Esercizio: Legame costitutivo elastico lineare isotropo (5 gennaio)

Modifica

In un corpo di Cauchy il tensore dello sforzo in un punto P ammette la seguente rappresentazione (adoperando il riferimento usuale adottato nel testo), dove σ è una costante avente le dimensioni di una tensione.

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \sigma \\ 0 & \sigma & \sigma \end{bmatrix}$$

Determinare il tensore della deformazione nel punto P sotto l'ipotesi che il materiale che costituisce il corpo sia elastico lineare e isotropo in P.

Esercizio: Legame costitutivo elastico lineare isotropo (5 gennaio)

giovedì 26 dicembre 2019 10:19

Per un materiale lineare isotropo esiste diretta proporzionalità tra componenti normali di tensioni e dilatazioni e tra componenti tangenziali di tensioni e scorrimenti angolari, messi in luce dalle prove di trazione e compressione.

Si sceglie una base ortonormale i cui assi vengono indicati con x, y, z. È possibile così indicare le grandezze vettoriali anche attraverso le loro componenti nella base scelta.

Per praticità di rappresentazione, le componenti della tensione e della deformazione in un punto P possono essere raccolti nei due vettori tensione $\underline{\sigma}$ e deformazione $\underline{\varepsilon}$:

$$\underline{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T \quad ;$$

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T \quad .$$

Il legame costitutivo tra le due può essere espresso nel caso di materiale isotropo attraverso la legge di Hooke generalizzata, data dalla seguente espressione:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\sigma} \quad . \qquad (1)$$

È stata introdotta la matrice di deformabilità $\underline{\underline{A}}$, che, rappresentata per intero per un materiale isotropo, assume la seguente forma:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} .$$

Viene fornito il tensore dello sforzo in un punto P, dato da:

$$\underline{\underline{T}}(P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & \sigma \\ 0 & \sigma & \sigma \end{bmatrix} \quad . \quad (2)$$

In generale, il tensore dello sforzo ha la seguente forma, come indicato nella (14.7) del libro Casini - Vasta:

$$\underline{\underline{T}}(P) = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad . \qquad (3)$$

Confrontando la (2) con la (3) e tenendo conto della simmetria del tensore degli sforzi, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\sigma_x = 0\,, \quad \tau_{xy} = 0\,, \quad \tau_{xz} = 0\,, \quad \sigma_y = \sigma, \quad \tau_{yz} = \sigma, \quad \sigma_z = \sigma \;. \qquad (4)$$

Scrivendo per componenti la (1) ed utilizzando le espressioni (4) appena ricavate, si ottiene:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\;}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = -\frac{2\nu\sigma}{\;} \quad ;$$

[illegible]

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = -\frac{2\nu\sigma}{E} \;;$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] = \frac{\sigma}{E}(1-\nu) \;;$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{\sigma}{E}(1-\nu) \;; \qquad (5)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} = 0 \;;$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz} = 0 \;;$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} = \frac{2\sigma}{E}(1+\nu) \;.$$

La parte simmetrica della matrice gradiente di spostamento $\underline{E}$, ossia la matrice della deformazione pura $\underline{\underline{E}}$, può essere scritta, facendo riferimento alla definizione 13.16 del libro Corsini-Vaste, come:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} .$$

Sostituendo nella precedente le (5), si ottiene l'espressione della matrice di deformazione richiesta, ossia:

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -\frac{2\nu\sigma}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma}{E}(1-\nu) & \frac{\sigma}{E}(1+\nu) \\ 0 & \frac{\sigma}{E}(1+\nu) & \frac{\sigma}{E}(1-\nu) \end{bmatrix} .$$

Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi