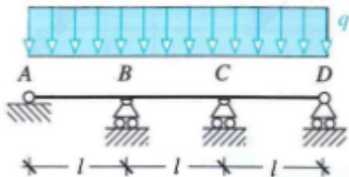




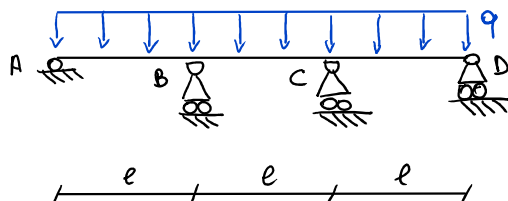
Equazione dei tre momenti per trave a 3 campate caricata uniformemente

Si utilizzi l'equazione dei tre momenti per tracciare il diagramma del momento flettente nella seguente struttura.

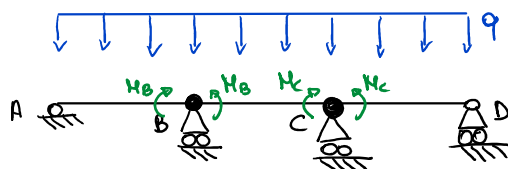


Equazione dei tre momenti per trave a 3 campate caricata uniformemente

sabato 14 dicembre 2019 18:30



La trave presenta $m=4$ appoggi e grado di iperstaticità $m-2=2$. Si assumano come incognite iperstatiche i momenti agli appoggi in B e in C, H_B e H_C , ottenute inserendo delle scissioni in corrispondenza dei suddetti punti.



Le equazioni di congruenza in corrispondenza delle scissioni, che devono imporre la continuità della rotazione (eq 12.10, capitolo 12), per il caso in esame sono le seguenti:

$$\varphi_{BA} = \varphi_{Bc} ; \quad \varphi_{CB} = \varphi_{CD} . \quad (1)$$

Si indichi con l'apice (0) le rotazioni del modo dovuto solo al carico distribuito agente sulla campata. Facendo riferimento al terzo schema notevole dell'appendice B2, si ottengono i seguenti valori per le rotazioni dovute al carico distribuito:

$$\varphi_{BA}^{(0)} = \frac{ql^3}{24EI} ; \quad \varphi_{Bc}^{(0)} = -\frac{ql^3}{24EI} ; \quad \varphi_{CB}^{(0)} = \frac{ql^3}{24EI} ; \quad \varphi_{CD}^{(0)} = -\frac{ql^3}{24EI} . \quad (2)$$

I segni negativi presenti sono dovuti alla convenzione adottata per la rotazione delle sezioni, considerata positiva se presa in verso antiorario. Si indichi con EI la rigidità flessionale, considerata costante. Per il principio di sovrapposizione degli effetti, per ottenere la rotazione in corrispondenza del modo è necessario sommare alle (2) i contributi di ognuno dei momenti che costituiscono le incognite iperstatiche, pensati come agenti da soli sulla struttura.

Facendo riferimento al quarto schema notevole dell'appendice B2, si ottengono i seguenti valori:

$$\varphi_{BA} = \varphi_{BA}^{(0)} + H_B \left(-\frac{l}{3EI} \right) ;$$

$$\varphi_{Bc} = \varphi_{Bc}^{(0)} + H_B \left(\frac{l}{3EI} \right) + H_C \left(\frac{l}{6EI} \right) ;$$

$$\varphi_{CB} = \varphi_{CB}^{(0)} + H_C \left(-\frac{l}{3EI} \right) + H_B \left(-\frac{l}{6EI} \right) ;$$

$$\varphi_{CD} = \varphi_{CD}^{(0)} + H_C \left(\frac{l}{3EI} \right) .$$

(3)

Sostituendo le (2) nelle (3) ed inserendo i valori nella (4), si ottiene il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} \frac{q l^3}{24 EI} - M_B \frac{l}{3 EI} = -\frac{q l^3}{24 EI} + M_B \frac{l}{3 EI} + M_C \frac{l}{6 EI} \\ \frac{q l^3}{24 EI} - M_C \frac{l}{3 EI} - M_B \frac{l}{6 EI} = -\frac{q l^3}{24 EI} + M_C \frac{l}{3 EI} \end{cases}$$

che risolto fornisce come soluzione:

$$M_B = \frac{q l^2}{10} ; \quad M_C = \frac{q l^2}{10} . \quad (4)$$

I due momenti trovati non corrispondono, data la convenzione dei segni generalmente adottata, al momento flettente esercitato dalla trave in quel punto ma al suo opposto. Giudico il valore del momento flettente in quei punti con M_2 , dunque $M_2 = -\frac{q l^2}{10}$.

Per il calcolo delle reazioni esercitate dai nodi, si ricorre nuovamente al principio di sovrapposizione degli effetti. Facendo riferimento ai precedenti schemi materiali ed usando la stessa convenzione per gli apici, si ottengono:

$$R_{AB} = R_{AB}^{(0)} - M_B \frac{1}{e} ; \quad R_{BA} = R_{BA}^{(0)} + M_B \frac{1}{e} ; \quad R_{BC} = R_{BC}^{(0)} + M_B \frac{1}{e} - M_C \frac{1}{e} ;$$

$$R_{CB} = R_{CB}^{(0)} + M_C \frac{1}{e} - M_B \frac{1}{e} ; \quad R_{CD} = R_{CD}^{(0)} + M_C \frac{1}{e} ; \quad R_{DC} = R_{DC}^{(0)} - M_C \frac{1}{e} . \quad (5)$$

Essendo il carico distribuito costante ed uguale per ogni tratto, tutte le reazioni con apice (0) valgono $\frac{q l}{2}$, come da schemi materiali. A queste sono state sommate le reazioni che si avrebbero se nel sistema agisse da solo prima M_B e poi M_C .

Sostituendo poi le (4) in (5), si ottiene:

$$R_{AB} = 0.4 q l ; \quad R_{BA} = 0.6 q l ; \quad R_{BC} = 0.5 q l ; \quad R_{CB} = 0.5 q l ; \quad R_{CD} = 0.6 q l ; \quad R_{DC} = 0.4 q l .$$

Da cui il valore delle reazioni esercitate dagli appoggi sempre per sovrapposizione:

$$R_A = R_{AB} = 0.4 q l ; \quad R_B = R_{BA} + R_{BC} = 1.1 q l ; \quad R_C = R_{CB} + R_{CD} = 1.1 q l ; \quad R_D = R_{DC} = 0.4 q l .$$

Imponendo l'equilibrio dei singoli tratti si ottiene l'espressione analitica del momento, data, rispettivamente per i tratti AB, BC e CD, da:

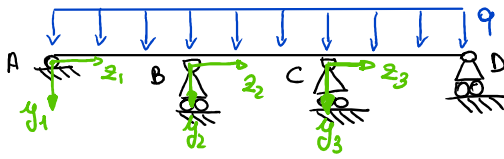
$$M_{AB} = q l^2 \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{2} \frac{z_1}{l} \right) \frac{z_1}{e} , \quad \text{con } 0 < z_1 \leq l ;$$

$$M_{BC} = -\frac{q l^2}{2} + \frac{1}{2} q l z_2 - \frac{q l^2}{10} , \quad \text{con } 0 \leq z_2 \leq l ;$$

$$M_{CD} = -\frac{q l^2}{2} + \frac{3}{5} q l z_3 - \frac{1}{10} q l^2 , \quad \text{con } 0 \leq z_3 < l .$$

Sono state utilizzate z_1, z_2 e z_3 per indicare i sistemi di coordinate rappresentati nelle

Sono state utilizzate z_1, z_2 e z_3 per indicare i sistemi di coordinate rappresentati nelle seguenti figure.



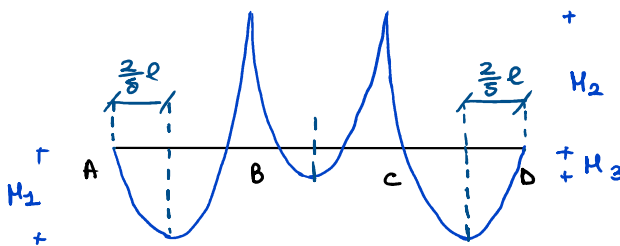
Si indica con M_1 il massimo valore assunto dal momento flettente in corrispondenza del vertice della parabola che ne rappresenta l'andamento nel primo tratto:

$$M_1 = M_{AB} \left(z_1 = \frac{2}{5}l \right) = \frac{2}{25} q l^2.$$

Per simmetria è uguale al valore assunto nel vertice in corrispondenza del tratto cd. Il valore del momento flettente in mezzecce è dato da:

$$M_3 = M_{BC} \left(z_2 = l/2 \right) = \frac{1}{40} q l^2.$$

Il diagramma del momento flettente è dunque il seguente.



Affermare che questo elaborato è esclusivamente frutto del mio lavoro, non è stato copiato da altri.

Annalisa Genovesi