

forza di volume è un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla forza di superficie, porta alla relazione (detta *teorema di Cauchy sulla rappresentazione delle tensioni*):

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n(\mathbf{x}) &= \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \\ &= (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z) \mathbf{i} + (\tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) \mathbf{j} + \\ &\quad + (\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z) \mathbf{k} \quad \text{in } V \end{aligned} \quad (3.17)$$

generalizzazione di quanto vedremo al Paragrafo 4.2 del Capitolo 4.

Se l'elemento tetraedrico è scelto con la faccia inclinata corrispondente a un elemento della frontiera del continuo si possono dimostrare le analoghe della (3.17):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \quad \text{in } S_f \\ \mathbf{r}(\mathbf{x}) &= \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \quad \text{in } S_u \end{aligned} \quad (3.18)$$

Nelle (3.18) occorre sempre ricordare che le forze di contatto esterne  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  sono assegnate, mentre le reazioni vincolari  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  sono incognite. Le (3.17), (3.18) esprimono un risultato comunque fondamentale: per conoscere la tensione in un punto interno o la forza di contatto specifica (attiva o reattiva) in un punto di frontiera del continuo è necessario conoscere la tensione agente su tre facce elementari parallele ai piani coordinati.

**Problema statico.** Il problema statico (dinamico se si tiene conto anche delle azioni d'inerzia) per il continuo nella configurazione  $C$  è il seguente: assegnati i campi di forze a distanza  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  in  $V$  e di contatto  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  su  $S_f$ , si determinino le reazioni vincolari  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  su  $S_u$  e le tensioni  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  in  $V$  tramite le (3.15), (3.16), (3.18).

In generale, il problema statico non ammette soluzioni univoche: si hanno solo le tre equazioni differenziali scalari (3.15) nelle sei componenti indipendenti della tensione  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ . Con il linguaggio della classificazione statica dei sistemi di corpi in atto di moto rigido si può dire che i continui costituiscono sistemi soggetti a *indeterminazione statica o iperstatici*.

### 3.6 Tensione normale media in una trave caricata assialmente

Gli elementi costituenti le strutture o le macchine presentano spesso una dimensione prevalente rispetto alle altre due. In più, sono soggetti a carichi assiali generalmente applicati nelle sezioni di estremità. Le aste reticolari, le sospensioni e i bulloni sono esempi comuni di elementi di questo tipo. In questo paragrafo si determinerà la distribuzione della tensione media agente sulla sezione trasversale di una trave caricata assialmente come illustrato nella Figura 3.35a. Si assume che la sezione trasversale si mantenga costante sull'intera lunghezza della trave, la quale è detta pertanto **prismatica**. Si trascura il peso della trave e si suppone di suddividerla idealmente come indicato nella Figura 3.35b: per l'equilibrio del tronco inferiore di trave, la forza interna risultante  $N$  che agisce sulla sezione trasversale deve avere lo stesso modulo, la stessa direzione e il verso opposto della forza esterna  $P$  applicata all'estremità inferiore della trave.

**Ipotesi di studio.** Prima di determinare la distribuzione della tensione media agente sulla sezione trasversale della trave è necessario introdurre due ipotesi di studio riguardanti la descrizione del materiale e la modalità di applicazione del carico esterno.

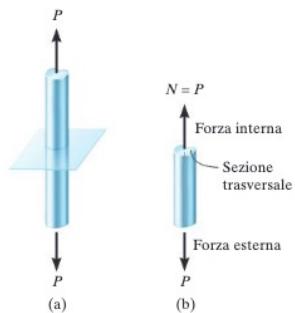


Figura 3.35 (segue)

1. La trave deve essere rettilinea e deve rimanere tale dopo l'applicazione del carico, mentre la sezione trasversale deve mantenersi piana durante un qualsiasi processo deformativo della trave, consistente in cambiamenti di forma o di volume. In questo caso, le linee orizzontali e verticali di una griglia idealmente incisa sulla trave *si deformeranno uniformemente* a seguito dell'applicazione del carico, Figura 3.35c. Si trascurerà di considerare le regioni della trave prossime alle estremità, laddove l'applicazione dei carichi esterni può causare *deformazioni localizzate*, e ci si soffermerà solo sulla distribuzione delle tensioni nella parte mediana della trave.

2. Perché la trave subisca una deformazione uniforme,  $P$  deve essere applicato nel centro d'area della sezione trasversale e deve essere diretto secondo la linea d'asse (linea dei centri d'area) della trave, mentre il materiale deve essere omogeneo e isotropo. Un materiale è **omogeneo** se possiede le medesime proprietà fisiche meccaniche in ogni punto del suo volume ed è **isotropo** se tali proprietà sono uguali in ogni direzione. L'ipotesi di omogeneità e isotropia è lecita per molti materiali di interesse strutturale. L'acciaio, ad esempio, pur contenendo migliaia di cristalli orientati casualmente in ogni millimetro cubo del suo volume, può essere considerato omogeneo e isotropo nei problemi che coinvolgono porzioni di materiale di dimensioni molto maggiori di quelle del singolo cristallo. Occorre tuttavia specificare che l'acciaio può essere reso anisotropo dalle lavorazioni a freddo (trafilatura o sagomatura a temperature subcritiche). Un materiale **anisotropo** possiede proprietà diverse lungo direzioni differenti. Ciononostante, se l'anisotropia implica una direzione preferenziale di comportamento lungo la linea d'asse della trave, quest'ultima continuerà a deformarsi uniformemente se soggetta a un carico assiale. È questo il comportamento manifestato, ad esempio, da un materiale omogeneo e anisotropo come il legno nella direzione delle sue fibre.

**Distribuzione della tensione normale media.** Se la trave si deforma uniformemente come descritto, tale deformazione deve essere l'effetto di una tensione normale ovunque *costante*  $\sigma$ , Figura 3.35d. In conseguenza di ciò il singolo elemento finito di area  $\Delta A$  della sezione trasversale è soggetto a una forza  $\Delta F = \sigma \Delta A$  e la somma delle forze agenti sull'intera area della sezione deve essere equivalente alla forza interna risultante  $N$ . Se si considerano le corrispondenti grandezze infinitesime  $\Delta A \rightarrow dA$  e  $\Delta F \rightarrow dF$ , e si assume che  $\sigma$  sia costante, si ottiene

$$\begin{aligned} +\uparrow F_{Rz} &= \Sigma F_z \\ \int dF &= \int_A \sigma dA \\ N &= \sigma A \\ \sigma &= \frac{N}{A} \end{aligned} \quad (3.19)$$

in cui

$\sigma$  = tensione normale media in un generico punto della sezione trasversale;

$N$  = forza interna normale, applicata nel centro d'area della sezione.  $N$  si calcola applicando il metodo delle sezioni e le equazioni di equilibrio; nel caso in oggetto, è  $N = P$ ;

$A$  = area della sezione trasversale della trave.



Figura 3.35 (continua)

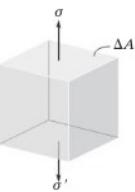


Figura 3.36



▶ Questo tirante di acciaio è utilizzato per tenere sospesa una parte della scala, quindi è soggetto a una tensione di trazione.

La forza interna  $N$  deve essere applicata nel centro d'area della sezione, poiché i momenti indotti dalla distribuzione uniforme di tensione sono nulli rispetto agli assi  $x$  e  $y$  passanti per questo punto, Figura 3.35d. Si ha

$$(M_R)_x = \sum M_x \rightarrow 0 = \int_A y dF = \int_A y \sigma dA = \sigma \int_A y dA$$

$$(M_R)_y = \sum M_y \rightarrow 0 = - \int_A x dF = - \int_A x \sigma dA = -\sigma \int_A x dA$$

Queste equazioni sono identicamente soddisfatte per la definizione di centro d'area  $\int y dA = 0$  e  $\int x dA = 0$ . (Si veda l'Appendice C).

**Equilibrio.** Se si considera un elemento infinitesimo di volume in un punto generico della sezione trasversale di una trave caricata assialmente, il valore della tensione normale agente è unico. Per l'equilibrio delle forze agenti in direzione verticale sull'elemento, Figura 3.36, si ottiene:

$$\Sigma F_z = 0;$$

$$\sigma(\Delta A) - \sigma'(\Delta A) = 0$$

$$\sigma = \sigma'$$

In altri termini, le due componenti di tensione normale agenti sull'elemento devono essere uguali in modulo, ma opposte in verso. Si parla in questo caso di *stato monoassiale di tensione*.

Le formule precedenti si applicano a elementi strutturali soggetti a trazione o a compressione, come mostrato nella Figura 3.37. Secondo un'interpretazione grafica, il *modulo* della forza interna risultante  $N$  è equivalente al *volumen* sotteso al diagramma della distribuzione di tensione, ovvero  $N = \sigma A$  (volume = altezza  $\times$  base). In conseguenza del bilancio dei momenti, la forza risultante passa per il centro geometrico di questo volume.

L'ipotesi di trave prismatica può essere rilassata di poco, includendo nell'analisi anche le travi a *debole variazione di sezione*. Ad esempio, nel caso di una trave con sezione rettangolare variabile secondo un angolo di 15°, la tensione normale media calcolata come  $\sigma = N/A$  è inferiore solo del 2.2% al valore esatto derivante dalla *teoria della elasticità*.

**Valore massimo della tensione normale media.** Nella trattazione svolta, sia la forza interna  $N$  sia l'area della sezione trasversale sono state considerate *uniformi* lungo la linea d'asse della trave, mante-

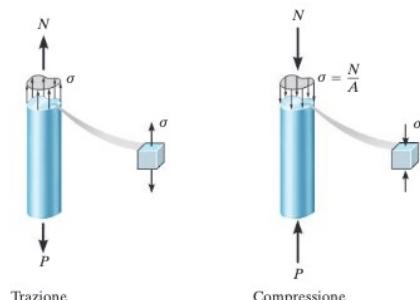


Figura 3.37

nendosi, di conseguenza, *uniforme* anche la tensione normale  $\sigma = N/A$ . Può accadere tuttavia che la trave sia soggetta a più di un carico esterno applicato lungo l'asse o che presenti una variazione nella sezione trasversale. In casi come questi, la tensione normale media agente nella trave potrebbe variare da una sezione all'altra e può essere richiesto di determinarne il valore *massimo*, ovvero di individuare la sezione in cui il rapporto  $N/A$  è massimo. A tal fine, è necessario calcolare la forza interna  $N$  in ogni sezione della trave ed è d'aiuto disegnare un diagramma che ne illustri l'andamento (*diagramma della forza normale*). Tale diagramma consiste, nello specifico, in una curva le cui ordinate forniscono il valore della forza normale  $N$  in funzione della posizione  $x$  assunta lungo l'asse della trave. Per convenzione,  $N$  è considerata positiva se induce trazione nell'elemento e negativa se induce compressione. Dopo aver calcolato la forza normale in ogni sezione della trave, si individua il valore massimo del rapporto  $N/A$ .

### Punti salienti

- ▶ Se un corpo soggetto a un carico esterno viene suddiviso idealmente in due parti, sulla frontiera di separazione agisce una distribuzione di forze responsabile dell'equilibrio di ciascuna parte. La forza interna specifica agente in un punto del corpo è chiamata *tensione*.
- ▶ Una tensione è una forza agente su un'area al tenere dell'area a zero. In questa definizione si assume che il materiale sia continuo e dotato di coesione nel punto considerato.
- ▶ Le componenti di tensione in un punto dipendono dai carichi esterni agenti sul corpo e dall'orientazione della giacitura dell'elemento di volume considerato nel punto.
- ▶ Se una trave prismatica è composta da materiale omogeneo e isotropo ed è soggetta a una forza assiale applicata nel centro d'area della sua sezione trasversale, lo stato di tensione interno alla trave è descritto solo da tensioni normali. La distribuzione delle tensioni normali sulla sezione trasversale è considerata uniforme *in valore medio*.

### Procedura di analisi

Se una forza interna risultante  $N$  agisce in direzione normale alla sezione trasversale di un elemento strutturale, l'equazione  $\sigma = N/A$  fornisce il *valore medio* della tensione normale sulla sezione. Nel caso di travi caricate assialmente, l'applicazione di tale equazione consta dei seguenti passaggi.

#### Forze interne

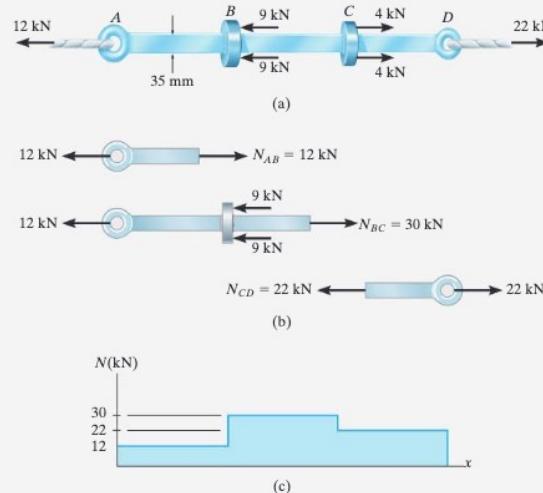
- ▶ Si suppone di sezionare la trave *ortogonalmente* all'asse longitudinale nel punto in cui deve essere determinata la tensione normale e si utilizzano lo schema di corpo libero e l'equazione di equilibrio delle forze per calcolare la forza interna normale  $N$  agente sulla sezione.

#### Tensione normale media

- ▶ Si determina l'area della sezione trasversale della trave e si calcola la tensione normale media  $\sigma = N/A$ .
- ▶ La tensione normale  $\sigma$  viene rappresentata, preferibilmente, su un elemento di volume estratto nel punto della sezione in cui essa è stata calcolata: prima si disegna la componente  $\sigma$  agente sulla faccia dell'elemento appartenente alla sezione e concorde con la forza interna  $N$ , poi si disegna la componente  $\sigma$  agente sulla faccia opposta.

### Esempio 3.19

L'asta nella Figura 3.38a ha una larghezza costante di 35 mm e uno spessore di 10 mm. Si determini il valore massimo della tensione normale media nell'asta soggetta alla condizione di carico indicata.



### SOLUZIONE

**Azione interna.** Si osserva che le forze interne assiali sono costanti nei tratti  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$ , ma differenti in modulo. Nella Figura 3.38b queste forze sono determinate applicando il metodo delle sezioni. Il diagramma della forza normale, che rappresenta graficamente questi risultati, è riportato nella Figura 3.38c. Si osserva che il valore massimo della forza normale si raggiunge nel tratto  $BC$ , dove  $N_{BC} = 30 \text{ kN}$ . In questo stesso tratto si raggiunge anche il valore massimo della tensione normale media, poiché l'area della sezione trasversale è uniforme lungo l'asta.

**Tensione normale media.** Applicando l'Equazione (3.19) si ottiene:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A} = \frac{30(10^3) \text{ N}}{(0.035 \text{ m})(0.010 \text{ m})} = 85.7 \text{ MPa}$$

**OSSERVAZIONE:** La distribuzione di tensione agente in una generica sezione trasversale dell'asta compresa nel tratto  $BC$  è rappresentata nella Figura 3.38d. Il volume sotteso al diagramma della distribuzione è equivalente al carico di 30 kN, ovvero  $30 \text{ kN} = (85.7 \text{ MPa})(35 \text{ mm})(10 \text{ mm})$ .

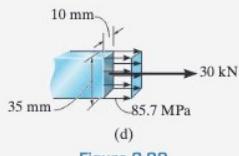


Figura 3.38

### Esempio 3.20

Una lampada di  $80(9.81) \text{ N}$  è sostenuta dalle due asta  $AB$  e  $BC$  come mostrato nella Figura 3.39a. Si determini la tensione normale media in ciascuna asta nel caso in cui  $AB$  abbia un diametro di 10 mm e  $BC$  abbia un diametro di 8 mm.

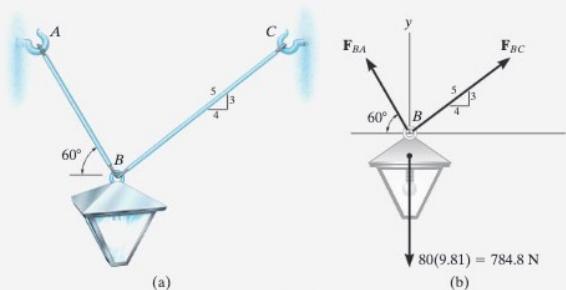


Figura 3.39

### SOLUZIONE

**Azione interna.** In primo luogo, si determina la forza assiale agente in ciascuna asta. Lo schema di corpo libero dell'asta è mostrato nella Figura 3.39b. Applicando le equazioni di equilibrio delle forze si ottiene

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= 0; & F_{BC} \left(\frac{4}{5}\right) - F_{BA} \cos 60^\circ &= 0 \\ \uparrow \sum F_y &= 0; & F_{BC} \left(\frac{3}{5}\right) + F_{BA} \sin 60^\circ - 784.8 \text{ N} &= 0 \\ F_{BC} &= 395.2 \text{ N}, & F_{BA} &= 632.4 \text{ N} \end{aligned}$$

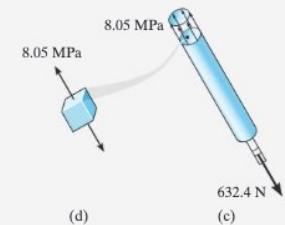
Per il terzo principio di Newton, o principio di azione e reazione, queste stesse forze sollecitano le asta e sono uniformi su tutta la loro lunghezza.

**Tensione normale media.** Applicando l'Equazione (3.19), si ottiene

$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A_{BC}} = \frac{395.2 \text{ N}}{\pi (0.004 \text{ m})^2} = 7.86 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{BA} = \frac{F_{BA}}{A_{BA}} = \frac{632.4 \text{ N}}{\pi (0.005 \text{ m})^2} = 8.05 \text{ MPa}$$

**OSSERVAZIONE:** La distribuzione della tensione normale media che agisce su una sezione trasversale dell'asta  $AB$  è mostrata nella Figura 3.39c. Il singolo elemento di volume estratto in un punto di tale sezione è sollecitato come indicato nella Figura 3.39d.



(d)

(c)

### Esempio 3.21

Nella Figura 3.40a è rappresentato un pezzo fuso in acciaio avente un peso specifico di  $\gamma_{\text{st}} = 80 \text{ kN/m}^3$ . Si determini la tensione media di compressione agente nei punti A e B.

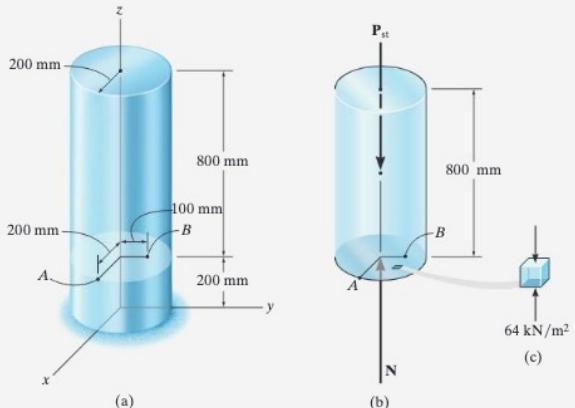


Figura 3.40

### SOLUZIONE

**Azione interna.** Lo schema di corpo libero del segmento superiore alla sezione passante per i punti A e B è mostrato nella Figura 3.40b. Il peso di questo segmento si determina come  $P_{\text{st}} = \gamma_{\text{st}} V_{\text{st}}$ . La forza interna assiale agente sulla sezione è pari a

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_z &= 0; & N - P_{\text{st}} &= 0 \\ N - (80 \text{ kN/m}^3)(0.8 \text{ m})\pi(0.2 \text{ m})^2 &= 0 \\ N &= 8.042 \text{ kN} \end{aligned}$$

**Tensione media di compressione.** L'area della sezione trasversale vale  $A = \pi(0.2 \text{ m})^2$  e la tensione media di compressione è pari a

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{N}{A} = \frac{8.042 \text{ kN}}{\pi(0.2 \text{ m})^2} \\ &= 64.0 \text{ kN/m}^2 \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE:** Le tensioni rappresentate sull'elemento di volume nella Figura 3.40c descrivono lo stato di tensione presente sia nel punto A sia nel punto B. Si osservi che la componente di tensione agente sulla faccia inferiore dell'elemento è diretta verso l'alto perché concorde con la forza interna  $\mathbf{N}$  agente sulla giacitura inferiore della sezione trasversale considerata.

### Esempio 3.22

L'elemento AC rappresentato nella Figura 3.41a è soggetto a una forza verticale di 3 kN. Si determini il punto di applicazione x di questa forza in modo tale che la tensione media di compressione sull'appoggio in C sia pari alla tensione media di trazione nella biella AB. L'area della sezione trasversale della biella è pari a  $400 \text{ mm}^2$ , mentre l'area della superficie di contatto in C vale  $650 \text{ mm}^2$ .

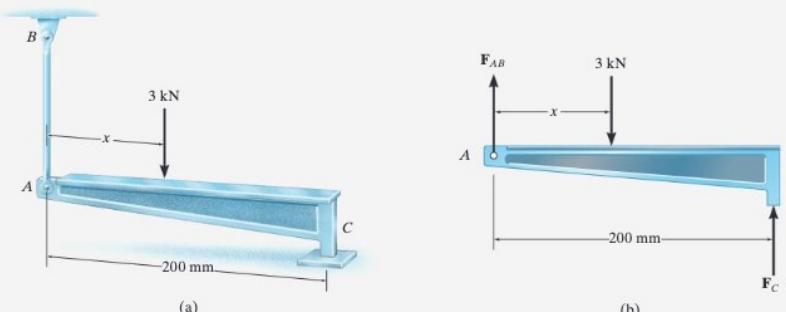


Figura 3.41

### SOLUZIONE

**Azione interna.** La relazione tra le forze applicate in A e in C si ricava considerando lo schema di corpo libero della trave AC, Figura 3.41b. Le incognite sono tre:  $F_{AB}$ ,  $F_C$  e  $x$ .

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{AB} + F_C - 3000 \text{ N} = 0 \quad (1)$$

$$+\downarrow \sum M_A = 0; \quad -3000 \text{ N}(x) + F_C(200 \text{ mm}) = 0 \quad (2)$$

**Tensione normale media.** Una terza equazione è necessaria per impostare che la tensione di trazione nella biella AB e la tensione di compressione in C siano uguali:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F_{AB}}{400 \text{ mm}^2} = \frac{F_C}{650 \text{ mm}^2} \\ F_C &= 1.625 F_{AB} \end{aligned}$$

Si sostituisce questo risultato nell'Equazione (1) e si risolve per  $F_{AB}$  e per  $F_C$ , ottenendo

$$F_{AB} = 1143 \text{ N} \quad F_C = 1857 \text{ N}$$

Il punto di applicazione del carico si ricava dall'Equazione (2)

$$x = 124 \text{ mm}$$

**OSSERVAZIONE:** Deve essere  $0 < x < 200 \text{ mm}$ .

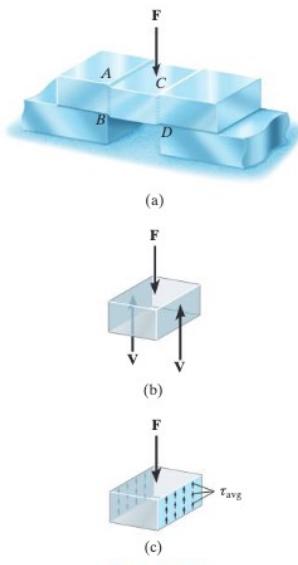


Figura 3.42

### 3.7 Tensione tangenziale media

Secondo la definizione data nel Paragrafo 3.4 la tensione tangenziale è la componente di tensione che agisce *nel piano* della sezione. Per comprendere il meccanismo di azione di questo tipo di tensione, si consideri la forza  $F$  applicata sulla barra nella Figura 3.42a. Se gli appoggi sono rigidi e  $F$  è sufficientemente grande, la barra si deformerà subendo uno scorrimento lungo i piani identificati da  $AB$  e  $CD$ . Come mostrato dallo schema di corpo libero del tratto mediano della trave compreso tra i due appoggi, Figura 3.42b, una forza di taglio pari a  $V = F/2$  deve essere applicata su ciascuna sezione perché il tratto sia in equilibrio. La **tensione tangenziale media** che, agendo su ciascuna delle due sezioni, corrisponde a questa forza di taglio è definita da

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A} \quad (3.20)$$

in cui

- $\tau_{\text{avg}}$  = tensione tangenziale media, assunta uniforme sulla sezione;
- $V$  = forza interna di taglio, determinata a partire dalle equazioni di equilibrio;
- $A$  = area della sezione.

La distribuzione della tensione tangenziale media agente sulle due sezioni è illustrata nella Figura 3.42c. Si osservi che  $\tau_{\text{avg}}$  è concorde con la forza  $V$  che ne rappresenta la risultante sulla sezione.

La condizione di carico esemplificata nella Figura 3.42 è un caso di **taglio semplice o diretto**, così chiamato perché causato dall'*azione diretta* della forza applicata  $F$ . Questo tipo di taglio è caratteristico di collegamenti semplici realizzati con bulloni, perni, saldature, e così via, per i quali, tuttavia, l'Equazione (3.20) costituisce un'*approssimazione*. Sebbene un'analisi più accurata conduca spesso a valori molto maggiori delle tensioni tangenziali sulle sezioni critiche, l'approssimazione può essere ritenuta lecita in molti problemi di progettazione e analisi strutturale. Le **normative tecniche**, ad esempio, ne consentono l'uso nel dimensionamento degli elementi di collegamento, quali i bulloni, e nel calcolo della resistenza delle giunzioni sollecitate a taglio. A tale riguardo, due sono i tipi di taglio che ricorrono frequentemente nella pratica e che vengono qui analizzati separatamente.

**Taglio singolo.** Le giunzioni in acciaio e in legno illustrate nelle Figure 3.43a e 3.43c, rispettivamente, sono esempi di collegamenti sollecitati a **taglio singolo**, anche detti, frequentemente, **giunzioni a sovrapposizione singola (lap joints)**.

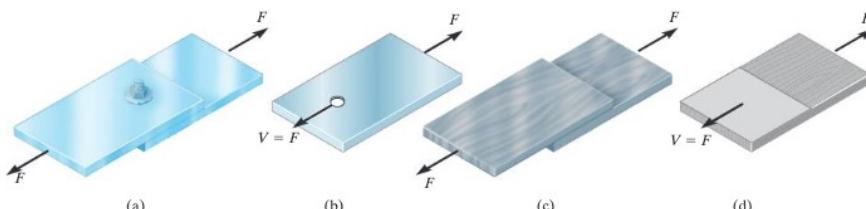


Figura 3.43

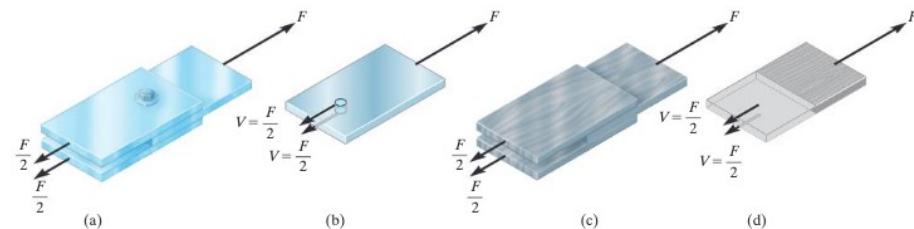


Figura 3.44

Si assuma che gli elementi collegati abbiano uno spessore contenuto e che l'attrito tra di essi, dipendente dal serraggio applicato dal dado nella Figura 3.43a, sia trascurabile.

I diagrammi di corpo libero del singolo elemento collegato sono mostrati nelle Figure 3.43b e 3.43d.

Trascurando il momento indotto dalla forza  $F$ , dato lo spessore sottile degli elementi collegati, la sezione resistente del bullone nella Figura 3.43b e la superficie di contatto nella Figura 3.43d sono soggette unicamente alla forza di taglio  $V = F$ . Considerando questa forza nell'Equazione (3.20), si determina la tensione tangenziale media agente sulla sezione indicata nella Figura 3.43d.

**Taglio doppio.** Se la giunzione è realizzata come nella Figura 3.44a e 3.44c, sono due le sezioni sollecitate a taglio. Giunzioni di questo tipo sono dette frequentemente a **sovrapposizione doppia (double lap joints)**. I diagrammi di corpo libero dell'elemento in posizione centrale nel collegamento sono mostrati nella Figura 3.44b e 3.44d. La sollecitazione agente è definita **taglio doppio** perché una forza di taglio pari a  $V = F/2$  agisce su *ciascuna* delle due sezioni. Considerando questa forza nell'Equazione  $\tau_{\text{avg}} = V/A$  si determina la tensione tangenziale media su ciascuna sezione.

**Equilibrio.** Si consideri un corpo solido e si assuma che su una sua sezione agisca la forza interna di taglio  $V$ , Figura 3.45a. Si consideri un elemento di volume in un punto della sezione e le tensioni tangenziali su di esso agenti, Figura 3.45b. Disegnato lo schema di corpo libero dell'elemento, Figura 3.45c, dall'equilibrio delle forze in direzione  $y$  segue:

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= 0; & \text{forza} \\ & \tau_{zy} (\Delta x \Delta y) - \tau'_{zy} \Delta x \Delta y = 0 & \text{tensione area} \\ \tau_{zy} &= \tau'_{zy} \end{aligned}$$

Analogamente, dall'equilibrio delle forze in direzione  $z$  segue  $\tau_{yz} = \tau'_{yz}$ . Infine, dall'equilibrio dei momenti rispetto all'asse  $x$

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= 0; & \text{momento} \\ & -\tau_{zy} (\Delta x \Delta y) \Delta z + \tau_{yz} (\Delta x \Delta z) \Delta y = 0 & \text{forza braccio} \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} & \text{tensione area} \end{aligned}$$

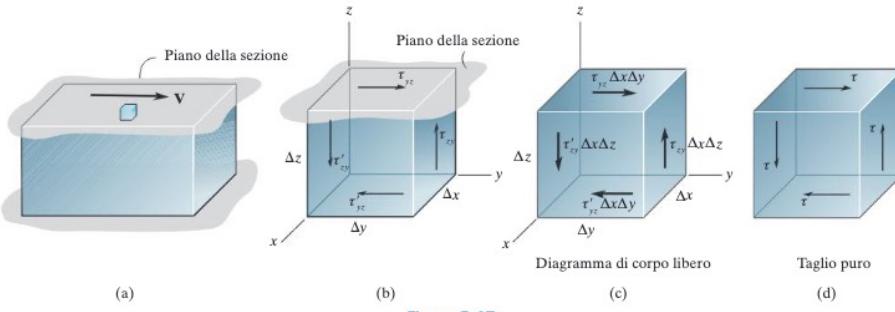


Figura 3.45

ottenendo

$$\tau_{xy} = \tau'_{zy} = \tau_{yz} = \tau'_{yx} = \tau$$

In altri termini, l'equilibrio delle forze e dei momenti implica che la tensione tangenziale agente sulla faccia superiore dell'elemento di volume sia associata alle tensioni tangenziali agenti su altre tre facce. In questo caso, le quattro tensioni tangenziali devono essere tutte uguali in modulo e a due a due dirette o verso lo spigolo comune o in verso opposto rispetto a esso. Tale proprietà è detta di *reciprocità delle tensioni tangenziali* (si veda anche il Paragrafo 3.5), mentre lo stato di sollecitazione rappresentato nella Figura 3.45d è noto come *taglio puro*.

Finora si è considerato il caso del taglio semplice indotto dall'azione *diretta* di un carico, nei capitoli seguenti si mostrerà come le tensioni tangenziali possano essere dovute anche all'azione *indiretta* di altri tipi di carico.

## Punti salienti

- Se due elementi di spessore contenuto sono collegati tra loro, i carichi applicati possono indurre una sollecitazione di taglio con flessione trascurabile. In questo caso, nello svolgimento dell'analisi strutturale è conveniente considerare agente sulla sezione una *tensione tangenziale media*.
- Gli elementi di collegamento quali chiodi o bulloni sono soggetti frequentemente a forze di taglio. Il valore della forza di taglio agente sull'elemento di collegamento è massimo in corrispondenza dell'interfaccia tra le superfici collegate. Lo schema di corpo libero dell'elemento consente di determinare il modulo e il verso di questa forza.

## Procedura di analisi

L'equazione  $\tau_{avg} = V/A$  consente di calcolare unicamente la tensione tangenziale media. L'applicazione consta dei passaggi seguenti.

### Forza interna di taglio

- Si suppone di sezionare l'elemento strutturale nel punto in cui deve essere determinata la tensione tangenziale media.

- Si disegna lo schema di corpo libero e si calcola la forza interna di taglio  $V$  necessaria a garantire l'equilibrio della porzione considerata.

### Tensione tangenziale media

- Si determina l'area della sezione trasversale e si calcola la tensione tangenziale media  $\tau_{avg} = V/A$
- La tensione tangenziale media  $\tau_{avg}$  viene rappresentata preferibilmente su un elemento di volume

estratto nel punto della sezione in cui essa è stata calcolata: prima si disegna la componente  $\tau_{avg}$  agente sulla faccia dell'elemento appartenente alla sezione e concorde con la forza interna  $V$ , poi si disegnano le componenti agenti sulle tre facce adiacenti con i versi indicati nello schema nella Figura 3.45.

## Esempio 3.23

La sezione trasversale della barra rappresentata nella Figura 3.46a è quadrata di dimensioni pari a 40 mm. Si determinino le tensioni medie normale e tangenziale agenti sulle sezioni *a-a* e *b-b* nel caso in cui la barra sia soggetta a una forza assiale di 800 N applicata nel centro d'area della sezione trasversale.

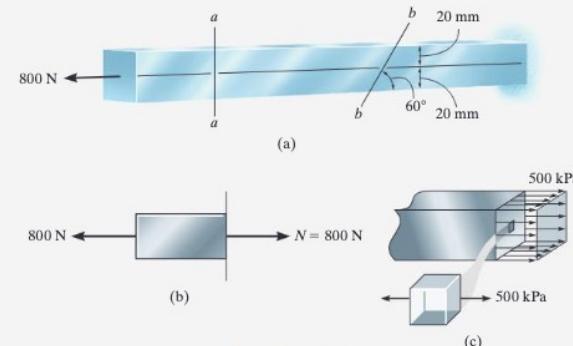


Figura 3.46 (segue)

## SOLUZIONE

### Parte (a)

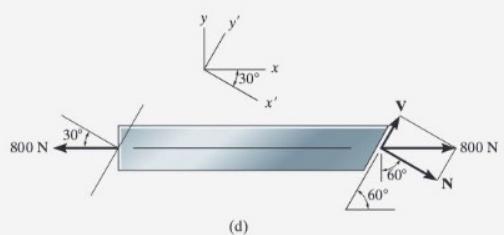
**Azione interna.** Si traccia la sezione *a-a*, Figura 3.46b, sulla quale agisce un'unica componente dell'azione interna, la forza normale  $N = 800 \text{ N}$ .

**Tensione media.** La tensione normale media si calcola applicando l'Equazione (3.19).

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{800 \text{ N}}{(0.04 \text{ m})(0.04 \text{ m})} = 500 \text{ kPa}$$

Le tensioni tangenziali sulla sezione sono nulle poiché è nulla la forza di taglio agente.

$$\tau_{avg} = 0$$



**OSSERVAZIONE:** La distribuzione della tensione normale media sulla sezione è illustrata nella Figura 3.46c.

#### Parte (b)

**Azione interna.** Se la barra viene sezionata lungo *b-b*, lo schema di corpo libero del segmento di barra a sinistra della sezione è rappresentato nella Figura 3.46d. Sulla sezione agisce sia una forza normale (**N**) sia una forza di taglio (**V**). Facendo riferimento agli assi *x*, *y*, si richiede che

$$+\sum F_x = 0; \quad -800 \text{ N} + N \sin 60^\circ + V \cos 60^\circ = 0$$

$$+\sum F_y = 0; \quad V \sin 60^\circ - N \cos 60^\circ = 0$$

oppure, in via più diretta, facendo riferimento agli assi *x'* e *y'*, che

$$+\sum F_{x'} = 0; \quad N - 800 \text{ N} \cos 30^\circ = 0$$

$$+\sum F_{y'} = 0; \quad V - 800 \text{ N} \sin 30^\circ = 0$$

Entrambi i sistemi di equazioni conducono alla soluzione

$$N = 692.8 \text{ N}$$

$$V = 400 \text{ N}$$

**Tensione media.** In questo caso, la superficie della sezione ha una larghezza di 40 mm e un'altezza di  $40 \text{ mm} / \sin 60^\circ = 46.19 \text{ mm}$ , Figura 3.46a. La tensione normale media è pari a

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{692.8 \text{ N}}{(0.04 \text{ m})(0.04619 \text{ m})} = 375 \text{ kPa}$$

e la tensione tangenziale media è pari a

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A} = \frac{400 \text{ N}}{(0.04 \text{ m})(0.04619 \text{ m})} = 217 \text{ kPa}$$

**OSSERVAZIONE:** La distribuzione di tensione è illustrata nella Figura 3.46e.

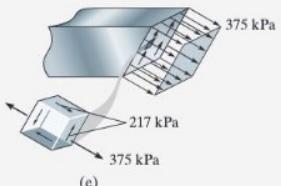


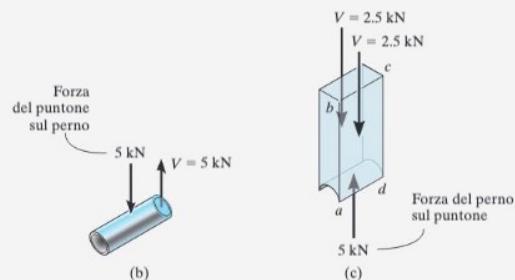
Figura 3.46 (continua)

#### Esempio 3.24

Il puntone in legno rappresentato nella Figura 3.47a è agganciato un perno in acciaio di 10 mm di diametro fissato alla parete. Assumendo che il puntone sia soggetto a un carico verticale di 5 kN, si calcoli la tensione tangenziale media agente nel perno nella sezione interna alla parete e sui due piani del puntone indicati nella figura, uno dei quali è denominato *abcd*.

#### SOLUZIONE

**Forza interna di taglio.** Come mostrato dallo schema di corpo libero nella Figura 3.47b, il perno fissato alla parete è soggetto a una forza di taglio di 5 kN. Lo schema di corpo libero della porzione di puntone a contatto con il perno è riportato nella Figura 3.47c. La forza di taglio che agisce su ciascuno dei piani indicati nella figura è pari a 2.5 kN.



**Tensione tangenziale media.** Per il perno

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A} = \frac{5000 \text{ N}}{\pi (0.005 \text{ m})^2} = 63.7 \text{ MPa}$$

Per il puntone

$$\tau_{\text{avg}} = \frac{V}{A} = \frac{2500 \text{ N}}{(0.04 \text{ m})(0.02 \text{ m})} = 3.12 \text{ MPa}$$

**OSSERVAZIONE:** La distribuzione della tensione tangenziale media agente nel perno e nel puntone è illustrata nella Figura 3.47d e 3.47e rispettivamente. In ciascuna di queste figure si riporta anche l'elemento infinitesimo di volume estratto da un punto della sezione considerata. Si presti attenzione al fatto che le componenti di tensione tangenziale agiscono non solo sulla faccia dell'elemento appartenente alla sezione, ma anche sulle facce adiacenti.

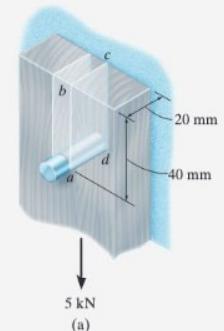
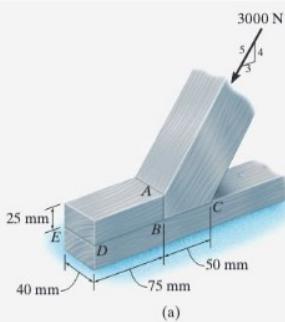


Figura 3.47

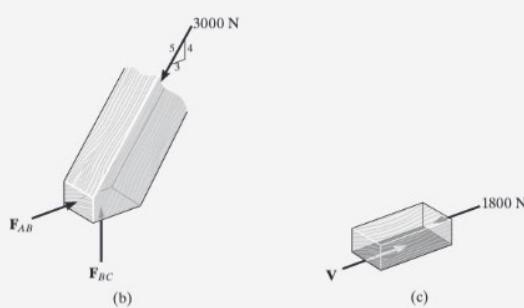


### Esempio 3.25

L'elemento inclinato rappresentato nella Figura 3.48a è soggetto a una forza di compressione di 3000 N. Si determini la tensione media di compressione agente sulle aree di contatto individuate da  $AB$  e da  $BC$  e la tensione tangenziale media agente sul piano orizzontale individuato da  $EDB$ .

#### SOLUZIONE

**Azione interna.** Lo schema di corpo libero dell'elemento inclinato è riportato nella Figura 3.48b. Le forze di compressione che agiscono sulle aree di contatto sono



$$+\sum F_x = 0; \quad F_{AB} - 3000 N \left(\frac{3}{5}\right) = 0 \quad F_{AB} = 1800 N$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{BC} - 3000 N \left(\frac{4}{5}\right) = 0 \quad F_{BC} = 2400 N$$

Inoltre, dallo schema di corpo libero del segmento superiore della trave orizzontale, Figura 3.48c, si ricava la forza di taglio agente sul piano orizzontale  $EDB$

$$+\sum F_x = 0; \quad V = 1800 N$$

**Tensioni medie.** Le tensioni medie di compressione sul piano orizzontale e sul piano verticale della trave inclinata valgono

$$\sigma_{AB} = \frac{1800 N}{(25 mm)(40 mm)} = 1.80 N/mm^2$$

$$\sigma_{BC} = \frac{2400 N}{(50 mm)(40 mm)} = 1.20 N/mm^2$$

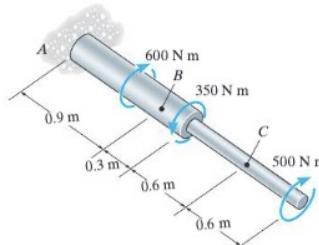
Le distribuzioni di tensione corrispondenti sono illustrate nella Figura 3.48d. La tensione tangenziale media che agisce sul piano orizzontale individuato da  $EDB$  vale

$$\tau_{avg} = \frac{1800 N}{(75 mm)(40 mm)} = 0.60 N/mm^2$$

La distribuzione di tensione corrispondente è illustrata nella Figura 3.48e.

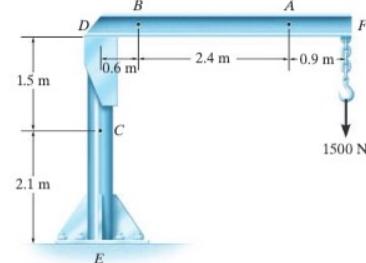
### Problemi

3.1. Si determini il momento torcente agente sulle sezioni comprese tra i punti  $B$  e  $C$ .



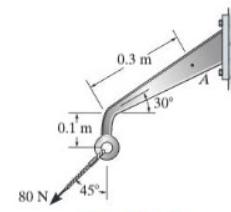
Problema 3.1

le azioni interne risultanti agenti sulle sezioni trasversali in  $A$ ,  $B$  e  $C$ .



Problema 3.4

3.2. Una forza di 80 N è applicata sulla mensola mostrata nella figura. Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione in  $A$ .



Problema 3.2

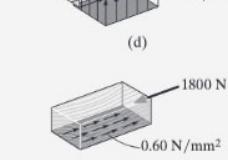
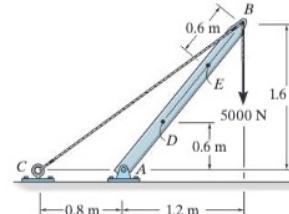


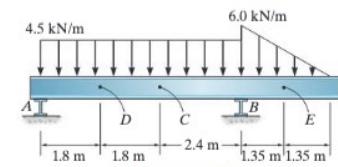
Figura 3.48

3.3. La trave  $AB$  è vincolata al suolo mediante la cerniera in  $A$  e il cavo  $BC$ . Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione trasversale in  $D$ .



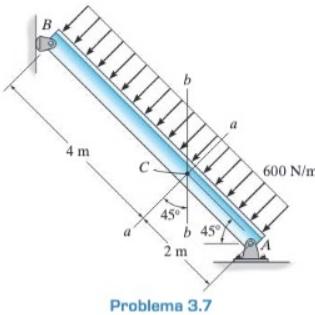
Problema 3.3

3.6. Si consideri la trave appoggiata nella figura, soggetta a un carico distribuito. Si determinino le caratteristiche della sollecitazione agenti sulle sezioni trasversali in  $D$  e in  $E$ . Si ipotizzi che le reazioni vincolari esercitate dagli appoggi in  $A$  e in  $B$  siano verticali.



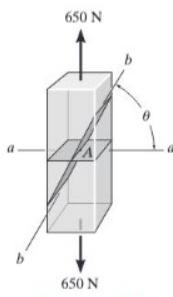
Problema 3.6

**3.7.** Si determinino le azioni interne risultanti agenti (a) sulla sezione  $a-a$  e (b) sulla sezione  $b-b$ . Il centro d'area di ciascuna delle due sezioni coincide con il punto  $C$ .



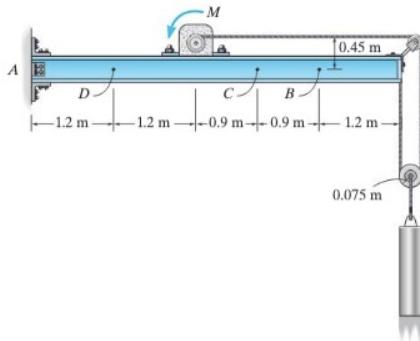
### Problema 3.7

**3.8.** Si determinino la forza normale e la forza di taglio agenti (a) sulla sezione *a-a* e (b) sulla sezione *b-b* dell'elemento rappresentato nella figura. Entrambe le sezioni passano per il punto *A*. Si assuma  $\theta = 60^\circ$ . La forza di 650 N è applicata lungo la linea d'asse dell'elemento.



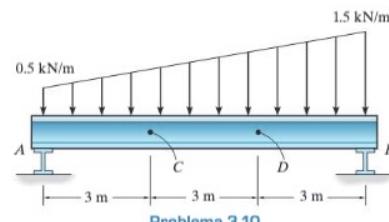
### Problema 3.8

**3.9.** Si determinino le caratteristiche della sollecitazione agenti sulle sezioni trasversali in  $C$  e in  $D$  della trave rappresentata nella figura.



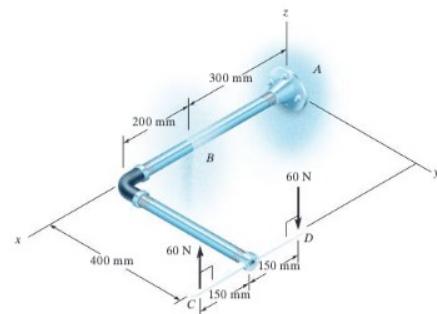
**Problema 3.9**

**3.10.** Si determinino le caratteristiche della sollecitazione agenti sulla sezione trasversale in C trave rappresentata nella figura, soggetta a un carico distribuito. Si ipotizzi che le reazioni vincolari esercitate dagli appoggi in A e in B siano verticali.



### Problema 3.10

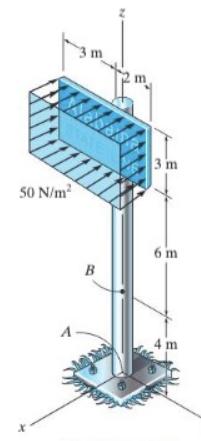
**3.11.** Il tubo rappresentato nella figura ha una massa di 12 kg/m ed è incastrato nella parete in A. Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione trasversale in B, trascurando il peso della chiave CD.



**Problema 3.11**

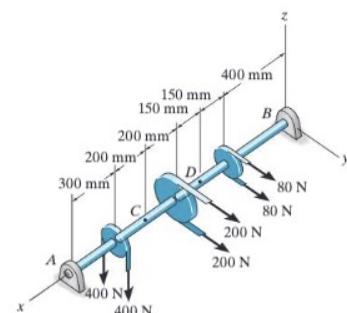
**3.12.** Il Problema 3.12 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

**3.13.** Il palo stradale rappresentato nella figura è incastrato nel terreno ed è soggetto a una pressione uniforme di  $50 \text{ N/m}^2$  agente perpendicolarmente all'insegna. Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione trasversale in  $B$ .



### Problema 3.13

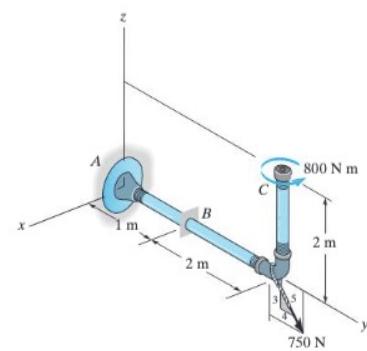
**3.14.** L'albero rappresentato nella figura è vincolato ai due appoggi in *A* e in *B* ed è soggetto alle forze trasmesse dalle pulegge fissate a esso. Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione trasversale in *C*. Le forze di 400 N agiscono nella direzione *z* negativa, mentre le forze di 200 N e di 80 N sono dirette nella direzione *y* positiva. Le reazioni esercitate sull'albero dai vincoli in *A* e in *B* sono dirette esclusivamente nelle direzioni *y* e *z*.



**Problema 3.14**

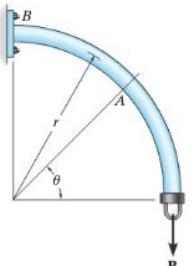
**3.15.** Il Problema 3.15 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

**3.16.** Il tubo rappresentato nella figura ha una massa di 12 kg/m ed è incastonato nella parete in *A*. Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione trasversale in *B*.



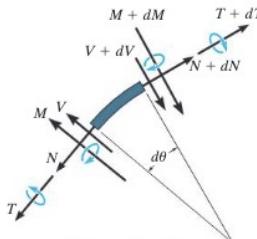
**Problema 3.16**

**3.17.** Nella figura è rappresentata una barra curva incastrata nella parete in *B*. Il raggio della linea d'asse della barra è pari a *r*. Si determinino le azioni interne risultanti agenti sulla sezione trasversale in *A* che forma un angolo con l'orizzontale.



Problema 3.17

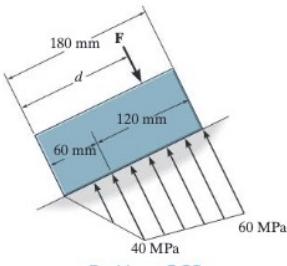
**3.18.** Nella figura è rappresentato un tronco infinitesimo isolato da una barra curva. Si dimostri che  $dN/d\theta = V$ ,  $dV/d\theta = -N$ ,  $dM/d\theta = -T$ , e  $dT/d\theta = M$ .



Problema 3.18

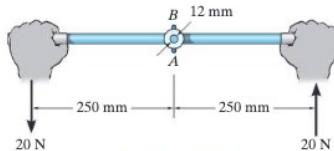
**3.19.** Il Problema 3.19 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

**3.20.** Il blocco rappresentato nella figura ha uno spessore di 5 mm. Considerando la distribuzione tensionale indotta sulla superficie di appoggio dalla forza *F* applicata sul blocco, si determini l'intensità di tale forza e la distanza *d* relativa al suo punto di applicazione.



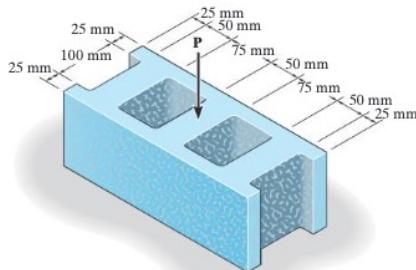
Problema 3.20

**3.21.** Nella figura è rappresentata una leva vincolata a un albero fisso mediante il perno *AB*, avente un diametro medio di 6 mm. Ipotizzando che la leva sia soggetta alla coppia indicata, si determini la tensione tangenziale media agente nel perno in corrispondenza della superficie di interfaccia con la leva.



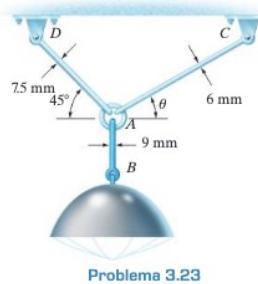
Problema 3.21

**3.22.** Nella figura è rappresentato un blocco di calcestruzzo di dimensioni assegnate. Ipotizzando che il materiale raggiunge la rottura per una tensione normale media di 0.840 MPa, si determini il valore massimo della forza verticale centrata *P* che il blocco è in grado di sostenere.



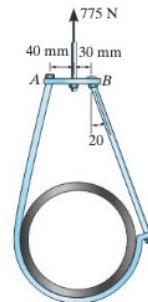
Problema 3.22

**3.23.** Una lampada di peso 250 N è sostenuta da tre barre in acciaio vincolate tra loro mediante un anello in *A*. Si determini quanto deve valere l'angolo tra la barra *AC* e l'orizzontale affinché la tensione normale media agente in *AC* sia pari al doppio di quella agente nella barra *AD*. Quanto vale la tensione in ciascuna barra? I diametri delle barre sono indicati nella figura.



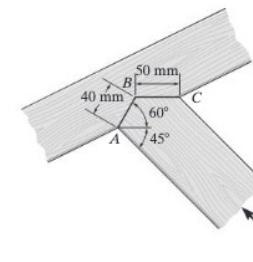
Problema 3.23

**3.24.** Il gancio nella figura sostiene una tubazione tale per cui la forza agente sul bullone verticale è pari a 775 N. Si determini la tensione normale media agente nel bullone *BC* di diametro 8 mm. Si assuma in *A* un vincolo di cerniera.



Problema 3.24

**3.27.** L'elemento trasmette al collegamento nella figura una forza assiale di 5 kN. Si determini la tensione normale media agente sulle sezioni *AB* e *BC*. Si assuma che non agisca attrito sulla superficie di interfaccia e che lo spessore dell'elemento sia pari a 50 mm.



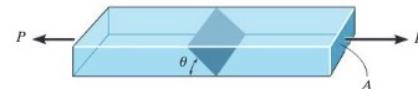
Problema 3.27

**3.25.** Nella figura è rappresentato un provino giunto a rotura durante una prova di trazione per effetto di una forza assiale di 100 kN. L'angolo formato dalla sezione di rottura con l'orizzontale è pari a  $52^\circ$ . Considerando che il diametro del provino è pari a 12 mm, si determinino i valori medi della tensione normale e della tensione tangenziale sulla sezione di rottura inclinata. Quanto vale, invece, la tensione normale media agente sulla sezione trasversale in corrispondenza della rottura?



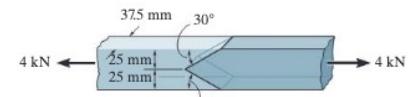
Problema 3.25

**3.26.** Nella figura è rappresentato un provino avente sezione trasversale di area *A* sottoposto a una prova di trazione. Ipotizzando che la forza assiale applicata sul provino sia *P*, si determini il valore massimo della tensione tangenziale media agente nel provino e si calcoli l'angolo che individua la sezione sulla quale essa agisce.



Problema 3.26

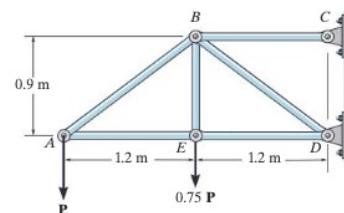
**3.28.** Due elementi impiegati nella costruzione della fusoliera di un aeroplano sono saldati tra loro mediante due saldature di testa con angolo di inclinazione di  $30^\circ$ . Si determinino i valori medi della tensione normale e della tensione tangenziale agenti su ciascuna saldatura. Si assuma che su ciascuna delle due superfici inclinate agisca una forza orizzontale di 2 kN.



Problema 3.28

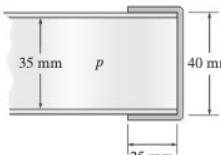
**3.29.** Il Problema 3.29 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

**3.30.** Le aste reticolari rappresentate nella figura hanno sezioni trasversali di area  $780 \text{ mm}^2$ . Si determini la tensione normale media agente in ciascuna asta per effetto del carico  $P = 40 \text{ kN}$ . Si indichi se ciascuna asta risulta tesa o compressa.



Problema 3.30

**3.31.** Il tubo cilindrico rappresentato nella figura è chiuso mediante un tappo ed è soggetto a una pressione interna  $p = 650$  Pa. Si determini la tensione tangenziale media trasmessa sulle pareti del tubo dalla colla necessaria a fissare a esso il tappo.

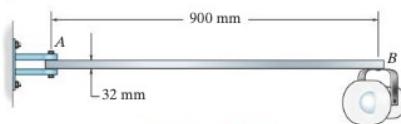


Problema 3.31

**3.32.** Il Problema 3.32 è disponibile sulla piattaforma MyLab.

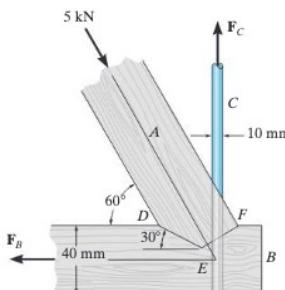
**3.33.** La lampada rappresentata nella figura è sostenuta da una mensola vincolata in *A* mediante un perno di diametro 3 mm. Considerando che la lampada pesa 20 N, mentre il peso della mensola è pari a 8 N/m, si determini la tensione tangenziale media agente nel perno.

*Suggerimento:* la forza di taglio agente nel perno è indotta dalla coppia di taglio necessaria per l'equilibrio dei momenti rispetto ad *A*.



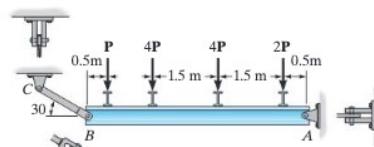
Problema 3.33

**3.34.** L'asta reticolare *A*, realizzata in legno, è soggetta a una forza di compressione di 5 kN. Si determini la tensione normale media agente nella barra *C*, di diametro 10 mm, e nell'asta *B*, di spessore 30 mm.



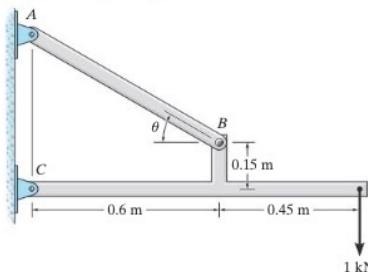
Problema 3.34

**3.35.** La trave rappresentata nella figura è vincolata mediante una cerniera in *A* e una biella *BC*. Si determini l'intensità massima  $P$  delle forze che possono essere applicate sulla trave perché la tensione tangenziale media agente in ciascun perno sia inferiore a 80 MPa. Tutti i perni sono soggetti a taglio doppio come mostrato e hanno un diametro di 18 mm.



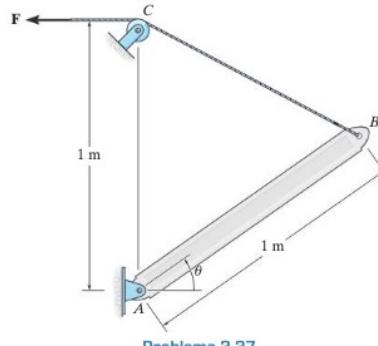
Problema 3.35

**3.36.** L'assemblaggio rappresentato nella figura è soggetto a una forza di 1 kN. Si determini la tensione tangenziale media agente nel bullone in *A* in funzione dell'angolo tra la barra *AB* e l'orizzontale. Si diagrammi tale funzione per  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$  e si individuino i valori per i quali la tensione tangenziale media è minima. Il bullone ha un diametro di 6 mm ed è soggetto a taglio singolo.



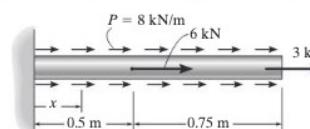
Problema 3.36

**3.37.** Il braccio mobile rappresentato nella figura ha un peso di 3 kN e viene issato mediante il cavo *BC*. Assumendo per il cavo un diametro di 15 mm, si determini e si diagrammi la tensione normale media agente nel cavo in funzione dell'angolo  $\theta$  tra il braccio e l'orizzontale, con  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ .



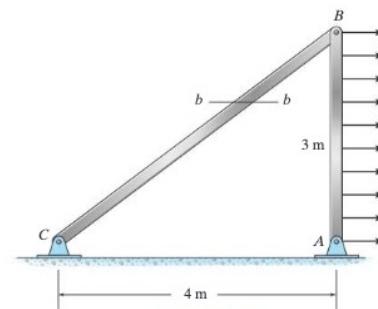
Problema 3.37

**3.38.** La barra rappresentata nella figura ha una sezione trasversale di area  $400(10^{-6}) \text{ m}^2$ . Ipotizzando che la barra sia soggetta a un carico assiale distribuito uniformemente lungo tutta la lunghezza e a due forze assiali concentrate, come mostrato, si determini la tensione normale media agente nella barra in funzione dell'ascissa  $x$ , con  $0 < x \leq 0.5 \text{ m}$ .



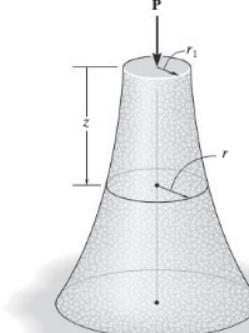
Problema 3.38-3.39

**3.40.** La struttura rappresentata nella figura è soggetta al carico uniformemente distribuito indicato. Si determini il valore massimo del carico  $p$  che può essere applicato senza che la tensione normale media e la tensione tangenziale media agenti sulla sezione *b-b* superino i valori  $\sigma = 15 \text{ MPa}$  e  $\tau = 16 \text{ MPa}$ , rispettivamente. La sezione trasversale dell'elemento *CB* è quadrata di lato 30 mm.



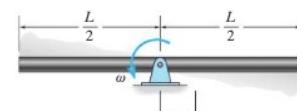
Problema 3.40

**3.41.** Il piedistallo nella figura è sottoposto alla forza verticale centrale  $P$ . Essendo  $\rho$  la densità di massa del materiale, si determini, in funzione di  $z$ , il valore del raggio  $r$  tale per cui la tensione normale media agente nel piedistallo sia costante. La sezione trasversale è circolare.



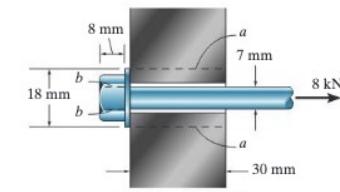
Problema 3.41

**3.42.** La barra rappresentata nella figura ha sezione trasversale costante di area  $A$ , densità di massa per unità di linea  $m$  ed è vincolata nella mezzeria con una cerniera. Supponendo che la barra sia in rotazione nel piano orizzontale alla velocità angolare costante  $\omega$ , si determini la tensione normale media agente nella barra in funzione dell'ascissa  $x$ .



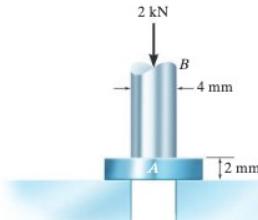
Problema 3.42

**3.43.** Il bullone rappresentato nella figura è passante attraverso una piastra di spessore 30 mm. Considerando che la forza applicata al gambo del bullone è pari a 8 kN, si determini la tensione normale media agente nel gambo del bullone, la tensione tangenziale media agente nella piastra sulla sezione cilindrica *a-a* e la tensione tangenziale media agente nella testa del bullone sulla sezione cilindrica *b-b*.



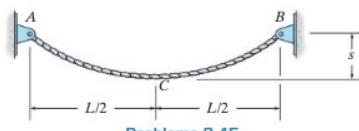
Problema 3.43

**3.44.** Il puntone circolare *B* esercita una forza di 2 kN sulla sommità della piastra *A*. Si determini la tensione tangenziale media indotta nella piastra per effetto di questo carico.



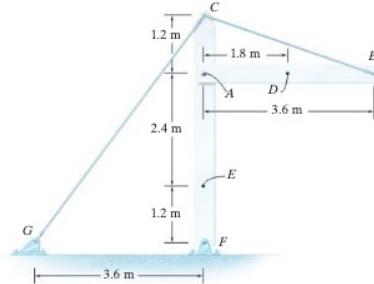
Problema 3.44

**3.45.** Il cavo rappresentato nella figura ha un peso specifico per unità di volume pari a  $\gamma$  e un'area della sezione trasversale pari a *A*. Ipotizzando che la freccia *s* sia sufficientemente piccola, la lunghezza approssimata del cavo è *L* e il peso può essere considerato distribuito uniformemente lungo la proiezione orizzontale del cavo. Sotto queste ipotesi, si determini la tensione normale media agente nel cavo nel punto più basso *C*.



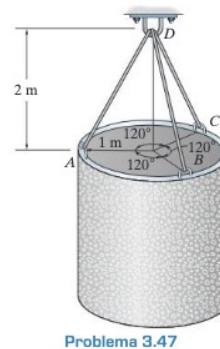
Problema 3.45

**3.46.** La trave *AB* è vincolata mediante la cerniera in *A* e il cavo *BC*. Un cavo *differente* *CG* è impiegato per tenere in posizione verticale la struttura. Considerando che *AB* pesa 2.0 kN/m e che *FC* pesa 3.0 kN/m, si determinino le azioni interne risultanti agenti sulle sezioni trasversali in *D* e in *E*. Nei calcoli si trascurino gli spessori della trave e della colonna.



Problema 3.46

**3.47.** Una tubazione in calcestruzzo di massa 3 Mg è tenuta sospesa mediante tre cavi. Considerando che il diametro dei cavi *BD* e *CD* è pari a 10 mm, mentre il diametro del cavo *AD* è pari a 7 mm, si determini la tensione normale media agente in ciascun cavo.

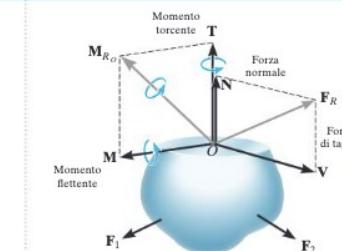


Problema 3.47

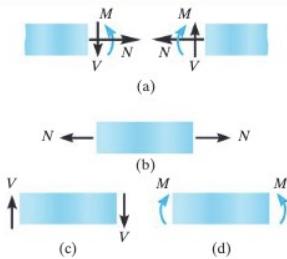
## Riepilogo del capitolo

Le azioni interne a un corpo possono essere scomposte in una forza normale, una forza di taglio, un momento flettente e un momento torcente. Queste componenti rappresentano le risultanti delle distribuzioni di tensione normale e tensione tangenziale che agiscono sulla sezione trasversale e si determinano applicando il metodo delle sezioni e le equazioni di equilibrio.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \\ \sum F_z &= 0 \\ \sum M_x &= 0 \\ \sum M_y &= 0 \\ \sum M_z &= 0\end{aligned}$$



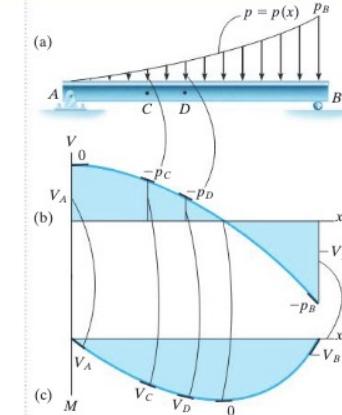
I diagrammi della forza normale, del taglio e del momento sono le rappresentazioni grafiche delle corrispondenti funzioni definite lungo l'asse di una trave. Fissata un'ascissa curvilinea *x* lungo l'asse della trave, i diagrammi si costruiscono suddividendo idealmente la trave in corrispondenza di una generica coordinata *x* e disegnando *N*, *V* e *M* in funzione di *x*. È consuetudine prendere l'origine dell'ascissa nell'estremo sinistro della trave e orientare il verso positivo verso destra. È necessario, inoltre, stabilire una convenzione dei segni per le azioni interne.



I diagrammi di taglio e momento possono essere costruiti anche per via grafica, tenendo conto che:

- ▶ la pendenza del diagramma del taglio in un punto è pari al valore del carico distribuito nel punto, preso con il segno negativo;
- ▶ la pendenza del diagramma del momento in un punto è pari al valore del taglio nel punto;
- ▶ la variazione del taglio è uguale all'area sottesa dal diagramma del carico distribuito, presa con il segno negativo;
- ▶ la variazione del momento è uguale all'area sottesa dal diagramma del taglio.

I valori del taglio e del momento in una generica sezione della trave possono essere determinati anche applicando il metodo delle sezioni.



Un processo infinitesimo staticamente ammissibile è un campo di azioni esterne bilanciato con quelle interne al continuo, riportate alla configurazione di riferimento

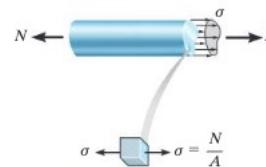
$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}(\mathbf{x})}{\partial z} + b_x(\mathbf{x}) &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(\mathbf{x})}{\partial z} + b_y(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{in } V \\ \frac{\partial \tau_{zx}(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}(\mathbf{x})}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(\mathbf{x})}{\partial z} + b_z(\mathbf{x}) &= 0 \\ \tau_{xy}(\mathbf{x}) = \tau_{yx}(\mathbf{x}), \quad \tau_{xz}(\mathbf{x}) = \tau_{zx}(\mathbf{x}), \quad \tau_{yz}(\mathbf{x}) = \tau_{zy}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \quad \text{in } S_f$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_i(\mathbf{x})n_x + \mathbf{t}_j(\mathbf{x})n_y + \mathbf{t}_k(\mathbf{x})n_z \quad \text{in } S_u$$

Se una barra, realizzata con un materiale omogeneo e isotropo, è soggetta a forze esterne assiali applicate nel centro d'area della sezione trasversale, la distribuzione delle tensioni normali agenti sulla sezione è uniforme. La tensione normale media è pari a  $\sigma = P/A$ , dove  $P$  è la forza interna assiale sulla sezione.

$$\sigma = \frac{N}{A}$$



La tensione tangenziale media è pari  $\tau_{avg} = V/A$ , dove  $V$  è la forza di taglio risultante sulla sezione trasversale di area  $A$ . Questa formula viene impiegata spesso per determinare la tensione tangenziale media negli elementi di collegamento e nelle differenti parti di una giunzione.

$$\tau_{avg} = \frac{V}{A}$$

