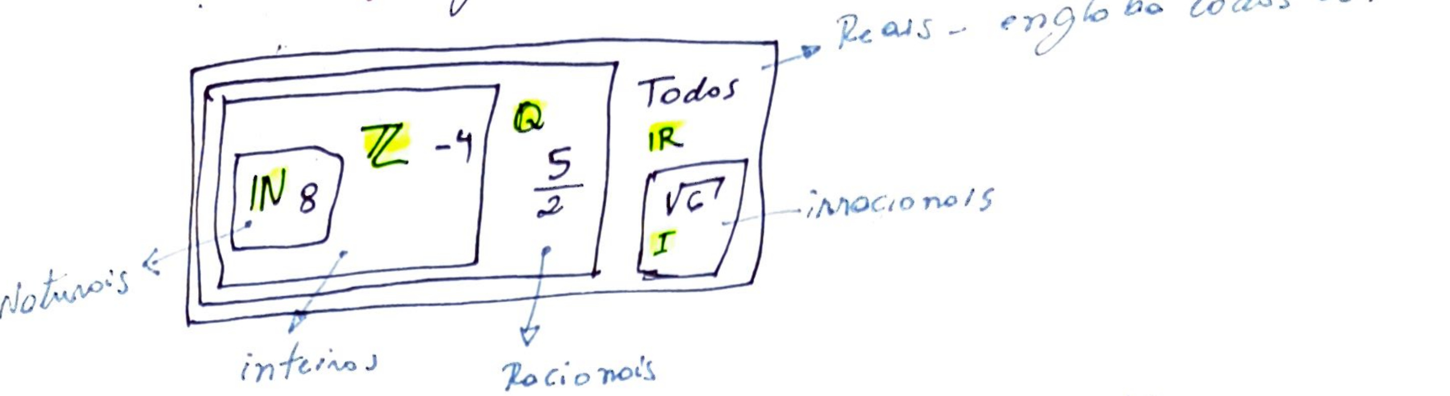
Conjuntos numéricos



IN = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 245, ... } começa no zero até ∞

o traço significa conjunto

Números naturais são sempre positivos

IN* = IN - {0} conjunto Nº naturais menos zero
↳ {1, 2, 3 ..} As vezes o zero não é aceito como parte do conjunto

+5 + 6 = 11

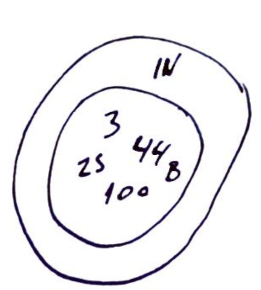
+7 - 8 = -1 => não é natural.
Não existe -1 maça

Sucessor 4+1 = 5 Qualquer Nº +1

Antecessor 7-1 = 6 Qualquer Nº -1

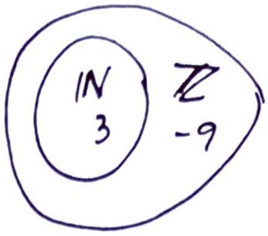
∈ Pertence ∉ não pertence

⊂ contido ⊄ não contido

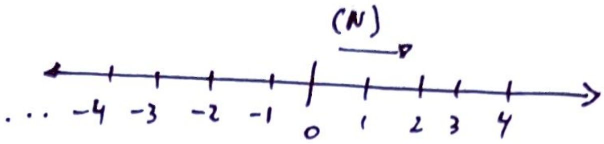


100 ∈ B
45 ∉ B
25 ∈ IN

B ⊂ IN
IN ⊄ B
Pares ⊂ IN



conjunto dos Nº inteiros



cada vez maior

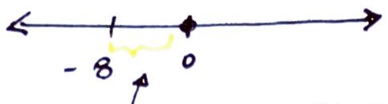
cada vez menor

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -475, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Módulo e valor absoluto

| | = distância entre o ponto de origem e o nº

$\mathbb{Z}$



$|-8| = 8$

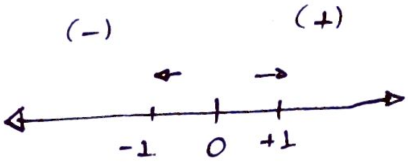
o módulo de $-8 = 8$

a distância de -8 para zero $= 8$

$|x| = x$

$|-x| = x$

Numeros Simétricos ou opostos



é o numero com a mesma distancia oposta ou zero

$0 = 0$

Soma de fração

14

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{6} = \frac{18+10}{12} = \frac{28}{12} \quad \frac{7}{3}$$

$2 \times 6 = 12$

$12/6 = 2 \times 5 = 10$

$12/2 = 6 \times 3 = 18$

$$\frac{7}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{70-12-15}{30} = \frac{73}{30}$$

$30/3 = 10 \times 7 = 70$

$3 \times 5 \times 2 = 30$

Multiplicação

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$$

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{63}$$

Divisão

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} \rightarrow \frac{2}{3} \swarrow \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$$

$$\frac{1}{8} \div \frac{2}{9} = \frac{9}{16}$$

$1,66666\ldots \times 0,8571429\ldots =$

$\frac{5}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{30}{21} = \frac{10}{7}$

$\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ -7 & 1 \\ 3 & \end{array}$

$1\frac{3}{7}$

$30 \div 21 = 1,4285714285 71\ldots = 10 \div 7$

Exato

$1\frac{3}{7} = 1 \text{ e } 3 \div 7 =$

$1 + 3 \div 7 = 1 + 0,4285 7142\ldots$

1º

$\frac{3}{4} + \boxed{\frac{\overset{1}{5 \div 5}}{7\,\underset{}{1}} \times \frac{\overset{\div 7 = 3}{21}}{\underset{8}{40 \div 5}}} - \frac{1}{6}$

$\frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{6}$

$\text{MMC} = \begin{array}{r|l} 4, 8, 6 & 2 \\ 2, 4, 3 & 2 \\ 1, 2, 3 & 2 \\ 1, 1, 3 & 3 \\ 1, 1, 1 & 24 \end{array}$

equivalentes

$\frac{18}{24} + \frac{9}{24} - \frac{4}{24} = \frac{23}{24}$

$\boxed{\frac{1}{10} \times 1} + \boxed{\frac{9}{10} \times \frac{1}{16}} = \frac{1}{10} + \frac{9}{160} = \frac{16 + 9}{160} = \frac{25}{160}$

Amostra = random and representative

~~Varjous~~ Various types of data

categorical
↳ yes No question

Numerical

Discrete

continuous

Teorema de Bayes

$$P(A_i \mid A) = \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A_i)\,P(A \mid A_i)}{P(A_i)\cdot P(A \mid A_i) + \dots + P(A_n)\,P(A \mid A_n)}$$

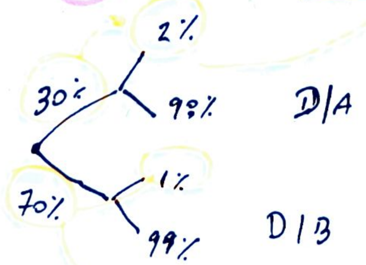
Probabilidade Total

Numa industria, os parafusos são feitos em duas máquinas: A e B: A primeira é responsavel por 30% da produção e a outra pela restante. A máquina A produz 2% de peças defeituosas e a B produz 1%.

a) Qual a probabilidade de ser produzido uma peça defeituosa?

$$P(D) = \underline{P[(A \cap D) \cup (B \cap D)]} = P(A \cap D) + P(B \cap D)$$

$$= 0{,}30 \cdot 0{,}02 + 0{,}70 \cdot 0{,}01 = \underline{\underline{0{,}013}}$$



Qual a probabilidade de uma peça defeituosa ter sido produzida pela máquina A?

dado defeito

$$P(A|D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)\,P(D|A)}{P(A)\cdot P(D|A) + P(B)\cdot P(D|B)}$$

Qual prob. de ser máq... A ?

Probabilidade total

$$= \frac{0,30\cdot 0,02}{0,30\cdot 0,02 + 0,70\cdot 0,01} = 46,1\ \%$$

Bayes

Random variables

Variáveis aleatórias
- Discretas - 1-2-3-4...
- Contínuas - 0 ... ∞

Discreta

X { 0 → cara; 1 → coroa }

Discreto porque os valores estão definidos

Y { massa de um animal de um zoológico de SC }

contínua

0 — 2 kg — 5.000 kg

Se pesar em uma balança de precisão pode variar em seus átomos

Nunca terá certeza do valor

Z = # Nº de formigas vão nascer amanhã

Discreta

0 — 1.000.000 — 4.000.000

Valor exato!

W: Ano de nascimento de uma pessoa

1496, 1495, 1845

Discreto = valor exato

A = tempo total p/ completarem uma corrida de 100 ms nas olimpíadas de 2016

tempo ñ é valor exato

5 s — 9,51 — 9,52 — 12 s

contínua

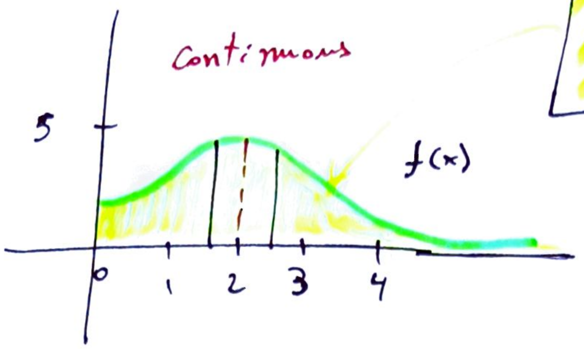
mas se calcular com até 2 casas após a vírgula pode ser discreto

Discrete - distinct separate value

Random variable <

continuous - any value in interval

y = exact amount of rain tomorrow



$$\int_0^{\infty} f(x) = 1$$

a integral de 0 à ∞ é igual a 1

=> Se considerarmos todo o intervalo isso é igual a 100%

= 1

Probabilidade nunca pode ser negativa

A soma das probabilidades deve ser 100%

Covariância

$$Cov(x, y) = E[(x - E(x))(y - E(y))]$$

$$= E[xy - E(y)x - E(x)y + E(x)E(y)]$$

$x = 1 \quad E(x) = 0$

$y = 3 \quad E(y) = 4$

$$= E[xy] - E(y)E(x) - E(x)E(y) + E(x)E(y)$$

$$= E[xy] - E[y]E[x] \leftarrow \text{Covariância}$$

$E(E(x)) = E(x)$

Valor esperado é o próprio valor esperado

$$= \overline{xy} - \bar{y} \cdot \bar{x} \rightarrow \text{numerador}$$

$$\hat{m} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \leftarrow cov(x,y)$$

$Var(x) =$

$cov(x,y) = \overline{x \cdot x} - \bar{x} \cdot \bar{x}$

$$m = \frac{cov(x,y)}{Var(x)}$$

Probability Density functions

Associated with 'x' is a probability density Function $f(x)$ so that

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

notice $f(x) \geq 0 \quad \forall x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$ todo probabilidade tem que se ≥ 0 e $= 1$

Average Waiting time is 6 minutes

Probability density function

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ \frac{1}{6} e^{-t/6}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Q: Probability that your call is answer in first two min.

---

the random variable x has a p.d.f given by

$$f(x) = \begin{cases} K(2x+3), & -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Find K

1º forma

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 1$$

$$K \int_{-1}^{2} (2x+3)\,dx = 1$$

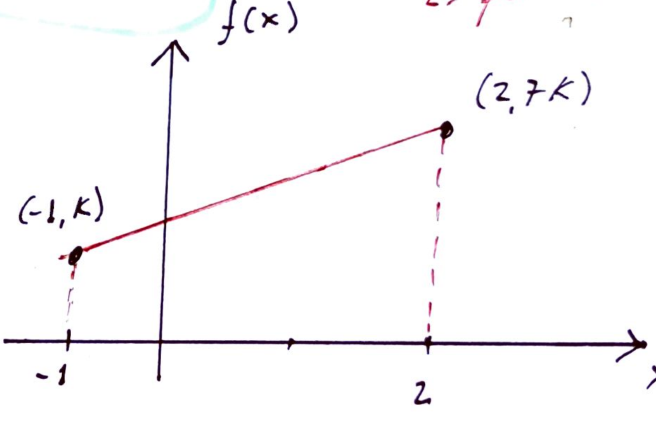
$$K \left[x^2 + 3x\right]_{-1}^{2} = 1$$

$$K\left[(4+6)-(1-3)\right] = 1$$

$$12K = 1$$

$$K = \frac{1}{12}$$

2º forma



$$\frac{1}{2}(K + 7K)\,3 = 1$$

$$12K = 1$$

$$K = \frac{1}{12}$$

Integral

$\int f(x) \cdot dx$

como se fosse parenteses e a função de x no meio

2 integrais

$\int_2^4 \int_1^3 \dots dx\, dy$

Fora dentro Fora

Derivadas

$f(x) = 3x^4 - 5x^3 - x^2 + 4x + 9$

$f'(x) = 12x^3 - 15x^2 - 2x + 4$

Esta linha significa derivada

Função de baixo derivada da de cima

Função Polinomial Porque tem vários Polinômios

sinal de - + separam os termos

$\int 12x^3 - 15x^2 - 2x + 4\, dx$ → 1 função polinomial ou 4 funções

$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx \Rightarrow \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Quando tiver + de 1 função pode se fazer a soma ou subtração dos integrais de cada termo.

$\int \overset{\text{constante}}{12} x^3\, dx - \int 15x^2\, dx - \int 2x\, dx + \int 4\, dx$

Sempre joga o Nº p/ fora

$\int K f(x)\, dx \Rightarrow K \int f(x)\, dx \Rightarrow 12 \cdot \int x^3\, dx \Rightarrow$

joga p/ fora

integra apenas o f(x)

K = constante

F(x) = variável x

continua →

$$12\int x^3\,dx - 15\int x^2\,dx - 2\int x\,dx + 4\int dx$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \boxed{n \neq -1}$$ nunca pode ser -1

c → Resultado da derivada Zero

$$12 \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{12 \cdot x^4}{4 \div 4} = \frac{3x^4}{1} = 3x^4$$

4÷

$$-15\int x^2\,dx = -15 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} = -\frac{15 \cdot x^3}{3} = -5x^3$$

$$-2\int x^1\,dx = -2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} = \frac{-2x^2}{2} = -1x^2 = -x^2$$

x^1 → todo N° é elevado a 1

$$4 \cdot \int \underline{1}\,dx = x + c = 4 \cdot x + c$$

→ Se for fazer apenas 1 integral coloca o 'c' como estamos fazendo vários coloca no último elemento

Sempre que não tiver nada dentro da integral tem que colocar 1

$$3x^4 - 5x^3 - x^2 + 4x + c$$ → o 'c' representa qualquer N° que foi derivado

$$3x^4 - 5x^3 - x^2 + 4x + 9$$ → o N° 9 foi derivado e se transformou em zero

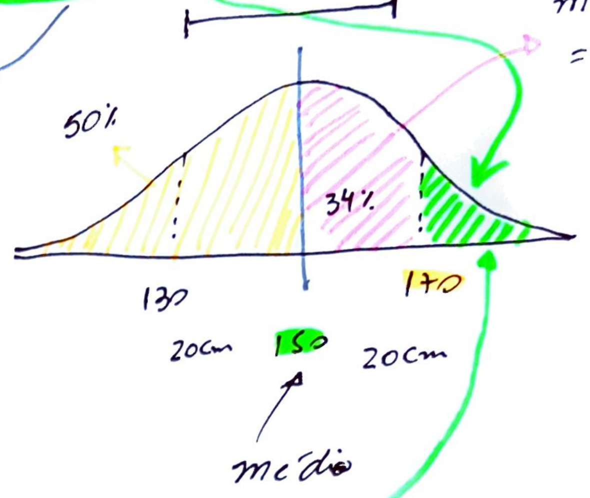
Probabilidades de curva de densidade.

Um conjunto das alturas de alunos da escola Secundária tem distribuição normal com uma média de 150 centímetros e um desvio padrão de 20 centímetros. Sendo H a altura de um estudante aleatoriamente selecionado desse conjunto

Encontre e interprete $P(H > 170)$ 68,2% = 68%

Probabilidade de $H > 170$

método de 68% = ~34%



Curva de densidade Normal

média = 150

Desvio padrão = 20 cm

50% + 34% = 84%

100% − 84% = 16%

* Regra geral de que a soma dos desvios padrão antes e depois da média é aproximadamente 68% para uma distribuição normal.

Como identificar Lei binomial?

Supondo um universo amostral de 10 vezes

Se você quiser saber qual a probabilidade do evento acontecer 6 vezes por exemplo.

isso é Lei binomial

$$P(x=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Expectation Valor esperado

Venda de Aparelhos ⇒ lucro por unidade R$ 20,00

Número	0	1	2	3	4	5
Probabilidade $P(X=x_i)$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	01

$E(x) = 0.0,1 + 1.0,1 + 2.0,2 + 3.0,3 + 4.0,2 + 5.0,1$

$E(y) = 0 + 0,1 + 0,4 + 0,9 + 0,8 + 0,5$

$E(x) = 2,7 \times 20 = R\$ 54,00$

Variância

$$\sigma^2 = var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2, \text{ em que}$$

$$E(x^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \; P(x=x_i)$$

Desvio Padrão

$$\sigma = \sqrt{Var(x)} =$$

$P \geq 3 = 3^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,2 + 5^2 \cdot 0,1 = 8,4$

$Var(x) = 8,4 - 2,7^2 = 8,4 - 7,29 = 1,11$

$\sigma = \sqrt{1,11}$

?

Número esperado, Variância e desvio padrão

X = Nº de exercícios por semana

Discreta

X	$P(x)$
0	0,1
1	0,15
2	0,4
3	0,25
4	0,1

$$E(x) = \mu(x) = 0{,}01 + 1\cdot 0{,}15 + 2\cdot 0{,}4 + 3\cdot 0{,}25 + 4\cdot 0{,}1$$

$$0{,}15 + 0{,}8 + 0{,}75 + 0{,}4$$

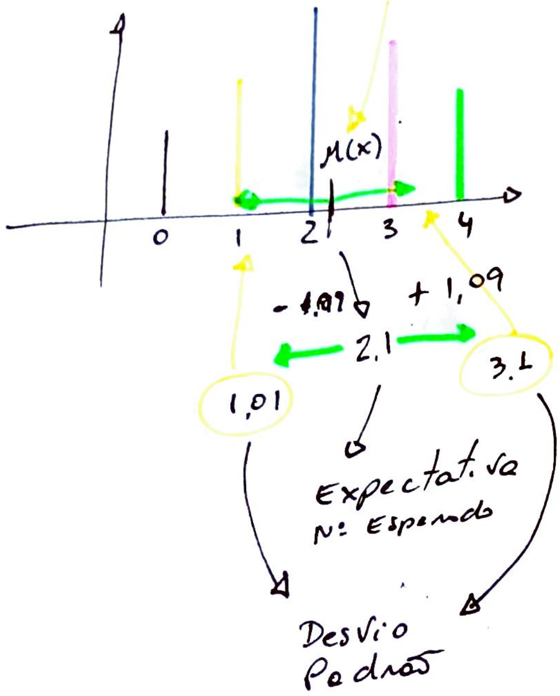
$$= \boxed{2{,}1}$$

$$Var(x) = (0-2{,}1)^2\cdot 0{,}1 + (1-2{,}1)^2\cdot 0{,}15 + (2-2{,}1)^2\cdot 0{,}4 + (3-2{,}1)^2\cdot 0{,}25 + (4-2{,}1)^2\cdot 0{,}1 = 1{,}19$$

Variância

$$\sigma(x) = \sqrt{1{,}19} \cong 1{,}09$$

Desvio Padrão



Expectativa de x, Desvio Padrão e Variável Aleatória

X	0	1	2	3	4	5
F(x)	20%	25%	30%	10%	8%	7%

Desvio Padrão $\sigma = \sqrt{\Sigma (x_i - M)^2 \cdot F(x)}$

$0 \times 0,20 = 0$
$1 \times 0,25 = 0,25$
$2 \times 0,30 = 0,60$
$3 \times 0,10 = 0,30$
$4 \times 0,08 = 0,32$
$5 \times 0,07 = 0,35$

Expectativa de x $M = 1,82$

$1,82^2$

$\Sigma(x_i - M) = 0 - 1,82 = -1,82 \to 3,312$
$1 - 1,82 = -0,82 \to 0,672$
$2 - 1,82 = 0,18 \to 0,032$
$3 - 1,82 = 1,18 \to 1,392$
$4 - 1,82 = 2,18 \to 4,752$
$5 - 1,82 = 3,18 \to 10,112$

Elevar o resultado ao quadrado

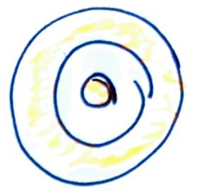
$20\% \times 3,312 = 0,662$
$25\% \times 0,672 = 0,168$
$30\% \times 0,032 = 0,010$
$10\% \times 1,392 = 0,139$
$8\% \times 4,752 = 0,380$
$7\% \times 10,112 = 0,708$

$2,068 \Rightarrow$ Variância

Desvio Padrão $= \sqrt{2,068}$

$\boxed{\sigma = 1,438}$

Distribuição Binomial



Eventos de Bernulli

↳ $\begin{cases} 0 & \text{Sucesso} \\ 1 & \text{Fracasso} \end{cases}$

$p / 1-p$

Probabilidade de p de acertar

Probabilidade $1-p$ de Não acertar

Considerando 5 tentativas

Possibilidade de acertar 3

Probabilidade de acertar 3 tiros em 5 tentativas

$$C_5^3 = \frac{5.4.3}{3.2.1} = 10$$

Prob Erro

$$\binom{5}{3} \cdot p^3 \cdot (1-q)^2$$

Probabilidade de acerto

Qual a probabilidade de acertar pelo menos 3

$$P(3) + P(4) + P(5)$$

$$\binom{5}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 + \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^1 + \binom{5}{5} \cdot p^5 \cdot (1-p)^0$$

Acerto — Erro

Binomial

$X \sim Bin(n; p)$; $q = 1 - p$; $p + q = 1$

tem que ser = 1 pois é a soma de todos os resultados possíveis

Nº de tentativas de um evento Bernulli que só tem 2 possib. no espaço amostral

1 dos resultados possíveis

Quantidade de fracassos

continua →

Qual a probabilidade de ter K sucessos em N ensaios de Bernulli?

$$\boxed{P(X=K) = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot (1-p)^{n-K}}$$

Sucesso Fracasso

calcular Acumulado probabilidade de x ser maior que certo K

$$\boxed{P(X \geq K) = \sum_{i=K}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}}$$

menor ou igual que um certo K

$$\boxed{P(X \leq K) = \sum_{i=0}^{K} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}}$$

Probabilidade de ser só menor que K

$$\boxed{P(X < K) = \sum_{i=0}^{K-1} p^i \cdot q^{n-i}}$$

maior que K

$$\boxed{P(X > K) = \sum_{i=K+1}^{n} p^i \cdot q^{n-1}}$$

Ensaios de Bernulli

São experimentos onde só dois resultados
são possíveis = Sucesso = (P) e Fracasso = (1 - P)

Jogar uma moeda

K = cara = Sucesso

C = coroa = Fracasso

dado

5, 6 → Sucesso

1, 2, 3, 4 - Fracasso

Linha de Produção.

Defeito = Sucesso

Funcionando = Fracasso

Para os ensaios de Bernulli
Sucesso é o que se tem
interesse em descobrir
Não interessa se é bom
ou ruim.

me interessa = Sucesso

o resto = Fracasso

Fracasso sempre $q = 1 - p$ = 100% - (Prob. sucesso)

Bernulli significa 1 vez = 1 sucesso = 1 evento

Binomial significa + de 1 bernulli
Co você esta repetindo os ensaios de Bernulli

Distribuição Binomial

Se em cada uma das n repetições $\left(\frac{n}{k}\right) \neq \left(\frac{n}{k}\right)$
Nº Binomial — Fração.
de ensaio de Bernoulli a probabilidade de ocorrer um evento definido como sucesso é sempre p, a probabilidade de que esse evento ocorra em apenas k das n repetições é dado por:

$$\boxed{P(X=K) = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot (1-p)^{n-K}}$$

ou $\boxed{\binom{n}{K} \cdot p^k \cdot q^{n-K}}$

n = nº de repetições

$$\binom{n}{K} = C_{n,K} = \frac{n!}{K!\,(n-K)!}$$

Uma prova consta 10 testes com 5 alternativas cada um, sendo apenas uma delas correta. Um aluno que nada sabe a respeito da matéria avaliada, "chuta" uma resposta para cada teste. Qual é a probabilidade dele acertar exatamente 6 testes?

Bernoulli → $\underbrace{\text{acertar 1 teste}}_{\text{sucesso}}$ → $p = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$

Binominal = 10 testes

$n = 10$

X: nº de testes que acerta (sucesso)

$$P(X=6) = \binom{10}{6} \cdot 0{,}2^6 \cdot (1-0{,}2)^{10-6} = 210 \cdot 0{,}2^6 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}0055$$

Probabilidade de acertar exatamente 6 ⇒ 0,55%

Distribuição Binomial

Um casal deseja ter 4 filhos, 2 homens 2 mulheres. Supondo que a probabilidade de nascimento de um homem (H) ou uma mulher (M) seja a mesma, qual a probabilidade de tal fato ocorrer?

X : nº de homens (sucesso)

$$P(X=K) = \binom{n}{K} \cdot p^K \cdot (1-p)^{n-K}$$

$P = \frac{1}{2} = 0,5$ → Bernulli 1-Probabilidade

$n = 4$

$K=2$

$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot 0,5^2 \cdot (1-0,5)^{4-2}$$

$$= 6 \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^2 = \frac{3}{8} = 0,375 \text{ ou } 37,5\%$$

Uma urna tem 4 bolas vermelhas (V) e 6 brancas (B). Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. O experimento é repetido 5 vezes. Qual a probabilidade de observarmos exatamente 3 vezes bola vermelha?

X = nº de bolas vermelhas = (sucesso)

$P = \frac{4}{10} = 0,4$

$n = 5$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,4^3 \cdot (1-0,4)^{5-3} =$$

K

$$= 10 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2 = 0,2304 \text{ ou } 23,04\%$$

Distribuição Binomial

Em uma cidade, 10% das pessoas possuem carro da marca A. Se 30 pessoas são selecionadas ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de exatamente 5 pessoas possuírem carro da marca A?

X: nº de pessoas que tem o carro = (Sucesso)

$$\boxed{P(x=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}}$$

$p = 0{,}10$ (10%)

$n = 30$ $\quad k = 5$

$$P(x=5) \binom{30}{5} \cdot 0{,}10^5 \cdot (1-0{,}10)^{30-5} =$$

$$= 142506 \cdot 0{,}10^5 \cdot 0{,}90^{25} = 0{,}1023 \cdot 100 = 10{,}23\%$$

Exatamente 5 pessoas terem a marca A

Eventos complementares

Regra p/ eventos complementares

$$P(x \geq k) = 1 - P(x < k)$$
$$P(x > k) = 1 - P(x \leq k)$$
$$P(x \leq k) = 1 - P(x > k)$$
$$P(x < k) = 1 - P(x \geq k)$$

$n = 5$

$$\underbrace{P(x=0) + P(x=1)}_{P(x<2)} + \underbrace{P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) + P(x=5)}_{P(x \geq 2)} = 1$$

$P(x<2) + P(x \geq 2) = 1$

A soma de todas Prob. é = 1 ou 100%

$$P(x \geq 2) = 1 - P(x < 2)$$

↳ Passo Subtraindo

distribuição Binomial

a) O número de tentativas ou ensaios é finito
b) Os ensaios são independentes, ou seja um não afeta o outro
c) Os possíveis resultados são Sucesso ou Fracasso

d) A probabilidade "p" é sempre a mesma para todas as tentativas.

Valores discretos são valores inteiros

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson é uma distribuição discreta de uma variável aleatória 'x' dada pela formula

$$\boxed{P(x) = \frac{e^{-\mu} * \mu^{x}}{x!}}$$

onde:

μ = Parametro média
e = número irracional igual a 2,71828
x = variável aleatória

Como reconhecer uma distribuição de Poisson?

- O experimento calcula quantas vezes (x) que um evento ocorrem em um determinado intervalo de tempo, área ou volume.
- A probabilidade do evento ocorre é a mesma para cada intervalo.
- o número de ocorrências de um intervalo é independente do outro.

Distribuição de Poisson

A média de pessoas que adquirem um seguro em um certo banco é 3 por hora. Determine as seguintes probabilidades:

a) Em uma determinada hora serem vendidos exatamente 4 seguros?

b) Nesta mesma hora venderem menos de 2;

c) 2 ou mais.

$\mu = 3$ média

$x = 4$

a) $\dfrac{e^{-3} \cdot 3^{4}}{4!} = \dfrac{e^{-3} \cdot 81}{24} \begin{matrix} \div 3 \\ \div 3 \end{matrix} = \dfrac{0{,}049787068 \cdot 27}{8} =$

$= 0{,}168 = \boxed{16{,}80\%}$

$\mu = 3$, $x = 0$ $\mu = 3$, $x = 1$

b) $P(x<2) = P(0) + P(1) = \dfrac{e^{-3} \cdot 3^{0}}{0!} + \dfrac{e^{-3} \cdot 3^{1}}{1!} =$

$= 0{,}19914 = \boxed{19{,}91\%}$

c) $1 - 0{,}19914 = 0{,}80086 = \boxed{80{,}08\%}$

100%

$(0+1) - (2+3+4)$

19,91%   80,08%

Aproximação poisson do Binomial

$P(X=x) = C_n^x \, p^x \cdot q^{n-x}$ ← Binomial

Seja n grande e p (probabilidade) um evento raro

$\lambda = np$ ⇒ ~~lambda~~ Lambda e $n \cdot p$

A aproximação é boa se $n \geq 50$, $np \leq 5$

Exemplo 1

Uma amostra de 50 peças é retirada de uma máquina produz 2% de peças defeituosas. Determine a probabilidade de se encontrarem duas peças defeituosas utilizando:

a) a distribuição Binomial

O que se quer encontrar

$P(X=2) = C_{50}^{2} (0{,}02)^2 (0{,}98)^{48}$

$= \dfrac{50 \cdot 49}{2 \cdot 1} (0{,}02)^2 (0{,}98)^{48} = \boxed{0{,}1857}$

b) a aproximação de Poisson

$\lambda = np = 50 \cdot 0{,}02 = 1$ ≤5

$$\boxed{P(X=x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}} = P(X=2) = \frac{e^{-1} \, 1^2}{2!} = \boxed{0{,}1839}$$

Aproximado

Quanto maior o 'n' e menor o 'p' mais será aproximado

Cumulative Distribution Function

$F(q) \neq f(q)$

CDF — cumulative dist. Function

PMF — Probability Mass function

Flip a coin 2 times

$Q = \#$ of heads $\{0, 1, 2\}$

$\downarrow$

Nº

$f(q) = P(Q = q)$

$F(q) = P(Q \leq q)$

$f(0) = P(Q=0) = P(t,t) = \frac{1}{4}$

$F(0) = P(Q \leq 0) = P(t,t) = \frac{1}{4}$

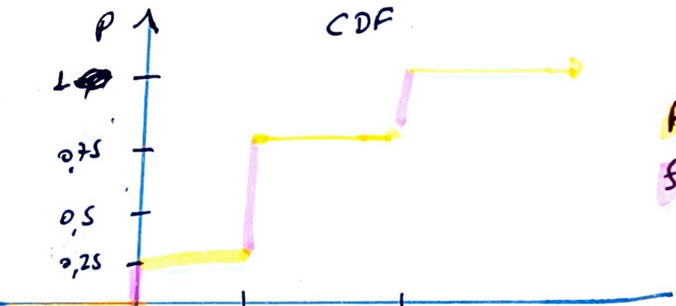
$f(1) = P(Q=1) = P(t,h) + P(h,t) = \frac{2}{4}$

$F(1) = P(Q \leq 1) = P(t,h) + P(h,t) + P(t,t) = \frac{3}{4}$

$f(2) = P(Q=2) = P(h,h) = \frac{1}{4}$

$F(2) = P(Q \leq 2) = \underset{\frac{1}{4}}{P(t,t)} + \underset{\frac{1}{4}}{(t,h)} + \underset{\frac{1}{4}}{P(h,t)} + \underset{\frac{1}{4}}{P(h,h)} = 1$

$$F(q) = \begin{cases} 0 & q < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq q < 1 \\ 3/4 & 1 \leq q < 2 \\ 1 & 2 \leq q \end{cases}$$



$F(1,5) = 0,75$

$f(1,5) =$

Probability Mass Function

PMF

$f(1,8) = 0$

$f(0) = \frac{1}{4}$

cumulative d. function

CDF

$F(1,8) = 0,75$

$f(0) = 0,25$

$f(1) = 0,5$

$f(2) = 0,25$

Distribuição Geométrica

Muitas situações reais podem ser repetidas até atingir-se o sucesso.

Um candidato pode prestar uma prova de vestibular até ser aprovado, ou você pode digitar um nº de telefone vários vezes até conseguir completar a ligação. Situações como essa podem ser representados por uma distribuição Geométrica

Uma distribuição pode ser considerada Geom. se satisfazer as seguintes condições:

1) Uma tentativa (correspondente a um ensaio de Bernoulli) é repetido até que o sucesso ocorra, ou seja, ocorrem $K-1$ fracassos até que ocorra o primeiro sucesso na K-ésima tentativa.

2) As tentativas são independentes uma dos outras

3) A probabilidade de sucesso p é constante em todos os ensaios de Bernoulli

$$\boxed{P(X=K) = p \cdot (1-p)^{K-1}}$$

Distribuição Geométrica

Fracasso
Sucesso

$$\underbrace{\underline{F}_{1^\circ}\ \underline{F}_{2^\circ}\ \underline{F}_{3^\circ}\ \cdots\ \underline{F}_{K-1}}_{P-1}\quad \underbrace{\underline{S}_{K}}_{P}$$

$$\boxed{P(x=K) = P.\,(1-P)^{K-1}}$$

x = Sucesso no Kaésimo tentativa

Se trabalhar com X sendo Nº de fracassos até ocorrer um Sucesso:

$$P.(X=K) = P.\,(1-P)^{K}$$

ou

$$P.(X=K-1) = P.\,(1-P)^{K-1}$$

$K=10$ $\quad x=9 \quad = P(1-P)^{9}$

Distribuição Geométrica.

Uma linha de produção está sendo analisada para efeito de controle da qualidade das peças produzidas. Tendo em vista o alto padrão requerido, a produção é interrompida para regulagem toda vez que uma peça defeituosa é observada. Se 0,01 é a probabilidade da peça ser defeituosa, determine a probabilidade de ocorrer uma peça defeituosa na 1ª peça produzida, na 2ª, na 5ª, na 10ª, na 20ª e na 40ª.

→ Sucesso = 1ª peça defeituosa encontrada

$P=0,01$

Boa $\quad \underline{B}_{1^\circ}\ \underline{B}_{2^\circ}\ \underline{B}_{3^\circ}\ \cdots\ \underline{B}_{K-1}\ \underline{D}_{K}$ $\quad$ Defeito

$$\boxed{P(x=K) = P.\,(1-p)^{K-1}}$$

$$P(x=1) = 0,01 - (1-0,01)^{1-1} = 0,01 \cdot 0,99^{0} = 0,01 = 1\%$$

$$P(x=2) = 0,01 - (1-0,01)^{2-1} = 0,01 \cdot 0,99^{1} = 0,0099 = 0,99\%$$

$$P(x=5) = 0,01 \cdot 0,99^{5-1} = 0,01 \cdot 0,99^{4} = 0,0096 = 0,96\%$$

$$P(x10) = 0,01 \cdot 0,99^{9} = 0,0091 = 0,91\%$$

$$P(x=20) = 0,01 \cdot 0,99^{19} = 0,0083 = 0,83\%$$

$$P(x=40) = 0,01 \cdot 0,99^{39} = 0,0068 = 0,68\%$$

Distribuição Geométrica

μ - média
σ^2 = Variância
σ = desvio Padrão

Em uma industria há uma máquina que é inspecionada todos os dias antes de os trabalhos serem iniciados. Por experiências anteriores, sabe-se que a probabilidade dessa máquina estar funcionando corretamente é de 90%. Caso haja algum problema, a produção não é iniciada e a máquina deve passar por uma revisão geral.

a) Qual é a probabilidade de que essa máquina funcione normalmente durante 15 dias e tenha que passar por uma revisão no 16º dia?

B) Qual a probabilidade de levarem pelo menos 5 dias até que aconteça a revisão geral?

c) Em média, a cada quantos dias ocorrerá uma revisão geral?

Funcionar (Fracasso)

F F F ... F Problema
1 2 3 ... K-1 K

(Sucesso)

Sucesso é o que se busca saber = K

a) $\boxed{P(x=k) = p \cdot (1-p)^{k-1}}$

$P(x=16) =$

$= 0{,}1 \cdot (1-0{,}1)^{16-1} =$

$0{,}1 \cdot 0{,}9^{15} = 0{,}0206$

$= \boxed{2{,}06\ \%}$

OBS: Funcionar = Fracasso
Problema = Sucesso
90% Funciona corretamente
10% não Funciona = Problema
Probabilidade é = 10%

b) Pelo menos 5 = 5 ou mais

$P(x \geq 5) = P(x=5) + P(x=6) + P(x=7) \ldots$ infinito

$P(x \geq 5) + P(x<5) = 1 = 100\%$

$P(x \geq 5) = 1 - P(x<5) = 1 - [\cancel{P(x=0)} + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4)]$

Geométrica Sempre começa em 1

$= 1 - [0{,}1 \cdot 0{,}9^0 + 0{,}1 \cdot 0{,}9^1 + 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 + 0{,}1 \cdot 0{,}9^3]$

$1 - 0{,}1 \cdot [0{,}9^0 + 0{,}9^1 + 0{,}9^2 + 0{,}9^3] =$

$= 1 - 0{,}40951 = 0{,}59049$ ou $\boxed{59{,}049\ \%}$

c) $E(x) = \frac{1}{p}$

$E(x) = \frac{1}{0{,}1} = \boxed{10 \text{ dias}}$

Média = Esperança = Esperança Geométrica = $\frac{1}{p}$

Distribuição Geométrica

O custo de realização de um experimento é de R$ 1000,00. Se o experimento falha um custo adicional de R$ 300,00 tem de ser imposto. Se a probabilidade de sucesso em cada prova é 0,2 se as provas são independentes e continuadas até a ocorrência do primeiro sucesso, qual o custo esperado do experimento

Geométrica

$$\boxed{P(X=K) = p \cdot (1-p)^{K-1}}$$ Geométrica

$$\boxed{E(x) = \frac{1}{p}}$$ Esperança

Quando queremos calcular o custo esperado, precisamos 1º calcular a esperança

$x \to$ ocorrências do 1º sucesso

Experimento dar certo $\Rightarrow p = 0,2$

$$E(x) = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ experimentos}$$

$\hookrightarrow$ em média, devemos realizar o experimento 5 vezes até que ele dê certo

Falha	Falha	Falha	Falha	Sucesso Funciona
1	2	3	4	5
1000	1000	1000	1000	1000
300	300	300	300	—

$\to$ cada vez que faz custa 1000

300 cada vez que falha

$5000 + (4 \cdot 300) = 5000 + 1200$

$= \boxed{R\$\ 6200}$ média de gasto

Variavel **Discreta** é contavel podendo ir
até o infinito

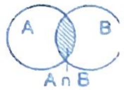
Variável **Contínua** é incontável, é intervalo
de valores

Python

UCSDSE212017-V010100 Intersection

The **intersection** $A \cap B$ is the set of elements in both A and B

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$



$\{0,1\} \cap \{1,3\} = \{1\}$

$\{0\} \cap \{1\} = \varnothing$

$[0,4) \cap [3,6] = [3,4)$

$[0,2] \cap (2,5] = \varnothing$

Raining cats and dogs

UCSDSE212017-V010100 Identities - One Set

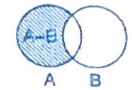
Also called laws — Relations that hold for all sets

[illegible]	$A \cap \Omega = A$	$A \cup \Omega = \Omega$
[illegible]	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \varnothing = A$
[illegible]	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
[illegible]	$A \cap A^c = \varnothing$	$A \cup A^c = \Omega$

UCSDSE212017-V010100 Set Difference

The **difference** $A-B$ is the set of elements in A but not in B

$A-B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$



$\{0,1\} - \{1\} = \{0\}$ $\{0,1\} - \{0,1,2\} = \varnothing$

Notation Also $A \setminus B$

$[1,3] - [2,4] = [1,2)$ $[1,3] - (1,3) = \{1,3\}$

$A - B = A \cap B^c$

UCSDSE212017-V010100 Complement

Recall: Universal set Ω contains **all** elements

The **complement** A^c of A is the set of Ω elements **not** in A

$A^c = \{x \in \Omega : x \notin A\}$

$\{0\}^c = \{1\}$ $\{0,1\}^c = \varnothing$ $\varnothing^c = \{0,1\}$

$\{0\}^c = \{1,2\}$ ← A^c depends on both A and Ω

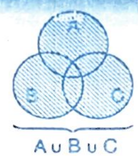
$\{\ldots,-2,-1\}^c = \mathbb{N}$

E - even $E^c = \{\ldots,-3,-1,1,3,\ldots\} = O$ Odd

UCSDSE212017-V010100 Multiple Sets

$A \cup B \cup C = \{x \in \Omega : x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$

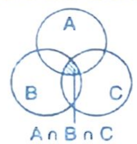
$\{0,1\} \cup \{1,2\} \cup \{2,3\} = \{0,1,2,3\}$



Generally $\bigcup_{i=1}^{t} A_i = \{x : \exists 1 \le i \le t, x \in A_i\}$

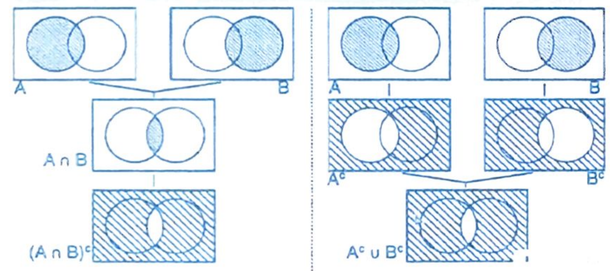
$\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \{i\} = \mathbb{Z}$

Similarly for intersection



UCSDSE212017-V010100 De Morgan's Law

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



UCSDSE212017-V010100 Plan

Again generalize numbers

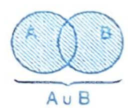
	Relations			Operations		
Number	=	≤	<	+	-	×
Set	=	⊆	⊂	∪	-	×

This lecture

UCSDSE212017-V010100 Union

The **union** $A \cup B$ is the collection of elements in A, B, or both

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$



$\{0,1\} \cup \{1,2\} = \{0,1,2\}$ $\{0,1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\}$

$[0,2] \cup [1,3] = [0,3]$ $(0,1) \cup \{1\} = (0,1]$

$E \cup O = \mathbb{Z}$

UCSDSE212017-V010100 Laws - Two and Three Sets

[illegible]	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
[illegible]	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
[illegible]	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
[illegible]	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Union and Intersection

UCSDSE212017-V010100

```
A = {1,2}
B = {2,3}
```

∪ | or union   ∩ & or intersection

```
A | B
{1, 2, 3}
C = A.union(B)
print(C)
{2, 1, 3}
```

```
A & B
{2}
C = A.intersection(B)
print(C)
{2}
```

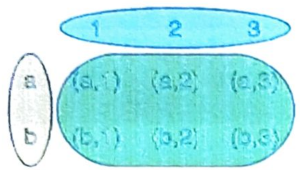
Discrete Sets

UCSDSE212017-V010000

Similar simpler

$\{a,b\} \times \{1,2,3\} = \{ (x, y): x \in \{a,b\}, y \in \{1,2,3\} \}$

$= \{ (a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3) \}$



Sets in Sets

Sets can be elements $\{ \{0\}, \{1,2\} \}$

Every set is a subset of itself $\{0\} \subseteq \{0\}$

Can a set belong to (be an element of) itself? $S \in S$?

Typically, sets do not belong to themselves $\{0\} \notin \{0\}$ $\varnothing \notin \varnothing$

But some sets do belong to themselves! $0 \in \{0\}$

NT = { anything that is not 🙂 }

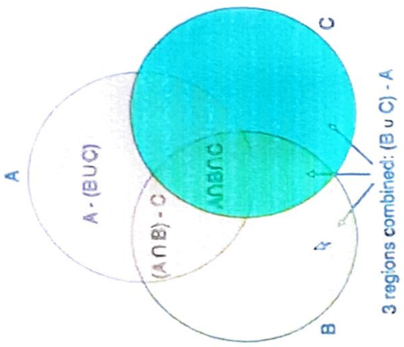
= { 🙂, 0, {1,2}, …, NT}

NT ∈ NT

Some sets ∈ themselves (NT), others don't ({0})

3 Sets

UCSDSE212017-V010100



Cartesian Products

UCSDSE212017-V010000

The cartesian product of A and B is the set A×B of ordered pairs (a, b) where a ∈ A and b ∈ B

$A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$

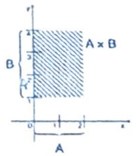
$A \times A$ denoted A^2

$R^2 = \{ (x,y): x,y \in R \}$ Cartesian Plane

$A, B \subseteq R$ $A \times B \subseteq R^2$ Rectangle

$A = [0, 2]$ $B = [1, 4]$

$A \times B = \{ (x, y): x \in [0, 2], y \in [1, 4] \}$



Cartesian Product

UCSDSE212017-V010000

Use product function in itertools library

```
from itertools import product
Faces = set({'J','Q','K'})
Suits = {'♦','♠'}
for i in product(Faces,Suits):
  print(i)
('J', '♦')
('J', '♠')
('Q', '♦')
('Q', '♠')
('K', '♦')
('K', '♠')
```

Symmetric Difference

UCSDSE212017-V010100

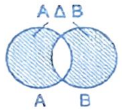
The symmetric difference of two sets is the set of elements in exactly one set

$A \Delta B = \{x: x \in A \wedge x \notin B \vee x \notin A \wedge x \in B\}$

$\{0,1\} \Delta \{1,2\} = \{0,2\}$

$[0,2] \Delta [1,4] = [0,1) \cup (2,4]$

$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$



Tuples and Ordered Pairs

Sets: Order and repetition do not matter $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$

Tuples: Both order and repetition matter $(a, b, c) \neq (b, c, a)$

$(a, a, a) \neq (a)$

n-tuple: Tuple with n elements $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

2-tuple: Ordered pair $(3, 7)$

Also real interval

Identities

UCSDSE212017-V010100

$A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$

$A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$

$A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$

$A \times (B - C) = A \times B - A \times C$

B

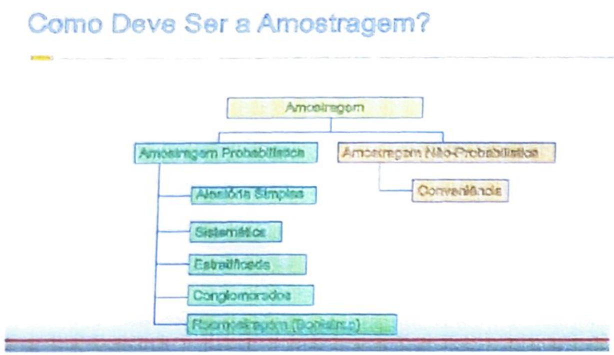
		1	2	3	
A	a	a1	a2	a3	A × B
	b	b1	b2	b3	

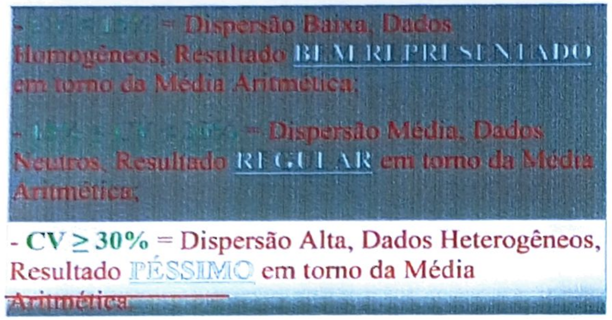
C

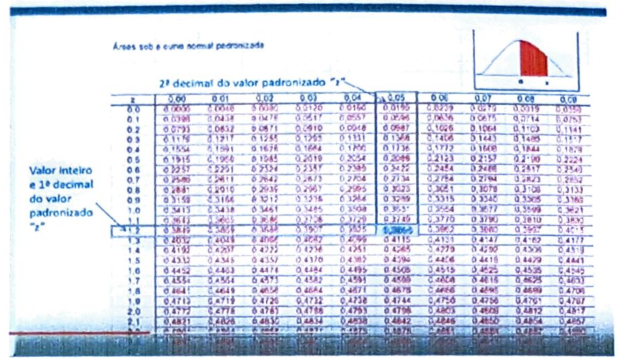
		2	3	4	
A	a	a2	a3	a4	A × C
	b	b2	b3	b4	

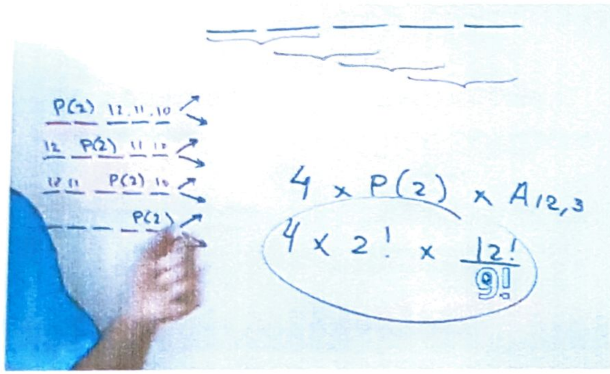
B ∪ C

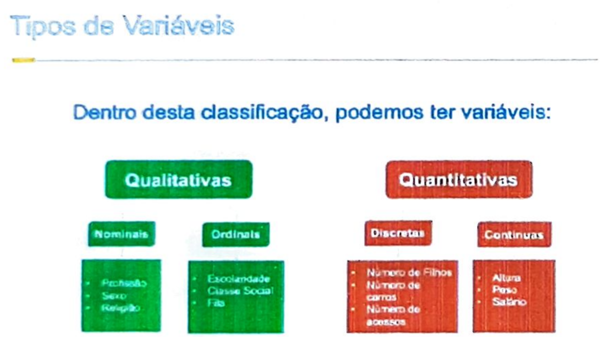
		1	2	3	4
A	a	a1	a2	a3	a4
	b	b1	b2	b3	b4

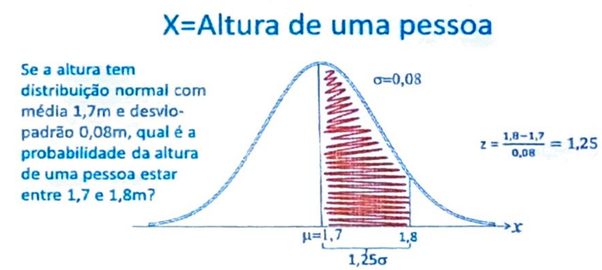


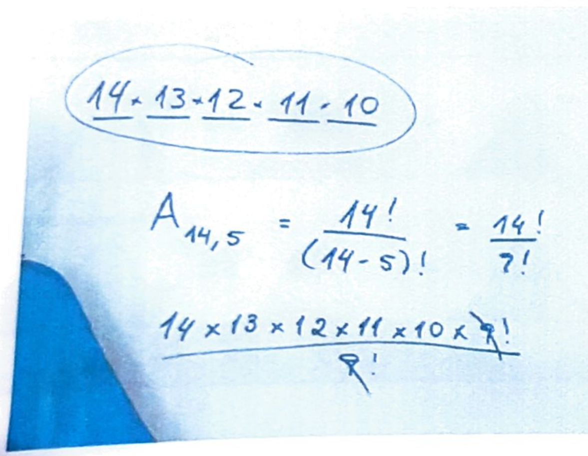


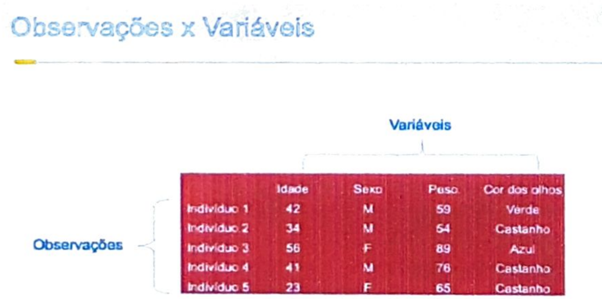




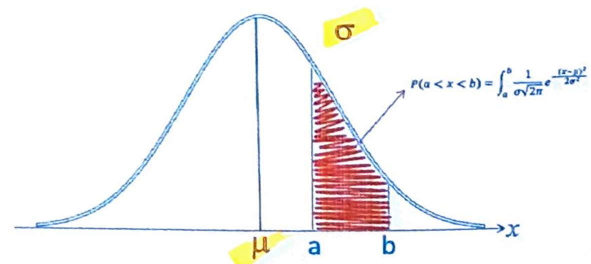








	Idade	Sexo	Peso	Cor dos olhos
Indivíduo 1	42	M	59	Verde
Indivíduo 2	34	M	54	Castanho
Indivíduo 3	56	F	89	Azul
Indivíduo 4	41	M	76	Castanho
Indivíduo 5	23	F	65	Castanho



Special Sets

contains no elements $\varnothing$ or { } $\forall x, x \notin \varnothing$ $\forall$ - All, every

all possible elements Ω $\forall x, x \in \Omega$

Ω lets us consider only relevant elements

$\Omega = \mathbb{Z}$ integers "prime"

Set of Multiples

$m \in \mathbb{Z}$ $_m\mathbb{Z} \equiv \{i \in \mathbb{Z} : m \mid i\}$ integer multiples of m

$_2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} = \mathbb{E}$

$_1\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{Z}$ $_0\mathbb{Z} = \{0\}$

$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{P}$ $_m[n] \equiv \{i \in [n] : m \mid i\}$ multiples of m in {1..n}

$_3[13] = \{i \in \{1,\ldots,13\} : 3 \mid i\} = \{3, 6, 9, 12\}$ $_7[13] = \{7\}$

$_1[13] = [13]$ $_{14}[13] = {}_0[13] = \varnothing$

Subsets and Supersets

```
zero = {0}      zplus = {0,1}      zminus = {0,-1}
```

$\subseteq$ `<=` or `issubset` $\subset$ `<`

```
zminus <= zplus
False
zminus.issubset(zero)
True
```

```
zplus < plus
False
zero < zminus
True
```

$\supseteq$ `>=` or `issuperset` $\supset$ `>`

```
zplus >= zminus
False
zplus.issuperset(zero)
True
```

```
zminus > zminus
False
zplus > zero
```

Recapitulando

Valor -> Probabilidade

1. Padronize a variável:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

2. Calcule a probabilidade correspondente na tabela padronizada:

Probabilidade -> Valor

1. Encontre z na tabela correspondente à probabilidade procurada:

2. Encontre o valor procurado "x" a partir do valor de z:

$$x = \mu + z\sigma$$

QUIZ

Multiples

3 | ?	{…, -6, -3, 0, 3, 6,…}
1 | ?	Z
0 | ?	0

Divisors

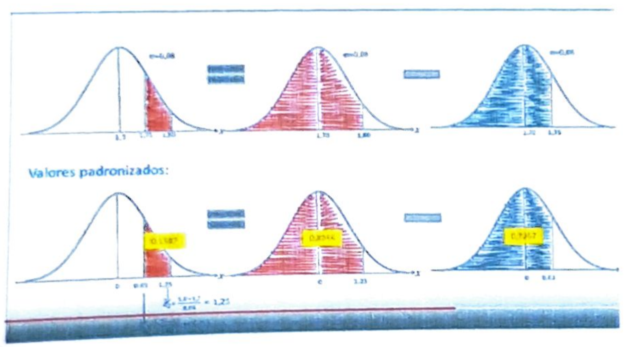
? | 4	±1, ±2, ±4
? | 0	Z
? | any n≠0	±1

Venn Diagram

Visualize: Sets – Regions; Elements – Points

-1 0 1 2

{0, 1} | Elements in set | Elements not in set | Elements in set | Elements not in set



Real Intervals

[a,b]	{x ∈ R | a ≤ x ≤ b}	[3,5]	3 4 5
(a,b)	{x ∈ R | a < x < b}	(3,5)	3 4 5
[a,b)	{x ∈ R | a ≤ x < b}	[3,5)	3 4 5
(a,b]	{x ∈ R | a < x ≤ b}	(3,5]	3 4 5

In set · Not in set

$[3,3] = \{3\}$ singleton $[3,2] = [3,3) = (3,3] = \varnothing$

Intervals, Multiples

{0,…,n-1} `range(n)` note: [n] = {1…n}

```
print(set(range(3)))
{0,1,2}
```

{m,…,n-1} `range(m, n)` Returns type range

```
print(set(range(2, 5)))
{2,3,4}
```

To print, convert to set

{m, m+d, m+2d, …} ≤ n-1 `range(m, n, d)`

```
print(set(range(2, 12, 3)))
{8,2,11,5}
```

Philosopher, scientist, mathematician

Considered father of western philisophy

Cogito ergo sum — I think therefore I am

Divide each difficulty into as many parts as necessary to solve it

Each problem I solved became a rule I later used to solve other problems

A good mind is not enough, the main thing is to use it well

To improve the mind, learn less and contemplate more

Set Definition

Define a set — {...} or `set({...})`

```
Set1 = {1,2}
print(Set1)
{1,2}
```

```
Set2 = set({2,3})
print(Set2)
{2,3}
```

For empty set — use only `set()` or `set({})`

```
Empty1 = set()
type(Empty1)
set
print(Empty1)
set()
```

```
Empty2 = set({})
type(Empty2)
set
print(Empty2)
set{}
```

```
NotASet = {}
type(NotASet)
dict
```

{} is not an empty set

Sets within Sets

UCSDSE212017-V009800

Specify a set within a universe, or any other set

$\{x \in A \mid ...\} = \{$elements x in A such that ...$\}$ or $\{x \in A : ...\}$

$N = \{x \in Z \mid x \geq 0\}$ $P = \{x \in N \mid x > 0\}$

Solutions to equations

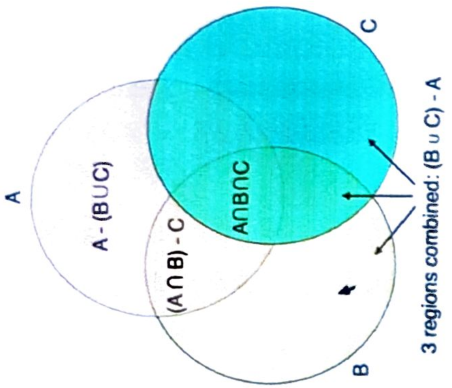
$\{x \in R \mid x^2 \geq 0\} = R$

$\{x \in R : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$

$\{x \in R \mid x^2 = 0\} = \{0\}$ ← a single-element set is a singleton

$\{x \in R \mid x^2 = -1\} = \varnothing$

3 Sets



Special Sets

Empty set	contains no elements	$\varnothing$ or {}	$\forall x, x \notin \varnothing$	$\forall$ - All, every
Universal set	all possible elements	Ω	$\forall x, x \in \Omega$	

Ω lets us consider only relevant elements

$\Omega = Z$ integers — "prime" — Means 2, 3, 5, ... Not: amazon Prime

Ω depends on application — temperature $\Omega = R$ — text: $\Omega = \{\text{words}\}$

Only one $\varnothing$ — set with no elements

Testing if Empty, Size

Test empty — `not`

```
S = set()
not S
True
```

```
T = {1,2}
not T
False
```

Size — `len()`

```
print(len(S))
0
```

```
print(len(T))
2
```

Check if size is 0 — `len()==0`

```
print(len(S)==0)
True
```

```
print(len(T)==0)
False
```

Equality, Inequality, Disjoint

```
S1 = {0,1}
S2 = set({0,1})
S3 = {1,0,1}
T  = {0,2}
```

= `==`

```
S1 == T
False
S1 == S2
True
S1 == S3
True
```

≠ `!=`

```
S1 != S2
False
S1 != T
True
```

disjoint — `isdisjoint`

```
S1.isdisjoint(T)
False
S1.isdisjoint({2})
```

Bertrand Russell

Mathematician, philosopher, author

1950 literature Nobel Laureate

Democracy: fools have a right to vote.
Dictatorship: fools have a right to rule.

Most people would rather die than think.
In fact, most do.

Men are born ignorant, not stupid.
They are made stupid by education.

Membership

UCSDSE212017-V010400

$\in$ `in`

```
Furniture = {'desk','chair'}
'desk' in Furniture
True
'bed' in Furniture
False
```

$\notin$ `not in`

```
Furniture = {'desk','chair'}
'desk' not in Furniture
False
'bed' not in Furniture
True
```

Intervals, Multiples

{0,...,n-1} `range(n)` note: [n] = {1...n}

```
print(set(range(3)))
{0,1,2}
```

{m,...,n-1} `range(m, n)` Returns type `range`

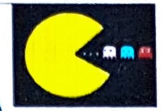
```
print(set(range(2, 5)))
{2,3,4}
```

To print, convert to set

{m, m+d, m+2d, ... } < n-1 `range(m, n, d)`

```
print(set(range(2, 12, 3)))
{8,2,11,5}
```

belongs to $\in$ VS. $\subseteq$ subset of



- Relation between an element and a set

$x \in A$: element x belongs to, or is contained in, set A

{0,1} has two elements: 0 and 1 $\boxed{0 \in \{0,1\}}$ $\boxed{0 \in \{0,1\}}$ $\boxed{\{0\} \notin \{0,1\}}$

- Relation between two sets

$A \subseteq B$: set A is a subset of set B

{0,1} two elements: 0 and 1 {0} one elt: 0 $\boxed{\{0\} \subseteq \{0,1\}}$

0 is an element of {0,1}, but 0 is not a set $\boxed{0 \not\subseteq \{0,1\}}$

Set Relations

UCSDSE212017-V010300

Equality and inequality $=$ $\neq$

Intersection and disjointness

Subsets and Supersets $\subseteq$ $\subset$ $\supseteq$ $\supset$ negations

Python `==` `!=` `isdisjoint` `<=` `<` `>=` `>`

Set of Multiples

$m \in \mathbb{Z}$ $\quad {}_m\mathbb{Z} \equiv \{i \in \mathbb{Z} : m \mid i\}$ integer multiples of m

${}_2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\} \triangleq \mathbb{E}$ Even numbers

${}_1\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{Z}$ $\quad {}_0\mathbb{Z} = \{0\}$

$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{P}$ $\quad {}_m[n] \equiv \{i \in [n] : m \mid i\}$ multiples of m in {1..n}

${}_3[13] = \{i \in \{1,\ldots,13\} : 3 \mid i\} = \{3, 6, 9, 12\}$ $\quad {}_7[13] = \{7\}$

${}_1[13] = [13]$ $\quad {}_{14}[13] = {}_0[13] = \varnothing$

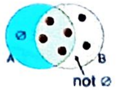
Will use shortly

Strict Subsets

UCSDSE212017-V010300

generalize <

If $A \subseteq B$ and $A \neq B$, A is a strict subset of B, denoted $A \subset B$, and B is a strict superset of A, denoted $B \supset A$



$\{0\} \subset \{0,1\}$ $\quad \{0,1\} \supset \{0\}$

If A is not a strict subset of B, we write $A \not\subset B$ or $B \not\supset A$

Two possible reasons $A \not\subseteq B$ $\quad \{0\} \not\subset \{1\}$

$A = B$ $\quad \{0\} \not\subset \{0\}$

Subsets and Supersets

UCSDSE212017-V010300

`zero = {0}` `zplus = {0,1}` `zminus = {0,-1}`

$\subseteq$ `<=` or `issubset`

```
zminus <= zplus
False
zminus.issubset(zero)
True
```

$\subset$ `<`

```
zplus < plus
False
zero < zminus
True
```

$\supseteq$ `>=` or `issuperset`

```
zplus >= zminus
False
zplus.issuperset(zero)
True
```

$\supset$ `>`

```
zminus > zminus
```

QUIZ

Multiples

3 | ? {..., -6, -3, 0, 3, 6,...}

1 | ? $\mathbb{Z}$

0 | ? 0

Divisors

? | 4 ±1, ±2, ±4

? | 0 $\mathbb{Z}$

? | any n≠0

Subsets

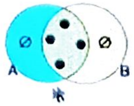
UCSDSE212017-V010300

$P \subseteq N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

$\varnothing \subseteq A \subseteq A \subseteq \Omega$

$A \subseteq B$ and $B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$ $\quad \subseteq$ is transitive

$A \subseteq B$ and $B \subseteq A \rightarrow A = B$



Equality, Inequality, Disjoint

```
S1 = {0,1}
S2 = set({0,1})
S3 = {1,0,1}
T  = {0,2}
```

$=$ `==`

```
S1 == T
False
S1 == S2
True
S1 == S3
True
```

$\neq$ `!=`

```
S1 != S2
False
S1 != T
True
```

disjoint `isdisjoint`

```
S1.isdisjoint(T)
False
S1.isdisjoint({2})
```

Probabilidade

$$P(A) = \frac{\text{Nº casos favoraveis}}{\text{Nº casos possiveis}} = \frac{\text{Quero}}{\text{tenho}}$$

15 bolas = 7 Brancos
3 Azuis
5 vermelhos

=> tudo que me serve / Tudo que pode ocorrer

$P(BB)\ \frac{7}{15}$ $\quad P(BA)\ \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

$\emptyset < P(A) < 1$ ou $\emptyset\% < P(A) < 100\%$

$P(BV)\ \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

$100\% = \frac{100}{100} = 1$

Dados a) 1/6 $\boxed{\text{b) } 5/36}$ c) 5/6 d) 1/36
e) 6/5

impossível — certo
$\emptyset$ — 1

Espaço amostral dos dados (U) de universo de possibilidade
E = Evento

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Quando a soma dos dois dados é 6?

$$\boxed{\frac{5}{36}}$$

Probabilidade de nascerem 3 bebes do mesmo sexo

espaço amostral $\boxed{HHH}$ - HHM - HMH - MHH
$\boxed{MMM}$ - MMH - MHM - HMM

$$P(\text{mesmo sexo}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

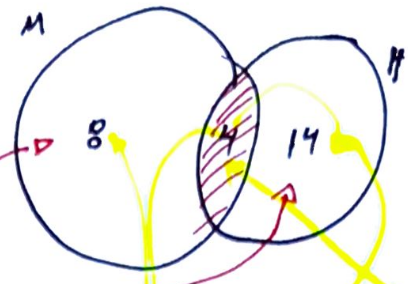
Alunos aprovados:

Matemática: 12

História = 18

Nos duas = 4

Em nenhuma = 6



Total de Alunos = 32

$P(\text{só } M) = \frac{8}{32}$ $P(M) = \frac{12}{32}$ $P(M \text{ e } H) = \frac{4}{32}$

$P(\text{só } H) = \frac{14}{32}$ $P(H) = \frac{18}{32}$ $P(\text{nenhum}) = \frac{6}{32}$

$P(M \text{ ou } H) = \frac{12}{32} + \frac{18}{32} - \frac{4}{32} = \frac{26}{32} = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

média = soma de todos dividido pela quantidade de itens

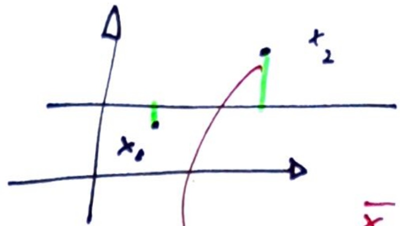
Obs: outliers pode ser um problema

mediana = 1 2 4 $\boxed{7}$ 9 11 13 Nº do meio: precisa colocar em ordem

Moda = 1 2 4 6 $\boxed{6}$ 8 13 14 Nº que mais aparece

Site DAXpatterns.com → Fórmulas de statistico PowerBI

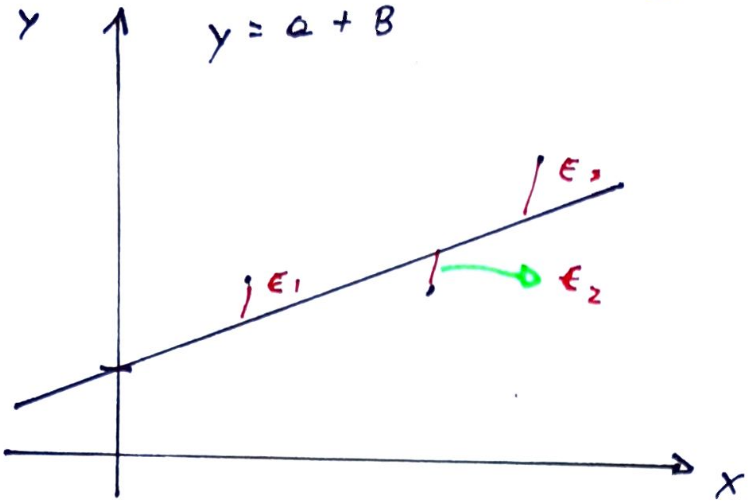
Média



$\bar{x}$ → média

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Tendência central



Desvio padrão σ = sigma

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

n → Nº Pontos

i = 1

Até n

ε = Epson
Erro

Variância Populacional
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Variancia amostral
$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}$$
→ quando há alguma perda

Média Aritmética

André: $\bar{x} = \frac{60 + 70 + 40 + 40 + 25}{5} = 45$

Jullie = $\bar{x} = \frac{20+25+25+15+20}{5} = 21$

$$\sigma^2 = \frac{\sum (\text{dia de cada caminhada} - \text{média})^2}{n}$$

→

André: $\sigma^2 = \dfrac{(60-45)^2+(70-45)^2+(40-45)^2+(40-45)^2+(15-4}{5}$

média 45
n 5

$\sigma^2 = \dfrac{1800}{5}$ $\boxed{\sigma^2 = 360 \text{ min}}$

Júlia: $\sigma^2 = \dfrac{(20-21)^2+(25-21)^2+(25-21)^2+(15-21)^2+(20-21)^2}{5}$

média 21
n = 5

$\sigma^2 = \dfrac{70}{5}$ $\boxed{\sigma^2 = 14 \text{ minutos}}$

. Var = 360 minutos

Variança = 14 minutos => tem maior constância

Coeficiente de Variação

Quanto mais próximo de ∅ zero = mais homogêneo

$CV = \dfrac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$

$\boxed{\bar{X} \pm \sigma = \text{média de desvio Padrão!}}$

Peso (kg)
84,73 ± 18,97 kg

Altura (m)
1,77 ± 0,16 m

CV do Peso

$CV = \dfrac{18,97}{84,73} \times 100$

$\boxed{CV = 22,38\,\%}$

CV da Altura

$CV = \dfrac{0,16}{1,77} \times 100$

$\boxed{CV = 9,26\,\%}$

melhor p/ se trabalhar

CV < 15% = dispersão baixa, homogênio, bem representada m. aritmética

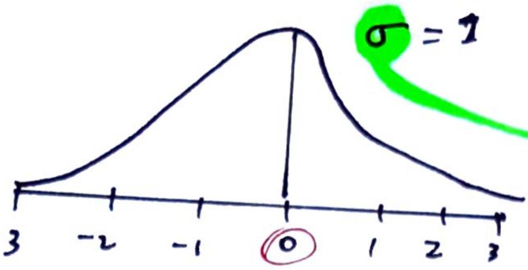
15% ≤ CV < 30% = " média, Neutro, Regular entorno da média aritm

CV ≥ 30% = " Alta, Heterogênio, Resultado Péssimo

Distribuição Normal

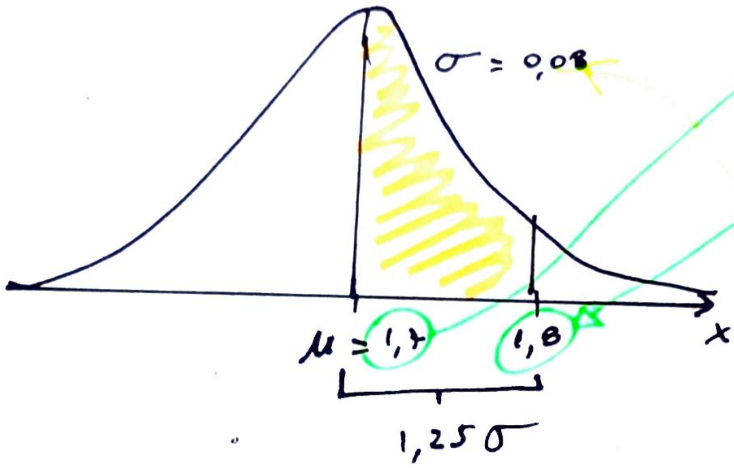
Normal Padronizada

$\sigma = 1$ desvio padrão = 1



média zero

Se a altura tem distribuição normal com média 1,7m e desvio padrão 0,08m, qual é a probabilidade da altura de uma pessoa estar entre 1,7 e 1,8 m?



$$Z = \frac{1,8 - 1,7}{0,08} = 1,25$$

Z = é o valor que eu procuro

OBS: Precisa verificar a tabela

tabela Normal acumulada

Normal a partir da média

A Head with rain, tail with rain, tail

B Head with rain, head without rain, tail

B is right because all options don't repeat the first one could be tail with rain and tail in the same time.

Elements can be anything

$\boxed{\text{Elements Sets}}$ = set = collection of elements

common sets:

Integers $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ $\boxed{\mathbb{Z}}$

Naturals $\{0, 1, 2, \ldots\}$ $\boxed{\mathbb{N}}$

Positives $\{1, 2, 3, \ldots\}$ $\boxed{\mathbb{P}}$

Rationals $\{$ integer ratios m/n, $n \neq 0\}$ $\boxed{\mathbb{Q}}$

Reals $\{-5, .4/3$, irrational numbers as $\sqrt{2}$, $\pi = 3.14\}$ $\boxed{\mathbb{R}}$

Membership

member, belongs = $x \in A$ = $0 \in \{0,1\}$ $1 \in \{0,1\}$

A contains x = $A \ni x$ = $\{0,1\} \ni 0$ $\{0,1\} \ni 1$

$\mathbb{R} \ni \pi$

Not belong, Not a member $2 \notin \{0,1\}$ $\pi \notin \mathbb{Q}$

A does Not contain x = $A \not\ni x$ = $\{0,1\} \not\ni 2$ = $\mathbb{Q} \not\ni \pi$

Doesn't Matter

Order $\{0,1\} = \{1,0\}$ Repetition $\{0,1\} = \{0,1,1,1\}$

Order Matter : use tuples $(0,1) \neq (1,0)$

Special Sets

~~Empt~~ Empty Sets ϕ or $\{\}$ $\forall x, x \notin \phi$

$\forall$ - All, Very

Universal Set all possible elements $\Omega = \forall x, x \in \Omega$

Set Definition

{...} or set ({...})

set1 = {1,2}
Print (set1)
{1,2}

set2 = set ({2,3})
Print (set2)
{2,3}

For empty set: use only set() or set({})

Membership

$\in$ in

Furniture = {'desk', 'chair'}
'desk' in Furniture
True
'bed' in Furniture
False

$\notin$ not in

Furniture = {'desk', 'chair'}
'desk' not in furniture
False
'bed' not in Furniture
True

Sets within Sets

Specify a set within a universe, or any other set

$\{x \in A \mid \dots\}$ = {elements x in A such that ...} or $\{x \in A : \dots\}$

$N = \{x \in Z \mid x \geq \phi\}$ $\quad$ $P = \{x \in N \mid x > 0\}$

Solution to equations

$\{x \in R \mid x^2 \geq \phi\} = R$ $\quad$ $\{x \in R : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$

$\{x \in R \mid x^2 = \phi\} = \{\phi\}$ ← a single-element set is a Singleton

$\{x \in R \mid R^2 = -1\} = \phi$

$\{x \in C \mid x^2 = -1\} = \{i, -i\}$

↳ complex number

Integer Intervals

$\{m, \dots, n\} = \{i \in Z \mid m \leq i \leq n\}$ integers from m to n, inclusive

$\{3, \dots, 5\} = \{i \in Z \mid 3 \leq i \leq 5\} = \{3, 4, 5\}$

$\{3, \dots, 4\} = \{i \in Z \mid 3 \leq i \leq 4\} = \{3, 4\}$

$2 \quad \underbrace{3 \quad 4 \quad 5}_{\{3,4,5\}} \quad 6$

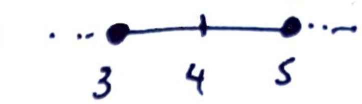
$\{3, \dots, 3\} = \{i \in Z \mid 3 \leq i \leq 3 = \{3\}$

$\{3, \dots, 2\} = \{i \in Z \mid 3 \leq i \leq 2\} = \phi$

Real Intervals

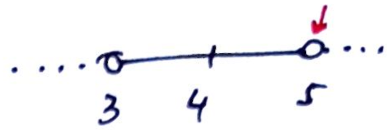
in Set

$[a, b]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ $[3, 5]$

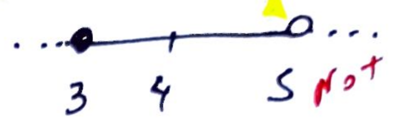


Not in set

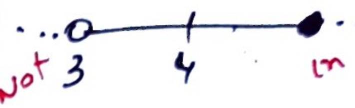
(a, b) $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ $(3, 5)$



$[a, b)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ $[3, 5)$



$(a, b]$ $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ $(3, 5]$



$[3,3] = \{3\}$ ← Singleton $[3,2) = [3,3) = (3,3] = \emptyset$

Not in

Divisibility

$m, n \in \mathbb{Z}$ if $n = c \cdot m$ for some $c \in \mathbb{Z}$, we say that n is a multiple of m, or m divides n, and write $m \mid n$

$6 = 2 \cdot 3 \rightarrow 3 \mid 6$ $-8 = (-2) \cdot 4 \rightarrow 4 \mid -8$ $0 = 0 \cdot (-2) \rightarrow -2 \mid 0$

(6: n, 2: c, 3: m; $3 \mid 6$: m, n)   (-8: n, (-2): c, 4: m; $4 \mid -8$: m, n)

if no such c exists, m does not divide n, or n is not a multiple of m, denoted $m \nmid n$

There is no $c \in \mathbb{Z}$ such that $4 = c \cdot 3 \rightarrow 3 \nmid 4$

$0 \nmid n$ for $n \neq 0$

Set Multiples

$m \in \mathbb{Z}$ $\quad {}_m\mathbb{Z} \stackrel{def}{=} \{i \in \mathbb{Z} : m \mid i\}$ integer multiples of m

${}_2\mathbb{Z} = \{\ldots,-4,-2,0,2,4,\ldots\} \stackrel{def}{=} \mathbb{E}$ Even numbers

${}_1\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} = \mathbb{Z}$ $\quad {}_\phi\mathbb{Z} = \{\phi\}$

$\boxed{m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{P}}$

$\boxed{{}_m[n] \stackrel{def}{=} \{i \in [n] : m \mid i\}}$
multiples of m in {1...n}

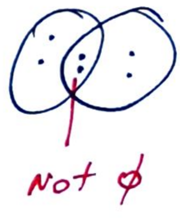
${}_3[13] = \{i \in \{1,\ldots,13\} : 3 \mid i\} = \{3,6,9,12\}$ $\quad {}_7[13] = \{7\}$

${}_1[13] = [13]$ $\quad {}_{14}[13] = {}_0[13] = \phi$?

Set relations

Intersection $\quad \exists x$

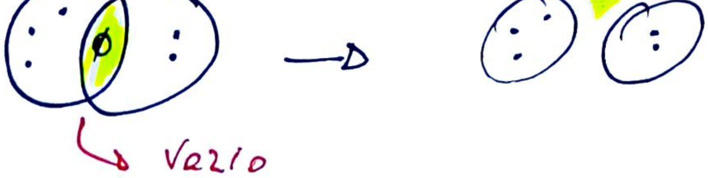
two sets intersect $\quad x \in A \wedge x \in B$



$\{0,1\}\ \{1,2\}\ (1)\ [3,4]\ [2,5]\ (3,5,\ldots]$

Two sets are disjoint if $\neg \exists x$
They share no elements, Not in $x \in A \wedge x \in B$

$\{0,1\}\ \{2,3\}\ [3,4]\ (4,5]$



Subsets

generalize $\leq$

if every element in A is also in B, then A is a subset of B, denoted $A \subseteq B$

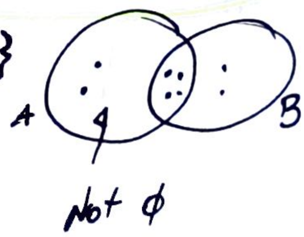
$\{\phi\} \subseteq \{0,1\}$ $\{\phi\} \subseteq \{\phi\}$

Equivalently, B is a superset of, or contains, A

denoted $B \supseteq A$ $\{0,1\} \supseteq \{0\}$

if A has an element that's not in B, then A is not a subset of B, denoted $A \nsubseteq B$, or $B \nsupseteq A$

$\{0,1\} \nsubseteq \{1,2\}$ $\{1,2\} \nsupseteq \{0,1\}$



Symmetric Difference

$A \Delta B = \{x : x \in A \wedge x \notin B \vee x \notin A \wedge x \in B\}$

Set Size

the number of elements in a Set S is called its size, or cardinality, and denoted $|S|$ or $\# S$

Bits $|\{0,1\}| = 2$ Die $|\{1,2,3,4,5,6\}| = 6$

Coin $|\{heads, tails\}| = 2$ Letters $|\{a,\dots,z\}| = 26$

Digits $|\{0,1,\dots,9\}| = 10$ do 0 ao 9 são 10 digitos

Empty set. $|\emptyset| = 0$

Integers $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{P}| = \infty$

Reals $|\mathbb{R}| = \infty$

Countably infinite $\aleph_0$

Uncountably infinite $\aleph$

Integer intervals

$m \leq n$ $\{m, \dots, n\}$ = {integers from $\underline{m}$ to $\underline{n}$, inclusive}

$\{3, \dots, 5\} = \{3, 4, 5\}$

$|\{m, \dots, n\}| = n - m + 1$

+1? First try small #'s

$|\{5, \dots, 5\}| = |\{5\}| = 1 = 5 - 5 + 1$

$|\{1, \dots, 3\}| = |\{1,2,3\}| = 3 = 3 - 1 + 1$

$\{3, 4, 5\}$ 3 4 5 #points = #intervals + 1 = (5-3) + 1 = 3

5-3 = 2 = length = # intervals

Size

```
Print ( len ( {-1, 1}))
2
```

A^c = complement

Sum

```
Print ( Sum( {-1, 1}))
0
```

Minimum min

```
Print (min( {-1, 1}))
-1
```

Maximum max

```
Print (max ( {-1, 1}))
1
```

Loops

```
for <var> in <set>
A = {1,2,3}
Print ( Sum (A))
 6
total = 0
for i in A
    total += i
Print (total)
6
```

Disjoint Unions

Addition rule
Subtraction rule
Pets
A hairy Problem

$|A| = 2$ $|B| = 3$

$|A \cup B| = 2 + 3 = 5$

A union of disjoint sets, is called a disjoint union

Use $\circ\circ$ to emphasize a disjoint union $\{0\} \ddot{\cup} \{1\} = \{0,1\}$

For disjoint sets, the size of the union is the sum of the sizes

$$\boxed{|A \ddot{\cup} B| = |A| + |B|}$$

Addition Rule $\oplus$ Numerous applications & implications Reason $\cup \approx +$

Kids Play

Class has 2 boys and 3 girls

\# students = ?

$\ddot{\cup}$ $\oplus$ # students $= 2 + 3 = 5$

Jar with marbles

1 blue, 2 green, 3 red

\# marbles = ?

$\ddot{\cup}$ of 3 sets

$\oplus$ twice

$\# = 1 + 2 + 3 = 6$

Complements

Quintessential disjoint Sets A and A^c

$A \cup A^c = \Omega$

$$|\Omega| = |A \cup A^c| = |A| + |A^c|$$

(+)

Ω

$$\boxed{|A^c| = |\Omega| - |A|}$$

Subtraction (or complement) (−)

$D = \{ i \in [6] : 3 \mid i \} = \{3, 6\}$ → $|D| = 2$

$D^c = \{ i \in [6] : 3 \nmid i \} = \{1, 2, 4, 5\}$ → $|D^c| = 4$

Application of (+) rule

$\Omega = [6] = \{1, \dots, 6\}$

$|D^c| = 4 = 6 - 2 = |\Omega| - |D|$

Reason set difference $\approx -$

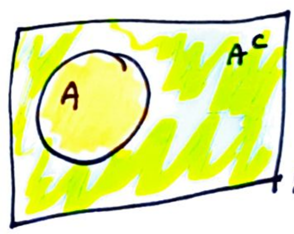
think outside the circle

(−)

$|A^c| = |\Omega| - |A|$

$|A| = |\Omega| - |A^c|$

Handy for Large or complex sets



Ω

$A = \{ i \in [100] : 3 \nmid i \} = \{1, 2, 4, 5, 7, \dots 100\}$

$\Omega = \{1, \dots, 100\}$

$A^c = \{ i \in [100] : 3 \mid i \} = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$ $|A^c| = 33$

$|A| = |\Omega| - |A^c| = 100 - 33 = 67$

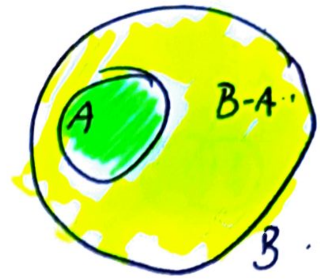
General Subtraction Rule

$A \subseteq B \rightarrow B = A \cup (B-A)$

$|B| = |A| + |B-A|$

$|B-A| = |B| - |A|$

Subtraction Rule ⊖



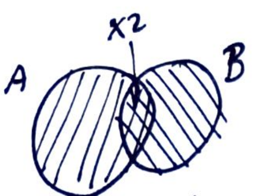
General Unions

Disjoint A and B : $|A \cup B| = |A| + |B|$ Size of union = sum of sizes

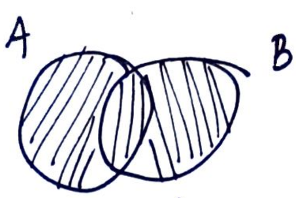
In general: $|A \cup B| \neq |A| + |B|$

$\hookrightarrow |\{a\} \cup \{a\}| = |\{a\}| = 1 \neq 2 = |\{a\}| + |\{a\}|$

Can we determine $|A \cup B|$ in general?



$|A| + |B|$



$|A \cup B|$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

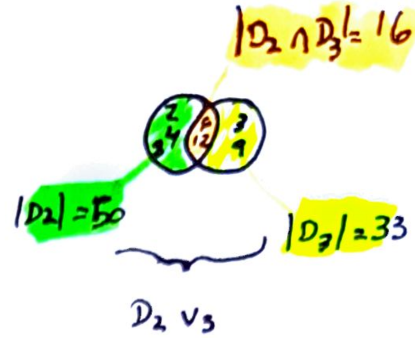
Principle of Inclusion-Exclusion (PIE)

Divisibility by 2 Numbers

$D_{2\vee 3} = \{i \in [100] : 2|i \vee 3|i\} = \{2,3,4,6,8,\dots,100\}$ $|D_{2\vee 3}| = ?$

$D_2 = \{i \in [100] : 2|i\} = \{2,4,6,\dots,100\}$

$D_3 = \{i \in [100] : 3|i\} = \{3,6,9,\dots,99\}$



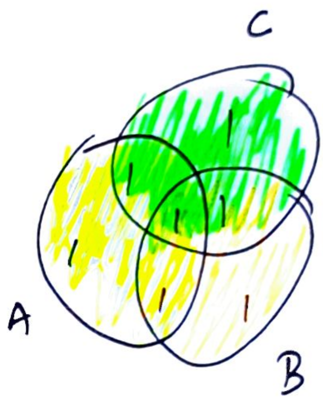
$D_{2\vee 3} = D_2 \cup D_2$

$|D_2 \vee D_3| = |D_2| + |D_3| - |D_2 \cap D_3|$

$D_2 \wedge D_3 = \{i \in [100] : 2|i \wedge 3|i\} = \{i \in [100] : 6|i\}$

$|D_{2\vee 3}| = |D_2| + |D_3| - |D_2 \cap D_3| = 50 + 33 - 16$

Multiple Sets



Two Sets

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Three sets

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

N Sets

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right|$$

Polyglots

8 students in class, each "speaks" C, R, πthon

$\hookrightarrow |C \cup R \cup \Pi| = 8$

Each language spoken by 5 students

$\hookrightarrow |C| = |R| = |\Pi| = 5$

Every language pair is spoken by 3 students

$\hookrightarrow |C \cap R| = |C \cap \Pi| = |R \cap \Pi| = 3$

How many students speak all 3 languages?

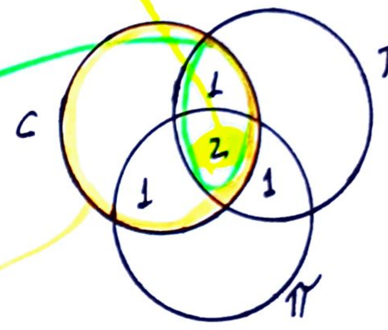
$\hookrightarrow |C \cap R \cap \Pi| = ?$

$$\begin{array}{c}
8 = 5 + 5 + 5 - 3 - 3 - 3 + ? \\
|C \cup R \cup \Pi| = |C| + |R| + |\Pi| - |C \cap R| - |C \cap \Pi| - |R \cap \Pi| + |C \cap R \cap \Pi|
\end{array}$$

$8 = 5 + 5 + 5 - 3 - 3 - 3 +$

$? = 8 - 5 - 5 - 5 + 3 + 3 + 3$

$= 2$



$|C \cap R| = 3$

$|C| = 5$

$|S|$ = Size of S

2^4 two raised four

$\overline{Z}$ = complement of Z

$\forall i$ = todo i

$|\forall \overline{Z}|$ = ALL size of set Z

$\exists Z$ = Exist Z

Sanity Checks

Compare to some expected outcomes

1 A, B disjoint $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = |A| + |B|$

equal sets $|A \cup A| = |A| + |A| - \underbrace{|A \cap A|}_{|A|} = |A|$

$\max\{|A|, |B|\} \leq |A \cup B| \leq |A| + |B|$

6 = iff nested — = iff disjoint

Cartesian Products

$|\{a, b\}| = 2 \qquad |\{1,2,3\}| = 3$

$$\{a,b\} \times \{1,2,3\} = \left\{ \begin{array}{l} (a,1)\ (a,2)\ (a,3) \leftarrow 3 \\ (b,1)\ (b,2)\ (b,3) \leftarrow 3 \end{array} \right.$$

(a,1)	(a,2)	(a,3)
(b,1)	(b,2)	(b,3)

2 rows, 3 columns

area 2x3 = 6

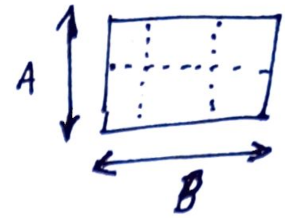
$|\{a,b\} \times \{1,2,3\}| = 3 + 3 = 2 \times 3 = 6$

the size of a Cartesian Product is the product of the set sizes

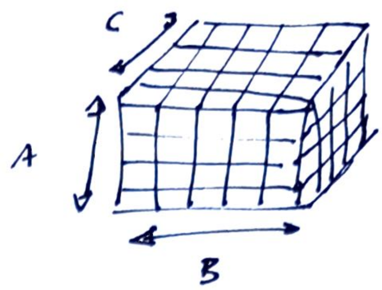
$\boxed{|A \times B| = |A| \times |B|}$

Three Sets

$A \times B$ $\quad \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ Rectangle $\boxed{|A \times B| = |A| \times |B|}$



$A \times B \times C$ $\{(a,b,c) : a \in A, b \in B, c \in C\}$ "Cuboid" $\boxed{|A \times B \times C| = |A| \times |B| \times |C|}$



Cartesian Power of a Set

Cartesian product of a set with itself is a Cartesian Power

$A^2 = A \times A$ Cartesian square

$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n}$ nth Cartesian power

$$|A^n| = |A \times A \times \dots \times A| = |A| \times |A| \times \dots \times |A| = |A|^n$$

$\boxed{315\ 861}$ ≤ 6 digits $\quad 10^6 = 1$ million

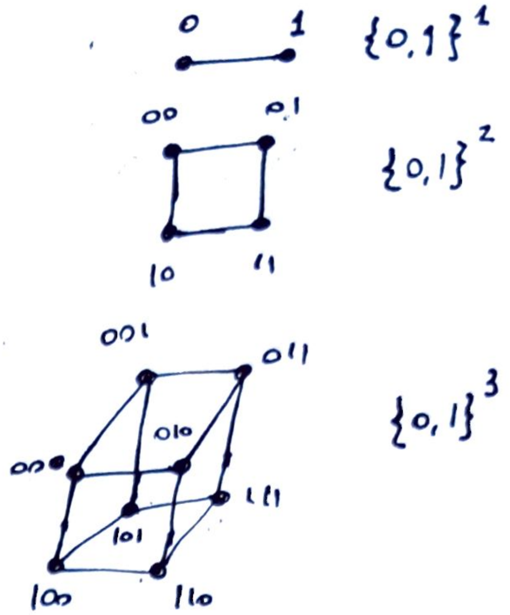
$\boxed{\text{SAM } 123}$ $\quad 26^3 \times 10^3 \approx 17.6$ m

$\boxed{\text{4SAM } 123}$ $\quad 26^3 \times 10^4 \approx 176$ m

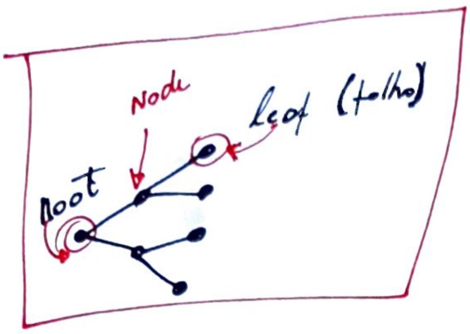
Binary Strings

$\{0,1\}^n = \{$ length-n binary strings $\}$ n-bit strings

n	Set	Strings	Size
0	$\{0,1\}^0$	Λ	1
1	$\{0,1\}^1$	0, 1	2
2	$\{0,1\}^2$	00, 01, 10, 11	4
3	$\{0,1\}^3$	000, 001, 011, 010 100, 110, 101, 111	8
...	...	...	...
n	$\{0,1\}^n$	0...0, ..., 1...1	2^n



$$|\{0,1\}^n| = |\{0,1\}|^n = 2^n$$



Convenções em matemática

$(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = +9$

$-3^2 = -(3\cdot 3) = -9$

igualdade de pares ordenados

$(a,b) = (c,d) \rightarrow a = c$ e $b = d$

1. $(4, y-1) = (x-2, -8)$

$4 = x-2$ e $y-1 = -8 \longrightarrow y = -8+1$

$\boxed{y = -7}$

$-x = -2-4$

$-x = -6 \cdot (-1)$ como os dois lados são negativo, podemos multiplicar por -1 sem perder a igualdade

$\boxed{x = 6}$

2. $(x+y, x-y) = (7, 3)$ sistema

$x+y = 7$

$x-y = 3$

$x+x = 2x$

$+y-y = \emptyset$

$7+3 = 10$

$\Rightarrow$ $2x = 10$

$x = \frac{10}{2} = 5$

$\boxed{x = 5}$

$x+y = 7$

$5+y = 7$

$y = 7-5$

$\boxed{y = 2}$

$2x^2 - 11x = 0$

$x(2x - 11) = 0$

$2x^2 - 11x$

Resolvendo Equações

$x^2 - 4 = 45$

$x^2 - 4 + 4 = 45 + 4$

qualquer mudança deve ser feito dos dois lados para manter a igualdade.

$x^2 = 45 + 4$

$x^2 = 49$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{49}$

$|x| = 7$

Valor absoluto

x pode ser $= 7$ ou $x = -7$

Porque $\sqrt{49}$ pode ser 7 ou -7

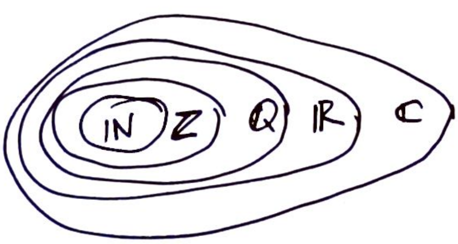
Números Naturais $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$

" Inteiros $\mathbb{Z} = \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$

" Racionais $\mathbb{Q} = \frac{5}{3}, \frac{22}{7}, 1{,}5, 0.155, -7 \dots$

" Reais $\mathbb{R} = -1, 0, 1, \sqrt{2}, e, \pi, 4.94\dots$

" Complexos $\mathbb{C} = -1, 0, 1, i, 1+i, 2+3i, \dots$



Ordem da solução de equações

1º Parênteses
2º Expoentes
3º multiplicações e divisões (da esquerda p/ direita)
4º soma e subtrações (" ")

logaritmos devem ser resolvidos antes

Funções e Suas Inversas

$$x^2 - 4 = 45$$

$$f(x) = c$$

Ao aplicar o mesmo elemento no outro lado da função, é gerado a função inversa

$$f^{-1}(f(x)) = x = f^{-1}(c)$$

* Uma função somente será inversa se for objetora $(x,y) \in f^{-1} \leftrightarrow (y,x) \in f$

função $f(x) \Leftrightarrow$ inversa $f^{-1}(x)$

$x + 2 \leftrightarrow x - 2$

$2x \leftrightarrow \frac{1}{2}x$

$-1x \leftrightarrow -1x$

$x^2 \leftrightarrow \pm\sqrt{x}$

$3x + 5 \leftrightarrow \frac{1}{3}(x-5)$

$a^x \leftrightarrow \log_a(x)$

$\exp(x) \equiv e^x \leftrightarrow \ln(x) \equiv \log_e(x)$

$\sin(x) \leftrightarrow \sin^{-1}(x) \equiv \arcsin(x)$

$\cos(x) \leftrightarrow \cos^{-1}(x) \equiv \arccos(x)$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\overset{\text{Fator}}{a}\;\overset{\text{Fator}}{b}\;\overset{\text{Fator}}{c}}_{\text{Termo}} + \underbrace{\overset{\text{Fator}}{d}\;\overset{\text{Fator}}{e}}_{\text{Termo}}}_{\text{Expressão}} = 0}_{\text{Equação}}$$

Regras básicas da Álgebra

Propriedade associativa

$$a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c)$$

$$abc = (ab)c = a(bc)$$

Propriedade comutativa

$$a+b = b+a$$

Propriedade Distributiva

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$a(b+c+d) = ab+ac+ad$$

Fatoração

$$ab+ac = a(b+c)$$

Polinômios

$$(x+3)(x+2) = x(x+2)+3(x+2) = x^2+\underbrace{x2+3x}+6$$

$$\Rightarrow (x+3)(x+2) = x^2+5x+6$$

Fatoração

$$6x^2y+15x$$

$$6x^2y+15x = (3)(2)(x)(x)y+(5)(3)x$$

$$6x^2y+15x = 3x(2xy+5)$$

Equações Quadráticas

equação de 2º grau

$$x^2 = 45x+23$$

$$ax^2+bx+c = 0$$

$$x^2-45x-23 = \phi$$

Fórmula de Baskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x^2 - 45x - 23 = 0$$

$$x_1 = \frac{45 + \sqrt{45^2 - 4(1)(-23)}}{2} = 45.5054\ldots$$

$$x_2 = \frac{45 - \sqrt{45^2 - 4(1)(-23)}}{2} = -0.5054$$

Funções

F = Faturamento

n: nº de ingressos

ingresso custa 25

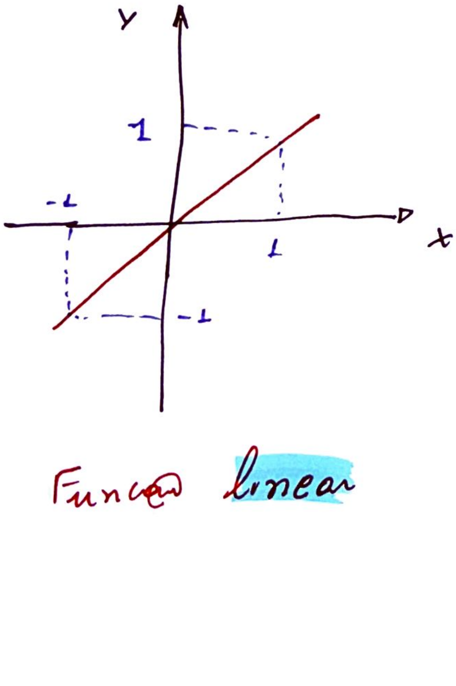
Qual nº de tikets para faturar 7000

$F(n) = 25n$

$7000 = 25n$

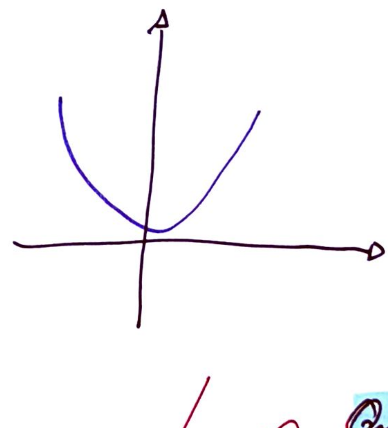
$n = 280$

$f(x) = x$



Função linear

$f(x) = x^2$



Função Quadrática

$$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$$

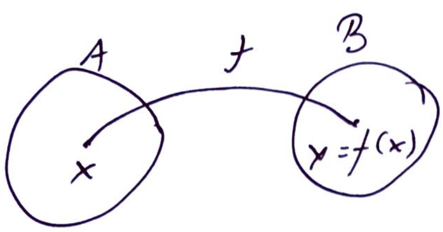
A		B
1	→	2
2	→	3
3	→	4
4	→	5
5	→	6
		1
		7

Domínio: A = 1 2 3 4 5

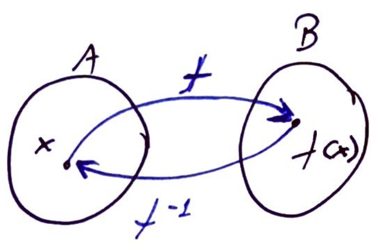
Contra domínio: B = 1 2 3 4 5 6 7

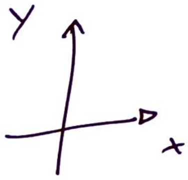
imagem: A-B = 2 3 4 5 6

A função F, nada mais é do que um mapeamento entre entradas e saídas:



função inversa é o mapeamento inverso

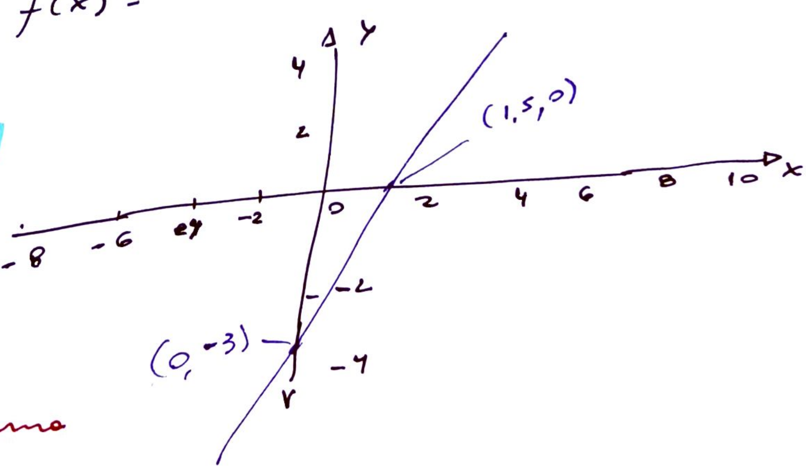




eixo horizontal = abscissa é usado para medir x

eixo vertical é usado para medir f(x)

$y = f(x) =$ saída

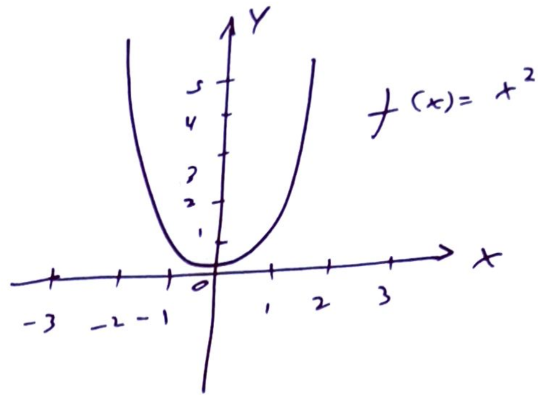


$$\boxed{f(x) = mx + b}$$

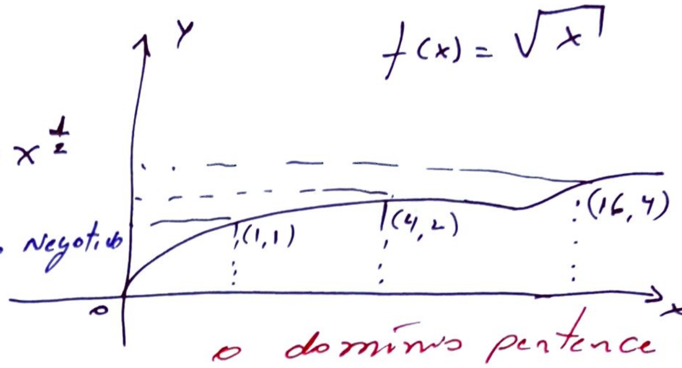
Se $m = \emptyset$ então $f(x)$ vai ser sempre $= b$ logo ela seria uma constante, ou seja, podemos deduzir que essa função $m \neq \emptyset$

$f(x) = x^2$

Consideramos que x^2 é $\geq \emptyset$



O inverso de x^2 será $\sqrt{x}$

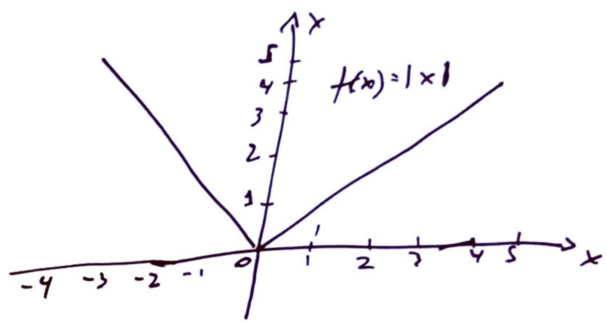


$f(x) = \sqrt{x} \equiv x^{\frac{1}{2}}$

Nada Negativo

o domínio pertence a ∅ ou ∞

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq \emptyset \\ -x & \text{if } x < \emptyset \end{cases}$$



$4(a+2) - 3a + 5 =$

$4a + 8 - 3a + 5 =$

$a + 13$

$4a - 3a = 1a = a$

$(4x + 3)(2x + 4) =$

$8x^2 + 4x + 4 \cdot 2x + 3 + 12 =$

~~8x + 16x + 6x + 12~~

~~30x + 12~~

$8x^2 + 16x + 6x + 12 =$

$8x^2 + 22x + 12$

Para fazer apresentações com fórmulas matemáticas.

One Note - Microsoft

evenNote

Polinômios

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots a_n x^n$$

x = a variável

a_0 = o termo constante

a_1 = o coeficiente linear ou coeficiente de primeira ordem

a_2 = o " quadrático

a_3 = o " cúbico

a_n = o enésimo coeficiente de ordem

n = o grau do polinômio. O grau de $f(x)$ é a maior potência de x que aparece no polinômio.

1º grau $f(x) = mx + b$

2º grau função quadrática

Produto X

Faturamento

$$F(x) = 2x^2 + 2x$$

$$C(x) = x^2 + 5x + 10$$

Custo

Break-even

cobrir o custo

$F(x) = C(x)$

Faturamento = custo

$$\rightarrow 2x^2 + 2x = x^2 + 5x + 10$$

$$2x^2 + 2x - x^2 = \cancel{-x^2} \cancel{x^2} + 5x + 10$$

$$\cancel{2x^2} + 2x \cancel{-x^2} = 5x + 10$$

$$x^2 + 2x - 5x = 10$$

$$x^2 - 3x = 10$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

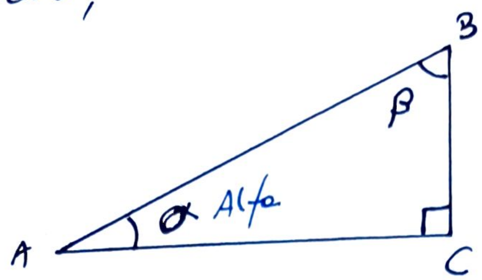
$$\begin{cases} x = -2 \\ x = 5 \end{cases}$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara

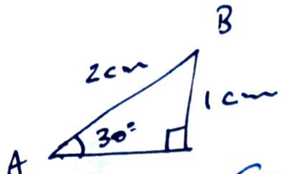
```
> from sympy import Symbol
> x = Symbol('x')
> solve (x**2 - 3*x - 10, x)
[-2, 5]
```

Trigonometria

Seno, cosseno e tangente



$$\text{Sen } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$



$$\boxed{\text{Sen } 30° = \frac{1}{2}}$$

Seno de 30° sempre terá a metade da hipotenusa

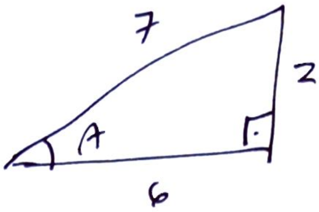
$$\text{Cos } \alpha = \frac{\text{Cateto adjacente } \alpha}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{tang } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto } \alpha}{\text{Cateto adjacente } \alpha}$$

Angulos notáveis

	30°	45°	60°
Seno	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cosseno	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tangente	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Hiper espaço Vetorial



Seno $= \dfrac{\text{Cat. oposto}}{\text{Hip.}}$

$\text{Sen} = 2/7 = 0{,}29$

Cosseno $\dfrac{\text{cat. Adj.}}{\text{Hip}}$

$\text{Cons} = 6/7 = 0{,}86$

tangente $= \dfrac{\text{cat. opost}}{\text{Cat. Adj.}}$

$tg = 2/6 = 0{,}33$

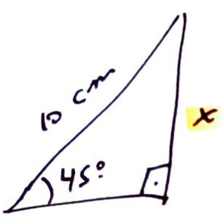


Tabela ?

Sen 45 $= x/10$

$\sqrt{2}/2 = x/10$

$0{,}7071 = x/10$

$0{,}7071 \cdot 10 = x$

$x = 7{,}071$

logaritmos e logaritmos Naturais

$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$

com $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$

Exemplo: $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$

Base 2

Qual número que elevado base 2 é $= 16$?

logaritmo Natural $f(x) = \ln(x) = \log_e(x)$

Operações com Vetores

Considerando os 2 vetores:

$\vec{u} = (u_x, u_y)$ $\vec{v} = (v_x, v_y)$

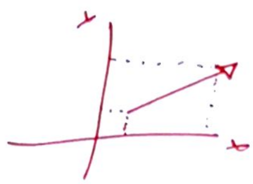
Operação	Fórmula
Adição	$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)$
Subtração	$\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)$
Escala	$\alpha\vec{u} = (\alpha u_x, \alpha u_y)$
Dot Product multiplicação de Produtos	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y$
Length (Comprimento)	$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$
Cross Product	$\vec{u} \times \vec{v} = (u_y v_z - u_z v_y,\ u_z v_x - u_x v_z,\ u_x v_y - u_y v_x)$

Mudança de Base

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}, \quad a \neq 1 \text{ e } b \neq 1$$

Exemplo: $\log_3 4 = \dfrac{1}{\log_4 3}$

Vetores = direção no espaço

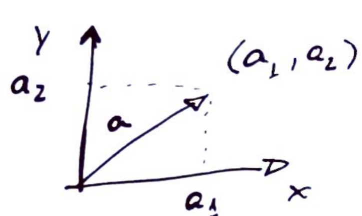


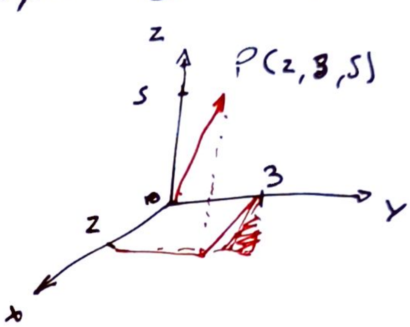
it's all about vector

Seta

lista de nº

dot Product = Multiplicação de produtos





início 0,0,0

Vetor Bidimensional

Vetor Tridimensional

Números Complexos

$x^2 + 1 = 0$ $\qquad x = \pm\sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$\boxed{x = \pm i}$ ⇒ Número i = unidade imaginária

$x^2 + 1 = 0$ $i^2 = -1$

onde i é uma unidade imaginária

$x_1 = i$

$x_2 = -i$ → função quadrática

tem 2 respostas

Positivo e negativo

Soma de nº complexos:

1º Somamos os números Reais depois os Nº imaginários

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

Exemplo:

Se $z_1 = 3 + 2i$ $z_2 = 5 - 3i$ a soma será:

$z_1 + z_2 = (3+5) + (2-3)i$

$\boxed{z_1 + z_2 = 8 - i}$

Subtração de Nº complexos

$z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$

$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di)$

$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

exemplo:

Se $z_1 = 7 + 10i$ e $z_2 = 3 + 6i$ a diferença será:

$z_1 - z_2 = (7-3) + (10-6)i$

$\boxed{z_1 - z_2 = 4 - 4i}$

Multiplicação de Nº Complexos

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\cdot(c+di)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Exemplo: Se $z_1 = 2+5i$ e $z_2 = 1+3i$ o produto será:

$$z_1 \cdot z_2 = (2+5i)+(1+3i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 1 + 2\cdot 3i + 5i\cdot 1 + 5i\cdot 3i$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2+6i+5i+15i^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2+6i+5i+15\cdot(-1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2+6i+5i-15$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2-15)+(6+5)i$$

teorema de Pitágoras

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}}$$

$$(|z|)^2 = a^2+b^2$$

teorema Fundamental do Álgebra

$m + n = x \longrightarrow \mathbb{N}$ Naturais

$x + m = n \longrightarrow \mathbb{Z}$ inteiros

$m \cdot x = n \longrightarrow \mathbb{Q}$ Racionais

$x^2 = 2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Reais

$\vdots \longrightarrow \mathbb{C}$ Complexos

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 9y = 21 \end{cases}$$

Qual Nº de x e y satisfaz as duas equações?

Regra da substituição

$x = 5 - 2y \implies x = 5 - 2(2)$

$x = 5 - 4$

$\boxed{x = 1}$

$3(5 - 2y) + 9y = 21$

$\cancel{15} - 6y + 9y = \cancel{21}$

$3y = 6$

$\boxed{y = 2}$

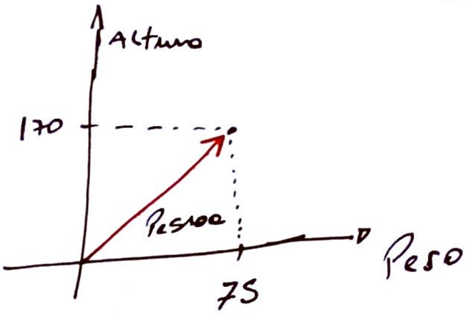
Vetor

$a = 75 \rightarrow$ escalar

Peso 75

Altura 170

$\text{Pessoa} = \begin{bmatrix} 75 \\ 170 \end{bmatrix}$ vetor



$\mathbb{R}^2$ conjunto Nº reais com 2 dimensões

Peso = 85

Altura = 170

Idade = 36

$\text{Pessoa} = \begin{bmatrix} 85 \\ 170 \\ 36 \end{bmatrix}$

Exame 1 = 90

Exame 2 = 80

Exame 3 = 96

Exame 4 = 100

$\text{Exame} \begin{bmatrix} 90 \\ 80 \\ 96 \\ 100 \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$

$U = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$

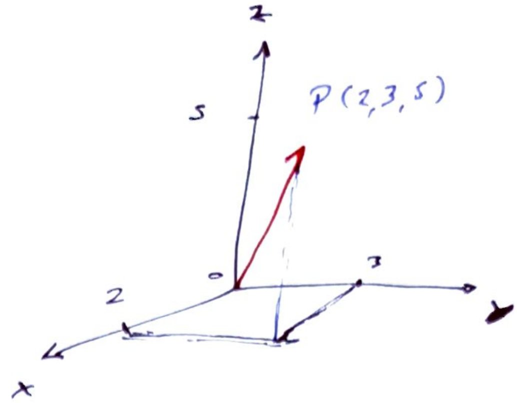
$\mathbb{R}^n$ ~~n dimensões~~

N dimensões

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Vetor Coluna}$$

$U = (U_1, U_2, \ldots, U_N) \Rightarrow$ Vetor linha

$$\text{Pessoa} = \begin{bmatrix} 85 \\ 170 \\ 36 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{R}^3$$



C=5 vetor escalar

Vetor V = (100, 20, 30, 45, 60)

↳ $\mathbb{R}^5$

multiplicação entre c e V está no espaço Euclidiano

Não podemos usar listas [1,2,3] como vetores

Pois não conseguimos fazer cálculos.

Precisamos converter para Numpy

lista

x = [1, 2, 3]
y = [4, 5, 6]

Print (x + y)
= [1, 2, 3, 4, 5, 6]

Vetor Numpy

soma = np.add (x, y)

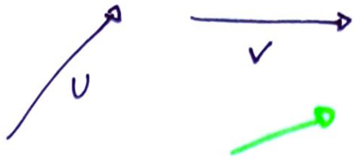
Print (soma)
= [5, 7, 9]

---

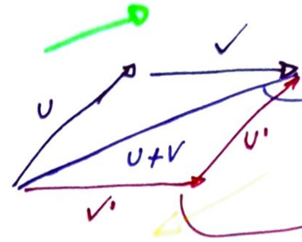
a, b = Escalares

U, V, W = Vetores em $\mathbb{R}^n$

1 - $U + V = V + U$
2 - $a(U+V) = aU + aV$
3 - $(a+b)U = aU + bU$
4 - $(U+V) + W = U(V+W)$
5 - $U + (-U) = 0$
6 - $a(bU) = ab(U)$
7 - $U + 0 = 0 + U = U$
8 - $1U = U$



U+V = V+U



esta é a soma de U+V

Representação de V+U

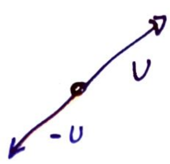
$U = \begin{bmatrix} 85 \\ 90 \\ 100 \end{bmatrix}$ $V = \begin{bmatrix} 60 \\ 75 \\ 56 \end{bmatrix}$

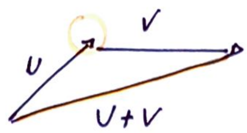
Paralelogramo

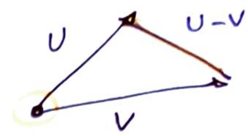
Subtração

Vetor Oposto

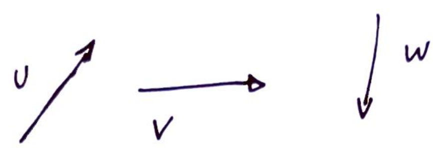
Soma

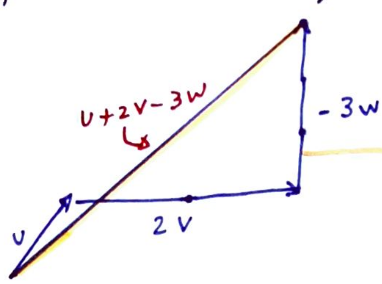






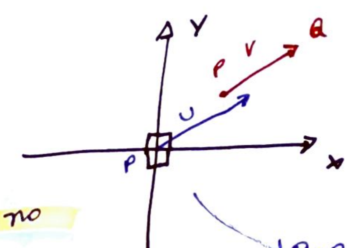
U + 2V − 3W





Negativo de w é o sentido oposto

eixo das ordenadas

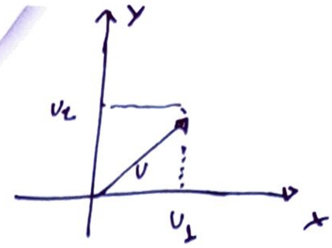


eixo das abscissas

Vetores no Plano

quadrantes

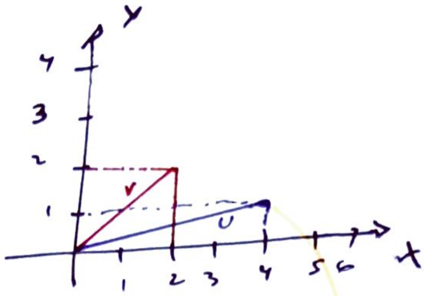
Quando você desloca o ponto P para o inicio, no ponto 0 onde os eixos se cruzam



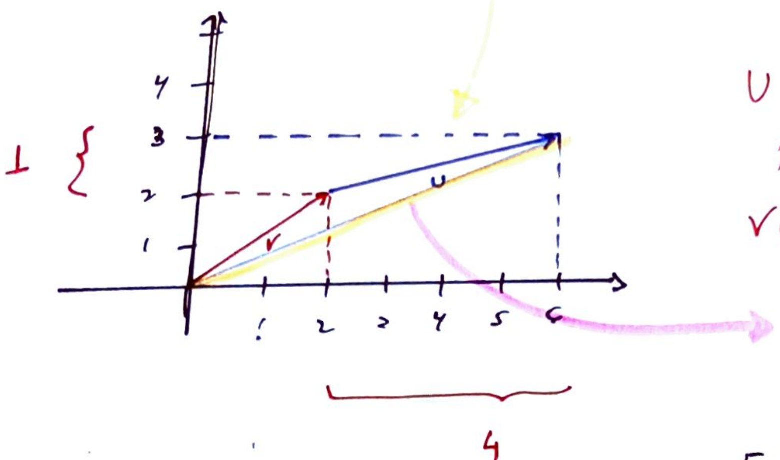
$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbb{R}^2$ 2 dimensões

$\boxed{U + V = V + U}$

U = (4,1)
V = (2,2)



Soma dos Vetores



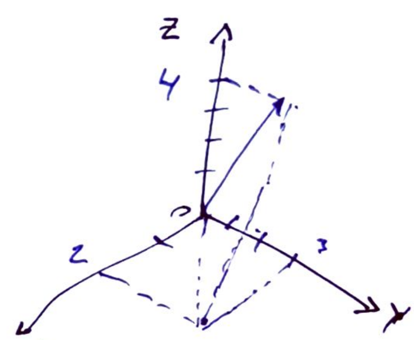
U = continua sendo (4,1)
Porem iniciando em
V(2,2)

Vetor Z = U+V = (6,3)

$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

Vetores no Espaço

Eixo X é o eixo das abscissas
Eixo y é o eixo das ordenadas
Eixo Z é o eixo das cotas



U = (2,3,4)

Sabe-se que o conjunto:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$$

é interpretado geometricamente no plano cartesiano. O par ordenado (x,y) pode ser um ponto ou um vetor .

Esta ideia se estende ao espaço tridimensional que é a interpretação geométrica do conjunto ℝ^3. Embora se perca a visão geométrica, é possível estender essa ideia a espaços ℝ^4, ℝ^5, ..., ℝ^n.

Nota: ℝ^n significa o conjunto de números reais R elevado ao número de dimensões n.

$$\mathbb{R}^4 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$\mathbb{R}^5 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) / x_i \in \mathbb{R}\}$$

A maneira de trabalhar nesses espaços é idêntica àquela vista no ℝ^2 e no ℝ^3. Vamos revisar tais propriedades.

Propriedades Algébricas

Considerando os vetores u e v no espaço ℝ^n e α um escalar, define-se, que:

$\vec{u} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\vec{v} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ são vetores no $\mathbb{R}^n$

a) igualdade de vetores $\vec{u} = \vec{v} \rightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, .., x_n = y_n$

b) adição de vetores $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

c) multiplicação de escalar $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1,\ \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$

d) produto escalar $\vec{u}.\vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$

e) módulo $|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$

Espaço Vetorial

Seja um conjunto V, não-vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

$$\forall u, v \in V \ , u + v \in V$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall u \in V, \ \alpha \mathrm{u} \in V$$

O conjunto V com essas duas operações é chamado de **espaço vetorial real** (ou espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$) se forem verificados os seguintes axiomas:

A) Em relação à adição:

A1) $u+(v+w)=(u+v)+w, \ \forall u,v,w \in V$

A2) $u+v=v+u, \ \forall u,v \in V$

A3) $\exists 0 \in V, \forall u \in V, u+0=u$

A4) $\forall u \in V, \exists(-u) \in V, u+(-u)=0$

B)Em relação à multiplicação por escalar:

M1) $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$

M2) $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$

M3) $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$

M4) $1(u)=u$

para $\forall u,v \in V \ e \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Os elementos do espaço vetorial V são chamados de vetores, independente de sua natureza. Pode parecer estranho, o fato de se chamar de vetores os polinômios, (quando V for constituído de polinômios), as matrizes (quando V for constituído de matrizes), os números (quando V for constituído for um conjunto numérico), e assim por diante. Podemos fazer isso, pois esses elementos de natureza tão distinta se comportam de forma idêntica nas operações de adição e multiplicação de escalar, como se estivéssemos trabalhando com os próprios vetores do $\mathbb{R}$^2 e $\mathbb{R}$^3.

Se tivéssemos tomado para escalares o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, V seria um espaço vetorial complexo.

Em resumo: Um espaço vetorial é uma estrutura formada por um conjunto V, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações:

- A adição(+)
- A multiplicação por um escalar (.)

- Na adição, cada par de vetores u, v ∈ V faz corresponder um novo elemento z = u + v, ∈ V, chamado a soma de u e v.

- Na multiplicação por um escalar, que a cada número(escalar) a ∈ ℝ e a cada vetor v ∈ V faz corresponder um vetor av, chamado o produto de a por v.

Referência:

Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares
https://www.amazon.com.br/introduction-Applied-Linear-Algebra-Matrices-ebook/dp/B07CN2ZX7D?keywords=vectors+and+linear+algebra&qid=1536272751&sr=8-7&ref=sr_1_7

Um conjunto B = {v1, v2, ..., vn} ⊂ V é uma **base do espaço vetorial V** se:

I) B é Linearmente Independente
II) B gera V

Vamos comprovar isso, validando essas duas regras e verificando se B = {(1,2), (3,5)} é uma base do espaço vetorial ℝ^2.

I) B é Linearmente Independente (um vetor é LI se o escalar com o qual faremos operação for igual a zero). Assim, temos que:

$$a_1(1,2)+a_2(3,5)=(0,0)$$
$$(a_1,2a_1)+(3a_2,5a_2)=(0,0)$$
$$(a_1+3a_2,2a_1+5a_2)=(0,0)$$

$$\begin{cases} a_1+3a_2=0 \\ 2a_1+5a_2=0 \end{cases}$$

Confirmamos que B atende a primeira regra. Vejamos a segunda!

II) B gera V (ou seja, B gera ℝ^2)

$$(x,y)=a_1(1,2)+a_2(3,5)$$
$$(x,y)=(a_1,2a_1)+(3a_2,5a_2)$$
$$(x,y)=(a_1+3a_2,2a_1+5a_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+3a_2=x \\ 2a_1+5a_2=y \end{cases}$$

que resolvido em função de x e y, fornece:

$$a_1=-5x+3y \quad \text{e} \quad a_2=2x-y$$

Logo, o conjunto de vetores B é uma base do espaço vetorial ℝ^2. Vejamos outro exemplo agora com espaço vetorial de 3 dimensões. Considere que B = { (1,1,1), (1,1,0), (1,0,0) } seja uma base do ℝ^3. Vamos validar as duas regra acima:

I) B é Linearmente Independente

$$a_1(1,1,1)+a_2(1,1,0)+a_3(1,0,0)=0$$
$$a_1(1,1,1)+a_2(1,1,0)+a_3(1,0,0)=(0,0,0)$$
$$(a_1,a_1,a_1)+(a_2,a_2,0)+(a_3,0,0)=(0,0,0)$$
$$(a_1+a_2+a_3,a_1+a_2,a_1)=(0,0,0)$$
$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=0 \\ a_1+a_2=0 \\ a_1=0 \end{cases}$$

B é um sistema homogêneo que admite somente a solução trivial a1 = a2 = a3 = 0, o que confirma B ser LI.

II) B gera V (ou seja, B gera ℝ^3 neste exemplo)

De fato, qualquer vetor v=(x,y,z) é combinação linear de v1, v2 e v3:

$$(x,y,z) = a_1(1,1,1) + a_2(1,1,0) + a_3(1,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = x \\ a_1 + a_2 = y \\ a_1 = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = z \\ a_2 = y - z \\ a_3 = x - y \end{cases}$$

$$(x,y,z) = z(1,1,1) + (y - z)(1,1,0) + (x - y)(1,0,0)$$

O que comprova ser qualquer vetor v=(x,y,z) combinação linear de v1, v2 e v3.

Logo: [v1, v2, v3] = ℝ3

Referência:

Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares
https://www.amazon.com.br/introduction-Applied-Linear-Algebra-Matrices-ebook/dp/B07CN2ZX7D?keywords=vectors+and+linear+algebra&qid=1536272751&sr=8-7&ref=sr_1_7

$V = (V_1, V_2, V_3)$
$S = (S_1, S_2, S_3)$

$V = (-1, 4, 1)$
$S = (2, 0, 1)$

$$V + S = \begin{pmatrix} -1+2 \\ 4+0 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$3V - 2S$

$V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ $\quad \mathbb{R}^n$ conjunto de Nº Reais elevado a n dimensões

Vetor = uma lista de números ordenados e finita

$$V = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 68 \\ 150 \end{bmatrix} \qquad V = (-1, 7, 68, 150)$$

componente / elemento $= V_i$

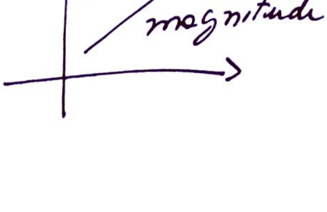
dimensões $N = 4$

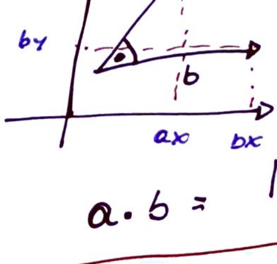
Não há limite nas dimensões

$n = 1$ = escalar $\quad v = (7)$

escalar deve pertencer ao conjunto de Nº reais $\mathbb{R}$

$V \in \mathbb{R}$





$a \cdot b = |a| \times |b| \times \cos(\theta)$ cosseno do ângulo

$$\boxed{a \cdot b = a_x \times b_x + a_y \times b_y} = \text{Escalar}$$

$$a \cdot b = \underset{x}{(a_x \cdot b_x)} + \underset{y}{(a_y \cdot b_y)}$$

Dot product $\Rightarrow$ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ = resultado é um valor escalar

mesmas dimensões

Cross product $\Rightarrow$ $\vec{a} \times \vec{b}$ = resultado é um vetor e NÃO um escalar

dimensões diferentes

$a = (a_x, a_y, a_z)$ | $b = (b_x, b_y, b_z)$

	a_x	a_y	a_z
b_x	Dot	Cross	Cross
b_y	Cross	Dot	Cross
b_z	Cross	Cross	Dot

$a \times b = |a| \times |b| \times \text{sen}(\theta)$

Cross product

$C_x = a_y b_z - a_z b_y$

$C_y = a_z b_x - a_x b_z$

$C_z = a_x b_y - a_y b_x$

eixos diferentes

Mais informações

Matrizes e Determinantes

matrizes são formados por linhas (m) e colunas (n)

$A = m \times n$ (3x2) Primeiro sempre a linha

linha × coluna

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 15 & 6 \\ 64 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow a_{ij} = a_{22} = 6$$

Tipos especiais de Matrizes

$m \geq 1$ e $n \geq 1$

Matriz Nula

$a_{ij} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3\times 3$$

Matriz linha

$m = 1$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}\ 1 \\ 4 \end{array}$$

Matriz coluna

$n = 1$

$$\begin{array}{c} 1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\ 4 \end{array}$$

Matriz Quadrado

$m = n$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}\ 3 \\ 3 \end{array}$$

Matriz Retangular

$m \neq n$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Matriz diagonal

$a_{ij} = \emptyset,\ i \neq j$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$1\times 1 = i = j$

$4\times 4 = i \neq j = \emptyset$

$4\times 4 = i = j$

toda combinação onde $i \neq j$ é preenchida por zero

Matriz identidade

$a_{ij} = 1 \quad i = j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular inferior

$a_{ij} = \emptyset,\ i < j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Triangular Superior

$a_{ij} = 0 \quad i > j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonal principal e Diagonal Secundaria

Principal = $A = (a_{ij})$ $\quad i = j$

Secundaria = $A = (a_{ij}$ $\quad i + j = n + 1$

tem que ser Matriz Quadrada $m = n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$i = j$

diagonal Secundaria

diagonal Principal

$$\boxed{\begin{aligned} i + j &= 3 + 1 = 4 \\ n + 1 &= \,?? \end{aligned}}$$

$i + j = j + i$

$3 + 1 = 1 + 3$

$2 + 2 = 2 + 2$

$1 + 3 = 3 + 1$

$(A, B) = C_{m \times n}$

$A_{m \times n}$ $\quad B_{m \times n}$

$A = B$

cada elemento

$a_{ij} = b_{ij}$

$\left.\right\}$ $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1+x \\ 2-y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$1 + x = 4$ $\quad x = 3$

$2 - y = 1$ $\quad y = 1$

$A_{m \times n}$ $B_{m \times n}$

$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \to C_{m \times n}$

$A - B = [a_{ij} - b_{ij}] \to C_{m \times n}$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -2 \\ 3 & 5 & 19 \end{bmatrix}$ $C = A + B$

$C = \begin{bmatrix} 11 & 9 & 1 \\ 4 & 7 & 26 \end{bmatrix}$

Propriedade da Adição

Comutatividade $\Rightarrow A + B = B + A$

Associatividade $\Rightarrow (A+B) + C = A + (B+C)$

Elemento Neutro $\Rightarrow 0_{m \times n}$ = Matriz de zeros $0_{m \times n} + A = A$
Matriz Nula

Matriz oposta $\Rightarrow A \to -A$

$\hookrightarrow A + (-A) = 0_{m \times n}$

Multiplicação de Matriz por um escalar

α letra Alfa representa valor escalar

$\alpha A = [\alpha a_{ij}]$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $3A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$

① $\alpha (A+B) =$
$= \alpha A + \alpha B$

② $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$

③ $\alpha (\beta A) = (\alpha \beta) A$

④ $= 1A = A$ elemento Neutro

⑤ $= \emptyset_{m \times n} A = \emptyset_{m \times n}$

Considerando ~~duas~~ duas Matrizes quadradas A e B
A será inversa de B se, e somente se, A x B ou
B x A for igual a I (matriz Identidade)

$$A \times B = B \times A = I$$

Matriz inversa
$\neq$
Matriz oposta

$$A = A^{-1}$$

Matriz inversa

- Existe apenas uma inversa p/ cada Matriz
- Nem todas as Matrizes possuem uma matriz inversa
- A matriz inversa de uma inversa corresponde à própria matriz: $A = (A^{-1})^{-1}$
- A matriz transposta de uma matriz inversa é tb inversa

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

- A matriz inversa de uma matriz transposta corresponde a transposta da inversa $= (A^{-1}A^t)^{-1}$
- A matriz inversa de uma matriz identidade é igual à matriz identidade $= I^{-1} = I$

Matriz escalonada

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \end{bmatrix} \checkmark \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \checkmark \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times$$

Não é escalonada

Escalonamento de Matriz

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ y + 2z = -3 \\ -4z = 8 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array}\right]$$

Resolvendo de baixo p/ cima temos:

$-4z = 8 \rightarrow z = -2$

$y + 2z = -3 \rightarrow y + 2 \times (-2) = -3 \rightarrow y = -3 + 4 = 1$

$2x + 2y - z = 0 \rightarrow 2x + 2 \times 1 - (-2) = 0 \rightarrow 2x + 4 = 0 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2$

Logo, a solução é $x = -2$, $y = 1$, $z = -2$

Determinantes

- Determinantes se aplicam apenas a matrizes Quadradas
- Determinante é seu valor numérico
- Matriz ordem 2

matriz Primária

matriz secundária

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \in \mathbb{R}$$

- Matriz de ordem 3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Repete as duas 1e colunas

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \\ & & + & + & + \end{array}$$

Regra de Sarrus

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$
$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \in \mathbb{R}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 3\times3$$

$$\det(A) = \boxed{-30}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & -2 & 2 \end{matrix}$$

$-12 - 4 - 12$ $\qquad$ $-6 - 8 + 12$

-28 $\qquad$ -2

$\boxed{-30}$

$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

$2 \cdot 2 \cdot -2 = -8$

$1 \cdot -2 \cdot 3 = -6$

$3 \cdot -2 \cdot -2 = 12$

$1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$

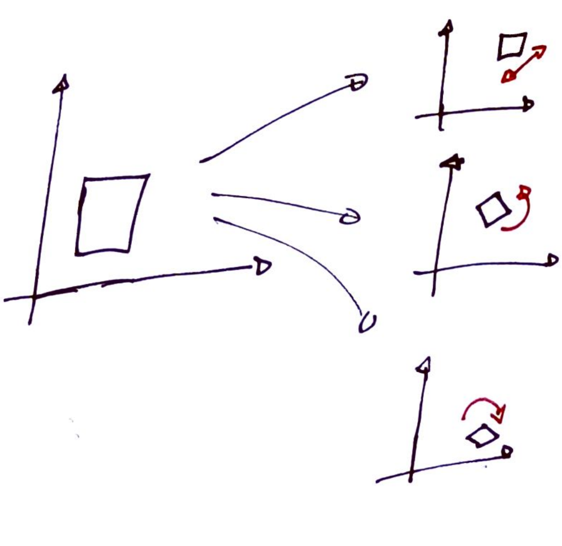
$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Função Python **Numpy**

det()

Transformação linear

Visão computacional



Podemos mover aumentar diminuir objetos no espaço

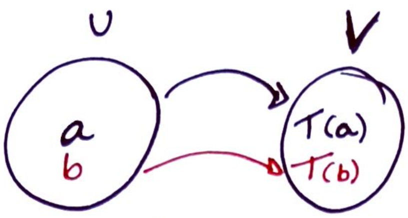
transformação linear

$T: U \to V$

$T(u_1+u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ para todo $u_1, u_2 \in U$

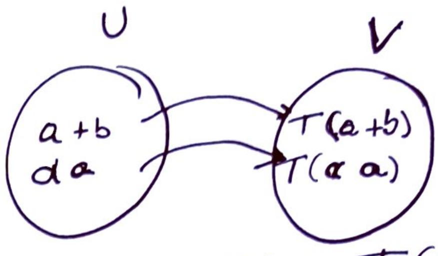
$T(\alpha u) = \alpha T(u)$ para todo $u \in U$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$

Nº complexos



$x \quad f(x) \quad y$

$y = f(x)$



$T(a+b) = T(a) + T(b)$

$T(\alpha a) = \alpha \cdot T(a)$

Se uma dessas transformações não for valido, então não será transformação Linear

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

Nº Reais 2 dimensões → Nº Reais 3 dimensões

$T(x,y) = (x, y, x+y)$

2 coordenado

imagem de R^2 em R^3

3 coordenados

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$

a $(1,2) \to (1,2,3)$

b $(-2,3) \to (-2,3,1)$

a+b $(-1,5) \to (-1,5,4)$

$a = (1,2)$

$b = (-2,3)$

$a+b = (-1,5)$

T(a)

$T(a+b) = T(a) + T(b)$

$-3(1,2,3) = -3,-6,-9$

$-3a \ (-3,-6) \to (-3,-6,-9)$

$\boxed{(-3)+(-6) = -9}$

$-3(1,2)$

Regras transformação Linear

$$T: U \to V$$

tranformação do espaço vetorial U para o espaço vetorial V

1) $T(\emptyset_U) = 0_V$ → a imagem do vetor Nulo de U é o Vetor Nulo no espaço vetorial V

A transformação linear de $\emptyset$ em U é igual $\emptyset$ em V

U = u maiúsculo = espaço Vetorial
u = u minusculo = Vetor

2) $T(-u) = -T(u)$

A transformação linear de menos u é igual a menos a transformação linear de u

3) $T(u - v) = T(u) - T(v)$

Vetor Nulo

Ex 1) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow T(x,y) = (x, y, x+y)$

$T(0,0) = (0,0,0)$

Ex 2) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow \boxed{T(x,y,z) = (x+y, y+1)}$

$T(0,0,0) = (0,0)$

$T(0,0,0) \neq (0,1)$ Não é transformação Linear

! Se não for transformação linear eu posso estar perdendo a validade dos dados.

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$U = (u_1, u_2) \to T(u) = \boxed{(-2u_1 + 3u_2, -2u_1 - u_2)}$!

$\underline{a = (-1, 0)}$ $\quad T(a) = -2\cdot(-1) + 3\cdot(0), \; -2\cdot(-1) - 0$

$\qquad\qquad 2 + 0 \qquad\qquad 2 - 0$

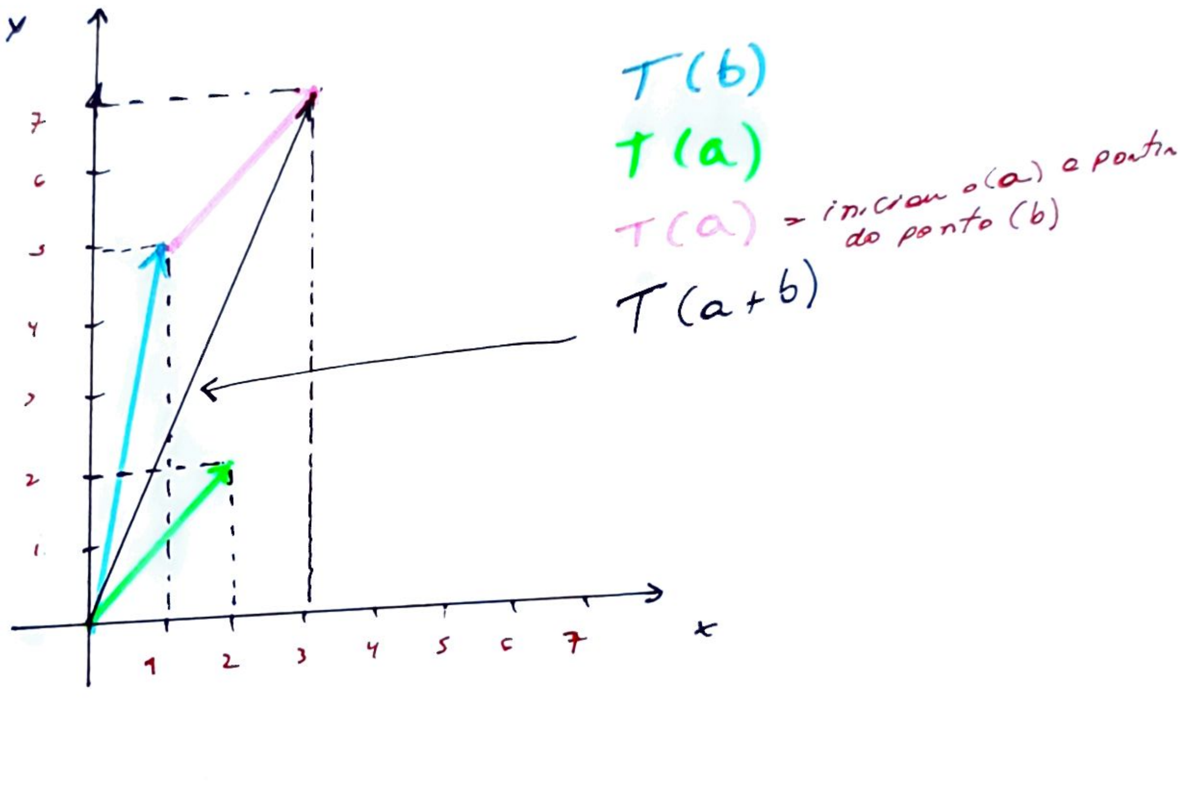
$\qquad\qquad 2 \qquad\qquad\quad 2$

$\qquad = (2, 2)$

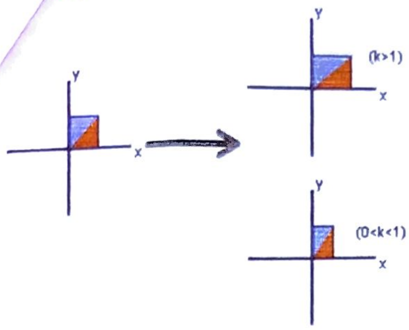
$b = (-2, -1) = \quad T(b) = (1, 5)$

$T(a+b) = (3, 7)$

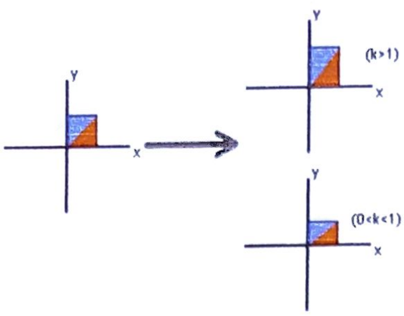
É uma transformação linear.



ou contração em no eixo x
(kx, y)

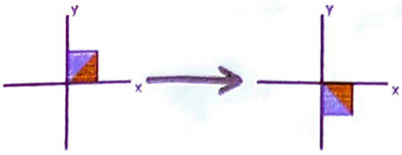


Expansão ou contração em no eixo y
T(x, y) = (x, ky)

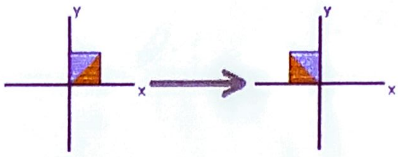


Considerando todas as aplicações T, como T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, algumas transformações que nos fazer no plano são:

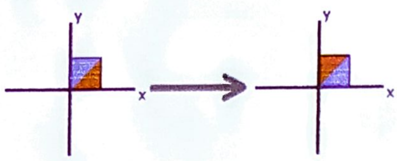
Reflexão em torno do eixo x
T(x, y) = (x, -y)



Reflexão em torno do eixo y
T(x, y) = (-x, y)



Reflexão em relação ao eixo y = x
T(x, y) = (y, x)



Sistemas Lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = (1, 1, -1) \\ x = (10, -5, 2) \\ x = (7, -3, 1) \end{array}}$$

$1 + 1 - (-1) = 3$

$2 \cdot 1 + 1 - 4(-1) = 7$

Conjunto de Soluções Possíveis
Valores de x que satisfazem
Todas as equações do
Sistema linear.

Soluções sistemas lineares

Regra de Cramer ↳ determinante	Matriz inversa	Escalonamento Gaussiana

$x + 2y + z = 8$

$2x - y + z = 3$

$3x + y - z = 2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

D determinante

DX determinante de x

Cramer

$$x = \frac{Dx}{D}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Dx$$

$$Ay = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = Dy$$

$$y = \frac{Dy}{D}$$

$$z = \frac{Dz}{D}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\boxed{\text{Determinante}}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & +1 \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$\underbrace{-(-3)-(+1)-(-4)}_{6} \; + \; \underbrace{+1+6+2}_{9}$$

$$\boxed{15}$$

$1 \cdot -1 \cdot -1 = 1$

$2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$

$1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$

$3 \cdot -1 \cdot 1 = -3$

$1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$-1 \cdot 2 \cdot 2 = -4$

$$Ax = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad Ay = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad Az = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$Dx = 15$ $\qquad$ $Dy = 30$ $\qquad$ $Dz = 45$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{15}{15} = \boxed{1} \qquad y = \frac{Dy}{D} = \frac{30}{15} = \boxed{2} \qquad z = \frac{Dz}{D} = \frac{45}{15} = \boxed{3}$$

Número de Equações igual o Nº de Incógnitas

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

1º passo: Anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita a partir da 2ª equação, aplicando as propriedades dos sistemas equivalentes.

$-2 \times 2y = -4y$

multiplica o -2 pela 1ª equação
soma com a segunda

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Leftarrow [(-2)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}$$

$(-2) \cdot = -2x + 2x = \phi$

$-4y - 3y = -7y$

$-2z - 1z = -3z$

$-6 + 4 = -2$

Trocamos de posição a 1ª equação com a 2ª equação de modo que o 1º coeficiente de x seja igual a 1.
Trocamos a 2ª equação pela soma da 1ª equação, multiplicada por -2 com a 2ª equação.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases} \Leftarrow [(-3)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases}$$

Trocamos a 3ª equação pela soma da 1ª equação multiplicada por -3 com a 3ª equação.

$-3x + 3x = \phi$

$-3 \cdot 2y = -6y - 1y = -7y$

$-3 \cdot z - 2z = -5z$

$-3 \cdot 3 = -9 + 1 = -8$

Número de Equações Igual o número de incógnitas

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -7y - 5z = -8 \end{cases} \Leftarrow [(-1)] \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + y = 3 \ (I) \\ -7y - 3z = -2 \ (II) \\ -2z = -6 \ (III) \end{cases}$$

$-1 \cdot -7y = 7y - 7y = \emptyset$

$-1 \cdot -3z = 3z - 5z = -2z$

$-1 \cdot -2 = 2 - 8 = -6$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2ª incógnita a partir da 3ª equação: Trocamos a 3ª equação pela soma da 2ª equação, multiplicada por -1, com a 3ª equação.

$$x + 2y + y = 3 \ (I)$$
$$-7y - 3z = -2 \ (II)$$
$$-2z = -6 \ (III)$$

Agora que o sistema está escalonado e no formato de uma matriz triangular superior podemos resolver de baixo p/ cima e aplicar a regra da substituição.

$-2z = -6 \Rightarrow \boxed{z = 3}$

$\div$ Passo dividindo

Substituindo $z=3$ em (II): $-7y - 3(3) = -2 \quad -7y - 9 = -2 \Rightarrow \boxed{y = -1}$

Substituindo $z = 3$ e $y = -1$ em (I):

$x + 2(-1) + 3 = 3 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

Número de Equações diferentes do nº de Incógnitas

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ 2x+y-2z+t=-1 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases}$$

1º passo: Anulamos todos os coeficientes da 1ª incógnita a partir da 2ª equação.

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ 2x+y-2z+t=-1 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases} \Leftarrow[(-2)]\Rightarrow \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{cases}$$

trocamos a 2ª equação pela soma do produto da 1ª equação por −2 com a 2ª equação.

$$\begin{matrix} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ x-2y+z+2t=-3 \end{matrix} \Leftarrow[(-1)]\Rightarrow \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ -3y+0z+3t=-9 \end{cases}$$

trocamos a 3ª equação pela soma do produto da 1ª equação por −1 com a 3ª equação.

$$\begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ -3y+0z+3t=-9 \end{cases} \Leftarrow[(-3)]\Rightarrow \begin{cases} x+y+z-t=6 \\ -y-4z+3t=-13 \\ 12z-6t=30 \end{cases}$$

2º passo: Anulamos os coeficientes da 2ª incógnita, a partir da 3ª ~~equação~~ equação trocamos a 3ª equação pela soma do produto da 2ª equação por −3 com a 3ª equação.

O sistema está escalonado. Como $m < n$, o sistema é possível e indeterminado, admitindo infinitas soluções. A diferença entre o número de incógnitas (n) e o de equações (m) de um sistema nessas condições é chamado grau de indeterminação (GI)

$$\boxed{GI = n - m}$$

$$\begin{cases} x + y + z - t = 6 \\ -y - 4z + 3t = -13 \\ 12z - 6t = 3 \end{cases}$$

Consideramos o sistema em sua forma escalonada e calculamos o grau de indeterminação do sistema nessas condições: $\boxed{GI = n - m = 4 - 3 = 1}$

Como o grau de indeterminação é 1, atribuímos a uma das incógnitas um valor, supostamente conhecido, e resolvemos o sistema em função desse valor. Sendo $t = \alpha$, substituindo esse valor na 3ª equação, obtemos:

$$12z - 6\alpha = 30 \Rightarrow 12z = 30 + 6\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{30 + 6\alpha}{12} = \frac{5 + \alpha}{2}}$$

Assim, a solução do sistema é dada por $S = \left\{\left(\frac{1-\alpha}{2}, \alpha + 3, \frac{5+\alpha}{2}, \alpha\right)\right\}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$

Para cada valor que seja atribuído a α, encontraremos uma quádrupla que é a solução para o sistema

Determinando Autovetores de uma Matriz

$$\boxed{T \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}}$$

Lambda

Auto vetor

$T \cdot \vec{v}$ $\qquad$ $\lambda \vec{v}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad 2 \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Auto valor

$$T \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v}$$

$$T \cdot \vec{v} - \lambda \vec{v} = \vec{0}$$

Multiplicar Matriz pelo vetor

e Subtrair Scalar que Multiplica o Vetor

→ Resultado igual a ϕ Vetor Nulo

$$I \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Matriz identidade

$$T \cdot \vec{v} - \lambda \cdot I \, \vec{v} = \vec{\phi}$$

$$(T - \lambda \cdot I) \cdot \vec{v} = \vec{\phi}$$

OBS: Você não poderia subtrair uma Matriz (T) por lambda (λ) diretamente mas lambda (λ) multiplicando uma matriz identidade (I) é uma uma matriz

Esse é um sistema homogêneo, ou seja, uma Matriz que Multiplica um vetor desconhecido é igual a zero. Para encontrar os autovetores da Matriz T é só resolver o sistema

$$(T - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{\phi}$$

$$T - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \boxed{\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \boxed{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Matriz Quadrada $\quad T - 2I = \begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Já está escalonada $\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Matriz escalonada tem uma propriedade que nos permite descartar a coluna nula

descartamos a linha Nula e achamos o Nucleo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Nuc(T) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

O autoespaço dessa matriz é o espaço gerado por (1,0), ou seja, o eixo x

Assim, qualquer vetor pertencente ao eixo x é um autovetor da matriz T

Por exemplo, podemos escolher (50,0):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{gathered} (T - \lambda I) \cdot \vec{v} = \vec{\phi} \\ T - \lambda I \end{gathered}}$$

O Resultado desta operação é uma matriz quadrada!

A solução do sistema admite um conjunto infinito de vetores (Autoespaço). Em uma matriz quadrada, se os linhas forem LI (linearmente Independentes) o sistema admite apenas uma solução, mas como nosso sistema admite infinitas soluções, temos que $\boxed{T - \lambda I}$ é LD (linearmente dependente)

E o que acontece quando uma matriz é LD?
Seu determinante é zero! Logo, para encontrar os autovalores de uma matriz tudo que precisamos é resolver:

$$\boxed{\det(T - \lambda I) = \emptyset}$$

transformação de (u)

$$(u_1, u_2) \to T(u) = (3u_1 + 4u_2, 2u_1 + u_2)$$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

transformação linear do espaço $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$

Determine autovalores e correspondentes autovetores de T.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Procuramos um escalar λ e um vetor não nulo $v = (v_1, v_2)$, tais que

$$\boxed{Av = \lambda v}$$

Escalar, o que se quer descobrir

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$$

Matriz A

Autovalor

autovetor

convertendo p/ um sistema linear

$$\begin{cases} 3v_1 + 4v_2 = \lambda v_1 \\ 2v_1 + v_2 = \lambda v_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (3-\lambda)v_1 + 4v_2 = 0 \\ 2v_1 + (1-\lambda)v_2 = 0 \end{cases}$$

Sistema homogênio, onde os 2 equações é igual a zero

Como dissemos, para que o sistema linear homogêneo tenha solução não nula, o determinante da matriz de coeficiente deve ser igual a zero. Logo:

$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & 4 \\ 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \Rightarrow (\lambda-5)(\lambda+1) = 0$$

Calcular o Determinante

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Assim, λ é um autovalor de A se e somente se $\boxed{\lambda = 5 \text{ ou } \lambda = -1}$

$$\begin{cases} (3-\lambda)v_1 + 4v_2 = 0 \\ 2v_1 + (1-\lambda)v_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2v_1 + 4v_2 = 0 \\ 2v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases}$$

ou simplesmente, $v_1 - 2v_2 = 0 \rightarrow v_1 = 2v_2$, onde v_2 é uma variável livre.

Assim, $v = (2v_2, v_2)$ é o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 5$.

Qualquer outro autovetor correspondente a $\boxed{\lambda_1 = 5}$ é um múltiplo de v.

Com base no autovetor $v = (2v_2, v_2)$ e tomando $v_2 = 1$, obtemos que $v = (2,1)$ é um autovetor correspondente ao autovalor $\boxed{\lambda_1 = 5}$

determinante Matriz primária 2x2

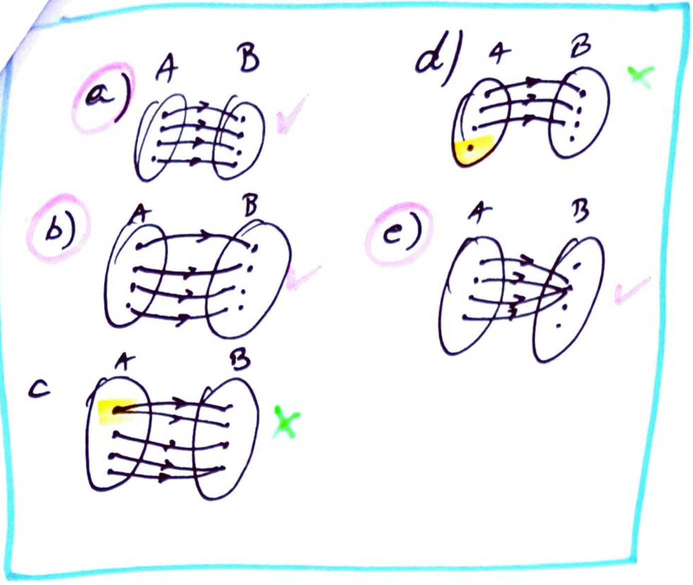
$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & 4 \\ 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} (3-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 4\cdot 2 =$$

$$3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 8$$

$$\boxed{\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0}$$

Calculo, funções e limites

Conceito de função



Uma relação f de A em B é uma função se e somente se:

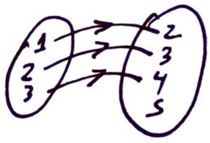
1) Todo elemento x pertencente a A tem um correspondente y pertencente a B definido pela relação, chamado imagem de x

2) a cada x pertencente a A não podem corresponder dois ou mais elementos de B por meio de f

As relações de (a), (b) e (e) são funções de A em B.

x = variável independente
y = variável dependente

Domínio e Contradomínio



domínio da função = {1, 2, 3}
Contradomínio = imagem = {2, 3, 4}

Domínio

$f(x) = y$

Podemos ter qualquer Nº no domínio?

a) $f(x) = \frac{2}{x-3}$

$D = \mathbb{R} - \{3\}$, pois o valor de $x = 3$ fará com que o denominador seja zero (não existe a fração)

* O valor 3 irá invalidar essa função.

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

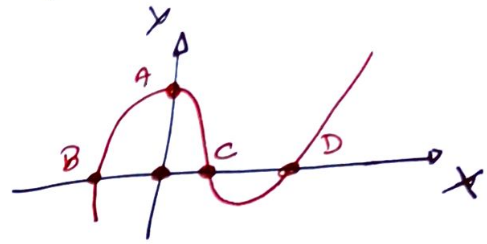
(D) = domínio = $[2, \infty]$ pois para $x < 2$ o radicando é negativo e não existe a raiz quadrada;

c) $f(x) = x^2 + 5x$

D = $\mathbb{R}$, pois neste exemplo x pode ser qualquer valor real.

Interceptos

$y = (x^2 - 1)(x - 2)$

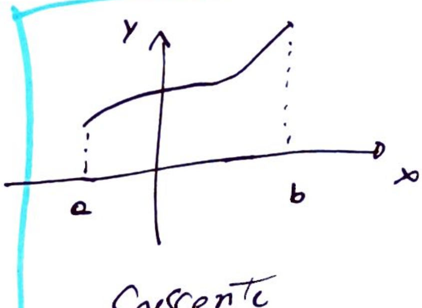


$y = (0^2 - 1)(0 - 2) = 2$

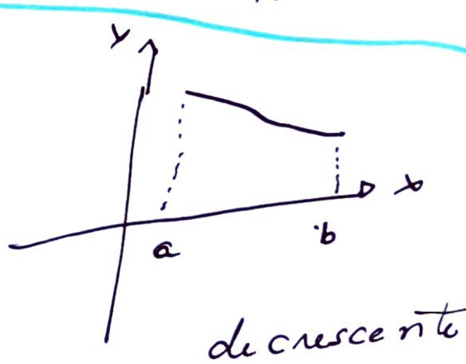
$0 = (x^2 - 1)(x - 2) \Rightarrow x = 1$ ou

$x = -1$ ou $x = 2$

Funções Crescente e Decrescente



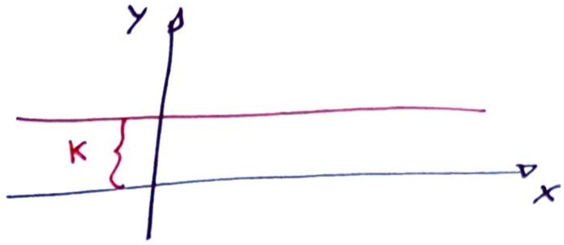
Crescente



decrescente

Função Constante

$y = k$ em que k é uma constante real

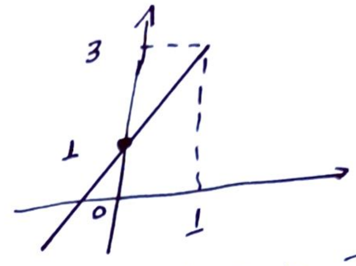


Função do 1º Grau

$$y = m \cdot x + n$$

m e n são constantes reais com $m \neq 0$

é uma reta



Atribuindo os valores 0 e 1 a x, temos os seguintes pontos:

$(0,1)$
$(1,3)$

Aplicações de F. 1º Grau

Cálculo de custo, receita e lucro

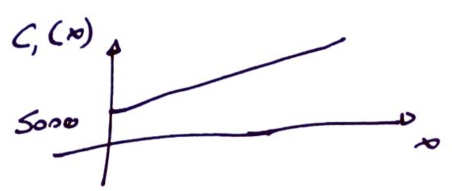
$$C = C_F + C_V$$

custo unitário
cada peça fabricada

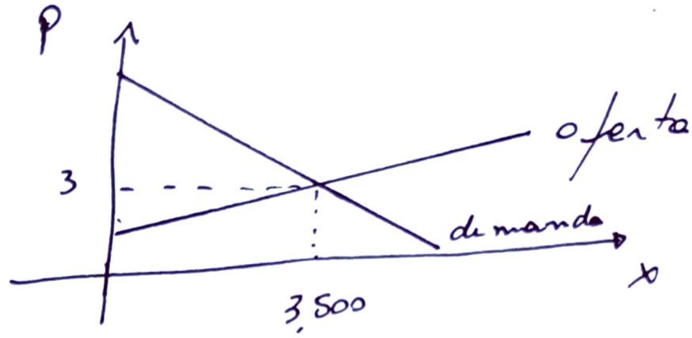
$$C = 5000 + 10x$$

custo variável
Quantidade de peça

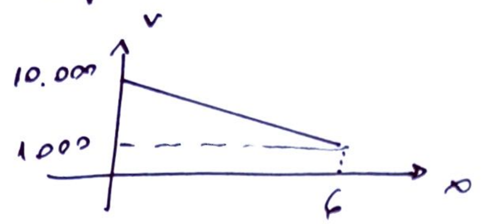
custo fixo
Aluguel



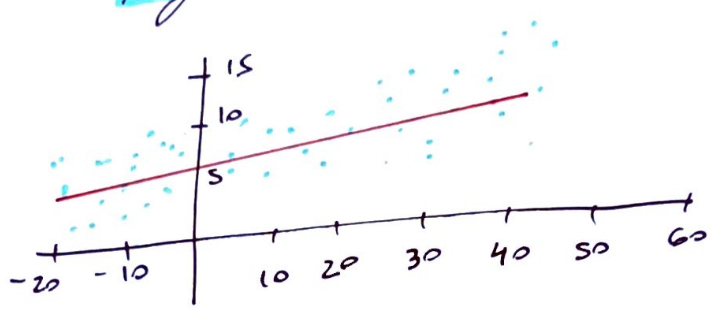
Calculo de demanda e oferta



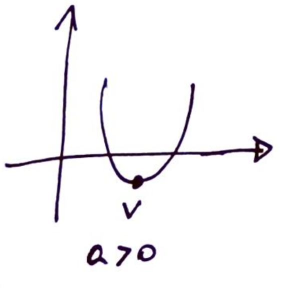
Depreciação Linear

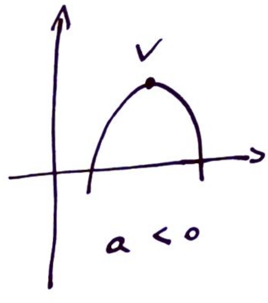


Regressão linear (Machine learning)



Função Quadrática





$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

a, b, c = constantes reais com $a \neq 0$

Gráfico Parabola

se $a > 0$ = Gráfico p/ cima

se $a > 0$ = " p/ baixo

Função quadrática para Receita e Lucro

Preço variável

$R = p \cdot x$

$R = (10 - x)x$

$R = 10x - x^2$

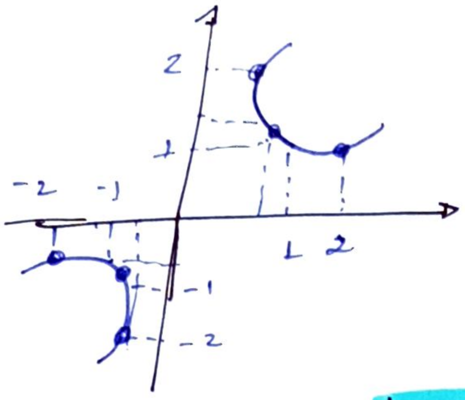
$L = R - C$

$L = 10x - x^2 - (20 + x)$

$L = x^2 + 9x - 20$

Função Racional

$f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+8x+9}$ $\quad f(x)\ \dfrac{x+1}{x-1}$ $\quad f(x)\ \dfrac{5}{x-3}$



Limites de funções

O limite da função é L quando x tende a b pela direita $(x \to b^+)$ se, à medida que x se aproxima de b pela direita (isto é, por valores superiores a b) os valores de $f(x)$ se aproximam de L.

Simbolicamente, escrevemos:

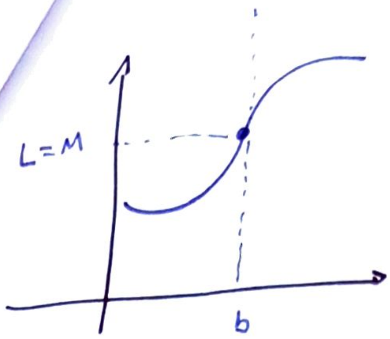
$$\lim_{x \to b} f(x) = L$$

→ Qual é o valor de y mais próximo?

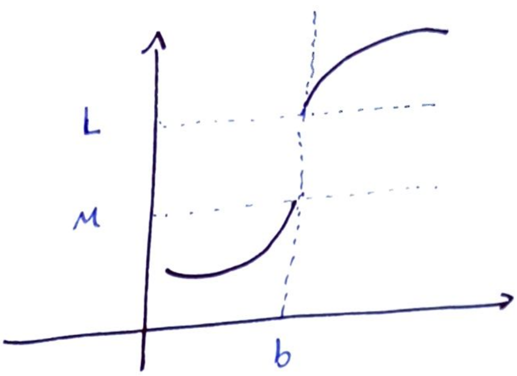
Se aproxima de b pelo eixo x

função

Caso $L = M$, ou seja, os limites são iguais, dizemos que existe o limite de $f(x)$ quando x tende a b e escrevemos $\lim f(x) = L = M$



Quando os limites laterais L e M são distintos, dizemos que não existe o limite de $f(x)$ quando x tende a b (embora existam os limites laterais)



Formas Indeterminadas

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}$$

Observamos que a expressão de $f(x)$ pode ser simplificada ao fatorarmos o denominador. Assim, as funções abaixo tem um comportamento idêntico (exceto para $x = 2$)

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \quad e \quad h(x) = \frac{1}{x+2}$$

Hipotese dx

O que é aprendido em machine learning é uma Hipotese

Nunca encontra a função matemática exata.

Senão temos overfiting

Cálculo, derivadas e Integrais

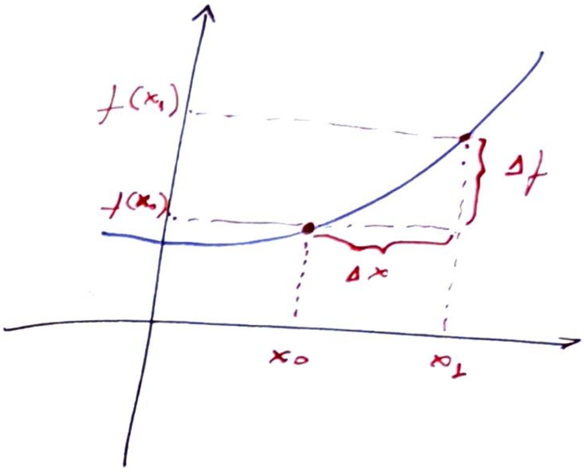
O que é a derivada de uma função?

- taxa de variação
- é a inclinação de uma reta tangente
- é o limite de uma razão incremental.

Derivada

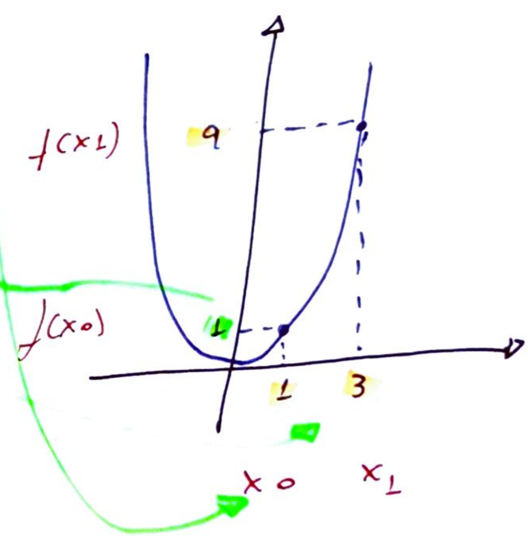
- A taxa mede o ritmo de variação da imagem em relação de x
- depende do ponto de partida x_0 e da variação de x dada por $x_1 - x_0$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



Sejam a função $f(x) = x^2$ o ponto inicial de abscissa $x_0 = 1$ e a variação $\Delta x = 2$ (isto é, x varia de 1 a 3). A taxa média de variação de f para esses valores é:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{3^2 - 1^2}{2} = 4$$



isso significa que, se x variar 2 unidades (a partir de $x_0 = 1$) a variação de f será 4 vezes maior pois $\Delta f = 8$, enquanto $\Delta x = 2$.

Prédio = 2000 m

$f(t) = 2000 - 10t^2$ objeto cai de 2000 m

Primeiros 5 segundos

$f(0) = 2000$ $\Rightarrow \Delta f_1 = 2000 - 1750 = -250$

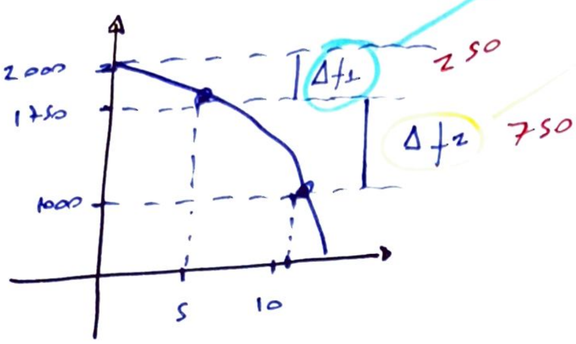
$f(5) = 1750$

de 5 a 10 segundos

$\Delta f_2 = f(5) - f(10) = 1750 - 1000 = -750$

1º intervalo, a velocidade média é $\frac{\Delta f_1}{5} = \frac{-250}{5} = -50\,m/s$

2º " a velocidade média é $\frac{\Delta f_2}{5} = \frac{-750}{5} = -150\,m/s$



Velocidade média de t variando de 5 a 8 é

$$\frac{\Delta f_3}{\Delta t} = \frac{f(8) - f(5)}{8-5} = \frac{1360 - 1750}{3} = \boxed{-130\,m/s}$$

Velocidade instantânea

t = 5 segundos

Consideramos a taxa média de variação.

Para o intervalo $[5; 5+\Delta t]$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5+\Delta t) - f(5)}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{[2000 - 10(5+\Delta t)^2] - [2000 - 10 \cdot (5)^2]}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{-100\Delta t - 10(\Delta t)^2}{\Delta t} = \boxed{-100 - 10\Delta t}$$

- Velocidade média se aproxima de 100 m/s
- A velocidade instantânea é o limite para o qual tende a velocidade média quando o intervalo de tempo tende a ϕ,
- A velocidade no ponto $t = 5$ é dada por:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (-100 - 10\Delta t) = -100$$

Esse limite da taxa média de variação quando Δt tende a zero é chamado de derivada da função $f(t)$ no ponto $t = 5$

Derivada de uma função em um Ponto

Seja $f(x)$ uma função e x_0 um ponto do seu domínio, ~~ch~~ chamamos de derivada de f no Ponto x_0, se existir e for finito, o limite dado por:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

indica-se a derivada de $f(x)$ no ponto x_0

Por $f'(x_0)$ ou ainda:

$$\frac{df}{dx}(x_0) \qquad \frac{dy}{dx}(x_0)$$

Qual a derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 3$?

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(3+\Delta x)^2 - 3^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (6 + \Delta x) = 6$$

$\boxed{\text{isso significa que um pequeno acréscimo } \Delta x \text{ dado a } x \text{, a partir de } x_0 = 3 \text{ acarretará um correspondente acréscimo } \Delta f \text{ que é aproximadamente 6 vezes maior que o acréscimo } \Delta x}$

Qual a derivada de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = -2$?

$$f(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x}$$

$$f(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-2+\Delta x)^2 - (-2)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (-4 + \Delta x) = -4$$

$\boxed{\text{isso significa que um pequeno acréscimo } \Delta x \text{ dado a } x \text{, a partir de } x_0 = -2 \text{, acarretará um correspondente decréscimo } \Delta f \text{ que é aproximadamente 4 vezes maior que o acréscimo } \Delta x \text{, em valor absoluto}}$

Qual a derivada da função $f(x) = |x|$ no ponto $x_0 = 0$?

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

Se Δx tende a 0 pela direita, então $\Delta x > 0$ e $|\Delta x| = \Delta x$ e, consequentemente, o limite vale 1

Se Δx tende a 0 pela esquerda, então $\Delta x < 0$ e $|\Delta x| = -\Delta x$ e, consequentemente, o limite vale -1

Como os limites laterais são diferentes, concluímos que não existe o limite para Δx tendendo a zero

Assim, não existe a derivada de $f(x)$ no ponto $x_0 = 0$

derivada da função constante

Se $f(x) = c$ (função constante), então $f'(x) = 0$

Para todo x.

Derivada da função de Potência

Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

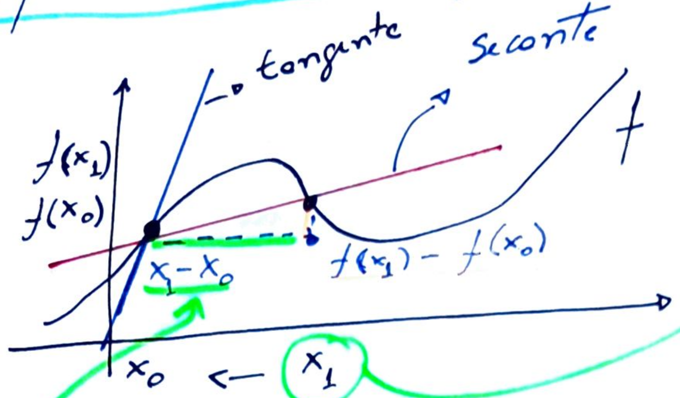
Derivada da função logarítmica

Se $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \frac{1}{x}$ (para $x > 0$)

Derivada da função seno e da função cosseno

Se $f(x) = \text{sen}\,x$, então $f'(x) = \cos x$ para todo x real

Se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = \text{sen}\,x$ para todo x



$$a = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Imagine que o x_1 tende a zero

Podemos traçar uma reta que corta a curva em apenas 1 ponto, então podemos calcular o coeficiente angular

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

$$\boxed{h = x_1 - x_0}$$

função derivada de x vai ser o limite onde o h tende a zero e $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Para calcular em qualquer campo da curva em uma função f qualquer

Seja a $f'(x)$ a derivada de $f(x)$

Se calcularmos a função derivada de $f'(x)$

ficaria $f''(x)$.

Para evitar colocar vários '' usamos a notação

$f^{(n)}(x)$ Derivadas Sucessivas

Funções Marginais

$C(x)$ $Cmg(x)$

$$C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}5x^2 + 300x + 100$$

$$Cmg(x) = C'(x) = 0{,}03x^2 - x + 300 \quad / \; x = 10$$

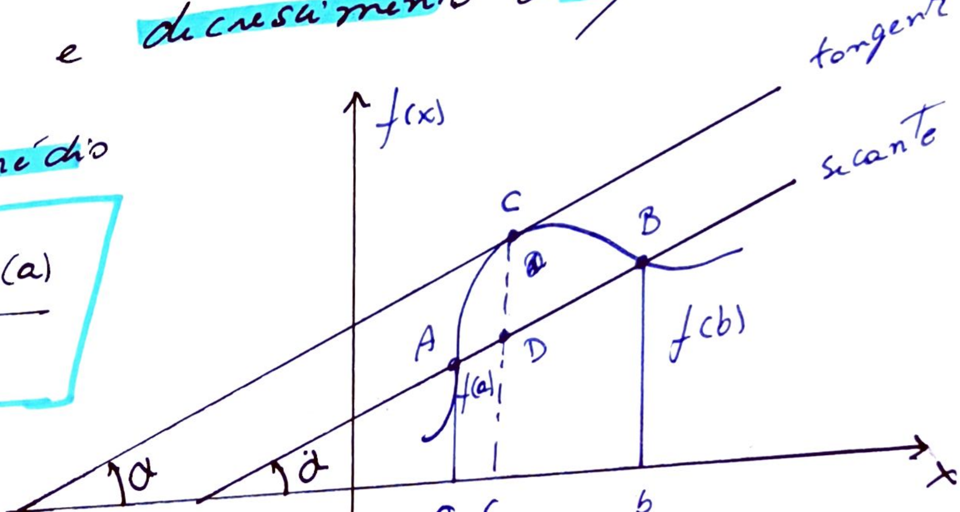
$$Cmg(10) = 0{,}03 \cdot (10)^2 - 10 + 300 = 293 \Rightarrow C(11) - C(10)$$

$$Cmg(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} \quad / \quad Cmg(x) \cong \Delta C = C(x+1) - C(x)$$

Crescimento e decrescimento de funções

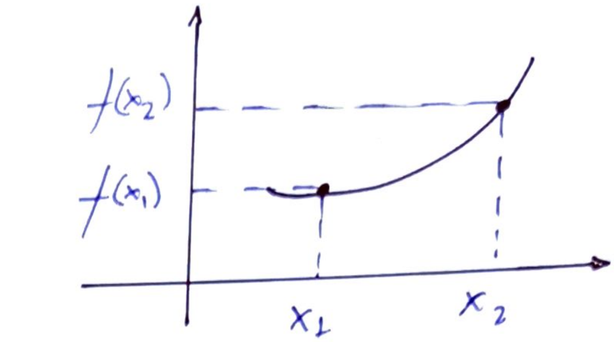
teorema valor médio

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}}$$



Quando precisa encontrar um ponto entre A - B no coeficiente angular

Se, para todo $x \in]a,b[$ tivermos $f'(x)>0$ então $f(x)$ é crescente em todo intervalo $]a,b[$



função de x será crescente em todo intervalo

$$\boxed{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0}$$

$f(x_2)-f(x_1)>0$ e, portanto,

$f(x_2)>f(x_1)$

Derivada = taxa de variação

Integral é o oposto da derivada, antiderivada

Deep Q learning = integral

Maximum likelihood Estimation em inferência Bayesiana

Expectation Maximization

teoria da Probabilidade

Integral Indefinida

Se $f(x)=\frac{x^5}{5}$, então $f'(x)=\frac{5x^4}{5}=x^4=g(x)$ é a derivada de $f(x)$. Uma das antiderivadas de $f(x)$

$$\boxed{f'(x)=g(x)=x^4 \text{ é } \frac{x^5}{5}}$$

Se $f(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2 = g(x)$
Uma das antiderivadas ou integrais indefinidas de $g(x) = 3x^2$ e $f(x) = x^3$.

Se $f(x) = x^3 + 4$, então $f'(x) = 3x^2 = g(x)$
Uma das antiderivadas ou integrais indefinidas de $g(x) = 3x^2$ é $f(x) = x^3 + 4$

Propriedades das integrais indefinidas

São imediatas as seguintes propriedades:

1º $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$, ou seja:
a integral da soma ou diferença é a soma ou diferença das integrais.

2º $\int K f(x)\, dx = K \int f(x)\, dx$ ou seja,
a constante multiplicativa pode ser retirada do integrando.

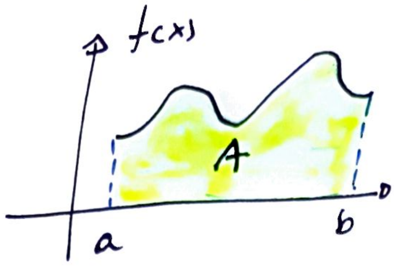
3º $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] = f(x)$, ou seja,
a derivada da integral de uma função é a própria função.

Integral definida

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)}$$

onde:

a é o limite inferior de integração
b é o limite superior de integração.
f(x) é o integrando



Assim, indicando por A a área destacada da figura ao lado, temos:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$