## Cálculo de Programas

## 2.° ano

## Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática UNIVERSIDADE DO MINHO

## 2019/20 - Ficha nr.º 4

1. No Cálculo de Programas, as definições condicionais do tipo  $h \ x = \mathbf{if} \ p \ x \ \mathbf{then} \ f \ x \ \mathbf{else} \ g \ x \ \tilde{\mathbf{sao}}$  escritas usando o combinador ternário  $p \to f, g$  conhecido pelo nome de *condicional de McCarthy*, cuja definição

$$p \to f, g = [f, g] \cdot p$$
?

vem no formulário. Baseando-se em leis deste combinador que constam também do formulário, demostre a chamada 2ª-lei do condicional de McCarthy:

$$(p \to f, g) \cdot h = (p \cdot h) \to (f \cdot h), (g \cdot h)$$

2. Sabendo que as igualdades

$$p \to k, k = k$$
 (F1)

$$(p? + p?) \cdot p? = (i_1 + i_2) \cdot p?$$
 (F2)

se verificam, demonstre as seguintes propriedades do mesmo combinador:

$$\langle (p \to f, h), (p \to g, i) \rangle = p \to \langle f, g \rangle, \langle h, i \rangle$$
 (F3)

$$\langle f, (p \to g, h) \rangle = p \to \langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle$$
 (F4)

$$p \to (p \to a, b), (p \to c, d) = p \to a, d$$
 (F5)

3. Considere a função in  $= [\underline{0}]$ , succ] que exprime a forma como os números naturais são gerados a partir do número 0, de acordo com o diagrama seguinte,

$$1 \xrightarrow{i_1} 1 + \mathbb{N}_0 \xleftarrow{i_2} \mathbb{N}_0$$

$$\underbrace{\stackrel{i_1}{0}, \operatorname{succ}}_{\mathbb{N}_0} \operatorname{succ}$$
(F6)

onde succ n=n+1. Sabendo que o tipo 1 coincide com o tipo () em Haskell e é habitado por um único elemento, também designado por (), calcule a inversa de in,

out 
$$0 = i_1$$
 ()  
out  $(n + 1) = i_2 n$ 

resolvendo em ordem a out a equação out  $\cdot$  in =id e introduzindo variáveis. (NB: poderá deste cálculo inferir que in e out são isomorfismos? Justifique.)

4. Seja dada a função

$$\label{eq:ap:condition} \begin{split} \operatorname{ap}: (C^B \times B) \to C \\ \operatorname{ap} (f,x) = f \ x \end{split}$$

(a) Mostre, através da adição de variáveis, que a função f definida a seguir

$$f k = ap \cdot (k \times id)$$

é a função

$$\begin{array}{l} \text{uncurry} :: (a \rightarrow b \rightarrow c) \rightarrow (a,b) \rightarrow c \\ \text{uncurry} \ f \ (a,b) = f \ a \ b \end{array}$$

disponível em Haskell.

(b) Mostre que a igualdade

$$ap \cdot (curry \ f \times id) = f \tag{F7}$$

corresponde à definição curry f a b = f (a,b) da função curry ::  $((a,b) \to c) \to a \to b \to c$  também disponível em Haskell.

5. Abreviando curry f por  $\overline{f}$ , identifique a propriedade (F7) no formulário e diga como a deriva da propriedade universal da exponenciação, que a seguir se descreve através de um diagrama:

$$\begin{array}{cccc} C^B & & C^B \times B \xrightarrow{ap} C & & k = \overline{f} \; \equiv \; \operatorname{ap} \cdot (k \times id) = f \\ & & & & \\ k & & & \\ A & & & A \times B & & \\ \end{array}$$

6. Considere o isomorfismo

$$A^{B+C} \stackrel{\text{unjoin}}{\cong} A^B \times A^C \tag{F8}$$

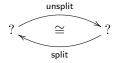
2

onde

$$\begin{aligned} & \text{join } (f,g) = [f \;, g] \\ & \text{unjoin } k = (k \cdot i_1, k \cdot i_2) \end{aligned}$$

Mostre que join  $\cdot$  unjoin = id e que unjoin  $\cdot$  join = id.

7. Complete os "?"do diagrama



onde