

Calcolo di spostamenti e rotazioni in strutture iperstatiche delle quali si conoscono le sollecitazioni

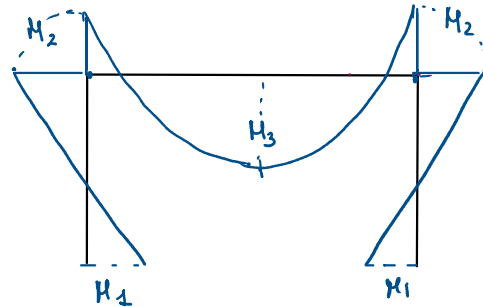
sabato 28 dicembre 2019 18:04

Il sistema da studiare è iperstatico ma da un precedente esercizio sono note le espressioni analitiche del momento flettente nel caso in cui la lunghezza del travetto, l , sia diversa da quella dei pilastri, h . Si assume anche in questo caso per tutti i tratti uguale rigidezza flessionale e momenti di inerzia. Ponendo $l = h$, le espressioni del momento flettente ed il corrispondente diagramma hanno la seguente forma:

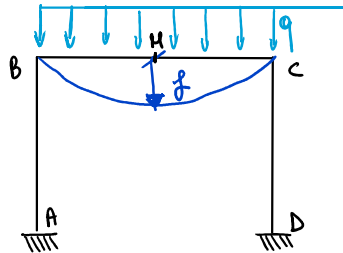
$$M_{AB} = \frac{ql^2}{12} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{e} \right);$$

$$M_{BC} = \frac{ql^2}{2} \left(1 - \frac{2}{e} \right) \frac{2}{e} - \frac{ql^2}{18}; \quad (1)$$

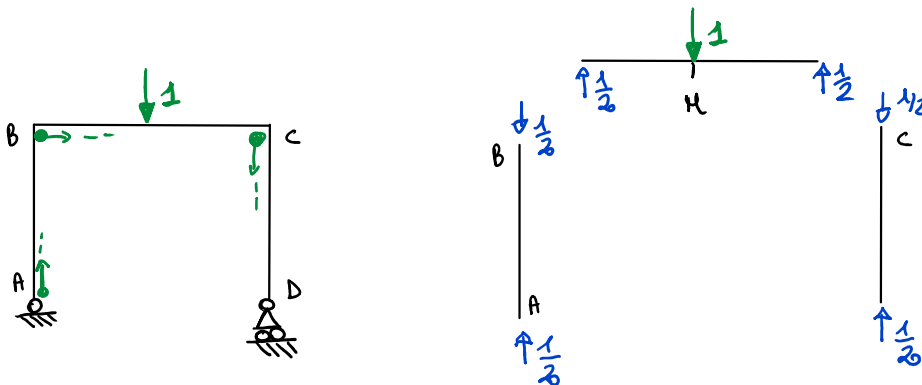
$$M_{CD} = \frac{ql^2}{12} \left[\frac{1}{3} - \left(1 - \frac{2}{e} \right) \right].$$



I momenti indicati sul diagramma hanno i seguenti valori: $M_1 = \frac{ql^2}{36}$, $M_2 = -\frac{ql^2}{18}$, $M_3 = \frac{5}{72} ql^2$. Si richiede il calcolo dell'abbassamento indicato nella seguente figura come "p".



Si sceglie come sistema virtuale il seguente sistema, che ha il vantaggio di essere ipostatico e di avere solo una forza che compie lavoro proprio sullo spostamento richiesto. Si assume che tutte le strutture siano inestensibili ed indeformabili al taglio. Si riporta anche il diagramma di struttura libera del sistema.

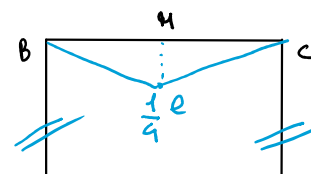


I sistemi di riferimento locali sono scelti, come da figura, in maniera identica a quanto fatto per la struttura iperstatica della trave.

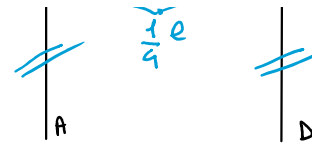
Si riportano le espressioni analitiche del momento flettente del sistema virtuale, caratterizzate dall'apice "v" ed il corrispondente diagramma:

$$M_{AB}^v = 0;$$

$$M_{BC}^v = \begin{cases} \frac{1}{2} z & \text{per } 0 < z \leq l/2 \end{cases}; \quad (2)$$



$$M_{bc}^v = \begin{cases} \frac{1}{2} z & \text{per } 0 < z \leq l/2 \\ \frac{1}{2} (l-z) & \text{per } \frac{l}{2} < z < l \end{cases} ; \quad (2)$$



$$M_{cd}^v = 0$$

Si applica dunque il principio dei lavori virtuali, calcolando come da definizione il lavoro virtuale esterno ed interno.

L'unica forza del sistema virtuale che compie lavoro sul sistema reale è la forza unitaria agente nel punto K , e come della presenza dei due vincoli di incastro.

$$\Delta v_e = f \cdot 1 = f \quad (3).$$

Utilizzando le espressioni (1) e (2), il lavoro virtuale interno viene scritto nel seguente modo, considerando le ipotesi precedentemente fatte sulla struttura:

$$\Delta v_i = \int M^v \left(\frac{M^{eff}}{EI} \right) = \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \frac{1}{2} z \left[\frac{q l^2}{2} \left(1 - \frac{z}{l} \right) \frac{z}{l} - \frac{q l^2}{18} \right] dz + \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l \frac{1}{2} (l-z) \left[\frac{q l^2}{2} \left(1 - \frac{z}{l} \right) \frac{z}{l} - \frac{q l^2}{18} \right] dz.$$

Calcolando il precedente integrale si ottiene:

$$\Delta v_i = \frac{7}{1152} \frac{q l^4}{EI}. \quad (4)$$

Per il principio dei lavori virtuali, uguagliando la (3) e la (4) si ottiene:

$$f = \frac{7}{1152} \frac{q l^4}{EI}.$$

Affermare che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi