

## Examen

[Durée de deux heures. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendants. Seule les réponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

Exercice 1. Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  une chaîne de Markov homogène sur l'espace d'états  $\mathbb{N}$  de matrice de transition

$$P(0, 1) = 1, \quad P(x, x+1) = 1-p, \quad P(x, x) = p \quad \text{pour } x \geq 1$$

avec  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $q = 1-p$ .

- Calculer  $P_0(X_4 = 2)$ .
- Montrer que la chaîne est irréductible.
- Est-elle fortement irréductible ?
- Est-elle apériodique ?
- Montrer qu'il existe une mesure invariante pour  $P$  est donnée par

$$\mu(0) = 1, \quad \mu(x) = \frac{1}{p} \left(\frac{q}{p}\right)^x \quad \text{pour tout } x \geq 1.$$

- Déterminer les valeurs de  $p$  pour lesquels la chaîne admet une probabilité invariante et montrer que dans ce cas  $P$  est réversible par rapport à  $\mu$  et que  $\mu$  est la seule probabilité invariante.
- Soit  $T_0 = \inf \{n > 0 : X_n = 0\}$ . En supposant que la chaîne est récurrente positive calculer le temps moyen de retour à 0 (c-à-d  $E_0[T_0]$ ) en fonction de  $p$ . En déduire que si  $p < 1/2$  alors la chaîne n'est pas récurrente positive.
- Soit  $S_x = \inf \{n \geq 0 : X_n = x\}$  et  $u_N(x) = P_x(S_0 < S_N)$  pour  $0 \leq x < N$ . Trouver l'équation satisfaite par  $u_N(x)$  et montrer que  $u_N$  est donnée par

$$u_N(0) = 1, \quad u_N(x) = 1 - \frac{\sum_{k=0}^{x-1} (q/p)^k}{\sum_{k=0}^{N-1} (q/p)^k}, \quad 0 < x < N.$$

- Montrer que  $P_0(T_0 < +\infty) = u_N(1)$  pour tout  $N \geq 1$ . Calculer  $\limsup_N u_N(1)$  et en déduire que si  $p < 1/2$  alors la chaîne est récurrente.

Exercice 2. Soient  $(X_n)_{n \geq 1}$  des v.a. indépendantes  $X_1, X_2, \dots$  telles que  $X_n \sim N(0, 1)$  et  $Y_n = X_n + \frac{1}{n}$  avec  $Y_n > 0$  pour tout  $n \geq 1$ . Soit  $F_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  et

$$X_n = E[X_1 | F_n], \quad n \geq 1$$

avec  $F_n = (Y_1, \dots, Y_n)$ . On peut voir  $X$  comme une quantité inconnue que l'on cherche à estimer. La v.a.  $Y_n$  est le résultat obtenu en mesurant  $X$  au temps  $n$ , la mesure étant brouillée par une erreur aléatoire. On suppose que les erreurs commises en temps différents sont indépendantes. Au temps  $n$ , notre meilleure estimation  $L^2$  de  $X$  est donnée par  $X_n$ . On se pose la question de savoir si  $X_n$  converge vers  $X$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

a) Montrer que le processus  $(X_n)_{n \geq 1}$  est une martingale uniformément bornée dans  $L^2$  (c-à-d  $\sup_n E[X_n^2] < +\infty$ )

b) Montrer que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge presque sûrement vers une variable  $X$  et que  $X \in L^2$ . La v.a.  $X$  représente notre meilleure prévision de  $X$  (au sens  $L^2$ ) donnée par l'observation de toutes les v.a.  $(Y_n)_{n \geq 1}$ .

c) Montrer que pour tout  $n \geq 1$  et tout  $1 \leq i \leq n$  on a  $E[Z_n | Y_i] = 0$  où la v.a.  $Z_n$  est définie par

$$Z_n = X - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \sum_{k=1}^n Y_k.$$

d) En déduire que pour tout  $n \geq 1$  la v.a.  $Z_n$  est indépendante du vecteur  $(Y_1, \dots, Y_n)$  puis que  $X_n = X - Z_n$ .

e) Calculer  $E[(X - X_n)^2]$  et en déduire que  $X_n \rightarrow X$  presque sûrement si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = +\infty.$$

Donc si  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$  il est impossible de déterminer la quantité inconnue  $X$  même avec un nombre infini d'observations.