

Esercitazione: Telaio incernierato e telaio incastrato

martedì 17 dicembre 2019 15:17

① Il telaio rappresentato in figura (1) ha grado di iperstaticità pari a 1. Si ipotizza che la rigidità flessionale EI sia costante ed uguale per tutti i tratti, che le travi siano inestensibili ed indeformabili a taglio. Per calcolare le caratteristiche della sollecitazione con il metodo delle forze, si sceglie il sistema isostatico equivalente di Fig (2) dove è stata trasformata la cerniera di destra in un carrello ed è stata introdotta l'incognita iperstatica X . L'equazione di congruenza che rende davvero equivalenti i due sistemi è $v(D) = 0$, che ripristina il vincolo semplice rimovuto.

Fig (1)

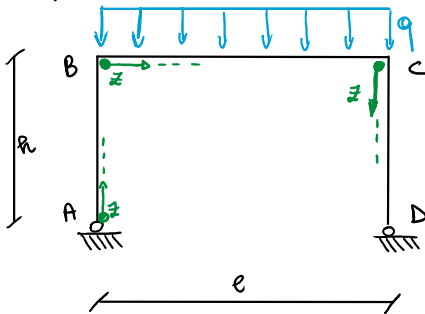
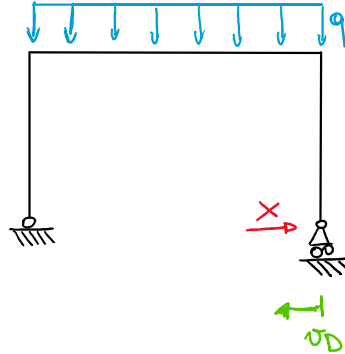


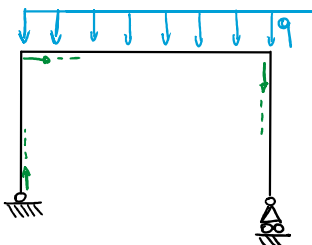
Fig (2)



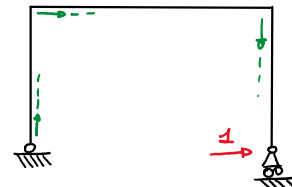
Si individua un riferimento locale per ogni trave come rappresentato in Fig(1) in verde. Per ogni tratto rettilineo si individua un'origine e, per continuità di rappresentazione, si sceglie che se l'asse z di ogni trave sia sempre uscente dal foglio. Un riferimento ai sistemi (0) ed (1) rappresentati in figura (3), l'equazione di congruenza può essere scritta come $v_D = v_0(D) + X v_1(D)$. Utilizzando il PLV, si ottiene $v_0(D) = -\frac{1}{12} \frac{q l^3 h}{EI}$, $v_1(D) = -\frac{2h^3}{3EI} - \frac{h^2 l}{EI}$ e quindi $X = -\frac{q l^2}{8hK + 12h}$, avendo introdotto $K = \frac{h}{l}$.

Fig (3)

Sistema (0)



Sistema (1)



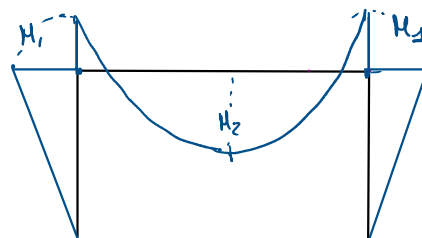
Il diagramma del momento flettente, ottenuto per sovrapposizione, è dato dalle Fig (4). Le espressioni analitiche sono le seguenti:

$$M_{AB} = -\frac{q l^2}{8K + 12} \frac{z}{h};$$

$$M_{BC} = -\frac{q z^2}{2} + \frac{q l}{2} z - \frac{q l^2}{8K + 12};$$

$$M_{CD} = -\frac{q l^2}{8K + 12} \left(1 - \frac{z}{h}\right).$$

Fig (4)

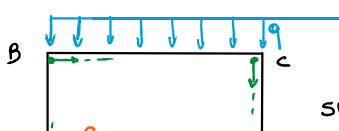


$$\text{Si ha } M_1 = -\frac{q l^2}{8K + 12}, \quad M_2 = \frac{q l^2}{8} \left(\frac{2K + 1}{2K + 3}\right).$$

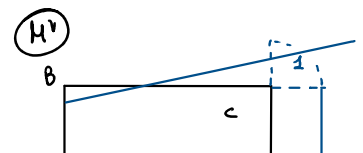
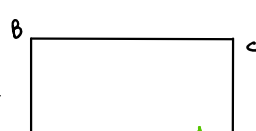
② Definisco la rotazione richiesta con α ed utilizzo come sistema virtuale il sistema riportato in Fig (5). È anche indicato il diagramma del momento flettente per il sistema virtuale.

Fig (5)

SISTEMA REALE



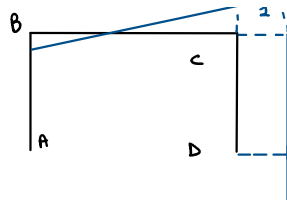
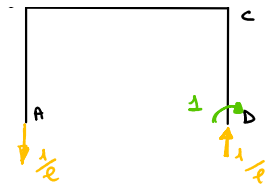
SISTEMA VIRTUALE



SISTEMA REALE



SISTEMA VIRTUALE



Si ottengono le seguenti espressioni per i lavori virtuali:

$$L_{ve} = \alpha;$$

$$L_{vi} = \int_0^e \left(\frac{1}{EI} \right) \left(\frac{z}{e} \right) \left(\frac{qz^2}{2} - \frac{qe}{2}z + \frac{qe^2}{8k+12} \right) dz + \int_0^h \frac{1}{EI} \frac{qe^2}{8k+12} (h-z) dz.$$

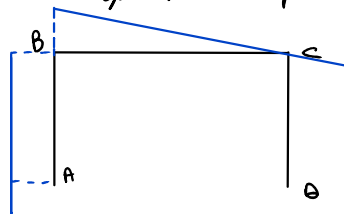
Risolvendo ed eguagliando in la:

$$\alpha = -\frac{1}{2G} \frac{qe^3}{EI} + \frac{qe^2(e+h)}{2EI(8k+12)}.$$

③ Questo punto si risolve considerando una situazione esattamente speculare rispetto a quella del punto precedente. La rotazione richiesta è indicata con β in figura 5. Data la simmetria della struttura, i calcoli da effettuare richiederanno l'uso di un sistema virtuale speculare al precedente, il cui diagramma del momento flettente è quello di figura 6. Sempre grazie alla simmetria della struttura reale, il lavoro virtuale interno ha la stessa espressione di prima. Si ottiene dunque:

$$\beta = -\frac{1}{2G} \frac{qe^3}{EI} + \frac{qe^2(e+h)}{2EI(8k+12)}.$$

Fig (6)



④ Si tratta di una struttura 1 volta iperstatica. Risolvendola con il metodo delle forze, analogamente al punto 1, si ottengono le seguenti espressioni per le momenti flettenti nei vari tratti:

$$M_{AB} = -\frac{3C}{2h} \frac{1+k}{3+2k} z;$$

$$M_{BC} = \frac{C}{e} z - \frac{3}{2} C \frac{1+k}{3+2k};$$

$$M_{CD} = C - \frac{3}{2} C \frac{1+k}{3+2k} \left(1 - \frac{z}{h} \right).$$

La figura (7) le rotazioni richieste sono indicate con α' e β' . Per il calcolo della rotazione α' si utilizza il sistema virtuale riportato al punto 2, ottenendo:

$$L_{ve} = -\alpha';$$

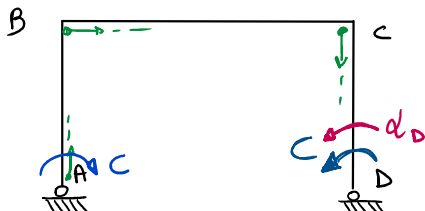
$$L_{vi} = \int_0^e \frac{1}{EI} \left(\frac{C}{e} z - \frac{3}{2} C \frac{1+k}{3+2k} \right) \left(-\frac{z}{e} \right) dz + \int_0^h \frac{1}{EI} \left[C - \frac{3}{2} C \frac{1+k}{3+2k} \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right] (-1) dz$$

$$\text{da cui si ottiene } \alpha' = \frac{Ce}{EI} \left(\frac{1}{3} + k \right) - \frac{3}{4} \frac{Ce}{EI} \frac{(1+k)^2}{3+2k}.$$

Analogamente, per il calcolo di β' si utilizza il sistema virtuale del punto 3, ottenendo:

$$\beta' = \frac{3}{4} \frac{Ce}{EI} \frac{(1+k)^2}{3+2k} - \frac{Ce}{6EI}.$$

⑤ Si indica la rotazione richiesta con α_D , come indicato nella Fig (8).

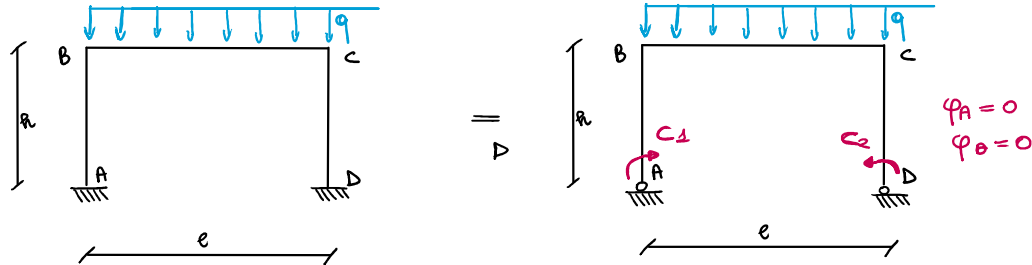


Per il principio di sovrapposizione si può scrivere $d_D = d' - \beta''$, indicando con β'' la rotazione varia in D provocata da una coppia applicata in A. Il valore β'' è ricavabile con considerazioni di simmetria dal punto 4 ed è uguale a β' .

Si ha dunque $d_D = \frac{C\ell}{EI} \left(\frac{1}{3} + k \right) - \frac{3}{2} \frac{C\ell}{EI} \frac{(1+k)^2}{3+2k}$.

⑥ Il telaio incastato può essere visto come equivalente ad un telaio incernierato a cui sono state applicate due coppie in A e in D tali da rendere nulle le rotazioni in quei due punti, come da Fig. 8.

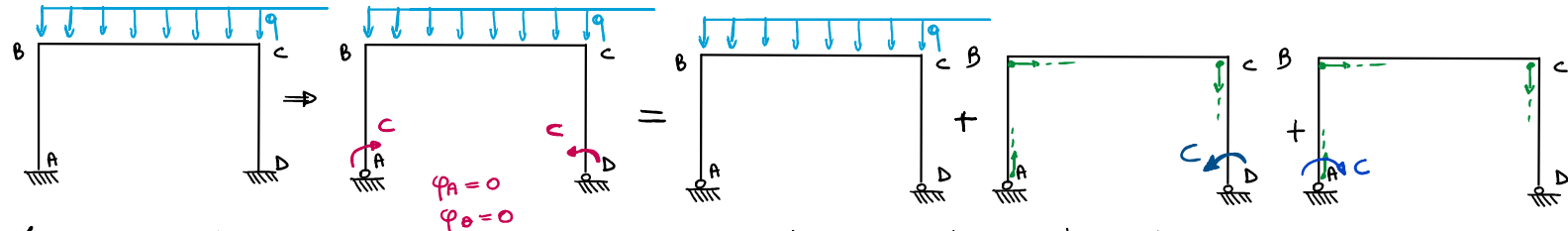
Fig. (8)



Per simmetria si ha che i valori delle due coppie sono uguali, ossia $C_1 = C_2 = C$. Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti si ottiene che $\varphi_D = d_D - d = 0$. Il segno meno di fronte ad d è dovuto al fatto che d è stato misurato in senso orario. Nella precedente equazione l'unica incognita è il momento C . Risolvendo si ottiene: $C = \frac{q\ell^2}{12(k+2)}$.

Per calcolare l'espressione del momento flettente, si fa ricorso nuovamente al principio di sovrapposizione degli effetti sfruttando i momenti calcolati ai punti precedenti.

Graficamente, si ha:



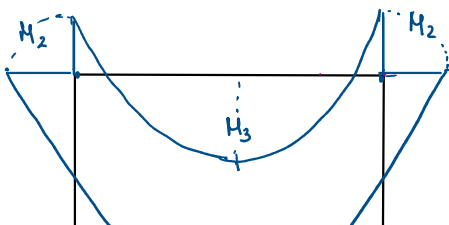
Le espressioni dell'ultimo dei precedenti schemi non sono state calcolate analiticamente ma sono facilmente ricavabili per simmetria da quelle del punto 4. Le espressioni analitiche del momento flettente delle figure sono:

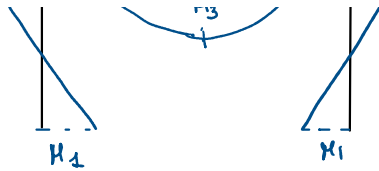
$$M_{AB} = \frac{q\ell^2}{4(k+2)} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{h} \right);$$

$$M_{BC} = \frac{q\ell^2}{2} \left(1 - \frac{2}{h} \right) \frac{2}{\ell} - \frac{q\ell^2}{6(k+2)};$$

$$M_{CD} = \frac{q\ell^2}{4(k+2)} \left[\frac{1}{3} - \left(1 - \frac{2}{h} \right) \right].$$

Il diagramma del momento è dunque il seguente.





I modelli dei tre momenti indicati sono : $M_1 = \frac{q l^2}{12(k+2)}$; $M_2 = \frac{q l^2}{6(k+2)}$; $M_3 = \frac{q l^2}{8} - \frac{q l^2}{6(k+2)}$.

Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi