

## Problema: utilizzo dei cerchi di Mohr per studiare la deformazione (12 gennaio)

giovedì 26 dicembre 2019 15:33

La costruzione dei cerchi di Mohr può essere effettuata per qualsiasi matrice simmetrica, quindi anche per la matrice di deformazione pura  $\underline{\underline{E}}$ . Nella base di versori ortormali  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  dello spazio, la matrice data assume la seguente forma:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon/2 & 0 \\ \varepsilon/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Avevamo fissato la base, è possibile identificare i vettori anche attraverso le loro componenti in questa base. La direzione  $\underline{k}$  è una direzione principale, associata all'autovettore nullo. Infatti:

$$\underline{\underline{E}} \underline{k} = \underline{0}.$$

Per costruire la circonferenza di Mohr, si introduce un generico versore  $\underline{n}$  ortogonale a  $\underline{k}$  ed un versore  $\underline{m}$  sempre ortogonale a  $\underline{k}$  ma ruotato di  $\pi/2$  in senso orario rispetto ad  $\underline{n}$  (visto da  $\underline{k}$ ).

Scegliendo opportunamente  $\underline{n}$  ed  $\underline{m}$  si possono identificare dei punti notevoli del piano avente  $\varepsilon_n$  in ascissa e  $\frac{1}{2} \gamma_{nm}$  in ordinata su cui basarsi per tracciare la circonferenza richiesta. Con  $\varepsilon_n$  si indica la dilatazione lungo la direzione  $\underline{n}$ , con  $\gamma_{nm}$  si indicano gli scorrimenti angolari delle fibre ortogonali e disposte secondo le direzioni  $(\underline{n}, \underline{m})$  prima della deformazione.

In particolare, scegliendo  $\underline{n} = \hat{j}$  ed  $\underline{m} = \hat{i}$  si ottiene:

$$\varepsilon(\hat{j}) = \hat{j} \cdot \underline{\underline{E}} \hat{j} = 0;$$

$$\frac{\gamma(\hat{j})(\hat{i})}{2} = \hat{i} \cdot \underline{\underline{E}} \hat{j} = \varepsilon/2;$$

Si identifica così il punto A  $(0, \varepsilon/2)$ .

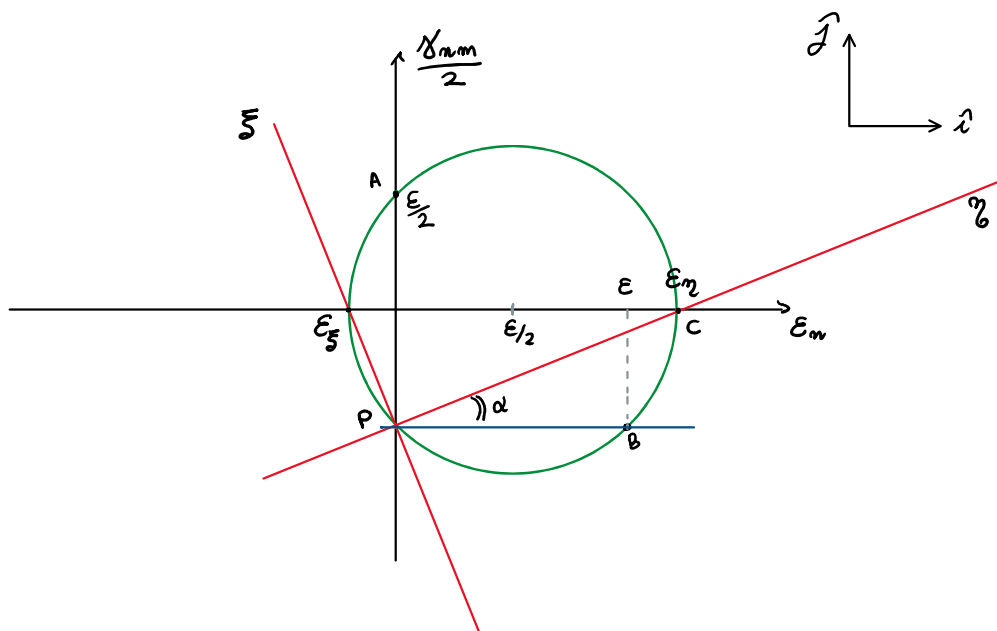
Analogamente, scegliendo  $\underline{n} = \hat{i}$  e  $\underline{m} = -\hat{j}$  si ottiene:

$$\varepsilon(\hat{i}) = \hat{i} \cdot \underline{\underline{E}} \hat{i} = \varepsilon;$$

$$\frac{\gamma(\hat{i})(-\hat{j})}{2} = -\hat{j} \cdot \underline{\underline{E}} \hat{i} = -\varepsilon/2;$$

da cui il punto B  $(\varepsilon, -\varepsilon/2)$ .

Si rappresentano i due punti sul piano, avendo cura di orientare gli assi  $(\varepsilon_n, \frac{\gamma_{nm}}{2})$  parallelamente ai versori  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ . Il punto medio del segmento AB si trova sull'asse delle ascisse. Dai punti A e B si tracciano le rette parallele alle normali corrispondenti, assi  $y$  ed  $x$  rispettivamente. La loro intersezione determina P, il polo della rappresentazione di Mohr. Si traccia la circonferenza di Mohr imponendo che questa passi per i punti A, B e P. Il suo centro coincide con il punto medio di AB.



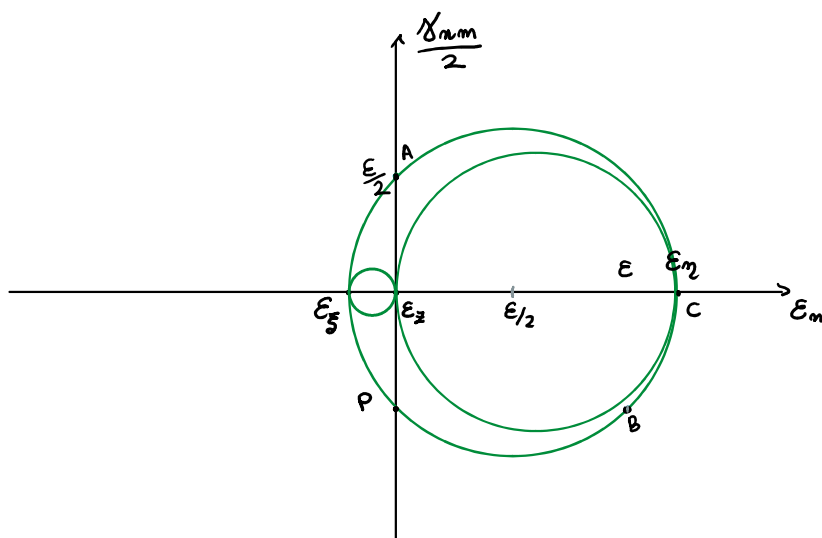
Graficamente si osserva subito che il punto per cui la dilatazione è massima è il punto  $C$ . Da considerazioni geometriche, osservando che il raggio della circonferenza è pari a  $\frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon$  e che l'ascissa del centro della circonferenza è pari a  $\epsilon/2$ , si deduce che il valore della massima dilatazione (ascissa di  $C$ ) è pari a  $\epsilon_{\max} = \epsilon_{\eta} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \epsilon$ .

Per individuare la corrispondente direzione (che coincide con una direzione principale) si congiunge il polo  $P$  con il punto  $C$ . Da considerazioni trigonometriche si osserva che questa nuova direzione individuata, indicata con  $\eta$ , forma con l'asse delle  $x$  un angolo  $\alpha$  pari a:

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{\epsilon/2}{\frac{1+\sqrt{2}}{2} \epsilon} \right) = \frac{\pi}{8}.$$

L'altra direzione principale  $\xi$  sarà inclinata di  $\frac{\pi}{8}$  rispetto all'asse delle  $x$ .

È possibile rappresentare nel piano anche la dilatazione relativa all'asse  $z$ , che è asse principale, ottenendo con le seguenti 3 circonferenze della rappresentazione di Mohr.



Affermare che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Gravetti

Affermare che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi