

電子電路實驗 10：方波的諧波分析

實驗預報

B02901178 江誠敏

December 16, 2014

1 實驗目的

我們從傅立葉級數理論 (Fourier series Theory) 可知，方波是由一連串之弦波 (sinusoidal wave) 所合成的，本實驗將利用前一個實驗所介紹的帶通濾波器 (band-pass filter) 把潛藏於方波之中的弦波成分找出來。

2 實驗步驟

1. 以 LCR 計量測各個電容與電感的值，並用數位電表量測各個固定電阻的值。
2. 將電路連接如圖 10.1(c) 所示，其中 $R_1 = R_3 = 510\ \Omega$ ， $R_2 = 100\ \Omega$ ， $R_6 = 10\ \text{k}\Omega$ ， $C_4 = 0.01\ \mu\text{F}$ ， $C_6 = 0.01\ \mu\text{F}$ ，OP 電源為 $\pm 15\text{V}$ ，+K 的放大電路直接短路至 v_o 即可。用可變電阻將 R_5 值調整至 $10\ \text{k}\Omega$ 附近 (不用太準)。
3. 令 v_i 為高低電位差 1V (1V 是信號產生器已接上電路的值)，頻率為 $1\ \text{kHz}$ 的方波。微調可變電阻 R_5 ，使得 v_o 近似於一個頻率與方波相同，且振幅為最大的弦波。將此時的 v_i 以及 v_o 記錄於方格紙上，並以數位電表量測此時的 R_5 之電阻值。
4. 用可變電阻將 R_5 值調整至 $1.1\ \text{k}\Omega$ 附近 (不用太準)，將電源與 v_i 接上之後可見 v_o 為一個頻率約為方波的 3 倍的類似弦波。微調可變電阻 R_5 ，使得 v_o 的頻率維持在這附近，且振幅為最大。將此時的 v_i 以及 v_o 記錄於方格紙上，並以數位電表量測此時的 R_5 之電阻值。
5. 用可變電阻將 R_5 值調整至 $400\ \Omega$ 附近 (不用太準)，將電源與 v_i 接上之後可見 v_o 為一個頻率約為方波的 5 倍的類似弦波。微調可變電阻 R_5 ，使得 v_o 的頻率維持在這附近，且振幅為最大。將此時的 v_i 以及 v_o 記錄於方格紙上，並以數位電表量測此時的 R_5 之電阻值。
6. 用可變電阻將 R_5 值調整至 $200\ \Omega$ 附近 (不用太準)，將電源與 v_i 接上之後可見 v_o 為一個頻率約為方波的 7 倍的類似弦波。微調可變電阻 R_5 ，使得 v_o 的頻率維持在這附近，且振幅為最大。將此時的 v_i 以及 v_o 記錄於方格紙上，並以數位電表量測此時的 R_5 之電阻值。
7. 將可變電阻 R_5 調回步驟 3 量得的值，分別調整方波頻率為 $333\ \text{Hz}$ 、 $200\ \text{Hz}$ 、 $142.9\ \text{Hz}$ ，觀察並將此時的 v_i 以及 v_o 記錄於方格紙上。

3 預報問題

1. 請推導 Duty Cycle = 50% 的方波的傅立葉級數，以驗證實驗原理中的關係式。

假設方波的函數為

$$f(t) = \begin{cases} V, & \text{if } t \in [2n\pi, (2n+1)\pi) \\ -V, & \text{otherwise} \end{cases}$$

則

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(t)e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t)e^{-ikt} dt \\ &= V \frac{2 - e^{ikt} + e^{-ikt}}{ik} \\ &= \frac{2V}{\pi} \frac{[[k = 2n+1]]}{ik} \end{aligned}$$

所以

$$f = \sum \mathfrak{F}(k)e^{ikt} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2V}{i(2n+1)\pi} e^{i(2n+1)t} = \frac{4V}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}$$

因此

$$\begin{aligned} a_1 : a_2 : a_3 \cdots &= \frac{1}{1} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5} \cdots \\ \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 \cdots &= 1 : 3 : 5 \cdots \end{aligned}$$

2. 欲將帶通濾波器之中心頻率調整為 1kHz, R_5 應調整到多少? 等效電感的值為多少? 請推導之。

在實驗 9 已經計算過這個電路的 Transfer function 為

$$f(s) = \frac{sL}{s^2LRC + sL + R} = \frac{L}{sLRC + L + R/s}$$

跟據算幾不等式，可知

$$|f(i\omega)| = \frac{L}{|i\omega LRC - iR/\omega + L|} \leq \frac{L}{L} = 1$$

等式成立若且唯若

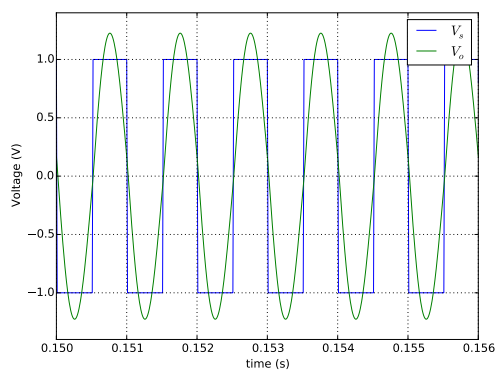
$$\omega LRC = \frac{R}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

代入 $\omega = 2\pi f$, $f = 1 \text{ kHz}$ 可以得到 $L_{eq} \approx 0.253 \text{ H}$ 在代入

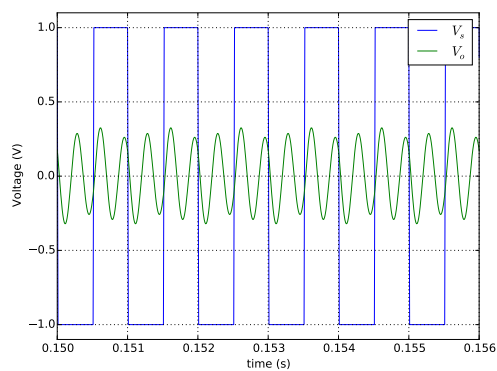
$$sL = Z_L = \frac{sC_4 R_1 R_3 R_5}{R_2}$$

得出 $R_5 = 9739 \Omega$

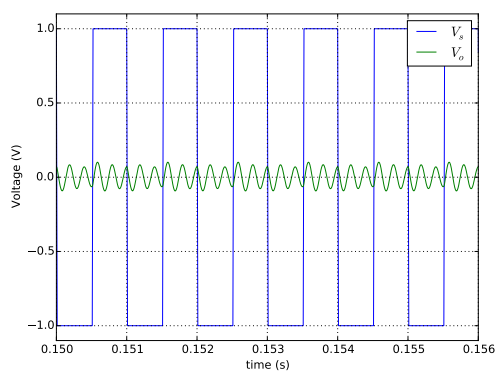
3. 請用 PSpice 或其他電路模擬軟體，模擬圖 10.1(c) 的電路，其中各元件值與方波的參數請依照步驟 2， R_5 的值請用預報問題 2 中的結果 r_0 。利用暫態分析的功能分別繪出當 $R_5 = r_0, r_0/9, r_0/25, r_0/49$ 時， v_o 與 v_i 的關係。



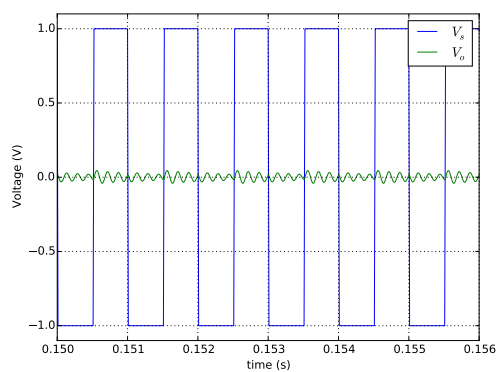
(a) $R_5 = r_0 \approx 9739 \Omega$



(b) $R_5 = r_0/9 \approx 1082 \Omega$



(c) $R_5 = r_0/25 \approx 389.6 \Omega$



(d) $R_5 = r_0/49 \approx 198.8 \Omega$