

Sapienza Università di Roma  
Laboratorio di Meccanica  
PPI1-Molla

Giulio Russo

6 maggio 2021

# Indice

<b>1</b>	<b>Scopo dell'esperienza</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Apparato sperimentale</b>	<b>2</b>
2.1	Campioni . . . . .	2
2.2	Accorgimenti e consigli . . . . .	2
2.3	Strumenti di misura . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Strategia di misura</b>	<b>3</b>
3.1	Molla . . . . .	3
3.1.1	Passaggi riassuntivi . . . . .	4
3.2	Formule generali . . . . .	4
3.3	Propagazione incertezze . . . . .	4
3.4	Fit lineare . . . . .	5
3.4.1	Metodo dei minimi quadrati . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Operazioni sperimentali</b>	<b>6</b>
4.1	Misure dirette . . . . .	6
4.1.1	Massa $m$ . . . . .	6
4.1.2	Posizione di equilibrio $x_{eq}$ . . . . .	6
4.1.3	Periodo $T_{osc}$ . . . . .	7
4.1.4	Valori finali . . . . .	7
4.1.5	Istogrammi periodo singola oscillazione . . . . .	8
4.2	Misura di $k$ . . . . .	8
4.3	Misura di $g$ . . . . .	9
4.3.1	Considerazioni sul valore sperimentale di $g$ . . . . .	10

# 1 Scopo dell'esperienza

- Eseguire misure dirette di massa, lunghezza e tempo.
- Misura della costante elastica di una molla.
- Misura dell'accelerazione di gravità.

## 2 Apparato sperimentale

- Una molla appesa ad un supporto con carta millimetrata per effettuare misure di allungamento.
- Una bilancia digitale per la misura dei dischetti.
- Un cronometro a lettura digitale per le misure di periodo.
- Una squadra per ridurre l'errore di parallasse nella misura di allungamento.

### 2.1 Campioni

- 10 dischetti che si possono appendere alla molla.

### 2.2 Accorgimenti e consigli

- Attenzione a non allungare eccessivamente la molla rispetto alle condizioni di equilibrio per la misura di periodo (circa 1-1.5 cm).
- Fare attenzione che la molla non urti la parte superiore quando è al minimo della lunghezza in quanto altera le misure di periodo.
- Assicurarsi che le oscillazioni della molla siano, per quanto possibile, verticali e unidimensionali.

### 2.3 Strumenti di misura

In Tabella 2.1 sono riassunte le caratteristiche degli strumenti usati.

- **Bilancia di precisione.** La risoluzione è pari a 0.1 g. L'incertezza di tipo B associata alla risoluzione dello strumento è quindi  $\frac{RIS}{\sqrt{12}} = \frac{0.1\text{ g}}{\sqrt{12}} = 0.03\text{ g}$ .  
La portata è pari a 3 kg. Eseguendo la misura di massa nulla il valore mostrato sul display è esattamente zero; si assume quindi che l'offset dello strumento sia trascurabile.
- **Cronometro.** La risoluzione è pari a 0.01 s. L'incertezza di tipo B associata alla risoluzione dello strumento è quindi  $\frac{RIS}{\sqrt{12}} = \frac{0.01\text{ s}}{\sqrt{12}} = 0.003\text{ s}$ .
- **Carta millimetrata.** La risoluzione è pari a 1 mm. L'incertezza di tipo B associata alla risoluzione dello strumento è quindi  $\frac{RIS}{\sqrt{12}} = \frac{0.001\text{ m}}{\sqrt{12}} = 0.0003\text{ m}$ .  
La portata è pari a 28 cm. L'offset dello strumento è trascurabile.

Strumento	Portata	Risoluzione	$\sigma_B$	Offset
Bilancia di precisione	3 kg	0.1 g	0.03 g	-
Cronometro	-	0.01 s	0.003 s	-
Carta millimetrata	28 cm	1 mm	0.3 mm	-

Tabella 2.1: Caratteristiche degli strumenti usati e incertezze associate alla singola misura. Sono inoltre riportati gli eventuali fattori correttivi di offset e di scala.

## 3 Strategia di misura

### 3.1 Molla

Un corpo di massa  $M$  soggetto alla sola forza elastica segue la legge di Hooke in una dimensione:

$$\begin{aligned} F &= -k\Delta x \\ M\ddot{x} &= -k(x - x_0) \end{aligned} \quad (3.1)$$

con  $k$  costante elastica della molla e  $x_0$  lunghezza a riposo della molla. La soluzione generale di questa equazione differenziale è

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + x_0 \quad (3.2)$$

con  $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$ . Il periodo di oscillazione è legato alla pulsazione  $\omega$  dalla relazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}. \quad (3.3)$$

Nel caso di una massa  $M$  appesa ad una molla c'è un termine in più dovuto alla forza peso ( $g$  è l'accelerazione di gravità). L'equazione del moto diventa quindi

$$F = -k(x - x_0) + Mg = M\ddot{x} \quad (3.4)$$

che ha come soluzione

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) + \frac{Mg}{k} + x_0 \quad (3.5)$$

con periodo di oscillazione uguale al caso precedente.

Nel caso statico (senza oscillazione,  $\dot{x} = 0$  e  $\ddot{x} = 0$ ) la posizione di equilibrio corrisponde a

$$x_{eq} = \frac{Mg}{k} + x_0. \quad (3.6)$$

In questo esperimento non conosciamo la massa totale  $M$  dell'oscillatore ma solo la massa  $m$  dei dischi che aggiungiamo; possiamo quindi riscrivere  $M = (m_0 + m)$  dove  $m_0$  è la massa della molla (incluso il supporto ad essa collegato) senza dischi. Anche la lunghezza a riposo della molla non è nota poiché la molla comincia ad allungarsi solo con una sollecitazione sufficientemente intensa.

Dall'equazione del periodo (3.3) ricaviamo quindi la seguente relazione:

$$T^2 = 4\pi^2(m_0 + m)/k. \quad (3.7)$$

Eseguendo misure di periodo per due diverse masse otteniamo una formula per calcolare la costante elastica  $k$  della molla:

$$\begin{aligned} T_1^2 &= 4\pi^2(m_0 + m_1)/k; \\ T_2^2 &= 4\pi^2(m_0 + m_2)/k; \\ T_2^2 - T_1^2 &= 4\pi^2(m_2 - m_1)/k; \\ k &= 4\pi^2 \frac{m_2 - m_1}{T_2^2 - T_1^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Esplicitando  $k$  in funzione delle altre grandezze a partire dalla (3.7) e sostituendo tale valore di  $k$  in (3.6) otteniamo la relazione lineare tra  $x_{eq}$  e  $T^2$ :

$$\begin{aligned} x_{eq} &= \frac{g}{4\pi^2} T^2 + x_0 \\ &= \alpha T^2 + x_0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Da questa relazione è possibile stimare l'accelerazione di gravità  $g$ .

### 3.1.1 Passaggi riassuntivi

È quindi possibile:

1. aggiungere diverse masse alla molla;
2. per ciascuna configurazione misurare la posizione statica di equilibrio  $x_{eq}$  e il periodo di una singola oscillazione  $T$ ;
3. calcolare il coefficiente elastico  $k$  della molla;
4. studiare l'andamento lineare di " $x_{eq}$  in funzione di  $T^2$ " per estrarre l'accelerazione di gravità  $g$ .

## 3.2 Formule generali

La miglior stima del **valore vero** di una grandezza è data dalla *media aritmetica* delle  $N$  misurazioni:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_i x_i. \quad (3.10)$$

L'**incertezza di misura** è data dalla somma in quadratura dell'incertezza di tipo A, valutabile attraverso misure ripetute, e l'incertezza di tipo B, in cui rientrano tutte le altre informazioni a disposizione:

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \\ &= \sqrt{S_N(x)^2 + \sigma_B^2} \end{aligned} \quad (3.11)$$

dove  $S_N(x)$  è la *deviazione standard campionaria*:

$$S_N(x) = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}. \quad (3.12)$$

L'incertezza di una singola misura diretta è data dalla sola incertezza di tipo B. Se le diverse misure ripetute producono sempre lo stesso risultato allora  $\sigma_A = 0$ . Se la deviazione standard campionaria è maggiore dell'incertezza di tipo B posso trascurare quest'ultima per il calcolo dell'incertezza totale.

La *deviazione standard della media* di  $N$  misure indipendenti di una stessa grandezza diminuisce come  $1/\sqrt{N}$ , di conseguenza:

$$S_N(\bar{x}) = \frac{S_N(x)}{\sqrt{N}}. \quad (3.13)$$

## 3.3 Propagazione incertezze

- Propagazione incertezze  $T^2$

$$\sigma_{T^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial T^2}{\partial T} \sigma_T\right)^2} = 2T \sigma_T \quad (3.14)$$

- Propagazione incertezze  $\Delta m = m_2 - m_1$

$$\sigma_{\Delta m} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta m}{\partial m_2} \sigma_{m_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta m}{\partial m_1} \sigma_{m_1}\right)^2} = \sqrt{\sigma_{m_2}^2 + \sigma_{m_1}^2} \quad (3.15)$$

- Propagazione incertezze  $\Delta T = T_2^2 - T_1^2$

$$\sigma_{\Delta T} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta T}{\partial T_2^2} \sigma_{T_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial T_1^2} \sigma_{T_1^2}\right)^2} = \sqrt{\sigma_{T_2^2}^2 + \sigma_{T_1^2}^2} \quad (3.16)$$

- Propagazione incertezze  $k = 4\pi^2 \frac{\Delta m}{\Delta T}$

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial \Delta m} \sigma_{\Delta m}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial \Delta T} \sigma_{\Delta T}\right)^2} \\ &= 4\pi^2 \sqrt{\frac{\sigma_{m_2}^2 + \sigma_{m_1}^2}{(\Delta T)^2} + \frac{(\Delta m)^2}{(\Delta T)^4} (\sigma_{T_2^2}^2 + \sigma_{T_1^2}^2)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

### 3.4 Fit lineare

Per *fit* si intende il processo di adattamento di una curva ai dati sperimentali.

Come descritto precedentemente (Formula 3.9), c'è una relazione lineare tra  $x_{eq}$  e  $T^2$ :

$$x_{eq} = \alpha T^2 + x_0; \quad (3.18)$$

$$\alpha = \frac{g}{4\pi^2}. \quad (3.19)$$

Una volta ricavato  $\alpha$  con il fit è quindi possibile stimare  $g$ :

$$g = 4\pi^2\alpha; \quad (3.20)$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \alpha}\sigma_\alpha\right)^2} = 4\pi^2\sigma_\alpha. \quad (3.21)$$

Per valutare in maniera quantitativa la compatibilità del valore di  $g$  così ottenuto con il valore atteso ( $g_{Roma} = 9.805 \text{ m s}^{-2}$ ) possiamo definire la variabile standardizzata

$$z = \frac{|g - g_{Roma}|}{\sigma_g}, \quad (3.22)$$

dove  $|g - g_{Roma}|$  è la discrepanza dal valore atteso.  $z$  quindi è la distanza della discrepanza da 0 in unità di sigma; maggiore è il valore di  $z$  maggiore è la distanza del valore sperimentale dal valore atteso. Nel nostro caso se  $z \leq 2$ , ovvero se il valore sperimentale rientra entro  $2\sigma$  (95.4%) dal valore di riferimento, possiamo ritenere la misura sperimentale compatibile.

#### 3.4.1 Metodo dei minimi quadrati

Il metodo utilizzato per il fit lineare è il **metodo dei minimi quadrati**.

$$\mu_Y = m \cdot \mu_X + c \quad (3.23)$$

Formule:

$$\sigma_{Y_i} = \sqrt{\sigma_{Y_i}^2 + (m\sigma_{X_i})^2} \quad (3.24)$$

$$\hat{m} = E[m] = \frac{\text{Cov}[x, y]}{\text{Var}[x]} \quad (3.25)$$

$$\hat{c} = E[c] = \bar{y} - \hat{m} \cdot \bar{x} \quad (3.26)$$

$$\text{Var}[\hat{m}] = \frac{1}{\text{Var}[x] \sum_i \sigma_{Y_i}^{-2}} \quad (3.27)$$

$$\text{Var}[\hat{c}] = \bar{x}^2 \cdot \text{Var}[\hat{m}] \quad (3.28)$$

$$\text{Cov}[\hat{m}, \hat{c}] = -\bar{x} \cdot \text{Var}[\hat{m}] \quad (3.29)$$

$$\rho[\hat{m}, \hat{c}] = \frac{\text{Cov}[\hat{m}, \hat{c}]}{\sqrt{\text{Var}[\hat{m}] \text{Var}[\hat{c}]}} \quad (3.30)$$

L'incertezza su  $\mu_Y$  è ottenuta dalla propagazione delle incertezze, tenendo conto del termine di correlazione:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu_Y} &= \sqrt{\left(\frac{\partial \mu_Y}{\partial m}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial \mu_Y}{\partial c}\sigma_c\right)^2 + 2\frac{\partial \mu_Y}{\partial m}\frac{\partial \mu_Y}{\partial c}\rho[m, c]\sigma_m\sigma_c} \\ &= \sqrt{\mu_X^2\sigma_m^2 + \sigma_c^2 + 2\mu_X\text{Cov}[m, c]} \end{aligned} \quad (3.31)$$

## 4 Operazioni sperimentali

### 4.1 Misure dirette

Le misure sono state effettuate in quattro configurazioni diverse: 4 dischi, 6 dischi, 8 dischi e 10 dischi.

#### 4.1.1 Massa $m$

n°	$m_4$ [g]	$m_6$ [g]	$m_8$ [g]	$m_{10}$ [g]
1	317.7	475.5	630.4	788.1
2	317.6	475.5	630.4	787.9
3	317.7	475.4	630.4	788.2
4	317.8	475.6	630.4	788.3
5	317.7	475.5	630.3	788.2
6	317.7	475.2	630.4	788.3
7	317.6	475.4	630.4	788.1
8	317.8	475.5	630.3	788.2
9	317.8	475.3	630.3	788.3
10	317.7	475.4	630.1	788.3
$S_N$	0.0738	0.1160	0.0966	0.1287

Tabella 4.1: Misure di massa  $m$  dei dischi nelle 4 configurazioni.

#### 4.1.2 Posizione di equilibrio $x_{eq}$

n°	$x_{eq,4}$ [cm]	$x_{eq,6}$ [cm]	$x_{eq,8}$ [cm]	$x_{eq,10}$ [cm]
1	13.0	16.3	19.6	23.0
2	12.9	16.2	19.6	23.0
3	12.9	16.3	19.5	23.1
4	12.9	16.3	19.6	23.0
5	13.0	16.2	19.6	23.0
6	12.9	16.3	19.6	23.0
7	12.9	16.3	19.6	23.1
8	12.9	16.3	19.6	23.0
9	12.9	16.3	19.6	23.0
10	12.9	16.2	19.6	23.0
$S_N$	0.0422	0.0483	0.0316	0.0422

Tabella 4.2: Misure di posizione di equilibrio  $x_{eq}$  nelle 4 configurazioni.

#### 4.1.3 Periodo $T_{5osc}$

n°	$T_{5osc,4}$ [s]	$T_{5osc,6}$ [s]	$T_{5osc,8}$ [s]	$T_{5osc,10}$ [s]
1	2.81	3.51	3.90	4.40
2	2.91	3.44	3.89	4.40
3	2.76	3.39	3.95	4.34
4	2.81	3.38	3.83	4.32
5	2.76	3.44	3.91	4.27
6	2.91	3.40	3.81	4.34
7	2.82	3.51	3.84	4.32
8	2.75	3.41	3.90	4.37
9	2.81	3.32	3.84	4.25
10	2.82	3.34	3.88	4.35
$S_N$	0.0562	0.0633	0.0435	0.0493

Tabella 4.3: Misure del tempo complessivo di 5 oscillazioni  $T_{5osc}$  nelle 4 configurazioni.

#### 4.1.4 Valori finali

	$m$ [g]	$x_{eq}$ [cm]	$T$ [s]	$T^2$ [s <sup>2</sup> ]
4 dischi	$317.710 \pm 0.023$	$12.920 \pm 0.013$	$0.5632 \pm 0.0036$	$0.317 \pm 0.004$
6 dischi	$475.430 \pm 0.037$	$16.270 \pm 0.015$	$0.683 \pm 0.004$	$0.4664 \pm 0.0055$
8 dischi	$630.340 \pm 0.031$	$19.59 \pm 0.01$	$0.7750 \pm 0.0028$	$0.6007 \pm 0.0043$
10 dischi	$788.190 \pm 0.041$	$23.020 \pm 0.013$	$0.8672 \pm 0.0031$	$0.7521 \pm 0.0054$

Tabella 4.4: Misure di massa  $m$ , posizione di equilibrio  $x_{eq}$ , periodo di una singola oscillazione  $T$  e periodo al quadrato  $T^2$  nelle 4 configurazioni con le corrispondenti incertezze.



### 4.1.5 Istogrammi periodo singola oscillazione

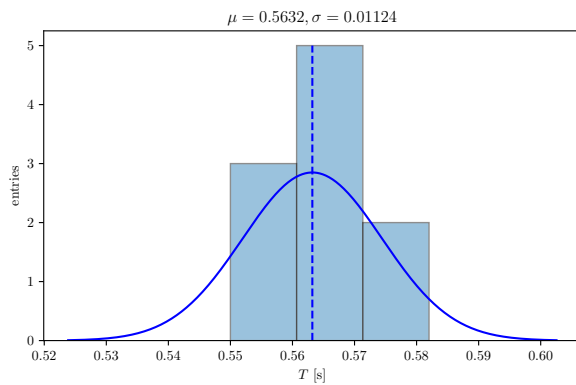


Figura 4.1: Periodo singola oscillazione 4 dischi.

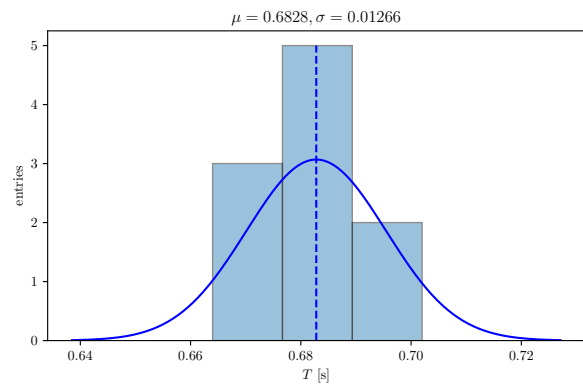


Figura 4.2: Periodo singola oscillazione 6 dischi.

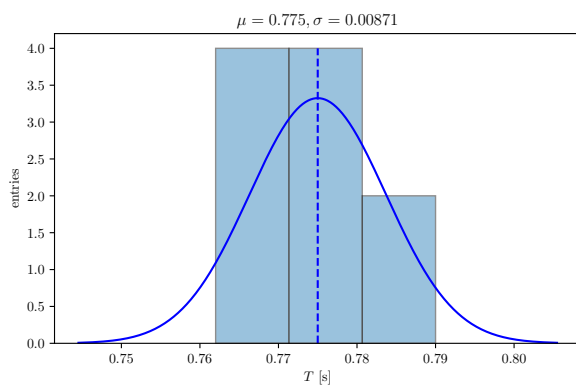


Figura 4.3: Periodo singola oscillazione 8 dischi.

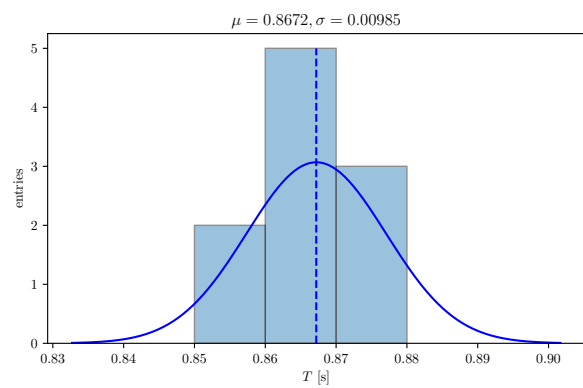


Figura 4.4: Periodo singola oscillazione 10 dischi.

## 4.2 Misura di $k$

	valore	$\sigma$	unità
$k$	42.7	4.3	$\text{N m}^{-1}$

Tabella 4.5: Risultato finale per la costante elastica della molla  $k$  con la corrispondente incertezza.

### 4.3 Misura di $g$

Stimando in maniera preliminare il coefficiente angolare impostando  $\sigma_x = 0$  si ottiene  $\alpha = 23.3696971$ . Usando questo  $\alpha$  per calcolare le  $\sigma_{y_i}$  e ripetendo il fit lineare si ottengono i seguenti valori:

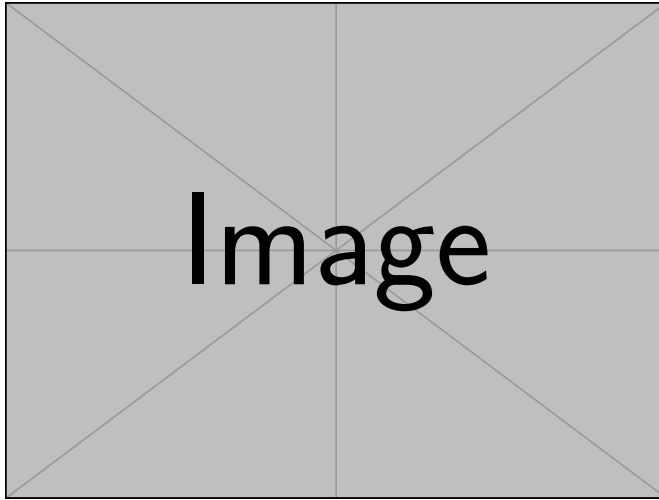


Figura 4.5: Fit lineare.

	valore	unità
$\bar{x}$	0.55985438	$s^2$
$\bar{y}$	18.56827978	cm
$\overline{x^2}$	0.33791517	$s^4$
$\overline{xy}$	10.96705875	$s^2 \text{ cm}$
$\text{Var}[x]$	0.02447825	$s^4$
$\text{Cov}[x, y]$	0.57152617	$s^2 \text{ cm}$
$\sum_i \sigma_{y_i}^{-2}$	671.00945559	$\text{cm}^{-2}$

Figura 4.6: Quantità utilizzate come input nel fit lineare.  $y = x_{eq}$ ,  $x = T^2$ ,  $\sigma_{y_i}$  = incertezze finali associate alle  $y_i$  tenendo conto anche delle incertezze sulle  $x_i$ .

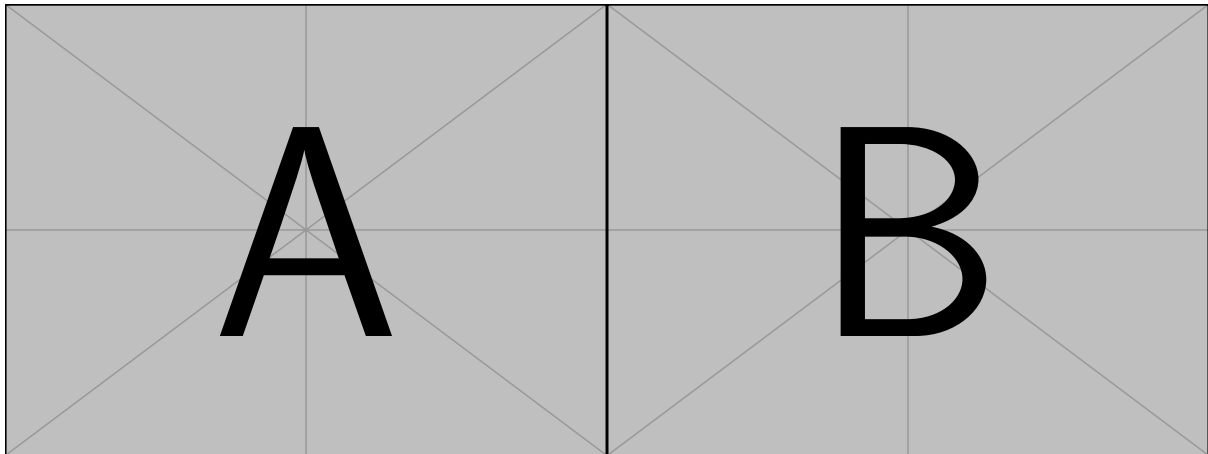


Figura 4.7: Residui.

Figura 4.8: Residui standardizzati.

	valore	$\sigma$	unità
$\alpha$	23.35	0.25	$\text{cm s}^{-2}$
$x_0$	5.50	0.14	cm

Tabella 4.6: Risultato del fit lineare  $x_{eq} = \alpha T^2 + x_0$ . Migliori stime dei parametri  $\alpha$  e  $x_0$  con le relative incertezze.

	valore	$\sigma$	unità
$g$	9.2	0.1	$\text{m s}^{-2}$

Tabella 4.7: Risultato finale per l'accelerazione di gravità  $g$  con la corrispondente incertezza.

#### 4.3.1 Considerazioni sul valore sperimentale di $g$

$$z = \frac{|g - g_{Roma}|}{\sigma_g} = 6.03066$$

È evidente un'elevata discrepanza dal valore atteso. Questo è dovuto probabilmente a diversi fattori: il tempo di reazione durante le misure dei periodi, la non perfetta oscillazione verticale della molla e la non perfetta lettura delle  $x_{eq}$  dovuta ad un probabile errore di parallasse (nonostante l'utilizzo della squadra).