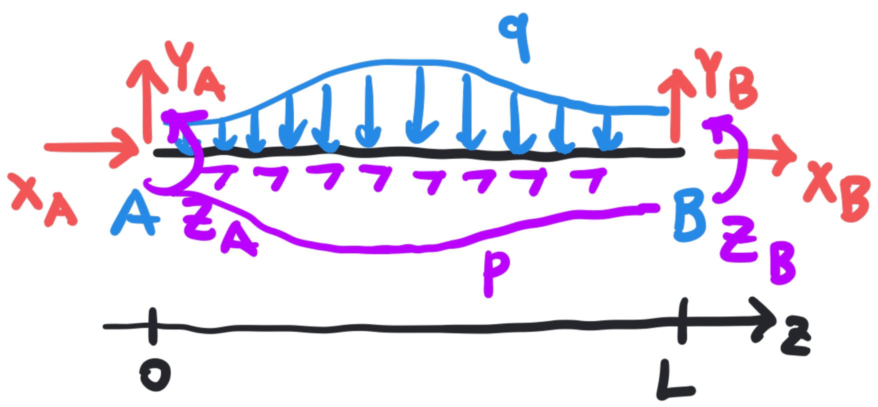
Equazioni differenziali di equilibrio per travi ad asse rettilineo

Schema strutturale



Le caratteristiche della sollecitazione sono descritte dalle funzioni

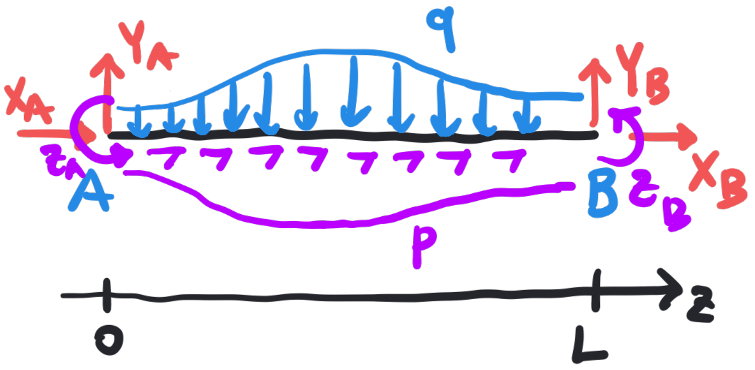
$N(z), T(z), M(z)$

$$\frac{dN}{dz} + p = 0$$

$$\frac{dT}{dz} + q = 0$$

$$\frac{dM}{dz} - T = 0$$

Rif: Hibbeler Sez. 3.3
Casini-Vasta Sez. 6.2

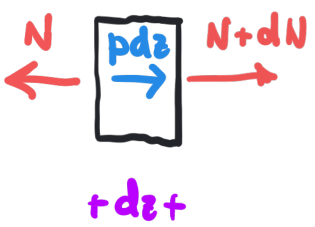


$$\boxed{\frac{dN}{dz}+p=0}$$

$$\frac{dT}{dz}+q=0$$

$$\frac{dM}{dz}-T=0$$

Consideriamo un tratto di trave di lunghezza dz

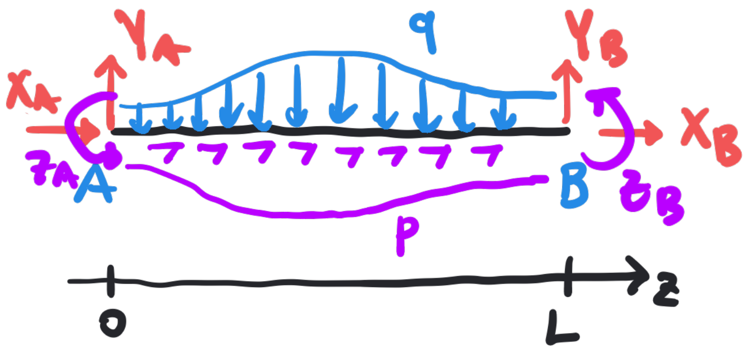


- Sul tratto agisce una forza lungo z di intensità pari a $p(z)dz$
- Indichiamo con N la forza normale agente sulla faccia di sinistra
- Sulla faccia di destra la forza normale è $N+dN$

Imponendo l'equilibrio troviamo:

$$\cancel{N}+dN-\cancel{N}+p\,dz=0$$

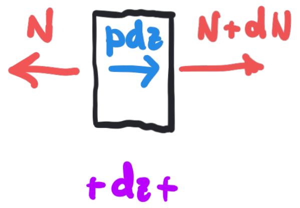
da cui la prima delle eq.ni differenziali



$$\frac{dN}{dz}+p=0$$

$$\boxed{\frac{dT}{dz}+q=0}$$

$$\frac{dM}{dz}-T=0$$



Imponendo l'equilibrio troviamo:

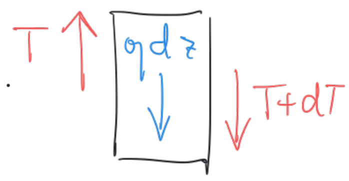
$$\cancel{N}+dN-\cancel{N}+p\,dz=0$$

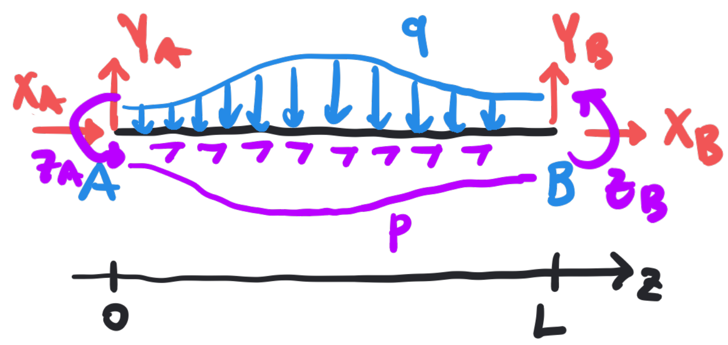
da cui la prima delle eq.ni differenziali

Per ottenere la seconda equazione consideriamo l'equilibrio lungo la direzione verticale:

$$\cancel{T}+dT-\cancel{T}+q\,dz=0$$

Dividendo per dz si ottiene l'equazione



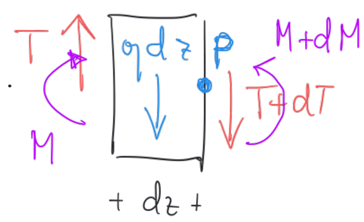


$$\frac{dN}{dz}+p=0$$

$$\frac{dT}{dz}+q=0$$

$$\boxed{\frac{dM}{dz}-T=0}$$

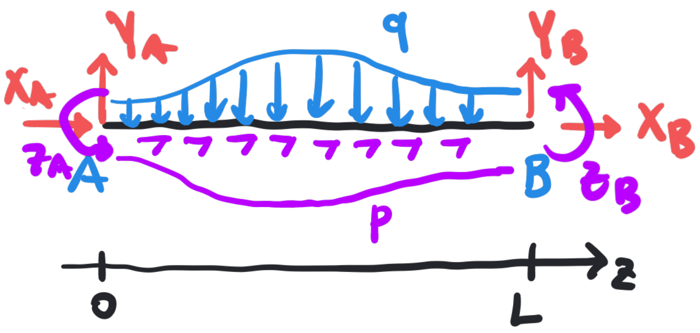
Per ottenere la terza equazione imponiamo l'annullarsi del momento risultante rispetto al punto P in figura:



$$\cancel{M}+dM-\cancel{M}-T\,dz+q\,\frac{dz^2}{2}=0$$

Dividendo per dz e scartando gli infinitesimi si trova l'equazione cercata.

$$\frac{dM}{dz}-T+\cancel{\frac{q\,dz}{2}}=0$$

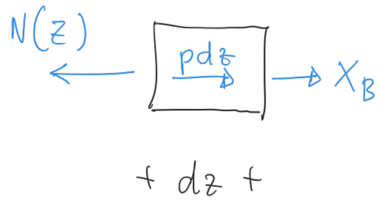


$$\lim_{z\to L} N(z) = X_B \qquad \lim_{z\to 0} N(z) = -X_A$$

$$\lim_{z\to L} T(z) = -Y_B \qquad \lim_{z\to 0} T(z) = Y_A$$

$$\lim_{z\to L} M(z) = Z_B \qquad \lim_{z\to 0} M(z) = -Z_A$$

Per ottenere la prima condizione consideriamo un tratto compreso tra $z = L - dz$ e $z = L$:

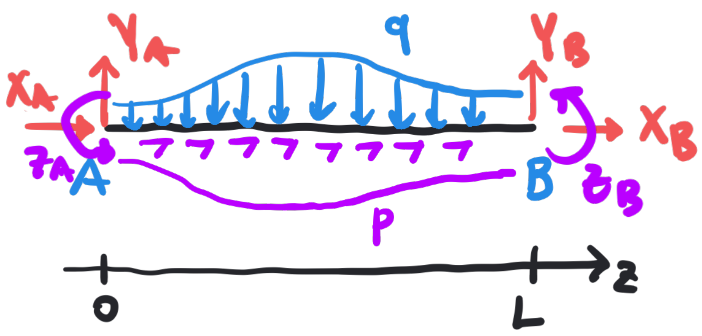


La risultante delle forze lungo z è

$$p\,dz + X_B - N(z) = 0$$

Passando al limite per $z \to L$ si ha $p\,dz \to 0$ e dunque

$$\lim_{z\to L} N(z) = X_B.$$

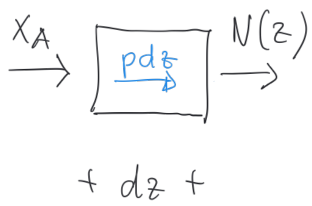


$$\lim_{z \to L} N(z) = X_B \qquad \boxed{\lim_{z \to 0} N(z) = -X_A}$$

$$\lim_{z \to L} T(z) = -Y_B \qquad \lim_{z \to 0} T(z) = Y_A$$

$$\lim_{z \to L} M(z) = Z_B \qquad \lim_{z \to 0} M(z) = -Z_A$$

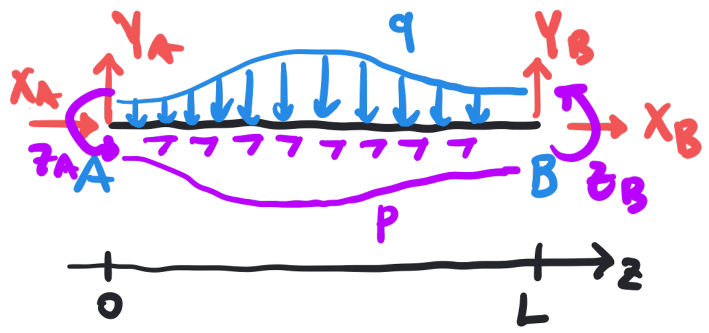
Per ottenere la seconda condizione consideriamo un tratto tra $z=0$ e $z=dz$



Imponendo l'equilibrio:

$$p\,dz + X_A + N(z) = 0$$

Passando al limite per $z \to 0$ si ottiene il risultato.



Le altre relazioni si dimostrano in modo analogo; grazie a queste relazioni è possibile estendere per continuità le CdS fino agli estremi.

$$\lim_{z \to L} N(z) = X_B \qquad \boxed{\lim_{z \to 0} N(z) = -X_A}$$

$$\lim_{z \to L} T(z) = -Y_B \qquad \lim_{z \to 0} T(z) = Y_A$$

$$\lim_{z \to L} M(z) = Z_B \qquad \lim_{z \to 0} M(z) = -Z_A$$

$$N_B = X_B \qquad N_A = -X_A$$

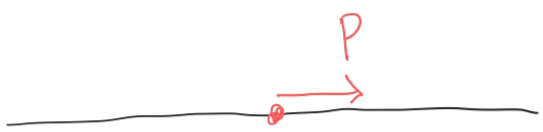
$$T_B = -Y_B \qquad T_A = Y_A$$

$$M_B = Z_B \qquad M_A = -Z_A$$

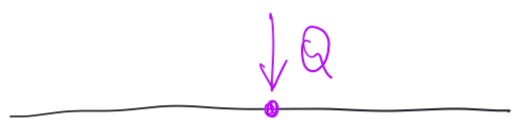
Condizioni di salto:

N^+ limite da destra

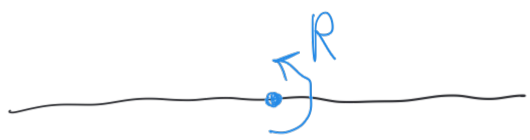
N^- limite da sinistra



$$\overbrace{N^+ - N^-}^{\text{salto di } N} + P = 0 \qquad [\![N]\!] + P = 0$$



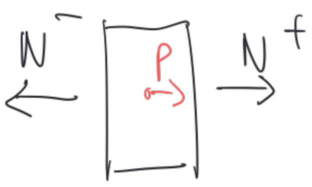
$$T^+ - T^- + Q = 0 \qquad [\![T]\!] + Q = 0$$



$$M^+ - M^- + R = 0 \qquad [\![M]\!] + R = 0$$

In presenza di forze o coppie concentrate le CdS sono discontinue

Dimostriamo una di queste relazioni



$$N^+ - N^- + P = 0$$