

## Esercizio: Legame costitutivo elastico lineare isotropo

(5 gennaio)

giovedì 26 dicembre 2019 10:19

Per un materiale lineare isotropo esiste diretta proporzionalità tra componenti normali di tensione e dilatazioni e tra componenti tangenziali di tensione e scorrimenti angolari, messi in luce dalle prove di trazione e compressione.

Si sceglie una base ortogonale i cui assi vengono indicati con  $x, y, z$ . È possibile con indicare le grandezze vettoriali anche attraverso le loro componenti nella base scelta.

Per praticità di rappresentazione, le componenti della tensione e della deformazione in un punto  $P$  possono essere raccolti nei due vettori tensione  $\underline{\sigma}$  e deformazione  $\underline{\varepsilon}$ :

$$\underline{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T ;$$

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T .$$

Il legame costitutivo tra le due può essere espresso nel caso di materiale isotropo attraverso la legge di Hooke generalizzata, data dalla seguente espressione:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{A} \underline{\sigma} . \quad (1)$$

È stata introdotta la matrice di deformabilità  $\underline{A}$ , che, rappresentata per intero per un materiale isotropo, assume la seguente forma:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} .$$

Viene fornito il tensore dello sforzo in un punto  $P$ , dato da:

$$\underline{\underline{T}}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} . \quad (2)$$

In generale, il tensore dello sforzo ha la seguente forma, come indicato nella (14.7) del libro Carini - Vasta:

$$\underline{\underline{T}}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} . \quad (3)$$

Confrontando la (2) con la (3) e tenendo conto della simmetria del tensore degli sforzi, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} . \quad (4)$$

Scrivendo per componenti la (1) ed utilizzando le espressioni (4) appena ricavate, si ottiene:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = -\frac{2\nu\sigma}{E} ;$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] = -\frac{2\nu\sigma}{E} ;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{\sigma}{E} (1-\nu) ;$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{\sigma}{E} (1-\nu) ;$$

(5)

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = 0 ;$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} = 0 ;$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} = \frac{2\sigma}{E} (1+\nu) .$$

La parte simmetrica della matrice gradiente di spostamento  $\underline{\underline{E}}$ , ossia la matrice della deformazione pura  $\underline{\underline{E}}$ , può essere scritta, facendo riferimento alla definizione 13.16 del libro Corini - Vasta, come:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} .$$

Sostituendo nella precedente la (5), si ottiene l'espressione della matrice di deformazione richiesta, ossia:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -\frac{2\nu\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{E} (1-\nu) & \frac{\sigma}{E} (1+\nu) \\ 0 & \frac{\sigma}{E} (1+\nu) & \frac{\sigma}{E} (1-\nu) \end{bmatrix} .$$

Declaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalina Genovese