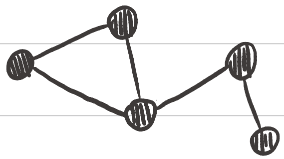
日期:　　/

Choice of Graph Representation

[图的组成]

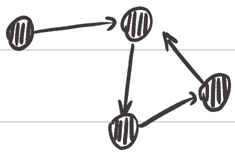


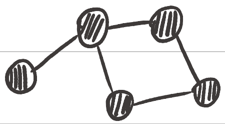
Objects : node, vertices — N

Interactions : links, edges — E

System : network, graph — $G(N,E)$

[有向图/无向图]





[度(Degree)]

节点的度k表示连接节点的边数，记作k。

平均度表示图中所有节点度的均值：

$$\bar{k} = \langle k \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i = \frac{2E}{N}$$

边数

节点数

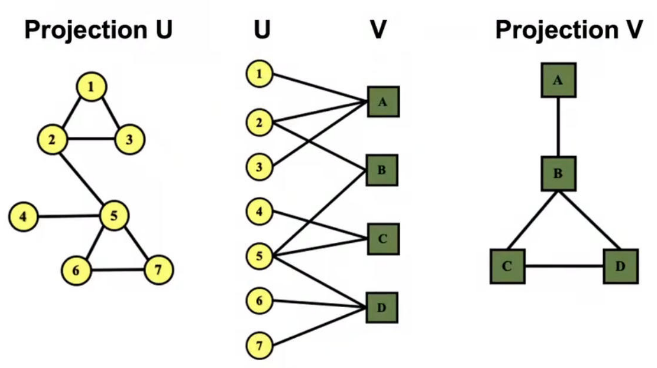
日期: /

对于有向图，额外有对入度(In-degree)和出度(out-degree)的定义。入度为指向节点的边数，出度则相反。$k^{in}=0$的节点称为源点(source)，$k^{out}=0$的点称为汇点(sink)。$\langle k^{in}\rangle = \langle k^{out}\rangle = \frac{E}{N}$

[二分图]

由两种不同类型的节点(U,V)组成，其中节点只与不同类型的节点交互。

二分图可以进行投影：

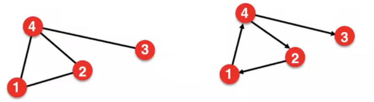


当两个节点至少有一个共同邻居时，就在投影中连接它们。

日期:　　/

[图的表示]

图中节点的连接关系可以用邻接矩阵表示。



$A_{ij} = 1$ if there is a link from node i to node j

$A_{ij} = 0$ otherwise

无向图的邻接矩阵是对称的

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$k_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \quad k_j = \sum_{i=1}^{N} A_{ij} \qquad k_i^{out} = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \quad k_j^{in} = \sum_{i=1}^{N} A_{ij}$

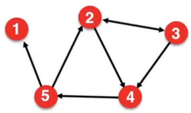
$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} k_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} k_j = \frac{1}{2}\sum_{ij}^{N} A_{ij} \qquad L = \sum_{i=1}^{N} k_i^{in} = \sum_{j=1}^{N} k_j^{out} = \sum_{ij}^{N} A_{ij}$

由于真实数据的性质,邻接矩阵往往极稀疏

另一种表示图的方式是边列表

Represent graph as a list of edges:

- (2, 3)
- (2, 4)
- (3, 2)
- (3, 4)
- (4, 5)
- (5, 2)
- (5, 1)



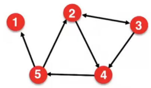
这种表示方式相当简单,但难以对图进行操作

日期:　　/

另一种表示方式是邻接表:

Adjacency list:

- Easier to work with if network is
  - Large
  - Sparse
- Allows us to quickly retrieve all neighbors of a given node
  - 1:
  - 2: 3, 4
  - 3: 2, 4
  - 4: 5
  - 5: 1, 2

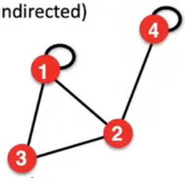


一个相对更优的表示,适用于大型稀疏的图,允许对节点的邻居进行存储。

同时,图可以有一些附加特征,节点,边可以有自己的特征:

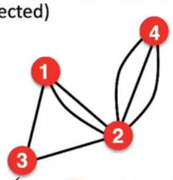
· 边的权重可以直接在邻接矩阵中表示

- **Self-edges (self-loops)**
  (undirected)



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Multigraph**
  (undirected)



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

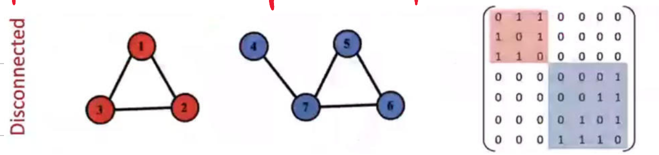
表示图中的自环和多重连接

日期: /

[Connectivity(连接性)]

如果图中的两个任意节点可以通过图中的边相连，就称图具有连通性，反之则不具有，称不与任何点连通的点为孤点(isolated node)

非连通的图在邻接矩阵中有块对角结构。



有向图的连通性可以分为弱连通(忽略边方向)和强连通(考虑边方向)。

[强连通分量]

图中的节点集合，集合中的每个节点均可通过有向路径与集合中的其他节点相连。