Frequências e Exames Lógica Computacional

Universidade de Évora, 22 de Abril de 2009

Frequência 1

Duração: 2 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 1 *Simbolize na linguagem da Lógica proposicional o argumento seguinte:*

> *Os bancos não têm dinheiro somente se há crise.*
> *Se a taxa de juros europeia desce os bancos têm dinheiro*
> *ou os emprestimos são mais baratos.*
> *Os emprestimos custam o mesmo.*
> *Portanto, os bancos têm dinheiro ou não há crise.*

Exercise 2 *Formalize o seguinte poema de Fernando Pessoa na Lógica dos predicados:*

> *Todas as cartas de amor são ridículas.*
> *Não seriam cartas de amor se não fossem ridículas.*
> *Também escrevi em meu tempo cartas de amor, como as outras, ridículas.*
> *As cartas de amor, se há amor, têm de ser ridículas.*
> *Mas, afinal, só as criaturas que nunca escreveram cartas de amor*
> *é que são ridículas.*

Utilize os símbolos seguintes:

Cx	x *é carta de amor*
Rx	x *é ridículo*
xEy	x *escreve* y
Ax	x *é amor*
i	*eu*

Exercise 3

1. *No âmbito de um conjunto de fórmulas dê uma definição da noção "compatível".*
2. *Dê um exemplo de um conjunto de fórmulas inconsistente.*
3. *Dê um exemplo de uma fórmula ("conjunto de formulas com um elemento") com duas letras proposicionais compatível, tal que a sua negação é também compatível.*

Exercise 4 *Sejam ϕ e ψ proposições.*

1. *Mostre que*
$$(\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\neg\phi \longrightarrow \neg\psi) \models \phi \longleftrightarrow \psi.$$

2. *Mostre que*
$$(\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\phi \longrightarrow \neg\psi) \vdash \neg\phi.$$

3. *Mostre a regra do absurdo $\perp$:*
$$\psi, \neg\psi \vdash \phi$$

4. *Mostre que*
$$\phi \vee \neg\psi \vdash \psi \longrightarrow \phi.$$

Exercise 5 *Seja Γ um conjunto consistente de fórmulas da linguagem da Lógica proposicional que tem a propriedade que, para qualquer fórmula ϕ,*

$$\Gamma \vdash \phi \textit{ implica } \phi \in \Gamma.$$

1. *Suponha-se que $\phi \in \Gamma$ e também $\psi \in \Gamma$ para certa fórmula ψ. Mostre que $\phi \wedge \psi \in \Gamma$. Mostre também o recíproco: Se $\phi \wedge \psi \in \Gamma$, então $\phi \in \Gamma$ e $\psi \in \Gamma$.*

2. *Suponha-se que $\phi \in \Gamma$. Porquê $\neg\phi \notin \Gamma$?*

Esquema de deduções na Dedução Natural:

Universidade de Évora, 1^0 de Julho de 2009.

Exame normal

Duração: 3 horas.

Justifique as respostas.

Exercícios comuns à segunda frequência e ao exame

Exercise 6 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x e R um símbolo de relação binária.*

1. *Mostre, utilizando a Dedução Natural*

$$\forall x(\phi(x) \to \psi(x)) \vdash \forall x\phi(x) \to \exists x\psi(x).$$

$$\forall x(\phi(x) \to \psi(x)), \exists x\phi(x) \vdash \exists x\psi(x).$$

$$\exists x\forall y(x \doteq y \to \forall x\forall y(x \doteq y).$$

2. *Mostre, utilizando tableaux semânticos*

$$(\neg\forall x(\phi(x) \to \psi(x))) \leftrightarrow \exists x(\phi(x) \wedge \neg\psi(x)).$$

$$\exists x\forall yRxy \vee \exists x\exists y(\neg Rxy).$$

Exercise 7 *Considere a fórmula da Lógica de primeira ordem*

$$\phi : \exists y\forall x(A(z) \to B(x, f(y))) \to \exists v\forall uB(u, v).$$

1. *Quais as variáveis livres e quais as variáveis mudas?*
2. *Indique os termos que ocorrem em ϕ.*
3. *Indique as subfórmulas de ϕ que são fórmulas atómicas.*
4. *Indique as subfórmulas de ϕ que são sentênças.*
5. *A fórmula ϕ é uma sentênça?*

Exercise 8 *Sejam ϕ e ψ proposições. Reduza a uma fórmula normal disjuntiva equivalente*

$$((\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \neg\psi)) \to \neg\phi.$$

Exercise 9 *Seja f um símbolo de função binário. Encontra uma estrutura com domínio $\mathbb{N}$ na qual a fórmula*

$$\forall y\exists x(y \doteq f(x, x))$$

não é válida.

Exercise 10 *1. No âmbito da lógica proposicional dê dois exemplos de conjuntos de conectivos funcionalmente completos.*

2. Dê um exemplo de uma fórmula com três literais que está na forma normal conjuntiva.

3. No âmbito da semântica da lógica de primeira ordem, que é uma atribuição?

Exercícios suplementares para o exame

Exercise 11 *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem o argumento seguinte:*

Todas as linhas ferroviárias de alta velocidade atravessam a fronteira.
Somente se uma linha ferroviária de alta velocidade atravessa a fronteira, atravessa o Tejo.
Se uma linha ferroviária de alta velocidade atravessa o Tejo é por um ponte novo ou por um túnel.
Não existe nem ponto novo, nem túnel.
Portanto, não há linha ferroviária de alta velocidade.

Utilize os símbolos seguintes:

Vx	*x é linha ferroviária de alta velocidade*
xAy	*x atravessa y.*
Px	*x é ponto novo*
Tx	*x é túnel*

Acresce símbolos de constantes, se necessário.

Exercise 12 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições.*

1. *Mostre que*
$$\phi \to (\psi \to \theta) \sim (\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta),$$
isto é, $\phi \to (\psi \to \theta)$ e $(\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta)$ são logicamente equivalentes dentro da Lógica proposicional.

2. *Mostre que*
$$(\phi \to \psi) \vdash (\phi \wedge \theta) \to (\psi \wedge \theta)).$$

Esquema de deduções na Dedução Natural:

$\wedge^+$	:	$\phi, \psi / \phi \wedge \psi$
$\wedge^-$	:	$\phi \wedge \psi / \phi$ e $\phi \wedge \psi / \psi$
$\neg^+$	:	$\phi[H] \cdots \psi \wedge \neg\psi / \neg\phi$
$\neg\neg^-$	:	$\neg\neg\phi / \phi$
$\rightarrow^+$	:	$\phi[H] \cdots \psi / \phi \rightarrow \psi$
$\rightarrow^-$	:	$\phi, \phi \rightarrow \psi / \psi$
$\vee^+$	:	$\phi / \phi \vee \psi$ e $\psi / \phi \vee \psi$
$\vee^-$	:	$\phi \vee \psi, \phi[H_1] \cdots \theta, \psi[H_2] \cdots \theta / \theta$
$\forall^+$	:	$\phi(a)/\forall x \phi(x)$ se $\phi(a)$ não é hpótese, nem depende de hipóteses em que a ocorre; substituição em todas as ocorrências de a em ϕ
$\forall^-$	:	$\forall x \phi(x)/\phi(t)$, com t termo qualquer; substituição em todas as occorências livres de x em $\phi(x)$
$\exists^+$	:	$\phi(t)/\exists x \phi(x)$, com t termo qualquer; substituição em algumas ocorrências t em ϕ
$\exists^-$	:	$\exists x \phi(x), \phi(a_0)[H] \cdots \psi/\psi$, a_0 não ocorre em ψ; substituição em todas as ocorrências livres de x em $\phi(x)$.
$\doteq^+$	:	$t \doteq t$, com t termo qualquer.
$\doteq^-$	:	$t_1 \doteq t_2, \phi(t_1)/\phi(t_2)$, com t_1, t_2 termos qualquer; substituição em algumas ocorrências de t_1 em ϕ.

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 1^0 de Julho de 2009.

Exame de recurso

Duração: 3 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 13 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições.*

1. *Mostre que*
$$\phi \to \psi \models ((\phi \vee \psi) \wedge \theta) \to ((\phi \vee (\psi \wedge \theta)).$$

2. *Mostre que*
$$\phi \vee \psi \vdash (\phi \to \psi) \to \psi.$$

3. *Mostre, utilizando tableaux semânticos*
$$\phi \to ((\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \psi).$$

Exercise 14 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x e R um símbol de relação binário.*

1. *Mostre, utilizando a Dedução Natural, que*
$$\exists x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \vdash (\exists x \phi(x) \wedge \exists x \psi(x)).$$
$$\exists x \exists y (x \doteq y).$$

2. *Mostre, utilizando tableaux semânticos, que*
$$\exists x \forall y Rxy \vee \exists x \exists y \neg Rxy.$$

Exercise 15 *Considere a fórmula da Lógica de primeira ordem*
$$\phi : \exists y \forall z (R(z, y) \leftrightarrow (R(z, x) \wedge (S(y) \to \exists u P(f(u))).$$

1. *Quais as variáveis livres e quais as variáveis mudas?*

2. *Indique os termos que ocorrem em ϕ.*

3. *Indique as subfórmulas de ϕ que são fórmulas atómicas.*

4. *Indique as subfórmulas de ϕ que são sentênças.*

5. *A fórmula ϕ é uma sentênça?*

Exercise 16 *Sejam α e β proposições. Reduza a uma fórmula normal disjuntiva equivalente*
$$((\neg\alpha \to \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)) \to \beta.$$

Exercise 17 *Seja S um símbolo de relação binário. Encontra uma estrutura com domínio $\mathbb{R}$ na qual a fórmula*

$$\forall x S(x, x)$$

não é válida.

Exercise 18

1. *Dê um exemplo de uma função booleana binária.*
2. *No âmbito da Lógica proposicional, dê o enunciado do Metateorema da Completude.*
3. *Dê o um exemplo de uma fórmula com dois literais consistente, sem ser uma lei lógica.*

Exercise 19 *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem com igualdade o argumento seguinte:*

> *Não existem jogadores de classe mundial que não são caros.*
> *Um jogador entra no Real Madrid somente se é de classe mundial.*
> *Existe um e só um jogador o mais caro.*
> *Portanto, o jogador o mais caro entra no Real Madrid.*

Utilize os símbolos seguintes:

Jx	*x é jogador*
Cx	*x é caro*
Mx	*x é de classe mundial*
xEy	*x entra em y*
xVy	*x custo mais que y*

Acresce símbolos de constantes, se possível. Em particular, exprima "ser o mais caro" em termos de "caro" e "custar mais que todos".

Esquema de deduções na Dedução Natural:

$\wedge^+$	:	$\phi, \psi/\phi \wedge \psi$
$\wedge^-$	:	$\phi \wedge \psi/\phi$ e $\phi \wedge \psi/\psi$
$\neg^+$	:	$\phi[H] \cdots \cdot \psi \wedge \neg\psi/\neg\phi$
$\neg\neg^-$	:	$\neg\neg\phi/\phi$
$\rightarrow^+$	:	$\phi[H] \cdots \cdot \psi/\phi \rightarrow \psi$
$\rightarrow^-$	:	$\phi, \phi \rightarrow \psi/\psi$
$\vee^+$	:	$\phi/\phi \vee \psi$ e $\psi/\phi \vee \psi$
$\vee^-$	:	$\phi \vee \psi, \phi[H_1] \cdots \cdot \theta, \psi[H_2] \cdots \cdot \theta/\theta$
$\forall^+$	:	$\phi(a)/\forall x\phi(x)$ se $\phi(a)$ não é hpótese, nem depende de hipóteses em que a ocorre; substituição em todas as ocorrências de a em ϕ
$\forall^-$	:	$\forall x\phi(x)/\phi(t)$, com t termo qualquer; substituição em todas as occorências livres de x em $\phi(x)$
$\exists^+$	:	$\phi(t)/\exists x\phi(x)$, com t termo qualquer; substituição em algumas ocorrências t em ϕ
$\exists^-$	:	$\exists x\phi(x), \phi(a_0)[H] \cdots \cdot \psi/\psi$, a_0 não ocorre em ψ; substituição em todas as ocorrências livres de x em $\phi(x)$.
$\doteq^+$	:	$t \doteq t$, com t termo qualquer.
$\doteq^-$	:	$t_1 \doteq t_2, \phi(t_1)/\phi(t_2)$, com t_1, t_2 termos qualquer; substituição em algumas ocorrências de t_1 em ϕ.

Universidade de Évora, 18 de Novembro de 2009

Frequência 1

Duração: 2 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 20 *1. Mostre que*

$$\phi \to \theta, \psi \to \theta \models (\phi \vee \psi) \to \theta.$$

2. Investigue se

$$(\phi \wedge \psi) \to \theta \models (\phi \to \theta) \wedge (\psi \to \theta).$$

Exercise 21 *Sejam ϕ, ψ e θ fórmulas. Mostre a partir das regras da Dedução Natural:*

1.

$$\phi \leftrightarrow \psi \vdash (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)).$$

2.

$$\phi \to \psi \vdash (\theta \vee \phi) \to (\theta \vee \psi).$$

3.

$$\vdash \neg\phi \to (\phi \to \psi).$$

Regras da Dedução Natural:

$$\begin{array}{lll}
\wedge^+ & : & \phi, \psi / \phi \wedge \psi \\
\wedge^- & : & \phi \wedge \psi / \phi \text{ e } \phi \wedge \psi / \psi \\
\neg^+ & : & \phi[H] \cdots \cdot \psi \wedge \neg\psi / \neg\phi \\
\neg\neg^- & : & \neg\neg\phi / \phi \\
\to^+ & : & \phi[H] \cdots \cdot \psi / \phi \to \psi \\
\to^- & : & \phi, \phi \to \psi / \psi \\
\vee^+ & : & \phi / \phi \vee \psi \text{ e } \psi / \phi \vee \psi \\
\vee^- & : & \phi \vee \psi, \phi[H_1] \cdots \cdot \theta, \psi[H_2] \cdots \cdot \theta / \theta \\
\leftrightarrow^+ & : & \phi \to \psi \ , \psi \to \phi / \phi \leftrightarrow \psi \\
\leftrightarrow^- & : & \phi \leftrightarrow \psi / \phi \to \psi \text{ e } \phi \leftrightarrow \psi / \psi \leftrightarrow \phi
\end{array}$$

Exercise 22 *1. Seja ϕ uma fórmula. Suponha-se que o conjunto $\{\phi\}$ é compatível. O conjunto $\{\phi\}$ é consistente? Indicação: Supondo pelo absurdo que $\phi \vdash \psi \wedge \neg\psi$, mostre que $\phi \models \psi \wedge \neg\psi$; se v é uma valoração booleana, qual o valor de $v(\phi)$? Mostre que a sua conclusão leva a uma contradicção.*

2. *Dê a definição da noção de tautologia.*

3. *Dê um exemplo de uma lei lógica com uma letra proposicional.*

Exercise 23 *Seja Γ um conjunto de fórmulas da linguagem da Lógica proposicional que tem a propriedade que, para qualquer fórmula α,*

$$\Gamma \vdash \alpha \textit{ implica } \Gamma \models \alpha.$$

Sejam ϕ e ψ duas fórmulas tais que $\Gamma \vdash \neg\phi$ ou $\Gamma \vdash \psi$. Mostre que $\Gamma \models \phi \to \psi$.

Exercise 24 *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem com igualdade $=$:*

Alguma partida tem maioria absoluta.
Uma partida com maioria absoluta tem mais votos qua todas as outras.
Uma partida com maioria absoluta é única.
Somente se a há várias partidas, há partidas sem maioria absoluta.

Utilize os símbolos seguintes:

Px	*x é partida*
Ax	*x tem maioria absoluta*
xMy	*x tem mais votos que y*

Exercise 25 *Quatro pessoas A, B, C e D fizeram as seguintes declarações:*

A: B fez .
B: C fez.
C: eu não fiz.
D: B mentiu.

Utilize os símbolos de proposições:

β	*B fez*
γ	*C fez*

1. *Simbolize as quatro declarações.*

2. *Supondo que exactamente uma das quatro declarações seja verdade, quem fez?*

3. *Supondo que exactamente uma das quatro declarações seja falsa, quem fez?*

Universidade de Évora, 25 de Janeiro de 2010.

Frequência2/Exame normal

Duração: 2 horas/3 horas.

Justifique as respostas.

Exercícios comuns à segunda frequência e ao exame

Exercise 26 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x e f um símbolo de função binária.*

1. *Mostre, utilizando a Dedução Natural*

$$\forall x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \forall x\phi(x) \wedge \exists x\psi(x).$$

$$\forall x(\phi(x) \vee \psi(x)), \exists x\neg\phi(x) \vdash \exists x\psi(x).$$

$$\forall x\forall y(x \doteq y) \to \forall x\forall y(fxy \doteq fyx).$$

   Indicação: Introduza $fab \doteq fab$ (qual a regra aplicada?) e utiliza por exemplo o teorema de simetria de $\doteq$.

2. *Utilizando tableaux semânticos, investigue se as fórmulas*

$$(\neg(\phi \to \psi)) \leftrightarrow (\phi \wedge \neg\psi)$$

$$(\phi \to \psi) \to (\psi \to \phi)$$

   são tautologias.

Exercise 27 *Considere a fórmula da Lógica de primeira ordem*

$$\phi : \forall x\exists y\forall z(Ezy \leftrightarrow Ezx \wedge Cfz).$$

1. *Indique os termos que ocorrem em ϕ.*
2. *Indique os símbolos de relação que ocorrem em ϕ. Para cada símbolo de relação, indique a aridade.*
3. *Indique as fórmulas atómicas que ocorrem em ϕ.*
4. *Indique as subfórmulas de ϕ que são nem fórmulas atómicas, nem sentênças.*
5. *A fórmula ϕ é uma sentênça?*

Exercise 28 *Sejam ϕ e ψ proposições. Reduza a uma fórmula normal conjuntiva equivalente*

$$(\phi \vee \psi) \rightarrow ((\phi \wedge \psi) \rightarrow \neg\phi).$$

Exercise 29 *Sejam P e Q símbolos de relação unários. Encontra uma estrutura $\mathcal{A}$ com domínio $\mathbb{R}$ na qual a fórmula*

$$\forall x(Px \rightarrow \neg Qx)$$

não é válida e uma estrutura $\mathcal{B}$ com domínio $\mathbb{R}$ na qual esta fórmula é válida.

Exercise 30

1. *No âmbito da lógica proposicional dê um exemplo de um conectivo generalizado que é funcionalmente completo.*
2. *Seja Σ um conjunto de fórmulas da lógica de primeira ordem e ϕ uma fórmula individual da lógica de primeira ordem. Que significa $\Sigma \models \phi$?*

Exercícios suplementares para o exame

Exercise 31 *Utiliza os símbolos seguintes:*

Ox	*x é orçamento*
Ax	*x é taxa de juros actual*
Fx	*x é taxa de juros futuro*
Dx	*x está em défice*
xEy	*x empreste a y*
$x > y$	*x é major do que y.*
g	*governo*

1. *Exprime "as taxas de juros sobem" utilizando os símbolos A, F e $>$.*
2. *Exprime "o governo faz expréstimos" utilizando os símbolos g e E.*
3. *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem as sentenças:*

   Todos os orçamentos estão em défice.
   Somente se os orçamentos estão em défice, o governo faz empréstimos.
   Se o governo faz empréstimos, as taxas de juros sobem.
   Se as taxas de juros sobem, o governo faz empréstimos e todos os orçamentos estão em défice.

Exercise 32 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições.*

1. *Investigue se a seguinte fórmula é uma tautologia:*

$$(\phi \rightarrow (\psi \wedge \theta)) \longleftrightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \vee (\phi \rightarrow \theta)).$$

2. *Mostre que*

$$(\phi \vee \psi) \wedge \theta \vdash (\phi \wedge \theta) \vee (\psi \wedge \theta)).$$

Esquema de deduções na Dedução Natural:

$\wedge^+$	:	$\phi/\phi \wedge \psi$
$\wedge^-$	:	$\phi \wedge \psi/\phi$ e $\phi \wedge \psi/\psi$
$\neg^+$	:	$\phi[H] \cdots \cdot \psi \wedge \neg\psi/\neg\phi$
$\neg\neg^-$	:	$\neg\neg\phi/\phi$
$\rightarrow^+$	:	$\phi[H] \cdots \cdot \psi/\phi \rightarrow \psi$
$\rightarrow^-$	:	$\phi, \phi \rightarrow \psi/\psi$
$\vee^+$	:	$\phi/\phi \vee \psi$ e $\psi/\phi \vee \psi$
$\vee^-$	:	$\phi \vee \psi, \phi[H_1] \cdots \cdot \theta, \psi[H_2] \cdots \cdot \theta/\theta$

$\forall^+$	:	$\phi(a)/\forall x \phi(x)$ se $\phi(a)$ não é hipótese, nem depende de hipóteses em que a ocorre; substituição em todas as ocorrências de a em ϕ
$\forall^-$	:	$\forall x \phi(x)/\phi(t)$, com t termo qualquer; substituição em todas as occorências livres de x em $\phi(x)$
$\exists^+$	:	$\phi(t)/\exists x \phi(x)$, com t termo qualquer; substituição em algumas ocorrências t em ϕ
$\exists^-$	:	$\exists x \phi(x), \phi(a_0)[H] \cdots \cdot \psi/\psi$, a_0 não ocorre em ψ; substituição em todas as ocorrências livres de x em $\phi(x)$.
$\doteq^+$	:	$t \doteq t$, com t termo qualquer.
$\doteq^-$	:	$t_1 \doteq t_2, \phi(t_1)/\phi(t_2)$, com t_1, t_2 termos qualquer; substituição em algumas ocorrências de t_1 em ϕ.

Universidade de Évora, 8 de Fevereiro de 2010.

Exame de recurso

Duração: 3 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 33 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições. Mostre que*

$$\phi \wedge \psi \models ((\phi \vee \psi) \rightarrow \theta) \rightarrow (\psi \wedge \theta).$$

As fórmulas $\phi \wedge \psi$ e $((\phi \vee \psi) \rightarrow \theta) \rightarrow (\psi \wedge \theta)$ são logicamente equivalentes?

Exercise 34 *Mostre que*

$$\begin{array}{rl} \vdash & ((\phi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg\phi \\ \phi \vee \psi \vdash & \neg\phi \rightarrow \psi. \end{array}$$

Exercise 35 *Utilizando tableaux semânticos investigue se*

$$\phi \vee ((\phi \wedge \psi) \leftrightarrow \psi)$$

é uma tautologia.

Exercise 36 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x e f um símbolo de função unário. Mostre, utilizando a Dedução Natural, que*

$$\forall x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \exists x \phi(x) \wedge \forall y \psi(y).$$

$$\vdash \exists x \exists y(x \doteq y) \rightarrow \exists x \exists y(fx \doteq fy).$$

Exercise 37 *Sejam α e β proposições.*

1. *Reduza a uma fórmula normal disjuntiva equivalente*

$$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\alpha \rightarrow \beta).$$

2. *Obtenha uma fórmula equivalente, que é uma simplificação significativa.*

Exercise 38 *Seja f um símbolo de função unário e p um símbolo de função binário. Seja C um símbolo de constante. Na estrutura $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, S, +, 1)$ a interpretação de C é 1, a interpretação de p é a adição + e a interpretação de f é a função $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $S(x) = x + 1$.*

1. *Investigue se $\mathcal{M} \models \forall x(fx = pxC)$.*
2. *Investigue se $\mathcal{M} \models \exists x(fffx = pCC)$.*

Exercise 39

1. *No âmbito da Lógica de primeira ordem, dê um exemplo de uma fórmula atómica.*
2. *No âmbito da Lógica de primeira ordem, dê um exemplo de uma fórmula que nem é atómica, nem é uma sentença.*
3. *No âmbito da Lógica proposicional, dê o enunciado do Metateorema de Válidade.*
4. *Dê um exemplo de uma fórmula com dois literais incompatível.*

Exercise 40 *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem as seguintes afirmações.*

As páginas web são brancas ou têm cores.
Existem pessoas que procuram páginas web com cores.
Google procura páginas web.
Nenhuma pessoa procura todas as páginas web.

Esquema de deduções na Dedução Natural:

$\wedge^+$	:	$\phi/\phi \wedge \psi$
$\wedge^-$	:	$\phi \wedge \psi/\phi$ e $\phi \wedge \psi/\psi$
$\neg^+$	:	$\phi[H] \cdots \psi \wedge \neg\psi/\neg\phi$
$\neg\neg^-$	:	$\neg\neg\phi/\phi$
$\rightarrow^+$	:	$\phi[H] \cdots \psi/\phi \rightarrow \psi$
$\rightarrow^-$	:	$\phi, \phi \rightarrow \psi/\psi$
$\vee^+$	:	$\phi/\phi \vee \psi$ e $\psi/\phi \vee \psi$
$\vee^-$	:	$\phi \vee \psi, \phi[H_1] \cdots \theta, \psi[H_2] \cdots \theta/\theta$

$\forall^+$	:	$\phi(a)/\forall x\phi(x)$ se $\phi(a)$ não é hipótese, nem depende de hipóteses em que a ocorre; substituição em todas as ocorrências de a em ϕ
$\forall^-$	:	$\forall x\phi(x)/\phi(t)$, com t termo qualquer; substituição em todas as occorências livres de x em $\phi(x)$
$\exists^+$	:	$\phi(t)/\exists x\phi(x)$, com t termo qualquer; substituição em algumas ocorrências t em ϕ
$\exists^-$	:	$\exists x\phi(x), \phi(a_0)[H] \cdots \psi/\psi$, a_0 não ocorre em ψ; substituição em todas as ocorrências livres de x em $\phi(x)$.
$\doteq^+$	:	$t \doteq t$, com t termo qualquer.
$\doteq^-$	:	$t_1 \doteq t_2, \phi(t_1)/\phi(t_2)$, com t_1, t_2 termos qualquer; substituição em algumas ocorrências de t_1 em ϕ.

Universidade de Évora, ano 2011, 25 de Maio

Frequência 1

Duração: 2 horas

Exercise 41 1. *Sejam* p, q, m *proposições. Mostre que*

$$(p \wedge q) \longrightarrow m \models (p \wedge \neg m) \longrightarrow \neg q.$$

2. *Interprete a consequência acima na lingua natural.*

3. *Investigue se*

$$p \longrightarrow q \models \neg p \longrightarrow \neg q.$$

Exercise 42 *Sejam* p, q *e* r *proposições. Mostre que*

$$\begin{array}{rcl} p \vee q & \vdash & \neg(\neg p \wedge \neg q) \\ \neg p & \vdash & (p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow \neg q) \\ p & \rightarrow & q \vdash (p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r) . \end{array}$$

Exercise 43 1. *No âmbito da Lógica proposicional, que é uma lei lógica, e que é um conjunto de fórmulas inconsitente?*

2. *Sejam* p *e* q *letras proposicionais. Investigue se*

$$\psi : (p \leftrightarrow q) \longleftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$$

é incompatível.

Exercise 44 *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem com igualdade o argumento seguinte:*

Não existem jogadores de classe mundial que não são caros.
Um jogador entra no Real Madrid somente se é de classe mundial.
Existe um e só um jogador o mais caro.
Portanto, o jogador o mais caro entra no Real Madrid.

Utilize os símbolos seguintes:

Jx	x *é jogador*
Cx	x *é caro*
Mx	x *é de classe mundial*
xEy	x *entra em* y
xVy	x *custo mais que* y

Acresce símbolos de constantes, se possível. Em particular, exprima "ser o mais caro" em termos de "caro" e "custar mais que todos".

Esquema de deduções na Dedução Natural:

$$
\begin{array}{lcl}
\wedge^{+} & : & \phi, \psi / \phi \wedge \psi \\
\wedge^{-} & : & \phi \wedge \psi / \phi \text{ e } \phi \wedge \psi / \psi \\
\neg^{+} & : & \phi[H] \cdots \cdot \psi \wedge \neg\psi / \neg\phi \\
\neg\neg^{-} & : & \neg\neg\phi / \phi \\
\longrightarrow^{+} & : & \phi[H] \cdots \cdot \psi / \phi \longrightarrow \psi \\
\longrightarrow^{-} & : & \phi, \phi \longrightarrow \psi / \psi \\
\vee^{+} & : & \phi / \phi \vee \psi \text{ e } \psi / \phi \vee \psi \\
\vee^{-} & : & \phi \vee \psi, \phi[H_1] \cdots \cdot \theta, \psi[H_2] \cdots \cdot \theta / \theta
\end{array}
$$

Universidade de Évora, 4^0 de Julho de 2011.

Exame normal

Duração: $2+1$ horas.

Justifique as respostas.

Exercícios comuns à segunda frequência e ao exame

Exercise 45 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x e R um símbolo de relação binária.*

1. *Mostre, utilizando a Dedução Natural*

$$\forall x(\phi(x) \to \neg\psi(x)) \wedge \forall x \neg\psi(x) \vdash \forall x \neg\phi(x)$$

$$\exists x(\phi(x) \to \psi(x)) \vdash \forall x \phi(x) \to \exists x \psi(x)$$

$$\exists x \forall y(x \doteq y) \vdash \forall y \exists x(x \doteq y).$$

2. *Utilizando tableaux semânticos, investigue se as seguintes fórmulas são tautologias.*

$$(p \to q) \to (\neg(m \wedge q) \to \neg(m \wedge p))$$

$$(p \to q) \to ((p \vee q) \wedge \neg p).$$

Exercise 46 *Considere a fórmula da Lógica de primeira ordem*

$$\phi : \exists u \forall v Buv \wedge \exists y \forall x(Agxy \leftrightarrow Bfxgyy) \vee Cz.$$

1. *Indique os termos que ocorrem em ϕ.*
2. *Determine a aridade (número das variáveis envolvidadas) dos símbolos de predicados A, B e C.*
3. *Quais as variáveis livres e quais as variáveis mudas?*
4. *Indique as subfórmulas de ϕ que são fórmulas atómicas.*
5. *Indique as subfórmulas de ϕ que são sentênças.*
6. *A fórmula ϕ é uma sentênça?*

Exercise 47 *Sejam ϕ e ψ proposições. Reduza a uma fórmula normal disjuntiva equivalente*

$$(\phi \to \psi) \wedge (\neg\phi \to \neg\psi)$$

Exercise 48 *Seja A um símbolo de relação binário. Encontra uma estrutura com domínio $\mathbb{R}$ na qual a fórmula*

$$\exists x \forall y Axy$$

não é válida.

Exercise 49

1. *No âmbito da lógica proposicional, que é um literal?*
2. *Dê o enunciado do metateorema de completude para a lógica de primeira ordem.*
3. *No âmbito da semântica da lógica de primeira ordem, que é uma fórmula válida?*

Exercícios suplementares para o exame

Exercise 50 *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem com igualdade as seguinte afirmações:*

Todos os ministros têm um secretário de estado.
O Presidente não tem um secretário de estado.
Todos os ministros são subordenados a um ministro e o Presidente.
Um secretário de estado é subordenado a um só ministro.

Utilize os símbolos seguintes:

Mx	*x é ministro*
Sxy	*x é secretário de estado de y*
Oxy	*x é subordenado a y*

Acresce símbolos de constantes, se necessário.

Exercise 51 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições.*

1. *Investigue se*

$$\alpha : (\neg(\phi \leftrightarrow \psi)) \leftrightarrow ((\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \wedge \psi),$$

   é uma tautologia..

2. *Mostre que*

$$(\phi \wedge \psi) \rightarrow \theta \vdash (\phi \wedge \neg\theta) \rightarrow (\neg\psi).$$

3. *É verdade que $\alpha \vDash \phi \vee \psi$?*
4. *Dê um exemplo de uma fórmula da Lógica proposicional inconsistente, utilizando unicamente os conectivos $\neg$ e $\vee$.*

Universidade de Évora, 13 de Julho de 2011.

Exame de recurso

Duração: 3 horas

Justifique as respostas

Exercise 52 *Sejam p, q, m proposições. Mostre que*

$$\begin{aligned} p \wedge q \quad &\vdash \quad (p \vee m) \wedge (q \vee m) \\ (p \quad &\rightarrow \quad m) \vee (q \rightarrow m) \vdash (p \wedge q) \rightarrow m. \end{aligned}$$

Exercise 53 *Sejam p e q proposições. Mostre, utilizando o método dos tablaux semânticos que*

$$(p \wedge q) \quad \leftrightarrow \quad \neg((q \rightarrow p) \rightarrow \neg q).$$

é uma tautologia.

Exercise 54 *Sejam p e q proposições. Investigue se*

$$p \rightarrow q \models \neg p \rightarrow \neg q.$$

Exercise 55 *A e B são predicados unários.*

1. *Mostre que*
$$\forall x(Ax \rightarrow Bx) \vdash \exists x Ax \rightarrow \exists x Bx.$$

2. *Mostre que*
$$\vdash \exists x(Ax \wedge Bx) \rightarrow (\forall x Ax \rightarrow \exists x Bx).$$

Exercise 56 *As letras x e y indicam variáveis, a maiúscula B designa um predicado unário e a maiúscula C designa uma relação binária. Consideramos as seguintes expressões. Elas são gramaticalmente correctas (construidas respeitando as regras de formação de fórmulas) ou incorrectas? No caso de serem gramaticalmente correctas, indique as variáveis livres e as variáveis mudas, e as subformulas atómicas.*

1. $\exists x Bx \rightarrow \exists B$
2. $\forall y \forall x(Cxy \vee By)$
3. $\forall y(By \rightarrow BC)$
4. $\exists x(Cxy \vee x)$
5. $\forall y By \rightarrow \exists x Cxy$

Exercise 57

1. *No âmbito da Lógica proposicional, que é uma lei lógica?*

2. *Sejam p e q letras proposicionais. Investigue se*

$$\psi : (\neg p \leftrightarrow \neg q) \longleftrightarrow ((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q))$$

é incompatível.

3. *Dê um exemplo de uma fórmula da Lógica proposicional que está na Forma Normal Disjuntiva, com pelo menos três literais e pelo menos dois símbolos de disjunção.*

4. *No âmbito da Lógica de primeira ordem, dê um exemplo de um termo com dois símbolos de funções e duas variáveis.*

Exercise 58 *Consideramos a linguagem da Lógica da primeira ordem com igualdade, com os símbolos não-lógicos*

$$\mathcal{L} \equiv \{c, \oplus\}.$$

Aqui c é um símbolo de constante e $\oplus$ é um símbolo de função binário. Escrevemos V o conjunto das variáveis. Consideramos a estrutura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}; 1, \cdot)$ (1 é a unidade habitual, $\cdot$ é a multiplicação habitual;. Seja ϕ a fórmula

$$\phi : x \oplus y \doteq c.$$

1. *Dê uma atribução $s : V \longrightarrow \mathbb{N}$, de modo que $\mathcal{N} \models \phi[s]$.*

2. *A sentença $\forall x \exists y \phi$ é valida em $\mathcal{N}$?*

3. *A sentença $\exists x \exists y \phi$ é valida em $\mathcal{N}$?*

Exercise 59 *Simbolize as seguintes afirmações numa linguagem da Lógica de primeira ordem com igualdade. Utilize as seguintes letras: Cx "x é uma casa", Gx "x é grande", Px "x é pequeno", Cxy "x é mais caro que y".*

1. *Existem casas pequenas.*

2. *Uma casa é pequena ou é grande.*

3. *Casas grandes são mais caras que casas pequenas*

4. *Algumas casas são mais caras que outras.*

5. *Existe uma casa a mais cara.*

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 16 de Abril de 2012

Frequência 1

Duração: 2 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 60 *Simbolize na linguagem da Lógica proposicional as seguintes afirmações.*

Se chover, a relva cresce ou há cheias.
Há cheias somente se há chuvas.
A relva cresce, excepto se não chover.

Exercise 61 *Simbolize na Lógica dos predicados:*

Telemóveis são pequenos.

Alguns computadores portáteis não são pequenos.

Alguns telemóveis são mais baratos que todos os computadores portáteis

Algum telemóvel é o mais barato.

Exercise 62

1. *No âmbito de um conjunto de fórmulas dê uma definição da noção "consistente".*
2. *Dê um exemplo de um conjunto de fórmulas incompatível.*
3. *Dê um exemplo de uma tautologia com duas letras proposicionais.*

Exercise 63 *Sejam ϕ e ψ proposições.*

1. *Mostre que*
$$\phi \longrightarrow \neg\psi \vdash \neg(\psi \wedge \phi).$$
2. *Mostre que*
$$\phi \vee \neg\neg\psi \vdash \psi \vee \phi.$$
3. *Mostre que*
$$(\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\neg\phi \longrightarrow \neg\psi) \vdash \phi \longleftrightarrow \psi.$$
4. *Investigue se*
$$\begin{aligned}(\phi \wedge \psi) \quad &\longrightarrow \quad \theta \models \phi \longrightarrow (\neg\psi \vee \theta).\\ \neg\theta \quad &\longrightarrow \quad (\neg\psi \vee \neg\phi) \models (\psi \vee \phi) \longrightarrow \theta.\end{aligned}$$

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 31 de Maio de 2012.

Frequência 2

Duração: 2 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 64 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x. Mostre, utilizando a Dedução Natural*

$$\forall x(\phi(x) \to \psi(x)), \forall x \neg\psi(x) \vdash \forall x \neg\phi(x)$$

$$\exists x(\neg\phi(x) \vee \psi(x)) \vdash \forall x \phi(x) \to \exists x \psi(x)$$

$$\vdash \exists x \exists y (x \doteq y).$$

Exercise 65 *Sejam p, q e m proposições. Utilizando tableaux semânticos, investigue se as seguintes fórmulas são tautologias.*

$$((p \to m) \to q) \to ((p \wedge m) \to q))$$

$$(p \to m \vee q \to m) \to ((p \vee q) \to m).$$

Exercise 66 *Sejam ϕ e ψ proposições. Reduza a uma fórmula normal disjuntiva equivalente*

$$(\phi \to \neg\psi) \to \neg\phi.$$

Exercise 67 *Considere a fórmula da Lógica de primeira ordem com os símbolos de funções f, g e h, e o constante c*

$$\phi : \forall y \forall x (Pgxxhy \to Qfgxy) \wedge \exists u \forall v Ruvc.$$

1. *Indique os termos que ocorrem em ϕ.*
2. *Determine a aridade (número das variáveis envolvidadas) dos símbolos de predicados P, Q e R.*
3. *Quais as variáveis livres e quais as variáveis mudas?*
4. *Indique as subfórmulas de ϕ que são fórmulas atómicas.*
5. *Indique as subfórmulas de ϕ que são sentênças.*
6. *A fórmula ϕ é uma sentênça?*

Exercise 68 *Consideremos a linguagem $\mathcal{L} = \{P, c\}$, onde P é um símbolo de relação binário e c é um símbolo de constante. Seja ϕ a fórmula*

$$\phi : \forall x (Pxc \to \neg x \doteq c).$$

Encontre uma estrutura adequada para a linguagem $\mathcal{L}$ do tipo $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, P^{\mathfrak{N}}, c^{\mathfrak{N}})$, que satisfaz ϕ.

Exercise 69

1. *Dê um exemplo de uma fórmula da lógica de primeira ordem com pelo menos um quantificador que é inconsistente.*

2. *Sejam ϕ e ψ duas sentenças da lógica de primeira ordem. Qual é o critério para que ψ seja consequência lógica de ϕ?*

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 14 de Junho de 2012.

Exame normal

Duração: 3 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 70 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições.*

1. *Investigue se a seguinte fórmula é uma tautologia:*

$$(\phi \wedge (\psi \rightarrow \theta)) \longleftrightarrow ((\phi \wedge \neg\psi) \vee (\psi \wedge \theta)).$$

2. *Mostre que*

$$\phi \vee \psi \vdash \neg\phi \rightarrow \psi$$

3. *Mostre que*

$$(\phi \vee \psi) \rightarrow \theta, \neg\theta \vdash \neg\phi \wedge \neg\psi.$$

Indicação: Pode-se introduzir ϕ e ψ sucessivamente como hipótese.

Exercise 71 *Utilizando tableaux semânticos, investigue se a fórmula*

$$(\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \vee \neg\psi)$$

é uma tautologia.

Exercise 72 *Sejam ϕ e ψ proposições. Reduza a uma Forma Normal Disjuntiva equivalente*

$$\phi \rightarrow ((\phi \vee \psi) \rightarrow \neg\phi).$$

Exercise 73 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x e R um símbolo de relação binária. Mostre, utilizando a Dedução Natural*

$$\forall x(\neg\phi(x) \rightarrow \neg\psi(x)) \vdash \forall x\psi(x) \rightarrow \forall x\phi(x)$$

$$\forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \vdash \neg\exists x(\phi(x) \wedge \neg\psi(x))$$

$$\forall x\forall y(y \doteq x) \vdash \forall x\forall y(Rxy \rightarrow Rxx).$$

Exercise 74 *Sejam P e Q símbolos de relação unários. Encontre uma estrutura $\mathcal{A}$ na qual a fórmula*

$$\exists x(Px \wedge \neg Qx)$$

é válida e uma estrutura $\mathcal{B}$ na qual esta fórmula não é válida.

Exercise 75 *Considere a fórmula da Lógica de primeira Ordem*

$$\phi : \forall x(Bugxx \vee Ax \wedge \exists y(Afy \leftrightarrow \forall zByz)).$$

1. *Indique os termos que ocorrem em ϕ.*
2. *Indique os símbolos de relação que ocorrem em ϕ. Para cada símbolo de relação, indique a aridade.*
3. *Indique as fórmulas atómicas que ocorrem em ϕ.*
4. *Indique as subfórmulas de ϕ que são sentênças.*
5. *A fórmula ϕ é uma sentênça?*

Exercise 76 1. *No âmbito da Lógica proposicional, qual a Lei do Terceiro Excluido?*

2. *Que são valorações booleanas?*
3. *Seja Σ um conjunto de fórmulas da Lógica proposicional e ϕ uma fórmula da Lógica proposicional. Sabe-se que $\Sigma \cup \{\phi\}$ é consistente. $\Sigma \cup \{\phi\}$ é compatível? É correto que $\Sigma \models \neg\phi$? Justifique as suas respostas.*

Exercise 77 *Utiliza os símbolos seguintes:*

A	*ser azulejo*
Z	*ser azul*
V	*ser vermelho*
P	*ser português*
B	*ser mais bonito do que*

Simbolize na linguagem da Lógica da primeira Ordem:

1. *Todos os azulejos portugueses são azuis.*
2. *Alguns azulejos são vermelhos.*
3. *Azulejos são vermelhos ou azuis.*
4. *Azulejos azuis são mais bonitos do que azulejos vermelhos.*

   Interprete na língua usual:

5. $\forall x \forall y((Ax \wedge Ay \wedge Bxy) \rightarrow Px)$.

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 11 de Setembro de 2012.

Exame de época especial

Duração: 3 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 78 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições.*

1. *Investigue se a seguinte fórmula é uma tautologia:*
$$(\phi \wedge (\psi \vee \theta)) \leftrightarrow ((\neg\phi \vee \neg\psi) \rightarrow (\phi \wedge \theta)).$$
2. *Mostre que*
$$\phi \wedge \neg\psi \vdash \neg(\phi \rightarrow \psi).$$
3. *Mostre que*
$$\phi \vee \neg\psi \vdash \neg(\neg\phi \wedge \psi).$$

Exercise 79 *Utilizando tableaux semânticos, investigue se a fórmula*
$$((\phi \wedge \psi) \rightarrow \theta) \rightarrow (\neg\theta \rightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi))$$
é uma tautologia.

Exercise 80 *Sejam ϕ e ψ proposições. Reduza a uma Forma Normal Disjuntiva equivalente*
$$\neg\phi \rightarrow ((\phi \vee \neg\psi) \rightarrow \psi)\,.$$

Exercise 81 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x. Mostre, utilizando a Dedução Natural*
$$\forall x(\neg\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \vdash \forall x \neg\psi(x) \rightarrow \forall x \phi(x)$$
$$\exists x(\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \vdash \neg\forall x(\phi(x) \wedge \neg\psi(x)).$$

Exercise 82 *Encontre uma estrutura $\mathcal{A}$ na qual a fórmula*
$$\sigma : \exists x P x \rightarrow \forall x P x$$
é válida, qualquer seja P um predicado unário, e uma estrutura $\mathcal{B}$ na qual a fórmula σ não é válida.

Exercise 83 *Sejam u uma variável e f e g símbolos de função e P e Q símbolos de relação. Considere a fórmula da Lógica de primeira Ordem*

$$\phi : \forall x((Afxxu \vee Bguux) \rightarrow \exists y(Ayyy \leftrightarrow \forall zByz)).$$

1. *Investigue a aridade dos símbolos de função e de relação.*

2. *Indique os termos que ocorrem em ϕ.*

3. *Indique as fórmulas atómicas que ocorrem em ϕ.*

4. *Indique as subfórmulas de ϕ que são sentênças.*

5. *A fórmula ϕ é uma sentênça?*

Exercise 84
1. *O conjunto de fórmulas $\{\phi, \neg\phi \leftrightarrow \psi, \phi \rightarrow (\neg\psi \vee \neg\phi)\}$ é compatível? Este conjunto é consistente?*

2. *Dé o enunciado do Metateorema de Completude no âmbito da Lógica proposicional.*

Exercise 85 *Utilize os símbolos seguintes:*

F	*ser frio*
O	*ser onda*
Q	*ser quente*
V	*ser vento*

Simbolize na linguagem da Lógica da primeira Ordem:

1. *Ondas são frias ou quentes.*

2. *O vento cria ondas.*

3. *Ondas nunca são quentes.*

4. *Somente se há vento frio, as ondas são frias.*

   Interprete na língua usual:

5. $\neg\exists x\exists y(Ox \wedge Fx \wedge \neg Vy)$.

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 22 de Abril de 2013

Frequência 1

Duração: 2 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 86 *Simbolize na linguagem da Lógica proposicional as seguintes afirmações.*

> *Se não há música, não há alegria e não ha dança.*
> *A música ou a dança dão alegria.*
> *Não há alegria, excepto se haver música.*

Utilize as simbolizações: m: Há música; a: Há alegria; d: Há dança.

Exercise 87 *Simbolize na Lógica dos predicados:*

> *Todos alunos frequentam algumas aulas.*
> *Alguns alunos frequentam todas as aulas.*
> *Somente quem frequenta uma aula é aluno.*
> *Não existem aulas sem alunos.*

Utilize as simbolizações: Ex: x é aluno; Ax: x é aula; Fxy: x frequenta y.

Exercise 88

1. *Dê o enunciado do Metateorema de Validade para a Lógica proposicional.*
2. *Dê o enunciado do Metateorema de Completude para a Lógica proposicional.*
3. *Sejam ϕ, ψ e θ tautologias. O conjunto $C \equiv \{\phi, \psi, \theta\}$ é compatível?*
4. *Seja ϕ uma fórmula. Se $\{\neg\phi\}$ é inconsistente, ϕ é uma lei lógica. Porquê?*

Exercise 89 *Sejam ϕ e ψ proposições.*

1. *Mostre que*
$$\phi \longrightarrow \psi \vdash \neg(\phi \wedge \neg\psi).$$
2. *Mostre que*
$$\phi \vee \neg\psi, \psi \vdash \phi.$$

3. Mostre que

$$\phi \longleftrightarrow \psi \vdash (\phi \longrightarrow \psi) \wedge (\neg\phi \longrightarrow \neg\psi)\,.$$

Exercise 90 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições. Investigue se*

$$\begin{aligned}(\phi \wedge \psi) &\longrightarrow \theta \models (\phi \wedge \neg\theta) \longrightarrow \neg\psi. \\ (\phi &\longrightarrow \theta) \vee (\psi \longrightarrow \theta) \models (\phi \vee \psi) \longrightarrow \theta.\end{aligned}$$

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 30 de Maio de 2013.

Exame normal

Duração: 2 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 91 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x, e f um símbolo de função unário. Mostre, utilizando a Dedução Natural*

$$\forall x(\phi(x) \to \psi(x)), \forall x \neg\psi(x) \vdash \forall x \neg\phi(x)$$

$$\forall x \neg\phi(x) \vdash \neg\exists x \phi(x)$$

$\vdash \forall x \forall y(x \doteq y \to fx \doteq fy)$ *(utilize a regra $\doteq$, com o termo t bem escolhido).*

Exercise 92 *Sejam p, q e m proposições e ϕ e uma fórmula da variável x. Utilizando tableaux semânticos, investigue se as seguintes fórmulas são tautologias.*

$$(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$$

$$((p \wedge q) \to m) \to ((p \to m) \vee (q \to m))$$

$$\forall x \phi(x) \vee \exists x \neg\phi(x).$$

Exercise 93 *Sejam ϕ e ψ proposições. Reduza a uma fórmula normal disjuntiva equivalente*

$$(\phi \to \psi) \leftrightarrow \neg\phi.$$

Exercise 94 *Considere a fórmula da Lógica de primeira ordem com os símbolos de funções f e g, e o constante c*

$$\phi : \forall x(\exists y(Pgxx \wedge Qyfgxy) \to \exists z Rzxc).$$

1. *Indique os termos que ocorrem em ϕ.*
2. *Dado que a aridade (número das variáveis envolvidadas) do símbolo de função f é 1, determine a aridade do símbolo de função g.*
3. *Determine a aridade dos símbolos de predicados P, Q e R.*
4. *Indique as subfórmulas de ϕ que são fórmulas atómicas.*
5. *A fórmula ϕ é uma sentênça?*

Exercise 95 *Consideremos a linguagem* $\mathcal{L} = \{P, Q\}$, *onde* P *e* Q *são símbolos de relação unários. Sejam* ϕ *e* ψ *a fórmulas*

$$\begin{aligned} \phi &: \forall x(Px \vee Qx) \\ \psi &: \forall x(Px \wedge Qx) \end{aligned}$$

Mostre que $\phi \not\models \psi$, *encontrando uma estrutura do tipo* $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, P^{\mathfrak{R}}, Q^{\mathfrak{R}})$, *tal que* $\mathfrak{R}$ *satisfaz* ϕ, *mas* $\mathfrak{R}$ *não satisfaz* ψ.

Exercise 96 *Dê um exemplo de uma fórmula da Lógica da primeira ordem que não é válida.*

$$\begin{aligned} \leftrightarrow^{+} &: \phi \to \psi \text{ e } \psi \to \phi / \phi \leftrightarrow \psi \\ \leftrightarrow^{-} &: \phi \leftrightarrow \psi / \phi \to \psi \text{ e } \phi \leftrightarrow \psi / \psi \to \phi \end{aligned}$$

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 17 de Junho de 2013.

Exame normal

Duração: 3 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 97 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições. Mostre que*

$$\phi \wedge \neg\psi \models \neg(\phi \to \psi).$$

As fórmulas $\phi \wedge \neg\psi$ e $\neg(\phi \to \psi)$ são logicamente equivalentes?

Exercise 98 *Mostre que*

$$\begin{array}{rcl} \phi \wedge \psi & \vdash & \phi \wedge \neg\neg\psi \\ \phi \vee \neg\psi & \vdash & \psi \to \phi. \end{array}$$

Exercise 99 *Utilizando tableaux semânticos investigue se*

$$(\phi \wedge (\psi \to \theta)) \to (\neg\theta \to (\phi \wedge \neg\psi))$$

é uma tautologia.

Exercise 100 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x e R um símbolo de relação binário. Mostre que*

$$\forall x(\phi(x) \to \psi(x)) \vdash \exists x\phi(x) \to \exists x\psi(x).$$

$$\vdash \forall x\forall y((x \doteq y) \to (Rxy \to Rxx)).$$

Exercise 101 *No âmbito da Lógica proposicional reponda as seguintes perguntas.*

1. *Dê um conjunto de trés fórmulas inconsistente.*
2. *Seja ϕ uma fórmula tal que $\{\neg\phi\}$ é incompatível. Então ϕ é uma tautologia. Esta conclusão é verdadeira ou falsa?*
3. *Que é uma Forma Normal Conjuntiva?*

Exercise 102 *Utilizando tableaux semânticos investigue se*

$$\forall x(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to \forall x(\phi(x) \wedge \psi(x))$$

é uma tautologia.

Exercise 103 *No âmbito da Lógica de primeira ordem, dê um exemplo de:*

1. *Um termo com dois símbolos de funções.*
2. *Uma fórmula atómica.*
3. *Uma sentença com duas variáveis.*

Exercise 104 *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem as seguintes afirmações.*

> *Todos os fumadores fumam cigaros ou charutos.*
> *Existem fumadoras que não fumam um cachimbo.*
> *Nenhum fumador fuma cachimbos e charutos.*
> *Todos os fumadores fumam cigaros exceto os fumadores de cachimbos*

Utilize a simbolização: Fx*: x é fumador.* Cx*: x fuma um cigaro.* Rx*: x fuma um charuto.* Mx*: x fuma um cachimbo.*

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 28 de Junho de 2013.

Exame de recurso.

Duração: 3 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 105 *Sejam ϕ, ψ e θ fórmulas. Verifique se*

$$\phi \wedge (\neg\psi \to \theta) \models \neg\theta \vee (\phi \leftrightarrow \psi).$$

Exercise 106 *Sejam ϕ, ψ e θ fórmulas. Mostre que*

$$\begin{aligned} \phi &\to \psi, \psi \to \neg\theta, \theta \vdash \neg\phi. \\ \neg\phi \vee \psi, \phi &\vdash \psi. \end{aligned}$$

Exercise 107 *Sejam ϕ e ψ fórmulas. Reduza a uma Fórma Normal Disjuntiva equivalente a fórmula $\phi \to (\psi \leftrightarrow \phi)$.*

Exercise 108 *Sejam ϕ, ψ e θ fórmulas. Utilizando tableaux semânticos investigue se*

$$(\phi \leftrightarrow (\psi \wedge \theta)) \to (\neg\theta \to (\neg\psi \to \phi)).$$

é uma tautologia.

Exercise 109 *Sejam ϕ e ψ fórmulas de uma variável. Mostre que*

$$\forall x(\phi(x) \to \psi(x)) \wedge \forall x \neg\psi(x) \vdash \forall x \neg\phi(x)).$$

$$\vdash \exists x \phi(x) \to \exists y \phi(y).$$

Exercise 110 *No âmbito da Lógica proposicional reponda as seguintes perguntas.*

1. *Dê o enunciado do Metateorema de Válidade.*
2. *Seja ϕ uma lei lógica. Então $\{\neg\phi\}$ é inconsistente. Esta conclusão é verdadeira ou falsa?*
3. *Dê um exemplo de uma expressão que não seja uma fórmula bem-formada.*

Exercise 111 *Sejam ϕ e ψ fórmulas de uma variável. Utilizando tableaux semânticos investigue se*

$$\exists x(\phi(x) \vee \psi(x)) \to \exists x(\neg\psi(x) \to \phi(x))$$

é uma tautologia.

Exercise 112 *Considere a fórmula*

$$\alpha : \forall x \exists y ((Afxxgy \wedge Bgfxy) \rightarrow Cxyz)$$

Aqui x, y *e* z *são variáveis,* f *e* g *são símbolos de funções e* A, B *e* C *são símbolos de relações;* A *é um símbolo binário e* B *é um símbolo unário.*

1. *Qual a aridade do símbolo de função* f *e qual a aridade do símbolo de função* g*?*
2. *Qual a aridade do símbolo de relação* C*?*
3. *Indique as subfórmulas atómicas de* α*.*
4. *A fórmula* α *é uma sentença?*

Exercise 113 *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem as seguintes afirmações.*

Todos os Eborenses vão para a Feira.
Só Eborenses vão para a Feira.
Nenhum Eborense vai para a Feira.
Todos vão para a Feira, exceto os Eborenses.

Utilize a simbolização: Ex: x é Eborense. Fx: x é vai para a Feira.

Lógica Computacional

Universidade de Évora, ano 2014, 7 de Abril

Frequência 1

Duração: 2 horas

Exercise 114 *Sejam ϕ, ψ, θ proposições.*

1. *Investigue se*
$$(\phi \to \theta) \vee (\psi \to \theta) \models (\phi \vee \psi) \to \theta.$$

2. *Investigue se*
$$[(\phi \to \theta) \wedge (\psi \to \theta)] \leftrightarrow [(\phi \vee \psi) \to \theta]$$
é uma tautologia.

Exercise 115 1. *Dê um exemplo de uma lei da Lógica proposicional.*

2. *Dado um certo conjunto C de fórmulas da Lógica proposicional, que é o critério para C ser inconsistente?*

3. *Sejam ϕ e ψ fórmulas da Lógica proposicional. Investigue se o conjunto $\{\phi \leftrightarrow \psi,\ \phi \vee \neg\psi,\ \neg\phi \wedge \psi\}$ é compatível.*

4. *Dê o enunciado do Metateorema de Validade da Lógica proposicional.*

Exercise 116 *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem as seguintes afirmações:*

Todas as cidades são grandes.
Cidades no Alentejo.não são grandes.
Existe uma cidade grande no Alentejo.
Somente as cidades fora do Alentejo são grandes.

Utilize os símbolos seguintes:

Cx	*x é cidade*
Gx	*x é grande*
Ax	*x está no Alentejo*

Exercise 117 *Sejam p, q e r proposições. Mostre que*

$$p \wedge q, p \quad \vdash \quad q \rightarrow r$$

$$p \rightarrow \neg q \quad \vdash \quad \neg(p \wedge q)$$

$$p \vee \neg q, q \quad \vdash \quad p.$$

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 29 de Maio de 2014.

Frequência 2

Duração: 2 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 118 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x. Mostre, utilizando a Dedução Natural*

$$\forall x(\neg\phi(x) \lor \psi(x)) \vdash \forall x(\phi(x) \to \psi(x))$$

$$\forall x(\phi(x) \to \psi(x)), \neg\exists x\psi(x) \vdash \neg\exists x\phi(x).$$

Exercise 119 *Mostre que a formula*

$$\forall x\forall y\forall z(z \doteq x \land z \doteq y \to x \doteq y)$$

é uma lei da lógica com igualdade.

Exercise 120 *Sejam p, q e m proposições, P e Q predicados unários, ϕ uma fórmula da variável x e θ uma fórmula sem variáveis livres. Utilizando tableaux semânticos, investigue se as seguintes fórmulas são tautologias.*

$$(p \to q) \lor (p \to \neg q)$$

$$((p \land r) \to q) \to (p \to q).$$

$$(\forall x(Px \to Qx) \land \exists xPx) \to \neg\forall x(Px \to \neg Qx)$$

$$\exists x(\theta \to \phi(x)) \leftrightarrow (\theta \to \exists x\phi(x)).$$

Exercise 121 *Sejam ϕ e ψ proposições. Reduza a uma fórmula na Forma Normal Disjuntiva equivalente*

$$(p \leftrightarrow q) \to (p \land q).$$

Exercise 122 *No âmbito da Lógica de primeira ordem dê um exemplo de:*

1. *Uma fórmula atómica.*
2. *Uma fórmula que não é atómica.*
3. *Uma sentença.*
4. *Uma fórmula que não é uma sentença, mas contém uma variável muda.*
5. *Um termo com ao mesmo tempo um símbolo de função ternário e um símbolo de função unário.*

Exercise 123 *Consideramos a linguagem* $\mathcal{L} = \{R, f, c\}$*, onde* R *é um símbolo de relação unário,* f *é um símbolo de função binário e* c *é um símbolo de constante, e as seguintes estruturas* $\mathfrak{M} = (M, R^{\mathfrak{M}}, f^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{N}})$*:*

1. $(\mathbb{N}, <, +, 0)$
2. $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+}, \cdot, 1)$
3. $(\mathbb{N}, P, +, \pi)$
4. $(\mathbb{R}, [0, 1], >, 0)$
5. $(\mathbb{N}, I, -, 0)$
6. $(\mathbb{N}, \{0, 1\}, +, 0)$.

   Aqui $\mathbb{R}^{+}$ *é o conjunto de todos os números reais positivos,* P *é o conjunto de todos os números naturais pares e* I *é o conjunto de todos os números naturais impares. Algumas estruturas são adequadas para a linguagem* $\mathcal{L}$*, outras não. Quais as estruturas adequadas?*

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 16 de Junho de 2014.

Exame normal

Duração: 3 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 124 *Sejam ϕ e ψ proposições. Investigue se*

$$\phi \vee \neg\psi \models \phi \to \psi.$$

$\phi \quad \leftrightarrow \quad \neg\psi \sim \neg\left((\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \neg\psi)\right)$ *($\sim$: são logicamente equivalentes).*

Exercise 125 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições. Mostre que*

$$\phi \to \psi \vdash (\phi \wedge \theta) \to (\psi \wedge \theta)$$
$$(\neg\phi) \vee \psi \vdash \neg(\phi \wedge \neg\psi).$$

Exercise 126 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições e P e Q predicados unários. Utilizando tableaux semânticos, investigue se*

$$(((\phi \to \theta)) \wedge (\psi \to \theta)) \wedge (\phi \vee \psi)) \to \theta.$$

$$(\forall x(Px \to Qx) \wedge \exists x Px) \to \neg\forall x(Px \to \neg Qx).$$

são tautologias.

Exercise 127 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x e f um símbolo de função binário. Mostre que*

$$\forall x(\phi(x) \to \psi(x)), \exists x(\neg\psi(x)) \vdash \exists x \neg\phi(x).$$

$$\vdash \forall x \forall y((x \doteq y) \to (fxy \doteq fxx)).$$

Exercise 128 *Sejam P e Q predicados unários. Consideremos a estrutura $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, P^{\mathfrak{N}}, Q^{\mathfrak{N}})$, onde*

$$\begin{array}{lcl} P^{\mathfrak{N}}(k) & : & \text{"}k \text{ é par"} \\ Q^{\mathfrak{N}}(k) & : & \text{"}k \text{ é divisível por } 4\text{"}. \end{array}$$

1. $\mathfrak{N} \models \forall x(Px \to Qx)$*?*
2. $\mathfrak{N} \models \forall x(Qx \to Px)$*?*
3. $\mathfrak{N} \models (\forall x Px) \to (\forall x Qx)$*?*

Exercise 129 *No âmbito da Lógica proposicional responda as seguintes perguntas.*

1. *Sejam C um conjunto de fórmulas e α uma fórmula. Dê a definição de: α é consequência lógica de C.*
2. $\{\phi, \psi, \phi \to \neg\psi\}$ *é inconsistente. Porqué?*
3. *Dê um exemplo de uma fórmula que está no mesmo tempo na Forma Normal Conjuntiva na Forma Normal Disjuntiva.*

Exercise 130 *Na fórmula $\forall x \forall y \exists z(Rzfxy \to (fxx \doteq z))$ indique:*

1. *Os termos.*
2. *As subfórmulas atómicas.*
3. *As subfórmulas que são nem atómicas, nem sentenças.*

Exercise 131 *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem as seguintes afirmações.*

Todos os países da América Latina têm uma equipa de futebol.
Somente países europeus têm uma equipa de futebol.
As melhores equipas de futebol são de países da América Latina ou de países europeus.

Utilize a simbolização: Ex : x é país europeu. Ax : x é país da América Latina. Fx: x é uma equipa de futebol. Txy: x tem y. Mx : x é melhor.

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 3 de Julho de 2014.

Exame de recurso

Duração: 3 horas

Justifique as respostas

Exercise 132 *Sejam p e q proposições. Investigue se*

$$p \wedge q \models (q \to p) \to \neg q.$$

Exercise 133 *Sejam p, q, m proposições. Mostre que*

$$\begin{aligned} p &\vdash \neg\neg p \\ p &\to m,\ q \to m \vdash (p \vee q) \to m \end{aligned}$$

Exercise 134 *Sejam p e q proposições e P um predicado unário. Utilizando o método dos tablaux semânticos, investigue se*

$$\begin{aligned} (p \to q) &\to (\neg p \vee (p \wedge q)) \\ (\forall x P x) &\leftrightarrow (\neg \exists x \neg P x). \end{aligned}$$

são tautologias.

Exercise 135 *P e Q são predicados unários. Mostre que*

$$\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$$

$$\forall x Px, \exists x Qx \vdash \exists x(Px \wedge Qx).$$

Exercise 136 *As letras x e y indicam variáveis, f uma função binária, P designa um predicado unário e Q designa uma relação binária. Consideramos as seguintes expressões. Quais as fórmulas não bem-formadas? Quais as fórmulas atómicas? Quais as sentenças? Explique.*

1. $\exists x Px \to \exists x$
2. $\forall x \forall y(\neg Px \to Qxy)$
3. $\exists P(Pxy \to Pyx)$
4. $\exists x(fxy \doteq z \to Qyz)$
5. $Qxfyx$
6. $P \wedge Q$.

Exercise 137 *1. No âmbito da Lógica proposicional, que é lógicamente equivalente?*

2. *Sejam p e q letras proposicionais. Investigue se*

$$\{p, \neg q, p \to q\}$$

é compatível.

3. *No âmbito da Lógica de primeira ordem, dê um exemplo de uma estrutura com um domínio infinito, duas constantes, uma relação binária, uma função unária e uma função binária.*

Exercise 138 *Sejam p e q letras proposicionais. Transforme $(p \to q) \to p$ numa fórmula que está na Forma Normal Conjuntiva.*

Exercise 139 *Simbolize as seguintes afirmações na linguagem da Lógica de primeira ordem. Utilize as seguintes letras: Mx "x come uma meia-dose ", Ix "x come uma dose inteira".*

1. *Alguns comem meia-doses e alguns comem doses inteiras.*
2. *Ninguém come meia-doses.*
3. *Somente quem come meia-doses não come doses inteiras.*
4. *Todos comem doses inteiras, excepto as pessoas que comem meia-doses.*

1 Lógica Computacional

Universidade de Évora, ano 2015, 26 de Março

Frequência 1

Duração: 2 horas

Exercise 140 *Sejam ϕ, ψ, θ proposições.*

1. *Investigue se*
$$((\phi \vee \psi) \rightarrow \theta) \longleftrightarrow ((\neg\phi \wedge \neg\psi) \vee \theta)$$
é uma tautologia.

2. *Investigue se*
$$\phi \rightarrow \theta, \psi \rightarrow \theta \models \neg\theta \rightarrow \neg(\phi \vee \psi)$$

Exercise 141 *Simbolize na linguagem da Lógica de primeira ordem as seguintes afirmações:*

Évora tem muralhas e uma praça central.
Cidades que têm muralhas não têm uma praça central.
Algumas cidades sem muralhas têm uma praça central.
Todas as cidades têm uma praça central, excepto as cidades com muralhas.

Utilize os símbolos seguintes:

Cx	*x é cidade*
Mx	*x tem muralhas*
Px	*x tem uma praça central*
e	*Évora*

Exercise 142 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições. Mostre que*

$$\phi \to \psi, \neg\phi \to \neg\psi \;\vdash\; \phi \longleftrightarrow \psi$$

$$\phi \to \neg\psi \vdash (\neg\psi \to \theta) \;\to\; (\phi \to \theta)$$

$$(\neg\neg\phi) \vee \psi \;\vdash\; \phi \vee \psi.$$

Exercise 143

1. *Dê o enunciado do Metateorema de Completude da Lógica proposicional.*
2. *Dado um certo conjunto C de fórmulas da Lógica proposicional, que é o critério para C ser compatível?*
3. *Sejam ϕ e ψ fórmulas da Lógica proposicional. Investigue se o conjunto $\{\phi, \psi, \neg\phi \wedge \psi\}$ é consistente.*
4. *Dê o enunciado do Princípio de Indução em Complexidade para a Lógica proposicional.*

Lógica Computacional

Universidade de Évora, ano 2015, 27 de Maio

Frequência 2

Duração: 2 horas

Justifique as respostas.

Exercise 144 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x, θ uma sentença e f um símbolo de função unário. Mostre, utilizando a Dedução Natural*

$$\forall x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \exists x\phi(x) \wedge \forall x\psi(x)$$

$$\vdash (\theta \vee \exists x\psi(x)) \to \exists x(\theta \vee \psi(x))$$

$$\exists x(\phi(x) \to \psi(x)) \vdash \exists x(\neg\psi(x) \to \neg\phi(x))$$

$$\exists y\forall x(fx \doteq y) \vdash \forall x\exists y(fx \doteq y).$$

Exercise 145 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x. Utlizando tableaux semânticos, investigue se*

$$\forall x(\phi(x) \to \psi(x)) \to [(\exists x\neg\psi(x)) \to (\forall x\neg\phi(x))]$$

$$\forall x(\phi(x) \vee \psi(x)) \longleftrightarrow \forall x(\neg\psi(x) \to \phi(x))$$

são tautologias.

Exercise 146 *Considere a fórmula da Lógica de primeira ordem*

$$\phi : \exists u\forall vAuv \wedge \exists y\forall x((Bgxy \leftrightarrow Afxgcy) \vee Bx).$$

A e B são símbolos de predicados, e c é um símbolo de constante.

1. *Determine a aridade (número das variáveis envolvidadas) dos símbolos de predicados A e B.*
2. *Indique os símbolos de funções que ocorrem em ϕ, e determine a aridade destas.*
3. *Indique os termos que ocorrem em ϕ.*
4. *Indique as subfórmulas de ϕ que são fórmulas atómicas.*
5. *A fórmula ϕ é uma sentênça?*

Exercise 147 *Considere a linguagem* $\mathcal{L} \equiv \{P, f, c\}$*, onde* P *é um símbolo de predicados binário,* f *é um símbolo de função unária e* c *é um símbolo de constante.*

1. *A estrutura* $(\mathbb{R}; \geq, \log, 1)$ *não é adequada à* $\mathcal{L}$*; porquê?*
2. *Dê uma estrutura* $\mathfrak{D} \equiv (D; \geq, \log, 1)$ *com outro domínio* D*, de modo que* $\mathfrak{D}$ *é adequada à* $\mathcal{L}$*.*
3. *Para a sua escolha de* D*, tem-se*

$$\mathfrak{D} \models \forall x P f x c?$$

Exercise 148

1. *Dê um exemplo duma fórmula com três literais que é no mesmo tempo uma fórmula na Forma Normal Disjuntiva e uma fórmula na Forma Normal Conjuntiva.*
2. *No âmbito da Lógica de primeira ordem, que é o Metateorema de Validade?*

Lógica Computacional

Universidade de Évora, 8 de Junho de 2015.

Exame de Época Normal

Duração: 3 horas.

Justifique as respostas.

Exercise 149 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições. Investigue se*

$$(\phi \vee (\psi \wedge \theta)) \models (\phi \vee \psi) \rightarrow \neg(\phi \wedge \theta).$$

Exercise 150 *Sejam ϕ e ψ proposições. Mostre que*

$$(\phi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi \vdash \neg\phi$$

$$\phi \vee \neg\psi, \phi \rightarrow \theta \vdash \psi \rightarrow \theta.$$

Exercise 151 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições e P e Q predicados unários. Utilizando tableaux semânticos, investigue se as fórmulas*

$$((\phi \vee \psi) \rightarrow \theta) \rightarrow (\neg\theta \rightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi))$$

$$\forall x(Px \longleftrightarrow Qx) \rightarrow \forall x(Px \vee Qx)$$

$$\exists x(Px \wedge Qx) \rightarrow \neg\forall x(\neg Px \vee \neg Qx).$$

são tautologias.

Exercise 152 *Sejam ϕ e ψ proposições. Reduza a uma Forma Normal Disjuntiva equivalente*

$$(\neg\phi \rightarrow (\phi \wedge \neg\psi)) \longleftrightarrow \psi.$$

Exercise 153 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x. Seja f um símbolo de função unário. Mostre, utilizando a Dedução NaturalLet $\phi(x)$ and $\psi(x)$ be formulas of the variable x and f be a unary function symbol. Prove by Natural Deduction that*

$$\forall x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \forall x\phi(x) \wedge \exists x\psi(x).$$

$$\forall x(\phi(x) \vee \psi(x)), \exists x\neg\phi(x) \vdash \exists x\psi(x).$$

$$\vdash \forall x\forall y(x \doteq y) \rightarrow \forall x\forall y(fx \doteq fy).$$

$$\forall x(\phi(x) \rightarrow \neg\psi(x)) \vdash \forall x\psi(x) \rightarrow \neg\forall x\phi(x)$$

$$\exists x(\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \vdash \neg\forall x(\phi(x) \wedge \neg\psi(x))$$

$$\vdash \forall x\forall y(x \doteq y \rightarrow fx \doteq fy).$$

Exercise 154 *Seja P um símbolo de relação binário. Considere a fórmula*

$$\sigma : \exists x \forall y P x y$$

Encontre uma estrutura $\mathcal{A}$ na qual σ é válida, e uma estrutura $\mathcal{B}$ na qual σ não é válida.

Exercise 155

1. *Dê um exemplo de duas sentenças da Lógica de primeira ordem σ e τ de modo que $\sigma \models \tau$.*
2. *Dê um exemplo de uma fórmula atómica que contém um símbolo de relação ternário A, um símbolo de função f unário, um símbolo de função g binário, e três variáveis x, y e z.*
3. *O conjunto de fórmulas $\{\phi, \phi \leftrightarrow \neg\psi, \phi \rightarrow (\neg\psi \vee \neg\phi)\}$ é compatível? Este conjunto é consistente?*

Exercise 156 *Utilize os símbolos seguintes:*

Fx	*x é clube de futebol*
Tx	*x é treinador*
Mx	*x tem maus resultados*
Sx	*x sai*
Rxy	*x tem y*

Simbolize na linguagem da Lógica da primeira Ordem:

1. *Todos os clubes de futebol têm um treinador.*
2. *Alguns treinadores têm maus resultados.*
3. *Somente um treinador com maus resultados sai.*
4. *Existem treinadores sem clube de futebol.*

Lógica computational

Universidade de Évora, 22-6-2015

Exame de Recurso

Duração: 3 horas

Exercise 157 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições. Investigue se*

$$(\phi \to \psi) \to \theta) \sim \phi \to (\psi \to \theta).$$

Exercise 158 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições. Utilizando a Dedução Natural, mostre que*

$$\vdash \neg\neg\phi \leftrightarrow \phi$$

$$(\phi \to \theta) \wedge (\psi \to \theta), \phi \vee \psi \vdash \theta.$$

Exercise 159 *Sejam ϕ, ψ e θ proposições e P e Q predicados unários. Seja θ uma formula da Lógica de primeira ordem sem a variável x. Utilizando tableaux semânticos, investigue se as fórmulas*

$$\phi \leftrightarrow ((\phi \wedge \psi) \vee \psi)$$

$$\forall x(Px \to Qx) \to \forall x((\neg Qx) \to \neg Px)$$

$$\exists x(Px \to \theta) \to (\exists x Px \to \theta)$$

são tautologias.

Exercise 160 *Sejam $\phi(x)$ e $\psi(x)$ fórmulas da variável x. Seja R um símbolo de relação binário. Utilizando a Dedução Natural, mostre que*

$$\forall x(\phi(x) \vee \neg\psi(x)) \vdash \forall x(\psi(x) \to \phi(x)).$$

$$\exists x(\phi(x) \wedge \psi(x)) \vdash \exists x\phi(x) \wedge \exists x\psi(x).$$

$$\forall x \forall y(x \doteq y) \vdash \forall x \forall y(Rxy \doteq Rxx).$$

Exercise 161 *Sejam α e β proposições. Reduza a uma Forma Normal Conjuntiva equivalente*

$$(\neg\alpha \to \beta) \to \neg(\alpha \to \beta).$$

Exercise 162

1. *Sejam P e Q símbolos de relações unários. Dê uma estrutura em que $\exists x Px \wedge \exists x Qx$ é verdadeira e uma estrutura em que $\exists x(Px \wedge Qx)$ é falsa.*

2. *No âmbito da Lógica de primeira ordem, dê um exemplo de (i) uma fórmula atómica com pelo menos um símbolo de função, (ii) uma fórmula que nem é atómica, nem uma sentença e (iii) uma sentença com pelo menos duas variáveis.*

3. *Que é uma função booleana?*

Exercise 163 *Utilize os símbolos seguintes:*

f	*feira*
Ex	*x é eborense*
Cx	*x come sardinhas*
Vxy	*x vai para y*

Simbolize na linguagem da Lógica da primeira Ordem:

1. *Todos os eborenses vão para a feira.*

2. *Todos vão para a feira, exceto os eborenses.*

3. *Alguns eborenses que vão para a feira, comem sardinhas.*

4. *Somente eborenses comem sardinhas na feira.*