

**ESERCITAZIONI
SCIENZA DELLE COSTRUZIONI
A.A. 2020/2021**

Docente:

Tomassetti Giuseppe

Candidato:

Barletta Alessandro

505501

Elenco delle esercitazioni:

1. Determinazione della matrice cinematica
2. Statica del Corpo rigido
3. Due schemi statici ricorrenti trave su due appoggi con coppia applicata ad un estremo e trave su due appoggi con sbalzo
4. Metodo degli spostamenti
5. Integrazione della equazione della linea elastica per una trave su due appoggi soggetta ad una coppia applicata ad un estremo
6. Calcolo di spostamenti e rotazioni in strutture iperstatiche delle quali si conoscono le sollecitazioni
7. Metodo delle Forze
8. Circonferenze di Mohr
9. Geometria delle Aree
10. Flessione deviata
11. Torsione Uniforme
12. Pressoflessione

Allegato A Autorizzazione pubblicazione esercitazioni

Esercitazioni per il corso di Scienza delle Costruzioni

Il sottoscritto Barletta Alessandro, nato a Tarquinia il 08/04/98 dichiara, sotto la sua responsabilità morale e professionale, che le esercitazioni sono frutto del suo e unico lavoro e che non sono state riviste o modificate da soggetti terzi durante la redazione delle stesse avvenuta in parallelo con le lezioni del corso di Scienza delle Costruzioni.

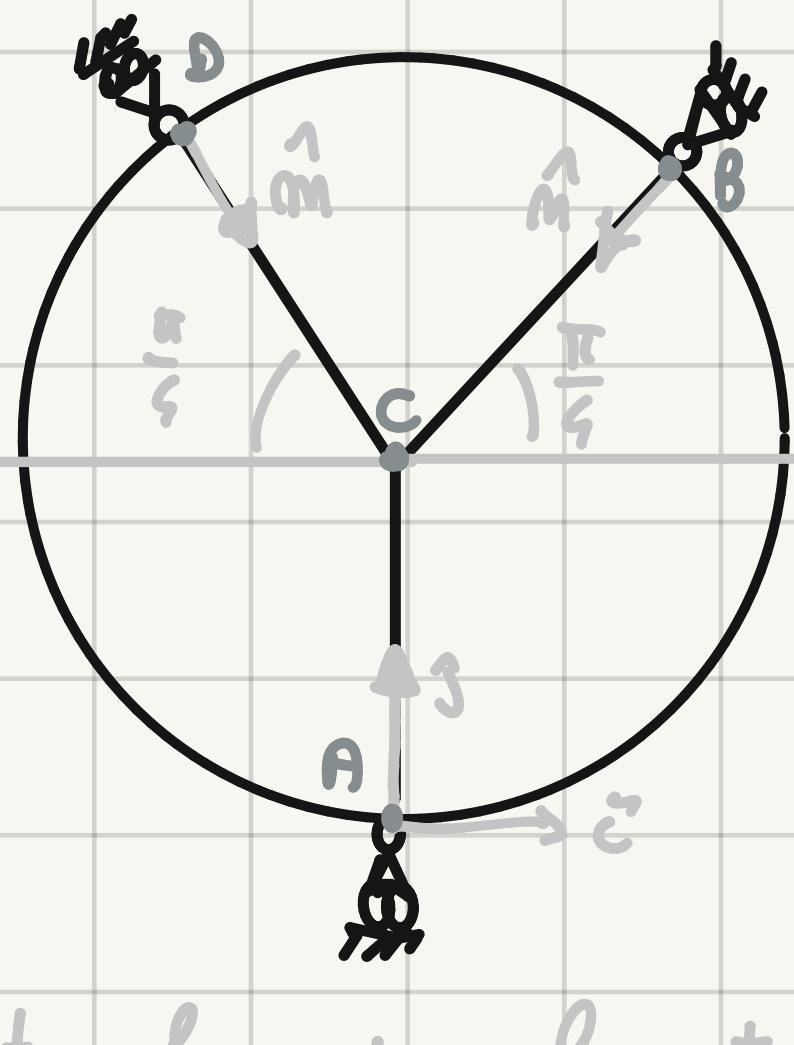
Civitavecchia, il 31/12/20

Firma

Barletta Alessandro

Esercitazione 1

Determinazione della matrice cinematica.



• Determinare la matrice cinematica

Scelto come polo il punto A e osservato che gli assi dei due carrelli passi in B e C sono identificati dalla direzione dei due versori \hat{m} ed \hat{n} che possono scivolare per compimenti come:

$$\{\hat{n}\} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} i \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} j \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{\hat{m}\} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} i \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} j \\ 0 \end{pmatrix}$$

Computando il numero dei gradi di libertà osserviamo che esso numericamente per alle moltiplicità dei vincoli:

$$m = n = 3.$$

il sistema è **LINERATAMENTE DEGENERE** poiché gli assi dei carrelli convergono tutti nello stesso punto, che sarà centro d'istante rotazione per il corpo.

Impostando il problema cinematico :

$$\underline{A} \underline{q} = \underline{S}$$

dove :

$$\underline{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \underline{q} \in \mathbb{R}^3 \text{ ed } \underline{S} \in \mathbb{R}^3$$

Due in questo caso

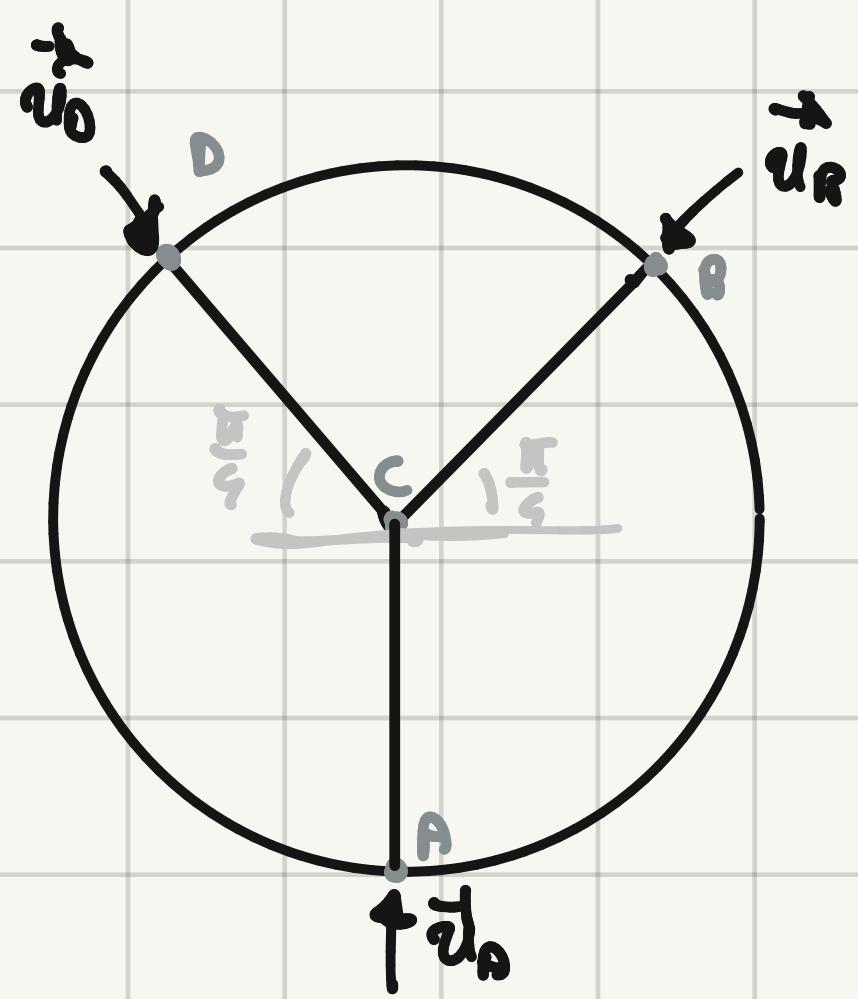
$$\underline{S} = \underline{0}$$

per via dell'assenza di cedimenti nella struttura.

Adesso andremo a costruire la matrice cinematica, pertanto andiamo a scrivere :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_A \cdot \vec{j} = 0 \\ \vec{u}_B \cdot \hat{m} = 0 \\ \vec{u}_C \cdot \hat{n} = 0 \end{array} \right.$$

seguiamo essere perciò di riduzione degli spostamenti in punto A.



Ottieniamo:

$$\vec{u}_A \cdot \hat{j} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{u}_A = 0}$$

$$\vec{u}_B \cdot \hat{m} = 0$$

dove:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

dunque:

$$(\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}) \cdot \hat{m} = 0$$

con:

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = l\hat{j} + l\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + l\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} = l\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \left(l\frac{\sqrt{2}}{2} + l\right)\hat{j}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}\hat{k}$$

$$\hat{m} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$

quindi:

$$\begin{aligned} \vec{u}_A \cdot \hat{m} + (\vec{\omega} \cdot \vec{AB}) \cdot \hat{m} &= 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}u_A - \frac{\sqrt{2}}{2}u_A + \hat{m} \times \vec{\omega} \cdot \vec{AB} &= 0. \end{aligned}$$

Eseguendo il prodotto misto:

$$\begin{aligned} \hat{m} \times \vec{\omega} \cdot \vec{AB} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right) \times \vec{\omega}\hat{k} \cdot \left[l\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \left(l\frac{\sqrt{2}}{2} + l\right)\hat{j}\right] \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}l\vec{\omega} \end{aligned}$$

Ottienendo così la seconda equazione di vincolo

$$\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}u_A - \frac{\sqrt{2}}{2}u_A + \frac{\sqrt{2}}{2}l\vec{\omega} = 0}$$

infine per la terza equazione di vincolo :

$$\vec{v}_D \cdot \hat{m} = 0$$

con :

$$\vec{v}_D = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AD}$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AD}) \cdot \hat{m} = 0$$

dove :

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= \vec{AC} + \vec{CD} = l\hat{j} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}l\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}l\hat{j} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}l\hat{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}l + l \right)\hat{j} \end{aligned}$$

operando il prodotto scalare :

$$\vec{v}_A \cdot \hat{m} + \vec{\omega} \times \vec{AD} \cdot \hat{m} = 0$$

che diventa :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}v_A - \frac{\sqrt{2}}{2}v_A + \hat{m} \times \vec{\omega} \cdot \vec{AD} = 0$$

utilizzando le proprietà del prodotto misto.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j} \right) \times \hat{m} \cdot \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}l\hat{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}l + l \right)\hat{j} \right] &= \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}l\vec{\omega}. \end{aligned}$$

ottenendo così la III° equazione di vincolo :

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}v_A - \frac{\sqrt{2}}{2}v_A - \frac{\sqrt{2}}{2}l\vec{\omega} = 0.}$$

III° equazione di vincolo

in definitiva il problema cinemotico :

$$\underline{A} \underline{q} = \underline{S}$$

dove \underline{q} è il vettore dei parametri logaritmici :

$$\underline{\theta} = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{dove } \underline{q} \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_A = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} u_A - \frac{\sqrt{2}}{2} v_A + \frac{\sqrt{2}}{2} \vartheta l = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} u_A - \frac{\sqrt{2}}{2} v_A - \frac{\sqrt{2}}{2} \vartheta l = 0 \end{cases} \quad \underline{A} \underline{q} = \underline{0}$$

con la matrice di congruenza che assume la forma:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} l \vartheta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} l \vartheta \end{pmatrix}$$

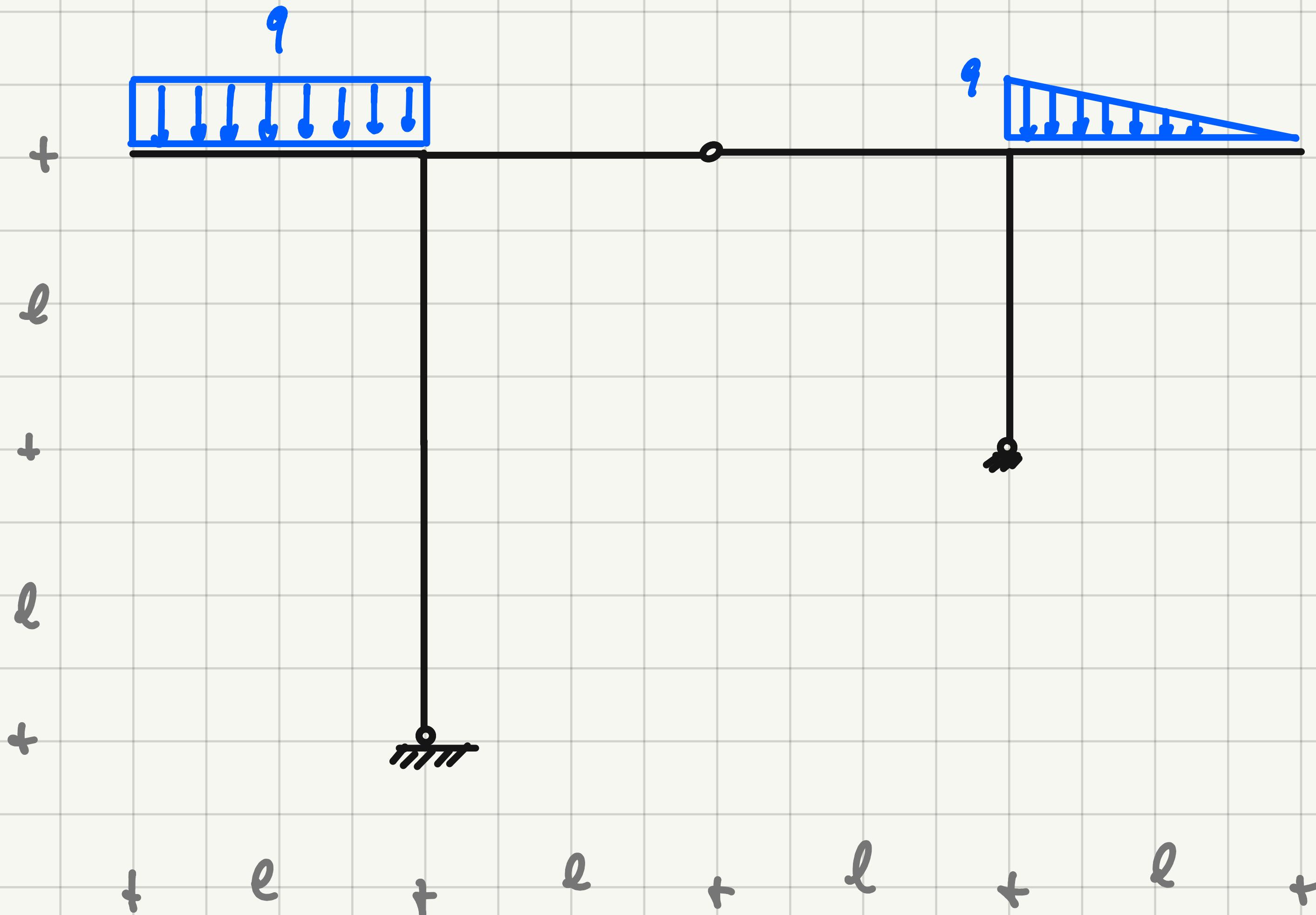
e il determinante:

$$\det \underline{A} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} l \vartheta \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} l \vartheta \end{pmatrix} = 0$$

il sistema dunque è **CINEMATICAMENTE DEGENERE**.

ESERCITAZIONE 2

COMPUTAMENTO DEGLI ESERCIZI SULLE STATICHE DEI SISTEMI DI CORPI RIGIDI



In via del tutto può essere osservato che la struttura è costituita da due corpi rigidi vincolati a ferma medietà delle cornici e vincolati fra di loro mediante una cornice interna.

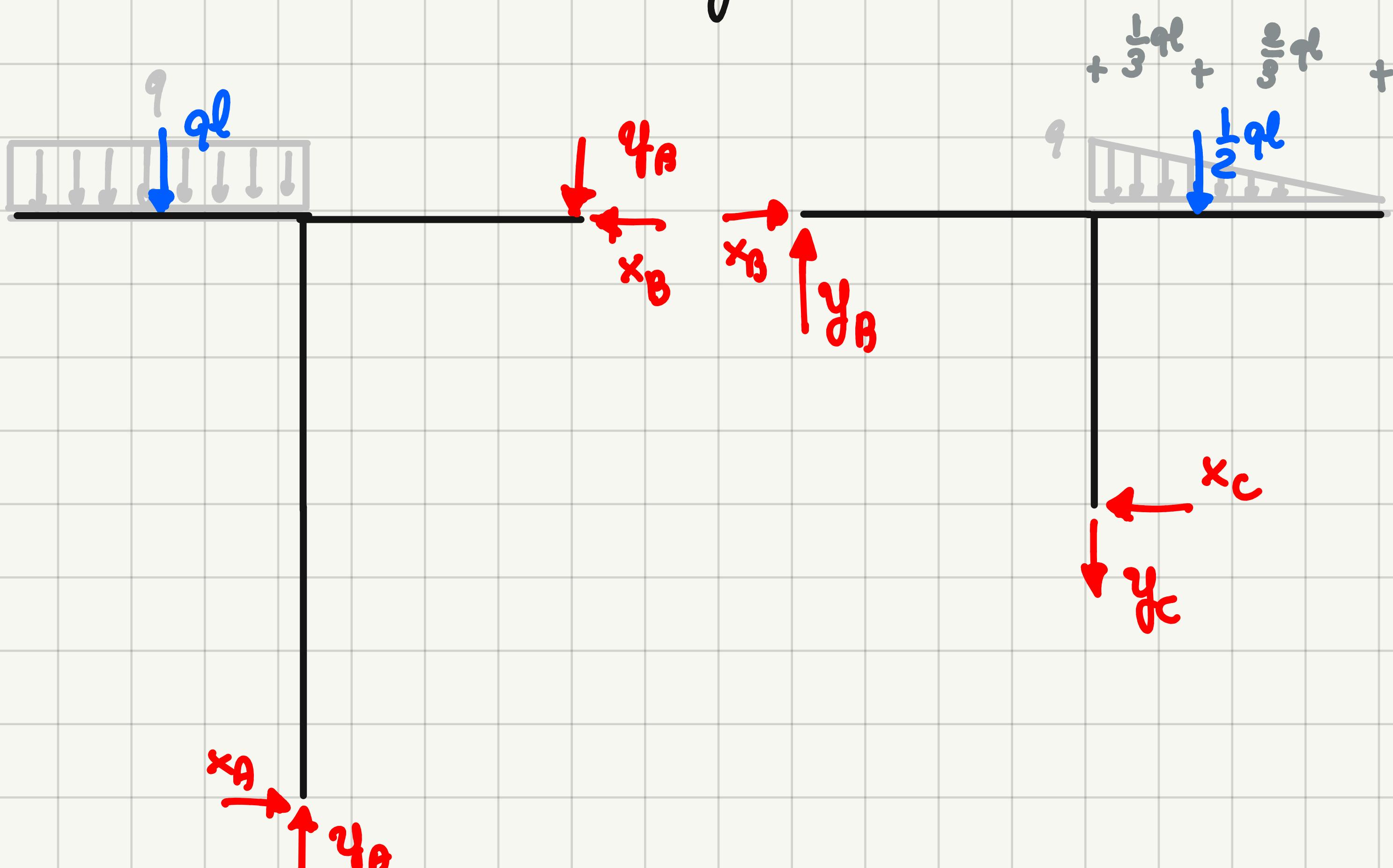
Facendo un'analisi dello multiplicità dei vincoli ed eseguendo il conto del numero dei gradi di libertà emerge che : $M = m = 6$.

La struttura è **STATICAMENTE DETERMINATA** pertanto è possibile sudare a calcolo le reazioni vincolari.

In buona sostanza ci possiamo aspettare :

$$\underline{B} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad \underline{r} \in \mathbb{R}^6 \quad \underline{f} \in \mathbb{R}^6$$

Per primo cosa andiamo a trovare il diagramma di struttura libera.



A questo punto non ci resta che studiare la struttura, imponendo l'equilibrio attraverso le equazioni cardinali.

Per quanto riguarda il corpo a sinistra avremo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A - x_B = 0 \\ y_A - y_B = ql \\ \frac{1}{2}ql^2 - ly_B + 2lx_B = 0 \end{array} \right.$$

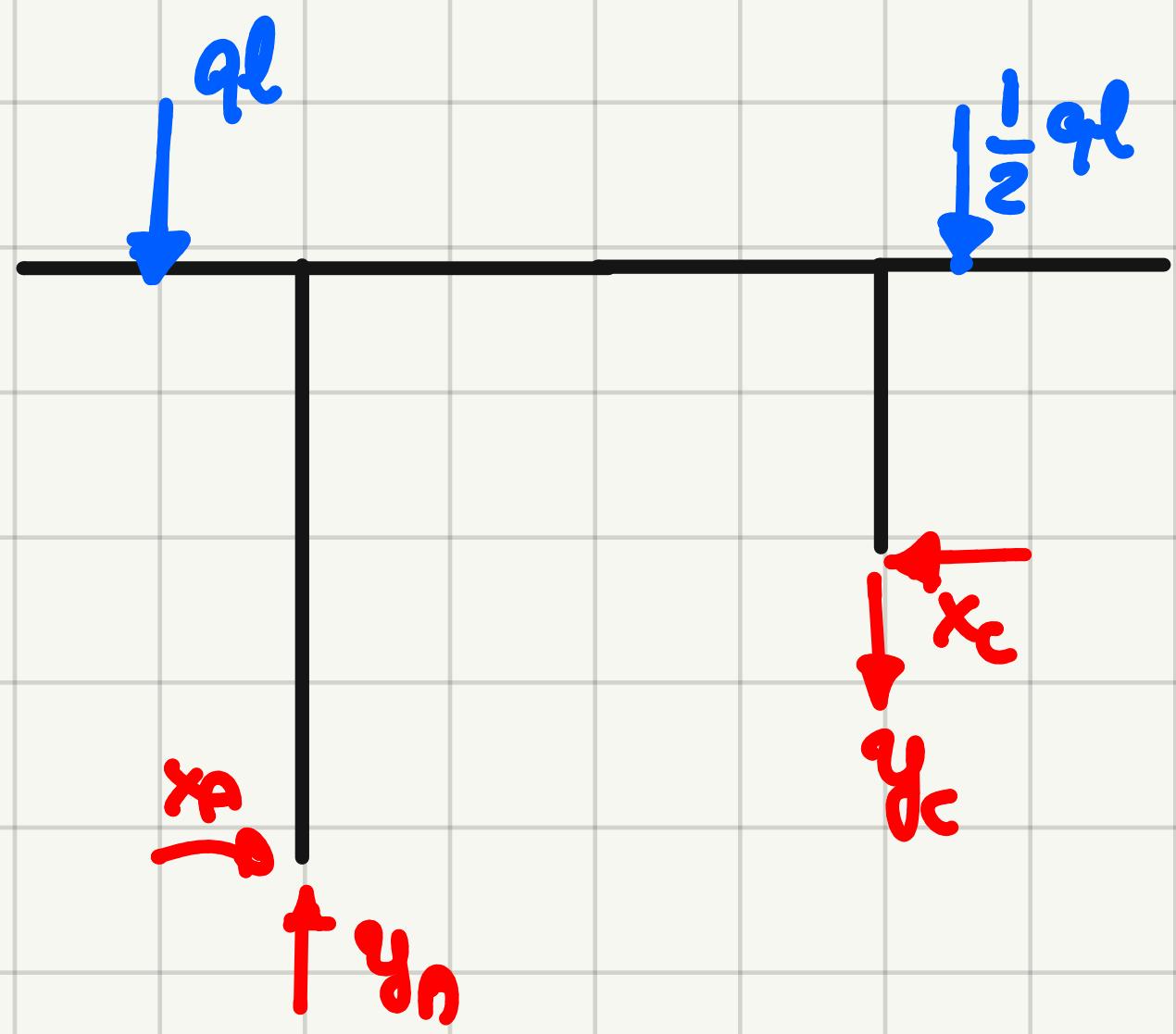
Mentre per il corpo a destra:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_B - x_C = 0 \\ y_B - y_C = \frac{1}{2}ql \\ -lx_B - ly_B - \frac{1}{6}ql^2 = 0 \end{array} \right.$$

procediamo con la risoluzione, mettendo tutto a sistema.

$$\sum : \left\{ \begin{array}{l} x_A - x_B = 0 \\ y_A - y_B = ql \\ \frac{1}{2}ql^2 - ly_B + 2lx_B = 0 \\ x_B - x_C = 0 \\ y_B - y_C = \frac{1}{2}ql \\ -lx_B - ly_B - \frac{1}{6}ql^2 = 0 \end{array} \right.$$

Sfruttiamo anche lo conoscenza di una equazione ausiliaria, non considerando la struttura come due corpi rigidi separati. Scelta come polo il punto A



Scriviamo la seconda equazione coordinate spostamento di caso statico

A3

$$\frac{1}{2}ql^2 + l x_c - 2l y_c - \frac{7}{3}ql^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_c - 2y_c = \frac{11}{6}ql \quad (1)$$

che possiamo riscrivere ricordando che:

$$\begin{cases} x_c = x_B \\ y_c = y_B - \frac{1}{2}ql \end{cases}$$

risituendo in (1) ottemiamo:

$$x_B - 2\left(y_B - \frac{1}{2}ql\right) = \frac{11}{6}ql.$$

$$x_B - 2y_B + ql = \frac{11}{6}ql.$$

$$x_B - 2y_B = \frac{8}{6}ql.$$

che messo a sistema con l'ultima equazione del sistema di equazioni

Σ

$$\begin{cases} x_B - 2y_B = \frac{8}{6}ql. \\ x_B + y_B = -\frac{1}{6}ql \end{cases}$$

del quale uno valto risolto ottemiamo:

$$x_B = \frac{1}{6}ql$$

$$y_B = -\frac{1}{3}ql$$

Riparto per comodità il sistema Σ

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A - x_B = 0 \\ y_A - y_B = ql \\ \frac{1}{2}ql^2 - ly_B + 2lx_B = 0 \\ x_B - x_C = 0 \\ y_B - y_C = \frac{1}{2}ql \\ -lx_B - ly_B - \frac{1}{6}ql^2 = 0 \\ x_B - 2y_B = \frac{8}{6}ql \end{array} \right.$$

equazione auxiliare.

moti: $x_B = \frac{1}{6}ql$ $y_B = -\frac{2}{3}ql$

In conclusione ottieniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_A = \frac{4}{6}ql \\ y_A = \frac{2}{3}ql \\ x_B = \frac{1}{6}ql \\ y_B = -\frac{1}{3}ql \\ x_C = \frac{1}{6}ql \\ y_C = -\frac{5}{6}ql \end{array} \right.$$

ESERCITAZIONE 3

DETERMINARE I DIAGRAMMI DEI CARATTERISTICI DELLA SOLITAZIONE

STRUTURA 1



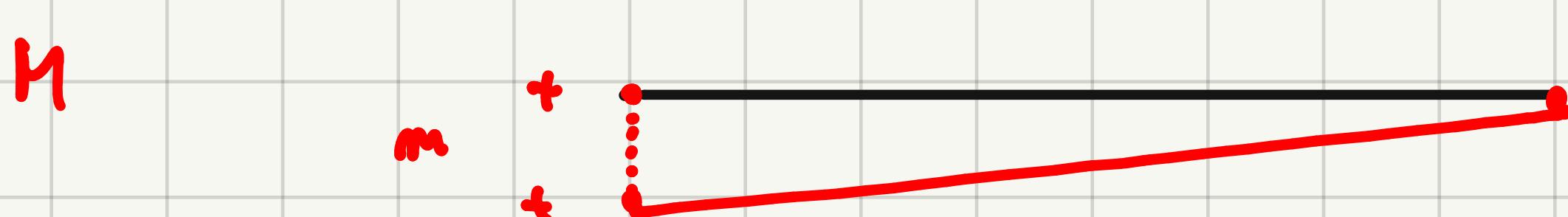
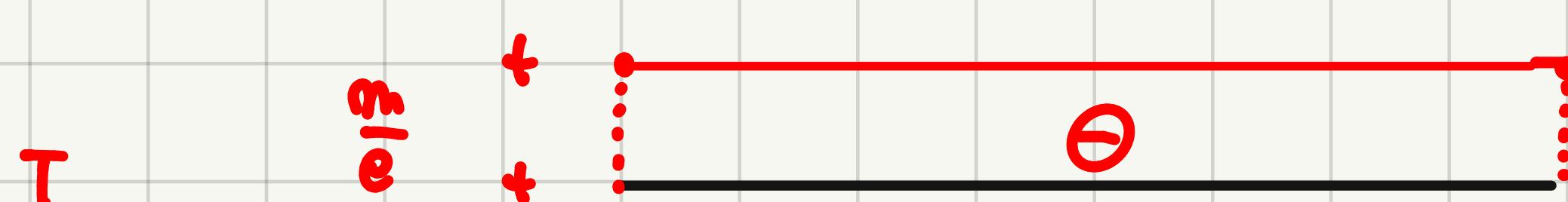
In via del tutto preliminare andiamo a dare una rapida classificazione allo struttura in esame. Notiamo immediatamente che si tratta di uno struttura **STATICAMENTE DETERMINATA**, nella quale non sono presenti dei eccessiismi. Tocchiamo il diagramma di struttura libera.



del quale emerge facilmente :



I diagrammi delle caratteristiche della soluzione assumono la forma



Dare le distribuzioni della forza normale, taglio e momento flettente sono descritti dalle seguenti funzioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} N(s) = 0 \\ T(s) = -\frac{m}{e} \\ h(s) = -\frac{m}{e}s + m \end{array} \right.$$

STRUTTURA 2



Si tratta di una trave appoggiata, è una struttura **STATICAMENTE DETERMINATA** poiché il numero dei gradi di libertà è uguale al valore dello svallepliato dei vincoli. (vedendo la trave come un corpo rigido, che nel punto possiede $3m_c$)

Per prima cosa andiamo a tracciare il diagramma di struttura libera.



Imponendo l'equilibrio tramite le equazioni coordinate della statica:

$$A \quad \left\{ \begin{array}{l} x_A = 0 \\ y_A - y_B = F \\ -l y_B - (l + a) F = 0 \end{array} \right.$$

Dall'equazione di governo l'equilibrio dei momenti emerge che:

$$y_B = -\frac{(l + a)}{l} F$$

perciò avremo:

$$y_B = - \left(1 + \frac{\alpha}{e} \right) F$$

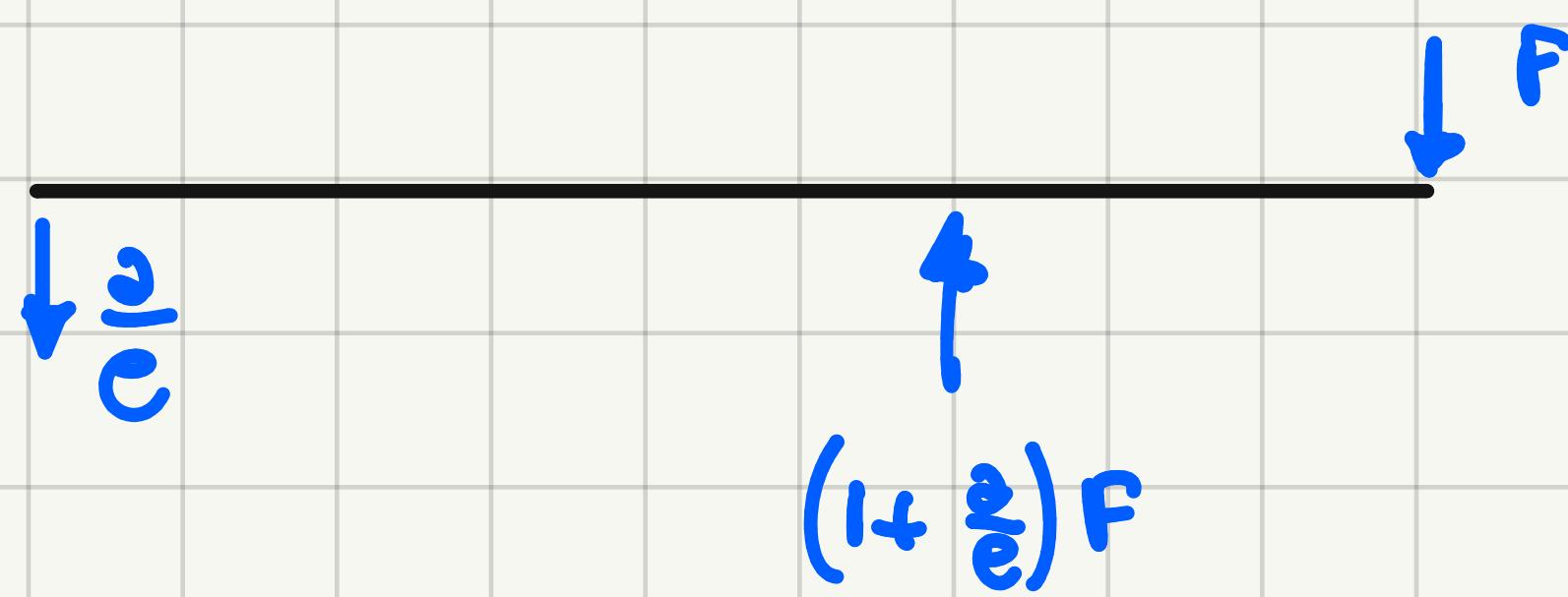
che combinato con la seconda equazione del sistema:

$$y_A - y_B = F$$

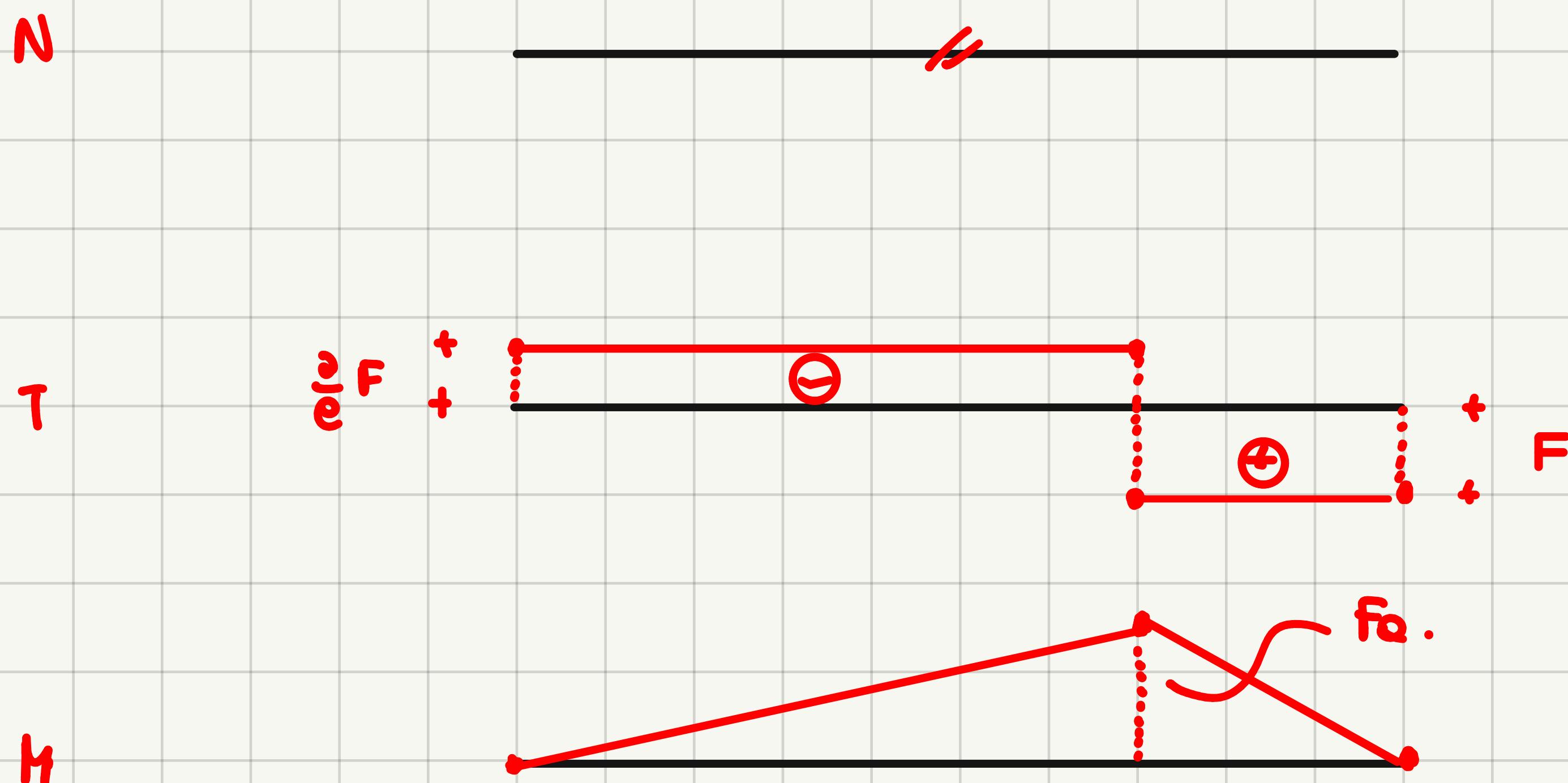
otteniamo:

$$y_A = - \frac{\alpha}{e} F$$

perciò riportando le tensioni: è il carico esterno.



In conclusione andiamo a trovare i diagrammi delle caratteristiche dello soleggiamento



Dove gli assamenti fanno lo seguente rappresentazione andrebbe:

$$N(\theta) = 0$$

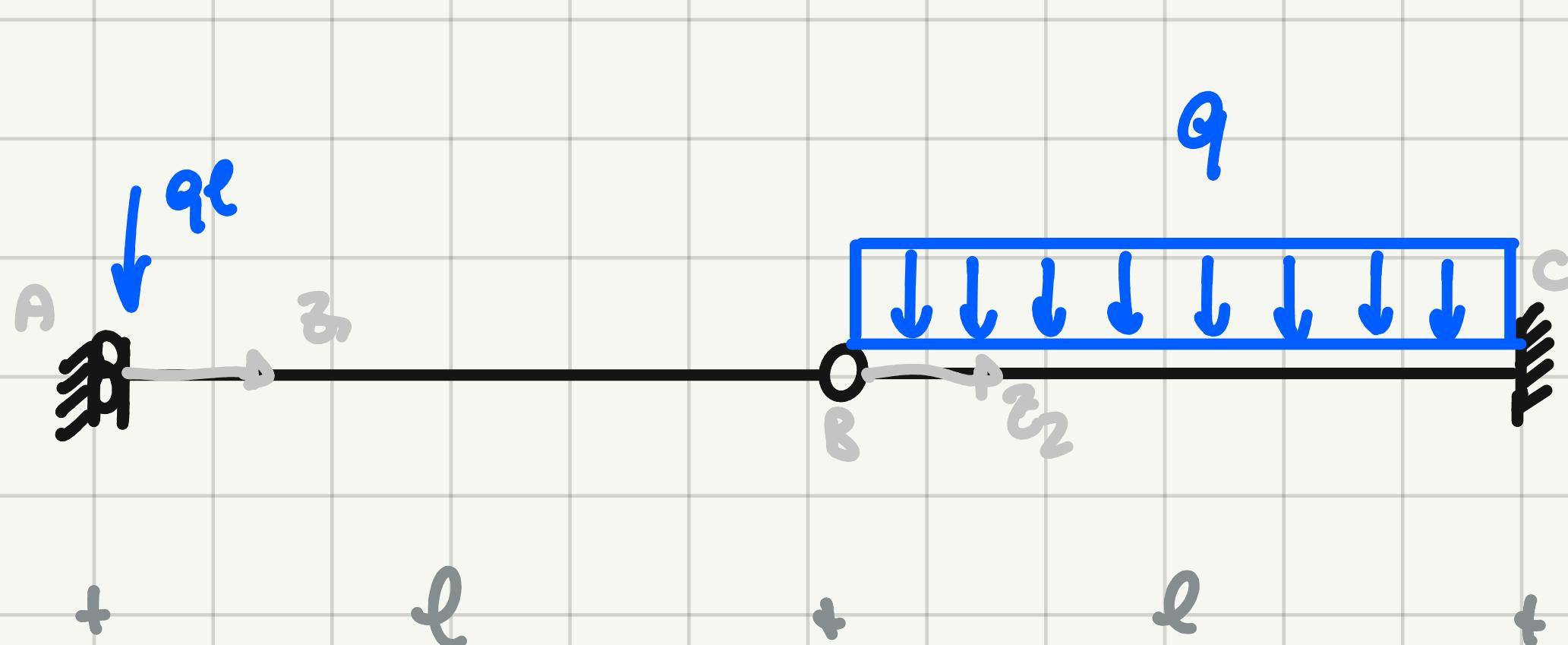
V.S.

$$\tau(\theta) = \begin{cases} -\frac{\theta}{c} F & \theta_1 \in [0, \ell] \\ F & \theta_2 \in [0, \alpha] \end{cases}$$

$$h(\theta) = \begin{cases} -\frac{\theta}{c} F_0 & \theta_1 \in [0, \ell] \\ F_0 - F_0 & \theta_2 \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

ESERCITAZIONE 4

METODO DEGLI SPOSTAMENTI



(hp)

- $\gamma \rightarrow 0 \quad GAt \rightarrow +\infty$
modello di Euler-Bernoulli
- $EI = \begin{cases} EI & \text{per } q_0 [q_0] \\ 2EI & \text{per } q_0 [q_0] \end{cases}$

In prima battuta andiamo a fare un'analisi preliminare; abbiamo una struttura composta da due travi, se visto come un sistema di corpi rigidi, il numero dei gradi di libertà complessivi è pari a $3n_c = 6$. Computando il valore delle moltiplicate dei vincoli possiamo richiedere le formule

$$m - m = l - i$$

dal quale, in essenza di cinematica ci restituisce

$$i = 1.$$

La struttura dunque ha grado di iperstaticità par a 1. Dunque non c'è possibile calcolare direttamente il valore delle reazioni vincolari.

Per lo studio della risposta strutturale effettuata da questa struttura, ci appelleremo al metodo degli spostamenti. Attraverso tale metodo, privilegiemo le immagini cinematiche che una volta notate permettono di calcolare le misure della deformazione e le caratteristiche dello sollecitazione. Il problema in questione è puramente flessionale, richiediamo dunque le equazioni di bilanciamento

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi(z) = \varphi(z) + v'(z) \\ \gamma(z) = \varphi'(z) \\ T(z) + q = 0 \\ h'(z) - T(z) = 0 \\ \delta(z) = \frac{T(z)}{GAt} \\ \chi(z) = \frac{h(z)}{EI} \end{array} \right.$$

Dallo primo equazione di congruenza ottieniamo:

$$\varphi(z) = -v'(z)$$

che combinato con lo secondo ci restituisce

$$\chi(z) = -v''(z)$$

Tale equazione lo andremo a combinare con l'equazione costitutiva

$$\chi(z) = \frac{M(z)}{EI}$$

che ci restituirà:

$$M(z) = -EI v''(z)$$

Ricordando la nostra attenzione sulle equazioni differenziali indefinite di equilibrio.

$$\begin{cases} T'(z) + q = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \end{cases}$$

derivando lo secondo ottieniamo:

$$M''(z) - T'(z) = 0$$

dove:

$$\begin{cases} T'(z) = -q \\ M(z) = -EI v''(z) \end{cases}$$

In definitiva ottieniamo l'equazione dello linea elastica, nella sua forma generale.

$$[-EI v''(z)]'' + q = 0$$

$$-EI v^{IV}(z) + q = 0 \quad (3)$$

Spandendo l' eq. (2) per le nostre strutture, ricordando che :

$$EI(z) = \begin{cases} EI & z_1 \in [0, l] \\ 2EI & z_2 \in [0, l] \end{cases}$$

Ottieniamo

$$-EI v''(z_1) = 0 \quad \text{per } z_1 \in [0, l] \quad (1.1)$$

$$-EI v''(z_2) + q = 0 \quad \text{per } z_2 \in [0, l] \quad (1.2)$$

Procediamo con l'integrazione delle equazioni delle linee elastica, per quanto riguarda la (1.1)

$$\begin{aligned} v''_1(z_1) &= 0 \\ v'''_1(z_1) &= c_1 \\ v''_1(z_1) &= c_1 z + c_2 \\ v'_1(z_1) &= \frac{1}{2} c_1 z^2 + c_2 z + c_3 \\ v_1(z) &= \frac{1}{6} c_1 z^3 + \frac{1}{2} c_2 z^2 + c_3 z + c_4 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Mentre per quanto riguarda l' eq. (1.2)

$$\begin{aligned} -2EI v''_2(z_2) + q &= 0 \\ v''_2(z_2) &= \frac{q}{2EI} \\ v'''_2(z_2) &= \frac{q}{2EI} z + c_5 \\ v''_2(z_2) &= \frac{1}{4} \frac{q}{EI} z^2 + c_5 z + c_6 \\ v'_2(z_2) &= \frac{1}{12} \frac{q}{EI} z^3 + \frac{1}{2} c_5 z^2 + c_6 z + c_7 \\ v_2(z_2) &= \frac{1}{48} \frac{q}{EI} z^4 + \frac{1}{6} c_5 z^3 + \frac{1}{2} c_6 z^2 + c_7 z + c_8 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Adesso per calcolare le 8 costanti d'integrazione, affianchiamo altre quattro condizioni al contorno. Sui vincoli esterni e le condizioni di roccordo del vincolo interno.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno per i vincoli esterni, alle eq. (2.1) e (2.2) verranno affiancate rispettivamente.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1'(0) = 0 \\ v_1'''(0) = \frac{q l}{E I} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \varphi_1(0) = 0 \\ -EI v''(s) = -q l \\ T(s) \end{array}$$

mentre all'equazione (2.2) affianchiamo le seguenti condizioni al contorno offerte dai vincoli esterni.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_2(l) = 0 \\ v_2'(l) = 0. \end{array} \right. \quad \varphi_2(l) = 0$$

Al quale andremo a inserire anche le condizioni di roccordo dello spazio interno.

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(l) = v_2(0) \\ v_1'''(l) = v_2'''(0) \\ v_2''(l) = 0 \\ v_2''(0) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{spostamento relativo} \\ \text{trasmissione del taglio.} \\ \left. \begin{array}{l} \text{momento flettente nullo in} \\ \text{corrispondenza del} \\ \text{vincolo di carico} \\ \text{interno.} \end{array} \right. \end{array}$$

Imponendo le condizioni al contorno alle eq. (2.1) e (2.2)

$$v_1'(0) = 0 \rightarrow c_3 = 0$$

$$v_1'''(0) = \frac{q l}{E I} \rightarrow \frac{q l}{E I} = c_1$$

$$v_2(l) = 0 \rightarrow \frac{1}{48} \frac{q}{E I} l^4 + \frac{1}{6} c_5 l^3 + \frac{1}{2} c_6 l^2 + c_7 l + c_8 = 0$$

$$v_2'(l) = 0 \rightarrow \frac{1}{12} \frac{q}{E I} l^3 + \frac{1}{2} c_5 l^2 + c_6 l + c_7 = 0.$$

infine imponiamo le condizioni di recordo e ottieniamo:

$$U_1(l) = U_2(0)$$

$$\frac{1}{6}C_1l^3 + \frac{1}{2}C_2l^2 + C_3l + C_4 = C_8$$

$$U_1''(l) = U_2''(0)$$

$$C_1 = C_5$$

$$U_1'''(l) = 0.$$

$$C_2 = 0$$

$$U_2'''(0) = 0$$

$$C_6 = 0$$

combinando tutti i risultati ottenuti, ottieniamo che:

$$C_1 = C_5 = \frac{ql}{EI}$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = 0$$

$$\frac{1}{48} \frac{q}{EI} l^4 + \frac{1}{6} C_5 l^3 + \frac{1}{2} C_6 l^2 + C_7 l + C_8 = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{12} \frac{q}{EI} l^3 + \frac{1}{2} C_5 l^2 + C_6 l + C_7 = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{6} C_1 l^3 + \frac{1}{2} C_2 l^2 + C_3 l + C_4 = C_8 \quad (3.3)$$

$$C_6 = 0$$

Dall'equazione (3.1) combiniamo il valore di $C_5 = \frac{ql}{EI}$ e ottieniamo

$$\frac{1}{48} \frac{ql}{EI} l^4 + \frac{1}{6} \frac{ql^4}{EI} + C_7 l + C_8 = 0. \quad (*)$$

analogo per la (3.2)

$$\frac{1}{12} \frac{ql^3}{EI} + \frac{1}{2} \frac{ql^3}{EI} + C_7 = 0$$

Dallo quale calcoliamo il valore di C_7

$$C_7 = -\frac{7}{12} \frac{ql^3}{EI}$$

che combinato con (*) ci permette di calcolare il valore di C_8

in particolare :

$$\frac{1}{48} \frac{q l^4}{EI} + \frac{1}{6} \frac{q l^4}{EI} + C_7 l + C_8 = 0.$$

dove

$$C_7 = - \frac{7}{12} \frac{q l^3}{EI}$$

$$C_8 = \frac{19}{48} \frac{q l^4}{EI}$$

e infine andando a combinare questi risultati con l'equazione (3.3) otteniamo il valore del' ultimo costante d'integrazione :

$$C_4 = \frac{35}{48} \frac{q l^4}{EI}$$

In definitiva l'andamento dello spostamento e' dato dalle seguenti espressioni analitiche :

$$v(\delta) = \begin{cases} v_1(\delta_1) = \frac{1}{6} \frac{q l}{EI} \delta^3 - \frac{1}{2} \frac{q l^2}{EI} \delta^2 + \frac{35}{48} \frac{q l^4}{EI} & \delta_1 \in [0, l] \\ v_2(\delta_2) = \frac{1}{48} \frac{q}{EI} \delta^4 + \frac{1}{6} \frac{q l}{EI} \delta^3 - \frac{7}{12} \frac{q l^4}{EI} \delta^2 + \frac{19}{48} \frac{q l^4}{EI} \delta_2 & \delta_2 \in [0, l] \end{cases}$$

ESERCITAZIONE 5

INTEGRAZIONE DI UNA LINEA ELASTICA PER UNA TRAVE SU DUE APPOGGI SOGGETTA AD UNA COPIA APPLICATA AD UN ESTREMO.



Il nostro obiettivo è di andare a calcolare la risposta strutturale di questa struttura col percorso del metodo degli spostamenti.

Per prima cosa possiamo subito osservare che si tratta di una struttura **STATICAMENTE DETERMINATA**, se vista come un corpo rigido, il numero dei gradi di libertà egualia il valore della moltiplicità dei vincoli.

Si tratta inoltre di un problema puramente flessionale, pertanto ne consideriamo le equazioni di governo sotto l'ipotesi di trave di Bernoulli:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(z) = -v'(z) \\ \chi(z) = -v''(z) \\ T'(z) + q = 0 \\ M'(z) - T(z) = 0 \\ \chi(z) = \frac{h(z)}{EI} \end{array} \right\}$$

Nello spirito del metodo degli spostamenti, andiamo a privilegiare le incognite cinematiche. Omettendo l'equazione dello spazio elastico

$$-EI v'''(z) + q = 0$$

che nel nostro caso si semplifica:

$$v'''(z) = 0$$

integrandone otteniamo:

$$v''(z) = c_1,$$

$$v'(z) = \frac{1}{2}c_1 z^2 + c_2 z + c_3$$

$$v(z) = \frac{1}{6}c_1 z^3 + \frac{1}{2}c_2 z^2 + c_3 z + c_4$$

che andremo a risolvere con delle opportune condizioni al contorno y impostazione moto che sono presenti 4 costanti d'integrazione avremo bisogno di 4 condizioni al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{l} v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \\ v''(0) = - \frac{m}{EI} \\ v''(l) = 0. \end{array} \right.$$

dunque avremo:

$$\left\{ \begin{array}{l} v(z) = \frac{1}{6} c_1 z^3 + \frac{1}{2} c_2 z^2 + c_3 z + c_4 \\ v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \\ v''(0) = - \frac{m}{EI} \\ v''(l) = 0. \end{array} \right.$$

$$v(0) = 0 \rightarrow c_4 = 0$$

$$v(l) = 0 \rightarrow \frac{1}{6} c_1 l^3 + \frac{l}{2} c_2 l^2 + c_3 l + c_4 = 0$$

$$v''(0) = - \frac{m}{EI} \quad c_2 = - \frac{m}{EI}$$

$$v''(l) = 0 \quad c_1 l + c_2 = 0.$$

Dal quale emerge che i valori di c_1 e c_3 volgono rispettivamente:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{m}{lEI} \\ c_3 &= \frac{1}{3} \frac{m}{EI} l. \end{aligned}$$

Quindi ottendiamo:

$$v(z) = \frac{1}{6} \frac{m}{EI} z^3 - \frac{1}{2} \frac{m}{EI} z^2 + \frac{1}{3} \frac{ml}{EI} z$$

A questo punto calcoliamo le rotazioni in corrispondenza delle estremità vincolate, ricordando che :

$$\varphi(\theta) = -\psi''(0).$$

pertanto otteniamo :

$$\varphi(\theta) = -\frac{1}{2} \frac{m}{EI} \theta^2 + \frac{m}{EI} \theta - \frac{1}{3} \frac{m\ell}{EI}$$

e dunque otteniamo per $\varphi_A(0) = -\frac{1}{3} \frac{m\ell}{EI}$ in senso orario mentre per $\varphi_B(\ell) = \frac{1}{6} \frac{m\ell}{EI}$ in senso antiorario

Per quanto riguarda infine il momento flettente, ricordiamo l'eq. costitutiva che lega lo sforzo flessionale con il momento flettente:

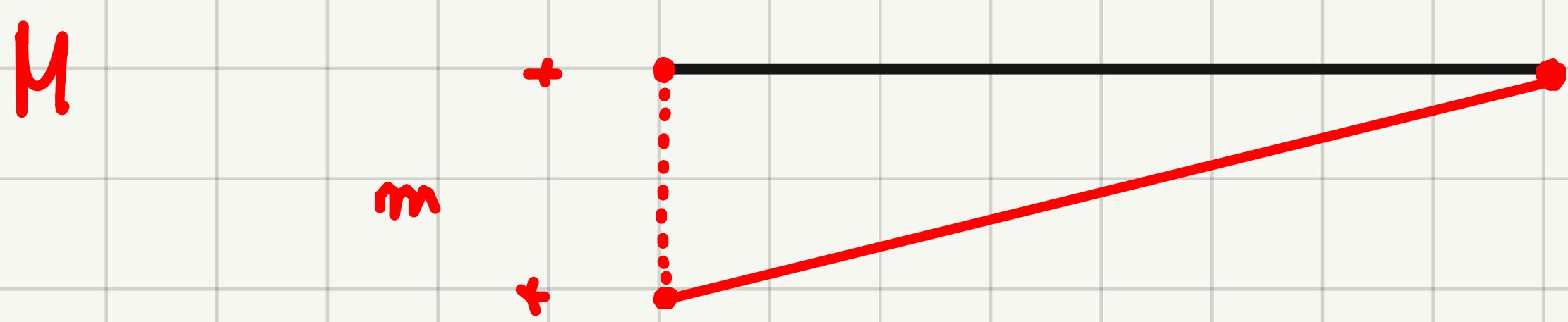
$$\chi(\theta) = \frac{n(\theta)}{EI}$$

esso lo possiamo scrivere come :

$$n(\theta) = -EI \psi''(\theta).$$

$$n(\theta) = -\frac{m}{\ell} \theta + m$$

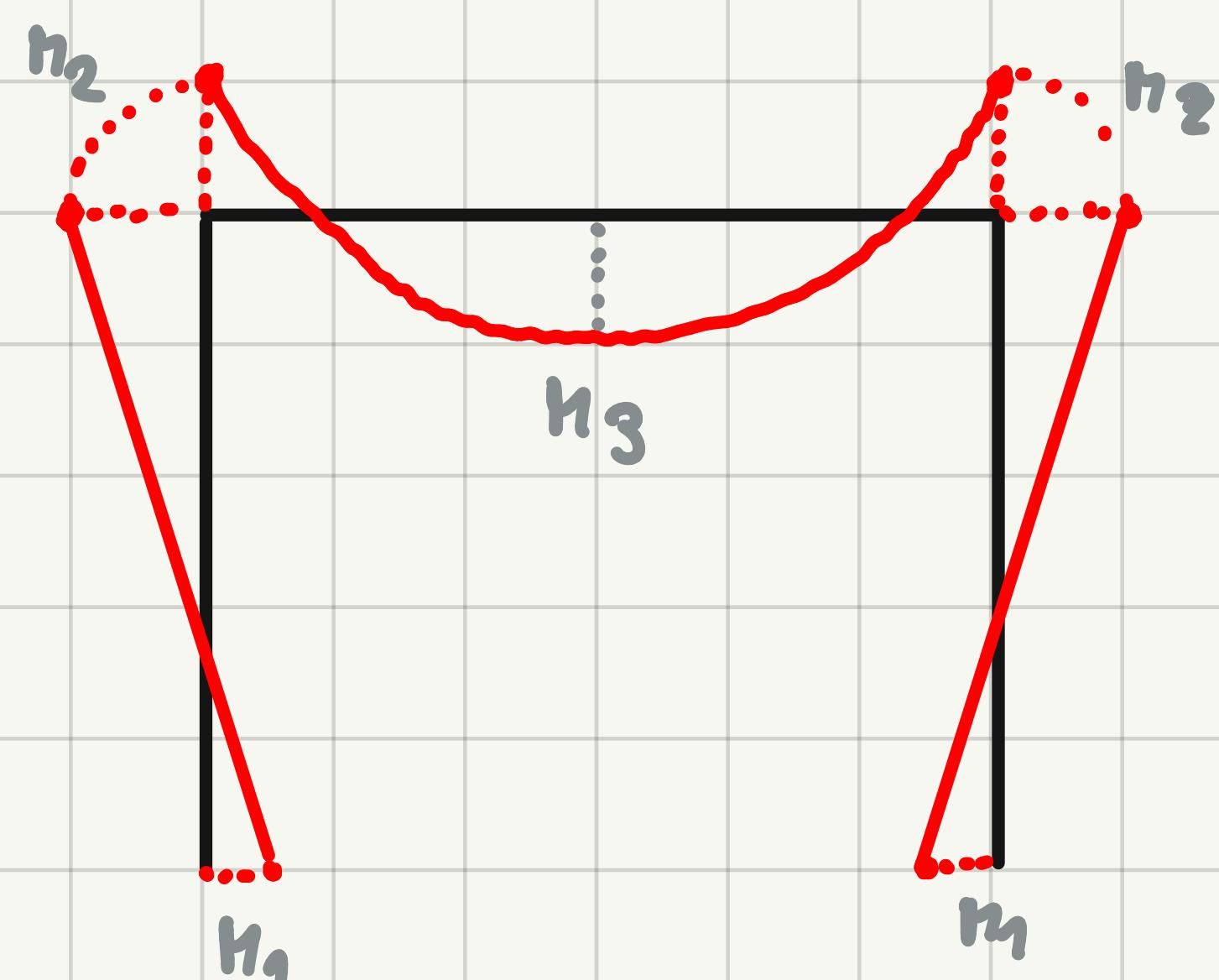
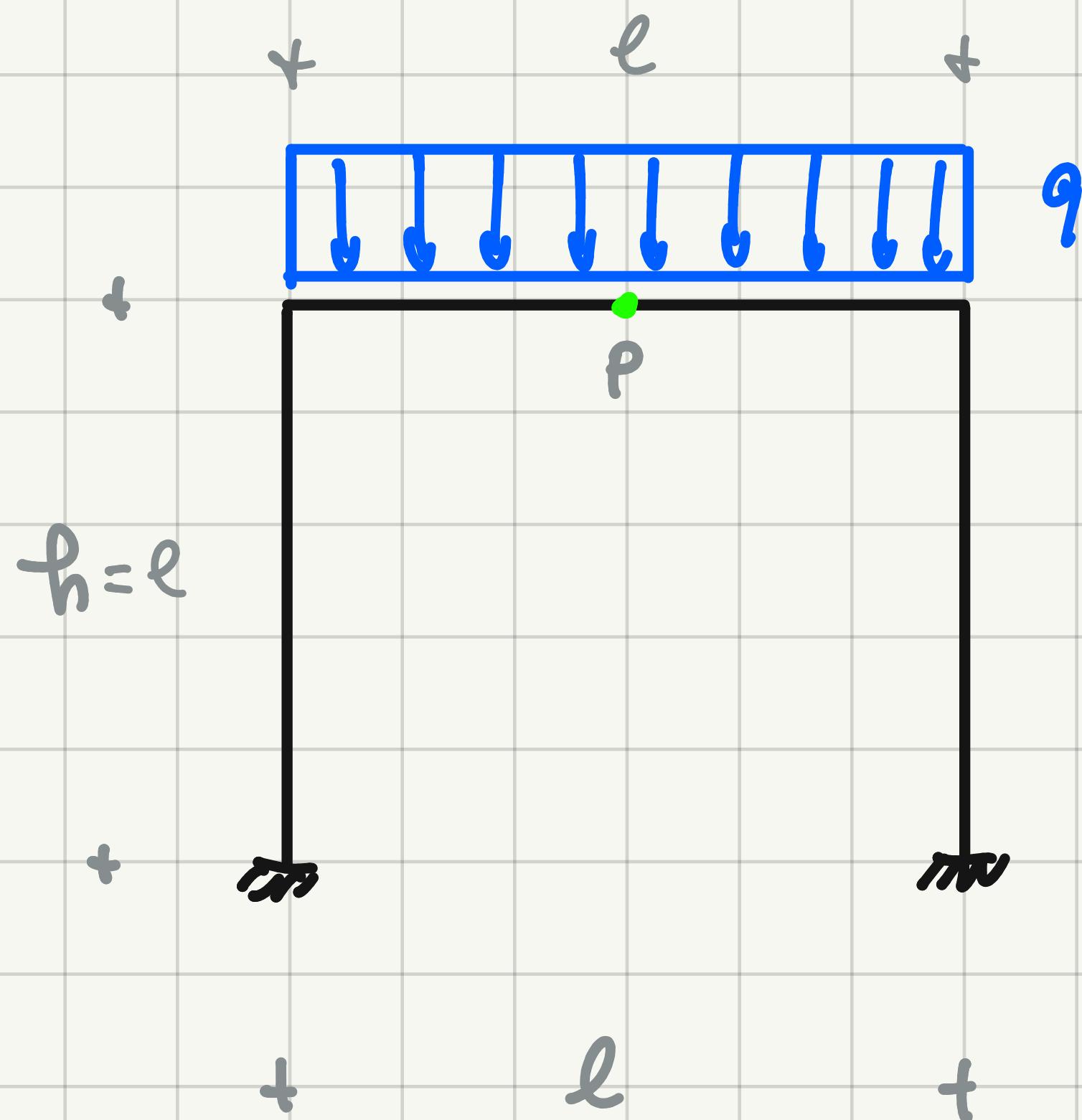
e il diagramma è riportato in fig.



Esercizio 6

CALCOLO DI SPOSTAMENTI E ROTAZIONI IN STRUTTURE IPERSTATICHE DUE QUALI SI CONOSCONO UNE SOLUTAZIONI

Abbiamo moto:



dove abbiamo anche molti i valori di:

$$h_1 = \frac{1}{36} q l^2 \quad h_2 = -\frac{1}{18} q l^2 \quad h_3 = \frac{5}{72} q l^2.$$

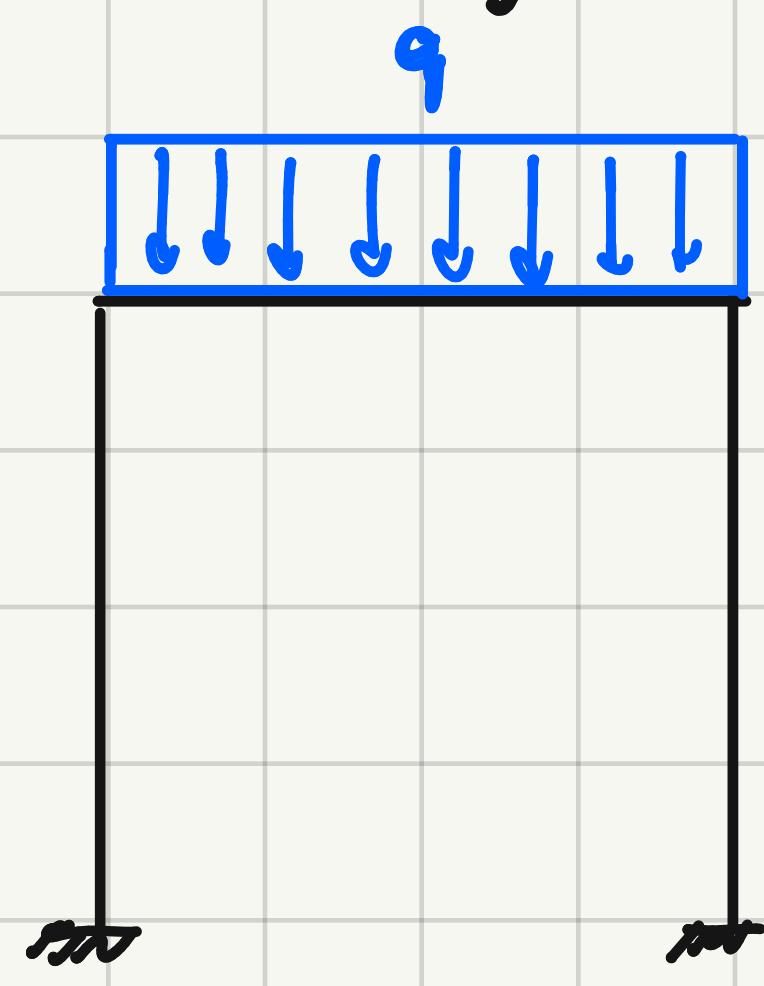
Ri mostro obiettivo e' andare a calcolare lo spostamento del punto **P**.
Per prima cosa facciamo delle ipotesi puramente semplificative:

1. $\gamma \rightarrow 0 \quad GAE \rightarrow +\infty$
2. $EA \rightarrow +\infty$

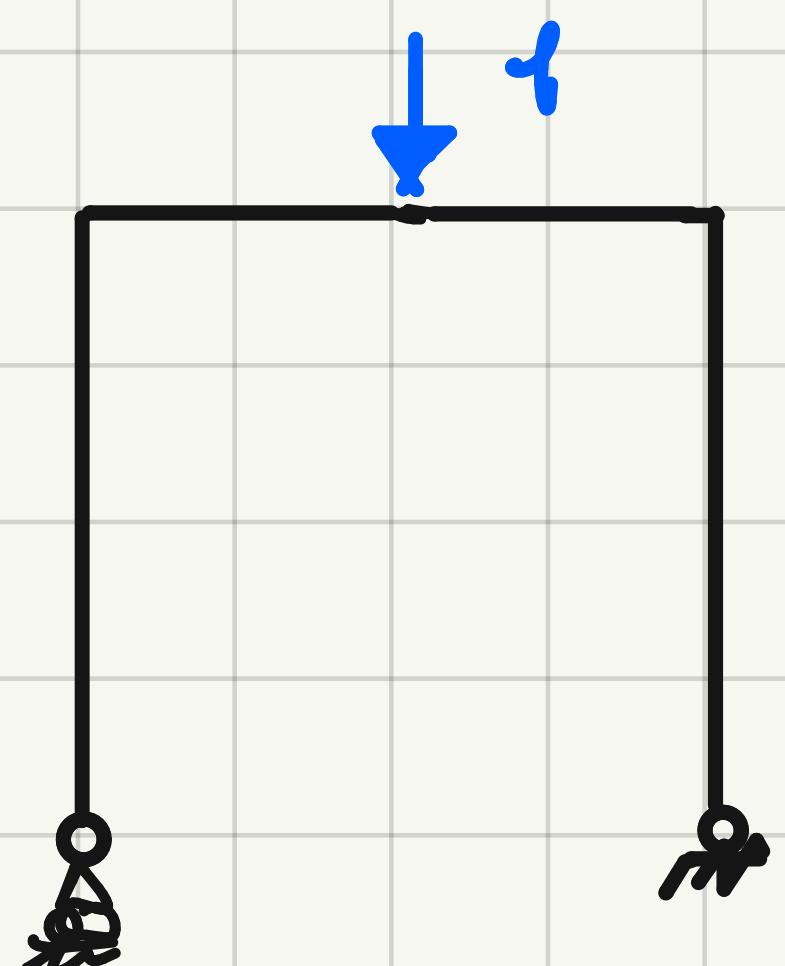
considerando cosi' una trave di Euler-Bernoulli e meccanicamente inestensibile.

Dai dati a noi moh posso mosso dedurne che il punto P e' soggetto ad uno spostamento verticale. Per affrontare lo studio di tale problema conviene adoperare il teorema dei lavori virtuali.

In particolare definiamo il sistema effettivo, che sara' il nostro sistema congruente e un sistema virtuale, che sara' il nostro sistema equilibrato

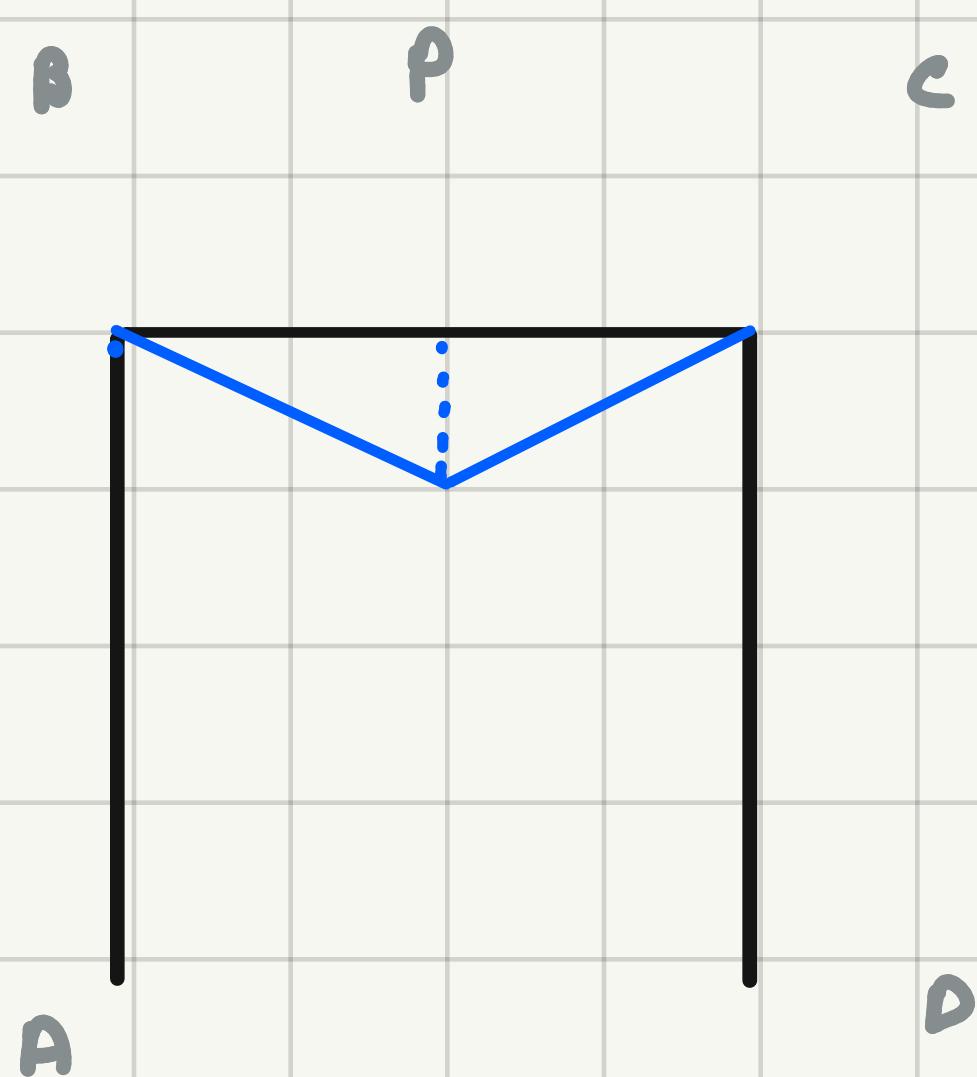


sistema effettivo.



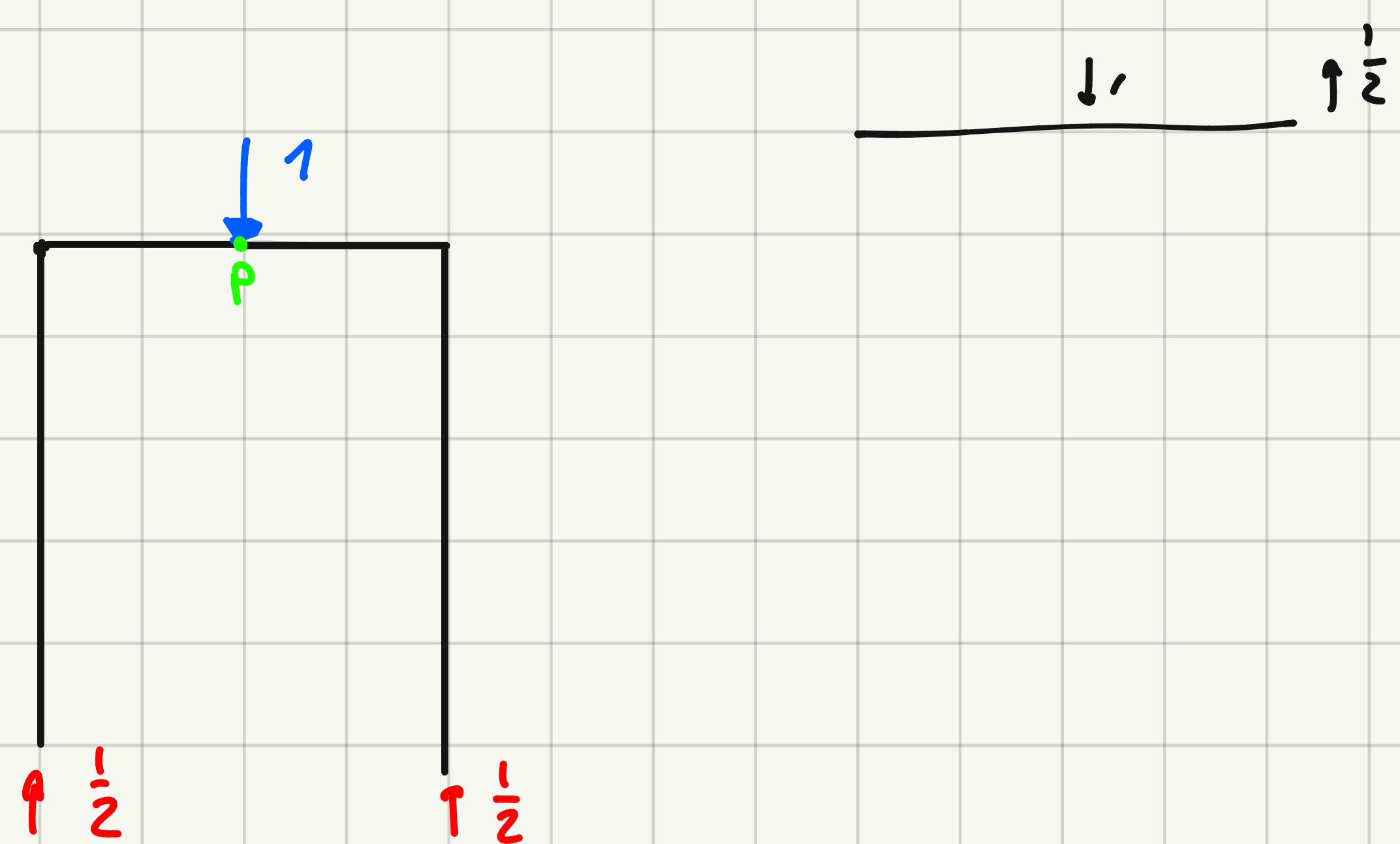
Sistema virtuale.

Del sistema virtuale cerchiamo di corretturarlo, andando a cercare i diagrammi delle CdS.



dove gli andamenti del momento flettente sono delle funzioni lineari che possiamo ricavare andando ad applicare le equazioni differenziali indefinite di equilibrio.

Dal diagramma di struttura libera emerge che:



procediamo con il calcolo delle espressioni analitiche del momento flettente, andando ad integrare le equazioni differenziali indefinite di

| | AB | BP | PC | CD |
|---|----|---------------|-------------------------------|----|
| M | 0 | $\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}x + \frac{l}{2}$ | 0 |

di equilibrio.

A questo ci spostiamo allo studio del sistema effettivo cercando di risolvere all' espressione del momento flettente.

$$M^{\text{eff}} = c_1 z^2 + c_2 z + c_3.$$

che assume la forma di una parabola; noto che.

$$h(0) = -\frac{1}{18} q l^2$$

$$h(l) = -\frac{1}{18} q l^2.$$

$$h\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{72} q l^2$$

imponiamo le condizioni al contorno e otteniamo:

$$h(0) = -\frac{1}{18} q l^2 \rightarrow c_3 = -\frac{1}{18} q l^2.$$

$$h(l) = -\frac{1}{18} q l^2 \rightarrow c_1 l^2 + c_2 l - \frac{1}{18} q l^2 = -\frac{1}{18} q l^2 \\ c_1 l^2 + c_2 l = 0$$

$$h\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{72} q l^2$$

$$c_1 \frac{l^2}{4} + c_2 \frac{l}{2} - \frac{1}{18} q l^2 = \frac{5}{72} q l^2.$$

$$\frac{1}{4} c_1 l^2 + \frac{1}{2} c_2 l = \frac{1}{8} q l^2.$$

Mettendo a sistema le ultime due equazioni otteniamo i valori di c_1 e c_2 .

$$\begin{cases} l^2 c_1 + l c_2 = 0 \\ \frac{1}{4} l^2 c_1 + \frac{1}{2} l c_2 = \frac{1}{8} q l^2 \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} l^2 & l \\ \frac{1}{4} l^2 & \frac{1}{2} l \end{pmatrix} = \frac{1}{2} l^3 - \frac{1}{4} l^3 = \frac{1}{4} l^3.$$

$$c_1 = \frac{4}{l^3} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & l \\ \frac{1}{8} q l^2 & \frac{1}{2} l \end{pmatrix} = \frac{1}{l^3} \cdot -\frac{1}{8} q l^2 = -\frac{q}{2}.$$

$$c_2 = \frac{4}{l^3} \det \begin{pmatrix} l^2 & 0 \\ \frac{1}{4} l^2 & \frac{1}{8} q l^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} q l.$$

in definitiva otteniamo:

$$M(z)^\text{eff} = -\frac{qz^2}{2} + \frac{ql}{2}z - \frac{1}{18}ql^2. \quad \text{per il tratto BC.}$$

adoperando per questo riguardo il momento flettente nei tratti verticali:

| AB | BC | CD |
|------------------------|---|--|
| $M_{(8)}^{\text{eff}}$ | $-\frac{1}{12}ql^2z + \frac{1}{36}ql^2$ | $-\frac{qz^2}{2} + \frac{ql}{2}z - \frac{1}{18}ql^2$ |
| | | $\frac{1}{12}ql^2z - \frac{1}{18}ql^2$ |

Dunque col perpendendo il teorema dei lavori virtuali:

$$\delta_U^e = \nu_p^{\text{eff}} \cdot 1.$$

$$\delta_U^e = \int_{\text{Stretto}} M_V \chi^{\text{eff}}.$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{z}{\frac{l}{2}} \right) \left(-\frac{1}{2}qz^2 + \frac{1}{2}qlz - \frac{1}{18}ql^2 \right) dz + \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l \left(-\frac{1}{2}z + \frac{l}{2} \right) \left(-\frac{1}{2}qz^2 + \frac{1}{2}qlz - \frac{1}{18}ql^2 \right) dz.$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \left(-\frac{1}{4}qz^3 + \frac{1}{4}qlz^2 - \frac{1}{36}ql^2z \right) dz + \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l \left(\frac{1}{4}qz^3 - \frac{1}{4}qlz^2 + \frac{1}{26}ql^2z - \frac{1}{4}ql^2z + \frac{1}{4}ql^2z - \frac{1}{36}ql^3z \right) dz.$$

$$= \frac{1}{EI} \left[-\frac{1}{256}ql^4 + \frac{1}{96}ql^4 - \frac{1}{288}ql^4 \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{16}qz^4 - \frac{1}{12}qlz^3 + \frac{1}{72}ql^2z^2 - \frac{1}{12}ql^2z^2 + \frac{1}{8}ql^2z^2 - \frac{1}{36}ql^3z \right]$$

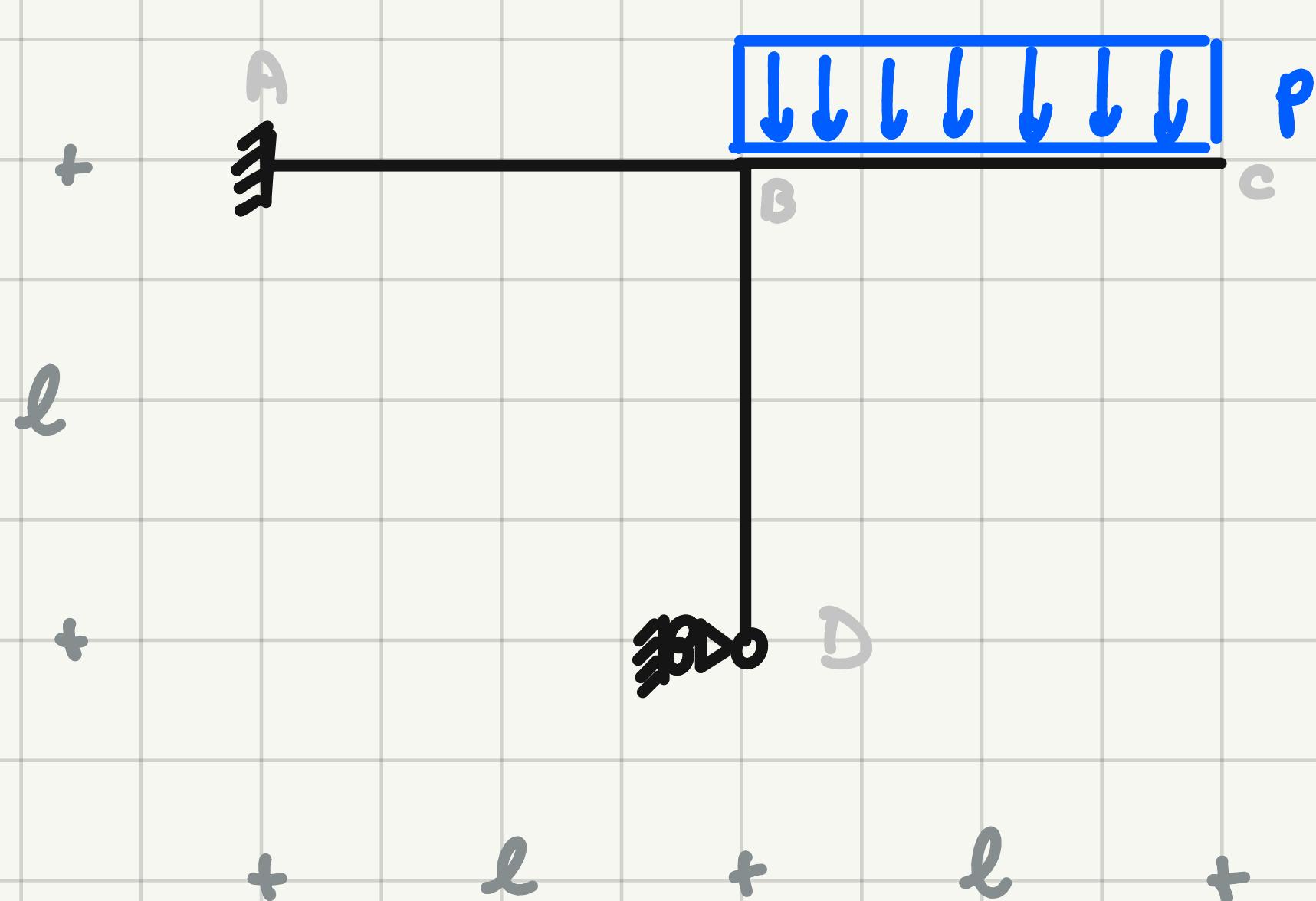
$$= \frac{7}{2304} \frac{ql^4}{EI} + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{16}ql^4 - \frac{1}{12}ql^4 + \frac{1}{72}ql^2 - \frac{1}{12}ql^4 + \frac{1}{8}ql^4 - \frac{1}{36}ql^4 - \frac{1}{256}ql^4 + \frac{1}{96}ql^4 - \frac{1}{288}ql^4 + \frac{1}{72}ql^4 \right]$$

$$= \frac{7}{2304} \frac{ql^4}{EI} + \frac{7}{2304} \frac{ql^4}{EI} = \frac{7}{1152} \frac{ql^4}{EI}$$

$$\nu_p^{\text{eff}} = \frac{7}{1152} \frac{ql^4}{EI}$$

ESECUZIONE 7

METODO DUE FORZE.



Hp

- $\epsilon_A \rightarrow +\infty$
- $\gamma \rightarrow 0 \quad G\alpha_t \rightarrow +\infty$
- $EI = \text{cost.}$

Per prima cosa facciamo un'analisi preliminare della struttura che stiamo analizzando, in particolare osserviamo che se vediamo il corpo come un corpo rigido, possiamo ricordare la relazione:

$$m - m = l - i$$

dove

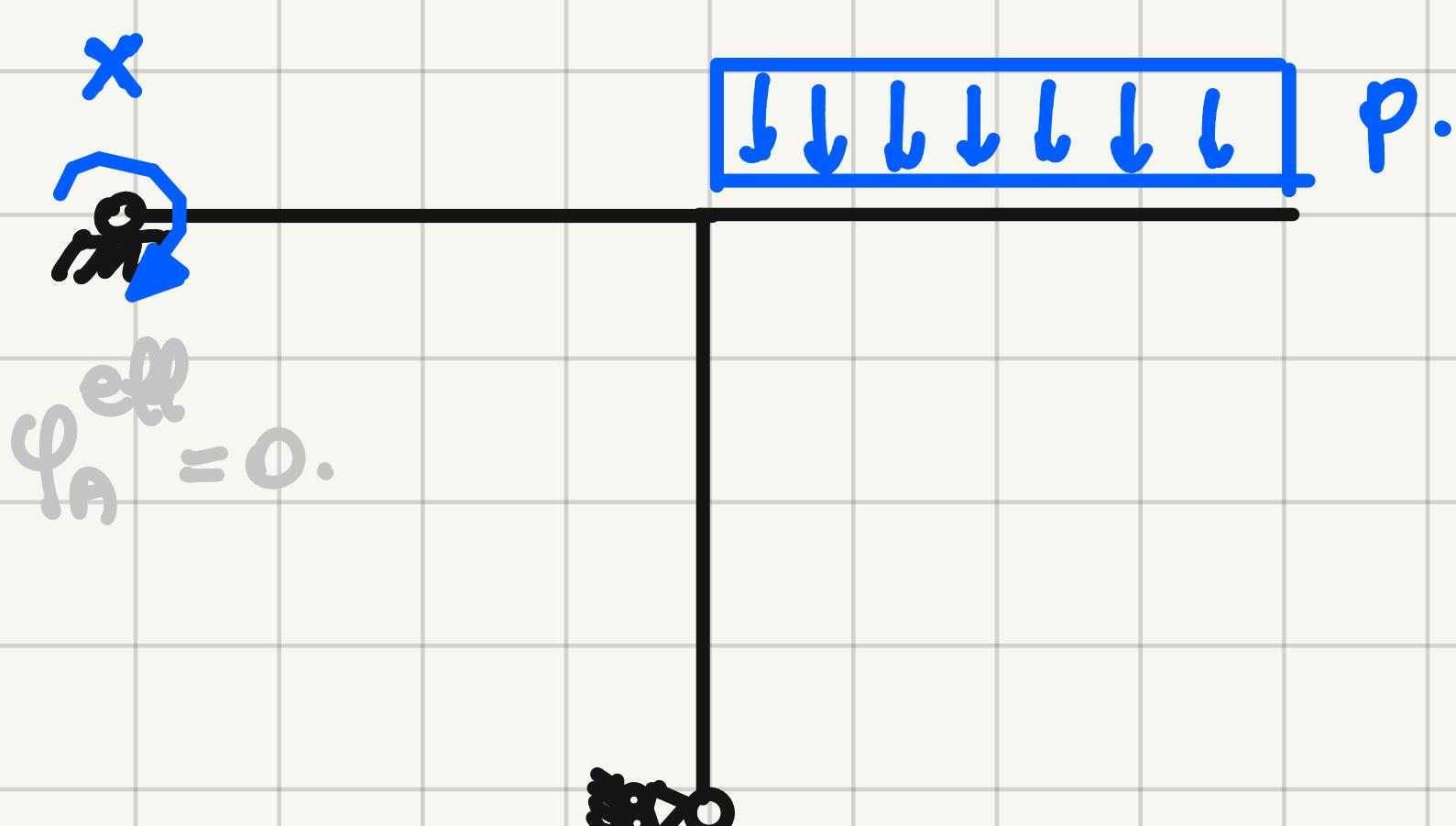
$$m = 3$$

$$m = 4$$

mentre per quanto riguarda la libertà, la struttura non ammette cinematismi. Pertanto la struttura presenta grado di iperstaticità pari a

$$i = 1.$$

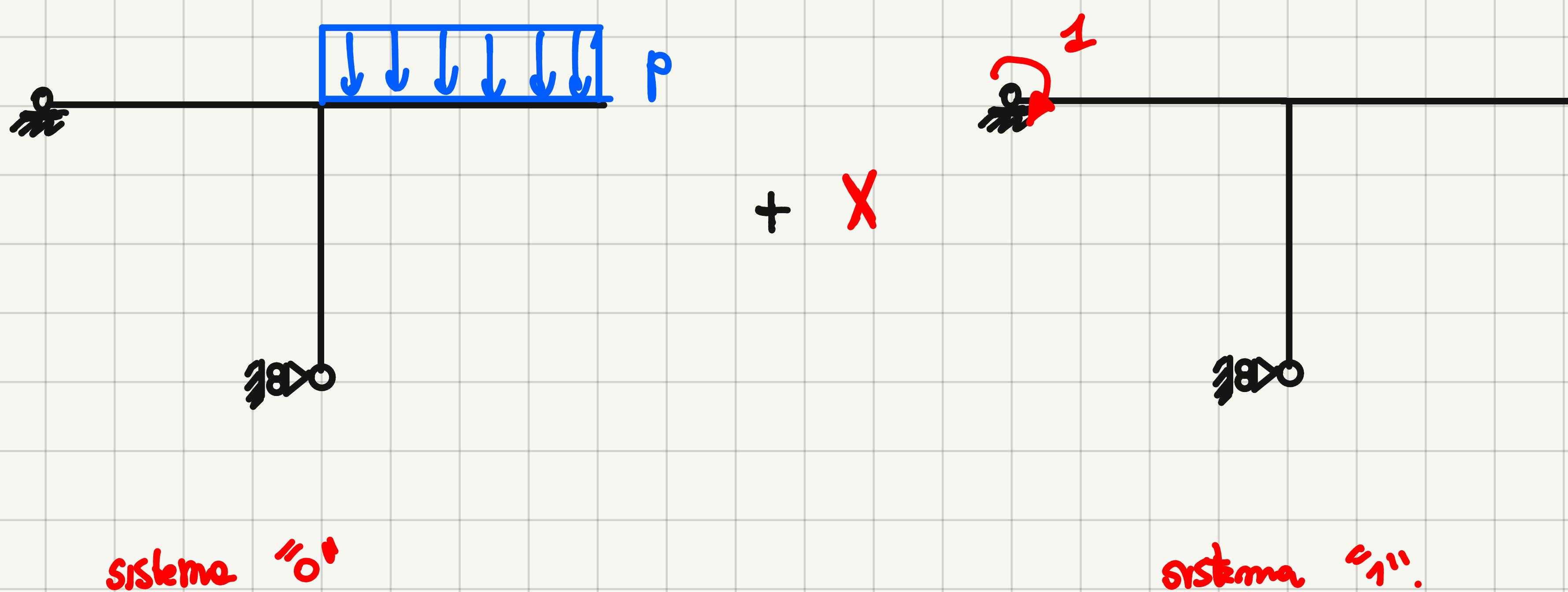
Adoperando il metodo delle forze definiscono il sistema effettivo in questa maniera:



sistema effettivo

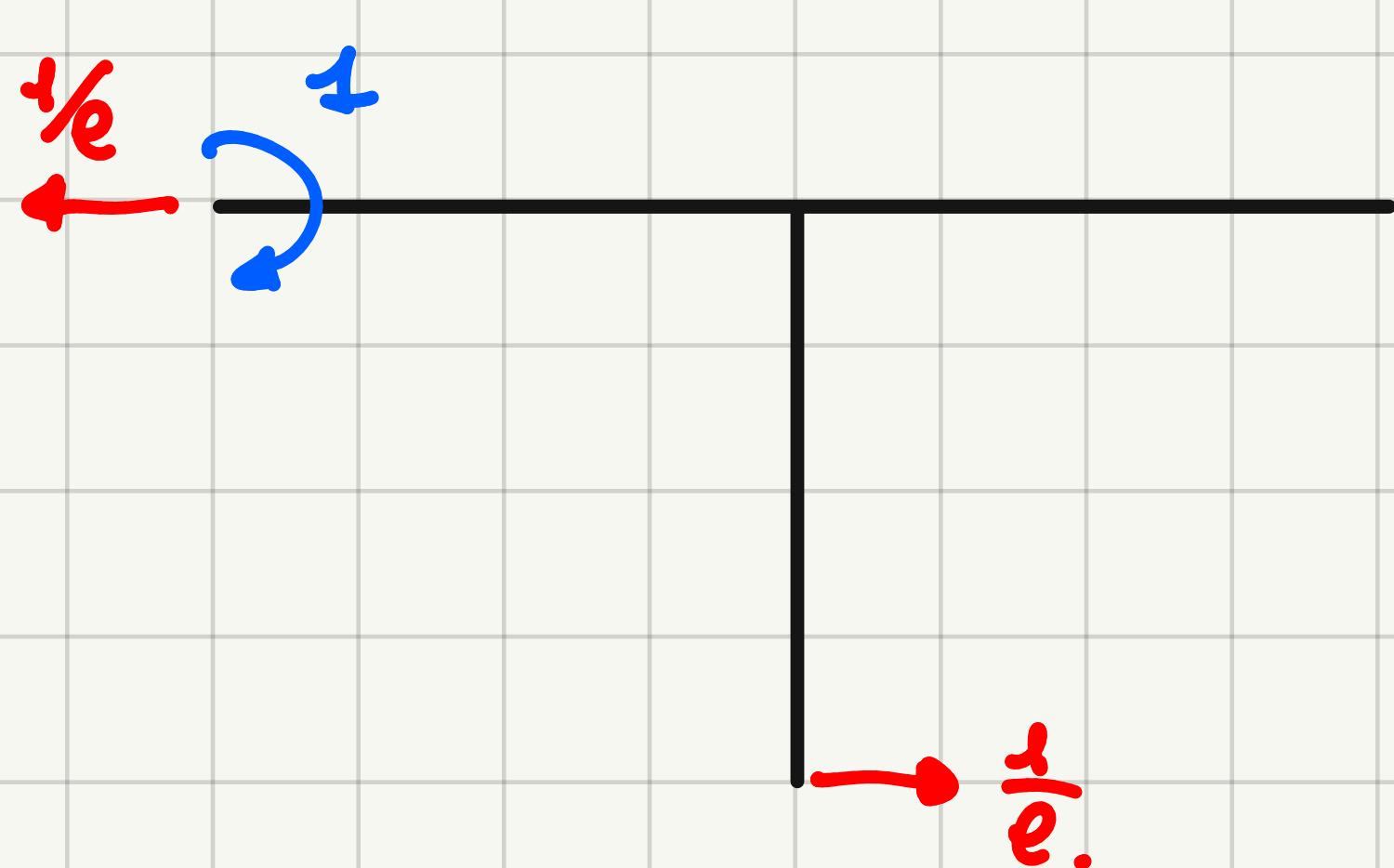
Nel quale anch'io suppongo un vincolo (lo scelto non è univoco) e introducendo un'incognita iperstatica associata ad un'equazione di compatibilità cinematica che serve per ripristinare la congruenza.

In virtù della validità del principio della sovrapposizione degli effetti, tale sistema lo possiamo vedere come la sovrapposizione di due sistemi, il sistema "0" e il sistema "1".

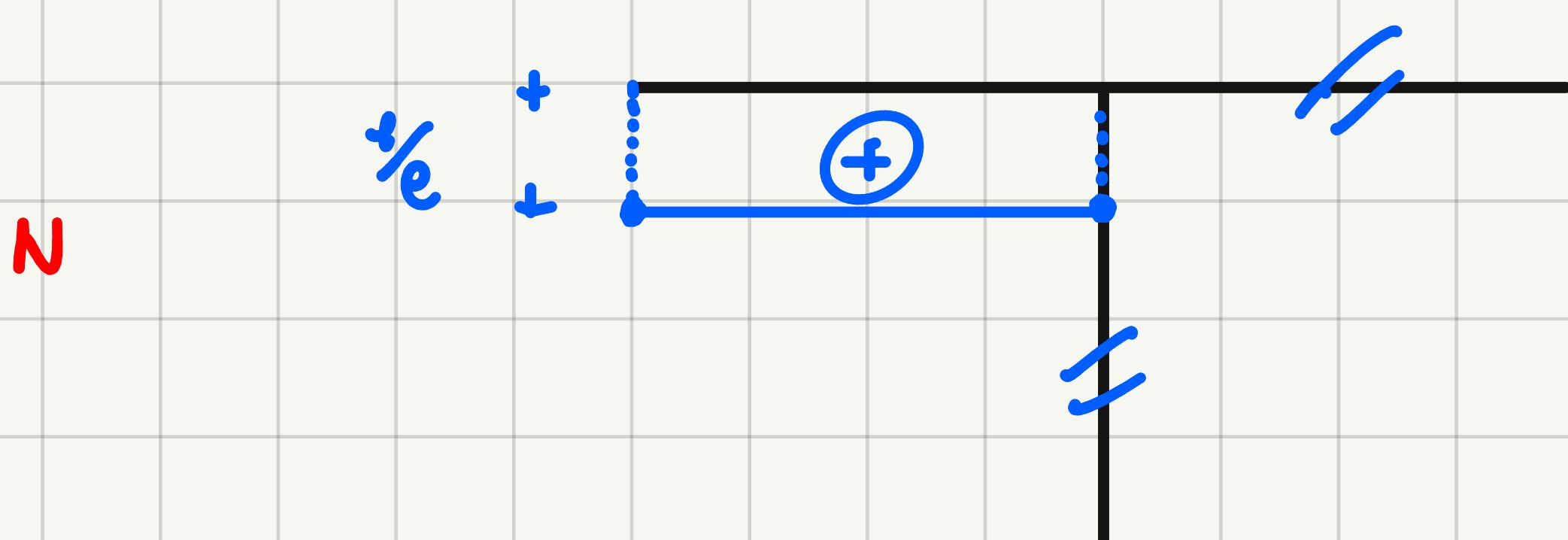


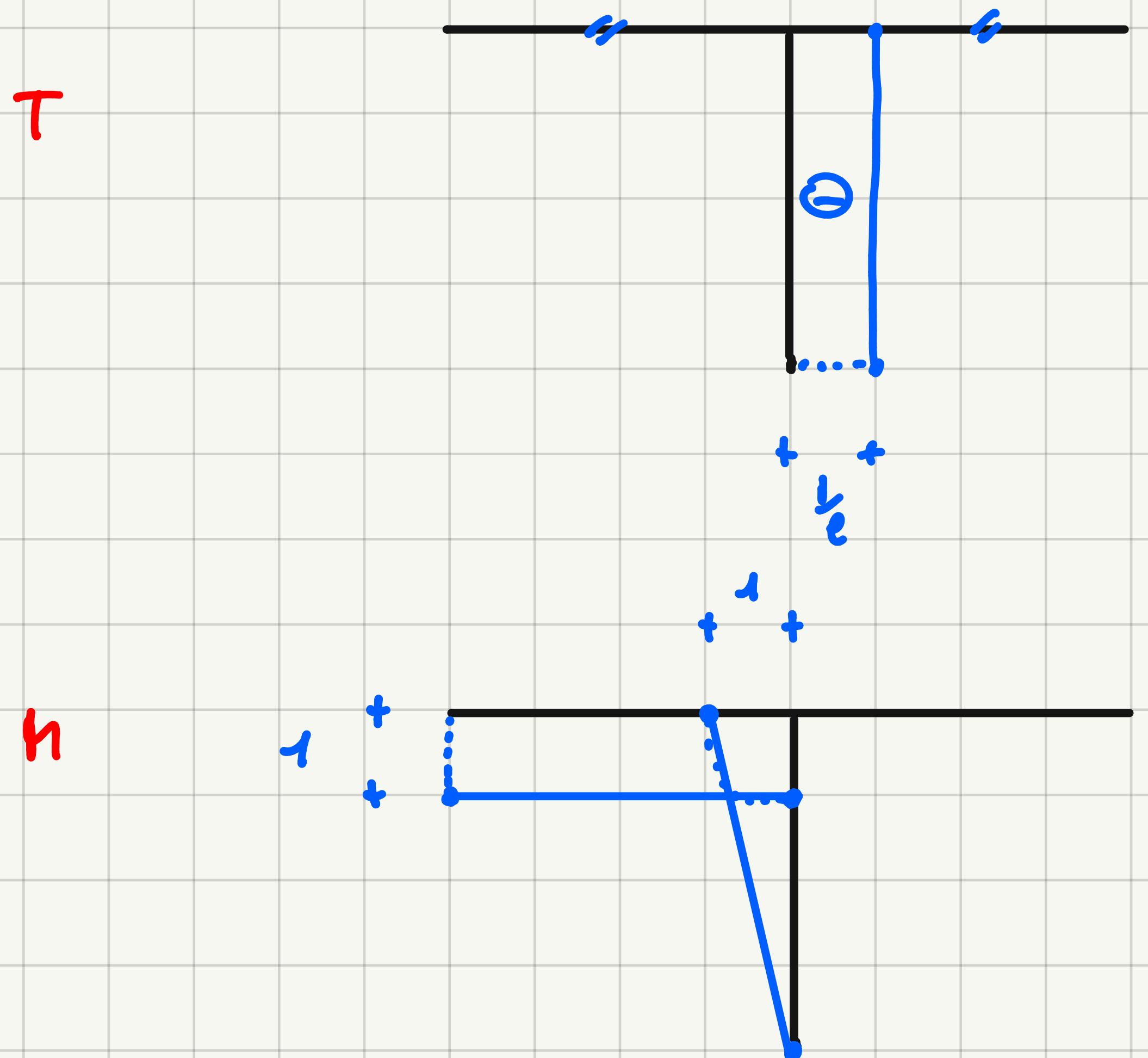
Procediamo con lo studio del sistema "1", esso è il master sistema virtuale il quale è equilibrato, mentre il sistema "0" è il master sistema congiunte.

Traçiamo il diagramma di struttura libera del sistema "1".



e i conseguenti diagrammi delle caratteristiche dello zeneratore solenne del tipo:

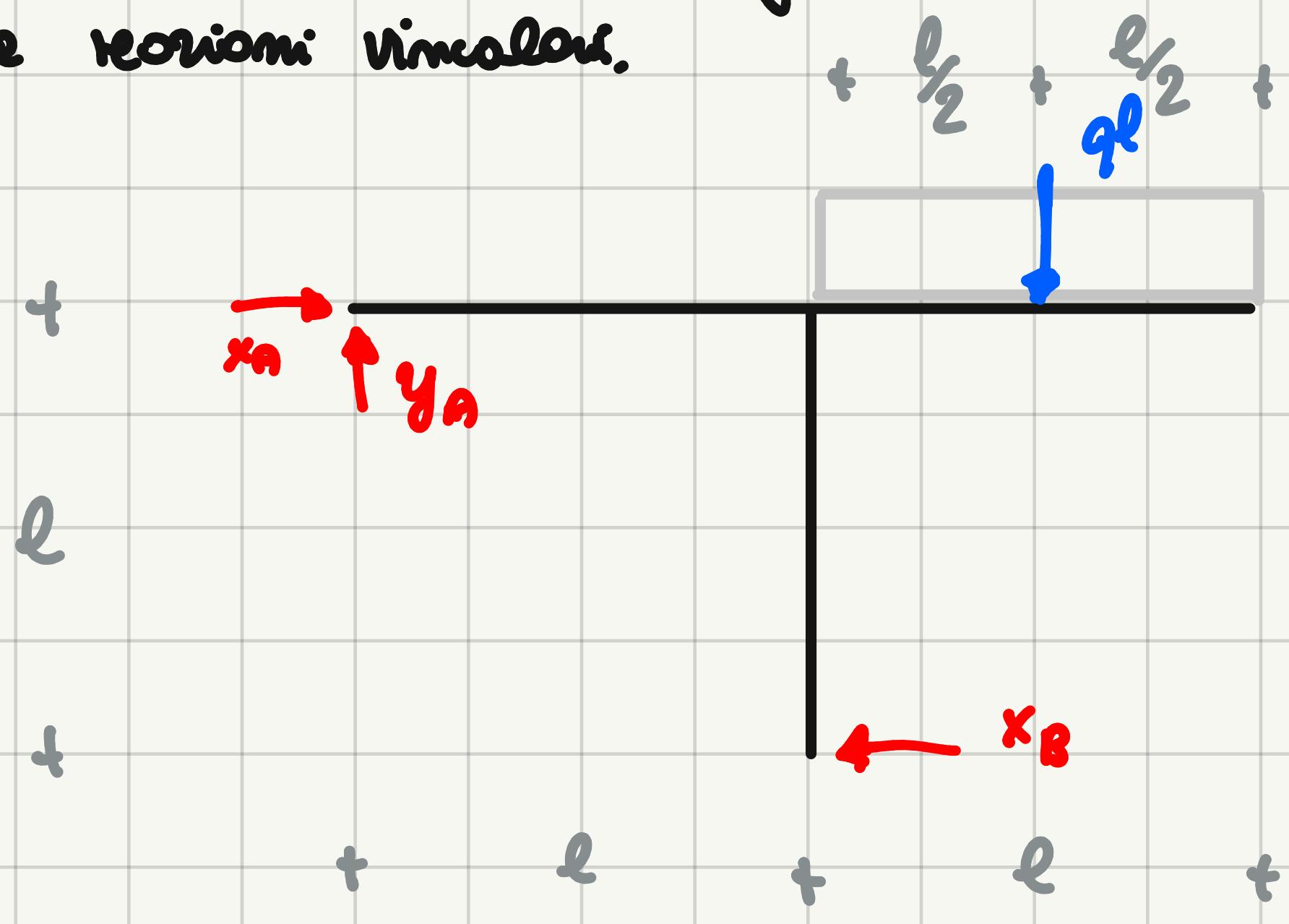




e gli andamenti delle caratteristiche sono descritti dalle seguenti espressioni analitiche.

| | AB | BC | BD. |
|----------|---------------|-----------|---------------------|
| N | $\frac{x}{l}$ | 0 | 0 |
| T | 0 | 0 | $-\frac{1}{e}$ |
| h | $\frac{x}{l}$ | 0 | $-\frac{1}{e}x + l$ |

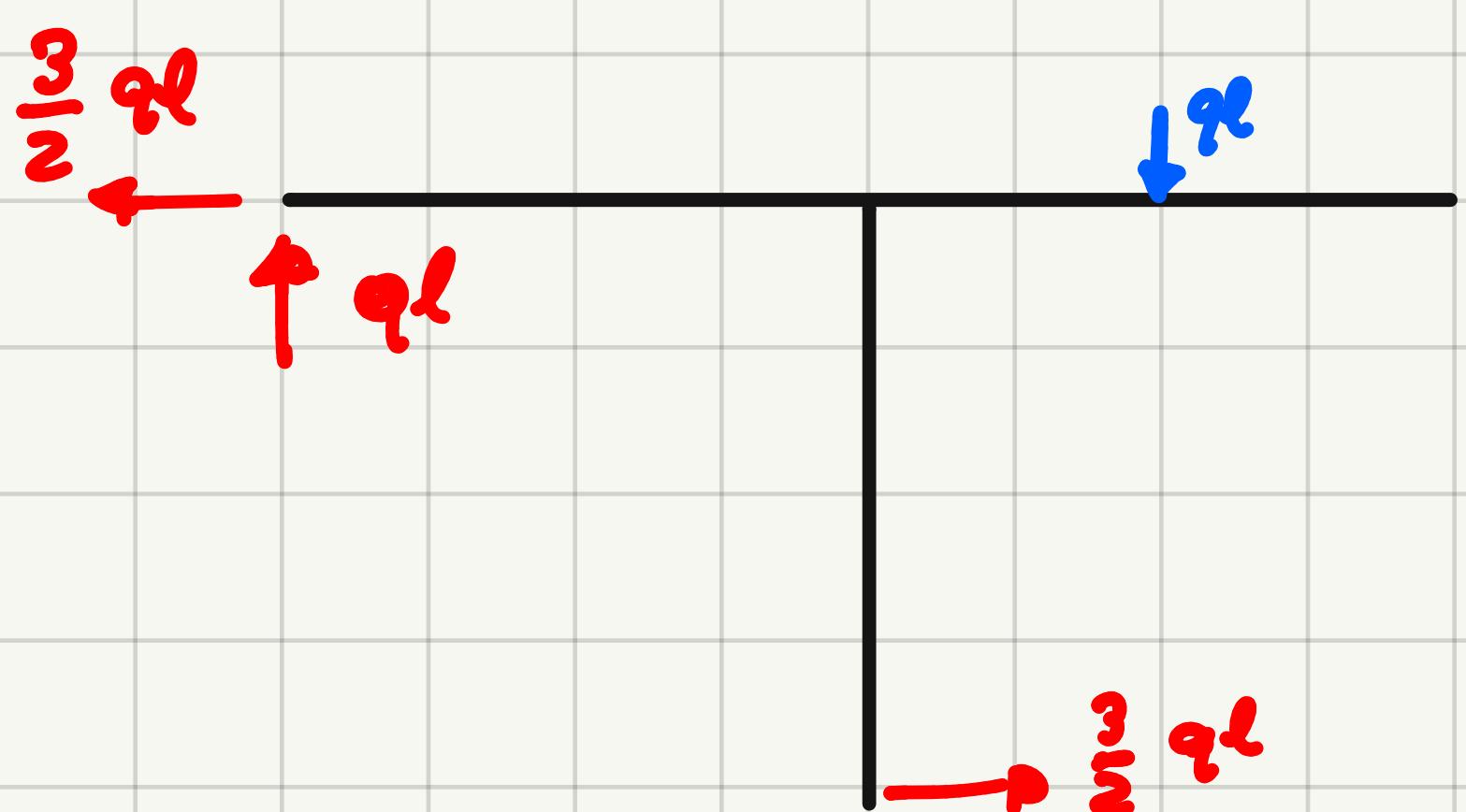
Adezzo procediamo con la risoluzione del sistema "0", per prima cosa andiamo a trovare il diagramma di struttura libera. e andiamo a calcolare le reazioni vincolari.



Imponendo l'equilibrio dinamico

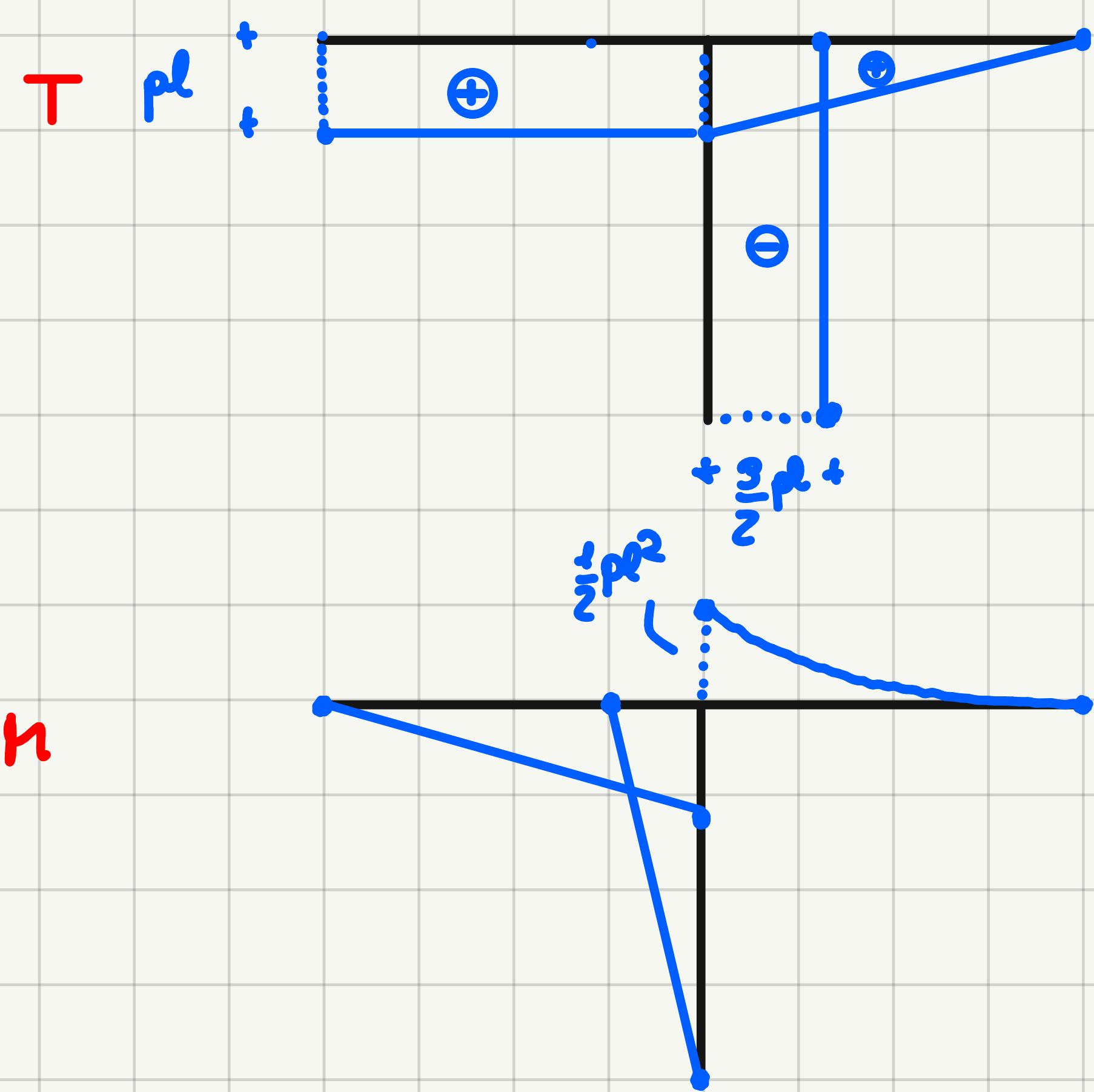
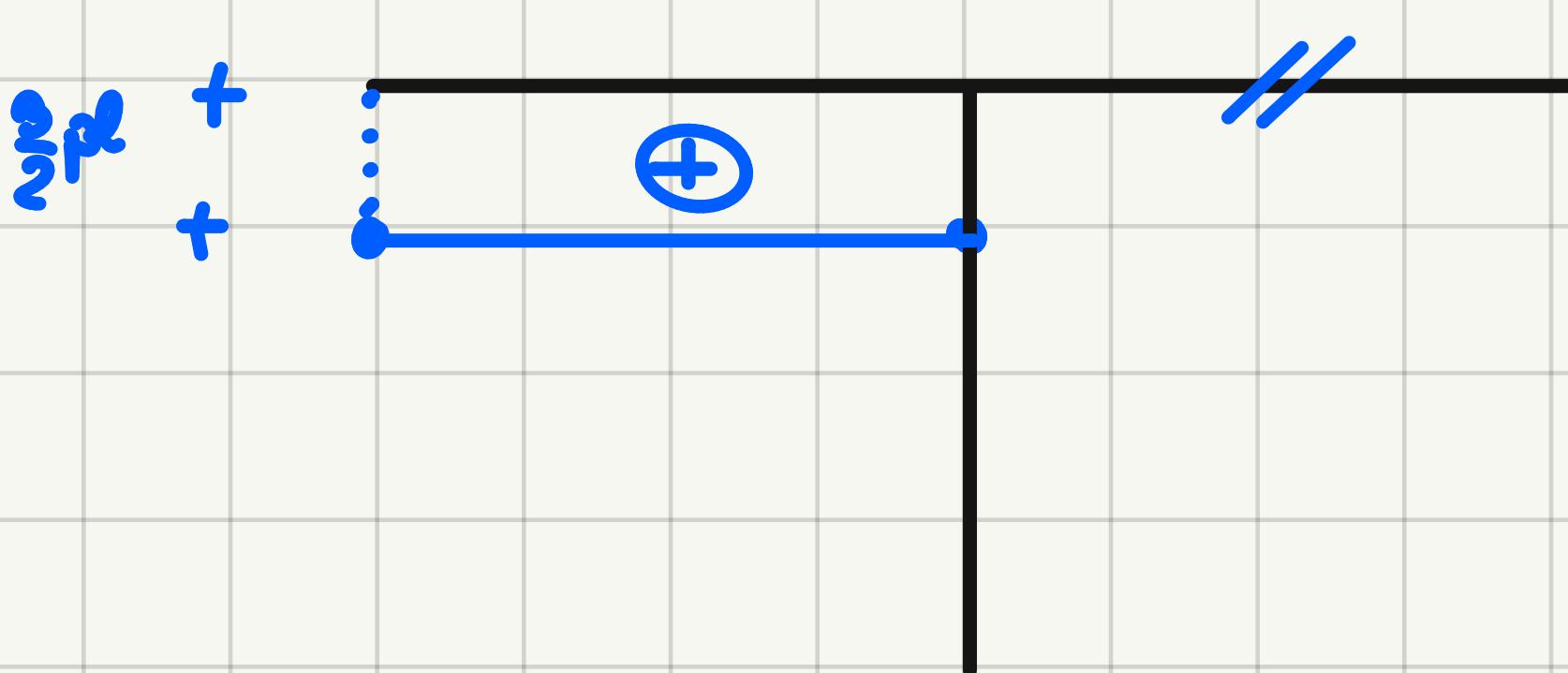
$$\left\{ \begin{array}{l} x_A = x_B \longrightarrow x_A = -\frac{3}{2}ql \\ y_A = ql \\ -\frac{3}{2}ql^2 - lx_B = 0 \longrightarrow x_B = -\frac{3}{2}ql \end{array} \right.$$

ottenendo:



dove i rispettivi diagrammi delle coordinate delle sollecitazioni. Sono:

N



M

I cui andamenti li andiamo a collezionare nella seguente tabella:

| | AB | BC | BD |
|----------|-----------------|---|--------------------------------------|
| N | $\frac{3}{2}pl$ | 0 | 0 |
| T | pl | $-p\beta + pl$ | $-\frac{3}{2}pl^2$ |
| M | M_3 | $-\frac{1}{3}p\beta^2 + pl^2 - \frac{1}{2}pl^3$ | $-\frac{3}{2}pl^3 + \frac{3}{2}pl^2$ |

A questo punto andiamo a sfruttare il **PLV** andiamo a calcolare il valore dell'incognita incostante, calcoliamo il lavoro virtuale esterno e successivamente il lavoro virtuale interno:

$$\delta_V^e = 0 \cdot \varphi_A^{\text{eff}}$$

$$\begin{aligned} \delta_V^i &= \int_{\text{Strutt}} N^V \varepsilon^e + T^V \gamma^e + M^V \chi^e \\ &= \int_{\text{Strutt}} M^V \chi^e \end{aligned}$$

dove in virtù delle validità del principio della sovrapposizione degli effetti.

$$\chi^e = \chi^0 + X \chi^1$$

ottenendo va l'integrale estero alla struttura del tipo:

$$= \int_{\text{Strutt}} M_1 \frac{M_0}{EI} + X \int_{\text{Strutt}} \frac{M_1^2}{EI}$$

per quanto andando a specificare nelle parti di struttura nel quale si può calcolare:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{EI} \int_0^l p l z \, dz + \frac{1}{EI} \int_0^l \left(-\frac{1}{E} z + 1 \right) \left(-\frac{3}{2} p l z + \frac{3}{2} p l^2 \right) \, dz + X \frac{1}{EI} \left[\int_0^l dz + \int_0^l \left(-\frac{1}{E} z + 1 \right)^2 dz \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{p l^5}{EI} + \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{3}{2} p z^2 - \frac{3}{2} p l z - \frac{3}{2} p l z + \frac{3}{2} p l^2 \right) dz + X \frac{1}{EI} \left[l + \int_0^l \left(\frac{z^2}{E^2} + 1 - \frac{z}{E} z \right) dz \right] = \\
 &\approx \frac{1}{2} \frac{p l^5}{EI} + \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} p l^3 - \frac{3}{2} p l^3 + \frac{3}{2} p l^3 \right] + X \frac{1}{EI} \left[l + \frac{1}{3} l + l - l \right] \\
 &= \underline{\frac{p l^5}{EI}} + X \underline{\frac{4}{3} \frac{l}{EI}}
 \end{aligned}$$

Ora del principio dei lavori virtuali:

$$L_V^e = L_V^i$$

$$0 = \underline{\frac{p l^5}{EI}} + X \underline{\frac{4}{3} \frac{l}{EI}}$$

Ottieniamo:

$$X = -\frac{3}{4} \frac{p l^2}{EI}$$

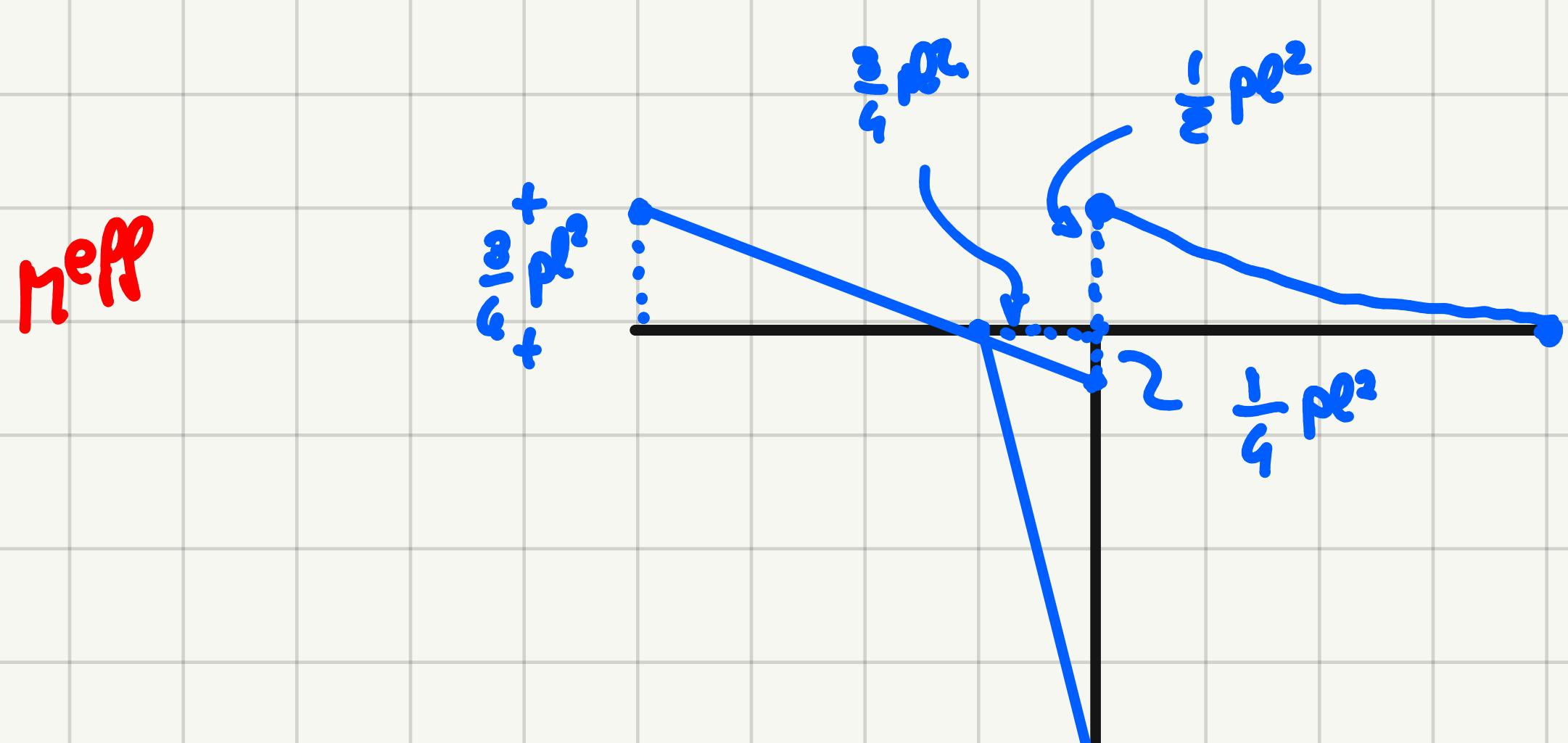
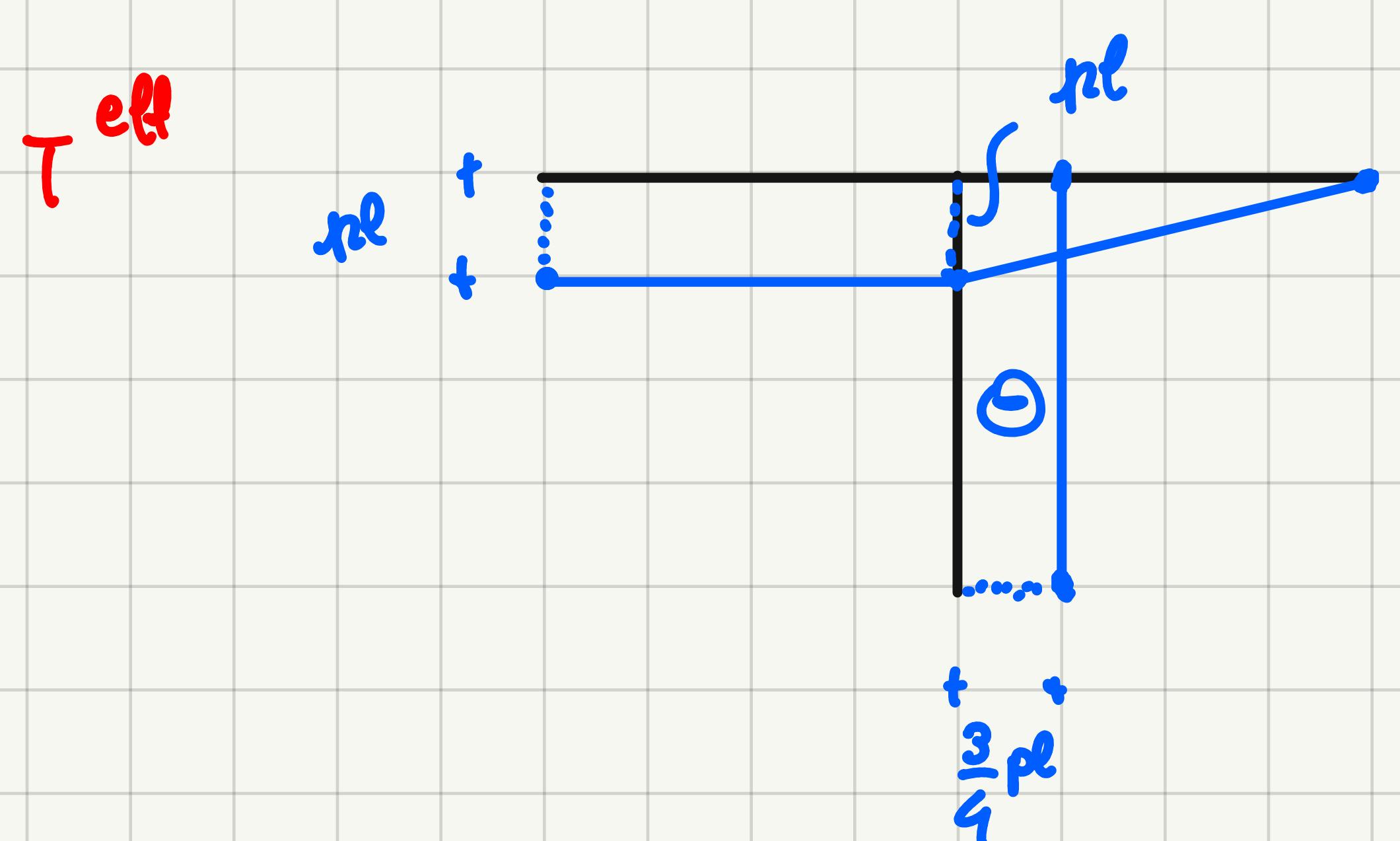
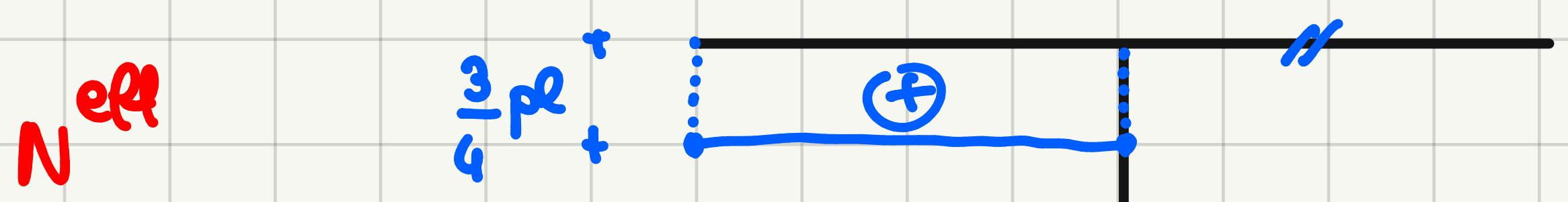
Adoperando il principio della sovrapposizione degli effetti, ritroviamo

$$N^{eff} = N_0 + X N_1$$

$$T^{eff} = T_0 + X T_1$$

$$M^{eff} = M_0 + X M_1$$

Ottemendo così i seguenti risultati.



Esercitazione 8

CIRCONFERENZA DI HOHR

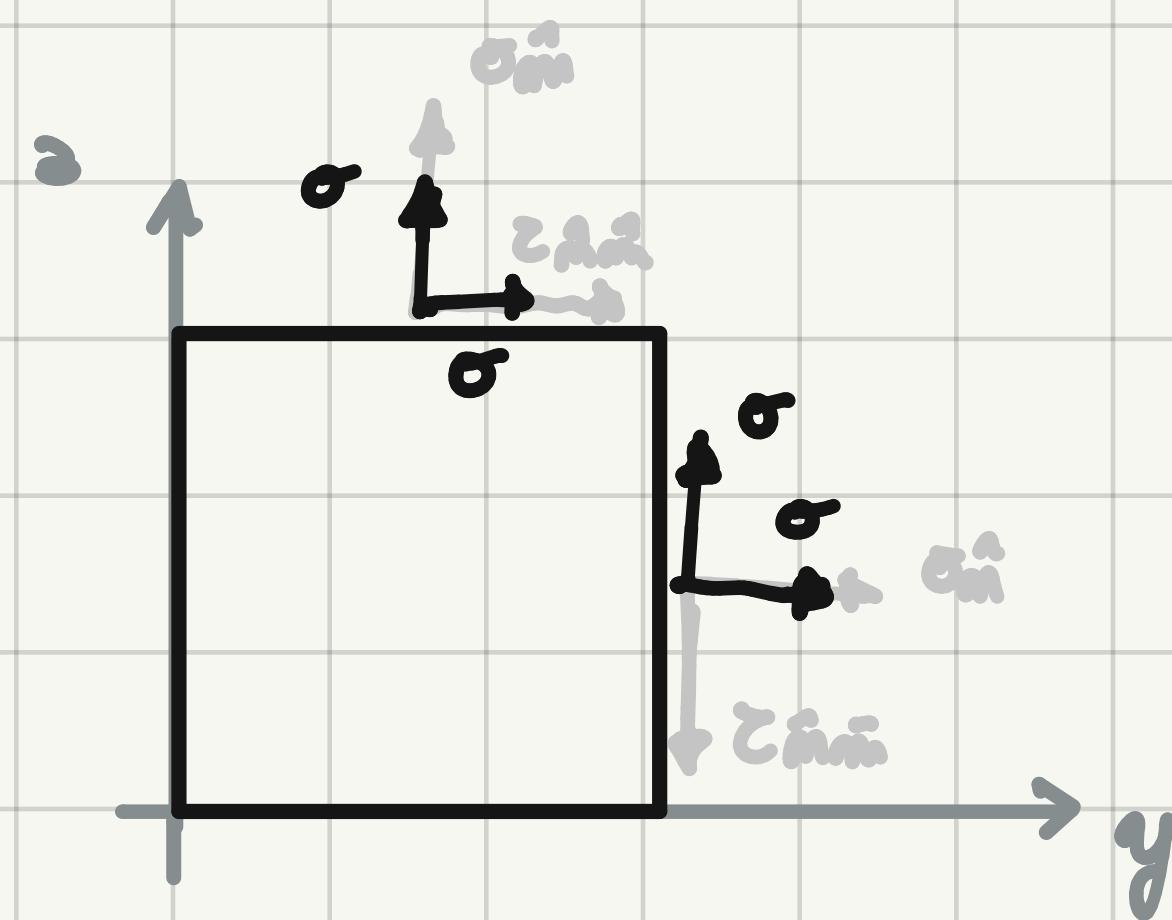
Noto lo stato tensionale descritto dal tensore dello sforzo:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \sigma \\ 0 & \sigma & \sigma \end{bmatrix}$$

il nostro obiettivo è andare a determinare le tensioni e direzioni principali attraverso la costruzione di Hohr.

Possiamo osservare che tale tensore ha $\det(\underline{\sigma}) = 0 = I_3$; tale condizione è necessaria e sufficiente per dichiarare che si tratta di uno stato tensionale puro, ovvero il vettore delle tensioni è contenuto nel piano $\hat{y}\hat{z}$.

Consideriamo un cubetto infinitesimo elementare:



Consideriamo due generici angoli:

$$\vartheta = 0 \quad \text{e} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

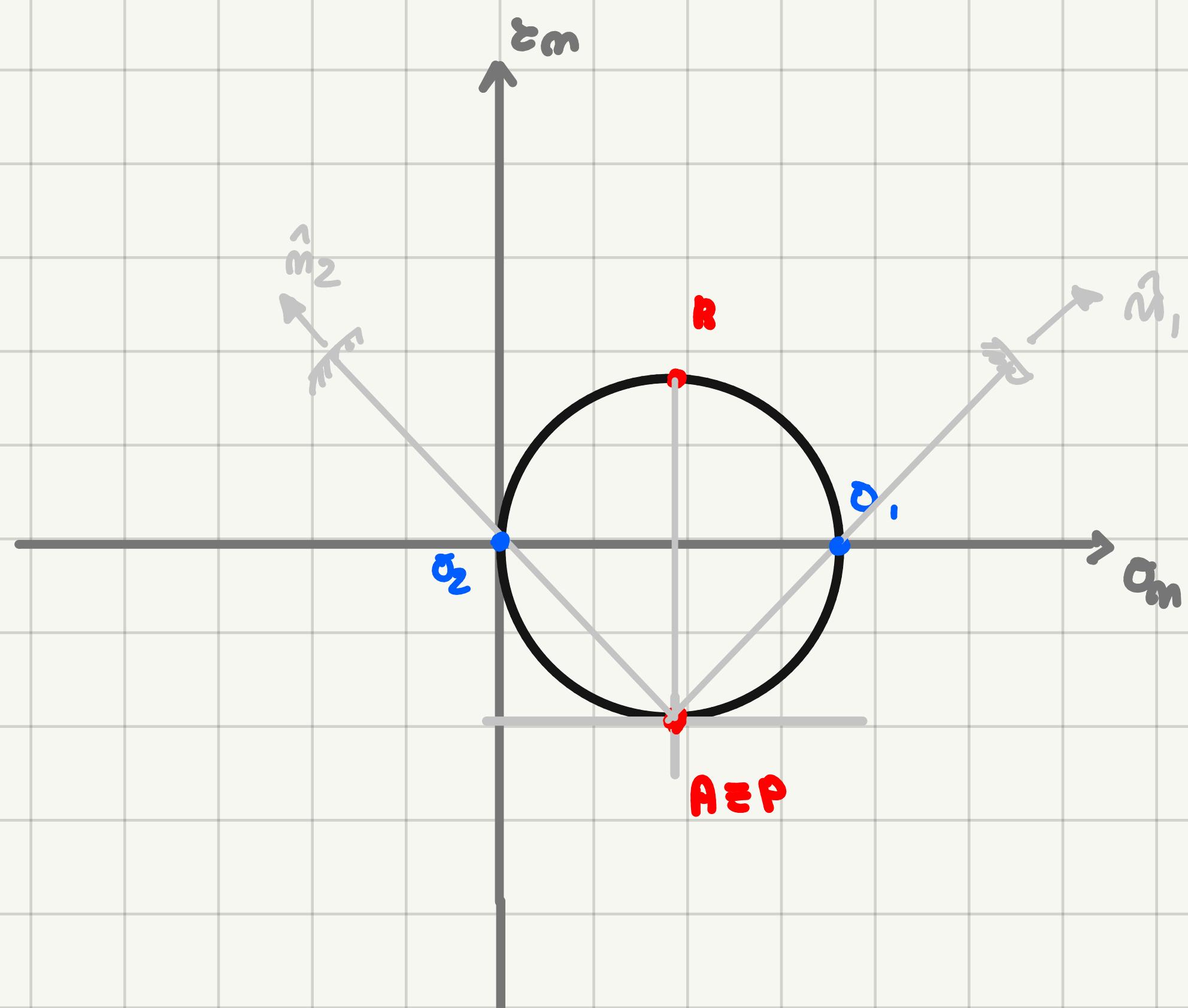
per $\vartheta=0$ individuiamo il seguente stato tensionale.

$$\vartheta = 0 \quad A : \quad \begin{cases} \sigma_{yy} = \sigma \\ \sigma_{zz} = -\sigma \end{cases}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad R : \quad \begin{cases} \sigma_{yy} = \sigma \\ \sigma_{zz} = \sigma \end{cases}$$

Considero a questo punto il piano di Mohr e trovo la circonferenza di Mohr procedendo come segue :

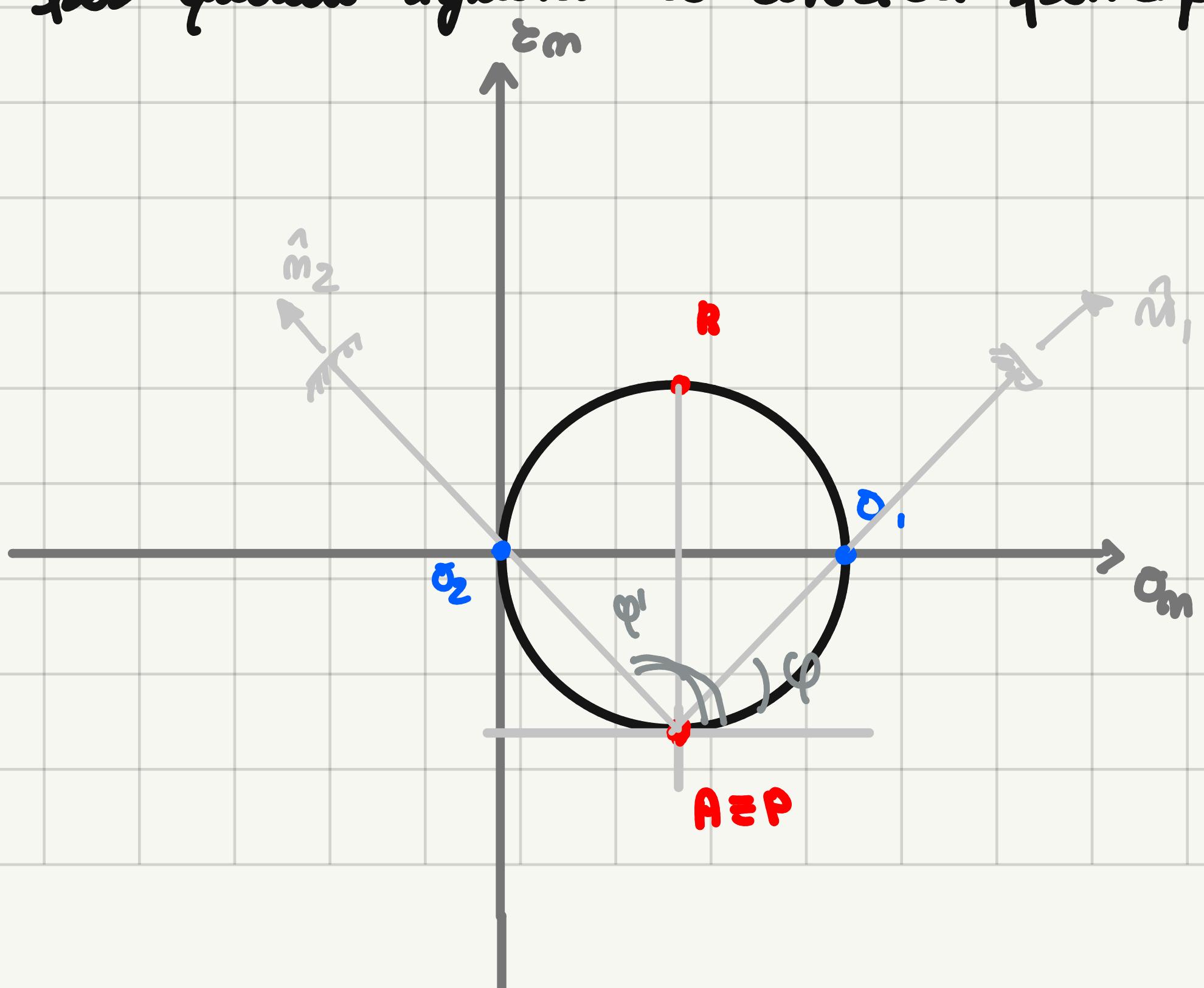
1. Rappresento A e B sul piano di Mohr.
2. Trocio lo retto passante per A, B, essendo comunque opposti, passa perfettamente.
3. Trocio le rette normali e individuo il polo di rappresentazione di Mohr.
4. Trocio la circonferenza di Mohr, passante per i tre punti.



Individuando così come tensioni principali :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 20 \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = 0 \end{array} \right.$$

mentre per quanto riguarda le direzioni principali otteniamo :



Dallo rappresentazione grafico prossimo andare a introdurre gli angoli φ e φ' che andiamo a volutore come segue:

Ricordiamo che il versore normale associato alla prima direzione principale

$$[\hat{m}_1] = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow [\hat{m}_1] = \begin{Bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{Bmatrix}.$$

ricordando inoltre la condizione di orthonormalità:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$$

imponiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\ \tan(\varphi) = \frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 1 \end{array} \right.$$

dallo terzo equazione ottieniamo che:

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} = 1 \Rightarrow \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

pertanto $\beta_1 = \gamma_1$ combinato da secondo ottieniamo

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ R_1 = \sqrt{2} \\ \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

Per quanto riguarda invece φ' , esso può essere visto come:

$$\varphi' = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

il cui valore della tangente, corrispondente al rapporto tra

$$\frac{\beta_2}{\gamma_2} = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = -1$$

pertanto ottieniamo:

$$\beta_2 = -\gamma_2$$

duunque imponendo il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 = 0 \\ \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \\ \frac{\beta_2}{\gamma_2} = -1 \end{array} \right.$$

Dal quale emerge che :

$$[\hat{m}_2] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$$

infine per quanto riguardo \hat{m}_2 esso è ortogonale al piano sul quale sono contenuti \hat{m}_1 e \hat{m}_3 .

Pertanto ottieniamo :

$$\{\hat{m}_3\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

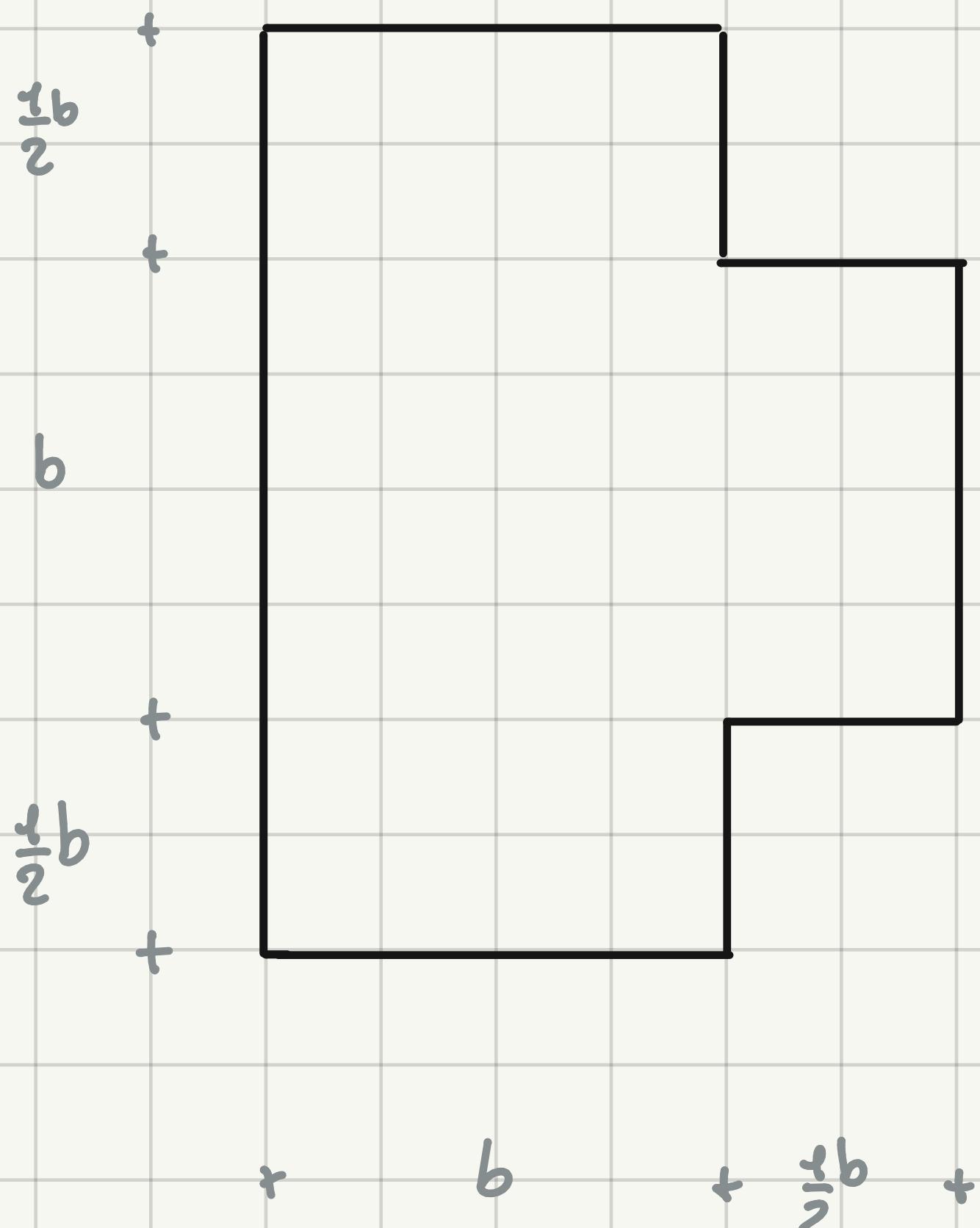
pertanto otteniamo le seguenti direzioni principali.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{m}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{k} \\ \hat{m}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \hat{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{k} \\ \hat{m}_3 = \hat{i} \end{array} \right.$$

ESERCITAZIONE 9

Geometria della sezione.

SEZIONE 2

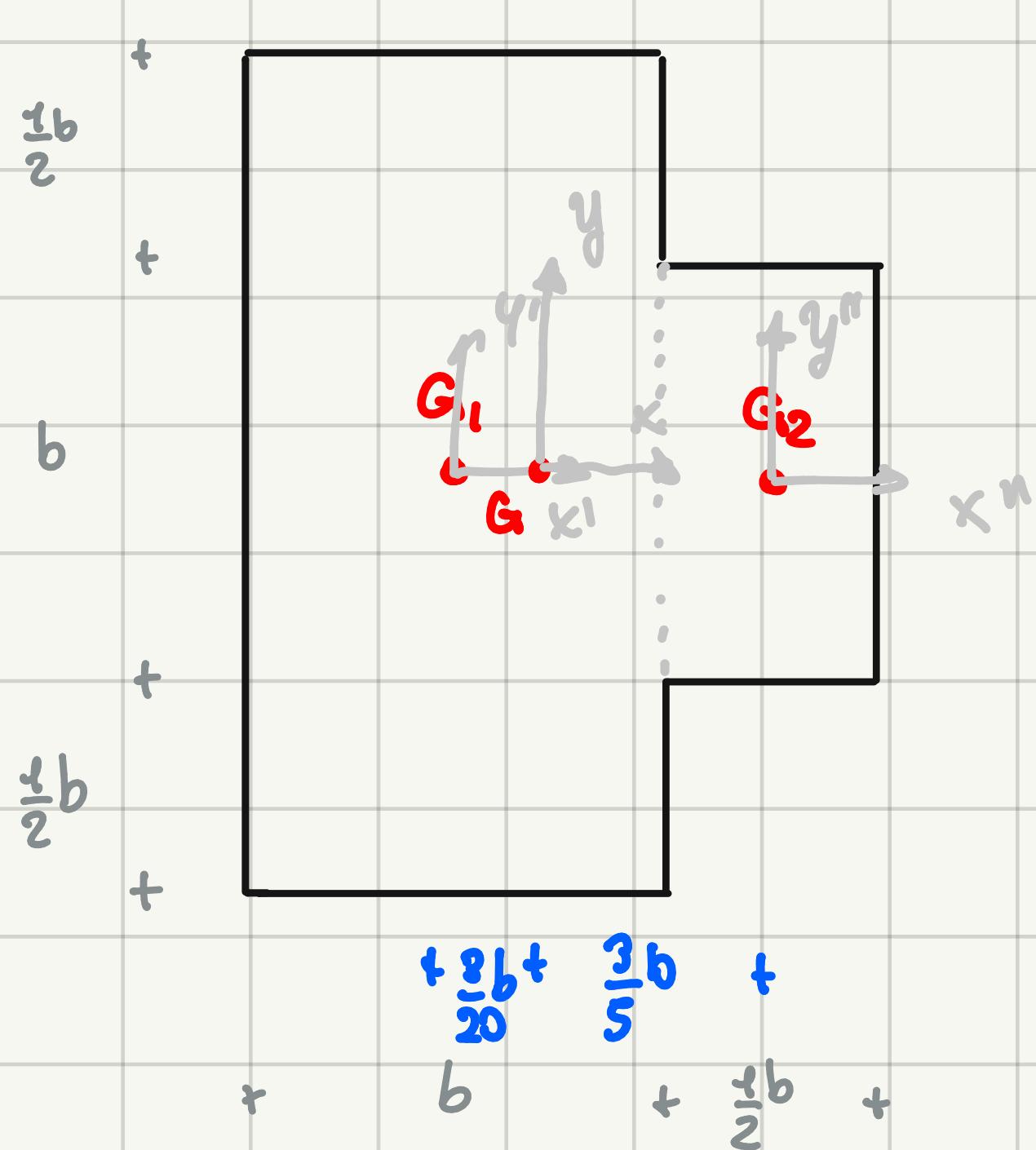


Dobbiamo calcolare:

- $I_x = ?$
- $I_y = ?$
- Posizione del bivicevito

Per prima cosa possiamo notare che la sezione in questione presenta un'asse di simmetria. Dividiamo la sezione in due sottosezioni di cui ne possiamo facilmente individuare area e posizione dei rispettivi biviceviti.

Introduciamo due rispettivi sistemi principali e osserviamo che la posizione del bivicevito si trova lungo l'asse di simmetria.



$$A = A_1 + A_2 = 2b^2 + \frac{1}{2}b^2 = \frac{5}{2}b^2$$

Adesso procediamo con il calcolo della posizione del bivicevito della sezione scegliendo come polo il punto G_1 .

[Fig. 2.]

$$S_{x'} = S_{x'}^{(1)} + S_{x'}^{(2)} = y_{G_1} A_1 + y_{G_2} A_2.$$

$$\Rightarrow y_{G'} = y_{G_1} + \frac{A_2}{A}$$

$$y_{G'} = \left(\frac{3}{4}b\right) \frac{\frac{1}{2}b^2}{\frac{5}{2}b^2} = \frac{3}{20}b$$

che andiamo a rappresentare in fig. 2., nel quale quotiamo anche le distanze rispetto ad alcuni punti molecolari, (ad esempio le distanze tra gli assi centrali).

Dunque ci troviamo a calcolo di un sistema di referimento centrale d'inerzia, nel quale il tensore delle tensioni ha come forma variante una matrice 3×3 con gli elementi salomente lungo la sua diagonale. Procediamo con il calcolo dei momenti centrali d'inerzia:

$$I_x^G = I_{x_1}^G + I_{x_2}^G.$$

dove

$$I_{x_1}^G = I_{x_1}^{G_1} + d_{x_1}^2 A_1$$

$$I_{x_2}^G = I_{x_2}^{G_2} + d_{x_2}^2 A_2.$$

pertanto otteniamo:

$$I_{x_1}^G = I_{x_1}^{G_1} = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} b (2b)^3 = \frac{2}{3} b^4$$

$$I_{x_2}^G = I_{x_2}^{G_2} = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{24} b^4.$$

in conclusione:

$$I_x^G = I_{x_1}^G + I_{x_2}^G = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{24} \right) b^4 = \frac{17}{24} b^4$$

In maniera del tutto analoga procediamo con il calcolo dell'altro momento centrale d'inerzia:

$$I_y^G = I_{y_1}^G + I_{y_2}^G$$

dove:

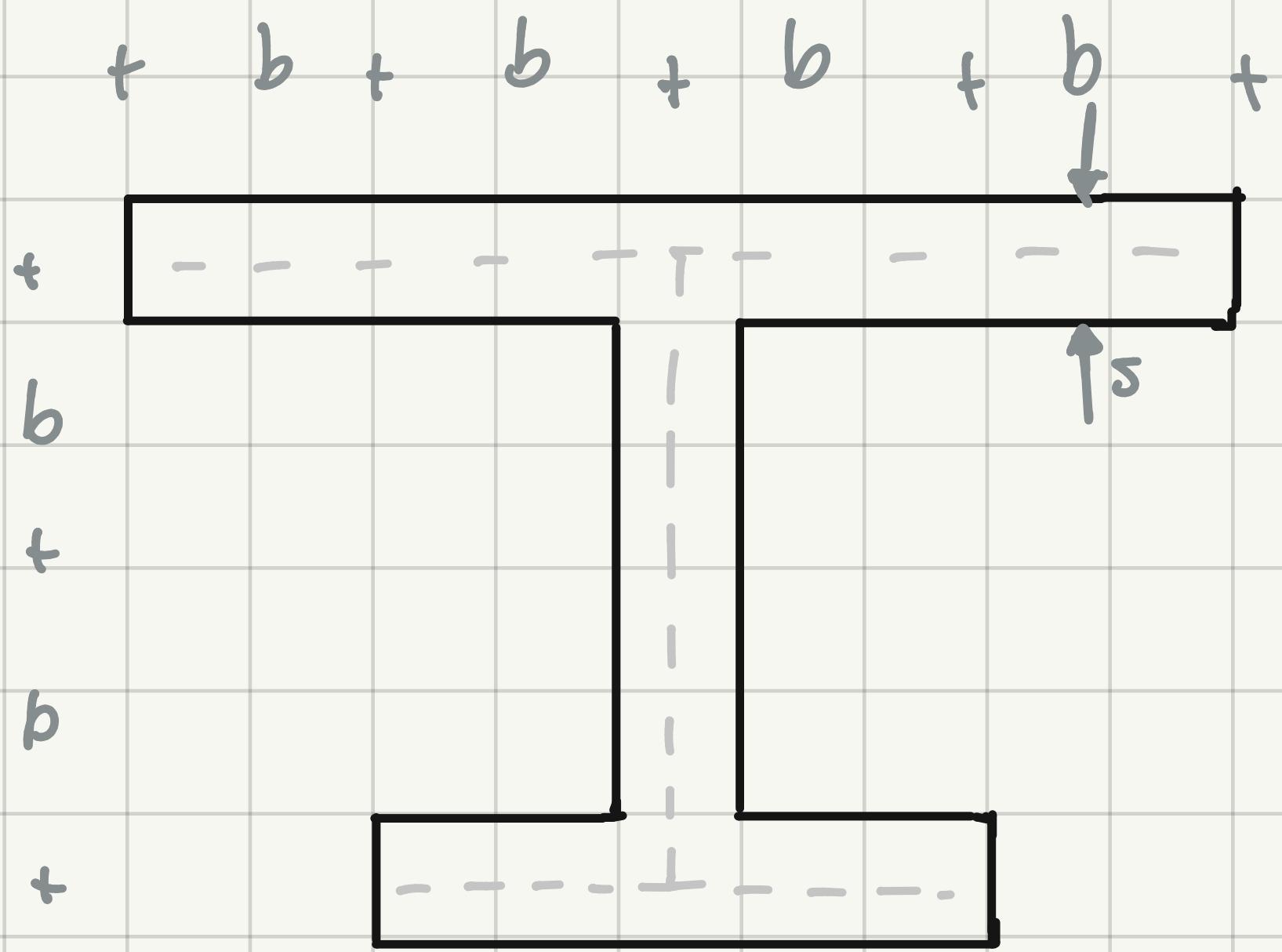
$$I_{y_1}^G = I_{y_1}^{G_1} + d_{y_1}^2 A_1 = \frac{b^2 h}{12} + \left(\frac{3}{20} b \right)^2 (2b^2) = \frac{127}{600} b^4$$

$$I_{y_2}^G = I_{y_2}^{G_2} + d_{y_2}^2 A_2 = \frac{b^2 h}{12} + \left(\frac{3}{5} b \right)^2 \left(\frac{1}{2} b^2 \right) = \frac{457}{2400} b^4$$

in conclusione avremo:

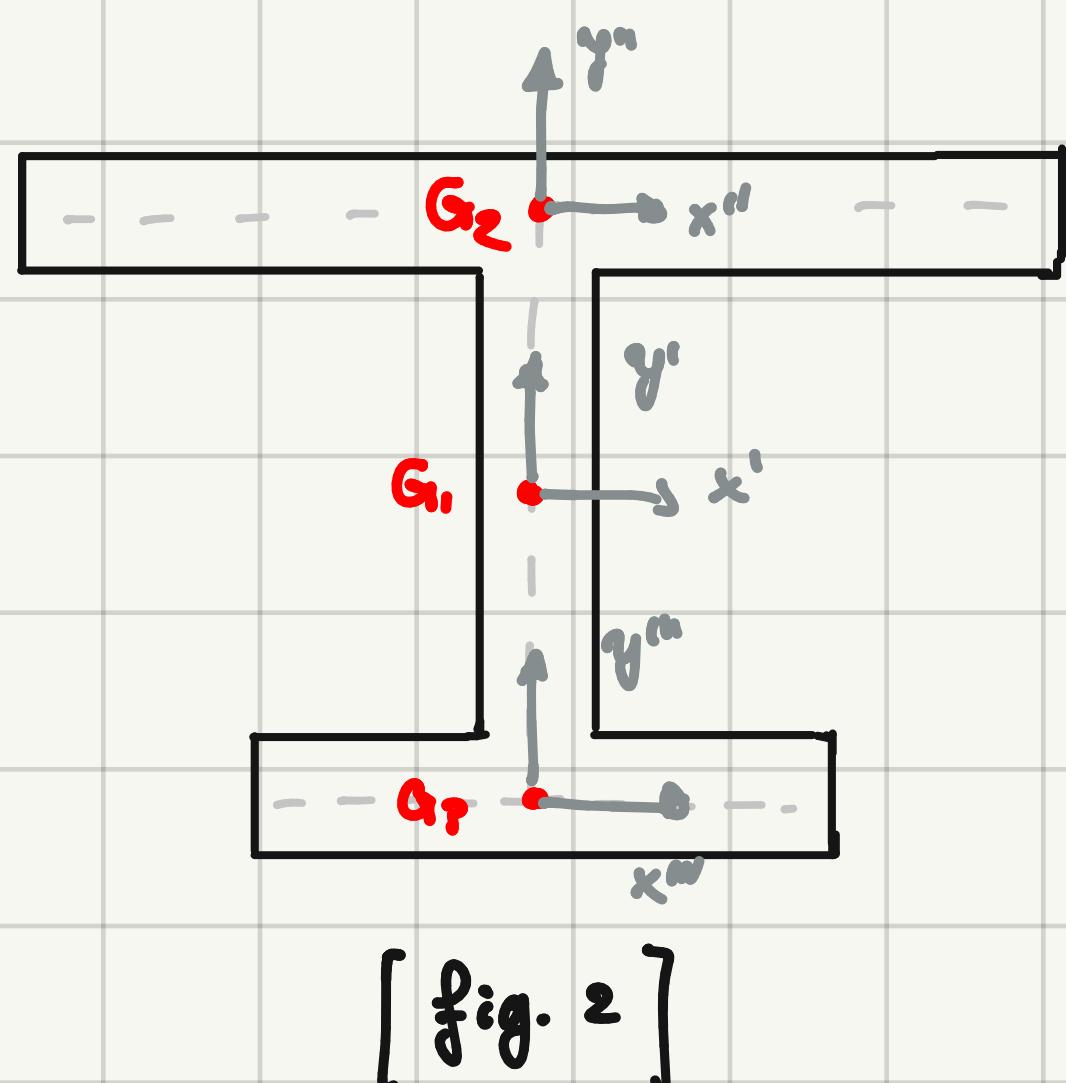
$$I_{y_1}^G + I_{y_2}^G = I_y^G = \frac{193}{480} b^4 \approx 0.4 b^4.$$

SEZIONE 2



Procediamo nella stessa maniera del caso precedente, in particolar modo, indiciamo in fig. 2 le posizioni dei baricentri delle sottosezioni; le aree e la posizione del baricentro dello sezione.

Osserviamo subito che c'è presente un'asse di simmetria, pertanto il baricentro sarà necessariamente su quelli dove sono necessariamente su quelli due.



$$A = A_1 + A_2 + A_3 \approx 4bs + 2bs + 2bs = 8bs.$$

Successivamente procediamo con il calcolo della posizione del baricentro; in particolare ci mettiamo a carico del sistema G_1, x', y'

Pertanto:

$$S_{x'} = S_{x_1}^{(1)} + S_{x_2}^{(2)} + S_{x_3}^{(3)}$$

$$y_{G'} A = y_{G_1}^{(1)} A_1 + y_{G_2}^{(2)} A_2 + y_{G_3}^{(3)} A_3$$

ottenendo così:

$$y_{G'} = \frac{y_{G_1}^{(1)} A_1 + y_{G_2}^{(2)} A_2 + y_{G_3}^{(3)} A_3}{A} = \frac{4b^2s - 2b^2s}{8bs} = \frac{1}{4}b.$$

graficamente, possiamo visualizzare: in fig. 3

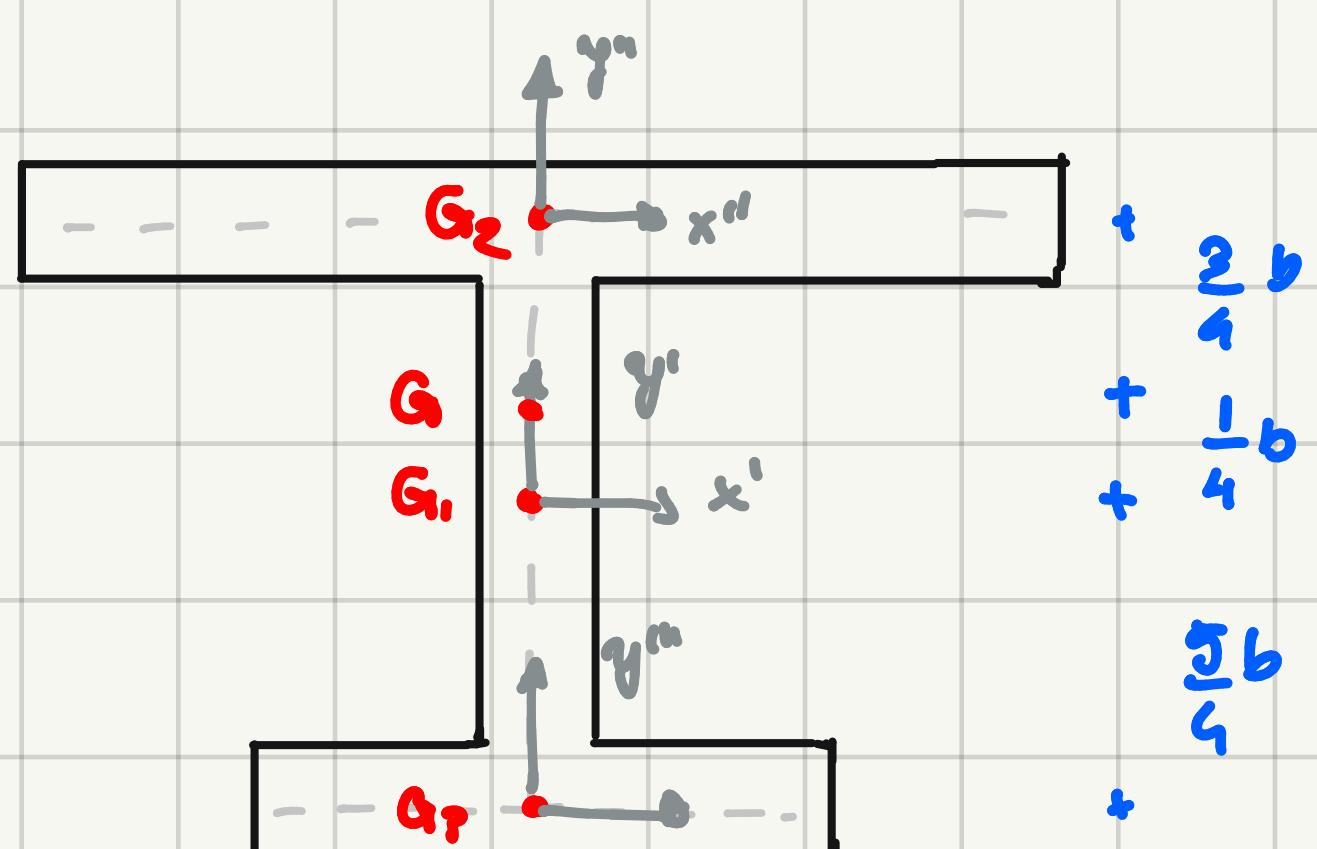


fig. 3.

E si calcola con il calcolo dei momenti centrali d'inerzia.

$$\bar{I}_x^G = \bar{I}_{x_1}^G + \bar{I}_{x_2}^G + \bar{I}_{x_3}^G$$

$$\bar{I}_y^G = \bar{I}_{y_1}^G + \bar{I}_{y_2}^G + \bar{I}_{y_3}^G$$

dove

$$\bar{I}_{x_1}^G = I_{x_1}^{G_1} + d_{x_1}^2 A_1 = \frac{1}{12} b h^3 + \left(\frac{1}{16} b^2\right) 2bs = \frac{19}{24} b^3 s.$$

$$\bar{I}_{x_2}^G = I_{x_2}^{G_2} + d_{x_2}^2 A_2 = \frac{1}{12} b h^3 + \left(\frac{9}{16} b^2\right)(4bs) \approx \frac{9}{8} b^3 s$$

$$I_{x_3}^{G_3} = I_{x_3}^{G_3} + d_{x_3}^2 A_3 = \frac{1}{12} b h^3 + \left(\frac{25}{16} b^2\right)(2bs) \approx \frac{25}{8} b^3 s$$

Sommiamo otteniamo:

$$\bar{I}_x^G = \frac{37}{6} b^3 s.$$

Per quanto riguarda poi l'altro momento centrale d'inerzia, avremo:

$$\bar{I}_y^G = I_{y_1}^{G_1} + \bar{I}_{y_2}^G + \bar{I}_{y_3}^G$$

dove:

$$I_{y_1}^{G_1} = I_{y_1}^{G_1} + d_{y_1}^2 A_1$$

$$I_{y_1}^{G_1} = \frac{1}{12} b^3 h = \frac{1}{12} s^3 b \approx 0 \text{ trascurabile.}$$

$$I_{y_2}^{G_2} = I_{y_2}^{G_2} = \frac{1}{12} b^3 h = \frac{64}{12} b^3 s = \frac{16}{3} b^3 s$$

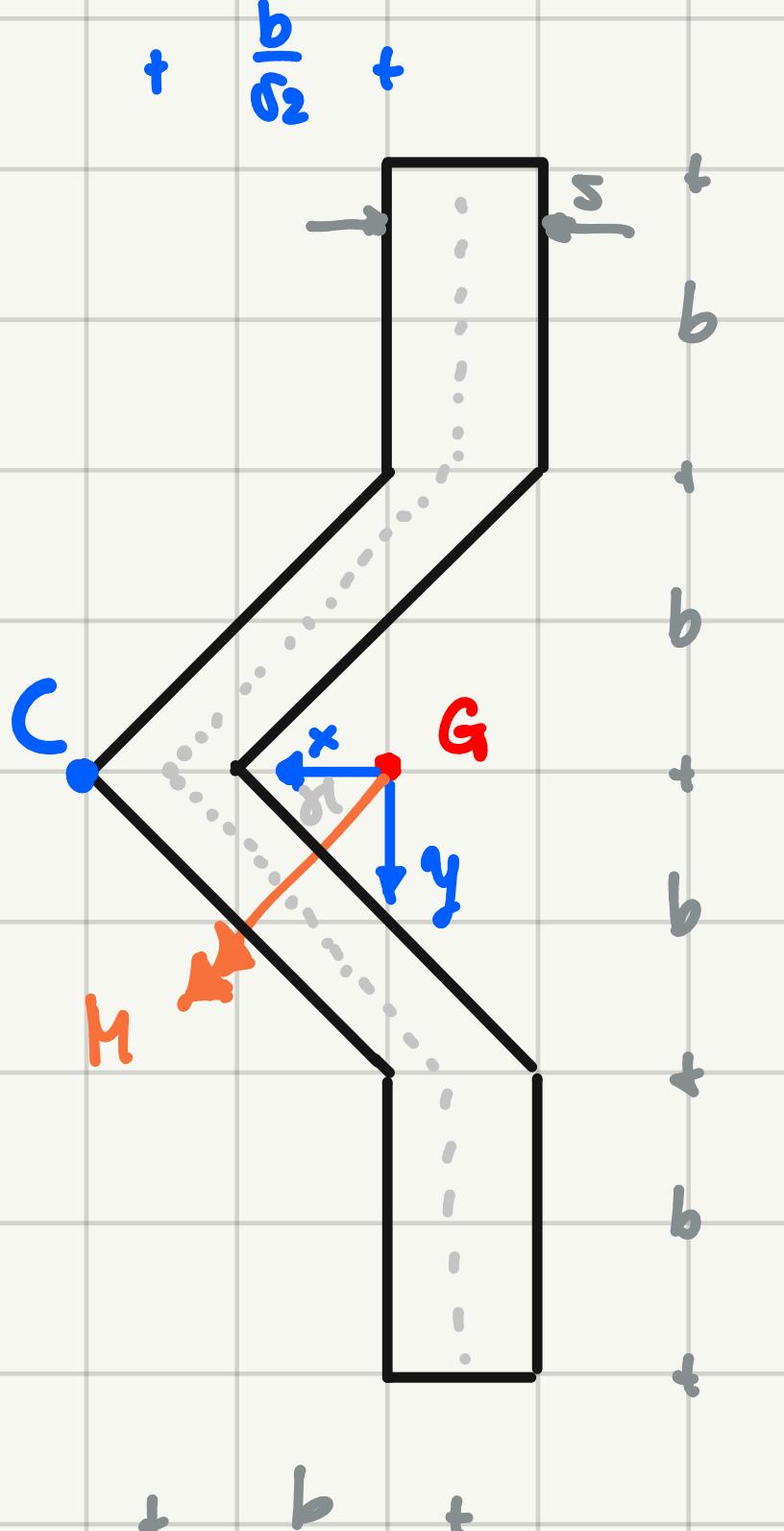
$$I_{y_3}^{G_3} = I_{y_3}^{G_3} = \frac{1}{12} b^3 h = \frac{8}{12} b^3 s = \frac{2}{3} b^3 s.$$

Sommiamo otteniamo:

$$\bar{I}_y^G = 6b^3 s.$$

ESERCITAZIONE 10

FLESSIONE DEVIATA



Dati

$$s = 2 \text{ cm} \quad \text{costante per tutto lo scivolo}$$

$$b = 20 \text{ cm}$$

$$\sigma_{Alm} = 18 \text{ kN/cm}^2$$

$$M = 1.6 \times 10^4 \text{ kNm}$$

$$\gamma = 45^\circ$$

- Determinare l'asse neutro e tracciare il diagramma delle tensioni normali.

Si trova un problema di Saint-Venant di flessione deviata, abbiamo solo la posizione del baricentro, distante circa $b/\sqrt{2}$ rispetto al ruolo più a sinistra dello scivolo, osserviamo che c'è presente anche un'asse di simmetria e il sistema di riferimento è centrale d'inerzia.

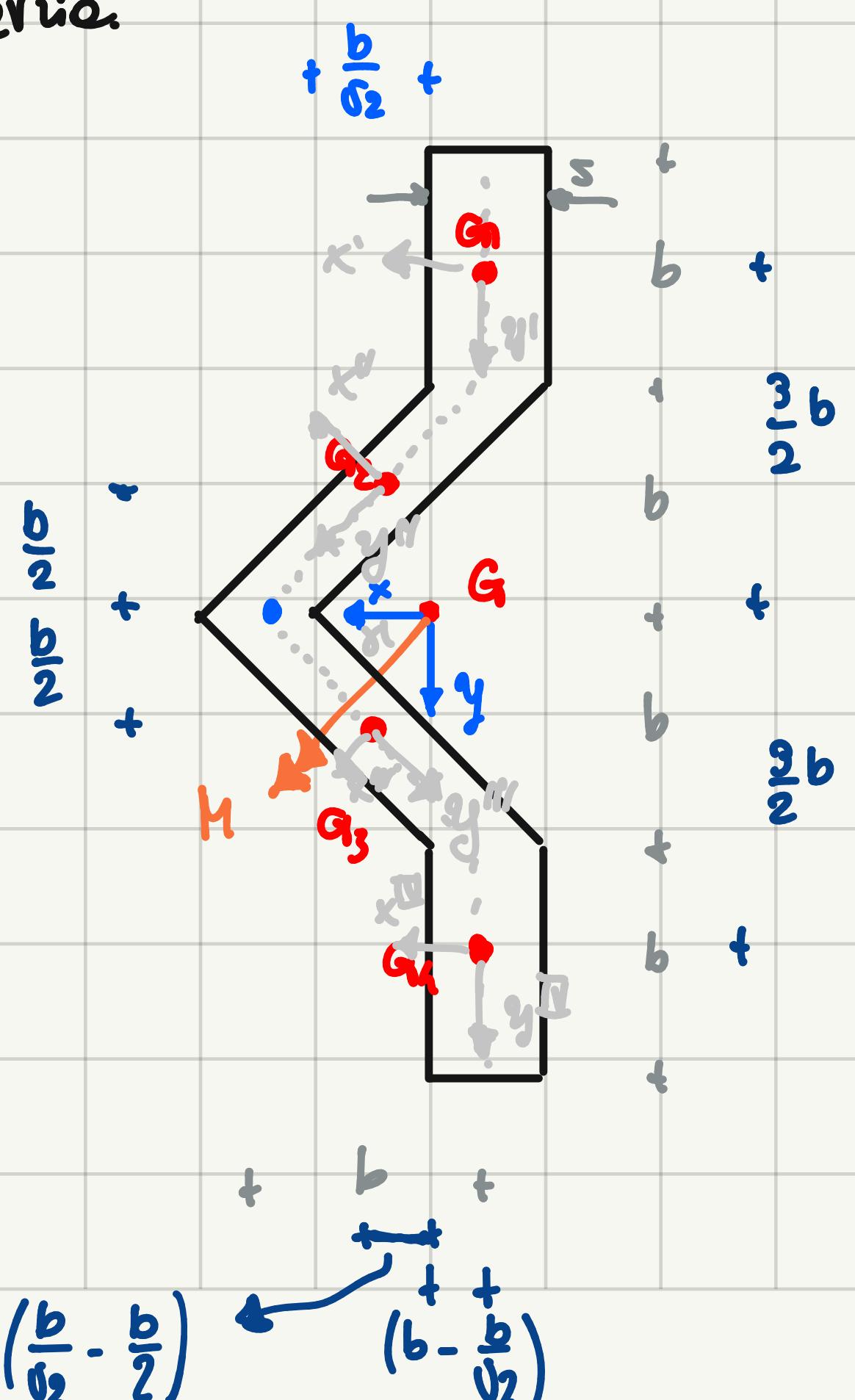
Ricordiamo che per il problema della flessione deviata, gli spazi indotti dal momento flettente sono puramente normali e sono forniti dalle formule di Novie:

$$\sigma_3 = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad (1)$$

e l'equazione dell'asse neutro è fornita impostando uguale a 0 l'eq. 1. dal quale ritroviamo il primo teorema della flessione.

$$\tan \beta = \frac{I_x}{I_y} \tan \gamma.$$

Per risolvere il problema abbiamo bisogno dei due momenti centrali d'inerzia.



Adesso andiamo a quotare tutte le posizioni delle sottosezioni dello scivolo serio. introducendo anche dei sistemi di riferimento centrali locali alle sottosezioni.

Per quanto riguarda il valore dell'area essa vale:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2bS + 2\sqrt{2}bs = 2(1 + \sqrt{2})bs.$$

Per quanto riguarda il calcolo dei momenti d'inerzia, essi valgono:

$$I_x^G = I_{x_1}^G + I_{x_2}^G + I_{x_3}^G + I_{x_4}^G$$

$$I_y^G = I_{y_1}^G + I_{y_2}^G + I_{y_3}^G + I_{y_4}^G.$$

dunque:

$$I_{x_1}^G = I_{x_1}^G + dx_1^2 A_1 = \frac{1}{12} sb^3 + \left(-\frac{3}{2}b\right)^2 (bs) = \frac{7}{3} sb^3$$

Oss. $I_{x_1}^G = I_{x_4}^G$

$$\Rightarrow I_{x_1}^G = I_{x_4}^G = \frac{7}{3} sb^3.$$

Per il calcolo del contributo ineriale della zona di sezione nel quale si trova i tratti obliqui ci appelliamo alle formule di robinie; in particolare:

$$I_{x_2}^G = I_{x_2}^{G_2} \cos^2(45^\circ) + I_y^{G_2} \sin^2(45^\circ) + dx_2^2 A_2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} (\sqrt{2}b)s^3 + \frac{1}{12} s (\sqrt{2}b)^3 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 (\sqrt{2}bs)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} b^3 s + \frac{\sqrt{2}}{4} b^3 s = \frac{\sqrt{2}}{3} b^3 s$$

$$\rightarrow I_{x_2}^G = I_{x_3}^G = \frac{\sqrt{2}}{3} b^3 s.$$

formando ottieniamo:

$$I_x^G = \frac{14}{3} b^3 s + \frac{2}{3} \sqrt{2} b^3 s = \frac{2}{3} (7 + \sqrt{2}) b^3 s.$$

mentre per quanto riguarda il momento centrale d'inerzia rispetto l'asse y .

$$I_y^G = I_{y_1}^G + I_{y_2}^G + I_{y_3}^G + I_{y_4}^G$$

dunque:

$$I_{y_1}^G = I_{y_1}^{G_1} + dy_1^2 A_1 = \frac{1}{12} bs^3 + \left(\frac{b}{\sqrt{2}} - b\right)^2 bs = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) b^3 s$$

con

$$I_{y_1}^G = I_{y_4}^G = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) b^3 s$$

mentre per

$$I_{y_2}^G = I_{y_3}^G$$

Ultimamente ancora una volta il teorema di rotazione

$$\begin{aligned}
 I_{y_2}^G &= I_{x_2}^{G_2}\left(\frac{1}{2}\right) + I_{y_2}^{G_2}\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{b}{2}\right)^2 (\sqrt{2}bs) \\
 &\stackrel{20}{=} \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{12} (\sqrt{2}b) s^3 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} s (\sqrt{2}b)^3 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{s} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{2} b^3 s \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{12} b^3 s + \frac{3\sqrt{2}}{4} b^3 s - b^3 s = \left(\frac{5\sqrt{2}}{6} - 1\right) b^3 s
 \end{aligned}$$

formulando otteniamo:

$$\begin{aligned}
 I_y^G &= 2 \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) b^3 s + 2 \left(\frac{5\sqrt{2}}{6} - 1 \right) b^3 s \\
 &\stackrel{2}{=} \left(3 - 2\sqrt{2} \right) b^3 s + \left(\frac{5\sqrt{2}}{3} - 1 \right) b^3 s \\
 &= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) b^3 s.
 \end{aligned}$$

In definitiva i momenti centrali d'inerzia valgono:

$$I_x^G = \frac{2}{3} (7 + \sqrt{2}) b^3 s.$$

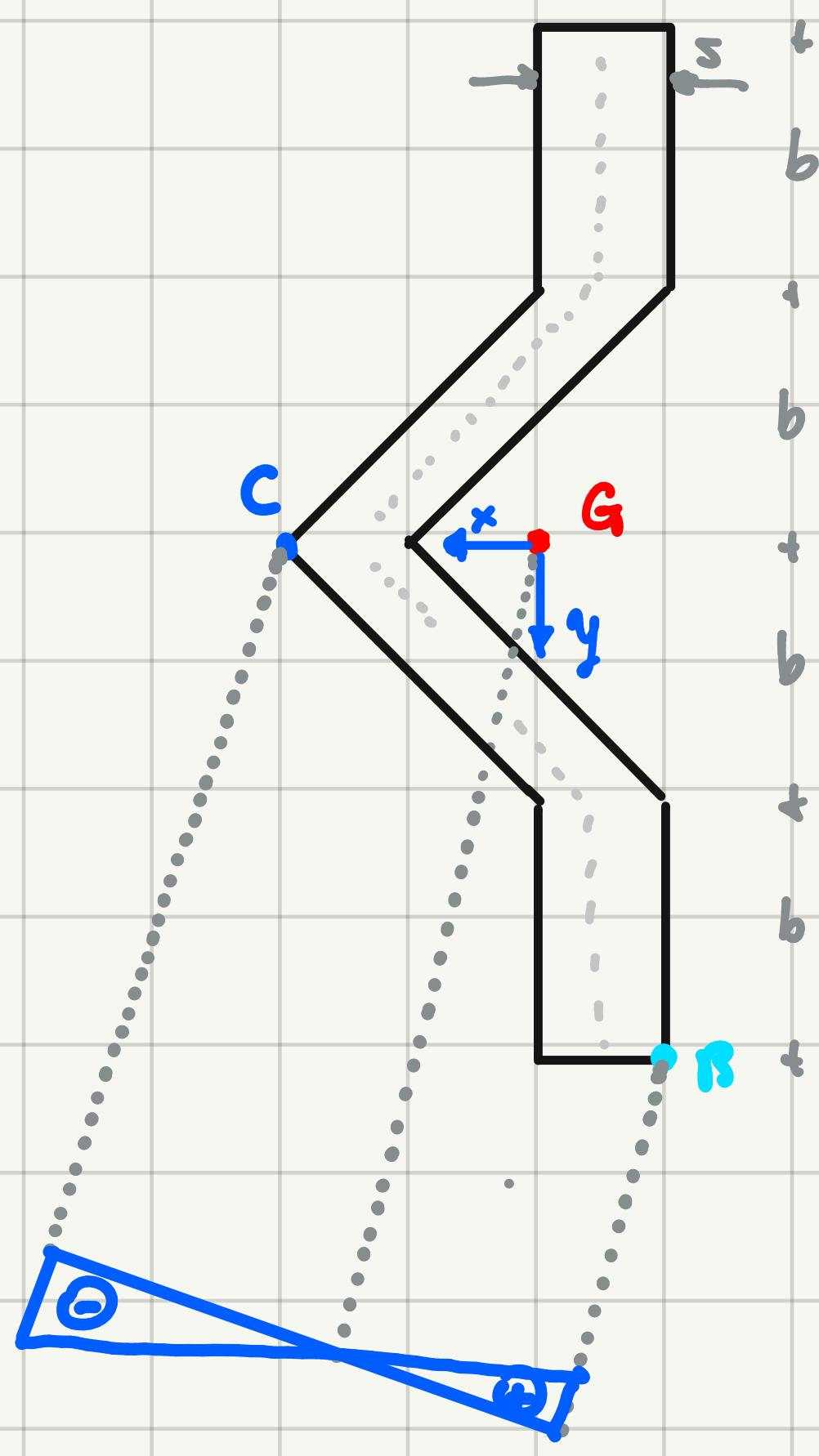
$$I_y^G = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) b^3 s.$$

Una volta noti i momenti d'inerzia ricordiamo il primo teorema della flessione dove:

$$\begin{aligned}
 \tan \beta &= \frac{I_x}{I_y} \tan \gamma \stackrel{1}{=} \\
 &\frac{\frac{2}{3}(7 + \sqrt{2}) b^3 s}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) b^3 s} = \frac{2(7 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})} \\
 &= 10.61
 \end{aligned}$$

del quale ritroviamo il valore dell'angolo girevole:

$$\tan^{-1}(10.61) = 84,61^\circ$$



Dall'isoparia del diagramma dello sforzo normale emerge che il punto C è il più flessitoto della sezione.
Perfettamente, ricordando la formula di Nover, avremo:

$$\sigma_z = \frac{Mx}{I_x} y - \frac{My}{I_y} x$$

osservi

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{M \cos \theta}{\frac{2}{3}(7+5z)b^3s} y - \frac{M \sin \theta}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)b^3s} x \\ &= \frac{\sqrt{2}/2}{\frac{2}{3}(7+5z)b^3s} My - \frac{\sqrt{2}/2}{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)b^3s} \cdot Mx. \end{aligned}$$

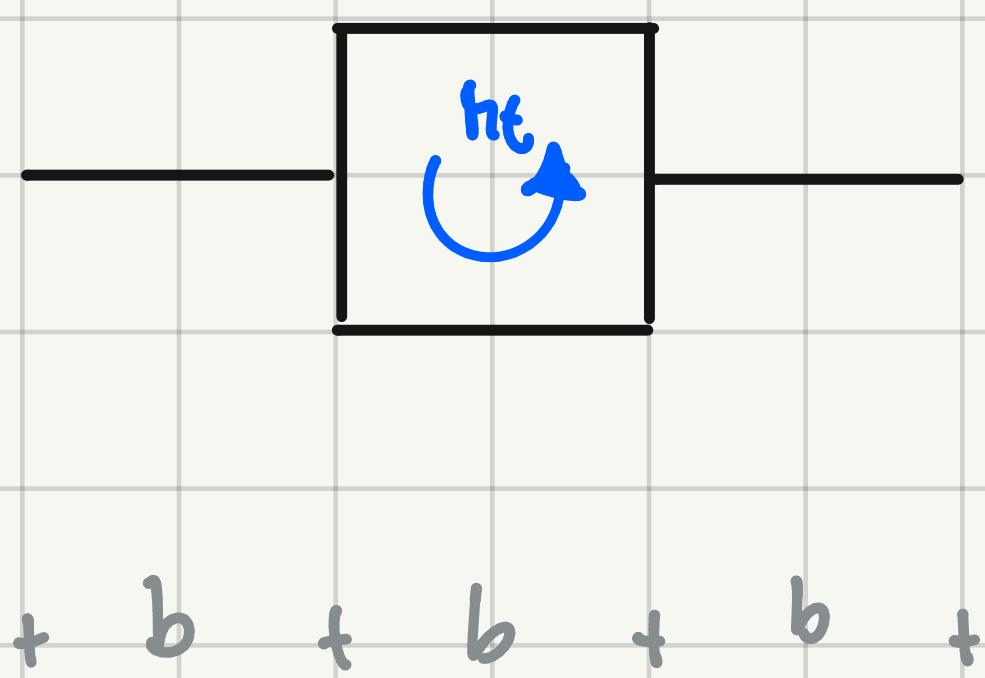
ricordando le coordinate del punto C otteniamo:

$$C = \left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$\begin{aligned} \sigma_c &\equiv -M \frac{\sqrt{2}}{2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) b^3 s} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) b^2 s} \\ &\equiv -18.91 \text{ kN/cm}^2 \Rightarrow \sigma_{cl} = 18.91 \text{ kN/cm}^2. \end{aligned}$$

che confrontandolo con il valore di $\sigma_z^{AMM} = 18 \text{ kN/cm}^2$, in modulo il valore di σ_c è maggiore, pertanto la sezione non è in campo elastico.

ESERCITAZIONE 11



DATI

$$\begin{aligned} h_t &> 0 & G &= 81 \text{ GPa.} \\ b &= 5 \text{ cm} \\ s &= 9.5 \text{ cm} \\ l &= 200 \text{ cm} \\ h_t &= 10 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Si tratta di un problema di Saint Venant di torsione uniforme, sul quale abbiamo una sezione composta da due "ali" che possiamo considerare come sezioni rettangolari di spessore sottili, mentre l'omima come una sezione quadrata cava.

Calcoliamo il momento d'inerzia torsionale:

$$I_t = \sum_i I_{t_i}$$

dove

$$I_{t_1} = I_{t_2} = \frac{1}{3} as^3 = \frac{1}{3} bs^3$$

mentre per il calcolo del momento d'inerzia torsionale della sezione chiusa, ricordiamo la seconda formula di Bredt.

$$I_{t_2} = \frac{4S^2}{\int \frac{dt}{s}}$$

$$\begin{aligned} \text{dove: } \int \frac{dt}{s} &= \frac{1}{s} \int dt = \frac{4b}{s} \\ S &= b^2 \end{aligned}$$

quindi:

$$I_{t_2} = \frac{4b^4}{9b^2} = b^3 s$$

in definitiva il momento d'inerzia torsionale della nostra sezione è pari a:

$$I_t = \frac{2}{3} bs^3 + b^3 s$$

Noto il momento d'inerzia torsionale possiamo andare a calcolare lo rotolamento dello snello all'esterno libero indotto dal momento torcente. In particolare ricordiamoci la definizione di angolo umido di torsione

$$\Theta = \frac{M_t}{G I_t} = \frac{M_t}{G b^3 s}$$

per lo rotolamento relativo :

$$\vartheta_l = \Theta(l) = \Theta l = \frac{M_t}{G I_t} l$$

parametro sfiduciato :

$$\vartheta_l = \frac{M_t}{G I_t} l = \frac{(10 \text{ kNcm})}{(81 \text{ GPa})(62,5 \text{ cm}^4)} \cdot (200 \text{ cm})$$

convertendo :

$$\begin{cases} 10 \text{ kNcm} = 10 \times 10^3 \text{ Ncm} \\ 81 \text{ GPa} = 81 \times 10^5 \text{ N/cm}^2 \end{cases}$$

otteniamo :

$$\vartheta_l = \frac{(10 \times 10^3 \text{ Ncm})}{(81 \times 10^5 \text{ N/cm}^2)(62,5 \text{ cm}^4)} \cdot (200 \text{ cm}) = 0,0039 \text{ rad.}$$

Infine, andiamo a valutare le valori delle feste longitudinali max.

$$c_{max_1} = \frac{h t_1}{I_{t_1}} s \quad c_{max_3} = \frac{h t_3}{I_{t_3}} s$$

facendo attenzione al fatto che il momento torcente si ripartisce sulle sezioni in questo modo:

$$M_{t_i} = \frac{I_{t_i}}{I_t} M_t$$

contributo inerziale offerto dalla sezione i in questione.

↑ momento torcente complessivo

parametro $M_{t_1} = M_{t_3} = \frac{I_{t_1}}{I_t} M_t = \frac{\frac{1}{3} b s^3}{62,5 \text{ cm}^4} (10 \times 10^3 \text{ Ncm}) = 33,3 \text{ Ncm.}$

$$M_t = M_{t_2} = \frac{I_{t_2}}{I_t} h_t = \frac{b^3 s}{b^3 s} (10 \times 10^3 \text{ Ncm}) = 10 \times 10^3 \text{ Ncm.}$$

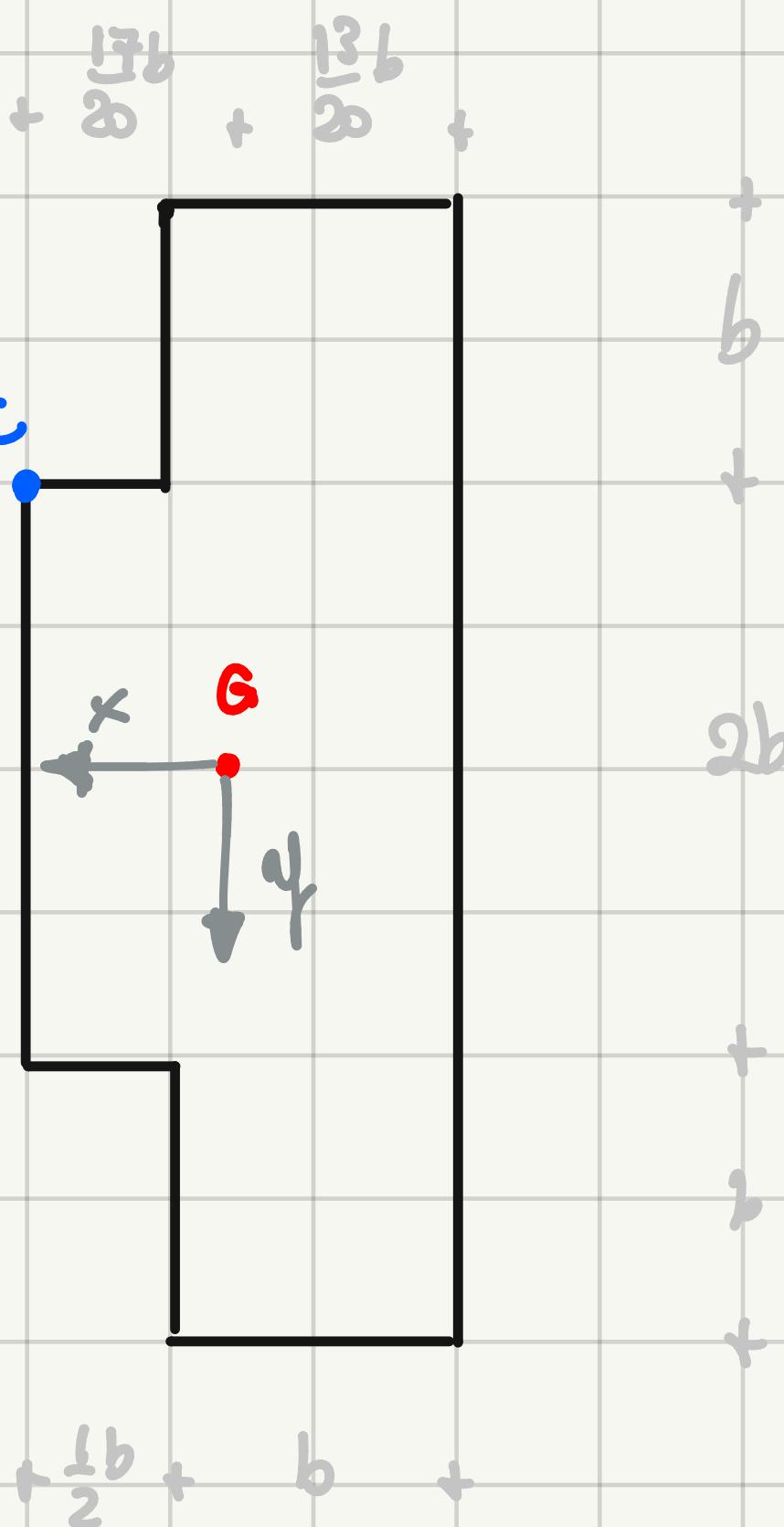
dunque lo sforzo tangenziale massimo lo avremo nelle porte chiuse dunque:

$$\sigma_{max,2} = \frac{M_t}{2 \cdot S \cdot S} = \frac{(10 \times 10^3 \text{ Ncm})}{2 \cdot (25 \text{ cm}^2) \cdot (0.5 \text{ cm})} = 4 \times 10^2 \text{ N/cm}^2.$$

$$\sigma_{max,1} = \frac{M_b,1}{I_b} \cdot S = 79.92 \text{ Ncm.}$$

ESERCITAZIONE 12

PRESSOFLESSIONE



Dati:

$$b = 20 \text{ cm}$$

$$\sigma_{\text{att}} = 20 \text{ KN/cm}^2$$

$$N < 0 \quad N = -P$$

$$\text{dove } P = 2 \times 10^4 \text{ kN}$$

- Determinare l'asse neutro, tracciare il diagramma delle tensioni
- calcolare σ il momento d'inerzia nel dominio elastico.

Si tratta di un problema di Saint Venant di pressoflessione, gli sfondi normativi sono descritti nello seguente riferimento:

$$\sigma_3 = \frac{N}{A} + \frac{I_x}{J_x} y - \frac{I_y}{J_y} x$$

avremo che: $I_x = N y_c$ e dunque $y_c = -N x_c$.

e inoltre che:

$$I_x = \rho_x^2 A \quad \text{e} \quad I_y = \rho_y^2 A.$$

Allora possiamo ricavare la formula di Newi nella sua forma comune:

$$\sigma_3 = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_c}{\rho_x^2} y + \frac{x_c}{\rho_y^2} x \right)$$

dove le coordinate del punto C sono pari a:

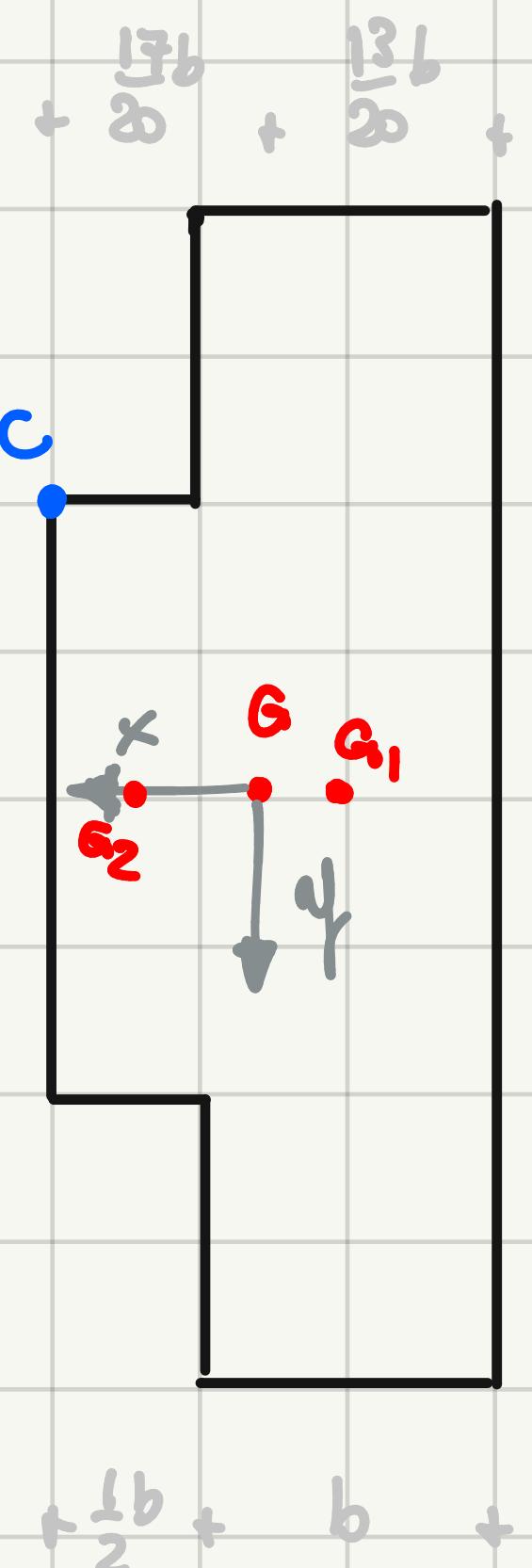
$$C = \left(\frac{17b}{20}, -b \right)$$

e calcoliamo:

$$A = A_1 + A_2 = 4b^2 + b^2$$

mentre per quanto riguarda i momenti d'inerzia avremo:

nichilano lo stesso attenzione sulle sezioni:



$$I_x^G = I_{x_1}^G + I_{x_2}^G$$

$$I_y^G = I_{y_1}^G + I_{y_2}^G$$

dove:

$$I_{x_1}^G = I_{x_1}^{G'} = \frac{1}{12} b (4b)^3 = \frac{16}{3} b^4$$

$$I_{x_2}^G = I_{x_2}^{G_2} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{2}b\right)(2b)^3 = \frac{1}{3} b^4$$

ottenendo così dunque:

$$I_x^G = \frac{17}{3} b^4 + \left(-\frac{3}{20}b\right)^2 (4b^2) =$$

mentre per questo riguardo:

$$I_y^G = I_{y_1}^G + I_{y_2}^G$$

$$I_{y_1}^G = I_{y_1}^{G_1} + d_{y_1}^2 A_1 = \frac{1}{12} b^3 (4b) + \left(-\frac{3}{20}b\right)^2 (4b^2) = \frac{127}{300} b^4$$

$$I_{y_2}^G = I_{y_2}^{G_2} + d_{y_2}^2 A_2 = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{8}b^3\right)(2b) + \left(\frac{3}{5}b\right)^2 (b^2) = \frac{457}{1200} b^4$$

e in conseguenza ottendiamo:

$$I_y = \frac{193}{240} b^4$$

Adesso non ci resta che andare a calcolare i rapporti d'inerzia:

$$\rho_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{17}{3} b^4}{5b^2} = \frac{17}{15} b^2$$

$$\rho_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{193}{240} b^4}{5b^2} = \frac{193}{1200} b^2.$$

noti i rapporti d'inerzia, calcoliamo l'espressione dello sforzo normale:

$$\sigma_3 = \frac{N}{5b^2} \left(1 - \frac{15}{17b} y + \frac{1020}{193b} x \right)$$

Ricordando la forma segmentaria dell'equazione dell'asse neutro ottieniamo:

$$\frac{x}{x_m} + \frac{y}{y_m} = 1$$

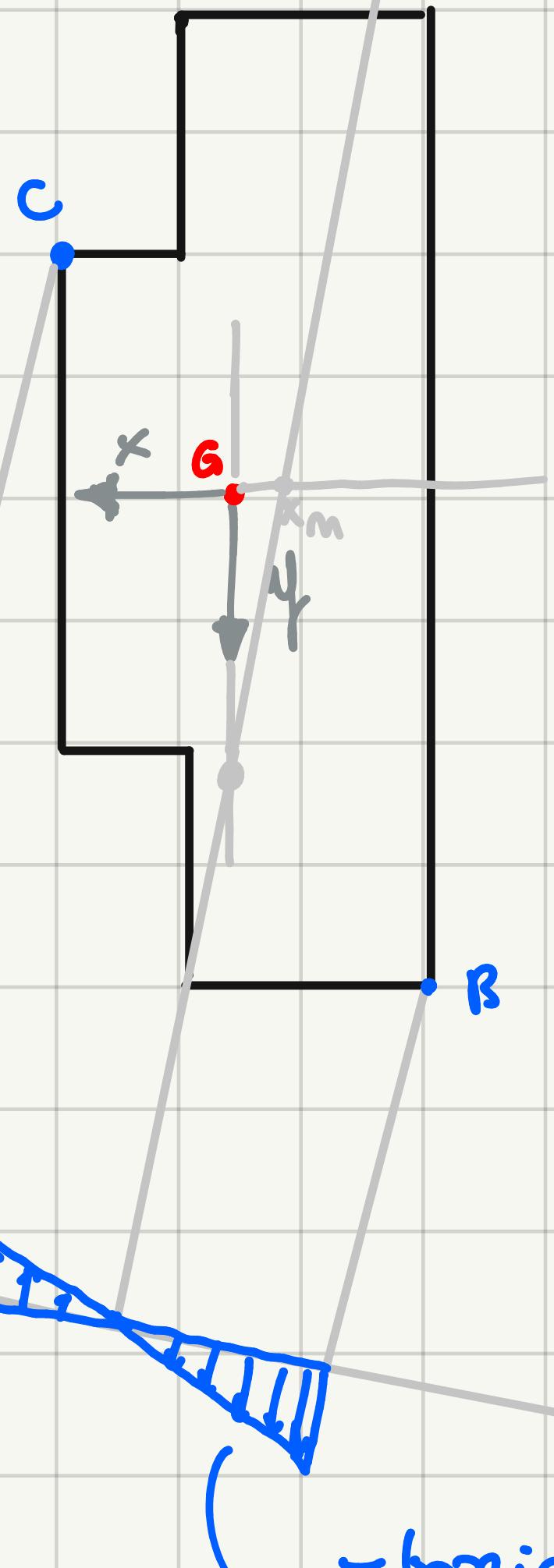
dove:

$$x_m = -\frac{\rho_y^2}{x_c} = \frac{\left(\frac{193}{1200} b^2\right)}{\left(\frac{17}{20} b\right)} = -\frac{193}{1020} b = -0.18b.$$

$$y_m = -\frac{\rho_x^2}{y_c} = -\frac{\left(\frac{17}{15} b^2\right)}{-b} = \frac{17}{15} b = 1.13b.$$

e dunque ottieniamo:

Audendo adesso a ricordare l'espressione dello sforzo normale otteniamo:



$$\sigma_z = \frac{N}{5b^2} \left(1 - \frac{15}{17b} y + \frac{1020}{193b} x \right)$$

e valutiamo:

$$\sigma_c = -\frac{P}{5b^2} \left(1 + \frac{15}{17b} \cdot (-b) + \frac{1020}{193b} \cdot \frac{17}{20} b \right)$$

$$\sigma_c = -1.27 \frac{P}{b^2} = -1.27 \frac{(2 \times 10^6 \text{ kN})}{(20 \text{ cm})^2} =$$

$$= -63.5 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2}$$

Audendo a confrontare con il valore ammissibile, osserviamo che:

$$\sigma_z^{\text{amm}} \geq \sigma_z^{\text{max}}$$

non è rispettato perché:

$$|\sigma_z^{\text{max}}| = |\sigma_c|$$

$$|\sigma_c| > \sigma_z^{\text{amm}}$$

perdendo lo scavo non riporta incremento elastico.

AUTORIZZAZIONE PUBBLICAZIONE ESERCITAZIONI

Il sottoscritto Barletta Alessandro, nato a Tarquinia il 08/04/1998 autorizza il professore a pubblicare le esercitazioni da me svolte, come richiesto in sede di orale tenuto in data il 18/01/21.

Civitavecchia il 27/01/21

Firma

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Barletta Alessandro".