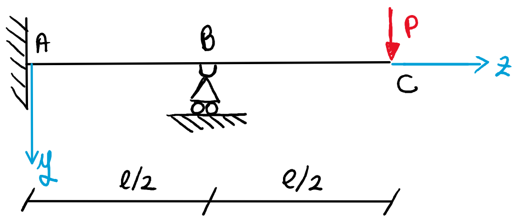
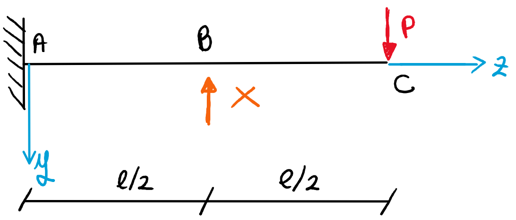
Metodo delle forze

giovedì 28 novembre 2019 14:55

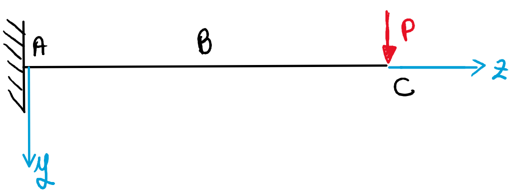


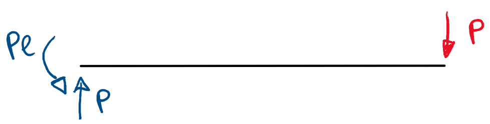
Si sceglie un sistema di riferimento locale per la trave e le consuete convenzioni per gli spostamenti e le caratteristiche della sollecitazione. I problemi assiale e flessionale sono disaccoppiati e le grandezze che descrivono il comportamento assiale sono identicamente nulle. Si assume il modello di trave di Eulero - Bernoulli (scorrimento angolare γ identicamente nullo) e che la rigidezza flessionale EI sia costante.
Il sistema ha grado di iperstaticità i pari ad 1; si segue la procedura operativa illustrata nel paragrafo 11.2 del libro di testo Casini - Vasta. Per risolvere il problema con il metodo delle forze, si scelga come incognita iperstatica la reazione verticale X esercitata dall'appoggio in B. Il sistema isostatico equivalente è il seguente, con la condizione che $v_B = 0$.

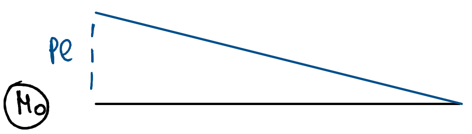


I sistemi "0" ed "1" con i relativi diagrammi di struttura libera e del momento flettente sono i seguenti.

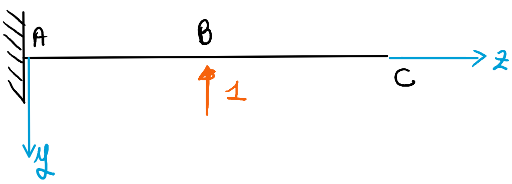
Sistema (0)

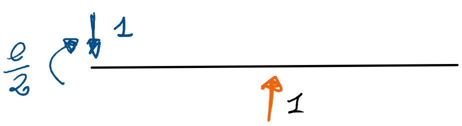


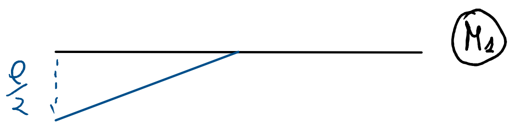




Sistema (1)







Le leggi di variazione del momento flettente sono $M_0 = P(z - \ell)$ per il sistema "0" e

$$M_1 = \begin{cases} \ell/2 - z, & z \in (0, \ell/2] \\ 0, & z \in [\ell/2, \ell] \end{cases}$$

per il sistema "1".

$$M_1 = \begin{cases} \ell/2 - z \,, & z \in (0, \ell/2] \\ 0 \,, & z \in [\ell/2, \ell] \end{cases} \qquad \text{per il sistema "1".}$$

Si è scelto di sopprimere il carrello in B, dunque per ripristinare la congruenza si deve imporre che lo spostamento del punto B del sistema isostatico equivalente sia nullo: $v_B = 0$.
Per il principio di sovrapposizione si ottiene la seguente equazione di congruenza (o di compatibilità cinematica):

$$v_B = v_0(B) + X\, v_1(B) \,. \qquad (1)$$

Per esplicitare i due termini $v_0(B)$ e $v_1(B)$ della (1) si utilizza il principio dei lavori virtuali (procedura operativa illustrata nel capitolo 10.4 del libro di Casini - Vasta).
Per il calcolo del termine $v_0(B)$, si sceglie come sistema effettivo il sistema "0" e come sistema virtuale il sistema "1". Il lavoro virtuale interno ed il lavoro virtuale esterno sono dati rispettivamente da:

$$L_{ve}^{(0)} = -1 \cdot v_0(B) = -v_0(B) \;; \qquad (2)$$

$$L_{vi}^{(0)} = \int_0^{\ell} M_1 \chi_0 = \int_0^{\ell} M_1 \frac{M_0}{EI} = \int_0^{\ell/2} \frac{P}{EI} \left(\frac{\ell}{2} - z\right)(z - \ell)\, dz = -\frac{5}{48} \frac{P\ell^3}{EI} \,. \qquad (3)$$

Imponendo l'uguaglianza dei lavori virtuali, ossia l'uguaglianza tra (2) e (3), si ottiene il valore dello spostamento cercato:

$$v_0(B) = \frac{5}{48} \frac{P\ell^3}{EI} \,. \qquad (4)$$

Analogamente, per calcolare $v_1(B)$ si usa il principio dei lavori virtuali. In questo caso il sistema "1" costituisce sia il sistema effettivo che il sistema virtuale. Il lavoro virtuale interno ed il lavoro virtuale sono dati dalle seguenti espressioni:

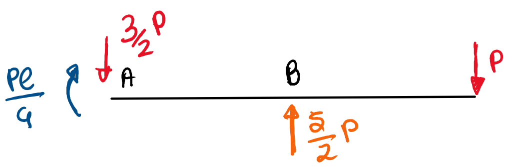
$$L_{ve}^{(1)} = -1 \cdot v_1(B) = -v_1(B) \;; \qquad (5)$$

$$L_{vi}^{(1)} = \int_0^{\ell} M_1 \chi_1 = \int_0^{\ell} \frac{M_1^2}{EI} = \frac{1}{EI} \int_0^{\ell/2} \left(\frac{\ell}{2} - z\right)^2 dz = \frac{\ell^3}{24\,EI} \,. \qquad (6)$$

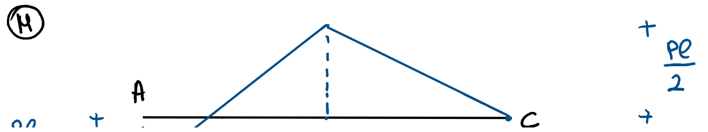
Per il principio di identità dei lavori virtuali, si impone l'uguaglianza tra (5) e (6), da cui:

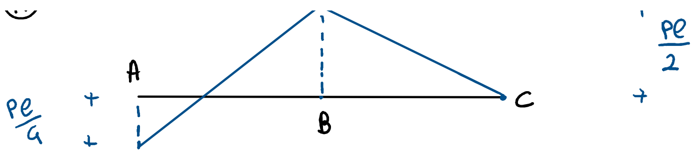
$$v_1(B) = -\frac{\ell^3}{24\,EI} \qquad (7).$$

Sostituendo la (7) e la (4) in (1), si ricava il valore dell'incognita iperstatica cercata, ossia $X = \frac{5}{2} P$.
Il risultato coincide con quello ottenuto dall'integrazione della linea elastica.
Il diagramma di struttura libera della struttura data è dunque il seguente.



Per tracciare il diagramma del momento flettente, si ricorre nuovamente al principio di sovrapposizione, per cui $M = M_0 + X M_1$. Il diagramma del momento flettente è dunque il seguente.





Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi