Sapienza Università di Roma

Laboratorio di Meccanica

PPI1-Molla

Giulio Russo

6 maggio 2021

Indice

1 Scopo dell'esperienza

- Eseguire misure dirette di massa, lunghezza e tempo.
- Misura della costante elastica di una molla.
- Misura dell'accelerazione di gravità.

2 Apparato sperimentale

- Una molla appesa ad un supporto con carta millimetrata per effettuare misure di allungamento.
- Una bilancia digitale per la misura dei dischetti.
- Un cronometro a lettura digitale per le misure di periodo.
- Una squadra per ridurre l'errore di parallasse nella misura di allungamento.

2.1 Campioni

- 10 dischetti che si possono appendere alla molla.

2.2 Accorgimenti e consigli

- Attenzione a non allungare eccessivamente la molla rispetto alle condizioni di equilibrio per la misura di periodo (circa 1-1.5 cm).
- Fare attenzione che la molla non urti la parte superiore quando è al minimo della lunghezza in quanto altera le misure di periodo.
- Assicurasi che le oscillazioni della molla siano, per quanto possibile, verticali e unidimensionali.

2.3 Strumenti di misura

In Tabella 2.1 sono riassunte le caratteristiche degli strumenti usati.

- **Bilancia di precisione**. La risoluzione è pari a 0.1 g. L'incertezza di tipo B associata alla risoluzione dello strumento è quindi $\frac{\mathrm{RIS}}{\sqrt{12}} = \frac{0.1\,\mathrm{g}}{\sqrt{12}} = 0.03\,\mathrm{g}$.

  La portata è pari a 3 kg. Eseguendo la misura di massa nulla il valore mostrato sul display è esattamente zero; si assume quindi che l'offset dello strumento sia trascurabile.

- **Cronometro**. La risoluzione è pari a 0.01 s. L'incertezza di tipo B associata alla risoluzione dello strumento è quindi $\frac{\mathrm{RIS}}{\sqrt{12}} = \frac{0.01\,\mathrm{s}}{\sqrt{12}} = 0.003\,\mathrm{s}$.

- **Carta millimetrata**. La risoluzione è pari a 1 mm. L'incertezza di tipo B associata alla risoluzione dello strumento è quindi $\frac{\mathrm{RIS}}{\sqrt{12}} = \frac{0.001\,\mathrm{m}}{\sqrt{12}} = 0.0003\,\mathrm{m}$.

  La portata è pari a 28 cm. L'offset dello strumento è trascurabile.

Strumento	Portata	Risoluzione	σ_B	Offset
Bilancia di precisione	3 kg	0.1 g	0.03 g	-
Cronometro	-	0.01 s	0.003 s	-
Carta millimetrata	28 cm	1 mm	0.3 mm	-

Tabella 2.1: Caratteristiche degli strumenti usati e incertezze associate alla singola misura. Sono inoltre riportati gli eventuali fattori correttivi di offset e di scala.

3 Strategia di misura

3.1 Molla

Un corpo di massa M soggetto alla sola forza elastica segue la legge di Hooke in una dimensione:

$$F = -k\Delta x$$
$$M\ddot{x} = -k(x - x_0) \tag{3.1}$$

con k costante elastica della molla e x_0 lunghezza a riposo della molla. La soluzione generale di questa equazione differenziale è

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + x_0 \tag{3.2}$$

con $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$. Il periodo di oscillazione è legato alla pulsazione ω dalla relazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}\,. \tag{3.3}$$

Nel caso di una massa M appesa ad una molla c'è un termine in più dovuto alla forza peso (g è l'accelerazione di gravità). L'equazione del moto diventa quindi

$$F = -k(x - x_0) + Mg = M\ddot{x} \tag{3.4}$$

che ha come soluzione

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{Mg}{k} + x_0 \tag{3.5}$$

con periodo di oscillazione uguale al caso precedente.

Nel caso statico (senza oscillazione, $\dot{x} = 0$ e $\ddot{x} = 0$) la posizione di equilibrio corrisponde a

$$x_{eq} = \frac{Mg}{k} + x_0\,. \tag{3.6}$$

In questo esperimento non conosciamo la massa totale M dell'oscillatore ma solo la massa m dei dischi che aggiungiamo; possiamo quindi riscrivere $M = (m_0 + m)$ dove m_0 è la massa della molla (incluso il supporto ad essa collegato) senza dischi. Anche la lunghezza a riposo della molla non è nota poiché la molla comincia ad allungarsi solo con una sollecitazione sufficientemente intensa.

Dall'equazione del periodo (3.3) ricaviamo quindi la seguente relazione:

$$T^2 = 4\pi^2(m_0 + m)/k\,. \tag{3.7}$$

Eseguendo misure di periodo per due diverse masse otteniamo una formula per calcolare la costante elastica k della molla:

$$T_1^2 = 4\pi^2(m_0 + m_1)/k\,;$$
$$T_2^2 = 4\pi^2(m_0 + m_2)/k\,;$$
$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2(m_2 - m_1)/k\,;$$
$$k = 4\pi^2\frac{m_2 - m_1}{T_2^2 - T_1^2}\,. \tag{3.8}$$

Esplicitando k in funzione delle altre grandezze a partire dalla (3.7) e sostituendo tale valore di k in (3.6) otteniamo la relazione lineare tra x_{eq} e T^2:

$$x_{eq} = \frac{g}{4\pi^2}T^2 + x_0$$
$$= \alpha T^2 + x_0\,. \tag{3.9}$$

Da questa relazione è possibile stimare l'accelerazione di gravità g.

3.1.1 Passaggi riassuntivi

È quindi possibile:

1. aggiungere diverse masse alla molla;
2. per ciascuna configurazione misurare la posizione statica di equilibrio x_{eq} e il periodo di una singola oscillazione T;
3. calcolare il coefficiente elastico k della molla;
4. studiare l'andamento lineare di "x_{eq} in funzione di T^2" per estrarre l'accelerazione di gravità g.

3.2 Formule generali

La miglior stima del **valore vero** di una grandezza è data dalla *media aritmetica* delle N misurazioni:

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum\nolimits_i x_i \,. \tag{3.10}$$

L'**incertezza di misura** è data dalla somma in quadratura dell'incertezza di tipo A, valutabile attraverso misure ripetute, e l'incertezza di tipo B, in cui rientrano tutte le altre informazioni a disposizione:

$$\begin{aligned} \sigma_T &= \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \\ &= \sqrt{S_N(x)^2 + \sigma_B^2} \end{aligned} \tag{3.11}$$

dove $S_N(x)$ è la *deviazione standard campionaria*:

$$S_N(x) = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}{N-1}} \,. \tag{3.12}$$

L'incertezza di una singola misura diretta è data dalla sola incertezza di tipo B. Se le diverse misure ripetute producono sempre lo stesso risultato allora $\sigma_A = 0$. Se la deviazione standard campionaria è maggiore dell'incertezza di tipo B posso trascurare quest'ultima per il calcolo dell'incertezza totale.

La *deviazione standard della media* di N misure indipendenti di una stessa grandezza diminuisce come $1/\sqrt{N}$, di conseguenza:

$$S_N(\overline{x}) = \frac{S_N(x)}{\sqrt{N}} \,. \tag{3.13}$$

3.3 Propagazione incertezze

- Propagazione incertezze T^2

$$\sigma_{T^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial T^2}{\partial T}\sigma_T\right)^2} = 2T\sigma_T \tag{3.14}$$

- Propagazione incertezze $\Delta m = m_2 - m_1$

$$\sigma_{\Delta m} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta m}{\partial m_2}\sigma_{m_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta m}{\partial m_1}\sigma_{m_1}\right)^2} = \sqrt{\sigma_{m_2}^2 + \sigma_{m_1}^2} \tag{3.15}$$

- Propagazione incertezze $\Delta T = T_2^2 - T_1^2$

$$\sigma_{\Delta T} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta T}{\partial T_2^2}\sigma_{T_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta T}{\partial T_1^2}\sigma_{T_1^2}\right)^2} = \sqrt{\sigma_{T_2^2}^2 + \sigma_{T_1^2}^2} \tag{3.16}$$

- Propagazione incertezze $k = 4\pi^2 \frac{\Delta m}{\Delta T}$

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial \Delta m}\sigma_{\Delta m}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial \Delta T}\sigma_{\Delta T}\right)^2} \\ &= 4\pi^2 \sqrt{\frac{\sigma_{m_2}^2 + \sigma_{m_1}^2}{(\Delta T)^2} + \frac{(\Delta m)^2}{(\Delta T)^4}(\sigma_{T_2^2}^2 + \sigma_{T_1^2}^2)} \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.4 Fit lineare

Per *fit* si intende il processo di adattamento di una curva ai dati sperimentali.

Come descritto precedentemente (Formula 3.9), c'è una relazione lineare tra x_{eq} e T^2:

$$x_{eq} = \alpha T^2 + x_0\,; \tag{3.18}$$

$$\alpha = \frac{g}{4\pi^2}\,. \tag{3.19}$$

Una volta ricavato α con il fit è quindi possibile stimare g:

$$g = 4\pi^2\alpha\,; \tag{3.20}$$

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial \alpha}\sigma_\alpha\right)^2} = 4\pi^2\sigma_\alpha\,. \tag{3.21}$$

Per valutare in maniera quantitativa la compatibilità del valore di g così ottenuto con il valore atteso ($g_{Roma} = 9.805\,\mathrm{m\,s^{-2}}$) possiamo definire la variable standardizzata

$$z = \frac{|g - g_{Roma}|}{\sigma_g}\,, \tag{3.22}$$

dove $|g - g_{Roma}|$ è la discrepanza dal valore atteso. z quindi è la distanza della discrepanza da 0 in unità di sigma; maggiore è il valore di z maggiore è la distanza del valore sperimentale dal valore atteso. Nel nostro caso se $z \leq 2$, ovvero se il valore sperimentale rientra entro 2σ (95.4%) dal valore di riferimento, possiamo ritenere la misura sperimentale compatibile.

3.4.1 Metodo dei minimi quadrati

Il metodo utilizzato per il fit lineare è il **metodo dei minimi quadrati**.

$$\mu_Y = m \cdot \mu_X + c \tag{3.23}$$

Formule:

$$\sigma_{Y_i} = \sqrt{\sigma_{Y_i}^2 + (m\sigma_{X_i})^2} \tag{3.24}$$

$$\hat{m} = \mathrm{E}[m] = \frac{\mathrm{Cov}[x,y]}{\mathrm{Var}[x]} \tag{3.25}$$

$$\hat{c} = \mathrm{E}[c] = \overline{y} - \hat{m}\cdot\overline{x} \tag{3.26}$$

$$\mathrm{Var}[\hat{m}] = \frac{1}{\mathrm{Var}[x]\sum_i \sigma_{Y_i}^{-2}} \tag{3.27}$$

$$\mathrm{Var}[\hat{c}] = \overline{x^2}\cdot\mathrm{Var}[\hat{m}] \tag{3.28}$$

$$\mathrm{Cov}[\hat{m},\hat{c}] = -\overline{x}\cdot\mathrm{Var}[\hat{m}] \tag{3.29}$$

$$\rho[\hat{m},\hat{c}] = \frac{\mathrm{Cov}[\hat{m},\hat{c}]}{\sqrt{\mathrm{Var}[\hat{m}]\mathrm{Var}[\hat{c}]}} \tag{3.30}$$

L'incertezza su μ_Y è ottenuta dalla propagazione delle incertezze, tenendo conto del termine di correlazione:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu_Y} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu_Y}{\partial m}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu_Y}{\partial c}\sigma_c\right)^2 + 2\frac{\partial\mu_Y}{\partial m}\frac{\partial\mu_Y}{\partial c}\rho[m,c]\sigma_m\sigma_c}\\ &= \sqrt{\mu_X^2\sigma_m^2 + \sigma_c^2 + 2\mu_X\mathrm{Cov}[m,c]}\end{aligned} \tag{3.31}$$

4 Operazioni sperimentali

4.1 Misure dirette

Le misure sono state effettuate in quattro configurazioni diverse: 4 dischi, 6 dischi, 8 dischi e 10 dischi.

4.1.1 Massa m

n°	m_4 [g]	m_6 [g]	m_8 [g]	m_{10} [g]
1	317.7	475.5	630.4	788.1
2	317.6	475.5	630.4	787.9
3	317.7	475.4	630.4	788.2
4	317.8	475.6	630.4	788.3
5	317.7	475.5	630.3	788.2
6	317.7	475.2	630.4	788.3
7	317.6	475.4	630.4	788.1
8	317.8	475.5	630.3	788.2
9	317.8	475.3	630.3	788.3
10	317.7	475.4	630.1	788.3
S_N	0.0738	0.1160	0.0966	0.1287

Tabella 4.1: Misure di massa m dei dischi nelle 4 configurazioni.

4.1.2 Posizione di equilibrio x_{eq}

n°	$x_{eq,4}$ [cm]	$x_{eq,6}$ [cm]	$x_{eq,8}$ [cm]	$x_{eq,10}$ [cm]
1	13.0	16.3	19.6	23.0
2	12.9	16.2	19.6	23.0
3	12.9	16.3	19.5	23.1
4	12.9	16.3	19.6	23.0
5	13.0	16.2	19.6	23.0
6	12.9	16.3	19.6	23.0
7	12.9	16.3	19.6	23.1
8	12.9	16.3	19.6	23.0
9	12.9	16.3	19.6	23.0
10	12.9	16.2	19.6	23.0
S_N	0.0422	0.0483	0.0316	0.0422

Tabella 4.2: Misure di posizione di equilibrio x_{eq} nelle 4 configurazioni.

4.1.3 Periodo T_{5osc}

n°	$T_{5osc,4}$ [s]	$T_{5osc,6}$ [s]	$T_{5osc,8}$ [s]	$T_{5osc,10}$ [s]
1	2.81	3.51	3.90	4.40
2	2.91	3.44	3.89	4.40
3	2.76	3.39	3.95	4.34
4	2.81	3.38	3.83	4.32
5	2.76	3.44	3.91	4.27
6	2.91	3.40	3.81	4.34
7	2.82	3.51	3.84	4.32
8	2.75	3.41	3.90	4.37
9	2.81	3.32	3.84	4.25
10	2.82	3.34	3.88	4.35
S_N	0.0562	0.0633	0.0435	0.0493

Tabella 4.3: Misure del tempo complessivo di 5 oscillazioni T_{5osc} nelle 4 configurazioni.

4.1.4 Valori finali

	m [g]	x_{eq} [cm]	T [s]	T^2 [s^2]
4 dischi	317.710 ± 0.023	12.920 ± 0.013	0.5632 ± 0.0036	0.317 ± 0.004
6 dischi	475.430 ± 0.037	16.270 ± 0.015	0.683 ± 0.004	0.4662 ± 0.0055
8 dischi	630.340 ± 0.031	19.59 ± 0.01	0.7750 ± 0.0028	0.6006 ± 0.0043
10 dischi	788.190 ± 0.041	23.020 ± 0.013	0.8672 ± 0.0031	0.7520 ± 0.0054

Tabella 4.4: Misure di massa m, posizione di equilibrio x_{eq}, periodo di una singola oscillazione T e periodo al quadrato T^2 nelle 4 configurazioni con le corrispondenti incertezze.

4.1.5 Istrogrammi periodo singola oscillazione

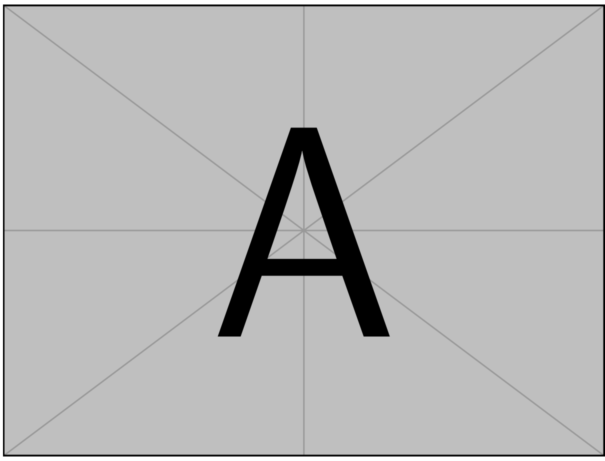

Figura 4.1: Periodo singola oscillazione 4 dischi.

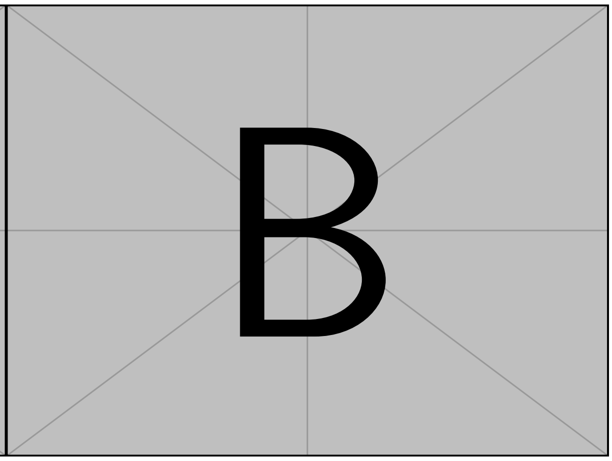

Figura 4.2: Periodo singola oscillazione 6 dischi.

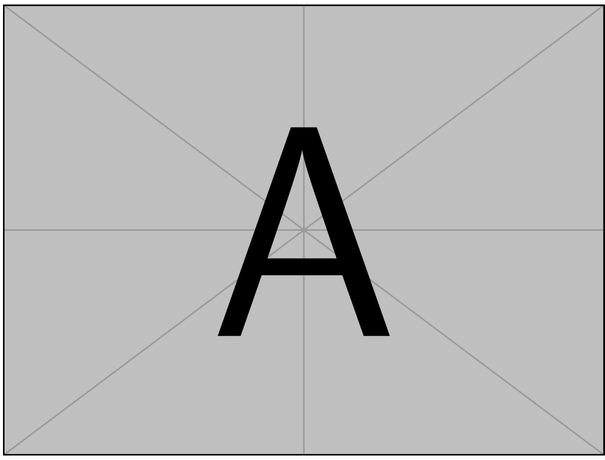

Figura 4.3: Periodo singola oscillazione 8 dischi.

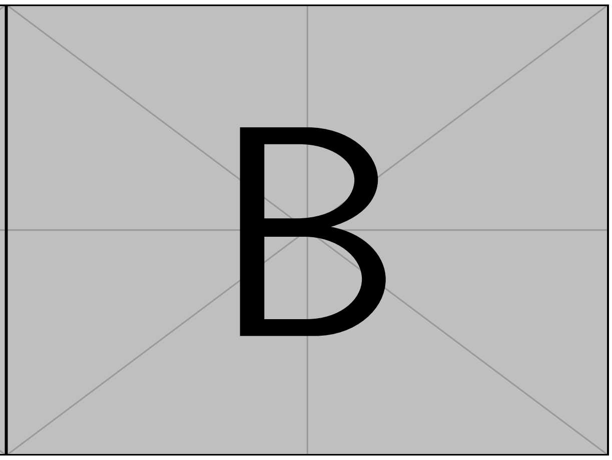

Figura 4.4: Periodo singola oscillazione 10 dischi.

4.2 Misura di k

	valore	σ	unità
k	42.7	4.3	$\mathrm{N\,m^{-1}}$

Tabella 4.5: Risultato finale per la costante elastica della molla k con la corrispondente incertezza.

4.3 Misura di g

Stimando in maniere preliminare il coefficiente angolare impostando $\sigma_x = 0$ si ottiene $\alpha = 23.3696971$. Usando questo α per calcolare le σ_{Y_i} e ripetendo il fit lineare si ottengono i seguenti valori:

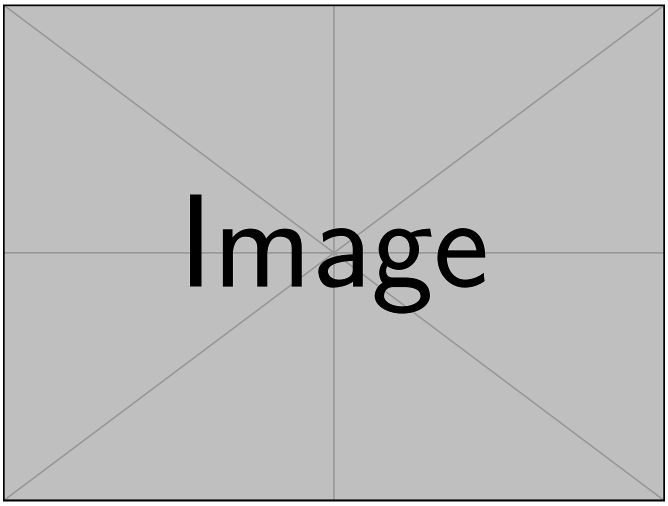

Figura 4.5: Fit lineare.

	valore	unità
$\overline{x}$	0.55985438	s^2
$\overline{y}$	18.56827978	cm
$\overline{x^2}$	0.33791517	s^4
$\overline{xy}$	10.96705875	$\mathrm{s}^2\,\mathrm{cm}$
$\mathrm{Var}[x]$	0.02447825	s^4
$\mathrm{Cov}[x, y]$	0.57152617	$\mathrm{s}^2\,\mathrm{cm}$
$\sum_i \sigma_{y_i}^{-2}$	671.00945559	cm^{-2}

Figura 4.6: Quantità utilizzate come input nel fit lineare. $y = x_{eq}$, $x = T^2$, $\sigma_{y_i} =$ incertezze finali associate alle y_i tenendo conto anche delle incertezze sulle x_i.

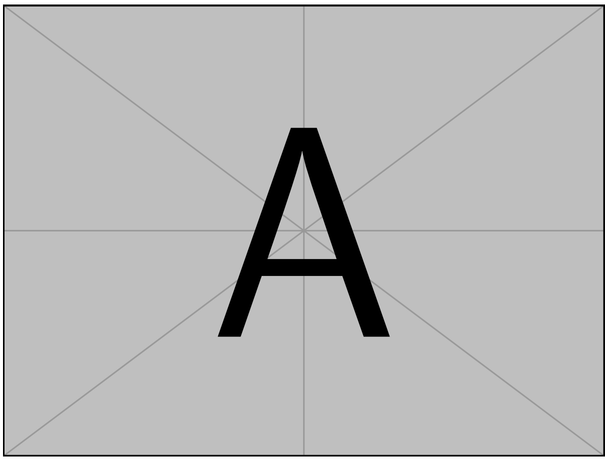

Figura 4.7: Residui.

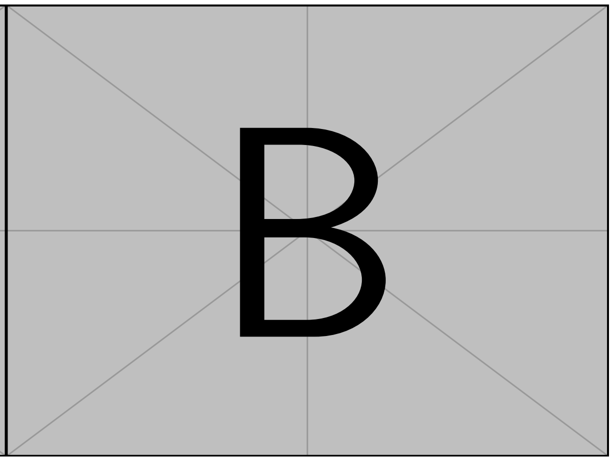

Figura 4.8: Residui standardizzati.

	valore	σ	unità
α	23.35	0.25	$\mathrm{cm\,s^{-2}}$
x_0	5.50	0.14	cm

Tabella 4.6: Risultato del fit lineare $x_{eq} = \alpha T^2 + x_0$. Migliori stime dei parametri α e x_0 con le relative incertezze.

	valore	σ	unità
g	9.2	0.1	$\mathrm{m\,s^{-2}}$

Tabella 4.7: Risultato finale per l'accelerazione di gravità g con la corrispondente incertezza.

4.3.1 Considerazioni sul valore sperimentale di g

$$z = \frac{|g - g_{Roma}|}{\sigma_g} = 6.03066$$

È evidente un elevata discrepanza dal valore aspettato. Questo è dovuto probabilmente a diversi fattori: il tempo di reazione durante le misure dei periodi, la non perfetta oscillazione verticale della molla e la non perfetta lettura delle x_{eq} dovuta ad un probabile errore di parallasse (nonostante l'utilizzo della squadra).