

Examen 2009

[Durée une heure et demi. Aucun document n'est autorisé. Tous les exercices sont indépendantes. Seules les réponses soigneusement justifiées seront prise en compte.]

1. Vendre un bien avec actualisation du future

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid avec $E[|X_n|] < +\infty$ et $F_n = (X_1, \dots, X_n)$ la filtration associée. Soit $\gamma \in]0, 1[$ on veut résoudre le problème d'arrêt optimal pour le processus $Y_n = \gamma^n X_n$. C'est la situation où l'on reçoit des offres X_n pour un bien à vendre et on considère le gain en prenant en compte un facteur d'actualisation γ . C'est naturel de poser $Y_0 = 0$.

- Montrer que $E[(\sup_{n \geq 1} Y_n)_+] < +\infty$.
- Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0$.
- Soit T un t.a., montrer que $\tilde{T} = \inf \{n \geq 1 : E[Y_T / F_n] \geq Y_n\}$ est un t.a. et que $E[Y_{\tilde{T}}] = E[Y_T]$.
- Rappeler la définition de t.a. régulier et montrer que \tilde{T} est régulier.
- Expliquer pourquoi on est bien dans un cadre Markovien.
- Soit $v_n(x) = \sup_{T \geq n} E[Y_T / X_n = x]$ la fonction valeur. À partir du principe d'optimalité, on a pour $V_n = \text{ess sup}_{T \geq n} E[Y_T / F_n]$ retrouver la forme simplifiée du principe d'optimalité dans le cadre Markovien :

$$v_n(x) = \max(y_n(x), E[v_{n+1}(X_{n+1}) / X_n = x]).$$
- Montrer que dans ce problème $v_n(x) = \gamma^n v_1(x)$.
- On admet que $T = \inf \{n \geq 1 : y_n(X_n) = v_n(X_n)\}$ est un t.a. optimal pour le problème. Montrer que si \tilde{T} est un autre t.a. optimal, alors on doit avoir $T = \tilde{T}$ presque sûrement (suggestion: commencer par montrer que sur l'événement $\{T = n\}$ on a $Y_n = V_n$).
- Montrer que dans ce problème le t.a. optimal T peut être mis dans la forme

$$T = \inf \{n \geq 1 : X_n \geq \gamma\}$$

et que γ satisfait $\gamma = E[\max(X_1, \gamma)]$.

- Expliquer le lien entre le seuil γ et le gain moyen optimal $V = \sup_{T \geq 1} E[Y_T]$.
- Donner une expression pour γ dans le cas $X_n \sim U([0, 1])$ et $\gamma = 1/2$.

2. Ne jamais trop tard pour s'arrêter.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite iid de v.a. Bernoulli(1/2). On considère le processus des gains

$$Y_n = (2^n \gamma) X_1 \dots X_n, \quad Y_0 = 0.$$

- Montrer que $\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n = +\infty$.
- Montrer que $E[\sup_{n \geq 1} Y_n] = +\infty$.
- Montrer que le problème d'arrêt associé admet aucun t.a. optimal.