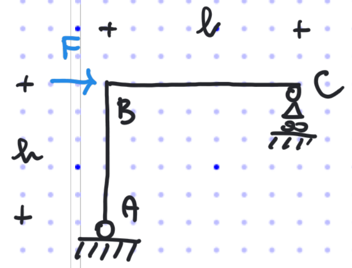
ES. 1 — 4 ESEMPI PARADIGMATICI

STRUTTURA ISOSTATICA o STATICAMENTE DETERMINATA.

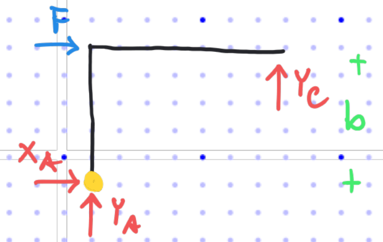


grad. di l.l.

$n = 3 \times n_c = 3 \times 1 = 3$

molt. vincoli

$m = 2 + 1 = 3$



Eq^{ni} card^{li}:

(→) $X_A + F = 0$

(↑) $Y_A + Y_C = 0$

(↺A) $l\,Y_C - hF = 0$

(forze reattive)
Vettore incognite

$$\underline{f}_r = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_C \end{bmatrix}$$

$n = 3$ equazioni

$m = 3$ incognite

$$\underline{B}\,\underline{f}_r + \underline{f}_a = \underline{0}$$

$$\underline{B} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}}^{m \text{ incogn.}} \Big\} n \text{ eq.} \qquad \underline{f}_a = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ -hF \end{bmatrix}$$

matrice di equilibrio — vettore forze attive

Prima di tentare di risolvere il sistema
Classificare il prob

· rango di $\underline{B}$ = ? — $\underline{B}$ quadrata

$p = $ rango $B = 3$ — det $\underline{B} = l \neq 0$

$\underline{B}$ ha rango max.

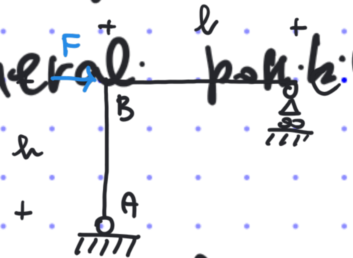
Teorema di Rouché-Capelli: $\underline{B}\,\underline{f}_r = -\underline{f}_a$

$$\underline{B}' = \overbrace{\left[B \,|\, -f_a \right]}^{m+1=4} \Big\} \overset{n}{\overset{\shortparallel}{3}}$$ matrice orlata.

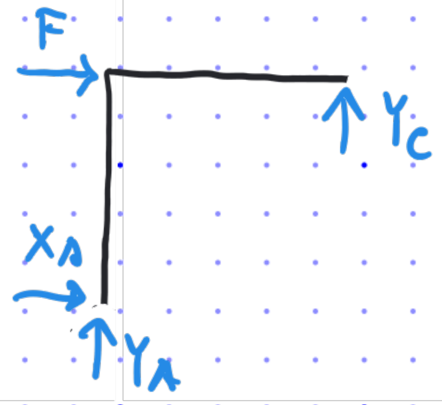
rango $B' \geq$ rango $B = 3$ — rango $B' \leq \min(m$

Sommario della procedura di formulazione del problema dell'equilibrio.

1) Si sostituiscono gli m vincoli con le corrispondenti reazioni (le più generali possibili).



2) Si raccolgono le reazioni in un vettore $\underline{f}_r \in \mathbb{R}^m$ di m componenti



3) Si scrivono le eq.ni cardinali della statica in forma scalare (n equazioni)

$$f_r = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_C \end{bmatrix}$$

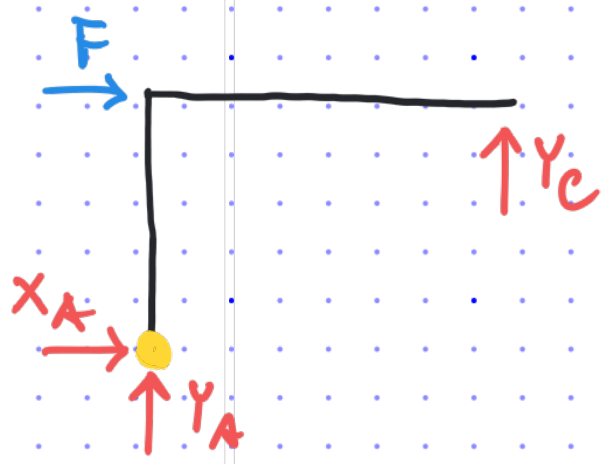
4) Per ogni equazione si separa il contributo delle forze attive da quello delle forze reattive.

Il contributo delle forze attive si raccoglie nel vettore $\underline{f}_r \in \mathbb{R}^n$.

Il contributo delle forze reattive viene espresso nella forma $\underline{B}\,\underline{f}_r$, dove $\underline{B}$ ha n righe e m colonne.

(matrice di equilibrio).

Oss: forma di $\underline{B}$, $\underline{f}_r$ e $\underline{f}_q$



$$(\overset{\curvearrowleft}{A})\quad l\,Y_C - hF = 0$$

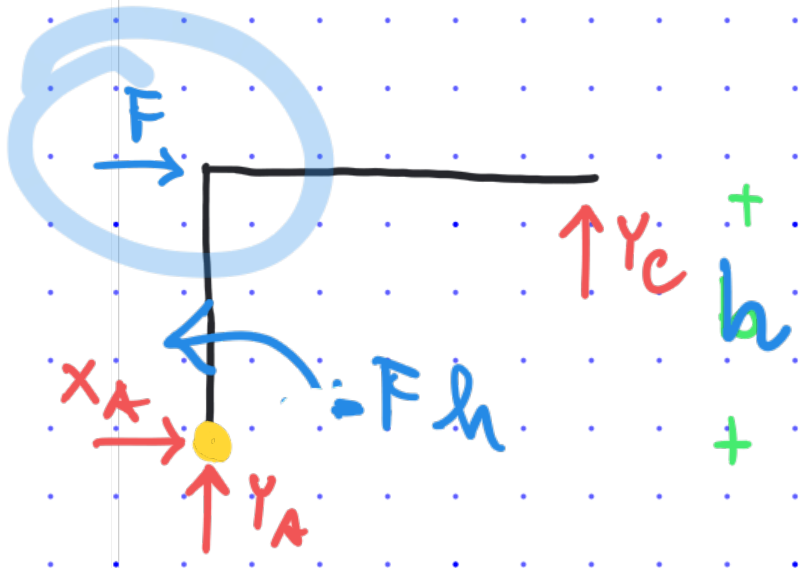
$$(\rightarrow)\quad X_A + F = 0$$

$$(\uparrow)\quad Y_A + Y_C = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & l \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -hF \\ F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cambio ordine eq.ni di eq.

Oss: interpretazione delle componenti di $\underline{f}_a$.



Eq^{ni} card.^{li}:

$(\rightarrow)\quad X_A + F = 0$

$(\uparrow)\quad Y_A + Y_C = 0$

$(A\circlearrowleft)\quad l\,Y_C - hF = 0$

(forze reattive) vettore incognite

$$\underline{f}_r = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ Y_C \end{bmatrix}$$

$n = 3$ equazioni

$m = 3$ incognite

$$\underline{B} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & l \end{bmatrix}}^{m \text{ incogn.}} \Big\} n \text{ eq.}$$

matrice di equilibrio

$$\underline{f}_a = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ -hF \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{risult.} \rightarrow \\ \text{risult} \uparrow \\ \text{mom ris } A\circlearrowleft \end{array} \end{array}$$

vettore forze attive

$$\underline{B}\,\underline{f}_r + \underline{f}_a = \underline{0}$$

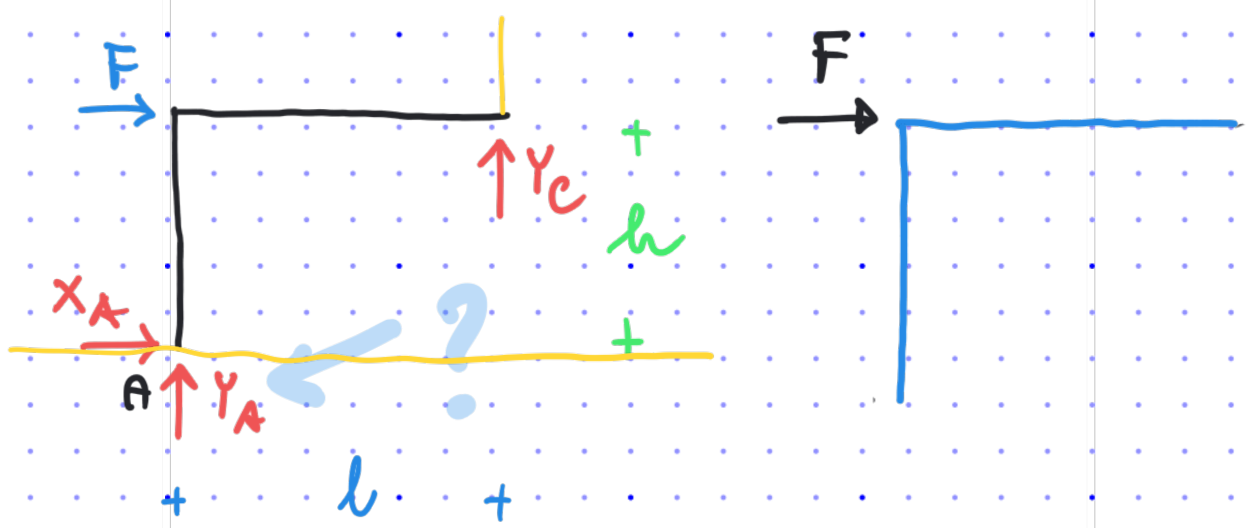
METODO ANALITICO E METODO DIRETTO

Il metodo appena illustrato, basato sulla costruzione della matrice di equilibrio, è detto "metodo analitico".

Tale metodo si presta all'implementazione tramite calcolatore.

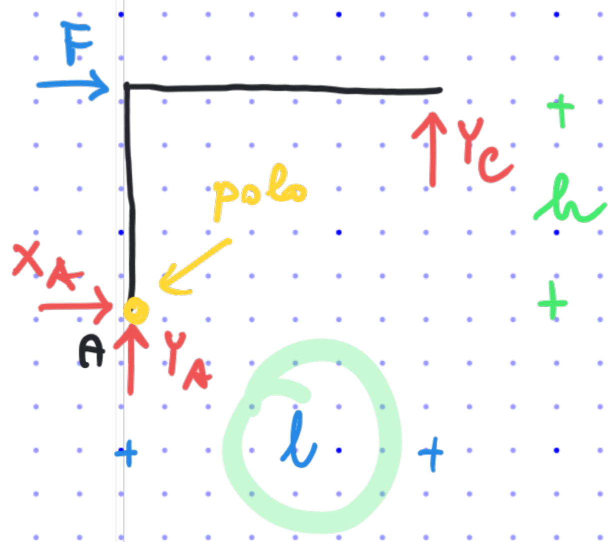
Se il calcolo è fatto a mano, conviene adoperare il "metodo diretto", che consiste nel ricavare, una per una, le incognite, senza risolvere un sistema lineare.

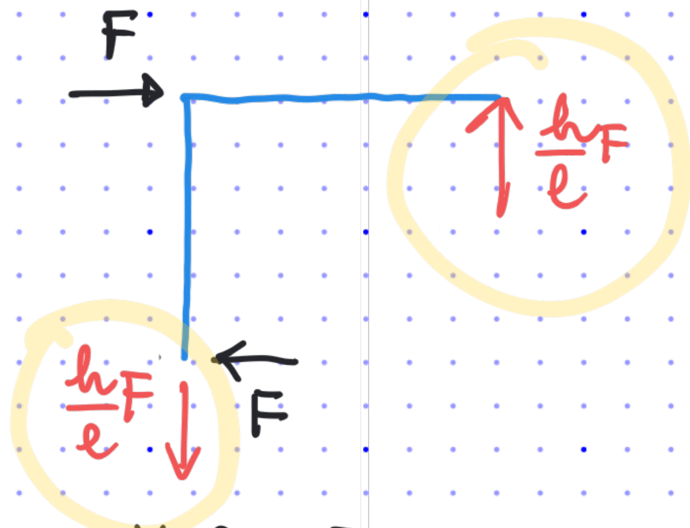
Determinazione di una sola reazione.



Imponendo l'annullarsi del momento rispetto a un polo opportunamente scelto è possibile determinare una particolare reazione senza dover calcolare le altre.

Metodo "diretto".





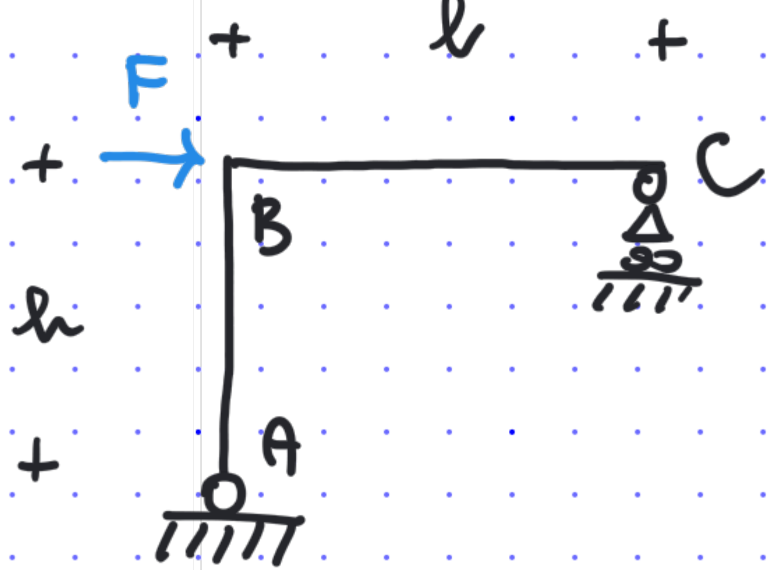
$$Y_C \ell = F h$$

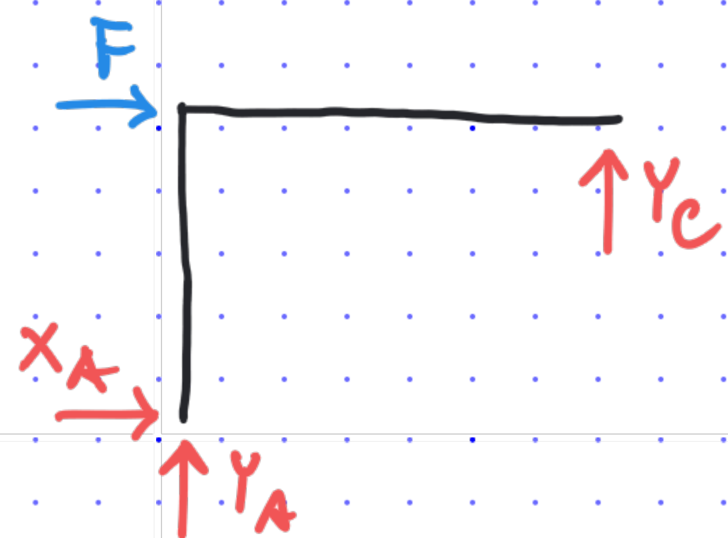
<u>OSS:</u>

eq. 2 coppie di forze

$$\circlearrowright F h \qquad \circlearrowleft \frac{h}{\ell} F \ell = h F$$

TERMINOLOGIA

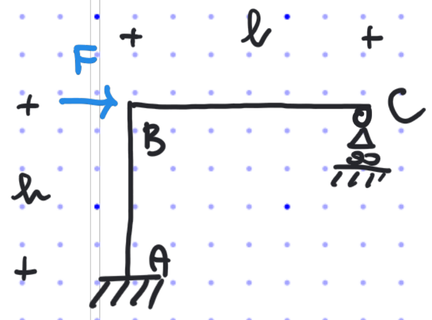




Lo schema in cui i vincoli sono sostituiti dalle corrispondenti reazioni è detto

"DIAGRAMMA DI STRUTTURA LIBERA"

(struttura iperstatica o staticamente indetermin.)

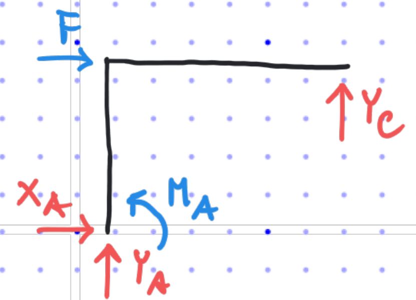


gradi di l.l.

$n = 3 \times n_c = 3 \times 1 = 3$

molt. vincoli

$m = 3 + 1 = 4$



Eq^{ni} card.^{li}:

$(\rightarrow)\quad X_A + F = 0$

$(\uparrow)\quad Y_A + Y_C = 0$

$(\overset{\curvearrowleft}{A})\quad M_A + l\,Y_C - hF = 0$

Vettore incognite

$$\underline{f}_r = \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ M_A \\ Y_C \end{bmatrix}$$

$n = 3$ equazioni

$m = 4$ incognite

$$\underline{B}\,\underline{f}_r + \underline{f}_a = \underline{0}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & l \end{bmatrix} \qquad \underline{f}_a = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ -hF \end{bmatrix}$$

GRADO DI IPERSTATICITÀ (G.D.I.)

L'insieme degli stati di coazione costituisce uno SPAZIO LINEARE

La dimensione di tale spazio è:

$$\underline{f}_r^N = \begin{bmatrix} 0 \\ -Y_C \\ -\ell Y_C \\ Y_C \end{bmatrix} \quad Y_C \in \mathbb{R} \text{ arbitr.}$$

$$i = m - p$$

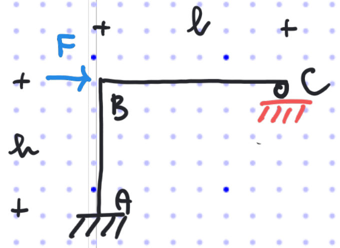
p ← rango di B

m ← # vinc. sempl.

Nell'esempio appena visto, si ha $i=1$.

Se aggiungessimo un ulteriore vincolo, il grado di iperstaticità aumenterebbe di una unità.

ES:

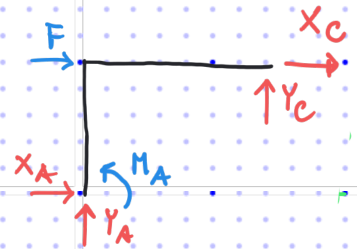


gradi di lib.

$n = 3 \times n_c = 3 \times 1 = 3$

molt. vincoli

$m = 4 + 1 = 5$



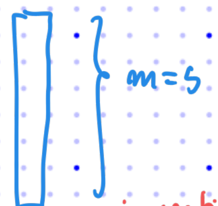
Eq.ni card.li:

$(\rightarrow)$ $X_A + F + X_C = 0$

$(\uparrow)$ $Y_A + Y_C = 0$

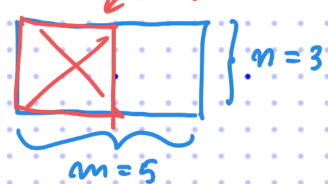
$(\circlearrowleft A)$ $M_A + \ell Y_C - hF = 0$

$\underline{F}_r =$



invertib. (rango max)

$\underline{B} =$



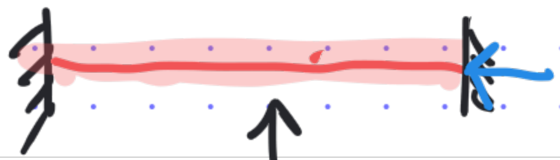
$p = 3$

$i = m - p = 5 - 3 = 2$

PROPRIETÀ DELLE STRUTTURE STATICAMENTE INDETERMINATE / IPERSTATICHE

- In una tale struttura possono instaurarsi stati di sollecitazione anche in assenza di forze attive.

ES:



3 volte iperst.

dilatazione termica

compressione