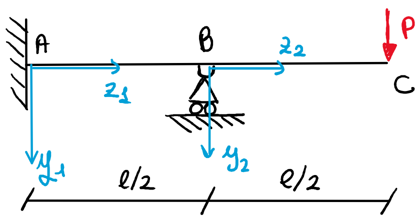
Integrazione della equazione della linea elastica per una trave incastrata-appoggiata caricata in mezzeria

giovedì 28 novembre 2019 14:27



Si sceglie un sistema di riferimento locale per ciascuno dei due tratti di trave e le consuete convenzioni per gli spostamenti e le caratteristiche della sollecitazione. Le grandezze che descrivono la risposta strutturale del tratto AB e del tratto BC verranno indicate con il pedice "1" e "2" rispettivamente.
I problemi flessionale ed assiale sono disaccoppiati e le grandezze che descrivono il comportamento assiale sono identicamente nulle per entrambi i tratti.
Si assume il modello di trave di Eulero - Bernoulli (trave indeformabile a taglio) e che la rigidezza flessionale EI sia costante. Poiché lo scorrimento angolare è nullo, lo spostamento assiale e la rotazione delle sezioni sono legate dalla relazione $v' = -\varphi$. Le funzioni incognite del problema sono dunque le seguenti: $v_1(z_1)$, $T_1(z_1)$ e $M_1(z_1)$, con $0 \le z_1 \le \ell/2$, per il tratto AB e $v_2(z_2)$, $T_2(z_2)$ e $M_2(z_2)$, con $0 \le z_2 \le \ell/2$, per il tratto BC.
L'equazione della linea elastica $(-EIv)^{IV} + q = 0$, si particolarizza come segue per i due tratti:

$$
\begin{aligned}
&v_1^{IV}(z_1) = 0 \quad , \quad 0 \le z_1 \le \ell/2 \quad ; \\
&v_2^{IV}(z_2) = 0 \quad , \quad 0 \le z_2 \le \ell/2 \quad .
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Il campo di spostamento ottenuto integrando le equazioni (1) risulta:

$$
\begin{aligned}
&v_1 = C_1 \frac{z^3}{6} + C_2 \frac{z^2}{2} + C_3 z + C_4 \quad , \quad 0 \le z_1 \le \ell/2 ; \\
&v_2 = C_5 \frac{z^3}{6} + C_6 \frac{z^2}{2} + C_7 z + C_8 \quad , \quad 0 \le z_2 \le \ell/2 \quad .
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Le otto costanti di integrazione si ottengono aggiungendo le quattro condizioni al contorno date dai punti A e C e le quattro condizioni di raccordo imposte da B.
Per le condizioni al contorno risulta:

$$
z_1 = 0 : \begin{cases} v_1(0) = 0 \\ \varphi_1(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1(0) = 0 \\ v_1'(0) = 0 \end{cases} ;
$$

$$
z_2 = \ell/2 : \begin{cases} T_2(\ell/2) = P \\ M_2(\ell/2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2'''(\ell/2) = -\dfrac{P}{EI} \\ v_2''(\ell/2) = 0 \end{cases} .
$$

Le condizioni imposte dall'appoggio in B e di raccordo sono date da:

$$\begin{cases} v_1(\ell/2)=0 \\ v_2(0)=0 \\ \varphi_1(\ell/2)=\varphi_2(0) \\ M_1(\ell/2)=M_2(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1(\ell/2)=0 \\ v_2(0)=0 \\ v_1'(\ell/2)-v_2'(0)=0 \\ v_1''(\ell/2)-v_2''(0)=0 \end{cases}.$$

Le prime tre equazioni impongono la continuità fisica della trave, l'ultima esplicita il fatto che, non potendo il vincolo di appoggio esercitare una coppia di reazione, il momento non presenta salti.
Si ottiene così il seguente sistema algebrico lineare di otto equazioni in otto incognite:

$$\begin{cases} C_4=0 \\ C_3=0 \\ C_5=-\frac{P}{EI} \\ C_5\frac{\ell}{2}+C_6=0 \\ C_1\frac{\ell^3}{48}+C_2\frac{\ell^2}{8}+C_3\frac{\ell}{2}+C_4=0 \\ C_8=0 \\ \frac{C_1\ell^2}{8}+C_2\frac{\ell}{2}+C_3-C_7=0 \\ C_1\frac{\ell}{2}+C_2-C_6=0 \end{cases}.$$

Risolvendo si trova:

$$C_1=\frac{3P}{2EI}, \quad C_2=-\frac{P\ell}{4EI}, \quad C_3=0, \quad C_4=0,$$
$$C_5=-\frac{P}{EI}, \quad C_6=\frac{P\ell}{2EI}, \quad C_7=\frac{1}{16}\frac{P\ell^2}{EI}, \quad C_8=0. \tag{3}$$

Inserendo le (3) nelle (2) si ottiene il campo di spostamenti soluzione del problema elastico:

$$v_1(z_1)=\frac{P}{4EI}z_1^3-\frac{P\ell}{8EI}z_1^2 \;;$$
$$v_2(z_2)=-\frac{P}{6EI}z^3+\frac{P\ell}{4EI}z^2+\frac{P\ell^2}{16EI}z \,.$$

Per il modello di trave di Eulero-Bernoulli, l'espressione del taglio e del momento per ciascuno dei due tratti può essere espressa come:

$$T_1=-EI\,v_1'''=-\frac{3}{2}P \;;$$

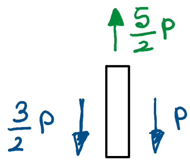
$$T_2=-EI\,v_2'''=P \;;$$

$$M_1=-EI\,v_1''=\frac{P\ell}{4}-\frac{3P}{2}z \;;$$

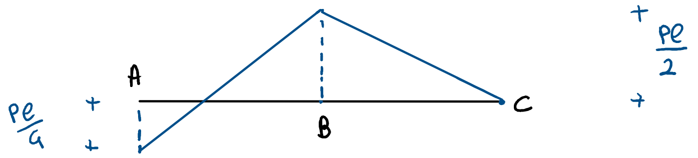
$$M_2=-EI\,v_2''=-\frac{P\ell}{2}+Pz \,.$$

Imponendo l'equilibrio al concio di trave B si ottiene il valore della reazione vincolare $Y_B=\frac{5}{2}P$ diretta

Imponendo l'equilibrio al concio di trave B si ottiene il valore della reazione vincolare $Y_B = \frac{5}{2}P$ diretta verso l'alto, come dalla seguente figura.



Il diagramma del momento flettente della struttura è il seguente.



Dichiaro che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi