figura 3.4 (continua)

Esempio 3.2

Si determinino le caratteristiche della sollecitazione agenti sulla sezione trasversale C dell'albero di macchina rappresentato nella Figura 3.5a. I due appoggi che sostengono l'albero in A e in B applicano su di esso sole forze verticali.

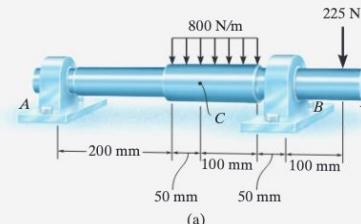


Figura 3.5

SOLUZIONE

Si risolve il problema considerando il tratto AC dell'albero.

Reazioni vincolari. Lo schema di corpo libero dell'albero non sezionato è mostrato nella Figura 3.5b. Poiché si sta considerando il segmento AC , occorre calcolare solo la reazione vincolare in A . Perché?

$$\downarrow \sum M_B = 0; -A_y(0.400 \text{ m}) + 120 \text{ N}(0.125 \text{ m}) - 225 \text{ N}(0.100 \text{ m}) = 0$$

$$A_y = -18.75 \text{ N}$$

Il segno negativo ottenuto per A_y indica che A_y agisce nel *verso opposto* a quello indicato nello schema di corpo libero.

Schema di corpo libero. Se si suppone di suddividere idealmente l'albero con una sezione ortogonale all'asse longitudinale in C , si ottiene lo schema di corpo libero del segmento AC mostrato nella Figura 3.5c.

Equazioni di equilibrio.

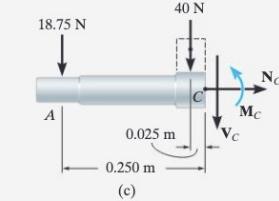
$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_C = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad -18.75 \text{ N} - 40 \text{ N} - V_C = 0$$

$$V_C = -58.8 \text{ N}$$

$$\downarrow \sum M_C = 0; \quad M_C + 40 \text{ N}(0.025 \text{ m}) + 18.75 \text{ N}(0.250 \text{ m}) = 0$$

$$M_C = -5.69 \text{ N m}$$

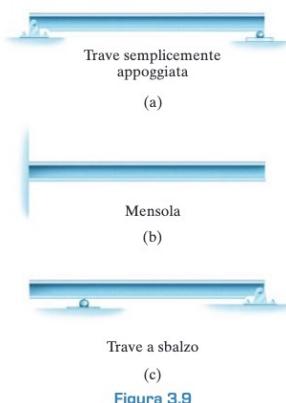


$$\begin{aligned} (M_B)_x &= -30.3 \text{ N m} \\ \Sigma(M_B)_y &= 0; (M_B)_y + 24.525 \text{ N (0.625 m)} + 50 \text{ N (1.25 m)} = 0 \\ (M_B)_y &= -77.8 \text{ N m} \\ \Sigma(M_B)_z &= 0; (M_B)_z = 0 \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE: Che cosa indicano i segni negativi ottenuti per $(M_B)_x$ e $(M_B)_y$? Si osservi che la forza normale $N_B = (F_B)_y = 0$, mentre la forza di taglio vale

$$V_B = \sqrt{(0)^2 + (84.3)^2} = 84.3 \text{ N.}$$

Inoltre, il momento torcente vale $T_B = (M_B)_y = 77.8 \text{ N m}$ e il momento flettente è pari a $M_B = \sqrt{(30.3)^2 + (0)} = 30.3 \text{ N m}$.



Trave semplicemente appoggiata
(a)
Mensola
(b)
Trave a sbalzo
(c)

Figura 3.9

3.2 Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione

Si definisce **trave** un elemento strutturale che possiede una dimensione prevalente rispetto alle altre due, generalmente soggetto a carichi applicati in direzione ortogonale al proprio asse longitudinale. Il più delle volte, le travi sono rettilinee con sezione trasversale costante e presentano una lunghezza significativa. La classificazione usuale è basata sulle condizioni di vincolo: una trave è detta *semplicemente appoggiata* se è vincolata con una cerniera a un estremo e con un carrello all'altro estremo, Figura 3.9a; è detta *mensola* se presenta un estremo incastrato e l'altro libero (Figura 3.9b); è detta *a sbalzo* se una o entrambe le estremità si estendono, prive di vincoli, al di là dei punti di appoggio della trave (Figura 3.9c). Le travi sono senza dubbio tra gli elementi strutturali di più frequente impiego. Ne sono un esempio le travi dei solai negli edifici, gli impalcati dei ponti e le ali degli aerei. Molti altri elementi sono riconducibili al modello trave, come gli alberi motore o di trasmissione di un'automobile, il braccio di una gru e gran parte delle ossa che compongono lo scheletro umano.

I carichi esterni applicati inducono internamente alla trave una forza normale N , una forza di taglio V e un momento flettente M che, in generale, variano da punto a punto lungo l'asse dell'elemento. Nel problema strutturale è quindi essenziale determinare i valori massimi assunti da queste caratteristiche della sollecitazione. Una modalità di procedere consiste nel definire opportune funzioni che descrivano l'andamento di N , V e M al variare di un'ascissa fissata lungo l'asse della trave. Le rappresentazioni grafiche delle funzioni forza normale, taglio e momento flettente prendono il nome di **diagrammi della forza normale, del taglio e del momento flettente (diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione)**. L'esame dei diagrammi consente di determinare i valori massimi del taglio e del momento e di apprezzare le loro *variazioni* lungo l'asse della trave. L'impiego che ne fanno i tecnici è rivolto soprattutto alla verifica e al progetto delle travi.

Nei Paragrafo 3.1 è stato introdotto il metodo delle sezioni per il calcolo delle azioni interne risultanti in un *singolo punto* di un elemento strutturale. Se, invece, si vogliono determinare le funzioni N , V e M al variare dell'ascissa x lungo l'asse della trave, si può pensare di suddividere idealmente il corpo in corrispondenza di una generica coordinata x e di esprimere N , V e M in funzione di x . A tale proposito, l'origine e il verso positivo dell'ascissa possono essere fissati *arbitrariamente*, tuttavia è con-

suetudine prendere l'origine nell'estremo sinistro della trave e orientare l'ascissa verso destra.

Le funzioni forza normale, taglio e momento presentano delle *discontinuità* in corrispondenza dei punti di applicazione di forze e coppie concentrate. Le loro derivate sono discontinue in questi stessi punti e, inoltre, anche in corrispondenza di discontinuità nel carico distribuito. Per questo motivo, le funzioni forza normale, taglio e momento devono essere definite su *ciascun tratto* di trave *compreso* tra due discontinuità dei carichi applicati. Si consideri, ad esempio, la trave rappresentata nella Figura 3.10, sulla quale sono individuate le coordinate x_1 , x_2 , x_3 . La coordinata x_1 è impiegata per determinare le funzioni taglio e momento sul tratto AB , analogamente la coordinata x_2 per il tratto BC e la coordinata x_3 per il tratto CD .

Se la trave è ad asse rettilineo la forza normale N si può determinare separatamente dalla forza di taglio V e dal momento flettente M . Ciò viene fatto quando la trave è sollecitata da forze esterne, distribuite e/o concentrate, ortogonali alla linea d'asse della trave ($N = 0$) e quando le azioni tagliente e flettente risultano più importanti rispetto a quella della forza normale. Di seguito ci concentreremo sulla determinazione delle funzioni e dei diagrammi del taglio e del momento flettente. Della forza normale ci occuperemo nel Capitolo 8.

Convenzione dei segni per la trave. Prima di definire un metodo per la determinazione delle funzioni e dei diagrammi della forza normale, del taglio e del momento è necessario stabilire una *convenzione dei segni* per le azioni interne. Sebbene la scelta di una convenzione sia sempre arbitraria, quella invalsa nell'uso e qui adottata è illustrata nella Figura 3.11a.

Sulla parte di sinistra della trave la forza normale N agisce verso destra, la forza di taglio V agisce verso il basso, mentre il momento M agisce in senso antiorario. In accordo con il principio di azione e reazione, sulla parte di destra della trave agiscono le stesse azioni interne, ma di verso opposto. Un modo facile per ricordare la convenzione dei segni qui adottata consiste nell'isolare un piccolo tronco (concio) di trave e notare che la *forza normale positiva* induce un allungamento del concio, Figura 3.11b; la *forza di taglio positiva* tende a far ruotare il concio in senso orario, Figura 3.11c; per definire il momento flettente positivo si fissano le fibre di riferimento della trave e si considera positivo il momento che tende tali fibre (nella Figura 3.11a e 3.11d le fibre di riferimento sono le fibre inferiori della trave).

Punti salienti

- ▶ Le **travi** sono elementi strutturali rettilinei di lunghezza significativa, generalmente soggetti a carichi applicati in direzione perpendicolare al proprio asse longitudinale. Esse vengono classificate sulla base delle condizioni di vincolo come, ad esempio, la trave semplicemente appoggiata, la mensola e la trave a sbalzo.
- ▶ Nella verifica e nel progetto di una trave è essenziale conoscere l'*andamento* del taglio e del momento lungo l'asse dell'elemento, in modo da individuare i punti in cui tali azioni sono massime.
- ▶ Dopo aver stabilito una convenzione dei segni per il taglio e il momento è possibile definire delle funzioni che ne descrivono l'andamento al variare di un'ascissa fissata lungo l'asse della trave. Le rappresentazioni grafiche di queste funzioni prendono il nome di *diagrammi del taglio e del momento*.

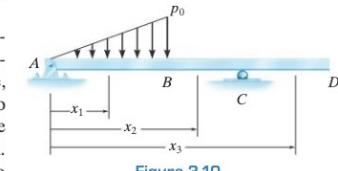


Figura 3.10

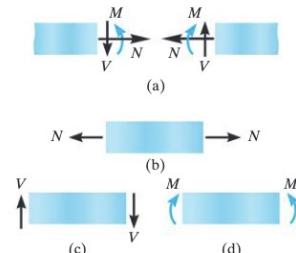


Figura 3.11

Procedura di analisi

La procedura per costruire i diagrammi del taglio e del momento di una trave è la seguente.

Reazioni vincolari

- Si determinano le forze e le coppie reattive agenti sulla trave, scomponendo tutte le forze secondo le direzioni ortogonale e parallela all'asse longitudinale.

Funzioni taglio e momento

- Si introduce un'ascissa x , avente origine nell'estremo sinistro della trave, per ciascun tratto di trave compreso tra due discontinuità dei carichi applicati (discontinuità del carico distribuito, punti di applicazione di forze e coppie concentrate).
- Si suddivide idealmente la trave con una sezione ortogonale all'asse longitudinale in corrispondenza della coordinata x e si disegna lo schema di corpo libero di uno dei due segmenti dell'elemento. Le azioni interne V e M sono disegnate nel loro verso positivo, secondo la convenzione indicata nella Figura 3.11.
- Il valore del taglio in x si ricava dall'equilibrio delle forze in direzione ortogonale all'asse della trave.
- Il valore del momento in x si ricava dall'equilibrio dei momenti calcolati rispetto alla sezione considerata.

Diagrammi del taglio e del momento

- Si disegnano i diagrammi del taglio (taglio in funzione di x) e del momento flettente (momento flettente in funzione di x). Per una trave ad asse orizzontale, il diagramma del taglio viene generalmente disegnato al di sopra dell'asse x se indica valori positivi, al di sotto se indica valori negativi; in alternativa, non esistendo una convenzione condivisa, il segno del taglio viene indicato esplicitamente nel diagramma. Il diagramma del momento flettente viene disegnato dal lato delle fibre tese della trave (convenzione di rappresentazione in uso in Italia).⁵
- In linea generale, è opportuno disegnare i diagrammi del taglio e del momento al di sotto dello schema di corpo libero della trave.

⁵ Nei Paesi anglosassoni, la convenzione di rappresentazione del diagramma del momento flettente è diversa. Per una trave ad asse orizzontale, il diagramma del momento flettente viene disegnato al di sopra dell'asse x se indica valori positivi, al di sotto se indica valori negativi (N.d.R.).

Esempio 3.6

Si disegnino i diagrammi del taglio e del momento per la trave rappresentata nella Figura 3.12a.

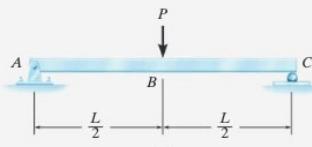
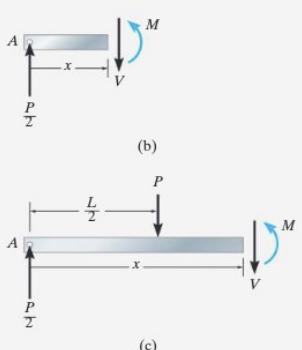


Figura 3.12 (segue)

SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Le reazioni vincolari sono riportate nella Figura 3.12d.

Funzioni taglio e momento. Si suddivide idealmente la trave con una sezione posta a una generica distanza x dall'appoggio in A e compresa nel tratto AB. Lo schema di corpo libero del segmento di trave isolato a sinistra della sezione è riportato nella Figura 3.12b. Le incognite V e M agenti



(c)

sulla giacitura destra del segmento sono indicate nel loro verso positivo secondo la convenzione adottata. Dalle equazioni di equilibrio si ottiene:

$$+\uparrow\sum F_y = 0; \quad V = \frac{P}{2} \quad (1)$$

$$\downarrow+\sum M = 0; \quad M = \frac{P}{2}x \quad (2)$$

Si considera, quindi, la sezione individuata dalla coordinata x compresa nel tratto BC e si disegna lo schema di corpo libero del segmento di trave isolato a sinistra della sezione, Figura 3.12c. Le incognite V e M sono indicate sempre nel loro verso positivo. Ne segue:

$$+\uparrow\sum F_y = 0; \quad \frac{P}{2} - P - V = 0 \quad (3)$$

$$V = -\frac{P}{2}$$

$$\downarrow+\sum M = 0; \quad M + P\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}x = 0 \quad (4)$$

$$M = \frac{P}{2}(L - x)$$

Il diagramma del taglio è la rappresentazione grafica delle funzioni (1) e (3), mentre il diagramma del momento è la rappresentazione grafica delle funzioni (2) e (4), Figura 3.12d.

OSSERVAZIONE: Una prima verifica dei risultati discende dal fatto che essi soddisfano le relazioni $dV/dx = -p$ e $dM/dx = V$ su ciascun tratto. (Queste relazioni saranno oggetto del prossimo paragrafo, Equazioni (3.4) e (3.5)).

Esempio 3.7

Si disegnino i diagrammi del taglio e del momento per la trave rappresentata nella Figura 3.13a.

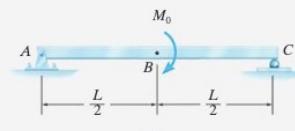


Figura 3.13 (segue)

SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Le reazioni vincolari sono riportate nella Figura 3.13d.

Funzioni taglio e momento. Analogamente al problema precedente, per descrivere il taglio e il momento sull'intera lunghezza della trave è necessario fare riferimento a due coordinate x distinte. Si ottiene per il tratto AB, Figura 3.13b.

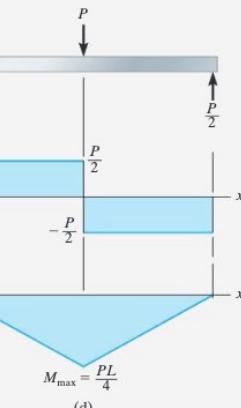
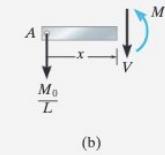
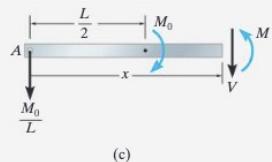


Figura 3.12 (continua)



(b)



$$+\uparrow\sum F_y = 0; \quad V = -\frac{M_0}{L}$$

$$\downarrow +\sum M = 0; \quad M = -\frac{M_0}{L}x$$

e per il tratto BC, Figura 3.13c,

$$+\uparrow\sum F_y = 0; \quad V = -\frac{M_0}{L}$$

$$\downarrow +\sum M = 0; \quad M = M_0 - \frac{M_0}{L}x, \quad M = M_0(1 - \frac{x}{L})$$

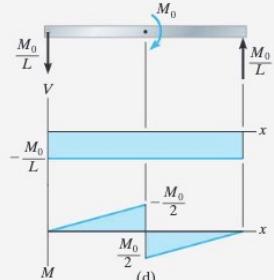


Figura 3.13 (continua)

Diagrammi del taglio e del momento. I diagrammi del taglio e del momento riportati nella Figura 3.13d sono la rappresentazione grafica delle funzioni (1) e (2) ottenute. Dall'Equazione (1) si può calcolare il punto della trave in cui il taglio è nullo:

$$\downarrow +\sum M = 0; \quad -\left(\frac{pL}{2}\right)x + (px)\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0$$

$$(2) \quad M = \frac{p}{2}(Lx - x^2)$$

I risultati ottenuti sono verificati, poiché vale $dV/dx = -p$, assumendo il carico positivo perché diretto verso il basso. È inoltre verificato $dM/dx = V$.

Diagrammi del taglio e del momento. I diagrammi del taglio e del momento riportati nella Figura 3.14c sono la rappresentazione grafica delle funzioni (1) e (2) ottenute. Dall'Equazione (1) si può calcolare il punto della trave in cui il taglio è nullo:

$$V = p\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

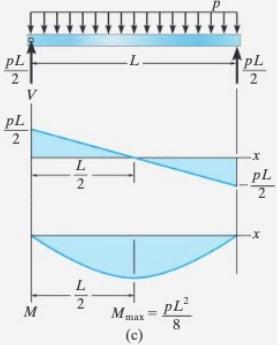
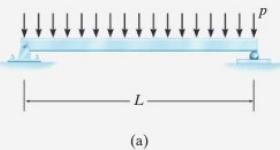


Figura 3.14 (continua)

OSSERVAZIONE: In questo stesso punto si registra il *valore massimo del momento* poiché in base all'Equazione (3.5) la pendenza del diagramma del momento vale $V = 0 = dM/dx$. Dall'Equazione (2) discende:

$$M_{\max} = \frac{p}{2}\left[L\left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{L}{2}\right)^2\right] = \frac{pL^2}{8}$$



Esempio 3.8

Si disegnino i diagrammi del taglio e del momento per la trave rappresentata nella Figura 3.14a.

SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Le reazioni vincolari sono riportate nella Figura 3.14c.

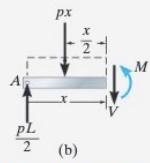


Figura 3.14 (segue)

Funzioni taglio e momento. Nella Figura 3.14b è riportato lo schema di corpo libero del segmento di trave a sinistra della sezione considerata. Il carico distribuito agente su di esso può essere rappresentato mediante la forza risultante solo *dopo* che il segmento è stato isolato dalla trave per studiarne l'equilibrio. La risultante ha intensità px , essendo pari a x la lunghezza del tratto di trave considerato, ed è applicata sull'asse passante per il *centro dell'area* sottesa al diagramma del carico, a distanza $x/2$ dall'estremo destro della trave. Si scrivono le equazioni di equilibrio, ottenendo:

$$+\uparrow\sum F_y = 0; \quad \frac{pL}{2} - px - V = 0 \quad (1)$$

$$V = p\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

Esempio 3.9

Si disegnino i diagrammi del taglio e del momento per la trave rappresentata nella Figura 3.15a.

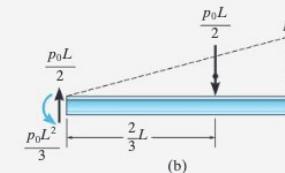
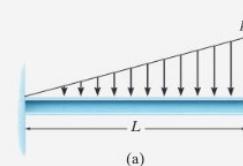
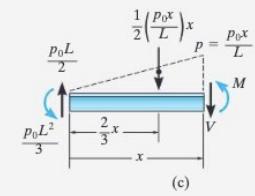


Figura 3.15 (segue)

SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Il carico distribuito viene rappresentato per mezzo della risultante e si ottengono le reazioni vincolari indicate nella Figura 3.15b.

Funzioni taglio e momento. Nella Figura 3.15c è riportato lo schema di corpo libero di un segmento di trave di lunghezza x . Il valore del carico distribuito in corrispondenza della sezione considerata si ricava dalla proporzione $p/x = p_0/L$, quindi $p = p_0x/L$. Noto il valore del carico



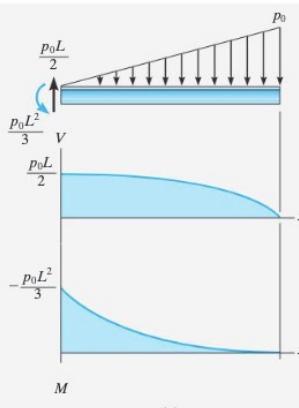


Figura 3.15 (continua)

sulla sezione, la sua risultante ha intensità pari all'area sottesa dal diagramma del carico, Figura 3.15c. Ne segue:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad \frac{P_0 L}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{P_0 x}{L} \right) x - V = 0$$

$$V = \frac{P_0}{2L} (L^2 - x^2) \quad (1)$$

$$\downarrow + \Sigma M = 0; \quad \frac{P_0 L^2}{3} - \frac{P_0 L}{2} (x) + \frac{1}{2} \left(\frac{P_0 x}{L} \right) x \left(\frac{x}{3} \right) + M = 0$$

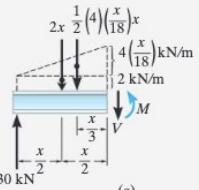
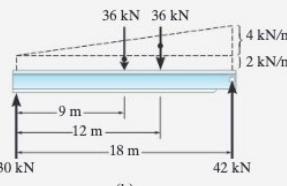
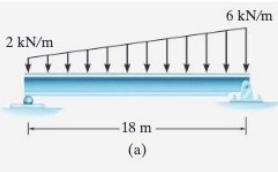
$$M = \frac{P_0}{6L} (-2L^3 + 3L^2x - x^3) \quad (2)$$

I risultati ottenuti sono verificati se soddisfano le Equazioni (3.4) e (3.5):

$$p = -\frac{dV}{dx} = -\frac{P_0}{2L} (0 - 2x) = \frac{P_0 x}{L}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{P_0}{6L} (0 + 3L^2 - 3x^2) = \frac{P_0}{2L} (L^2 - x^2)$$

Diagrammi del taglio e del momento. I grafici delle funzioni (1) e (2) sono mostrati nella Figura 3.15d.



Esempio 3.10

Si disegnino i diagrammi del taglio e del momento per la trave rappresentata nella Figura 3.16a.

SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Il carico distribuito trapezoidale viene scomposto nella somma di un carico uniforme e di un carico triangolare, ai quali vengono successivamente sostituite le rispettive risultanti. Le reazioni vincolari ottenute sono indicate nello schema di corpo libero della trave, Figura 3.16b.

Funzioni taglio e momento. Nella Figura 3.16c è riportato lo schema di corpo libero del segmento di trave a sinistra della sezione considerata. Come in precedenza, il carico trapezoidale viene scomposto nella somma di un carico uniforme e di un carico triangolare. Il valore del carico triangolare sulla sezione si ricava per proporzione. Ciascuna delle forze risultanti mostrate nella figura è applicata nel centro d'area della corrispondente distribuzione. Si scrivono le equazioni di equilibrio, ottenendo

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 30 \text{ kN} - (2 \text{ kN/m})x - \frac{1}{2} (4 \text{ kN/m}) \left(\frac{x}{18 \text{ m}} \right) x - V = 0$$

$$V = \left(30 - 2x - \frac{x^2}{9} \right) \text{kN} \quad (1)$$

Figura 3.16 (segue)

$$\downarrow + \Sigma M = 0;$$

$$-30 \text{ kN}(x) - x(2 \text{ kN/m})x \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} (4 \text{ kN/m}) \left(\frac{x}{18 \text{ m}} \right)x \left(\frac{x}{3} \right) + M = 0$$

$$M = \left(30x - x^2 - \frac{x^3}{27} \right) \text{kN m} \quad (2)$$

L'Equazione (2) è verificata poiché soddisfa $dM/dx = V$, dove V è dato dall'Equazione (1). Allo stesso modo, la relazione $p = -dV/dx = 2 + \frac{2}{9}x$ è soddisfatta per $x = 0$, $p = 2 \text{ kN/m}$ e per $x = 18 \text{ m}$, $p = 6 \text{ kN/m}$, Figura 3.16a.

Diagrammi del taglio e del momento. Le Funzioni (1) e (2) sono diagrammate nella Figura 3.16d. Nel punto ove si ha il momento massimo deve essere $dM/dx = V = 0$ ovvero, dall'Equazione (1),

$$V = 30 - 2x - \frac{x^2}{9} = 0$$

Scegliendo la radice positiva

$$x = 9.735 \text{ m}$$

segue dall'Equazione (2)

$$M_{\max} = 30(9.735) - (9.735)^2 - \frac{(9.735)^3}{27} = 163 \text{ kN m}$$

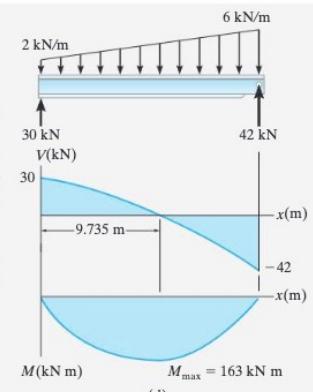


Figura 3.16 (segue)

Esempio 3.11

Si disegnino i diagrammi del taglio e del momento per la trave rappresentata nella Figura 3.17a.

SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Le reazioni vincolari ottenute sono indicate sullo schema di corpo libero della trave, Figura 3.17d.

Funzioni taglio e momento. La mezzeria della trave è un punto di discontinuità del carico distribuito e il punto di applicazione di una forza concentrata. Per questi motivi è necessario fare riferimento a due coordinate x distinte per descrivere il taglio e il momento sull'intera lunghezza della trave.

$$0 \leq x_1 < 5 \text{ m}, \text{ Figura 3.17b:}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 5.75 \text{ kN} - V = 0$$

$$V = 5.75 \text{ kN} \quad (1)$$

$$\downarrow + \Sigma M = 0; \quad -80 \text{ kN m} - 5.75 \text{ kN } x_1 + M = 0$$

$$M = (5.75x_1 + 80) \text{ kN m} \quad (2)$$

$$5 \text{ m} < x_2 \leq 10 \text{ m}, \text{ Figura 3.17c:}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 5.75 \text{ kN} - 15 \text{ kN} - 5 \text{ kN/m} (x_2 - 5 \text{ m}) - V = 0$$

$$V = (15.75 - 5x_2) \text{ kN} \quad (3)$$

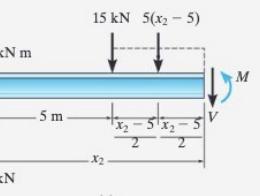
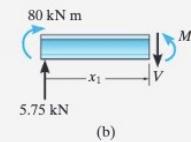
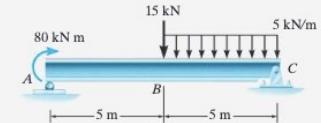


Figura 3.17 (segue)

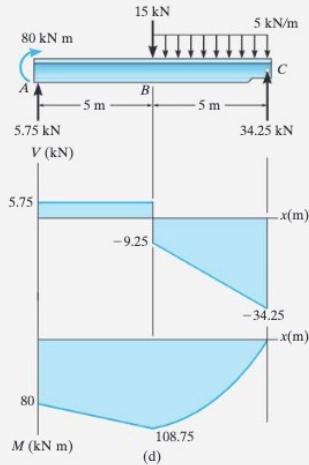


Figura 3.17 (continua)

$$\begin{aligned} \downarrow +\Sigma M = 0; \quad & -80 \text{ kN m} - 5.75 \text{ kN } x_2 + 15 \text{ kN}(x_2 - 5 \text{ m}) + \\ & + 5 \text{ kN/m} (x_2 - 5 \text{ m}) \left(\frac{x_2 - 5 \text{ m}}{2} \right) + M = 0 \\ & M = (-2.5x_2^2 + 15.75x_2 + 92.5) \text{ kN m} \quad (4) \end{aligned}$$

Come verifica dei risultati ottenuti, si osservi che essi soddisfano le relazioni $dV/dx = -p$ e $dM/dx = V$. Un'ulteriore verifica discende dal fatto che nelle sezioni di appoggio le funzioni taglio e momento forniscono i valori delle reazioni vincolari ottenute dall'equilibrio della trave, Figura 3.17d: per $x_1 = 0$, dalle Equazioni (1) e (2) discendono $V = 5.75 \text{ kN}$ e $M = 80 \text{ kN m}$; per $x_2 = 10$, dalle Equazioni (3) e (4) discendono $V = -34.25 \text{ kN}$ e $M = 0$.

Diagrammi del taglio e del momento. I grafici delle Funzioni (1) – (4) sono mostrati nella Figura 3.17d.

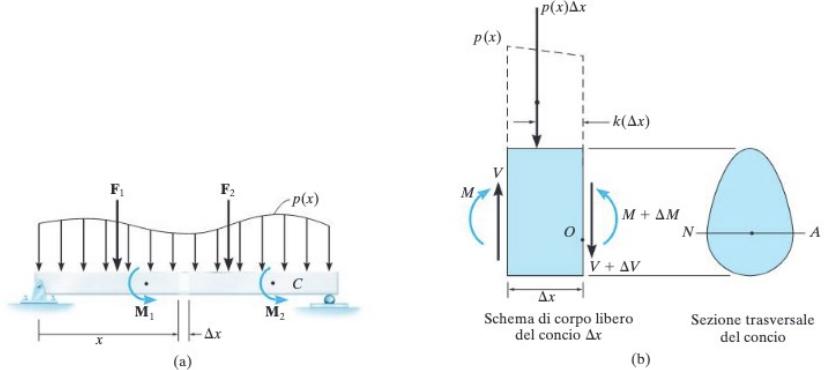


Figura 3.18

$$\begin{aligned} \downarrow +\Sigma M_O = 0; \quad & -V \Delta x - M + p(x) \Delta x [k(\Delta x)] + (M + \Delta M) = 0 \\ & \Delta M = V \Delta x - p(x) k(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Dividendo per Δx e passando al limite per $\Delta x \rightarrow 0$, seguono

$$\frac{dV}{dx} = -p(x) \quad (3.4)$$

pendenza del diagramma del taglio in un punto = valore del carico distribuito nel punto

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \quad (3.5)$$

pendenza del diagramma del momento in un punto = valore del taglio nel punto

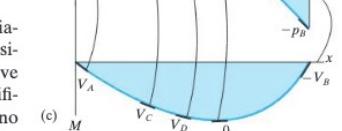
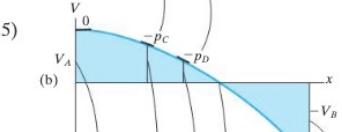
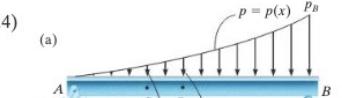


Figura 3.19 (segue)

Le due equazioni precedenti sono utili a costruire in maniera veloce i diagrammi del taglio e del momento di una trave. L'Equazione (3.4) sta a significare che la *pendenza* del diagramma del taglio in un punto della trave è uguale all'opposto del carico distribuito nel punto. A titolo esemplificativo, si consideri la trave nella Figura 3.19a. Il carico distribuito ha segno positivo e cresce in valore da 0 a p_B . Il diagramma del taglio sarà dato, perciò, da una curva con *pendenza negativa* variabile da 0 a $-p_B$. I valori di pendenza in punti specifici $p_A = 0, -p_C, -p_D$, e $-p_B$ sono indicati nella Figura 3.19b.

Analogamente, l'Equazione (3.5) sta a significare che la *pendenza* del diagramma del momento in un punto della trave equivale al valore del taglio nel punto. Nella Figura 3.19b il diagramma del taglio inizia con il valore $+V_A$, decresce fino ad annullarsi e poi diviene negativo, raggiungendo il valore finale $-V_B$. Il diagramma del momento ha quindi una pendenza iniziale pari a $+V_A$, pendenza positiva e decrescente fino a 0 in un primo tratto e, successivamente, pendenza negativa con valore finale $-V_B$.

3.3 Metodo grafico per la costruzione dei diagrammi di taglio e momento

Nei casi in cui la trave è soggetta a numerosi carichi esterni la determinazione analitica delle funzioni taglio e momento e, successivamente, dei loro diagrammi può risultare un'operazione onerosa. In questo paragrafo si introdurrà un metodo rapido per la costruzione di tali diagrammi, facendo uso di due relazioni differenziali intercorrenti tra le funzioni che descrivono il carico distribuito, il taglio e il momento.

Conci di trave soggetti a carichi distribuiti. Si consideri la trave rappresentata nella Figura 3.18a, soggetta a una generica condizione di carico. Si supponga di estrarre dalla trave, in corrispondenza della coordinata x , un concio di lunghezza Δx , il cui schema di corpo libero è mostrato nella Figura 3.18b. Tale concio è soggetto solo al carico distribuito e non si considerano per ora i conci presso i punti di applicazione di forze o coppie concentrate.

Le azioni interne agenti sul concio sono indicate nei loro versi positivi, in accordo con le convenzioni della Figura 3.11. Il carico distribuito trasversale $p(x)$ è assunto positivo se diretto verso il basso, come indicato nella figura. Per l'equilibrio del concio, inoltre, la forza interna di taglio e il momento interno risultano incrementati nel verso delle x crescenti, ossia sulla sezione destra del concio. Il carico distribuito è equivalente alla forza risultante $p(x) \Delta x$ applicata alla distanza $k(\Delta x)$ dalla sezione destra, con $0 < k < 1$ [ad esempio, se $p(x)$ è *uniformemente distribuito*, $k = \frac{1}{2}$]. Scrivendo le equazioni di equilibrio del concio, si ottiene:

$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_y = 0; \quad & V - p(x) \Delta x - (V + \Delta V) = 0 \\ & \Delta V = -p(x) \Delta x \end{aligned}$$

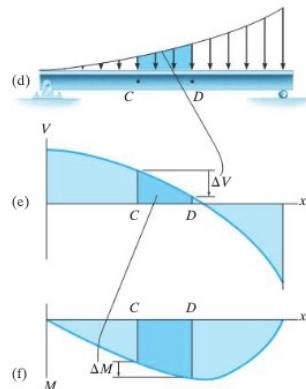
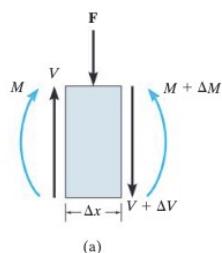
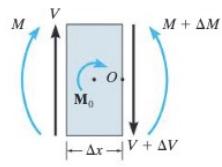


Figura 3.19 (continua)



(a)



(b)

Figura 3.20

I valori di pendenza in punti specifici V_A , V_C , V_D , e $-V_B$ sono indicati nella Figura 3.19c.

Le Equazioni (3.4) e (3.5) possono essere scritte anche nella forma $dV = -p(x) dx$ e $dM = V(x) dx$. Se si osserva che i termini $p(x) dx$ e $V(x) dx$ rappresentano le aree infinitesime sottratte, rispettivamente, al diagramma del carico distribuito e del taglio, se ne può calcolare l'integrale tra due punti C e D della trave, Figura 3.19d, ottenendo

$$\Delta V = - \int p(x) dx \quad (3.6)$$

variazione = - area sottesa al diagramma del taglio
del carico distribuito

$$\Delta M = \int V(x) dx \quad (3.7)$$

variazione = area sottesa al diagramma
del momento del taglio

L'Equazione (3.6) sta a significare che la variazione del taglio tra C e D è uguale all'area sottesa tra i due punti al diagramma del carico distribuito, Figura 3.19d, presa con il segno negativo.

Analogamente, secondo l'Equazione (3.7) la variazione del momento tra C e D , Figura 3.19f, è uguale all'area sottesa tra i due punti al diagramma del taglio.

Com'è stato già detto, le equazioni precedenti non valgono nei punti di applicazione di forze e coppie concentrate.

Conci di trave soggetti a forze e coppie concentrate. Si consideri il concio di lunghezza Δx estratto dalla trave nella Figura 3.18a in corrispondenza del punto di applicazione di una forza concentrata. Lo schema di corpo libero del concio è riportato nella Figura 3.20a. Per l'equilibrio delle forze deve essere

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V - F - (V + \Delta V) = 0 \\ \Delta V = -F \quad (3.8)$$

Quindi, se la forza F è diretta verso il basso, la variazione ΔV è negativa e il taglio subisce un *decremento*, mentre se la forza F è diretta verso l'alto, la variazione ΔV è positiva e il taglio subisce un *incremento*.

Nella Figura 3.20b è riportato lo schema di corpo libero del concio estratto dalla trave in corrispondenza del punto di applicazione di una coppia concentrata. Per l'equilibrio dei momenti, deve essere:

$$\downarrow + \sum M_O = 0; \quad M + \Delta M - M_0 - V \Delta x - M = 0$$

Al limite per $\Delta x \rightarrow 0$, si ottiene

$$\Delta M = M_0 \quad (3.9)$$

In questo caso, se la coppia applicata M_0 è *oraria*, la variazione ΔM è positiva e il momento subisce un *incremento*. Se, invece, la coppia applicata M_0 è *antioraria*, la variazione ΔM è negativa e il momento subisce un *decremento*.

Procedura di analisi

La procedura illustrata di seguito fornisce un metodo per costruire i diagrammi del taglio e del momento di una trave sulla base delle relazioni intercorrenti tra il carico distribuito e le azioni interne.

Reazioni vincolari

- ▶ Si determinano le reazioni vincolari e si scompongono le forze agenti sulla trave secondo le direzioni ortogonale e parallela all'asse longitudinale.

Diagramma del taglio

- ▶ Si riportano sul diagramma i valori noti del taglio V ai due estremi della trave.
- ▶ Poiché $dV/dx = -p$, la pendenza del diagramma del taglio in un punto della trave è uguale al valore del carico distribuito nel punto cambiato di segno. Si osservi che p è positivo se diretto verso il basso.
- ▶ Per calcolare il valore del taglio in un punto prefissato si può scegliere se applicare il metodo delle sezioni e l'equazione di equilibrio dei momenti oppure l'equazione $\Delta V = -\int p(x) dx$, secondo la quale la variazione del momento tra due punti è uguale all'area sottesa tra di essi al diagramma del carico distribuito presa con il segno negativo.
- ▶ Poiché ΔV si calcola integrando $p(x)$, assumendo che $p(x)$ sia una funzione polinomiale di grado n , $M(x)$ sarà una funzione polinomiale di grado $n+1$; ad esempio, se $V(x)$ è una funzione lineare, $M(x)$ sarà una funzione parabolica.

$V(x)$ sarà una funzione polinomiale di grado $n+1$; ad esempio, se $p(x)$ è una funzione costante, $V(x)$ sarà una funzione lineare.

Diagramma del momento

- ▶ Si riportano sul diagramma i valori noti del momento M ai due estremi della trave.
- ▶ Poiché $dM/dx = V$, la pendenza del diagramma del momento in un punto della trave è uguale al taglio nel punto.
- ▶ Laddove il taglio si annulla, $dM/dx = 0$, quindi il diagramma del momento presenta un punto di massimo o di minimo.
- ▶ Per calcolare il valore del momento in un punto prefissato si può scegliere se applicare il metodo delle sezioni e l'equazione di equilibrio dei momenti oppure l'equazione $\Delta M = \int V(x) dx$, secondo la quale la variazione del momento tra due punti è uguale all'area sottesa tra di essi al diagramma del taglio.
- ▶ Poiché ΔM si calcola integrando $V(x)$, assumendo che $V(x)$ sia una funzione polinomiale di grado n , $M(x)$ sarà una funzione polinomiale di grado $n+1$; ad esempio, se $V(x)$ è una funzione lineare, $M(x)$ sarà una funzione parabolica.

Esempio 3.12

Si disegnino i diagrammi del taglio e del momento per la trave rappresentata nella Figura 3.21a.

SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Le reazioni vincolari ottenute sono indicate sullo schema di corpo libero della trave, Figura 3.21b.

Diagramma del taglio. Secondo la convenzione dei segni adottata, Figura 3.11, in $x = 0$, $V = +P$ e in $x = L$, $V = +P$. Si riportano questi valori nel diagramma della Figura 3.21c. Poiché $p = 0$, Figura 3.21a, la pendenza del diagramma del taglio è ovunque nulla ($dV/dx = -p = 0$). Il diagramma del taglio è dato da una linea orizzontale che unisce i valori di estremità, quindi è uniforme.



Figura 3.21 (segue)

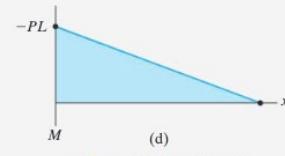
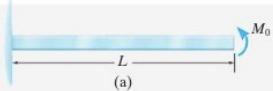


Figura 3.21 (continua)

Diagramma del momento. In $x = 0$, $M = -PL$ e in $x = L$, $M = 0$, Figura 3.21d. Secondo il diagramma ottenuto, il taglio è costante e positivo, quindi è tale anche la *pendenza* del diagramma del momento, $dM/dx = V = +P$ in ogni punto. Il diagramma del momento è dato da una linea a pendenza positiva che unisce i valori di estremità, quindi è lineare crescente.

**Esempio 3.13**

Si disegnino i diagrammi del taglio e del momento per la trave rappresentata nella Figura 3.22a.

SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Le reazioni vincolari ottenute all'incastro sono indicate sullo schema di corpo libero della trave, Figura 3.22b.

Diagramma del taglio. Prima di tutto, si riportano sul diagramma i valori del taglio $V = 0$ nelle sezioni di estremità della trave, Figura 3.21c. Poiché sulla trave non agisce alcun carico distribuito, la *pendenza* del diagramma è nulla ovunque. Il diagramma del taglio è dato da una linea orizzontale che unisce i valori di estremità, ovvero vale zero su tutta la trave.

Diagramma del momento. Prima di tutto, si riportano sul diagramma i valori del momento M_0 nelle sezioni di estremità della trave, Figura 3.21d. In base al diagramma del taglio, la *pendenza* del diagramma del momento deve essere ovunque nulla, poiché $V = 0$. Il diagramma del momento è dato da una linea orizzontale che unisce i valori di estremità, quindi è lineare uniforme.

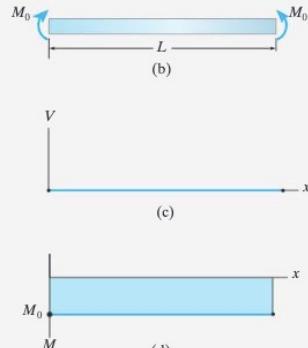
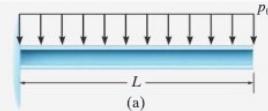


Figura 3.22

**Esempio 3.14**

Si disegnino i diagrammi del taglio e del momento per la trave rappresentata nella Figura 3.23a.

SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Le reazioni vincolari ottenute all'incastro sono indicate sullo schema di corpo libero della trave, Figura 3.23b.

Diagramma del taglio. Prima di tutto, si riportano sul diagramma i valori del taglio nelle sezioni di estremità della trave, Figura 3.23c. Il carico distribuito sulla trave è costante e positivo, da cui segue che la *pendenza* del diagramma del taglio è costante e negativa ($dV/dx = -p_0$). Il diagramma del taglio è dato da una linea a pendenza negativa che unisce i valori di estremità, quindi è lineare decrescente.

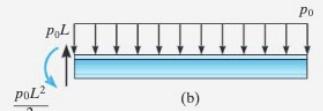


Figura 3.23 (segue)

Diagramma del momento. Prima di tutto, si riportano sul diagramma i valori del momento nelle sezioni di estremità della trave, Figura 3.23d. Secondo il diagramma ottenuto, il taglio è positivo e decrescente linearmente da p_0L a zero. Il diagramma del momento è pertanto *parabolico* con pendenza positiva decrescente.

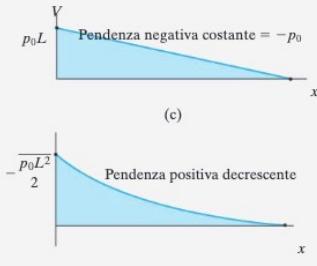


Figura 3.23 (continua)

Esempio 3.15

Si disegnino i diagrammi del taglio e del momento per la trave rappresentata nella Figura 3.24a.

SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Le reazioni vincolari ottenute all'incastro sono indicate sullo schema di corpo libero della trave, Figura 3.24b.

Diagramma del taglio. Prima di tutto, si riportano sul diagramma i valori del taglio nelle sezioni di estremità della trave, Figura 3.24c. Il carico distribuito sulla trave è lineare, positivo e decrescente, quindi il diagramma del taglio è parabolico con *pendenza* negativa e crescente. La pendenza vale $-p_0$ in $x = 0$ ed è nulla in $x = L$.

Diagramma del momento. Prima di tutto si riportano sul diagramma i valori del momento nelle sezioni di estremità della trave, Figura 3.24d. Secondo il diagramma ottenuto, il taglio è positivo e decrescente da $p_0L/2$ in $x = 0$ a zero in $x = L$. Il corrispondente diagramma del momento è dato pertanto da una funzione *cubica* di x con pendenza positiva decrescente.

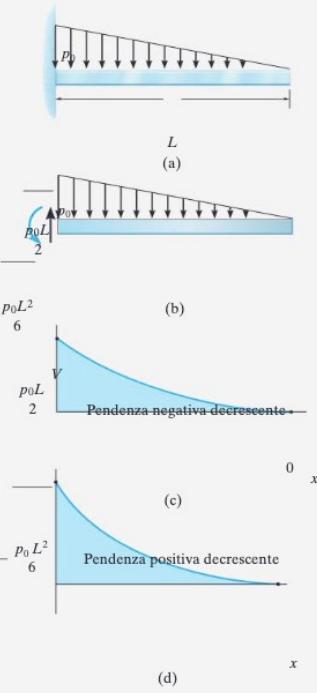
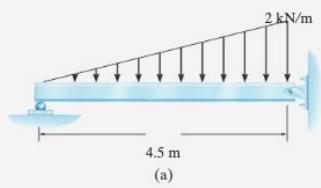


Figura 3.24

**Esempio 3.16**

Si disegnino i diagrammi del taglio e del momento per la trave rappresentata nella Figura 3.25a.

SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Le reazioni vincolari ottenute sono indicate sullo schema di corpo libero della trave, Figura 3.25b.

Diagramma del taglio. Prima di tutto, si riportano sul diagramma i valori del taglio nelle sezioni di estremità della trave, Figura 3.25c: in $x = 0$, $V = +1.5$ kN e in $x = 4.5$ m, $V = -3$ kN. In base all'andamento del carico distribuito, il diagramma del taglio è parabolico con pendenza negativa decrescente da zero in $x = 0$ a -2 in $x = 4.5$ m. La coordinata del punto in cui il taglio si annulla può essere determinata applicando il metodo delle sezioni a un segmento di trave di lunghezza x , Figura 3.25e, imponendo che $V = 0$. Ne segue

$$+\uparrow\sum F_y = 0; \quad 1.5 \text{ kN} - \frac{1}{2}[2 \text{ kN/m}(\frac{x}{4.5 \text{ m}})]x = 0; \quad x = 2.6 \text{ m}$$

Diagramma del momento. Prima di tutto, si riportano sul diagramma i valori del momento nelle sezioni di estremità della trave, Figura 3.25d: in $x = 0$, $M = 0$ e in $x = 4.5$ m, $M = 0$. In base all'andamento del diagramma del taglio, la pendenza del diagramma del momento vale inizialmente $+1.5$ ed è positiva decrescente fino ad annullarsi in $x = 2.6$ m. In seguito, diviene negativa decrescente fino al valore -3 in $x = 4.5$ m. In questo caso, il diagramma del momento è dato da una funzione cubica di x . Perché?

OSSERVAZIONE: Il valore massimo del momento si raggiunge in $x = 2.6$ m, poiché $dM/dx = V = 0$ in questo punto. Dall'equilibrio del segmento di trave nella Figura 3.25e si ricava

$$\downarrow+\sum M = 0; \quad -1.5 \text{ kN}(2.6 \text{ m}) + \frac{1}{2}[2 \text{ kN/m}(\frac{2.6 \text{ m}}{4.5 \text{ m}})](2.6 \text{ m})(\frac{2.6 \text{ m}}{3}) + M = 0 \\ M = 2.6 \text{ kNm}$$

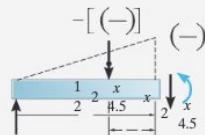
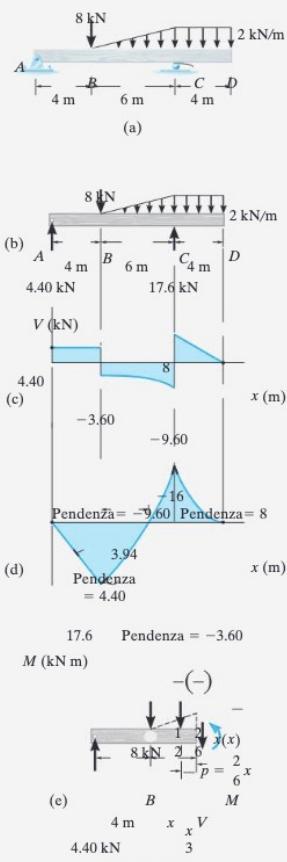


Figure 3.25



Esempio 3.18

Si disegnino i diagrammi del taglio e del momento per la trave a sbalzo nella Figura 3.27a.

SOLUZIONE

Reazioni vincolari. Le reazioni vincolari ottenute sono indicate sullo schema di corpo libero della trave, Figura 3.27b.

Diagramma del taglio. Si riportano sul diagramma i valori del taglio nelle sezioni di estremità della trave $V_A = +4.40 \text{ kN}$ e $V_D = 0$, Figura 3.27c. Il diagramma del taglio ha pendenza nulla tra A e B. In B, esso subisce un salto pari a -8 kN fino al valore -3.60 kN . Successivamente, il diagramma presenta una pendenza negativa decrescente. Il valore del taglio in C si ottiene calcolando l'area sottesa al diagramma del carico distribuito, $V_C = V_B + \Delta V_{BC} - 3.60 \text{ kN} = -(1/2)(6 \text{ m})(2 \text{ kN/m}) = -9.60 \text{ kN}$. Segue un salto pari a 17.6 kN fino al valore 8 kN . Infine, tra C e D, la pendenza del diagramma è costante negativa e il taglio si annulla in D.

Diagramma del momento. Si riportano sul diagramma i valori del momento nelle sezioni di estremità della trave $M_A = 0$ e $M_D = 0$, Figura 3.27d. Si studi il diagramma del momento e si osservi come i singoli tratti derivano dal diagramma del taglio attraverso la relazione $dM/dx = V$. Si verifichino i valori massimo e minimo o applicando il metodo delle sezioni o calcolando le variazioni del momento tra due punti a partire dalla corrispondente area sottesa al diagramma del taglio. La coordinata del punto in cui si annulla il momento può essere calcolata definendo il momento in funzione di una generica coordinata x appartenente al tratto di trave BC, Figura 3.27e. Ne segue:

$$\begin{aligned} & \downarrow +\Sigma M = 0; \\ & -4.40 \text{ kN}(4 \text{ m} + x) - 8 \text{ kN}(x) + \frac{1}{2} \left(2 \text{ kN/m} \right) x(x) \left(\frac{x}{3} \right) + M = 0 \\ & M = \left(-\frac{1}{18} x^3 - 3.60x + 17.6 \right) \text{ kNm} = 0 \\ & x = 3.94 \text{ m} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE: Dall'esame dei diagrammi si osserva che tra A e B il taglio è costante e il momento lineare, poiché è nullo l'integrale del carico distribuito; nel tratto BC, il carico è lineare, il taglio parabolico e il momento cubico; nel tratto CD, il carico è costante, il taglio lineare e il momento parabolico. Si consiglia di risolvere nuovamente gli Esempi 3.6-3.11 applicando il metodo grafico.

3.4 Tensione

Com'è stato detto nel Paragrafo 3.2, la forza e il momento risultanti su un punto prefissato della sezione di un corpo, Figura 3.28, rappresentano globalmente l'azione esercitata dalla distribuzione effettiva di forze agenti sulla sezione, Figura 3.29a. Conoscere la distribuzione delle forze interne è di primaria importanza nella meccanica dei solidi. Al fine di risolvere questo problema è necessario definire il concetto di tensione.

Sia ΔA un elemento finito di area della sezione considerata, come mostrato nella Figura 3.29a. Al tendere di ΔA a zero, occorre formulare due ipotesi circa la natura del materiale. In primo luogo, si assume che il materiale sia **continuo** (Paragrafo 2.2), ossia costituito da una distribuzione di materia continua e priva di vuoti, invece che composto da un numero finito di molecole o atomi distinti. In secondo luogo, si assume che non avvengano lacerazioni o compenetrazioni di materiale. La forza ΔF agente sull'elemento di area ΔA è indicata nella Figura 3.29a. Questa forza, al pari delle altre, ha una direzione assegnata e può essere scomposta nelle sue tre componenti ΔF_x , ΔF_y e ΔF_z , rispettivamente tangenti e normali al piano della sezione. Al tendere di ΔA a zero, la forza e le sue componenti tendono ad annullarsi, mentre, in generale, il limite del rapporto tra la forza e l'area esiste ed è finito. Tale rapporto è detto **tensione o sforzo** e indica la **forza interna specifica** agente su un **elemento d'area di giacitura assegnata** nel punto considerato.⁶

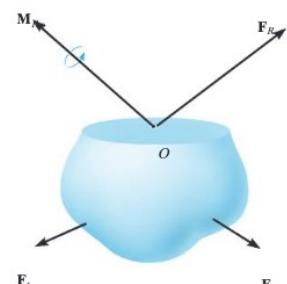


Figura 3.28

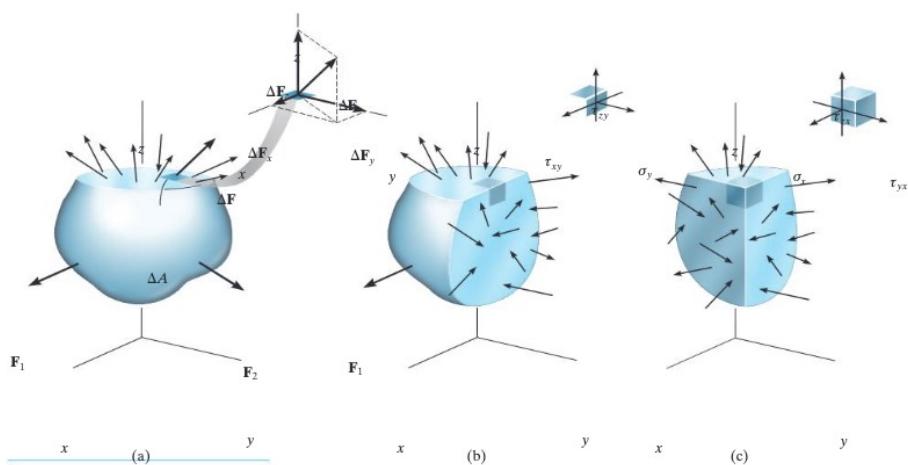


Figura 3.29

⁶ Se si considera il momento risultante ΔM agente sull'elemento d'area ΔA , il limite del rapporto tra il momento e l'area indica il **momento interno specifico** agente nel punto sull'elemento d'area di giacitura assegnata. Nei materiali or-

forza di volume è un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla forza di superficie, porta alla relazione (detta *teorema di Cauchy sulla rappresentazione delle tensioni*):

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n(\mathbf{x}) &= \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \\ &= (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) \mathbf{i} + (\tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) \mathbf{j} + \\ &\quad + (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z) \mathbf{k} \quad \text{in } V \end{aligned} \quad (3.17)$$

generalizzazione di quanto vedremo al Paragrafo 4.2 del Capitolo 4.

Se l'elemento tetraedrico è scelto con la faccia inclinata corrispondente a un elemento della frontiera del continuo si possono dimostrare le analoghe della (3.17):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \quad \text{in } S_f \\ \mathbf{r}(\mathbf{x}) &= \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \quad \text{in } S_u \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nelle (3.18) occorre sempre ricordare che le forze di contatto esterne $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sono assegnate, mentre le reazioni vincolari $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ sono incognite. Le (3.17), (3.18) esprimono un risultato comunque fondamentale: per conoscere la tensione in un punto interno o la forza di contatto specifica (attiva o reattiva) in un punto di frontiera del continuo è necessario conoscere la tensione agente su tre facce elementari parallele ai piani coordinati.

Problema statico. Il problema statico (dinamico se si tiene conto anche delle azioni d'inerzia) per il continuo nella configurazione C è il seguente: assegnati i campi di forze a distanza $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ in V e di contatto $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ su S_f , si determinino le reazioni vincolari $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ su S_u e le tensioni $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ in V tramite le (3.15), (3.16), (3.18).

In generale, il problema statico non ammette soluzioni univoche: si hanno solo le tre equazioni differenziali scalari (3.15) nelle sei componenti indipendenti della tensione $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Con il linguaggio della classificazione statica dei sistemi di corpi in atto di moto rigido si può dire che i continui costituiscono sistemi soggetti a *indeterminazione statica o iperstatici*.

3.6 Tensione normale media in una trave caricata assialmente

Gli elementi costituenti le strutture o le macchine presentano spesso una dimensione prevalente rispetto alle altre due. In più, sono soggetti a carichi assiali generalmente applicati nelle sezioni di estremità. Le aste reticolari, le sospensioni e i bulloni sono esempi comuni di elementi di questo tipo. In questo paragrafo si determinerà la distribuzione della tensione media agente sulla sezione trasversale di una trave caricata assialmente come illustrato nella Figura 3.35a. Si assume che la sezione trasversale si mantenga costante sull'intera lunghezza della trave, la quale è detta pertanto **prismatica**. Si trascura il peso della trave e si suppone di suddividerla idealmente come indicato nella Figura 3.35b: per l'equilibrio del tronco inferiore di trave, la forza interna risultante N che agisce sulla sezione trasversale deve avere lo stesso modulo, la stessa direzione e il verso opposto della forza esterna P applicata all'estremità inferiore della trave.

Ipotesi di studio. Prima di determinare la distribuzione della tensione media agente sulla sezione trasversale della trave è necessario introdurre due ipotesi di studio riguardanti la descrizione del materiale e la modalità di applicazione del carico esterno.

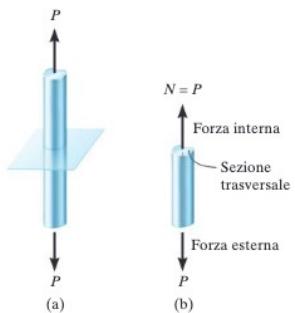


Figura 3.35 (segue)

1. La trave deve essere rettilinea e deve rimanere tale dopo l'applicazione del carico, mentre la sezione trasversale deve mantenersi piana durante un qualsiasi processo deformativo della trave, consistente in cambiamenti di forma o di volume. In questo caso, le linee orizzontali e verticali di una griglia idealmente incisa sulla trave *si deformeranno uniformemente* a seguito dell'applicazione del carico, Figura 3.35c. Si trascurerà di considerare le regioni della trave prossime alle estremità, laddove l'applicazione dei carichi esterni può causare *deformazioni localizzate*, e ci si soffermerà solo sulla distribuzione delle tensioni nella parte mediana della trave.

2. Perché la trave subisca una deformazione uniforme, P deve essere applicato nel centro d'area della sezione trasversale e deve essere diretto secondo la linea d'asse (linea dei centri d'area) della trave, mentre il materiale deve essere omogeneo e isotropo. Un materiale è **omogeneo** se possiede le medesime proprietà fisiche meccaniche in ogni punto del suo volume ed è **isotropo** se tali proprietà sono uguali in ogni direzione. L'ipotesi di omogeneità e isotropia è lecita per molti materiali di interesse strutturale. L'acciaio, ad esempio, pur contenendo migliaia di cristalli orientati casualmente in ogni millimetro cubo del suo volume, può essere considerato omogeneo e isotropo nei problemi che coinvolgono porzioni di materiale di dimensioni molto maggiori di quelle del singolo cristallo. Occorre tuttavia specificare che l'acciaio può essere reso anisotropo dalle lavorazioni a freddo (trafilatura o sagomatura a temperature subcritiche). Un materiale **anisotropo** possiede proprietà diverse lungo direzioni differenti. Ciononostante, se l'anisotropia implica una direzione preferenziale di comportamento lungo la linea d'asse della trave, quest'ultima continuerà a deformarsi uniformemente se soggetta a un carico assiale. È questo il comportamento manifestato, ad esempio, da un materiale omogeneo e anisotropo come il legno nella direzione delle sue fibre.

Distribuzione della tensione normale media. Se la trave si deforma uniformemente come descritto, tale deformazione deve essere l'effetto di una tensione normale ovunque *costante* σ , Figura 3.35d. In conseguenza di ciò il singolo elemento finito di area ΔA della sezione trasversale è soggetto a una forza $\Delta F = \sigma \Delta A$ e la somma delle forze agenti sull'intera area della sezione deve essere equivalente alla forza interna risultante N . Se si considerano le corrispondenti grandezze infinitesime $\Delta A \rightarrow dA$ e $\Delta F \rightarrow dF$, e si assume che σ sia costante, si ottiene

$$\begin{aligned} +\uparrow F_{Rz} &= \Sigma F_z; \quad \int dF = \int_A \sigma dA \\ &N = \sigma A \quad (3.19) \\ &\sigma = \frac{N}{A} \end{aligned}$$

in cui

σ = tensione normale media in un generico punto della sezione trasversale;

N = forza interna normale, applicata nel centro d'area della sezione. N si calcola applicando il metodo delle sezioni e le equazioni di equilibrio; nel caso in oggetto, è $N = P$;

A = area della sezione trasversale della trave.



Figura 3.35 (continua)

Tensione normale. La forza interna specifica, o forza per unità di area, agente in direzione normale a ΔA è detta **tensione normale** σ . Poiché la componente ΔF_z è normale all'elemento d'area, risulta che

$$\sigma_z = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_z}{\Delta A} \quad (3.10)$$

Se la forza normale è uscente, ossia tende a "tirare" l'elemento d'area ΔA , come nella Figura 3.29a, si parla di *tensione di trazione*; al contrario, se è entrante, ossia tende a "schiaffiare", ΔA si parla di *tensione di compressione*.

Tensione tangenziale. La forza interna specifica, o forza per unità di area, agente in direzione tangente a ΔA è detta **tensione tangenziale** τ . Le componenti della tensione tangenziale sono

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_x}{\Delta A} \\ \tau_{yz} &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_y}{\Delta A} \end{aligned} \quad (3.11)$$

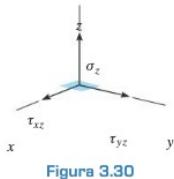


Figura 3.30

Si osservi che il pedice z in σ_z sta a indicare la direzione della normale uscente dall'elemento d'area ΔA ovvero la giacitura di ΔA , Figura 3.30. Le componenti della tensione tangenziale presentano, invece, due pedici. Il pedice z sta a indicare la giacitura dell'area, mentre x e y si riferiscono alle direzioni delle tensioni.

Azioni risultanti sulla sezione. Come discusso nel Paragrafo 3.2, le azioni interne risultanti in un punto specifico di un corpo possono essere determinate mediante il metodo delle sezioni. Si deve osservare che le componenti delle azioni interne sono le risultanti della distribuzione di tensione agente sulla sezione considerata. Ad esempio, su una generica sezione di normale \mathbf{i} (asse x) del corpo agisce, nel punto \mathbf{x} , il vettore tensione $\mathbf{t}_x = (\sigma_x \ \tau_{xy} \ \tau_{xz})^T$. Le azioni interne ne costituiscono le risultanti e sono definite dalle relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R(x) &= \int_A \mathbf{t}(\mathbf{x}) dA \\ \mathbf{M}_{R_o}(x) &= \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}) dA \end{aligned} \quad (3.12)$$

con $\mathbf{r} = (0yz)^T$, da cui

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_A \sigma_x(\mathbf{x}) dA \\ V_y(x) &= \int_A \tau_{xy}(\mathbf{x}) dA \\ V_z(x) &= \int_A \tau_{xz}(\mathbf{x}) dA \\ T(x) &= \int_A [-z\tau_{xy}(\mathbf{x}) + y\tau_{xz}(\mathbf{x})] dA \\ M_y(x) &= \int_A z\sigma_x(\mathbf{x}) dA \\ M_z(x) &= \int_A -y\sigma_x(\mathbf{x}) dA \end{aligned} \quad (3.13)$$

Stato generico di tensione. Se il corpo viene suddiviso ulteriormente mediante due piani, uno parallelo al piano coordinato x - z , Figura 3.29b, e l'altro parallelo al piano coordinato y - z , Figura 3.29c, si può isolare

agente nel punto considerato, Figura 3.31. Lo stato di tensione è quindi definito da nove componenti scalari di tensione, tre su ciascuna faccia dell'elemento. Queste componenti di tensione descrivono lo stato di tensione nel punto con riferimento all'elemento di volume orientato secondo gli assi x , y , z . Se si considerasse, invece, un elemento di volume avente orientazione differente, le componenti di tensione sarebbero diverse.

Unità di misura. Nel sistema metrico internazionale SI, le tensioni normali e tangenziali sono espresse in Newton su metro quadrato (N/m^2). Questa unità di misura, chiamata Pascal ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$), corrisponde a un valore di tensione piuttosto piccolo, per cui valori maggiori di tensione, più realistici nella tecnica, sono indicati per mezzo dei prefissi kilo- (10^3), simbolo k, mega- (10^6), simbolo M, o giga- (10^9), simbolo G.⁷

Ipotesi del bilancio meccanico. Come visto, l'azione del mondo esterno sul corpo modellato come continuo si rappresenta con campi di distribuzioni di forze a distanza (sull'unità di volume: peso, attrazione elettrica e magnetica) e per contatto (sull'unità di superficie del contorno: pressione di un fluido sulle pareti del contenitore, attrito). Un'azione di contatto (reattiva) è esercitata anche dai dispositivi di vincolo che impongono spostamenti nulli o assegnati (cedimenti vincolari) a parte del contorno. Se il vincolo di continuità si rilassa o se si immaginano vincoli mobili interni al corpo, si inducono nel corpo delle deformazioni distribuite o concentrate (distorsioni). In un sistema iperstatico per vincoli esterni queste distorsioni possono indurre reazioni vincolari anche in assenza di carico (coazioni).

In generale, la configurazione iniziale C del continuo, Figura 3.1, occupa un volume V in cui è distribuita la forza a distanza $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ di componenti cartesiane $b_x(\mathbf{x})$, $b_y(\mathbf{x})$, $b_z(\mathbf{x})$. Nel caso del peso $b_x = b_y = 0$, $b_z = -\rho g$, con ρ densità volumica di massa e g accelerazione di gravità; il peso su un elemento di volume dV è pari a $-\rho g dV$. Il contorno S di C si divide nella parte S_u in cui sono applicati i vincoli e nella parte S_f in cui sono applicati i carichi esterni. Sopra S_u è cioè imposto lo spostamento $(\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}})$ e non sono note le reazioni vincolari $\mathbf{r}(\mathbf{x})$, mentre sopra S_f avviene il contrario: è assegnata la densità $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ di forza per contatto esercitata dall'esterno e non è noto lo spostamento conseguente. La densità $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ha componenti cartesiane $f_x(\mathbf{x})$, $f_y(\mathbf{x})$, $f_z(\mathbf{x})$: per un fluido in quiete in un contenitore la spinta sul fondo ha componenti $f_x = f_y = 0$, $f_z = -\rho gh$, con h quota del pelo libero del fluido; la spinta su un elemento di area dA è pari a $-\rho gh dA$.

3.5 Processi infinitesimi staticamente ammissibili

Un *processo infinitesimo staticamente ammissibile* è l'insieme equilibrato (o bilanciato) delle forze esterne agenti sui punti interni o di frontiera del continuo e delle tensioni interne a esso, cioè tra le varie parti che lo compongono. L'aggettivo "infinitesimo" sottintende le ipotesi che le azioni siano applicate in maniera *quasi statica*, per incrementi infinitesimi, e che le equazioni di equilibrio si possano scrivere non già nella configurazione finale deformata, come a priori si dovrebbe fare, ma in quella iniziale di riferimento, la cui geometria è nota. Se tra le forze si considerassero anche quelle d'inerzia, si avrebbero più in generale processi dinamicamente am-

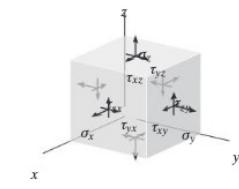


Figura 3.31

⁷ La tensione può essere espressa anche in N/mm^2 , dove $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$. Nel siste-

missibili. Le forze agenti note sono assegnate su S_u , mentre sono incognite le reazioni vincolari su S_u e le tensioni interne.

Per l'equilibrio del corpo (*globale*), il risultante e il momento risultante, rispetto a un polo arbitrario, delle forze esterne devono essere nulli. Le condizioni di equilibrio per corpi in atti di moto rigido sono state esaminate in questo volume nel Capitolo 1, assieme agli opportuni richiami degli elementi di meccanica.

Appare intuitivo ammettere inoltre che, se una regione di spazio è soggetta a qualche legge di conservazione (o di bilancio o d'equilibrio che dir si voglia), per esempio di forza, d'energia, di carica elettrica e così via, lo stesso deve valere per ogni parte della regione considerata. Se il continuo considerato nella configurazione C è in equilibrio globale, ammettiamo allora che anche ogni elemento di volume incluso in V , per quanto piccolo si voglia, debba essere in equilibrio.

Con linguaggio matematico si può d'altra parte dire che le equazioni d'equilibrio globale sono *necessarie*, mentre quelle d'equilibrio locale sono *sufficienti*. Si ha cioè che, mentre la scrittura delle equazioni dell'equilibrio globale non implica automaticamente il soddisfacimento delle equazioni d'equilibrio locale, di converso la scrittura delle equazioni d'equilibrio locale per ogni porzione di volume implica anche la scrittura delle equazioni di equilibrio globale.

Per il bilancio meccanico locale di una parte arbitraria P di V devono annularsi risultante e momento risultante rispetto a un polo qualsiasi di tutte le forze agenti su P . Queste forze sono a distanza (la parte ha un volume) e di contatto sul contorno di P . Se questo contorno ha una porzione in comune con la frontiera del continuo, alcune forze sono esterne assegnate, altre sono reazioni vincolari. Sul resto del contorno di P appaiono le azioni di contatto tra P e le parti adiacenti: si tratta delle *azioni interne*, già presentate nel Paragrafo 3.1.

Senza perdere generalità, si può considerare come parte arbitraria di V un disco elementare centrato in un punto P di posizione \mathbf{x} con basi di area dA e altezza ζ , Figura 3.32. Sulla faccia del disco definita positiva secondo il sistema di coordinate introdotto agisca la forza di contatto $\mathbf{t}_n(\mathbf{x})dA$, sull'altra la forza di contatto $\mathbf{t}_{-n}(\mathbf{x})dA$. L'equilibrio della forza sul disco comporta:

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{x})dA + \mathbf{t}_{-n}(\mathbf{x})dA + \mathbf{b}(\mathbf{x})\zeta dA + d\mathbf{F}_m = 0$$

dove $d\mathbf{F}_m$ è la forza risultante agente sulla superficie laterale (mantello) del disco. Al limite $\zeta \rightarrow 0$, per la generalità di dA , si ottiene:

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{x}) = -\mathbf{t}_{-n}(\mathbf{x}) \quad \text{in } V \quad (3.14)$$

La (3.14), nota anche come *lemma di Cauchy*, traduce la *legge di azione e reazione*: la forza di contatto specifica, o *tensione*, o *sforzo*, sulla pagina positiva di una qualsiasi areola interna al continuo è l'opposta di quella sulla pagina negativa. In altre parole, la porzione di continuo "a destra" di un'areola qualsiasi agisce sulla porzione "a sinistra" dell'areola con una forza opposta a quella con cui la porzione "a sinistra" agisce su quella "a destra". Un risultato simile è stato già ottenuto in questo volume nel Capitolo 2. Se si sceglie di denotare senza pedice le tensioni sulla pagina positiva,

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_n(\mathbf{x})$$

su quella negativa le tensioni sono anch'esse senza pedice e naturalmente opposte.

Appoggiandosi a questo risultato generale, si consideri poi come parte

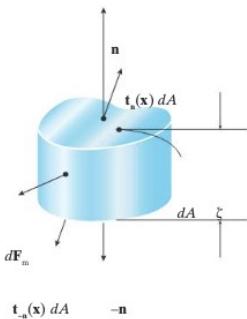


Figura 3.32

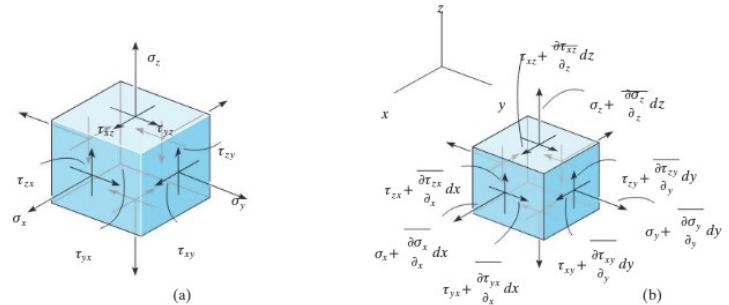


Figura 3.33

in P , Figura 3.33. Sulle facce di normale $-\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}$ (essendo $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori di una base ortonormale coerente con il sistema di coordinate cartesiane scelto) agiscono le tensioni $\mathbf{t}_i(\mathbf{x}), \mathbf{t}_j(\mathbf{x}), \mathbf{t}_k(\mathbf{x})$ le cui componenti sono indicate nella Figura 3.33a. Sulle facce di normale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ agiscono le tensioni

$$\mathbf{t}'_i(\mathbf{x}), \mathbf{t}'_j(\mathbf{x}), \mathbf{t}'_k(\mathbf{x})$$

se tutte le facce parallele del cubo fossero sovrapposte, il lemma di Cauchy (3.14) implicherebbe tensioni a due a due opposte. Poiché il cubo, ancorché infinitesimo, non è di volume nullo, le tensioni \mathbf{t}' sulle facce di normale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sono incrementate di quantità infinitesime rispetto a quelle sulle facce di normale $-\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}$, si veda la Figura 3.33b. Se scriviamo per questo cubo la condizione di annullamento della forza risultante si giunge alle equazioni di equilibrio in forma locale, valide per ogni punto del continuo (dette storicamente *equazioni indefinite di equilibrio*):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(\mathbf{x})}{\partial z} + b_x(\mathbf{x}) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(\mathbf{x})}{\partial z} + b_y(\mathbf{x}) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(\mathbf{x})}{\partial z} + b_z(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

in V

Se sullo stesso cubo si scrive l'equazione di equilibrio del momento, per esempio scegliendo come polo il centro geometrico del cubo, si arriva alle condizioni di simmetria (dette storicamente *equazioni di reciprocità*, Paragrafo 3.7):

$$\tau_{xy}(\mathbf{x}) = \tau_{yx}(\mathbf{x}), \tau_{yz}(\mathbf{x}) = \tau_{zy}(\mathbf{x}), \tau_{zx}(\mathbf{x}) = \tau_{xz}(\mathbf{x}) \quad \text{in } V \quad (3.16)$$

Si consideri ancora una parte arbitraria interna al continuo a forma di tetraedro con tre facce ortogonali di normali $-\mathbf{i}, -\mathbf{j}, -\mathbf{k}$ e faccia restante di normale $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, Figura 3.34.

L'annullarsi della forza risultante, il lemma di Cauchy (3.14) e la con-

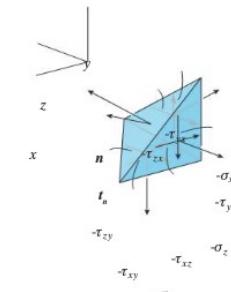


Figura 3.34

forza di volume è un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla forza di superficie, porta alla relazione (detta *teorema di Cauchy sulla rappresentazione delle tensioni*):

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_n(\mathbf{x}) &= \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \\ &= (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z)\mathbf{i} + (\tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z)\mathbf{j} + (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z)\mathbf{k} \quad \text{in } V\end{aligned}\quad (3.17)$$

generalizzazione di quanto vedremo al Paragrafo 4.2 del Capitolo 4.

Se l'elemento tetraedrico è scelto con la faccia inclinata corrispondente a un elemento della frontiera del continuo si possono dimostrare le analogie della (3.17):

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \quad \text{in } S_f \\ \mathbf{r}(\mathbf{x}) &= \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \quad \text{in } S_u\end{aligned}\quad (3.18)$$

Nelle (3.18) occorre sempre ricordare che le forze di contatto esterne $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ sono assegnate, mentre le reazioni vincolari $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ sono incognite. Le (3.17), (3.18) esprimono un risultato comune fondamentale: per conoscere la tensione in un punto interno o la forza di contatto specifica (attiva o reattiva) in un punto di frontiera del continuo è necessario conoscere la tensione agente su tre facce elementari parallele ai piani coordinati.

Problema statico. Il problema statico (dinamico se si tiene conto anche delle azioni d'inerzia) per il continuo nella configurazione C è il seguente: assegnati i campi di forze a distanza $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ in V e di contatto $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ su S_f , si determinino le reazioni vincolari $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ su S_u e le tensioni $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ in V tramite le (3.15), (3.16), (3.18).

In generale, il problema statico non ammette soluzioni univoche: si hanno solo le tre equazioni differenziali scalari (3.15) nelle sei componenti indipendenti della tensione $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Con il linguaggio della classificazione statica dei sistemi di corpi in atto di moto rigido si può dire che i continui costituiscono sistemi soggetti a *indeterminazione statica* o iperstatici.

3.6 Tensione normale media in una trave caricata assialmente

Gli elementi costituenti le strutture o le macchine presentano spesso una dimensione prevalente rispetto alle altre due. In più, sono soggetti a carichi assiali generalmente applicati nelle sezioni di estremità. Le aste reticolari, le sospensioni e i bulloni sono esempi comuni di elementi di questo tipo. In questo paragrafo si determinerà la distribuzione della tensione media agente sulla sezione trasversale di una trave caricata assialmente come illustrato nella Figura 3.35a. Si assume che la sezione trasversale si mantenga costante sull'intera lunghezza della trave, la quale è detta pertanto **prismatica**. Si trascura il peso della trave e si suppone di suddividerla idealmente come indicato nella Figura 3.35b: per l'equilibrio del tronco inferiore di trave, la forza interna risultante N che agisce sulla sezione trasversale deve avere lo stesso modulo, la stessa direzione e il verso opposto della forza esterna P applicata all'estremità inferiore della trave.

Ipotesi di studio. Prima di determinare la distribuzione della tensione media agente sulla sezione trasversale della trave è necessario introdurre due ipotesi di studio riguardanti la descrizione del materiale e la

1. La trave deve essere rettilinea e deve rimanere tale dopo l'applicazione del carico, mentre la sezione trasversale deve mantenersi piana durante un qualsiasi processo deformativo della trave, consistente in cambiamenti di forma o di volume. In questo caso, le linee orizzontali e verticali di una griglia idealmente incisa sulla trave si deformeranno uniformemente a seguito dell'applicazione del carico, Figura 3.35c. Si trascurerà di considerare le regioni della trave prossime alle estremità, laddove l'applicazione dei carichi esterni può causare *deformazioni localizzate*, e ci si soffermerà solo sulla distribuzione delle tensioni nella parte mediana della trave.

2. Perché la trave subisca una deformazione uniforme, P deve essere applicato nel centro d'area della sezione trasversale e deve essere diretto secondo la linea d'asse (linea dei centri d'area) della trave, mentre il materiale deve essere omogeneo e isotropo. Un materiale è **omogeneo** se possiede le medesime proprietà fisiche e meccaniche in ogni punto del suo volume ed è **isotropo** se tali proprietà sono uguali in ogni direzione. L'ipotesi di omogeneità e isotropia è lecita per molti materiali di interesse strutturale. L'acciaio, ad esempio, pur contenendo migliaia di cristalli orientati casualmente in ogni millimetro cubo del suo volume, può essere considerato omogeneo e isotropo nei problemi che coinvolgono porzioni di materiale di dimensioni molto maggiori di quelle del singolo cristallo. Occorre tuttavia specificare che l'acciaio può essere reso anisotropo dalle lavorazioni a freddo (trafilatura o sagomatura a temperature subcritiche). Un materiale **anisotropo** possiede proprietà diverse lungo direzioni differenti. Ciononostante, se l'anisotropia implica una direzione preferenziale di comportamento lungo la linea d'asse della trave, quest'ultima continuerà a deformarsi uniformemente se soggetta a un carico assiale. È questo il comportamento manifestato, ad esempio, da un materiale omogeneo e anisotropo come il legno nella direzione delle sue fibre.

Distribuzione della tensione normale media. Se la trave si deforma uniformemente come descritto, tale deformazione deve essere l'effetto di una tensione normale ovunque costante σ , Figura 3.35d. In conseguenza di ciò il singolo elemento finito di area ΔA della sezione trasversale è soggetto a una forza $\Delta F = \sigma \Delta A$ e la somma delle forze agenti sull'intera area della sezione deve essere equivalente alla forza interna risultante N . Se si considerano le corrispondenti grandezze infinitesime $\Delta A \rightarrow dA$ e $\Delta F \rightarrow dF$, e si assume che σ sia costante, si ottiene

$$\begin{aligned}+\uparrow F_{Rz} &= \Sigma F_z; \quad \int dF = \int_A \sigma dA \\ N &= \sigma A \quad (3.19) \\ \sigma &= \frac{N}{A}\end{aligned}$$

in cui

σ = tensione normale media in un generico punto della sezione trasversale;

N = forza interna normale, applicata nel centro d'area della sezione. N si calcola applicando il metodo delle sezioni e le equazioni di equilibrio; nel caso in oggetto, è $N = P$;

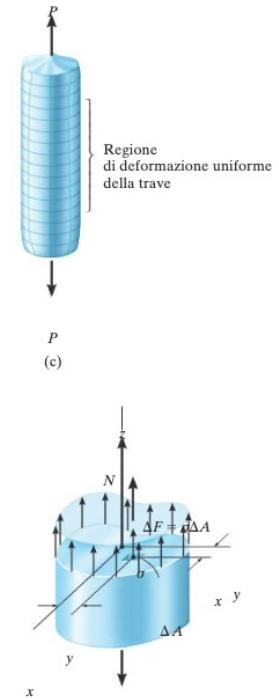


Figura 3.35 (continua)

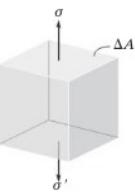


Figura 3.36



▶ Questo tirante di acciaio è utilizzato per tenere sospesa una parte della scala, quindi è soggetto a una tensione di trazione.

La forza interna N deve essere applicata nel centro d'area della sezione, poiché i momenti indotti dalla distribuzione uniforme di tensione sono nulli rispetto agli assi x e y passanti per questo punto, Figura 3.35d. Si ha

$$(M_R)_x = \sum M_x \rightarrow 0 = \int_A y dF = \int_A y \sigma dA = \sigma \int_A y dA$$

$$(M_R)_y = \sum M_y \rightarrow 0 = - \int_A x dF = - \int_A x \sigma dA = -\sigma \int_A x dA$$

Queste equazioni sono identicamente soddisfatte per la definizione di centro d'area $\int y dA = 0$ e $\int x dA = 0$. (Si veda l'Appendice C).

Equilibrio. Se si considera un elemento infinitesimo di volume in un punto generico della sezione trasversale di una trave caricata assialmente, il valore della tensione normale agente è unico. Per l'equilibrio delle forze agenti in direzione verticale sull'elemento, Figura 3.36, si ottiene:

$$\Sigma F_z = 0;$$

$$\sigma(\Delta A) - \sigma'(\Delta A) = 0$$

$$\sigma = \sigma'$$

In altri termini, le due componenti di tensione normale agenti sull'elemento devono essere uguali in modulo, ma opposte in verso. Si parla in questo caso di *stato monoassiale di tensione*.

Le formule precedenti si applicano a elementi strutturali soggetti a trazione o a compressione, come mostrato nella Figura 3.37. Secondo un'interpretazione grafica, il *modulo* della forza interna risultante N è equivalente al *volumen* sotteso al diagramma della distribuzione di tensione, ovvero $N = \sigma A$ (volume = altezza \times base). In conseguenza del bilancio dei momenti, la forza risultante passa per il centro geometrico di questo volume.

L'ipotesi di trave prismatica può essere rilassata di poco, includendo nell'analisi anche le travi a *debole variazione di sezione*. Ad esempio, nel caso di una trave con sezione rettangolare variabile secondo un angolo di 15°, la tensione normale media calcolata come $\sigma = N/A$ è inferiore solo del 2.2% al valore esatto derivante dalla *teoria della elasticità*.

Valore massimo della tensione normale media. Nella trattazione svolta, sia la forza interna N sia l'area della sezione trasversale sono state considerate *uniformi* lungo la linea d'asse della trave, mante-

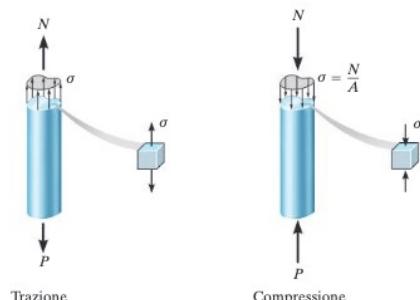


Figura 3.37

nendosi, di conseguenza, *uniforme* anche la tensione normale $\sigma = N/A$. Può accadere tuttavia che la trave sia soggetta a più di un carico esterno applicato lungo l'asse o che presenti una variazione nella sezione trasversale. In casi come questi, la tensione normale media agente nella trave potrebbe variare da una sezione all'altra e può essere richiesto di determinarne il valore *massimo*, ovvero di individuare la sezione in cui il rapporto N/A è massimo. A tal fine, è necessario calcolare la forza interna N in ogni sezione della trave ed è d'aiuto disegnare un diagramma che ne illustri l'andamento (*diagramma della forza normale*). Tale diagramma consiste, nello specifico, in una curva le cui ordinate forniscono il valore della forza normale N in funzione della posizione x assunta lungo l'asse della trave. Per convenzione, N è considerata positiva se induce trazione nell'elemento e negativa se induce compressione. Dopo aver calcolato la forza normale in ogni sezione della trave, si individua il valore massimo del rapporto N/A .

Punti salienti

- ▶ Se un corpo soggetto a un carico esterno viene suddiviso idealmente in due parti, sulla frontiera di separazione agisce una distribuzione di forze responsabile dell'equilibrio di ciascuna parte. La forza interna specifica agente in un punto del corpo è chiamata *tensione*.
- ▶ Una tensione è una forza agente su un'area al tenere dell'area a zero. In questa definizione si assume che il materiale sia continuo e dotato di coesione nel punto considerato.
- ▶ Le componenti di tensione in un punto dipendono dai carichi esterni agenti sul corpo e dall'orientazione della giacitura dell'elemento di volume considerato nel punto.
- ▶ Se una trave prismatica è composta da materiale omogeneo e isotropo ed è soggetta a una forza assiale applicata nel centro d'area della sua sezione trasversale, lo stato di tensione interno alla trave è descritto solo da tensioni normali. La distribuzione delle tensioni normali sulla sezione trasversale è considerata uniforme *in valore medio*.

Procedura di analisi

Se una forza interna risultante N agisce in direzione normale alla sezione trasversale di un elemento strutturale, l'equazione $\sigma = N/A$ fornisce il *valore medio* della tensione normale sulla sezione. Nel caso di travi caricate assialmente, l'applicazione di tale equazione consta dei seguenti passaggi.

Forze interne

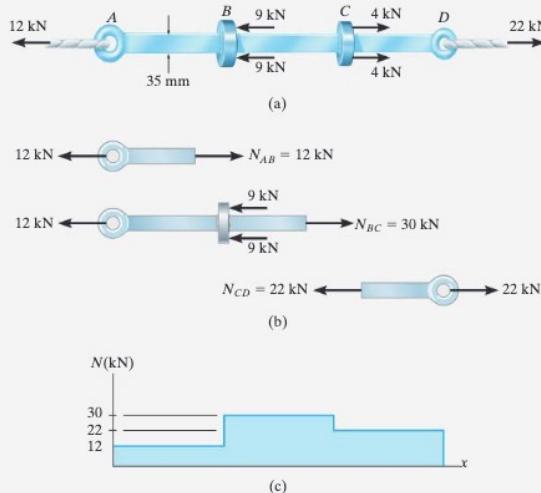
- ▶ Si suppone di sezionare la trave *ortogonalmente* all'asse longitudinale nel punto in cui deve essere determinata la tensione normale e si utilizzano lo schema di corpo libero e l'equazione di equilibrio delle forze per calcolare la forza interna normale N agente sulla sezione.

Tensione normale media

- ▶ Si determina l'area della sezione trasversale della trave e si calcola la tensione normale media $\sigma = N/A$.
- ▶ La tensione normale σ viene rappresentata, preferibilmente, su un elemento di volume estratto nel punto della sezione in cui essa è stata calcolata: prima si disegna la componente σ agente sulla faccia dell'elemento appartenente alla sezione e concorde con la forza interna N , poi si disegna la componente σ agente sulla faccia opposta.

Esempio 3.19

L'asta nella Figura 3.38a ha una larghezza costante di 35 mm e uno spessore di 10 mm. Si determini il valore massimo della tensione normale media nell'asta soggetta alla condizione di carico indicata.



SOLUZIONE

Azione interna. Si osserva che le forze interne assiali sono costanti nei tratti AB , BC e CD , ma differenti in modulo. Nella Figura 3.38b queste forze sono determinate applicando il metodo delle sezioni. Il diagramma della forza normale, che rappresenta graficamente questi risultati, è riportato nella Figura 3.38c. Si osserva che il valore massimo della forza normale si raggiunge nel tratto BC , dove $N_{BC} = 30 \text{ kN}$. In questo stesso tratto si raggiunge anche il valore massimo della tensione normale media, poiché l'area della sezione trasversale è uniforme lungo l'asta.

Tensione normale media. Applicando l'Equazione (3.19) si ottiene:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{30(10^3) \text{ N}}{(0.035 \text{ m})(0.010 \text{ m})} = 85.7 \text{ MPa}$$

OSSERVAZIONE: La distribuzione di tensione agente in una generica sezione trasversale dell'asta compresa nel tratto BC è rappresentata nella Figura 3.38d. Il volume sotteso al diagramma della distribuzione è equivalente al carico di 30 kN, ovvero $30 \text{ kN} = (85.7 \text{ MPa})(35 \text{ mm})(10 \text{ mm})$.

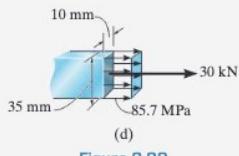


Figura 3.38

Esempio 3.20

Una lampada di $80(9.81) \text{ N}$ è sostenuta dalle due asta AB e BC come mostrato nella Figura 3.39a. Si determini la tensione normale media in ciascuna asta nel caso in cui AB abbia un diametro di 10 mm e BC abbia un diametro di 8 mm.

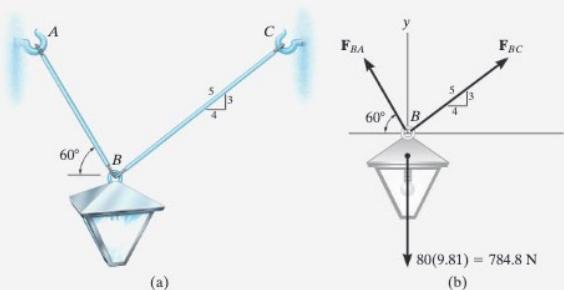


Figura 3.39

SOLUZIONE

Azione interna. In primo luogo, si determina la forza assiale agente in ciascuna asta. Lo schema di corpo libero dell'asta è mostrato nella Figura 3.39b. Applicando le equazioni di equilibrio delle forze si ottiene

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= 0; & F_{BC} \left(\frac{4}{5}\right) - F_{BA} \cos 60^\circ &= 0 \\ \uparrow \sum F_y &= 0; & F_{BC} \left(\frac{3}{5}\right) + F_{BA} \sin 60^\circ - 784.8 \text{ N} &= 0 \\ F_{BC} &= 395.2 \text{ N}, & F_{BA} &= 632.4 \text{ N} \end{aligned}$$

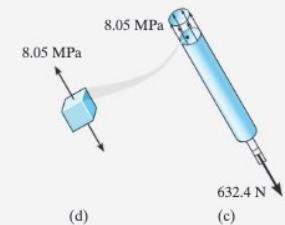
Per il terzo principio di Newton, o principio di azione e reazione, queste stesse forze sollecitano le asta e sono uniformi su tutta la loro lunghezza.

Tensione normale media. Applicando l'Equazione (3.19), si ottiene

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{395.2 \text{ N}}{\pi (0.004 \text{ m})^2} = 7.86 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BA} = \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{632.4 \text{ N}}{\pi (0.005 \text{ m})^2} = 8.05 \text{ MPa}$$

OSSERVAZIONE: La distribuzione della tensione normale media che agisce su una sezione trasversale dell'asta AB è mostrata nella Figura 3.39c. Il singolo elemento di volume estratto in un punto di tale sezione è sollecitato come indicato nella Figura 3.39d.



(d)

(c)

Esempio 3.21

Nella Figura 3.40a è rappresentato un pezzo fuso in acciaio avente un peso specifico di $\gamma_{\text{st}} = 80 \text{ kN/m}^3$. Si determini la tensione media di compressione agente nei punti A e B.

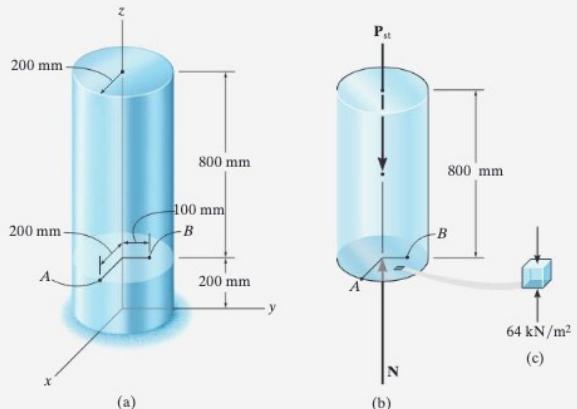


Figura 3.40

SOLUZIONE

Azione interna. Lo schema di corpo libero del segmento superiore alla sezione passante per i punti A e B è mostrato nella Figura 3.40b. Il peso di questo segmento si determina come $P_{\text{st}} = \gamma_{\text{st}} V_{\text{st}}$. La forza interna assiale agente sulla sezione è pari a

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_z &= 0; & N - P_{\text{st}} &= 0 \\ N - (80 \text{ kN/m}^3)(0.8 \text{ m})\pi(0.2 \text{ m})^2 &= 0 \\ N &= 8.042 \text{ kN} \end{aligned}$$

Tensione media di compressione. L'area della sezione trasversale vale $A = \pi(0.2 \text{ m})^2$ e la tensione media di compressione è pari a

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} = \frac{8.042 \text{ kN}}{\pi(0.2 \text{ m})^2} \\ &= 64.0 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE: Le tensioni rappresentate sull'elemento di volume nella Figura 3.40c descrivono lo stato di tensione presente sia nel punto A sia nel punto B. Si osservi che la componente di tensione agente sulla faccia inferiore dell'elemento è diretta verso l'alto perché concorde con la forza interna \mathbf{N} agente sulla giacitura inferiore della sezione trasversale considerata.

Esempio 3.22

L'elemento AC rappresentato nella Figura 3.41a è soggetto a una forza verticale di 3 kN. Si determini il punto di applicazione x di questa forza in modo tale che la tensione media di compressione sull'appoggio in C sia pari alla tensione media di trazione nella biella AB. L'area della sezione trasversale della biella è pari a 400 mm^2 , mentre l'area della superficie di contatto in C vale 650 mm^2 .

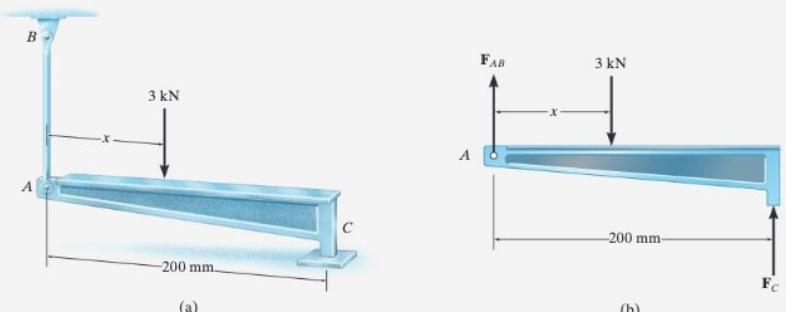


Figura 3.41

SOLUZIONE

Azione interna. La relazione tra le forze applicate in A e in C si ricava considerando lo schema di corpo libero della trave AC, Figura 3.41b. Le incognite sono tre: F_{AB} , F_C e x .

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{AB} + F_C - 3000 \text{ N} = 0 \quad (1)$$

$$+\downarrow \sum M_A = 0; \quad -3000 \text{ N}(x) + F_C(200 \text{ mm}) = 0 \quad (2)$$

Tensione normale media. Una terza equazione è necessaria per impostare che la tensione di trazione nella biella AB e la tensione di compressione in C siano uguali:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F_{AB}}{400 \text{ mm}^2} = \frac{F_C}{650 \text{ mm}^2} \\ F_C &= 1.625 F_{AB} \end{aligned}$$

Si sostituisce questo risultato nell'Equazione (1) e si risolve per F_{AB} e per F_C , ottenendo

$$F_{AB} = 1143 \text{ N} \quad F_C = 1857 \text{ N}$$

Il punto di applicazione del carico si ricava dall'Equazione (2)

$$x = 124 \text{ mm}$$

OSSERVAZIONE: Deve essere $0 < x < 200 \text{ mm}$.

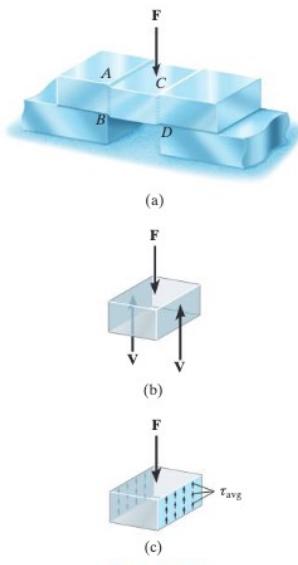


Figura 3.42

3.7 Tensione tangenziale media

Secondo la definizione data nel Paragrafo 3.4 la tensione tangenziale è la componente di tensione che agisce *nel piano* della sezione. Per comprendere il meccanismo di azione di questo tipo di tensione, si consideri la forza F applicata sulla barra nella Figura 3.42a. Se gli appoggi sono rigidi e F è sufficientemente grande, la barra si deformerà subendo uno scorrimento lungo i piani identificati da AB e CD . Come mostrato dallo schema di corpo libero del tratto mediano della trave compreso tra i due appoggi, Figura 3.42b, una forza di taglio pari a $V = F/2$ deve essere applicata su ciascuna sezione perché il tratto sia in equilibrio. La **tensione tangenziale media** che, agendo su ciascuna delle due sezioni, corrisponde a questa forza di taglio è definita da

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A} \quad (3.20)$$

in cui

- τ_{avg} = tensione tangenziale media, assunta uniforme sulla sezione;
- V = forza interna di taglio, determinata a partire dalle equazioni di equilibrio;
- A = area della sezione.

La distribuzione della tensione tangenziale media agente sulle due sezioni è illustrata nella Figura 3.42c. Si osservi che τ_{avg} è concorde con la forza V che ne rappresenta la risultante sulla sezione.

La condizione di carico esemplificata nella Figura 3.42 è un caso di **taglio semplice o diretto**, così chiamato perché causato dall'*azione diretta* della forza applicata F . Questo tipo di taglio è caratteristico di collegamenti semplici realizzati con bulloni, perni, saldature, e così via, per i quali, tuttavia, l'Equazione (3.20) costituisce un'*approssimazione*. Sebbene un'analisi più accurata conduca spesso a valori molto maggiori delle tensioni tangenziali sulle sezioni critiche, l'approssimazione può essere ritenuta lecita in molti problemi di progettazione e analisi strutturale. Le **normative tecniche**, ad esempio, ne consentono l'uso nel dimensionamento degli elementi di collegamento, quali i bulloni, e nel calcolo della resistenza delle giunzioni sollecitate a taglio. A tale riguardo, due sono i tipi di taglio che ricorrono frequentemente nella pratica e che vengono qui analizzati separatamente.

Taglio singolo. Le giunzioni in acciaio e in legno illustrate nelle Figure 3.43a e 3.43c, rispettivamente, sono esempi di collegamenti sollecitati a **taglio singolo**, anche detti, frequentemente, **giunzioni a sovrapposizione singola (lap joints)**.

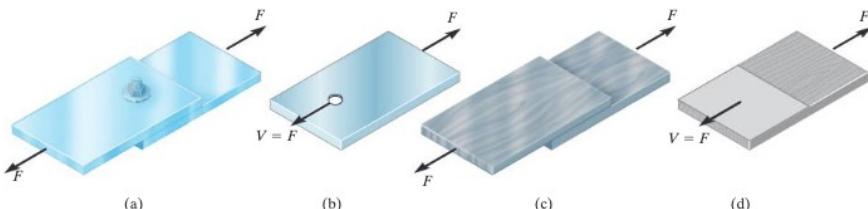


Figura 3.43

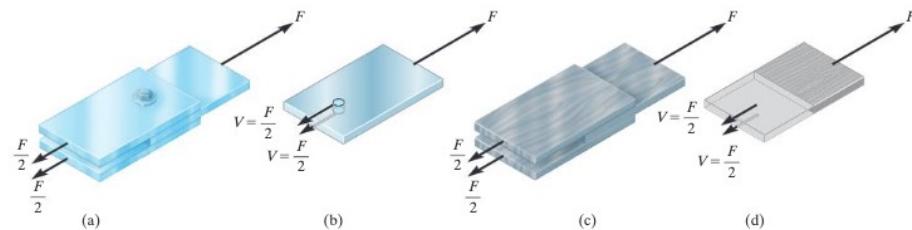


Figura 3.44

Si assuma che gli elementi collegati abbiano uno spessore contenuto e che l'attrito tra di essi, dipendente dal serraggio applicato dal dado nella Figura 3.43a, sia trascurabile.

I diagrammi di corpo libero del singolo elemento collegato sono mostrati nelle Figure 3.43b e 3.43d.

Trascurando il momento indotto dalla forza F , dato lo spessore sottile degli elementi collegati, la sezione resistente del bullone nella Figura 3.43b e la superficie di contatto nella Figura 3.43d sono soggette unicamente alla forza di taglio $V = F$. Considerando questa forza nell'Equazione (3.20), si determina la tensione tangenziale media agente sulla sezione indicata nella Figura 3.43d.

Taglio doppio. Se la giunzione è realizzata come nella Figura 3.44a e 3.44c, sono due le sezioni sollecitate a taglio. Giunzioni di questo tipo sono dette frequentemente a **sovrapposizione doppia (double lap joints)**. I diagrammi di corpo libero dell'elemento in posizione centrale nel collegamento sono mostrati nella Figura 3.44b e 3.44d. La sollecitazione agente è definita **taglio doppio** perché una forza di taglio pari a $V = F/2$ agisce su *ciascuna* delle due sezioni. Considerando questa forza nell'Equazione $\tau_{\text{avg}} = V/A$ si determina la tensione tangenziale media su ciascuna sezione.

Equilibrio. Si consideri un corpo solido e si assuma che su una sua sezione agisca la forza interna di taglio V , Figura 3.45a. Si consideri un elemento di volume in un punto della sezione e le tensioni tangenziali su di esso agenti, Figura 3.45b. Disegnato lo schema di corpo libero dell'elemento, Figura 3.45c, dall'equilibrio delle forze in direzione y segue:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0; & \text{forza} \\ & \tau_{zy} (\Delta x \Delta y) - \tau'_{zy} \Delta x \Delta y = 0 & \text{tensione area} \\ \tau_{zy} &= \tau'_{zy} \end{aligned}$$

Analogamente, dall'equilibrio delle forze in direzione z segue $\tau_{yz} = \tau'_{yz}$. Infine, dall'equilibrio dei momenti rispetto all'asse x

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= 0; & \text{momento} \\ & -\tau_{zy} (\Delta x \Delta y) \Delta z + \tau_{yz} (\Delta x \Delta z) \Delta y = 0 & \text{forza braccio} \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} & \text{tensione area} \end{aligned}$$

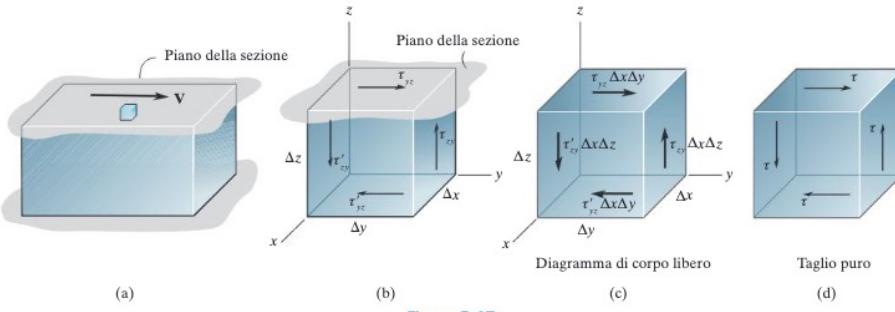


Figura 3.45

ottenendo

$$\tau_{xy} = \tau'_{zy} = \tau_{yz} = \tau'_{yx} = \tau$$

In altri termini, l'equilibrio delle forze e dei momenti implica che la tensione tangenziale agente sulla faccia superiore dell'elemento di volume sia associata alle tensioni tangenziali agenti su altre tre facce. In questo caso, le quattro tensioni tangenziali devono essere tutte uguali in modulo e a due a due dirette o verso lo spigolo comune o in verso opposto rispetto a esso. Tale proprietà è detta di *reciprocità delle tensioni tangenziali* (si veda anche il Paragrafo 3.5), mentre lo stato di sollecitazione rappresentato nella Figura 3.45d è noto come *taglio puro*.

Finora si è considerato il caso del taglio semplice indotto dall'azione *diretta* di un carico, nei capitoli seguenti si mostrerà come le tensioni tangenziali possano essere dovute anche all'azione *indiretta* di altri tipi di carico.

Punti salienti

- Se due elementi di spessore contenuto sono collegati tra loro, i carichi applicati possono indurre una sollecitazione di taglio con flessione trascurabile. In questo caso, nello svolgimento dell'analisi strutturale è conveniente considerare agente sulla sezione una *tensione tangenziale media*.
- Gli elementi di collegamento quali chiodi o bulloni sono soggetti frequentemente a forze di taglio. Il valore della forza di taglio agente sull'elemento di collegamento è massimo in corrispondenza dell'interfaccia tra le superfici collegate. Lo schema di corpo libero dell'elemento consente di determinare il modulo e il verso di questa forza.

Procedura di analisi

L'equazione $\tau_{avg} = V/A$ consente di calcolare unicamente la tensione tangenziale media. L'applicazione consta dei passaggi seguenti.

Forza interna di taglio

- Si suppone di sezionare l'elemento strutturale nel punto in cui deve essere determinata la tensione tangenziale media.

- Si disegna lo schema di corpo libero e si calcola la forza interna di taglio V necessaria a garantire l'equilibrio della porzione considerata.

Tensione tangenziale media

- Si determina l'area della sezione trasversale e si calcola la tensione tangenziale media $\tau_{avg} = V/A$
- La tensione tangenziale media τ_{avg} viene rappresentata preferibilmente su un elemento di volume

estratto nel punto della sezione in cui essa è stata calcolata: prima si disegna la componente τ_{avg} agente sulla faccia dell'elemento appartenente alla sezione e concorde con la forza interna V , poi si disegnano le componenti agenti sulle tre facce adiacenti con i versi indicati nello schema nella Figura 3.45.

Esempio 3.23

La sezione trasversale della barra rappresentata nella Figura 3.46a è quadrata di dimensioni pari a 40 mm. Si determinino le tensioni medie normale e tangenziale agenti sulle sezioni *a-a* e *b-b* nel caso in cui la barra sia soggetta a una forza assiale di 800 N applicata nel centro d'area della sezione trasversale.

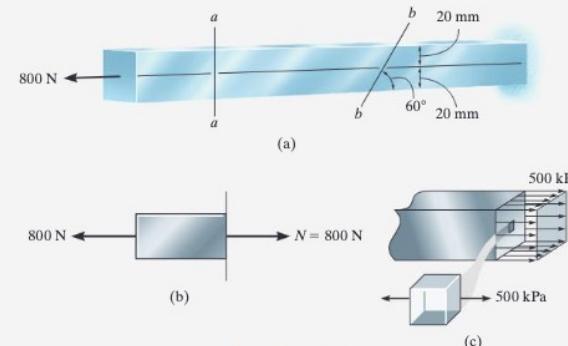


Figura 3.46 (segue)

SOLUZIONE

Parte (a)

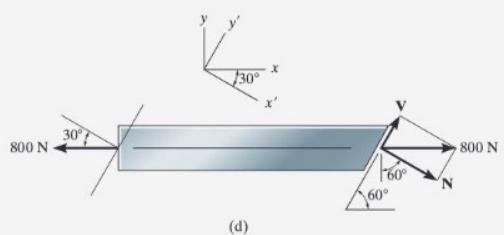
Azione interna. Si traccia la sezione *a-a*, Figura 3.46b, sulla quale agisce un'unica componente dell'azione interna, la forza normale $N = 800 \text{ N}$.

Tensione media. La tensione normale media si calcola applicando l'Equazione (3.19).

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{800 \text{ N}}{(0.04 \text{ m})(0.04 \text{ m})} = 500 \text{ kPa}$$

Le tensioni tangenziali sulla sezione sono nullle poiché è nulla la forza di taglio agente.

$$\tau_{avg} = 0$$



OSSERVAZIONE: La distribuzione della tensione normale media sulla sezione è illustrata nella Figura 3.46c.

Parte (b)

Azione interna. Se la barra viene sezionata lungo *b-b*, lo schema di corpo libero del segmento di barra a sinistra della sezione è rappresentato nella Figura 3.46d. Sulla sezione agisce sia una forza normale (**N**) sia una forza di taglio (**V**). Facendo riferimento agli assi *x*, *y*, si richiede che

$$+\sum F_x = 0; \quad -800 \text{ N} + N \sin 60^\circ + V \cos 60^\circ = 0$$

$$+\sum F_y = 0; \quad V \sin 60^\circ - N \cos 60^\circ = 0$$

oppure, in via più diretta, facendo riferimento agli assi *x'* e *y'*, che

$$+\sum F_{x'} = 0; \quad N - 800 \text{ N} \cos 30^\circ = 0$$

$$+\sum F_{y'} = 0; \quad V - 800 \text{ N} \sin 30^\circ = 0$$

Entrambi i sistemi di equazioni conducono alla soluzione

$$N = 692.8 \text{ N}$$

$$V = 400 \text{ N}$$

Tensione media. In questo caso, la superficie della sezione ha una larghezza di 40 mm e un'altezza di $40 \text{ mm}/\sin 60^\circ = 46.19 \text{ mm}$, Figura 3.46a. La tensione normale media è pari a

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{692.8 \text{ N}}{(0.04 \text{ m})(0.04619 \text{ m})} = 375 \text{ kPa}$$

e la tensione tangenziale media è pari a

$$\tau_{avg} = \frac{V}{A} = \frac{400 \text{ N}}{(0.04 \text{ m})(0.04619 \text{ m})} = 217 \text{ kPa}$$

OSSERVAZIONE: La distribuzione di tensione è illustrata nella Figura 3.46e.

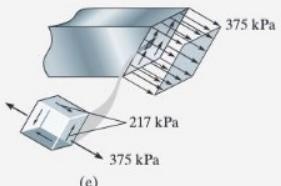


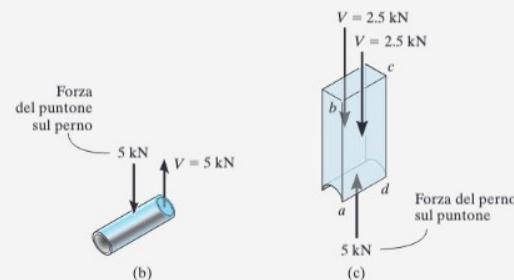
Figura 3.46 (continua)

Esempio 3.24

Il puntone in legno rappresentato nella Figura 3.47a è agganciato un perno in acciaio di 10 mm di diametro fissato alla parete. Assumendo che il puntone sia soggetto a un carico verticale di 5 kN, si calcoli la tensione tangenziale media agente nel perno nella sezione interna alla parete e sui due piani del puntone indicati nella figura, uno dei quali è denominato *abcd*.

SOLUZIONE

Forza interna di taglio. Come mostrato dallo schema di corpo libero nella Figura 3.47b, il perno fissato alla parete è soggetto a una forza di taglio di 5 kN. Lo schema di corpo libero della porzione di puntone a contatto con il perno è riportato nella Figura 3.47c. La forza di taglio che agisce su ciascuno dei piani indicati è pari a 2.5 kN.



Tensione tangenziale media. Per il perno

$$\tau_{avg} = \frac{V}{A} = \frac{5000 \text{ N}}{\pi (0.005 \text{ m})^2} = 63.7 \text{ MPa}$$

Per il puntone

$$\tau_{avg} = \frac{V}{A} = \frac{2500 \text{ N}}{(0.04 \text{ m})(0.02 \text{ m})} = 3.12 \text{ MPa}$$

OSSERVAZIONE: La distribuzione della tensione tangenziale media agente nel perno e nel puntone è illustrata nella Figura 3.47d e 3.47e rispettivamente. In ciascuna di queste figure si riporta anche l'elemento infinitesimo di volume estratto da un punto della sezione considerata. Si presti attenzione al fatto che le componenti di tensione tangenziale agiscono non solo sulla faccia dell'elemento appartenente alla sezione, ma anche sulle facce adiacenti.

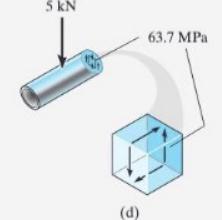
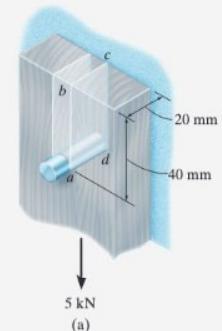
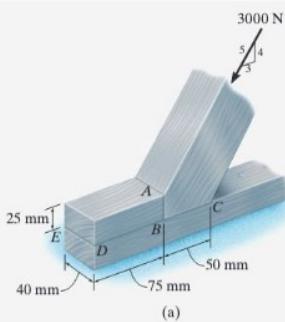


Figura 3.47

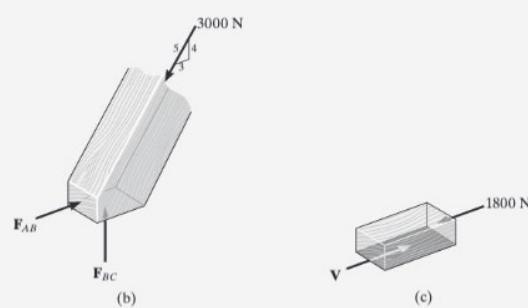


Esempio 3.25

L'elemento inclinato rappresentato nella Figura 3.48a è soggetto a una forza di compressione di 3000 N. Si determini la tensione media di compressione agente sulle aree di contatto individuate da AB e da BC e la tensione tangenziale media agente sul piano orizzontale individuato da EDB .

SOLUZIONE

Azione interna. Lo schema di corpo libero dell'elemento inclinato è riportato nella Figura 3.48b. Le forze di compressione che agiscono sulle aree di contatto sono



$$+\sum F_x = 0; \quad F_{AB} - 3000 N \left(\frac{3}{5}\right) = 0 \quad F_{AB} = 1800 N$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{BC} - 3000 N \left(\frac{4}{5}\right) = 0 \quad F_{BC} = 2400 N$$

Inoltre, dallo schema di corpo libero del segmento superiore della trave orizzontale, Figura 3.48c, si ricava la forza di taglio agente sul piano orizzontale EDB

$$+\sum F_x = 0; \quad V = 1800 N$$

Tensioni medie. Le tensioni medie di compressione sul piano orizzontale e sul piano verticale della trave inclinata valgono

$$\sigma_{AB} = \frac{1800 N}{(25 mm)(40 mm)} = 1.80 N/mm^2$$

$$\sigma_{BC} = \frac{2400 N}{(50 mm)(40 mm)} = 1.20 N/mm^2$$

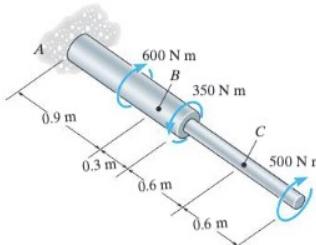
Le distribuzioni di tensione corrispondenti sono illustrate nella Figura 3.48d. La tensione tangenziale media che agisce sul piano orizzontale individuato da EDB vale

$$\tau_{avg} = \frac{1800 N}{(75 mm)(40 mm)} = 0.60 N/mm^2$$

La distribuzione di tensione corrispondente è illustrata nella Figura 3.48e.

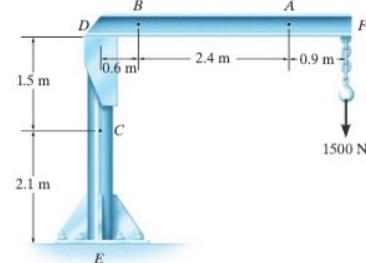
Problemi

3.1. Si determini il momento torcente agente sulle sezioni comprese tra i punti B e C .



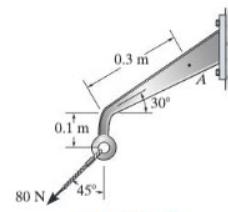
Problema 3.1

le azioni interne risultanti agenti sulle sezioni trasversali in A , B e C .



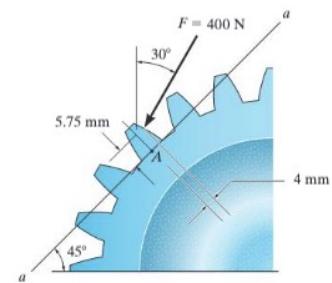
Problema 3.4

3.2. Una forza di 80 N è applicata sulla mensola mostrata nella figura. Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione in A .



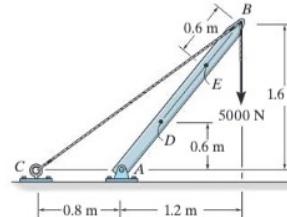
Problema 3.2

3.5. Su un dente della ruota dentata nella figura agisce la forza $F = 400 N$. Si determinino le azioni interne risultanti agenti alla base del dente, ovvero nel centro d'area A della sezione $a-a$.



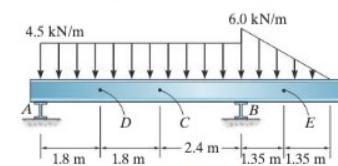
Problema 3.5

3.3. La trave AB è vincolata al suolo mediante la cerniera in A e il cavo BC . Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione trasversale in D .



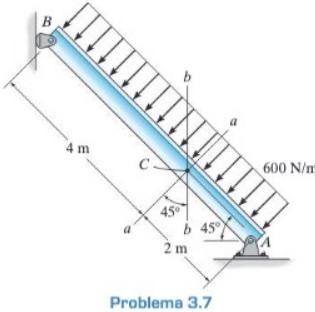
Problema 3.3

3.4. Il braccio DF e il montante DE della gru nella figura hanno un peso di 750 N/m. Considerando un peso complessivo di 1500 N per l'argano e il carico portato, si determinino



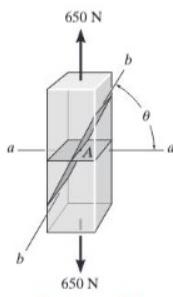
Problema 3.6

3.7. Si determinino le azioni interne risultanti agenti (a) sulla sezione $a-a$ e (b) sulla sezione $b-b$. Il centro d'area di ciascuna delle due sezioni coincide con il punto C .



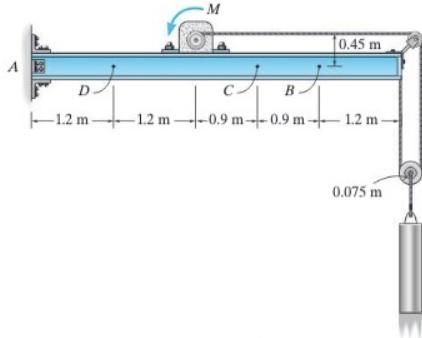
Problema 3.7

3.8. Si determinino la forza normale e la forza di taglio agenti (a) sulla sezione *a-a* e (b) sulla sezione *b-b* dell'elemento rappresentato nella figura. Entrambe le sezioni passano per il punto *A*. Si assuma $\theta = 60^\circ$. La forza di 650 N è applicata lungo la linea d'asse dell'elemento.



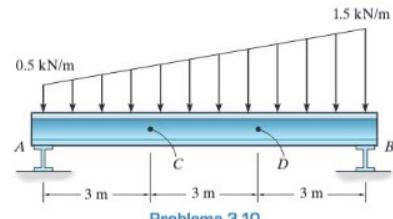
Problema 3.8

3.9. Si determinino le caratteristiche della sollecitazione agenti sulle sezioni trasversali in C e in D della trave rappresentata nella figura.



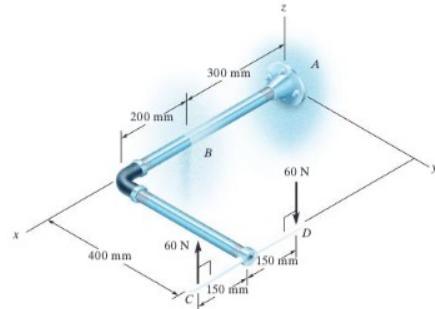
Problema 3.9

3.10. Si determinino le caratteristiche della sollecitazione agenti sulla sezione trasversale in C trave rappresentata nella figura, soggetta a un carico distribuito. Si ipotizzi che le reazioni vincolari esercitate dagli appoggi in A e in B siano verticali.



Problema 3.10

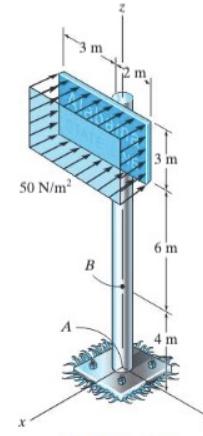
3.11. Il tubo rappresentato nella figura ha una massa di 12 kg/m ed è incastrato nella parete in *A*. Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione trasversale in *B*, trascurando il peso della chiave *CD*.



Problema 3.11

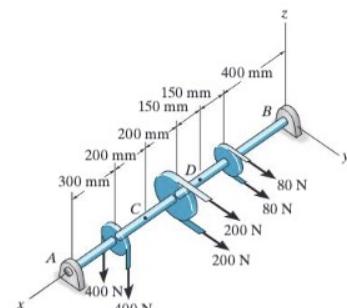
3.12. Il Problema 3.12 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

3.13. Il palo stradale rappresentato nella figura è incastrato nel terreno ed è soggetto a una pressione uniforme di 50 N/m^2 agente perpendicolarmente all'insegna. Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione trasversale in *B*.



Problema 3.13

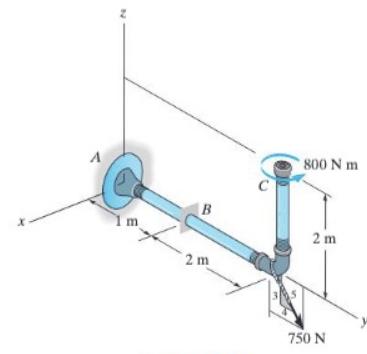
3.14. L'albero rappresentato nella figura è vincolato ai due appoggi in *A* e in *B* ed è soggetto alle forze trasmesse dalle pulegge fissate a esso. Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione trasversale in *C*. Le forze di 400 N agiscono nella direzione *z* negativa, mentre le forze di 200 N e di 80 N sono dirette nella direzione *y* positiva. Le reazioni esercitate sull'albero dai vincoli in *A* e in *B* sono dirette esclusivamente nelle direzioni *y* e *z*.



Problema 3-14

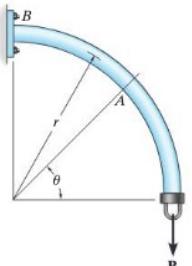
3.15. Il Problema 3.15 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

3.16. Il tubo rappresentato nella figura ha una massa di 12 kg/m ed è incastrito nella parete in *A*. Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione trasversale in *B*.



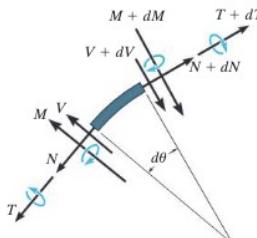
Problema 3.16

3.17. Nella figura è rappresentata una barra curva incastrata nella parete in *B*. Il raggio della linea d'asse della barra è pari a *r*. Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione trasversale in *A* che forma un angolo con l'orizzontale.



Problema 3.17

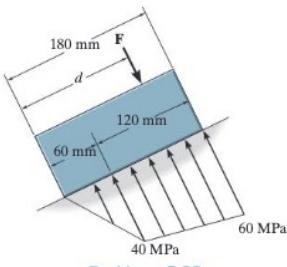
3.18. Nella figura è rappresentato un tronco infinitesimo isolato da una barra curva. Si dimostri che $dN/d\theta = V$, $dV/d\theta = -N$, $dM/d\theta = -T$, e $dT/d\theta = M$.



Problema 3.18

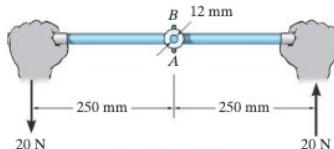
3.19. Il Problema 3.19 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

3.20. Il blocco rappresentato nella figura ha uno spessore di 5 mm. Considerando la distribuzione tensionale indotta sulla superficie di appoggio dalla forza *F* applicata sul blocco, si determini l'intensità di tale forza e la distanza *d* relativa al suo punto di applicazione.



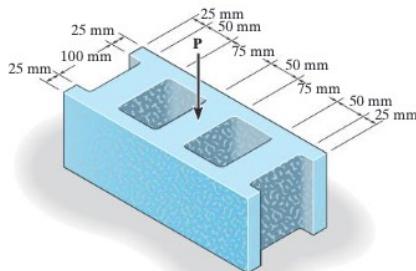
Problema 3.20

3.21. Nella figura è rappresentata una leva vincolata a un albero fisso mediante il perno *AB*, avente un diametro medio di 6 mm. Ipotizzando che la leva sia soggetta alla coppia indicata, si determini la tensione tangenziale media agente nel perno in corrispondenza della superficie di interfaccia con la leva.



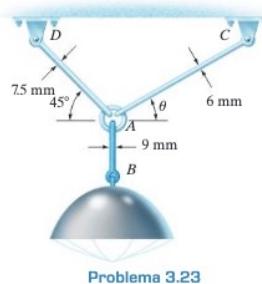
Problema 3.21

3.22. Nella figura è rappresentato un blocco di calcestruzzo di dimensioni assegnate. Ipotizzando che il materiale raggiunge la rottura per una tensione normale media di 0.840 MPa, si determini il valore massimo della forza verticale centrata *P* che il blocco è in grado di sostenere.



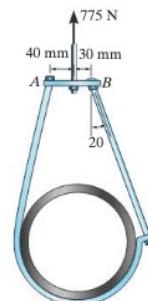
Problema 3.22

3.23. Una lampada di peso 250 N è sostenuta da tre barre in acciaio vincolate tra loro mediante un anello in *A*. Si determini quanto deve valere l'angolo tra la barra *AC* e l'orizzontale affinché la tensione normale media agente in *AC* sia pari al doppio di quella agente nella barra *AD*. Quanto vale la tensione in ciascuna barra? I diametri delle barre sono indicati nella figura.



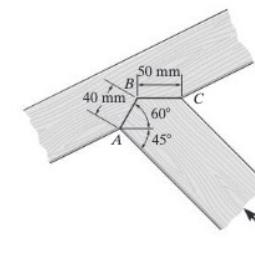
Problema 3.23

3.24. Il gancio nella figura sostiene una tubazione tale per cui la forza agente sul bullone verticale è pari a 775 N. Si determini la tensione normale media agente nel bullone *BC* di diametro 8 mm. Si assuma in *A* un vincolo di cerniera.



Problema 3.24

3.27. L'elemento trasmette al collegamento nella figura una forza assiale di 5 kN. Si determini la tensione normale media agente sulle sezioni *AB* e *BC*. Si assuma che non agisca attrito sulla superficie di interfaccia e che lo spessore dell'elemento sia pari a 50 mm.



Problema 3.27

3.25. Nella figura è rappresentato un provino giunto a rotura durante una prova di trazione per effetto di una forza assiale di 100 kN. L'angolo formato dalla sezione di rottura con l'orizzontale è pari a 52° . Considerando che il diametro del provino è pari a 12 mm, si determinino i valori medi della tensione normale e della tensione tangenziale sulla sezione di rottura inclinata. Quanto vale, invece, la tensione normale media agente sulla sezione trasversale in corrispondenza della rottura?



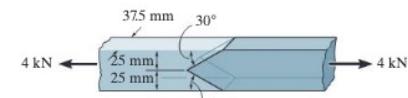
Problema 3.25

3.26. Nella figura è rappresentato un provino avente sezione trasversale di area *A* sottoposto a una prova di trazione. Ipotizzando che la forza assiale applicata sul provino sia *P*, si determini il valore massimo della tensione tangenziale media agente nel provino e si calcoli l'angolo che individua la sezione sulla quale essa agisce.



Problema 3.26

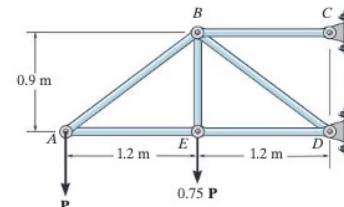
3.28. Due elementi impiegati nella costruzione della fusoliera di un aeroplano sono saldati tra loro mediante due saldature di testa con angolo di inclinazione di 30° . Si determinino i valori medi della tensione normale e della tensione tangenziale agenti su ciascuna saldatura. Si assuma che su ciascuna delle due superfici inclinate agisca una forza orizzontale di 2 kN.



Problema 3.28

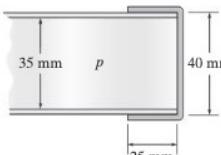
3.29. Il Problema 3.29 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

3.30. Le aste reticolari rappresentate nella figura hanno sezioni trasversali di area 780 mm^2 . Si determini la tensione normale media agente in ciascuna asta per effetto del carico $P = 40 \text{ kN}$. Si indichi se ciascuna asta risulta tesa o compressa.



Problema 3.30

3.31. Il tubo cilindrico rappresentato nella figura è chiuso mediante un tappo ed è soggetto a una pressione interna $p = 650$ Pa. Si determini la tensione tangenziale media trasmessa sulle pareti del tubo dalla colla necessaria a fissare a esso il tappo.

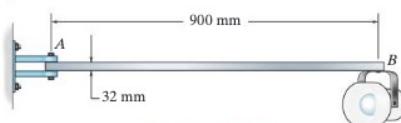


Problema 3.31

3.32. Il Problema 3.32 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

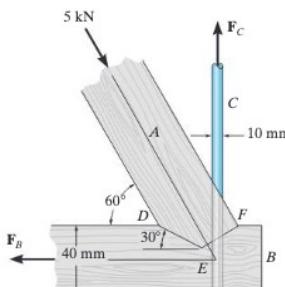
3.33. La lampada rappresentata nella figura è sostenuta da una mensola vincolata in *A* mediante un perno di diametro 3 mm. Considerando che la lampada pesa 20 N, mentre il peso della mensola è pari a 8 N/m, si determini la tensione tangenziale media agente nel perno.

Suggerimento: la forza di taglio agente nel perno è indotta dalla coppia di taglio necessaria per l'equilibrio dei momenti rispetto ad *A*.



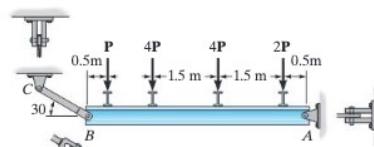
Problema 3.33

3.34. L'asta reticolare *A*, realizzata in legno, è soggetta a una forza di compressione di 5 kN. Si determini la tensione normale media agente nella barra *C*, di diametro 10 mm, e nell'asta *B*, di spessore 30 mm.



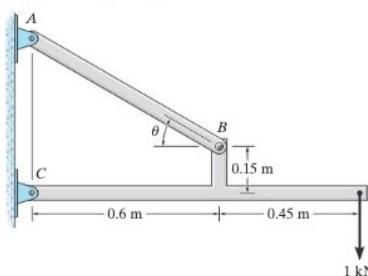
Problema 3.34

3.35. La trave rappresentata nella figura è vincolata mediante una cerniera in *A* e una biella *BC*. Si determini l'intensità massima P delle forze che possono essere applicate sulla trave perché la tensione tangenziale media agente in ciascun perno sia inferiore a 80 MPa. Tutti i perni sono soggetti a taglio doppio come mostrato e hanno un diametro di 18 mm.



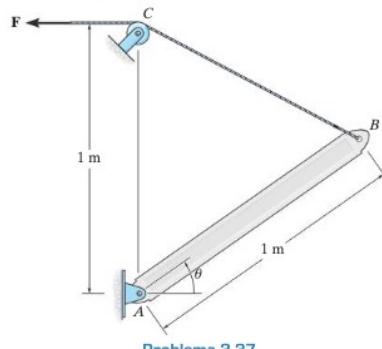
Problema 3.35

3.36. L'assemblaggio rappresentato nella figura è soggetto a una forza di 1 kN. Si determini la tensione tangenziale media agente nel bullone in *A* in funzione dell'angolo tra la barra *AB* e l'orizzontale. Si diagrammi tale funzione per $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ e si individuino i valori per i quali la tensione tangenziale media è minima. Il bullone ha un diametro di 6 mm ed è soggetto a taglio singolo.



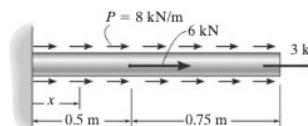
Problema 3.36

3.37. Il braccio mobile rappresentato nella figura ha un peso di 3 kN e viene issato mediante il cavo *BC*. Assumendo per il cavo un diametro di 15 mm, si determini e si diagrammi la tensione normale media agente nel cavo in funzione dell'angolo θ tra il braccio e l'orizzontale, con $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$.



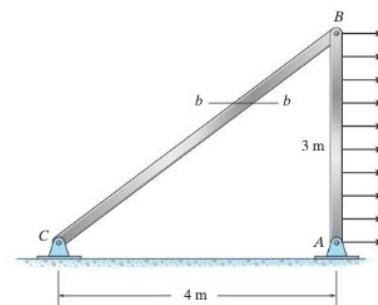
Problema 3.37

3.38. La barra rappresentata nella figura ha una sezione trasversale di area $400(10^{-6}) \text{ m}^2$. Ipotizzando che la barra sia soggetta a un carico assiale distribuito uniformemente lungo tutta la lunghezza e a due forze assiali concentrate, come mostrato, si determini la tensione normale media agente nella barra in funzione dell'ascissa x , con $0 < x \leq 0.5 \text{ m}$.



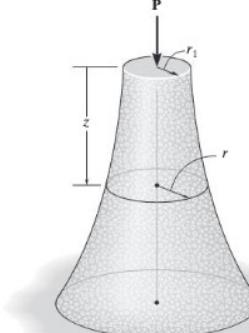
Problema 3.38-3.39

3.40. La struttura rappresentata nella figura è soggetta al carico uniformemente distribuito indicato. Si determini il valore massimo del carico p che può essere applicato senza che la tensione normale media e la tensione tangenziale media agenti sulla sezione *b-b* superino i valori $\sigma = 15 \text{ MPa}$ e $\tau = 16 \text{ MPa}$, rispettivamente. La sezione trasversale dell'elemento *CB* è quadrata di lato 30 mm.



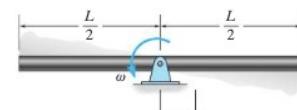
Problema 3.40

3.41. Il piedistallo nella figura è sottoposto alla forza verticale centrale P . Essendo ρ la densità di massa del materiale, si determini, in funzione di z , il valore del raggio r tale per cui la tensione normale media agente nel piedistallo sia costante. La sezione trasversale è circolare.



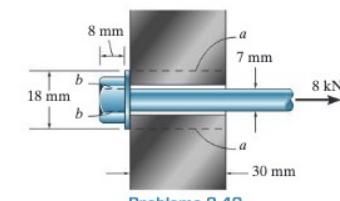
Problema 3.41

3.42. La barra rappresentata nella figura ha sezione trasversale costante di area A , densità di massa per unità di linea m ed è vincolata nella mezzeria con una cerniera. Supponendo che la barra sia in rotazione nel piano orizzontale alla velocità angolare costante ω , si determini la tensione normale media agente nella barra in funzione dell'ascissa x .



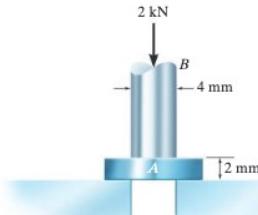
Problema 3.42

3.43. Il bullone rappresentato nella figura è passante attraverso una piastra di spessore 30 mm. Considerando che la forza applicata al gambo del bullone è pari a 8 kN, si determini la tensione normale media agente nel gambo del bullone, la tensione tangenziale media agente nella piastra sulla sezione cilindrica *a-a* e la tensione tangenziale media agente nella testa del bullone sulla sezione cilindrica *b-b*.



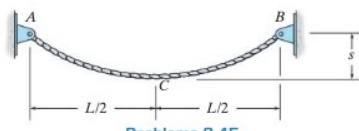
Problema 3.43

3.44. Il puntone circolare *B* esercita una forza di 2 kN sulla sommità della piastra *A*. Si determini la tensione tangenziale media indotta nella piastra per effetto di questo carico.



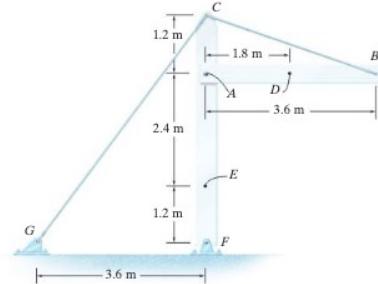
Problema 3.44

3.45. Il cavo rappresentato nella figura ha un peso specifico per unità di volume pari a γ e un'area della sezione trasversale pari a *A*. Ipotizzando che la freccia *s* sia sufficientemente piccola, la lunghezza approssimata del cavo è *L* e il peso può essere considerato distribuito uniformemente lungo la proiezione orizzontale del cavo. Sotto queste ipotesi, si determini la tensione normale media agente nel cavo nel punto più basso *C*.



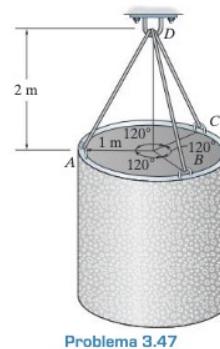
Problema 3.45

3.46. La trave *AB* è vincolata mediante la cerniera in *A* e il cavo *BC*. Un cavo *differente* *CG* è impiegato per tenere in posizione verticale la struttura. Considerando che *AB* pesa 2.0 kN/m e che *FC* pesa 3.0 kN/m, si determinino le azioni interne risultanti agenti sulle sezioni trasversali in *D* e in *E*. Nei calcoli si trascurino gli spessori della trave e della colonna.



Problema 3.46

3.47. Una tubazione in calcestruzzo di massa 3 Mg è tenuta sospesa mediante tre cavi. Considerando che il diametro dei cavi *BD* e *CD* è pari a 10 mm, mentre il diametro del cavo *AD* è pari a 7 mm, si determini la tensione normale media agente in ciascun cavo.

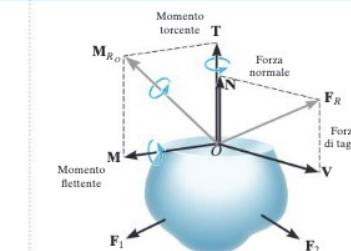


Problema 3.47

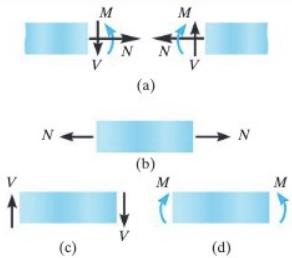
Riepilogo del capitolo

Le azioni interne a un corpo possono essere scomposte in una forza normale, una forza di taglio, un momento flettente e un momento torcente. Queste componenti rappresentano le risultanti delle distribuzioni di tensione normale e tensione tangenziale che agiscono sulla sezione trasversale e si determinano applicando il metodo delle sezioni e le equazioni di equilibrio.

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0 \\ \Sigma F_z &= 0 \\ \Sigma M_x &= 0 \\ \Sigma M_y &= 0 \\ \Sigma M_z &= 0\end{aligned}$$



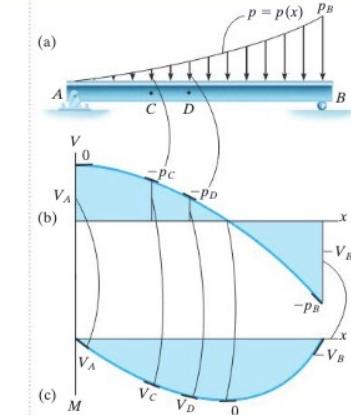
I diagrammi della forza normale, del taglio e del momento sono le rappresentazioni grafiche delle corrispondenti funzioni definite lungo l'asse di una trave. Fissata un'ascissa curvilinea *x* lungo l'asse della trave, i diagrammi si costruiscono suddividendo idealmente la trave in corrispondenza di una generica coordinata *x* e disegnando *N*, *V* e *M* in funzione di *x*. È consuetudine prendere l'origine dell'ascissa nell'estremo sinistro della trave e orientare il verso positivo verso destra. È necessario, inoltre, stabilire una convenzione dei segni per le azioni interne.



I diagrammi di taglio e momento possono essere costruiti anche per via grafica, tenendo conto che:

- ▶ la pendenza del diagramma del taglio in un punto è pari al valore del carico distribuito nel punto, preso con il segno negativo;
- ▶ la pendenza del diagramma del momento in un punto è pari al valore del taglio nel punto;
- ▶ la variazione del taglio è uguale all'area sottesa dal diagramma del carico distribuito, presa con il segno negativo;
- ▶ la variazione del momento è uguale all'area sottesa dal diagramma del taglio.

I valori del taglio e del momento in una generica sezione della trave possono essere determinati anche applicando il metodo delle sezioni.



Un processo infinitesimo staticamente ammissibile è un campo di azioni esterne bilanciato con quelle interne al continuo, riportate alla configurazione di riferimento

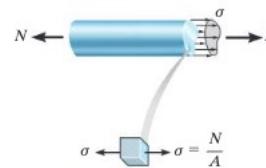
$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(\mathbf{x})}{\partial z} + b_x(\mathbf{x}) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(\mathbf{x})}{\partial z} + b_y(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{in } V \\ \frac{\partial \tau_{zx}(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(\mathbf{x})}{\partial z} + b_z(\mathbf{x}) &= 0 \\ \tau_{xy}(\mathbf{x}) = \tau_{yx}(\mathbf{x}), \quad \tau_{xz}(\mathbf{x}) = \tau_{zx}(\mathbf{x}), \quad \tau_{yz}(\mathbf{x}) = \tau_{zy}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \quad \text{in } S_f$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \quad \text{in } S_u$$

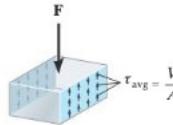
Se una barra, realizzata con un materiale omogeneo e isotropo, è soggetta a forze esterne assiali applicate nel centro d'area della sezione trasversale, la distribuzione delle tensioni normali agenti sulla sezione è uniforme. La tensione normale media è pari a $\sigma = P/A$, dove P è la forza interna assiale sulla sezione.

$$\sigma = \frac{N}{A}$$



La tensione tangenziale media è pari $\tau_{avg} = V/A$, dove V è la forza di taglio risultante sulla sezione trasversale di area A . Questa formula viene impiegata spesso per determinare la tensione tangenziale media negli elementi di collegamento e nelle differenti parti di una giunzione.

$$\tau_{avg} = \frac{V}{A}$$



Trasformazione delle tensioni

4

OBIETTIVI DEL CAPITOLO

In questo capitolo si mostrerà come trasformare le componenti di tensione associate a un dato sistema di coordinate in quelle corrispondenti a un altro sistema di coordinate orientato diversamente dal primo. Una volta stabilite le equazioni di trasformazione, si potranno ottenere i valori massimi della tensione normale e di quella tangenziale in un punto e trovare l'orientazione degli elementi su cui agiscono. La prima parte del capitolo sarà dedicata alla trattazione dello stato piano di tensione, in quanto tale condizione si riscontra frequentemente nelle applicazioni. Al termine del capitolo verrà presentato un metodo per determinare il valore massimo assoluto della tensione tangenziale in un punto, nei due casi di stato piano e stato triassiale di tensione.



Per determinare lo stato di tensione in elementi dalla geometria complessa, come queste palette di turbina, occorre sapere come si trasforma lo stato di tensione al variare degli assi coordinati.

4.1 Trasformazioni di uno stato piano di tensione

Nel Paragrafo 3.4 si è visto come un generico stato di tensione in un punto sia completamente definito da *sei* componenti indipendenti di tensione normale e tangenziale che agiscono sulle facce di un elemento materiale posto in corrispondenza del punto stesso, Figura 4.1a. Nelle applicazioni, tuttavia, tale stato di tensione non si incontra comunemente. Di solito, infatti, i carichi agenti sugli elementi strutturali e i componenti meccanici sono tali per cui le tensioni prodotte possano essere analizzate in un solo piano. In questo caso si dice che il materiale è soggetto a uno stato piano di tensione, Figura 4.1b. Per esempio, nel caso in cui non agiscano carichi sulla superficie di un corpo, le componenti di tensione normale e tangenziale sono certamente nulle sulla faccia di un elemento materiale che giace sulla superficie. Di conseguenza, anche le corrispondenti componenti di tensione sulla faccia opposta risultano nulle, per cui nel punto in esame il materiale è soggetto a uno stato piano di tensione.

Un generico *stato piano di tensione* in un punto si può allora rappresentare attraverso la combinazione di due componenti di tensione normale, σ_x e σ_y , e una componente di tensione tangenziale, τ_{xy} , agenti su quattro delle sei facce dell'elemento materiale. Solo per comodità, lo stato piano di tensione considerato in questo testo è riferito al piano $x-y$, come mostrato nella Figura 4.1c.



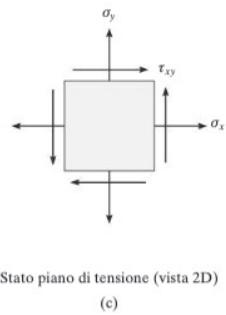
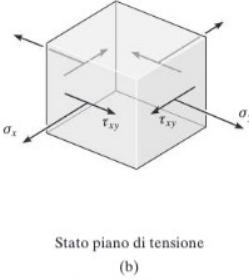
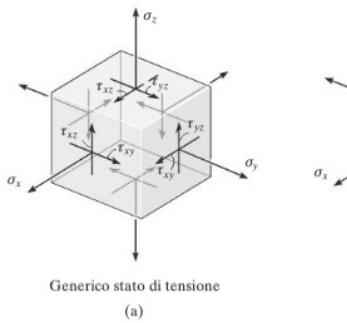


Figura 4.1

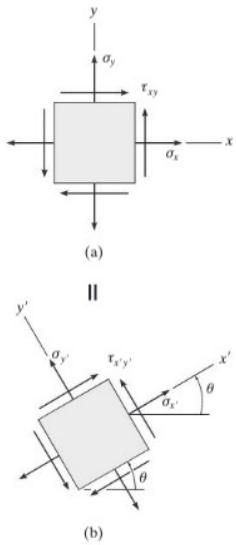


Figura 4.2

Procedura di analisi

Sia noto lo stato di tensione in un punto per un dato sistema di coordinate cartesiane, Figura 4.3a; allora lo stato di tensione per un qualunque altro sistema di coordinate, Figura 4.3b, può essere determinato attraverso la procedura seguente.

- Si determinano le componenti di tensione normale e tangenziale σ_x, τ_{xy} agenti sulla faccia di normale x'

male x' dell'elemento, Figura 4.3b. Si immagina, pertanto, di sezionare l'elemento nella Figura 4.3a così come mostrato nella Figura 4.3c. Sia ΔA l'area interessata dalla sezione, allora le aree adiacenti saranno rispettivamente $\Delta A \sin \theta$ e $\Delta A \cos \theta$.

- Si traccia, poi, lo schema di corpo libero della porzione sezionata, il che comporta di mettere in

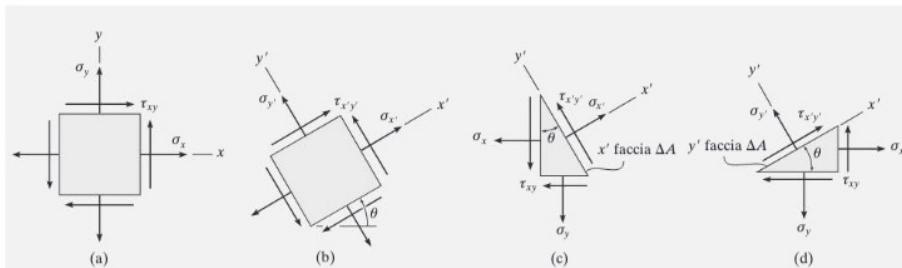


Figura 4.3

Si consideri che, se lo stato di tensione in un punto è definito dalle tre componenti di tensione mostrate sull'elemento nella Figura 4.2a, allora un elemento con diversa orientazione, come quello mostrato nella Figura 4.2b, sarà soggetto a tre diverse componenti di tensione. In altre parole, *lo stato piano di tensione nel punto è univocamente determinato da tre componenti che agiscono su un elemento caratterizzato da una specifica orientazione*.

In questo paragrafo, anche attraverso esempi numerici, si mostrerà come *trasformare* le componenti di tensione relative a un dato sistema di coordinate cartesiane in quelle relative a un sistema di coordinate differente, ruotato rispetto al primo. Ciò significa che, se lo stato di tensione è caratterizzato dalle componenti $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, orientate lungo gli assi x e y , Figura 4.2a, si mostrerà come ottenere invece le componenti $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{x'y'}$, orientate lungo gli assi x' e y' , Figura 4.2b, rappresentative sempre dello stesso stato di tensione nel punto. È lo stesso che accade nel caso in cui si abbiano due componenti di forza \mathbf{F}_x e \mathbf{F}_y , dirette secondo gli assi x e y , la cui risultante sia \mathbf{F}_R , e si vogliano determinare le componenti \mathbf{F}_x e \mathbf{F}_y , dirette secondo gli assi x' e y' , così che la risultante rimanga la stessa. La trasformazione delle componenti di tensione è, tuttavia, meno semplice di quella delle componenti di forza, poiché nella trasformazione delle tensioni si deve tener conto del valore e della direzione di ogni componente di tensione nonché dell'orientazione dell'area su cui ogni componente agisce. Nel caso della forza, invece, la trasformazione deve tener conto solo del valore e della direzione di ogni componente.

evidenza le forze agenti. Ciò si ottiene moltiplicando le componenti di tensione su ogni faccia per l'area su cui agiscono.

- Si applicano, quindi, le equazioni di equilibrio delle forze nelle direzioni x' e y' in maniera da ottenere le componenti incognite di tensione $\sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$.
- Infine, nel caso in cui si debba determinare la componente $\sigma_{y'}$, agente sulla faccia di normale y'

dell'elemento mostrato nella Figura 4.3b, occorre considerare la porzione dell'elemento disegnata nella Figura 4.3d e seguire la stessa procedura appena descritta. In questo caso, comunque, non serve determinare nuovamente $\tau_{x'y'}$ in quanto essa conserva lo stesso valore su ognuna delle quattro facce dell'elemento, Figura 4.3b.

Esempio 4.1

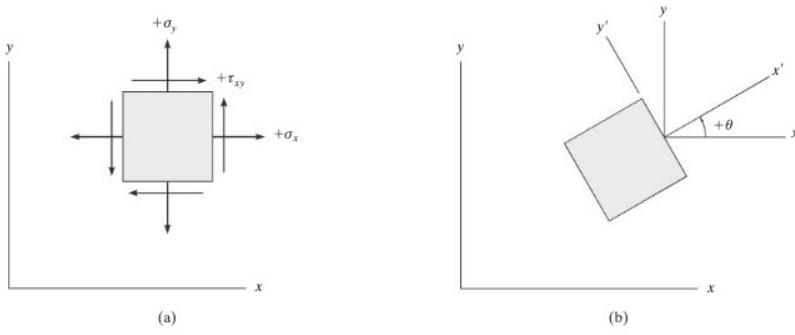
L'Esempio 4.1 è disponibile sulla piattaforma MyLab.



4.2 Equazioni generali per la trasformazione di stati piani di tensione

Il metodo presentato nel paragrafo precedente permette di trasformare le componenti di tensione normale e tangenziale, inizialmente espresse rispetto a un sistema di coordinate x e y , nelle componenti espresse rispetto a un sistema x' e y' . In questo paragrafo, il metodo sarà sviluppato in forma generale e formalizzato attraverso un sistema di equazioni di trasformazione delle tensioni.

Convenzione dei segni. Prima di ricavare le equazioni di trasformazione è importante stabilire una convenzione dei segni per le componenti di tensione. Una volta fissati gli assi x , y e x' , y' , si definisce positiva una componente di tensione normale o tangenziale se agisce nel verso *positivo* degli assi sulla faccia di normale *positiva* dell'elemento, oppure se agisce nel verso *negativo* degli assi sulla faccia di normale *negativa* dell'elemento, Figura 4.5a. Ad esempio σ_x è positiva, poiché agisce verso destra sulla faccia verticale destra e agisce verso sinistra (verso negativo



Convenzione dei segni
Figura 4.5

delle x) sulla faccia verticale sinistra. La tensione tangenziale nella Figura 4.5a agisce in verso positivo su tutte e quattro le facce dell'elemento. Sulla faccia verticale di destra τ_{xy} agisce verso l'alto (verso delle y positive); sulla faccia orizzontale inferiore τ_{xy} agisce verso sinistra (verso delle x negative) e così via.

L'elemento nella Figura 4.5a è mantenuto in equilibrio sotto l'azione di tutte le componenti di tensione tangenziale e, per questo motivo, conoscendo il verso di τ_{xy} su una faccia dell'elemento, automaticamente sono definiti i tre restanti. È allora facile ricordare la convenzione dei segni semplicemente notando che *le tensioni normali positive agiscono verso l'esterno delle facce dell'elemento e le tensioni tangenziali positive agiscono dirette verso l'alto sulla faccia destra dell'elemento*.

Sia dato lo stato piano di tensione mostrato nella Figura 4.5a e sia inoltre θ l'orientazione del piano inclinato su cui si vogliono determinare le componenti di tensione normale e tangenziale. Al fine di definire opportunamente tale angolo è innanzitutto necessario fissare un asse x' positivo, orientato verso l'esterno, ortogonale al piano inclinato e un asse associato y' , diretto lungo il piano inclinato, Figura 4.5b. Si noti che entrambe le coppie di assi sono parte di terne cartesiane levighe (o destre); significa che il verso positivo dell'asse z (o z') può essere ricavato attraverso la regola della mano destra. Si punti il dito indice della mano destra nel verso di x (o x'); si punti il dito medio nel verso di y (o y'), il pollice indicherà, allora, il verso positivo uscente dell'asse z (o z'). L'angolo θ è quello formato tra i versi positivi degli assi x e x' . Risulta *positivo* se è antiorario, come mostrato nella Figura 4.5b.

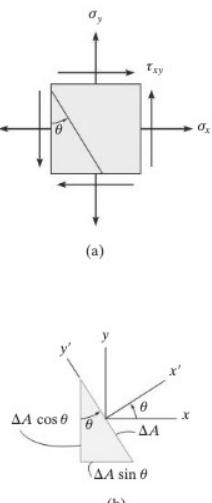


Figura 4.6 (segue)

Componenti normali e tangenziali. Adottando la convenzione dei segni appena introdotta, si immagini di sezionare l'elemento nella Figura 4.6a lungo il piano inclinato e di isolare la porzione mostrata nella Figura 4.6b. Si assuma che il piano della sezione (inclinato) abbia area ΔA ; allora i piani orizzontale e verticale hanno area pari a $\Delta A \sin \theta$ e $\Delta A \cos \theta$, rispettivamente.

Nella Figura 4.6c si riporta il corrispondente *schema di corpo libero*. Applicando le equazioni di equilibrio alla traslazione al fine di ottenere le componenti normale e tangenziale incognite $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ si ottiene:

$$+\nabla \sum F_x = 0; \quad \sigma_{x'} \Delta A - (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \cos \theta - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \sin \theta - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \sin \theta - (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \cos \theta = 0 \quad (4.1)$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} (2 \sin \theta \cos \theta) \quad (4.1)$$

$$+\nabla \sum F_y = 0; \quad \tau_{x'y'} \Delta A + (\tau_{xy} \Delta A \sin \theta) \sin \theta - (\sigma_y \Delta A \sin \theta) \cos \theta - (\tau_{xy} \Delta A \cos \theta) \cos \theta + (\sigma_x \Delta A \cos \theta) \sin \theta = 0 \quad (4.2)$$

$$\tau_{x'y'} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (4.2)$$

Queste due equazioni possono essere semplificate sfruttando le identità trigonometriche $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, $\sin^2 \theta = (1 - \cos 2\theta)/2$, e $\cos^2 \theta = (1 + \cos 2\theta)/2$ per cui:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (4.3)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (4.4)$$

Per ricavare la tensione normale agente in direzione y' basta sostituire ($\theta = \theta + 90^\circ$) all'angolo θ nell'Equazione (4.3), Figura 4.6d. Si giunge a

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (4.5)$$

Se $\sigma_{y'}$ risulta positiva, ciò significa che essa agisce nel verso delle y' positive così come mostrato nella Figura 4.6d.

Procedura di analisi

Al fine di applicare le Equazioni (4.3) e (4.4) di trasformazione delle tensioni è sufficiente sostituire i valori noti di σ_x , σ_y , τ_{xy} e dell'angolo θ rispettando la convenzione dei segni, Figura 4.5. Se $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ assumono valori positivi, allora tali tensioni agiscono nel verso positivo degli assi x' e y' .

Esempio 4.2

Si consideri lo stato piano di tensione in un punto rappresentato graficamente sull'elemento nella Figura 4.7a. Si determini lo stato di tensione nel punto su un altro elemento orientato a 30° in senso orario rispetto alla posizione mostrata.

SOLUZIONE

Lo stesso problema è stato risolto nell'Esempio 4.1 (on-line) utilizzando le equazioni di equilibrio. In questo esempio si utilizzano, invece, le Equa-

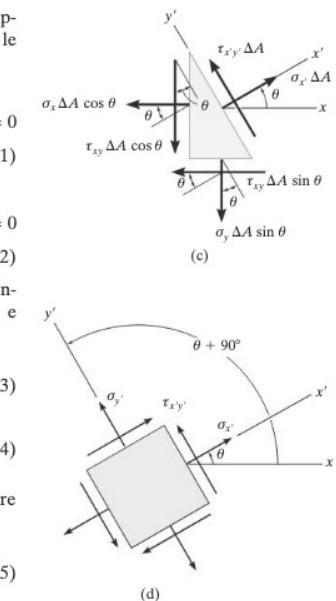


Figura 4.6 (continua)

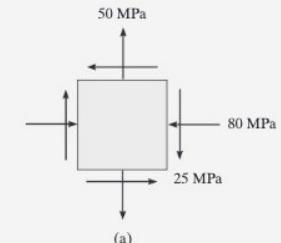
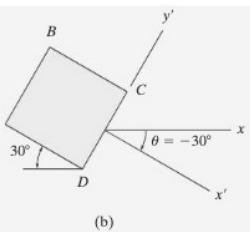
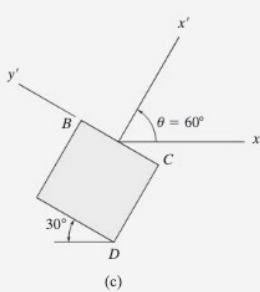


Figura 4.7 (segue)



(b)



(c)

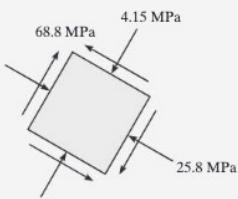


Figura 4.7 (continua)

zioni (4.3) e (4.4). Coerentemente con la convenzione dei segni, nella Figura 4.5 si può notare che

$$\sigma_x = -80 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 50 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -25 \text{ MPa}$$

Piano CD. Per ottenere le componenti di tensione sul piano *CD*, Figura 4.7b, l'asse positivo x' è uscente, ortogonale a *CD*, mentre l'asse y' è diretto lungo *CD*. L'angolo misurato tra x e x' è $\theta = -30^\circ$ (in senso orario). Applicando le Equazioni (4.3) e (4.4) si ottiene

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2} \cos 2(-30^\circ) + (-25) \sin 2(-30^\circ) \\ &= -25.8 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= -\frac{-80 - 50}{2} \sin 2(-30^\circ) + (-25) \cos 2(-30^\circ) \\ &= -68.8 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Il segno negativo indica che $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ sono orientate nei versi negativi di x' e y' rispettivamente. I risultati sono mostrati graficamente sull'elemento nella Figura 4.7d.

Piano BC. In maniera del tutto analoga le componenti di tensione agenti sulla faccia *BC*, Figura 4.7c, sono ottenute per $\theta = 60^\circ$. Applicando le Equazioni (4.3) e (4.4),¹ si ottiene

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{-80 + 50}{2} + \frac{-80 - 50}{2} \cos 2(60^\circ) + (-25) \sin 2(60^\circ) \\ &= -4.15 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= -\frac{-80 - 50}{2} \sin 2(60^\circ) + (-25) \cos 2(60^\circ) \\ &= 68.8 \text{ MPa}\end{aligned}$$

In questo caso $\tau_{x'y'}$ è stato calcolato due volte per effettuare un controllo. Il segno negativo di $\sigma_{x'}$ indica che tale componente è orientata nel verso negativo di x' , Figura 4.7c. I risultati sono mostrati graficamente sull'elemento nella Figura 4.7d.

4.3 Tensioni principali e tensione tangenziale massima nel piano

A partire dalle Equazioni (4.3) e (4.4) è possibile notare che $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ dipendono dal valore dell'angolo θ di inclinazione dei piani su cui tali tensioni agiscono. Nelle applicazioni è spesso di interesse determinare l'orientazione dei piani su cui agiscono la massima e la minima tensione normale, nonché

¹ In maniera alternativa, invece dell'Equazione (4.3) si può applicare l'Equazione (4.5) con $\theta = -30^\circ$.

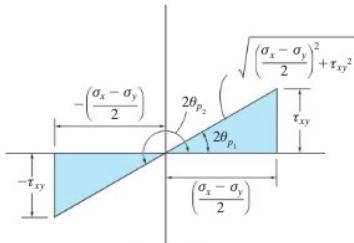


Figura 4.8

l'orientazione dei piani su cui agisce la massima tensione tangenziale. Questo paragrafo è dedicato alla trattazione di tali problemi.

Tensioni principali nel piano. Per determinare le tensioni normali massima e minima, si deriva una volta l'Equazione (4.3) rispetto all'angolo θ e si pone il risultato pari a zero. Si ottiene allora:

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(2 \sin 2\theta) + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

La soluzione dell'equazione fornisce l'orientazione $\theta = \theta_p$ dei piani di massima e minima tensione normale.

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \quad (4.6)$$

La soluzione prevede due radici, θ_{p1} e θ_{p2} . In particolare, gli angoli $2\theta_{p1}$ e $2\theta_{p2}$ differiscono di 180° e naturalmente θ_{p1} e θ_{p2} differiscono di 90° .

Le tensioni normali incognite si ottengono sostituendo i valori di θ_{p1} e θ_{p2} nell'Equazione (4.3). È possibile, quindi, ricavare i valori di seno e coseno di $2\theta_{p1}$ e $2\theta_{p2}$ a partire dai triangoli evidenziati nella Figura 4.8. La costruzione di questi triangoli è basata sull'Equazione (4.6) assumendo che τ_{xy} e $(\sigma_x - \sigma_y)$ siano entrambe quantità positive o negative. Si ha allora per θ_{p1}

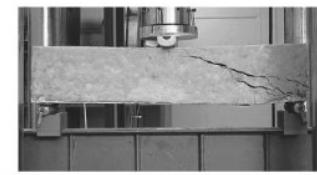
$$\begin{aligned}\sin 2\theta_{p1} &= \tau_{xy} / \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \cos 2\theta_{p1} &= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) / \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}$$

e per θ_{p2}

$$\begin{aligned}\sin 2\theta_{p2} &= -\tau_{xy} / \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \cos 2\theta_{p2} &= -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) / \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\end{aligned}$$

Sostituendo arbitrariamente uno di questi due sistemi di espressioni trigonometriche nell'Equazione (4.3) e semplificando si ha:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.7)$$



► Le fessure in questa trave di calcestruzzo sono state cause da tensioni di trazione dovute all'azione combinata di momento flettente e taglio. Le equazioni di trasformazione delle tensioni possono essere utilizzate per prevedere la direzione delle fessure e le tensioni principali che le generano.

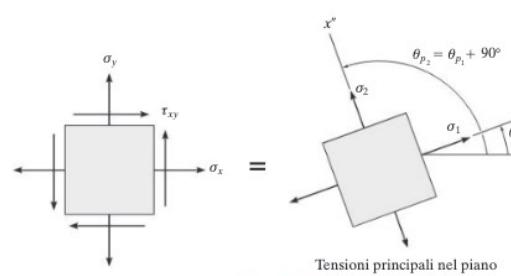


Figura 4.9

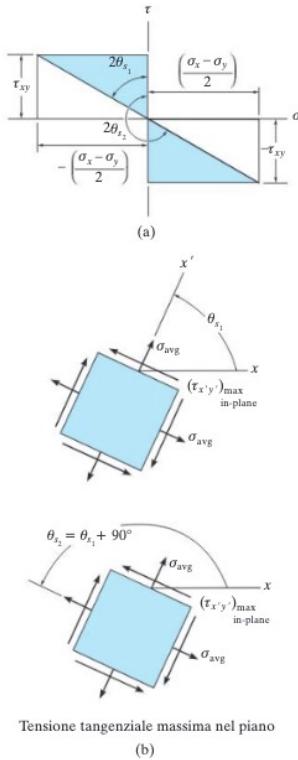


Figura 4.10

A seconda del segno scelto, questa espressione fornisce il valore massimo o minimo della tensione normale agente in un punto, con $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Questi due valori di tensione normale sono chiamati **tensioni principali nel piano**; i piani corrispondenti su cui esse agiscono sono detti *piani principali di tensione*, Figura 4.9. Inoltre, se si sostituiscono le espressioni trigonometriche per θ_{p1} e θ_{p2} nell'Equazione (4.4), è facile notare che $\tau_{x'y'} = 0$, ossia le componenti di tensione tangenziale agenti sui piani principali sono identicamente nulle.

Tensione tangenziale massima nel piano. È possibile ricavare l'orientazione dell'elemento sulle cui facce agisce la tensione tangenziale massima derivando l'Equazione (4.4) rispetto a θ ed eguagliando a zero il risultato ottenuto. Si ottiene così:

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \quad (4.8)$$

Il significato grafico delle due radici θ_{s1} e θ_{s2} di questa equazione è rappresentato nella Figura 4.10a attraverso i triangoli evidenziati. Confrontando questa immagine con la Figura 4.8 è facile notare che ciascuna delle due radici $2\theta_s$ differisce di 90° rispetto alla corrispondente $2\theta_p$; ciò significa che le radici θ_s e θ_p differiscono di 45° e ne risulta che i *piani di tensione tangenziale massima si possono ottenere orientando un elemento a 45° rispetto alla posizione dell'elemento che definisce i piani principali di tensione*.

Utilizzando arbitrariamente una delle due radici θ_{s1} o θ_{s2} , il massimo valore della tensione tangenziale si ottiene calcolando i valori di $\sin 2\theta_s$ e $\cos 2\theta_s$, facendo riferimento alla Figura 4.10 e sostituendoli nell'Equazione (4.4). Si ottiene allora:

$$\tau_{\text{max in-plane}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.9)$$

Il valore di $\tau_{\text{max in-plane}}$ ottenuto per mezzo dell'Equazione (4.9) è noto come **tensione tangenziale massima nel piano** perché agisce su un elemento del piano $x-y$.

Sostituendo poi i valori ricavati di $\sin 2\theta_s$ e $\cos 2\theta_s$ nell'Equazione (4.3), è possibile notare che sui piani di tensione tangenziale massima agisce anche la componente di tensione normale, detta **tensione normale media**, uguale a:

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (4.10)$$

Punti salienti

- ▶ Le tensioni principali rappresentano i valori massimo e minimo di tensione normale agenti in un punto.
- ▶ Quando lo stato di tensione è rappresentato attraverso le tensioni principali sull'elemento materiale considerato non agiscono tensioni tangenziali.
- ▶ Lo stato di tensione in un punto può anche essere espresso in funzione della tensione tangenziale mas-

sima nel piano. In tale caso sull'elemento agisce anche una tensione normale media.

- ▶ L'elemento su cui agisce la tensione tangenziale massima nel piano con la tensione normale media associata è orientato a 45° rispetto all'elemento su cui agiscono le tensioni principali.

Esempio 4.3

Si consideri la barra nella Figura 4.11a sottoposta al momento torcente T che produce uno stato di tensione puramente tangenziale nel generico elemento materiale (si veda il Capitolo 9). Si determinino (a) la tensione tangenziale massima nel piano e la tensione normale media associata e (b) le tensioni principali.

SOLUZIONE

Dalla convenzione dei segni si ha

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = -\tau$$

Tensione tangenziale massima nel piano. Applicando le Equazioni (4.9) e (4.10) si ha:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{max in-plane}} &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\tau)^2} = \pm\tau \\ \sigma_{\text{avg}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0 \end{aligned}$$

Pertanto, come si poteva prevedere, la tensione tangenziale massima nel piano agisce sull'elemento nella Figura 4.11a.

Da prove sperimentali è emerso che i materiali duttili evidenziano rotture a causa di tensioni tangenziali (si veda il Paragrafo 7.10). Ne consegue che, se una barra di acciaio dolce è soggetta a un momento torcente, la tensione tangenziale massima nel piano ne può causare la rottura, come mostrato nella foto a lato.

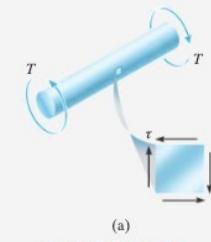


Figura 4.11 (segue)



► Rotta per torsione di una barra in acciaio dolce

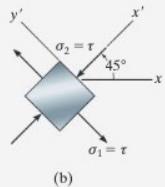


Figura 4.11 (continua)



► Rottura per trazione di una barra in ghisa

Tensioni principali. Applicando le Equazioni (4.6) e (4.7) si ha:

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{-\tau}{(0-0)/2}, \theta_{p2} = 45^\circ, \theta_{p1} = 135^\circ$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 0 \pm \sqrt{(0)^2 + \tau^2} = \pm \tau$$

Se poi si applica l'Equazione (4.3) con $\theta = 45^\circ$, si ottiene

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$= 0 + 0 + (-\tau) \sin 90^\circ = -\tau$$

Pertanto $\sigma_2 = -\tau$ agisce a $\theta_{p2} = 45^\circ$, come mostrato nella Figura 4.11b, e $\sigma_1 = \tau$ agisce sulla faccia opposta, $\theta_{p1} = 135^\circ$.

OSSERVAZIONE: I materiali fragili si rompono sotto l'azione di tensioni normali (si veda il Paragrafo 7.10). Per questo motivo, quando un materiale fragile, quale la ghisa, è sottoposto a un momento torcente la frattura avviene a causa delle tensioni di trazione su piani inclinati a 45° , come evidenziato nella foto a lato.

$$\tau_{\max \text{ in-plane}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma - 0}{2}\right)^2 + (0)^2} = \pm \frac{\sigma}{2}$$

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma + 0}{2} = \frac{\sigma}{2}$$

Per determinare la corretta orientazione dell'elemento si applica l'Equazione (4.4).

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta = -\frac{\sigma - 0}{2} \sin 90^\circ + 0 = -\frac{\sigma}{2}$$

Questa tensione tangenziale negativa agisce sulla faccia x' , orientata nel verso negativo della y' , come mostrato nella Figura 4.12b.

OSSERVAZIONE: Se la barra è fatta di *materiale duttile*, come l'acciaio dolce, allora quando è soggetto a *trazione* si rompe per effetto delle tensioni tangenziali (si veda il Paragrafo 7.10). Ciò è evidente nella foto a lato in cui, nella regione in cui si evidenzia la strizione, le tensioni tangenziali hanno causato lo scivolamento lungo i piani cristallini dell'acciaio, causando un piano di frattura che ha formato un cono lungo la barra orientato circa a 45° , come calcolato in precedenza.

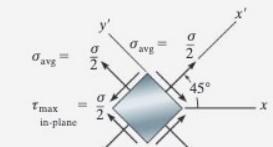
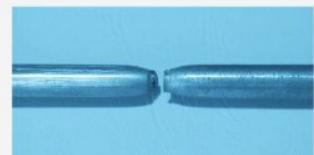


Figura 4.12 (continua)



► Rottura per trazione di una barra in acciaio dolce

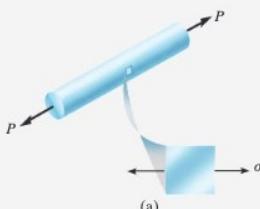


Figura 4.12 (segue)

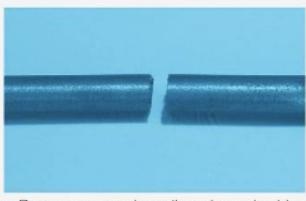
Esempio 4.4

La barra mostrata nella Figura 4.12a è soggetta a un carico assiale P che produce uno stato di trazione nel materiale (si veda il Capitolo 8). Si determinino (a) le tensioni principali e (b) la tensione tangenziale massima nel piano e la tensione normale media associata.

SOLUZIONE

Dalla convenzione dei segni si ha:

$$\sigma_x = \sigma \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$



► Rottura per trazione di una barra in ghisa

Tensioni principali. Si può osservare che sull'elemento mostrato nella Figura 4.12a agisce uno stato principale di tensione dal momento che non ci sono componenti di tensione tangenziale. Ciò si può ottenere anche sostituendo direttamente i valori delle tensioni in precedenza riportati nelle Equazioni (4.6) e (4.7). Si ha, infatti:

$$\sigma_1 = \sigma \quad \sigma_2 = 0$$

Poiché le evidenze sperimentali hanno mostrato che le tensioni normali causano rotture nei *materiali fragili*, come la ghisa, questo tipo di rottura causa fratture come quelle mostrate nella figura a lato.

Tensione tangenziale massima nel piano. Applicando le Equazioni (4.8), (4.9) e (4.10) si ha:

$$\tan 2\theta_s = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(\sigma - 0)/2}{0}; \theta_{s1} = 45^\circ, \theta_{s2} = 135^\circ$$

Esempio 4.5

Lo stato piano di tensione agente in un punto di un corpo è mostrato sull'elemento della Figura 4.13a. Si rappresenti questo stato di tensione in termini di tensioni principali.

SOLUZIONE

Dalla convenzione dei segni si ha:

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 90 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

Orientazione dell'elemento. Applicando l'Equazione (4.6) si ottiene

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{60}{(-20 - 90)/2}$$

Risolvendo ed esprimendo le due radici rispetto a $2\theta_p$,

$$2\theta_{p1} = -47.49^\circ \quad \theta_{p1} = -23.7^\circ$$

Poiché $2\theta_{p1}$ e $2\theta_{p2}$ differiscono di 180° si ha:

$$2\theta_{p2} = 180^\circ + 2\theta_{p1} = 132.51^\circ \quad \theta_{p2} = 66.3^\circ$$

Si ricordi che θ è positivo se sovrappone in senso *antiorario* x a x' , ossia alla normale uscente dalla faccia dell'elemento; i risultati pertanto sono illustrati nella Figura 4.13b.

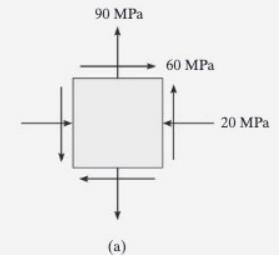
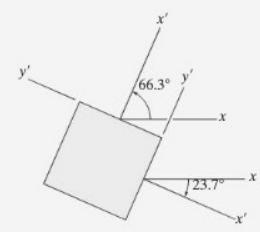


Figura 4.13 (segue)



Tensioni principali. Si ha

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{-20 + 90}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2} \\ &= 35.0 \pm 81.4 \\ \sigma_1 &= 116 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= -46.4 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Il piano principale su cui agisce ciascuna componente di tensione normale può essere determinato applicando l'Equazione (4.3) dove $\theta = \theta_{p_i} = -23.7^\circ$. Si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{-20 + 90}{2} + \frac{-20 - 90}{2} \cos 2(-23.7^\circ) + 60 \sin 2(-23.7^\circ) \\ &= -46.4 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Pertanto $\sigma_2 = -46.4 \text{ MPa}$ agisce sul piano definito da $\theta_{p_2} = -23.7^\circ$, mentre $\sigma_1 = 116 \text{ MPa}$ agisce sul piano definito da $\theta_{p_1} = 66.3^\circ$. I risultati sono illustrati sull'elemento nella Figura 4.13c. Si ricordi che su questo elemento non agiscono componenti di tensione tangenziale.

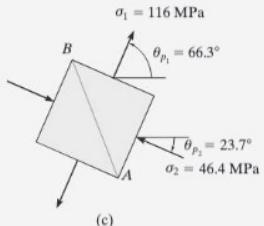
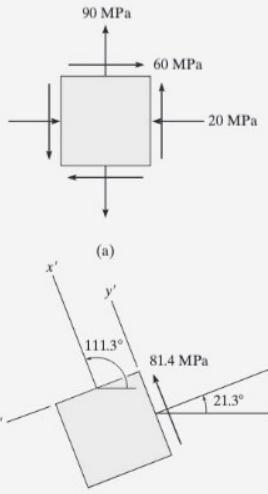


Figura 4.13 (continua)



Esempio 4.6

Lo stato piano di tensione agente in un punto di un corpo è mostrato sull'elemento della Figura 4.14a. Si rappresenti questo stato di tensione in termini di tensione tangenziale massima nel piano e della tensione normale media associata.

SOLUZIONE

Orientazione dell'elemento. Poiché $\sigma_x = -20 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 90 \text{ MPa}$ e $\tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$, applicando l'Equazione (4.8) si ha:

$$\begin{aligned}\tan 2\theta_s &= \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} = \frac{-(20 - 90)/2}{60} \\ 2\theta_{s_2} &= 42.5^\circ \quad \theta_{s_2} = 21.3^\circ \\ 2\theta_{s_1} &= 180^\circ + 2\theta_{s_2} \quad \theta_{s_1} = 111.3^\circ\end{aligned}$$

Si noti che gli angoli mostrati nella Figura 4.14b differiscono di 45° rispetto ai piani delle tensioni principali determinate nell'Esempio 4.5.

Tensione tangenziale massima nel piano. Applicando l'Equazione (4.9):

$$\tau_{\text{in-plane}}^{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-20 - 90}{2}\right)^2 + (60)^2} = 81.4 \text{ MPa}$$

Figura 4.14 (segue)

La direzione di $\tau_{\text{in-plane}}^{\max}$ sull'elemento può essere determinata considerando $\theta = \theta_{s_2} = 21.3^\circ$ e applicando l'Equazione (4.4). Si ha:

$$\begin{aligned}\tau_{x'y'} &= -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= -\left(\frac{-20 - 90}{2}\right) \sin 2(21.3^\circ) + 60 \cos 2(21.3^\circ) \\ &= 81.4 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Pertanto $\tau_{\text{in-plane}}^{\max} = \tau_{x'y'}$ agisce nel verso positivo di y' su questa faccia ($\theta = 21.3^\circ$), Figura 4.14b. Le tensioni tangenziali sulle altre tre facce sono dirette come mostrato nella Figura 4.14c.

Tensione normale media. Oltre alla tensione tangenziale massima, calcolata in precedenza, l'elemento è soggetto anche a una tensione normale media calcolata con l'Equazione (4.10), che vale:

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa}$$

Questa è una tensione di trazione. I risultati sono mostrati nella Figura 4.14c.

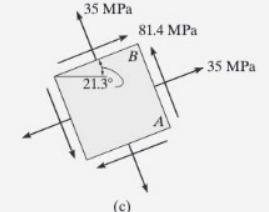


Figura 4.14 (continua)

4.4 Cerchio di Mohr – stato piano di tensione

In questo paragrafo si mostra come sia possibile determinare per le equazioni di trasformazione delle tensioni piane una soluzione grafica che è spesso conveniente utilizzare ed è facile da ricordare. Attraverso tale approssimazione è inoltre possibile "visualizzare" in che modo le componenti di tensione normale e tangenziale $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ variano al variare dell'orientazione del piano su cui agiscono, Figura 4.15a.

Le Equazioni (4.3) e (4.4) possono essere riscritte nella forma

$$\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \quad (4.11)$$

$$\tau_{x'y'} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \quad (4.12)$$

L'incognita θ si può eliminare elevando al quadrato ciascuna delle due equazioni e sommandole. Si ottiene allora:

$$\left[\sigma_{x'} - \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)\right]^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

Noti i valori di σ_x , σ_y , τ_{xy} le equazioni precedenti possono essere riscritte in forma più compatta come

$$(\sigma_{x'} - \sigma_{\text{avg}})^2 + \tau_{x'y'}^2 = R^2 \quad (4.13)$$

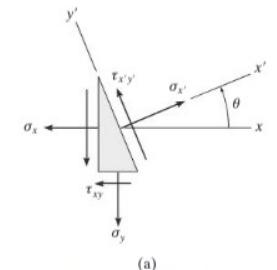


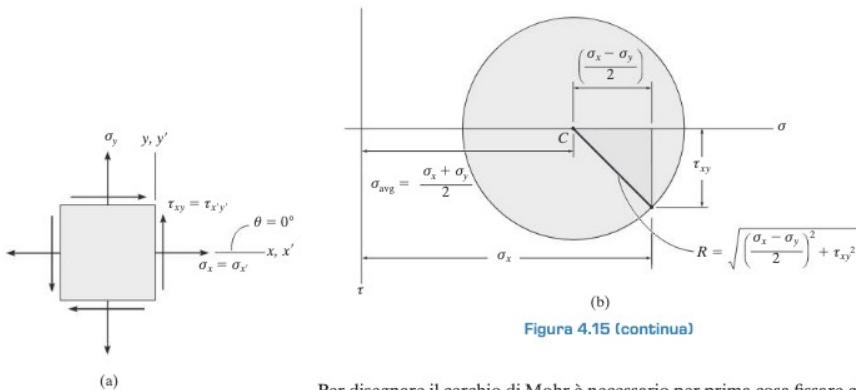
Figura 4.15 (segue)

dove

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4.14)$$

Se si fissano come assi coordinati σ orizzontale, *positivo verso destra*, e τ verticale, *positivo verso il basso*, e si rappresenta graficamente l'Equazione (4.13), è possibile notare che questa equazione rappresenta una circonferenza di raggio R e centro sull'asse σ nel punto $C(\sigma_{\text{avg}}, 0)$, Figura 4.15b. Questa circonferenza, la cui definizione fu data dall'ingegnere tedesco Otto Mohr (1835-1918), è comunemente indicata come *cerchio² di Mohr*, in suo nome.



Per disegnare il cerchio di Mohr è necessario per prima cosa fissare gli assi σ e τ , Figura 4.16c. Essendo note le componenti di tensione σ_x , σ_y e τ_{xy} è allora possibile individuare il centro del cerchio $C(\sigma_{\text{avg}}, 0)$. Per determinare il raggio è necessario conoscere almeno un punto del cerchio. Si consideri allora il caso in cui l'asse x' coincida con l'asse x , come mostrato nella Figura 4.16a. Si ha $\theta = 0^\circ$, $\sigma_{x'} = \sigma_x$, $\tau_{x'y'} = \tau_{xy}$. Si determina così il punto di coordinate $A(\sigma_x, \tau_{xy})$, rappresentato graficamente nella Figura 4.16c. Considerando il triangolo evidenziato nella figura, l'applicazione del teorema di Pitagora porta alla determinazione del raggio R , per il quale si trova un valore in accordo con quello ottenuto usando l'Equazione (4.14). Una volta noti i punti C e A , è possibile disegnare il cerchio come si vede nella figura.

A questo punto si immagini di ruotare l'asse x' di 90° in senso antiorario, Figura 4.16b. In questo caso si ha $\sigma_{x'} = \sigma_y$, $\tau_{x'y'} = -\tau_{xy}$. Tali valori definiscono le coordinate del punto $G(\sigma_y, -\tau_{xy})$ sul cerchio, Figura 4.16c. È facile notare che il raggio CG forma un angolo di 180° in senso antiorario rispetto al raggio CA . Questo significa che a una rotazione θ dell'asse x' corrisponde una rotazione 2θ sul cerchio nello stesso verso.

Una volta costruito, il cerchio di Mohr può essere utilizzato per determinare i valori delle tensioni principali, il valore della tensione tan-

² La denominazione *cerchio* è impropria, tuttavia è invalsa nell'uso (N.d.R.).

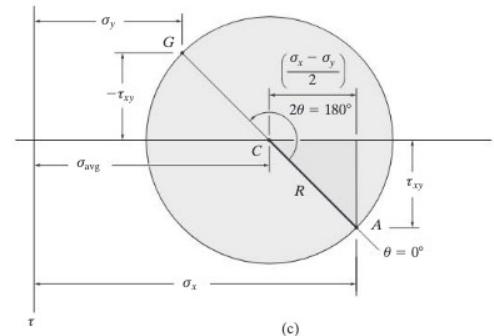


Figura 4.16 (continua)

genziale massima nel piano e il valore associato di tensione normale media, oppure per determinare le componenti di tensione agenti su un piano qualsiasi. Le formule per ottenere questi valori sono spiegate nella Procedura di analisi seguente.

Procedura di analisi

Si elencano di seguito i passi necessari per costruire il cerchio di Mohr.

Costruzione del cerchio

- ▶ Fissare un sistema di coordinate in cui sulle ascisse si pongano i valori delle tensioni normali σ , con verso positivo dell'asse verso destra, e sulle ordinate i valori delle tensioni tangenziali τ , con verso positivo dell'asse verso il basso, Figura 4.17a.
- ▶ Adottando la convenzione dei segni per σ_x , σ_y e τ_{xy} , come mostrato nella Figura 4.17b, disegnare il centro C del cerchio, che è posizionato sull'asse delle σ a distanza $\sigma_{\text{avg}} = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ dall'origine, Figura 4.17a.

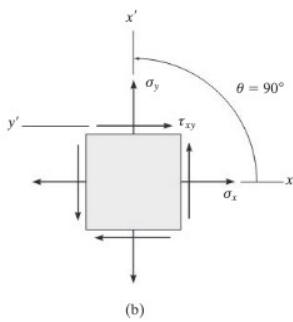


Figura 4.16 (segue)

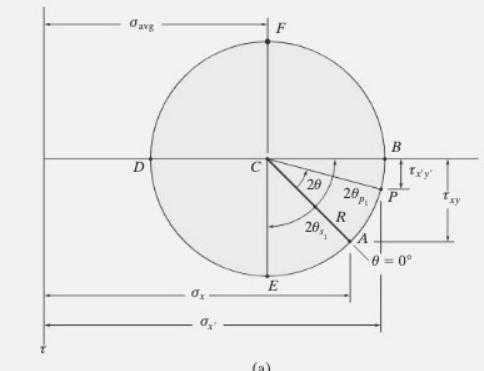


Figura 4.17 (segue)

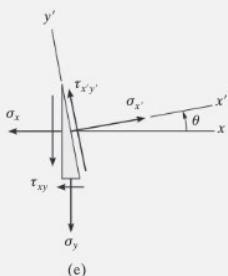
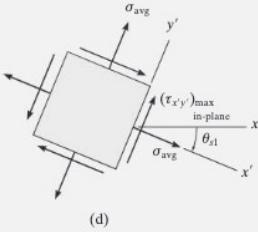
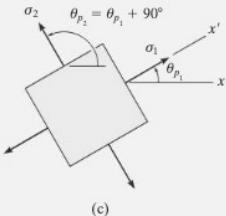


Figura 4.17 (continua)



- Tracciare il punto A di coordinate (σ_x, τ_{xy}) . Tale punto rappresenta le componenti di tensione normale e tangenziale sulla faccia verticale destra dell'elemento e poiché l'asse x' coincide con l'asse x , ciò equivale ad avere $\theta = 0^\circ$, Figura 4.17b.
- Unire il punto A con il centro C del cerchio e determinare CA usando le formule della trigonometria. Tale distanza rappresenta il raggio R del cerchio, Figura 4.17a.
- Una volta determinato R, tracciare il cerchio.

Tensioni principali

- Le tensioni principali σ_1 e σ_2 ($\sigma_1 \geq \sigma_2$) sono rappresentate dai due punti B e D nei quali il cerchio interseca l'asse delle σ , ossia in cui $\tau = 0$, Figura 4.17a.
- Tali tensioni agiscono su piani definiti dagli angoli θ_{p_1} e θ_{p_2} , Figura 4.17c. Tali angoli sono rappresentati sul cerchio attraverso $2\theta_{p_1}$ (mostrato) e $2\theta_{p_2}$ (non mostrato) e si misurano a partire dal raggio CA fino a CB e CD rispettivamente.
- Utilizzando semplici formule trigonometriche è necessario calcolare solo uno di questi angoli sul cerchio, poiché θ_{p_1} e θ_{p_2} differiscono di 90° . Si ricordi che alla rotazione $2\theta_p$ sul cerchio (in questo caso oraria) corrisponde, con lo stesso verso, la rotazione θ_p misurata tra l'asse $(+x)$ e quello principale $(+x')$, Figura 4.17c.

Tensione tangenziale massima nel piano

- Le componenti di tensione normale media e di tensione tangenziale massima nel piano possono essere individuate sul cerchio come coordinate dei punti E o F, Figura 4.17a.
- In tale caso gli angoli θ_{s_1} e θ_{s_2} forniscono l'orientazione dei piani che contengono tali componenti, Figura 4.17d. L'angolo $2\theta_{s_1}$ viene mostrato nella Figura 4.17a e può essere valutato utilizzando formule trigonometriche semplici. In questo caso la rotazione è oraria, ciò significa che θ_{s_1} deve essere orario sull'elemento, Figura 4.17a.

Tensioni su piani qualsiasi

- Le componenti di tensione normale e tangenziale σ_x e τ_{xy} che agiscono su un piano generico definito dall'angolo θ , Figura 4.17, possono essere ricavate dal cerchio utilizzando formule trigonometriche per determinare le coordinate del punto P, Figura 4.17a.
- Per determinare la posizione di P, l'angolo noto θ misurato sul piano (in questo caso antiorario), Figura 4.17e, deve essere misurato sul cerchio dalla linea di riferimento radiale CA fino alla linea radiale CP, Figura 4.17a.

COSTRUZIONE E LETTURA ALTERNATIVA DEL CERCHIO
La procedura è disponibile sulla piattaforma MyLab.

Esempio 4.7

Il carico assiale provoca lo stato di tensione nell'elemento materiale mostrato nella Figura 4.18a. Si traccino i cerchi di Mohr per questo caso.

SOLUZIONE

COSTRUZIONE DEL CERCHIO. Dalla Figura 4.18a,

$$\sigma_x = \sigma \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

Gli assi σ e τ sono fissati nella Figura 4.18b. Il centro del cerchio C si trova sull'asse σ in corrispondenza di:

$$\sigma_{avg} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma + 0}{2} = \frac{\sigma}{2}$$

Facendo riferimento alla faccia destra dell'elemento, Figura 4.18a, il punto corrispondente per $\theta = 0^\circ$ ha coordinate $A(\sigma, 0)$. Pertanto il raggio del cerchio CA è $R = \sigma/2$, Figura 4.18b.

Tensioni. Si noti che le tensioni principali sono in corrispondenza dei punti A e D.

$$\sigma_1 = \sigma \quad \sigma_2 = 0$$

Sull'elemento nella Figura 4.18a è rappresentato questo stato di tensione piano.

La tensione tangenziale massima nel piano e la tensione normale media associata sono rappresentate sul cerchio dai punti E o F, Figura 4.18b. Nel punto E si ha

$$\begin{aligned} \tau_{max_in_plane} &= \frac{\sigma}{2} \\ \sigma_{avg} &= \frac{\sigma}{2} \end{aligned}$$

Si può osservare che l'angolo antiorario $2\theta_{s_1} = 90^\circ$, pertanto $\theta_{s_1} = 45^\circ$ e l'asse x' è orientato a 45° in senso antiorario rispetto all'asse x , Figura 4.18c. Poiché E ha coordinate positive, allora σ_{avg} e $\tau_{max_in_plane}$ agiscono nei versi positivi di x' e y' rispettivamente.

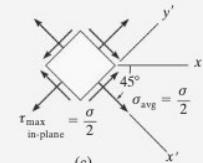
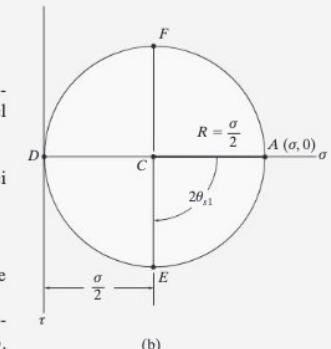
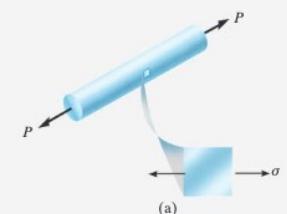


Figura 4.18

Esempio 4.8

Si consideri la barra rappresentata nella Figura 4.19a, sottoposta al momento torcente T che genera lo stato di tensione mostrato. Si disegni il cerchio di Mohr per questo caso.

SOLUZIONE

COSTRUZIONE DEL CERCHIO. Dalla Figura 4.19a,

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = -\tau$$

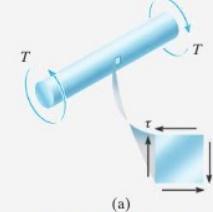
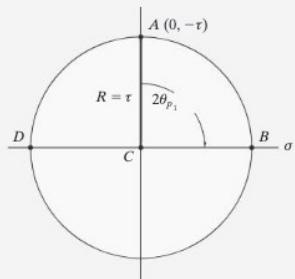


Figura 4.19 (segue)



gli assi σ e τ sono fissati nella Figura 4.19b. Il centro del cerchio C si trova sull'asse σ in corrispondenza di

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

Facendo riferimento alla faccia destra dell'elemento, Figura 4.19a, il punto corrispondente per $\theta = 0^\circ$ ha coordinate $A(0, -\tau)$, Figura 4.19b. Pertanto il raggio del cerchio CA è $R = \tau$.

Tensioni. In questo caso il punto A rappresenta il punto di tensione tangenziale massima e tensione normale media, Figura 4.19b. Pertanto

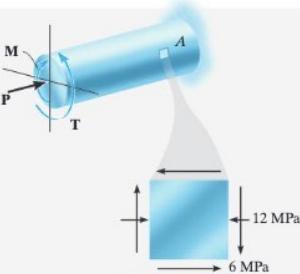
$$\begin{aligned}\tau_{\text{max}}^{\text{in-plane}} &= -\tau \\ \sigma_{\text{avg}} &= 0\end{aligned}$$

Le tensioni principali sono individuate dai punti B e D sul cerchio. Si ha allora

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \tau \\ \sigma_2 &= -\tau\end{aligned}$$

L'angolo orario tra CA e CB è $2\theta_{p_1} = 90^\circ$, in maniera che $\theta_{p_1} = 45^\circ$. L'angolo orario definisce la direzione di σ_1 (ossia dell'asse x'). I risultati sono mostrati nella Figura 4.19c.

Figura 4.19 (continua)



Esempio 4.9

A causa dei carichi applicati l'elemento in corrispondenza del punto A sul cilindro rappresentato nella Figura 4.20a è soggetto allo stato di tensione mostrato. Si determinino le tensioni principali agenti nel punto.

SOLUZIONE

Costruzione del cerchio. Dalla Figura 4.20a,

$$\sigma_x = -12 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 26 \text{ MPa}$$

Il centro del cerchio è in corrispondenza di

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{-12 + 0}{2} = -6 \text{ MPa}$$

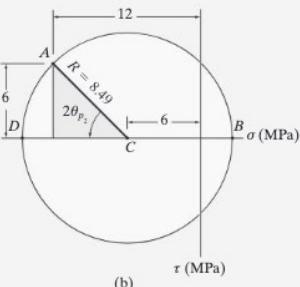
Il punto iniziale $A(-12, -6)$ e il centro $C(-6, 0)$ sono rappresentati nella Figura 4.20b. Il raggio del cerchio vale

$$R = \sqrt{(-12 - (-6))^2 + (-6 - 0)^2} = 8.49 \text{ MPa}$$

Tensioni principali. Le tensioni principali sono indicate dalle coordinate dei punti B e D . Si ha, per $\sigma_1 > \sigma_2$,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 8.49 - 6 = 2.49 \text{ MPa} \\ \sigma_2 &= -6 - 8.49 = -14.5 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Figura 4.20 (segue)



L'orientazione dell'elemento può essere determinata calcolando l'angolo antiorario $2\theta_{p_1}$ nella Figura 4.20b che definisce la direzione θ_{p_1} di σ_2 e il piano principale a essa associato. Si ha

$$\begin{aligned}2\theta_{p_1} &= \tan^{-1} \frac{6}{12 - 6} = 45.0^\circ \\ \theta_{p_1} &= 22.5^\circ\end{aligned}$$

L'elemento è orientato in maniera tale che l'asse x' , e quindi σ_2 , forma un angolo *antiorario* di 22.5° con l'asse orizzontale (asse x), come mostrato nella Figura 4.20c.

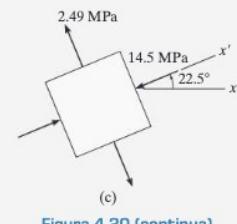


Figura 4.20 (continua)

Esempio 4.10

Lo stato piano di tensione in corrispondenza di un punto è mostrato nella Figura 4.21a. Si determinino la tensione tangenziale massima e l'orientazione dell'elemento su cui essa agisce.

SOLUZIONE

Costruzione del cerchio. Dai dati del problema,

$$\sigma_x = -20 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 90 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = 60 \text{ MPa}$$

Gli assi σ e τ sono fissati nella Figura 4.21b. Il centro del cerchio C si trova sull'asse σ in corrispondenza del punto:

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{-20 + 90}{2} = 35 \text{ MPa}$$

Vengono rappresentati sia il punto C sia il punto $A(-20, 60)$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo evidenziato nella figura per determinare il raggio del cerchio, si ha

$$R = \sqrt{(60)^2 + (55)^2} = 81.4 \text{ MPa}$$

Tensione tangenziale massima nel piano. La tensione tangenziale massima e la tensione normale media sono individuate dai punti E e F sul cerchio. In particolare, le coordinate del punto $E(35, 81.4)$ forniscono

$$\begin{aligned}\tau_{\text{max}}^{\text{in-plane}} &= 81.4 \text{ MPa} \\ \sigma_{\text{avg}} &= 35 \text{ MPa}\end{aligned}$$

L'angolo antiorario θ_{s_1} si può ottenere sul cerchio, su cui è individuato da $2\theta_{s_1}$:

$$\begin{aligned}2\theta_{s_1} &= \tan^{-1} \left(\frac{20 + 35}{60} \right) = 42.5^\circ \\ \theta_{s_1} &= 21.3^\circ\end{aligned}$$

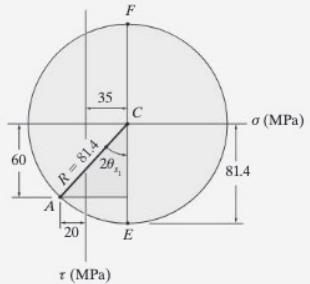
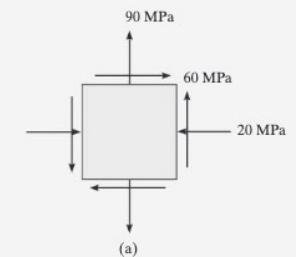
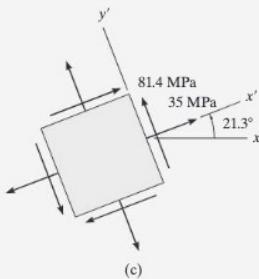
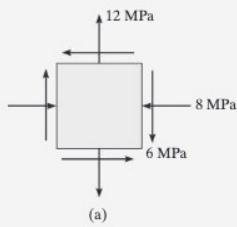


Figura 4.21 (segue)



L'angolo antiorario definisce la direzione dell'asse x' , Figura 4.21c. Poiché il punto E ha coordinate positive, allora la tensione normale media e la tensione tangenziale massima agiscono nei versi positivi degli assi x' e y' , come mostrato nella figura.

Figura 4.21 (continua)



Esempio 4.11

Lo stato piano di tensione in corrispondenza di un punto è mostrato sull'elemento nella Figura 4.22a. Si determini questo stato di tensione su un elemento ruotato di 30° in senso antiorario rispetto all'orientazione mostrata.

SOLUZIONE

Costruzione del cerchio. Dai dati del problema,

$$\sigma_x = -8 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 12 \text{ MPa} \quad \tau_{xy} = -6 \text{ MPa}$$

Gli assi σ e τ sono fissati nella Figura 4.22b. Il centro del cerchio C si trova sull'asse σ in corrispondenza del punto

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{-8 + 12}{2} = 2 \text{ MPa}$$

Il punto iniziale per $\theta = 0^\circ$ ha coordinate $A(-8, -6)$.

Dal triangolo evidenziato nella figura, il raggio CA risulta

$$R = \sqrt{(10)^2 + (6)^2} = 11.66$$

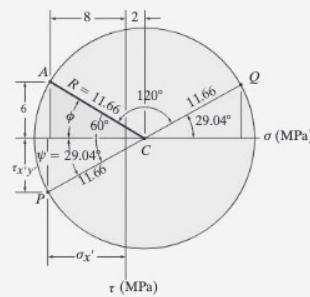


Figura 4.22 (segue)

Tensioni sull'elemento orientato a 30° . Dovendo ruotare l'elemento di 30° in senso antiorario, si costruisce una linea radiale $CP(30^\circ) = 60^\circ$ in senso antiorario, misurati a partire da $CA(\theta = 0^\circ)$, Figura 4.22b. A questo punto si possono ricavare le coordinate del punto $P(\sigma_x, \tau_{x'y'})$. Dalla geometria del cerchio si ottiene

$$\phi = \tan^{-1} \frac{6}{10} = 30.96^\circ \quad \psi = 60^\circ - 30.96^\circ = 29.04^\circ$$

$$\sigma_x' = 2 - 11.6 \cos 29.04^\circ = -8.20 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = 11.66 \sin 29.04^\circ = 5.66 \text{ MPa}$$

Queste due componenti di tensione agiscono sulla faccia BD dell'elemento mostrato nella Figura 4.22c poiché l'asse x' relativo a questa faccia è orientato a 30° in senso antiorario rispetto all'asse x .

Le componenti di tensione agenti sulla faccia adiacente dell'elemento DE , che è orientata a 60° in senso orario rispetto all'asse x positivo, Figura 4.22c, sono rappresentate dalle coordinate del punto Q sul cerchio. Questo punto si trova sul raggio CQ , che forma con CP un angolo di 180° . Le coordinate del punto Q sono

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= 2 + 11.66 \cos 29.04^\circ = 12.2 \text{ MPa} \\ \tau_{x'y'} &= -(11.66 \sin 29.04^\circ) = -5.66 \text{ MPa}\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE: In questo caso $\tau_{x'y'}$ agisce nel verso positivo di y' .

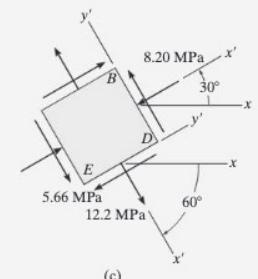


Figura 4.22 (continua)

4.5 Tensione tangenziale massima assoluta

Quando un punto in un corpo è soggetto a uno stato di tensione tridimensionale generico, un elemento materiale presenta componenti di tensione normale e tangenziale agenti su ciascuna delle sue facce, Figura 4.23a. Allo stesso modo del caso piano è possibile ricavare le equazioni di trasformazione delle tensioni utilizzabili per determinare l'unica orientazione dell'elemento sulle cui facce agiscono solo le tensioni principali. Come mostrato nella Figura 4.23c, si assume che le tensioni principali abbiano un valore massimo, intermedio e minimo, ossia $\sigma_{\text{max}} \geq \sigma_{\text{int}} \geq \sigma_{\text{min}}$.

La trattazione della trasformazione delle tensioni nel caso tridimensionale esula dallo scopo di questo testo e si rimanda pertanto a testi specifici di teoria dell'elasticità. In questa sede si assume che le direzioni e le tensioni principali siano note, Figura 4.23c. In questo caso si parla di stato di **tensione triassiale**.

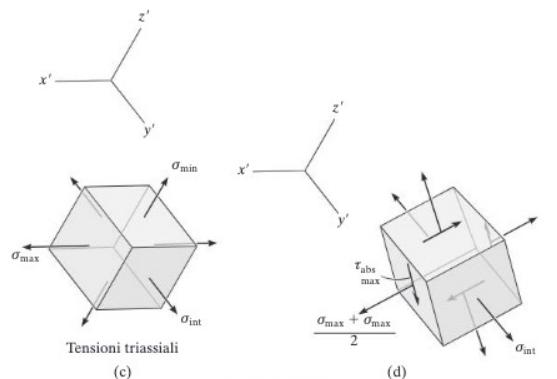
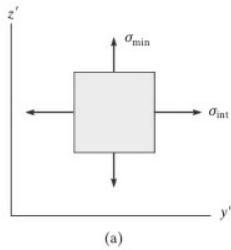
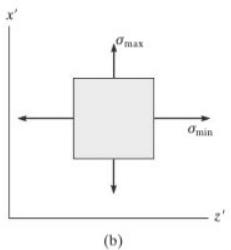


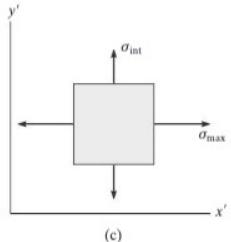
Figura 4.23



(a)



(b)



(c)

Se si pensa di proiettare l'elemento sul piano, ossia sui piani $y' - z'$, $x' - z'$ e $x' - y'$, Figura 4.24a, Figura 4.24b e Figura 4.24c, è possibile utilizzare il cerchio di Mohr per determinare la tensione tangenziale massima per ciascuno dei tre casi piani. Per esempio, nel caso mostrato nella Figura 4.24a, il diametro del cerchio di Mohr è compreso tra le tensioni principali σ_{int} e σ_{min} . Per tale cerchio, riferendosi alla Figura 4.24d, la tensione tangenziale massima nel piano è pari a $(\tau_{y'z'})_{\text{max}} = (\sigma_{\text{int}} - \sigma_{\text{min}})/2$, e l'associata tensione normale media vale $(\sigma_{\text{int}} + \sigma_{\text{min}})/2$. Come mostrato nella Figura 4.24e l'elemento su cui agiscono tali componenti di tensione è ruotato di 45° rispetto all'elemento della Figura 4.24a. Nella Figura 4.24d sono stati riportati anche i cerchi di Mohr degli elementi nella Figura 4.24b e 4.24c. I corrispondenti elementi ruotati di 45° e soggetti alle componenti di tensione tangenziale massima e tensione normale media sono mostrati, rispettivamente, nelle Figure 4.24f e 4.24g.

Confrontando i tre cerchi nella Figura 4.24d si può notare che la tensione tangenziale massima assoluta $\tau_{\text{abs}}_{\text{max}}$ è individuata dalla circonferenza che presenta il raggio massimo, ossia quello corrispondente all'elemento della Figura 4.24b. Si noti che questa condizione può essere determinata anche direttamente, considerando semplicemente le tensioni principali massima e minima dalla Figura 4.23c, e ricavando la tensione tangenziale massima assoluta come

$$\tau_{\text{abs}}_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}}{2} \quad (4.15)$$

mentre il valore della tensione normale media associata è:

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_{\text{max}} + \sigma_{\text{min}}}{2} \quad (4.16)$$

Nell'analisi sono state considerate solo le componenti di tensione agenti sugli elementi le cui posizioni sono determinate a partire da rotazioni attorno agli assi x' , y' , z' . Se si fossero determinate le componenti di tensione normale e tangenziale agenti su un piano di orientazione qualsiasi, come Figura 4.23b, utilizzando le equazioni di trasformazione delle tensioni valide nel caso triassiale e fornite dalla teoria dell'elasticità, il valore di

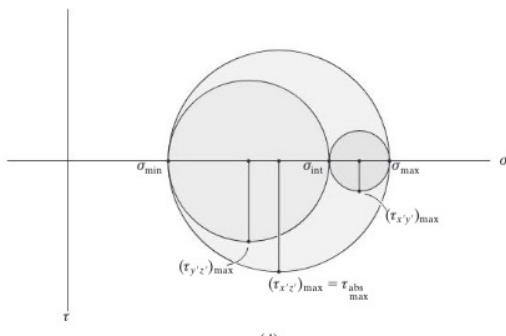


Figura 4.24 (segue)

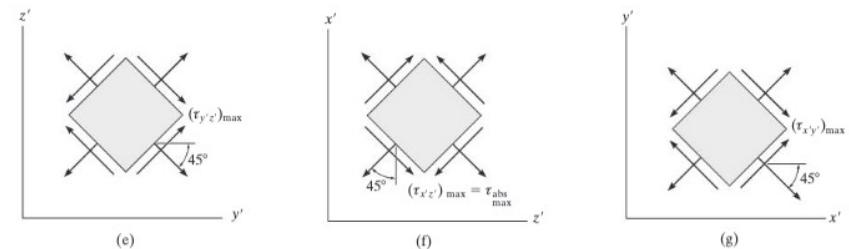


Figura 4.24 (continua)

tensione tangenziale ottenuto sarebbe comunque stato inferiore alla tensione tangenziale massima assoluta data dalla Equazione (4.15). Inoltre la tensione normale agente su un piano generico ha sempre valore compreso tra le tensioni principali massima e minima, ossia, $\sigma_{\text{max}} \geq \sigma \geq \sigma_{\text{min}}$.

Stato piano di tensione. I risultati appena ottenuti sono particolarmente interessanti nel caso di stato piano di tensione, soprattutto nel caso in cui le tensioni principali nel piano abbiano lo stesso segno, ossia siano entrambe di trazione o compressione. Per esempio, si ipotizzi che il materiale sia soggetto a uno stato piano di tensione tale che le tensioni principali nel piano siano rappresentate da σ_{max} e σ_{int} , rispettivamente nelle direzioni x' e y' ; la tensione principale fuori dal piano nella direzione z' sia $\sigma_{\text{min}} = 0$, come si vede nella Figura 4.25a. I cerchi di Mohr che descrivono questo stato di tensione per elementi piani paralleli a ciascuno dei tre piani coordinati sono mostrati nella Figura 4.25b.

È possibile notare che, sebbene il massimo valore di tensione tangenziale nel piano sia $(\tau_{x'y'})_{\text{max}} = (\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{int}})/2$, tale valore non è il valore di tensione tangenziale massimo assoluto a cui l'elemento è soggetto. Dalla Equazione (4.15) o dalla Figura 4.25b, si ottiene che

$$\tau_{\text{abs}}_{\text{max}} = (\tau_{x'z'})_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{max}} - 0}{2} = \frac{\sigma_{\text{max}}}{2} \quad (4.17)$$

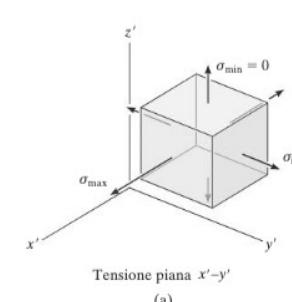
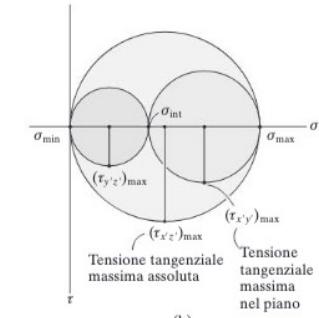
Tensione piana $x' - y'$ 

Figura 4.25

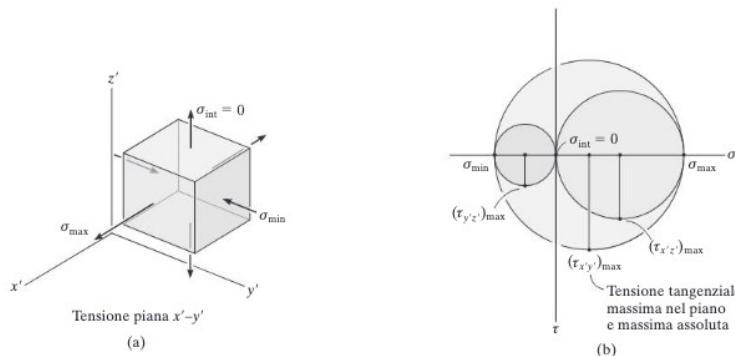


Figura 4.26

Nel caso in cui le tensioni principali nel piano abbiano segno opposto, allora σ_{\max} e σ_{\min} sono nel piano, mentre la tensione principale fuori piano è $\sigma_{\text{int}} = 0$, Figura 4.26a. I cerchi di Mohr che descrivono questo stato di tensione per elementi piani paralleli a ciascuno dei piani coordinati sono mostrati nella Figura 4.26b. In questo caso si ha:

$$\tau_{\max} = (\tau_{x'y})_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (4.18)$$

La determinazione del valore della tensione tangenziale massima assoluta nel modo appena presentato è di particolare interesse nel caso del progetto di elementi costituiti da materiale duttile, poiché la resistenza del materiale è strettamente legata alla sua capacità di sopportare le tensioni tangenziali. Questo argomento sarà affrontato in maniera più approfondita nel Paragrafo 7.10.

Punti salienti

- ▶ Il generico stato di tensione triassiale in un punto può essere rappresentato da un elemento orientato in maniera tale che su di esso agiscano solo le tre tensioni principali.
- ▶ Rispetto a questa orientazione, l'elemento su cui agisce la tensione tangenziale massima assoluta è ruotato di 45° attorno all'asse che individua la direzione di σ_{int} .
- ▶ Se entrambe le tensioni principali nel piano hanno lo stesso segno, allora la tensione tangenziale massima assoluta si trova fuori dal piano e vale $\tau_{\max} = \sigma_{\max}/2$.
- ▶ Se le tensioni principali nel piano hanno segno opposto, allora la tensione tangenziale massima assoluta è uguale alla tensione tangenziale massima nel piano e vale $\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$.

Esempio 4.12

L'elemento della mensola in corrispondenza del punto evidenziato nella Figura 4.27a, a seguito dell'applicazione dei carichi, è soggetto allo stato piano di tensione rappresentato nello schema estrapolato nella parte inferiore della figura. Si determinino le tensioni principali e la tensione tangenziale massima assoluta nel punto.

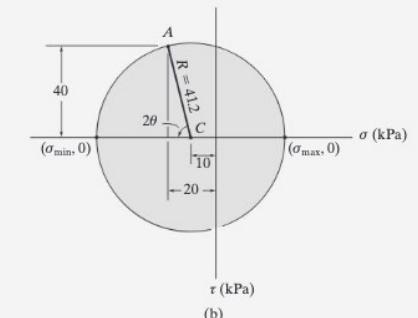
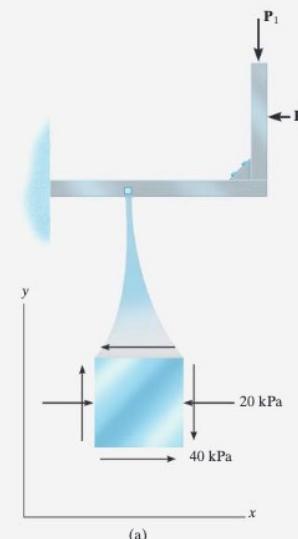


Figura 4.27 (segue)

SOLUZIONE

Tensioni principali. Le tensioni principali nel piano si possono determinare attraverso il cerchio di Mohr. Il centro del cerchio è sull'asse σ in corrispondenza di $\sigma_{\text{avg}} = (-20 + 0)/2 = -10$ kPa. Tracciando il punto $A(-20, -40)$, è possibile disegnare il cerchio, come mostrato nella Figura 4.27b. Il raggio è

$$R = \sqrt{(20 - 10)^2 + (40)^2} = 41.2 \text{ kPa}$$

Le tensioni principali sono i punti in cui il cerchio interseca l'asse σ

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= -10 + 41.2 = 31.2 \text{ kPa} \\ \sigma_{\min} &= -10 - 41.2 = -51.2 \text{ kPa}\end{aligned}$$

Dal cerchio, l'angolo antiorario 2θ , misurato da CA all'asse $-\sigma$ è

$$2\theta = \tan^{-1}\left(\frac{40}{20 - 10}\right) = 76.0^\circ$$

Pertanto

$$\theta = 38.0^\circ$$

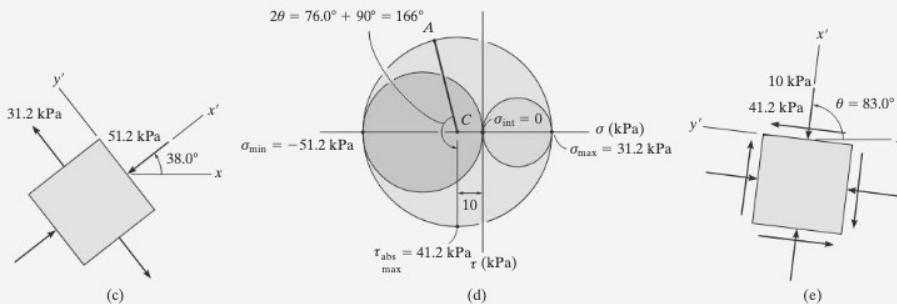


Figura 4.27 (continua)

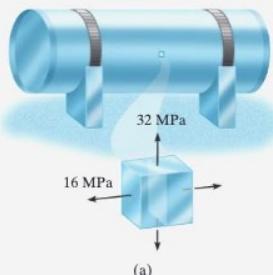
La rotazione antioraria definisce la direzione dell'asse x' ossia di σ_{\min} e l'associato piano principale, Figura 4.27c. Poiché non vi sono tensioni principali sull'elemento in direzione z , si ha:

$$\sigma_{\max} = 31.2 \text{ kPa} \quad \sigma_{\text{int}} = 0 \quad \sigma_{\min} = -51.2 \text{ kPa}$$

Tensione tangenziale massima assoluta. Applicando le Equazioni (4.15) e (4.16), si ha:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{abs max}} &= \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{31.2 - (-51.2)}{2} = 41.2 \text{ kPa} \\ \sigma_{\text{avg}} &= \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{31.2 - 51.2}{2} = -10 \text{ kPa}\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE: Agli stessi risultati si perviene disegnando il cerchio di Mohr per ciascuna orientazione di un elemento nelle direzioni di x' , y' e z' , Figura 4.27d. Poiché σ_{\max} e σ_{\min} hanno segni opposti, la tensione tangenziale massima assoluta è pari alla tensione tangenziale massima nel piano. Ciò si ottiene con una rotazione a 45° dell'elemento nella Figura 4.27c attorno all'asse z' ; nella Figura 4.27e è mostrata l'orientazione associata.



Esempio 4.13

Il punto sulla superficie del serbatoio cilindrico in pressione mostrato nella Figura 4.28a è soggetto a uno stato piano di tensione. Si determini la tensione tangenziale massima assoluta in questo punto.

SOLUZIONE

Le tensioni principali sono $\sigma_{\max} = 32 \text{ MPa}$, $\sigma_{\text{int}} = 16 \text{ MPa}$ e $\sigma_{\min} = 0$. Se si tracciano queste tensioni sull'asse σ è possibile disegnare i tre cerchi di Mohr relativi agli stati di tensione agenti su ciascuno dei tre piani ortogonali, Figura 4.28b. Il cerchio più grande ha raggio di 16 MPa e descrive lo stato di tensione nel piano contenente $\sigma_{\max} = 32 \text{ MPa}$ e $\sigma_{\min} = 0$, eviden-

ziato nella Figura 4.28a. Se si ruota l'elemento a 45° rispetto a questo piano si ottengono la tensione tangenziale massima assoluta e la tensione normale media associata che valgono:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{abs max}} &= 16 \text{ MPa} \\ \sigma_{\text{avg}} &= 16 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Agli stessi risultati si può pervenire applicando direttamente le Equazioni (4.15) e (4.16), ossia

$$\begin{aligned}\tau_{\text{abs max}} &= \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{32 - 0}{2} = 16 \text{ MPa} \\ \sigma_{\text{avg}} &= \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{32 + 0}{2} = 16 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Per effettuare un confronto, il valore della tensione tangenziale massima nel piano può essere ottenuto dal cerchio di Mohr disegnato tra $\sigma_{\max} = 32 \text{ MPa}$ e $\sigma_{\text{int}} = 16 \text{ MPa}$, Figura 4.28b. Si ottiene il valore:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{in-plane}}^{\max} &= \frac{32 - 16}{2} = 8 \text{ MPa} \\ \sigma_{\text{avg}} &= 16 + \frac{32 - 16}{2} = 24 \text{ MPa}\end{aligned}$$

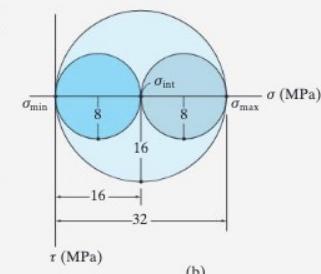
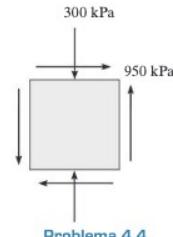


Figura 4.28 (continua)

Problemi

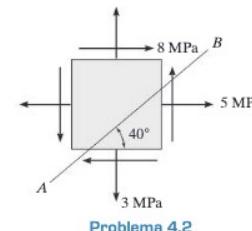
4.1. Si dimostri che la somma algebrica delle tensioni normali $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{x'} + \sigma_{y'}$ si mantiene costante.

figura. Si utilizzino le equazioni di trasformazione della tensione.



Problema 4.4

4.2. Lo stato di tensione in corrispondenza di un punto di un elemento strutturale è mostrato sull'elemento piano. Si determinino le componenti di tensione agenti sul piano inclinato AB . Si risolva il problema utilizzando il metodo dell'equilibrio presentato nel Paragrafo 4.1.

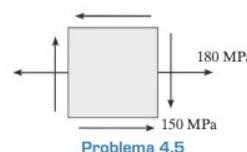


Problema 4.2

4.3. Si risolva il Problema 4.2 utilizzando le equazioni di trasformazione della tensione sviluppate nel Paragrafo 4.2.

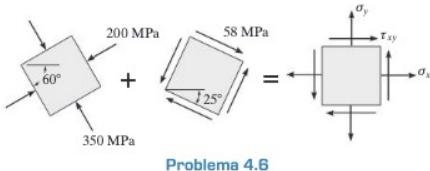
4.4. Si determini lo stato di tensione equivalente su un elemento che è ruotato di 30° rispetto a quello mostrato nella

figura. Si utilizzino le equazioni di trasformazione della tensione.



Problema 4.5

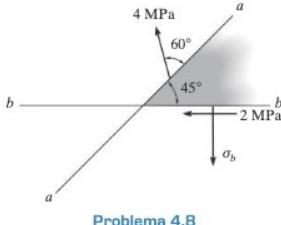
4.6. Un punto di una lastra è soggetto ai due stati di tensione mostrati nella figura che vengono applicati successivamente. Si determini lo stato di tensione risultante su un elemento orientato come mostrato nell'immagine più a destra nella figura.



Problema 4.6

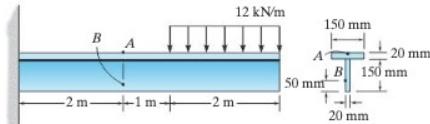
4.7. Il Problema 4.7 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

4.8. Nella figura viene indicata la tensione in un punto agente su due diversi piani. Si determinino la tensione normale σ_b e le tensioni principali nel punto.



Problema 4.8

4.9. La trave con sezione a "T" è soggetta all'azione del carico distribuito applicato lungo l'asse baricentrico. Si determinino le tensioni principali nei punti A e B e si mostri graficamente i risultati su elementi collocati in ciascuno dei due punti.

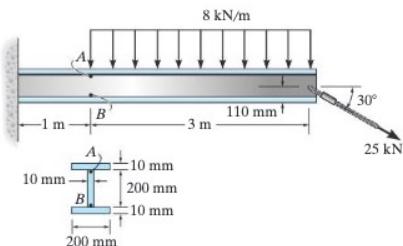


Problema 4.9

4.10. Il Problema 4.10 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

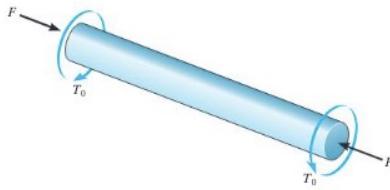
4.11. La trave a doppio "T" è soggetta al carico mostrato. Si determinino le tensioni principali nei punti A e B. Tali punti sono posti rispettivamente in corrispondenza dell'estremo superiore e inferiore dell'anima. Sebbene non con-

duca a risultati molto accurati, si utilizzi la formula del taglio per valutare la tensione tangenziale.



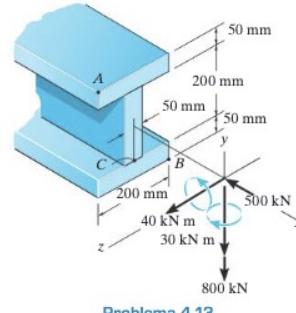
Problema 4.11

4.12. L'albero meccanico ha diametro d ed è soggetto ai carichi mostrati. Si determinino le tensioni principali e la tensione tangenziale massima assoluta ottenuta considerando l'intera superficie esterna dell'albero.



Problema 4.12

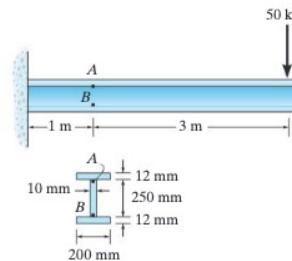
4.13. Nella figura vengono mostrate le caratteristiche della sollecitazione agenti in corrispondenza di una sezione della trave. Si determinino le tensioni principali nel punto A. Si valuti inoltre la tensione tangenziale massima nel piano in corrispondenza del punto.



Problema 4.13

* *Nota:* per la soluzione dei Problemi 4.9-4.20 è opportuno aver studiato prima il materiale esposto nei Capitoli 8-11.

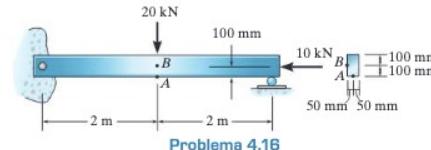
4.14. La trave a doppio "T" è soggetta alla forza di 50 kN. Si determinino le tensioni principali nel punto A posto sull'anima subito al di sotto dell'ala superiore. Sebbene non conduca a risultati molto accurati, si utilizzi la formula del taglio per valutare la tensione tangenziale.



Problema 4.14

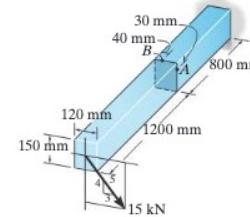
4.15. Si risolva il Problema 4.14 per il punto B posto sull'anima subito al di sopra dell'ala inferiore.

4.16. La trave presenta una sezione trasversale di forma rettangolare ed è soggetta al carico mostrato nella figura. Si determinino le tensioni principali nei punti A e B che sono subito a sinistra rispetto alla posizione del carico di 20 kN. Si mostri graficamente i risultati su un elemento posto in questo punto.



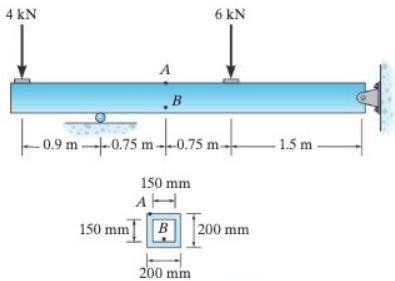
Problema 4.16

4.17. La mensola è soggetta al carico in corrispondenza dell'estremità mostrato nella figura. Si determinino le tensioni principali nei punti A e B.



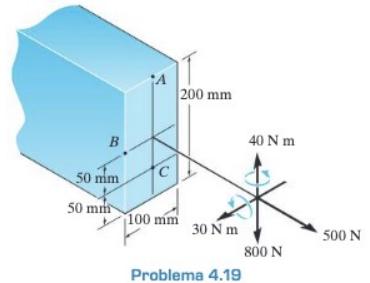
Problema 4.17

4.18. La trave scatolare è soggetta all'azione del carico mostrato nella figura. Si determinino le tensioni principali nei punti A e B.



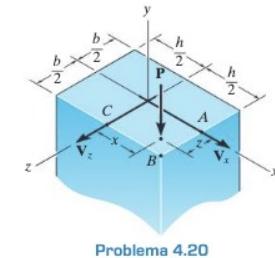
Problema 4.18

4.19. Le caratteristiche della sollecitazione di una sezione della trave sono date da una forza normale di 500 N, una forza di taglio di 800 N, e due componenti di momento paria 30 N m e 40 N m. Si determinino le tensioni principali nel punto B. Si calcoli inoltre la tensione tangenziale massima in corrispondenza del punto.



Problema 4.19

4.20. L'elemento strutturale ha sezione trasversale rettangolare ed è soggetto al carico mostrato nella figura. Si scriva un programma di calcolo che permetta di valutare le tensioni principali nei punti A, B, C. Si esegua un'applicazione numerica del programma utilizzando i valori $b = 150$ mm, $h = 200$ mm, $P = 1.5$ kN, $x = 75$ mm, $z = -50$ mm, $V_x = 300$ N, $V_z = 600$ N.



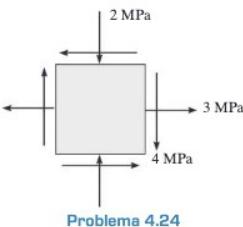
Problema 4.20

4.21. Si risolva il Problema 4.2 con il cerchio di Mohr.

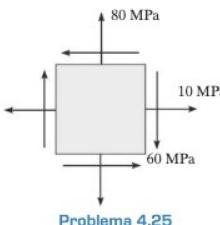
4.22. Si risolva il Problema 4.4 con il cerchio di Mohr.

4.23 Si risolva il Problema 4.5 con il cerchio di Mohr.

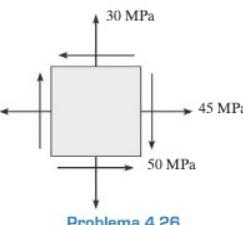
4.24. Si determini lo stato di tensione equivalente a quello dell'elemento mostrato nella figura su un elemento ruotato di 20° in senso orario rispetto a quello dato. Si mostrino graficamente i risultati sull'elemento.



4.25. Si determinino (a) le tensioni principali e (b) la tensione tangenziale massima nel piano e la tensione normale media. Si indichi l'orientazione dell'elemento in ciascun caso.

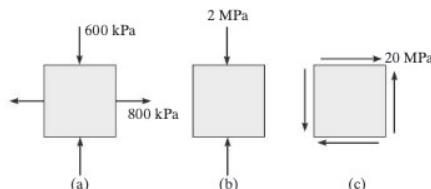


4.26. Si determinino (a) le tensioni principali e (b) la tensione tangenziale massima nel piano e la tensione normale media. Si indichi l'orientamento dell'elemento in ciascun caso.



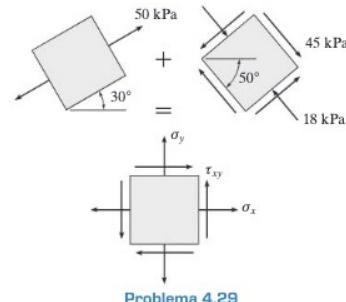
4.27. Il Problema 4.27 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

4.28. Si tracci il cerchio di Mohr associato a ciascuno degli stati di tensione mostrati nella figura.



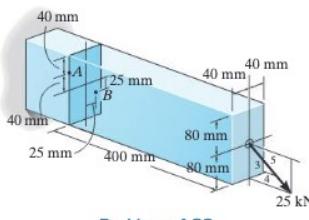
Problema 4.2B

4.29. Un punto di una lastra viene soggetto all'azione di due stati di tensione applicati successivamente. Si calcoli lo stato di tensione risultante per un elemento orientato come mostrato nella parte inferiore della figura.



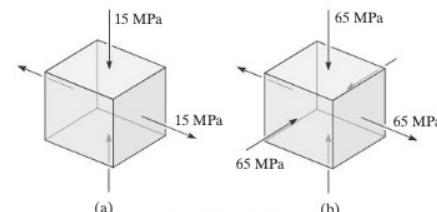
Problema 4.29

*4.30. La mensola a sezione rettangolare è soggetta alla forza di 25 kN. Si calcolino le tensioni principali nel punto A.



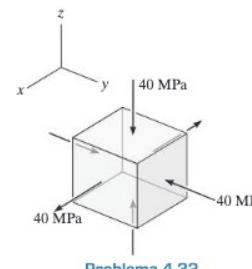
Problema 4.30

4.31. Si traccino i tre cerchi di Mohr che descrivono ciascuno degli stati di tensione mostrati nella figura.



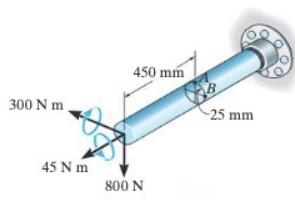
Problema 4.3

4.32. Nella figura vengono mostrate le tensioni principali agenti in un punto di un corpo. Si traccino i tre cerchi di Mohr che descrivono tale stato di tensione e si valuti la tensione tangenziale massima nel piano e l'associata tensione normale media per i piani $x-y$, $y-z$ e $x-z$. Per ciascun caso si riportino graficamente i risultati su un elemento opportuno mente orientato.



Problema 4.3

*4.33. L'albero a sezione piena è soggetto a torsione, flessione e taglio. Si calcolino le tensioni principali nei punti A e B e la tensione tangenziale massima assoluta.



Problema 4.3

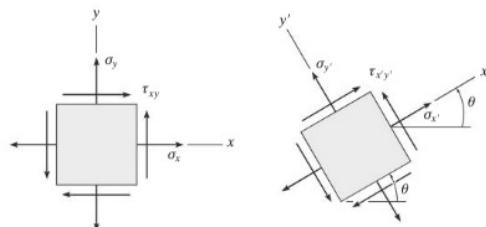
* Nota: per la soluzione del Problema 4.33 è opportuno aver studiato prima il materiale esposto nei Capitoli 8-11.

Riepilogo del capitolo

Uno stato piano di tensione si determina quando l'elemento materiale in corrispondenza di un punto è sottoposto a due componenti di tensione normale σ_x e σ_y e a una componente di tensione tangenziale τ_{xy} . Nell'ipotesi che queste componenti siano note, le componenti di tensione agenti su un elemento con diversa orientazione possono essere determinate utilizzando le due equazioni di equilibrio delle forze o le equazioni di trasformazione delle tensioni

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$



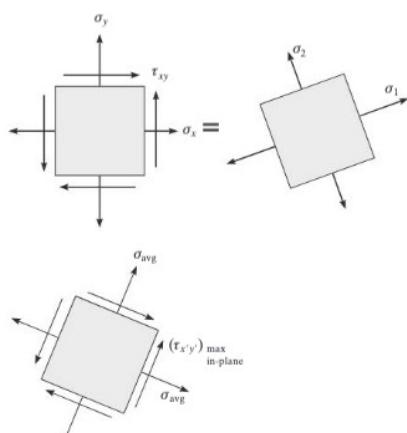
Ai fini progettuali, è importante determinare l'orientazione dell'elemento che presenta le massime tensioni principali normali e la massima tensione principale nel piano. Utilizzando le equazioni di trasformazione delle tensioni è possibile stabilire che sui piani delle tensioni principali non agiscono componenti di tensione tangenziale.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

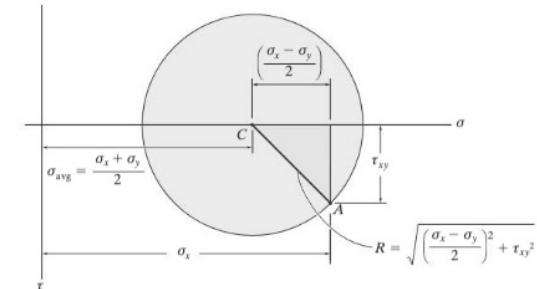
I piani su cui agiscono le massime tensioni tangenziali nel piano sono orientati a 45° rispetto a questa orientazione e su tali piani agisce anche una tensione normale media $(\sigma_x + \sigma_y)/2$.

$$\tau_{\text{max in-plane}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\text{avg}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



Il cerchio di Mohr costituisce uno strumento per determinare lo stato di tensione su un piano generico, le tensioni normali principali e la tensione tangenziale massima nel piano. Per disegnare il cerchio, per prima cosa si fissano gli assi σ e τ ; si tracciano, poi, il centro del cerchio $[(\sigma_x + \sigma_y)/2, 0]$, e il punto A (σ_x, τ_{xy}) . Il raggio del cerchio è compreso tra questi due punti e può essere determinato attraverso formule trigonometriche semplici.



La tensione tangenziale massima assoluta è pari alla tensione tangenziale massima nel piano, nel caso in cui le tensioni principali nel piano abbiano segno opposto. Se sono dello stesso segno, la tensione tangenziale massima assoluta giace al di fuori del piano.

