

Kavite İçerisinde Bir Sinyal Tarafından Uyarılan Solenoidal ve İrrotasyonel Modal Alanların Evrimi

Evolution of the Solenoidal and Irrotational Modal Fields in a Cavity Excited by a Signal

Fatih Erden
Dept. of Electronics Engineering
Turkish Naval Academy
Istanbul, Turkey
ferden@dho.edu.tr

Oleg A. Tretyakov
Dept. of Electronics Engineering
Gebze Technical University
Kocaeli, Turkey
o.tretyakov@gmail.com

Ünal Biçer
Dept. of Electronic Systems Engineering
Naval Science and Engineering Institute
Istanbul, Turkey
unalbicer@ymail.com

Özetçe — Bu çalışmada; ilk olarak, elektromanyetik teoriye evrimsel yaklaşım (ETEY) metodunun kısa bir özeti sunulmuş, ikinci olarak da, bir kavite içerisinde zamana bağlı bir sinyal (örneğin bir sinusoidal) tarafından uyarılan elektromanyetik salınımlar ETEY çerçevesinde zaman domeninde incelenmiştir. Alanları uyarıcı bir sinyal Maxwell denklemleri içine, koordinatların ve zamanın bir fonksiyonu olarak elektrik akım yoğunluğu aracılığıyla yerleştirilmiştir. Sinyal, zamanda integrallenebilir isteğe bağlı bir fonksiyon olabilir. Zamana bağlı genlikler içeren modal alan açılımları türetilmiştir. Modal genlikler, geçici bir sinyal fonksiyonunun integrandın içerisinde bulunduğu, basit konvolüsyon integralleri formunda elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler — Maxwell denklemleri; sinyaller; elektromanyetik teoriye evrimsel yaklaşım; zaman domen; nedensellik.

Abstract — In this study; first, an outline of the evolutionary approach to electromagnetics (EAE) is presented in a compact form, and secondly, electromagnetic oscillations in a cavity excited by a casual time-dependent signal (e.g. a sinusoid) is studied in the time domain within the frame of the EAE. The signal exciting the field is installed in Maxwell's equations via electric current density given as a function of coordinates and time. The signal may be an arbitrary integrable function of time. Modal field expansions with time-dependent modal amplitudes are derived. The modal amplitudes are obtained explicitly as simple convolution integrals where a temporal signal function is present at the integrands.

Keywords — Maxwell's equations; signals; evolutionary approach to electromagnetics; time domain; causality.

I. GİRİŞ

Bugünlerde, elektromanyetik teori ve uygulamalarında, *zaman domeninde sonlu farklar (finite-difference time-domain; FDTD)*, *moment metodu (method of moments, MoM)* ve *sonlu elemanlar (finite elements, FEM)* gibi nümerik metodlarla

yapılan çalışmalar oldukça popülerdir. Hesaplamalı metodlar ile yapılan bu çalışmalar bilim insanlarına nümerik bilgi sağlayabilmekte ve elektromanyetik sinyallerin zaman domeninde evrimini gösteren grafiksel sonuçlar sunabilmektedirler. Gerçekten de, bahse konu nümerik metodlar elektromanyetik dalgaların; örneğin radyo sinyallerinin, zamanla yayılması, ilerlemesi, saçılması, kırılım ve kırınımı olaylarına ilişkin çok hassas bilgiler sunabilmektedir. Bununla birlikte, nümerik sonuçlardan fiziksel anlamlar çıkarabilmek, ilgilenilen olaya ilişkin teorik bilgi sahibi olmayı gerektirir. Teorik metodlar ise bizlere, elde edilen sonuçları yorumlama, sebep-sonuç ilişkilerini araştırma ve sonuç olarak; olayların iç yüzünü kavrama imkanı sunmaktadır.

Zaman domenindeki analitik çalışmaların geçmişteki büyük bir kısmı için kullanılan Fourier ve Laplace integral dönüşümlerinin tarihsel geçmişi ile bu metodların avantaj ve dezavantajlarına ilişkin literatürde detaylı çalışmalar bulunmaktadır [1].

Frekans domenindeki zamanda harmonik (monokromatik) klasik alan teorisine alternatif olarak, 1980'lerde, zaman domeninde *elektromanyetik teoriye evrimsel yaklaşım (ETEY)* metodunun [2] önerilmesinin ardından bu yeni yaklaşım ile; sonlu zamanlı analog ve sayısal işaretlerin oluşturduğu kavite salınımlarına ilişkin çeşitli uygulama örnekleri üzerinde çalışılmıştır [3]-[7]. Ele alınan bu yeni yaklaşım, yakın geçmişte zamanda harmonik klasik alan teorisine alternatif olarak kabul edilmiştir [8].

Bu çalışmada, *ETEY* metodunun kısa bir şeması, pratik uygulama tavsiyeleri ile birlikte sunulmuş, bu yeni yaklaşımın; bir mikrodalga kavite içerisindeki zaman domen süreçlerini sergileme konusundaki yeterliliği gösterilmiştir. Kavite, hemen her mikrodalga sisteminde bulunan karakteristik bileşenlerdendir. Çalışmada, kavite içerisindeki alanları uyarıcı sinyal fonksiyonu olarak, nedensellik prensibini sağlamak üzere zamanda başlangıcı olan bir sinusoidal seçilmiştir.

II. ELEKTROMANYETİK TEORİYE EVRİMSEL YAKLAŞIM'IN ANA HATLARI

A. Maxwell Denklemleri'nden Kendine-Eşlenik Bir Operatör Türetilmesi

Zaman-domeninde *gerçek-değerli* altı bileşenli bir "elektromanyetik" alan vektörü $\mathcal{X}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathcal{X}(\mathbf{r}, t) = \text{col}(\mathcal{E}(\mathbf{r}, t), \mathcal{H}(\mathbf{r}, t)) \quad (1)$$

\mathbf{r} gözlem noktasının konum vektörü, t gözlem zamanı, $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ ve $\mathcal{H}(\mathbf{r}, t)$ elektrik ve manyetik alan vektörleri, col *kolon vektörü*. olmak üzere tanımlansın. σ kavitenin V hacmi içerisindeki olası kayıpları modelleyen iletkenlik, $\mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t)$ ve $\mathcal{J}_h(\mathbf{r}, t)$ kavite içerisinde sırasıyla elektrik ve manyetik alanları uyarmak üzere uygulanan kaynaklar, \mathfrak{R} 6×6 matris *türev prosedürü*

$$\mathfrak{R}\mathcal{X}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \epsilon_0^{-1} \nabla \times \\ \mu_0^{-1} \nabla \times & \mathcal{O} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

ve \mathbf{n} mükemmel iletken kapalı kavite yüzeyi S 'den dışarıya doğru birim vektör olmak üzere; $[\mathbf{n} \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t)]|_S = 0$ ve $(\mathbf{n} \cdot \mathcal{H}(\mathbf{r}, t))|_S = 0$ *sınır koşulları*'nın \mathfrak{R} ile birleşiminden oluşan \mathfrak{R} *kendine-eşlenik* operatörün

$$\mathfrak{R}\mathcal{X} = \begin{cases} \mathfrak{R}'\mathcal{X}, & \mathbf{r} \in V, \mathbf{r} \notin S, \\ \mathbf{n} \times \mathcal{E} = 0, \mathbf{n} \cdot \mathcal{H} = 0, & \mathbf{r} \notin V, \mathbf{r} \in S. \end{cases} \quad (3)$$

yardımla

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \sigma \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \partial_t \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) - \mathcal{J}_h(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (4)$$

Maxwell denklemleri sınır koşulları ile birlikte altı bileşenli bir denklem şeklinde yazılabilir:

$$\mathfrak{R}\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \partial_t \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + (\sigma/\epsilon_0) \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0^{-1} \mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t) \\ -\partial_t \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) - \mu_0^{-1} \mathcal{J}_h(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$t < 0$ iken akım yoğunlukları $\mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t) = 0$ ve $\mathcal{J}_h(\mathbf{r}, t) = 0$ olduğundan, problemin çözümü *nedensellik prensibi*

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Leftarrow \quad t < 0. \quad (6)$$

ile uyumlu olmalıdır.

Denklem (2) ve (3) incelenecek olursa \mathfrak{R} operatörünün sadece konumsal \mathbf{r} değişkeni üzerinde etkisinin olduğu, zaman değişkeni t 'nin ise bir parametre rolü oynadığı görülür. Bu durum; V domeninde iki defa türevlenebilir, S sınırları üzerinde (3)'teki ile aynı sınır koşullarına tabi, *gerçek değerli* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ vektör fonksiyonlarından oluşan altı bileşenli $\mathfrak{X}(\mathbf{r})$,

$$\mathfrak{X}(\mathbf{r}) = \text{col}(\mathbf{E}(\mathbf{r}), \mathbf{H}(\mathbf{r})); \quad \begin{cases} [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_S = 0, \\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})|_S = 0 \end{cases} \quad (7)$$

elemanlarının oluşturduğu *fonksiyonel* bir *çözümler uzayı* sunmayı önerir. Burada, $\mathfrak{X}_1(\mathbf{r}) = \text{col}(\mathbf{E}_1(\mathbf{r}), \mathbf{H}_1(\mathbf{r}))$ ve $\mathfrak{X}_2(\mathbf{r}) = \text{col}(\mathbf{E}_2(\mathbf{r}), \mathbf{H}_2(\mathbf{r}))$ vektörlerinin herhangi bir çiftinden oluşan bir iç çarpım sunarak

$$\langle \mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\epsilon_0 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \mu_0 \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2) dv. \quad (8)$$

çözümler uzayını belirleyelim. Açıkça görülür ki, V kapalı domeninde değişim gösteren vektör fonksiyonlarının Hilbert uzayı $L_2(V)$ 'nda işlem yapılmaktadır.

Çift doğrusal biçimler (iç çarpımlar) arasında

$$\langle \mathfrak{R}\mathfrak{X}_1(\mathbf{r}), \mathfrak{X}_2(\mathbf{r}) \rangle - \langle \mathfrak{X}_1(\mathbf{r}), \mathfrak{R}\mathfrak{X}_2(\mathbf{r}) \rangle = 0. \quad (9)$$

fark ilişkisi geçerlidir. Bu gerçek, ω_n 'ler gerçek değerli özdeğerler, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ özdeğerlerin gerçek ekseninde dağılımını belirleyen alt indis ve $\mathfrak{X}_n = \text{col}(\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n)$ bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olmak üzere; \mathfrak{R} operatörünün *kendine-eşlenik* olduğunu ve

$$\mathfrak{R}\mathfrak{X}_n(\mathbf{r}) = \omega_n \mathfrak{X}_n(\mathbf{r}) : \quad \mathbf{r} \in V, \mathbf{r} \in S \quad (10)$$

operatör özdeğer denkleminin sağlandığını gösterir. V domeni sonlu olduğu için $\{\omega_n\}$ spektrumu ayrıktır.

B. Solenoidal ve İrrotasyonel Kavite Modlarının Tam Kümesi

\mathfrak{R} operatörünün denklem (10)'de yerine konması, $\mathfrak{X}_n = \text{col}(\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n)$ özvektörlerinin terimleri ile yazılmış

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) = \omega_n \epsilon_0 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}), & (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{r}))|_S = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) = \omega_n \mu_0 \mathbf{H}_n(\mathbf{r}), & [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r})]|_S = 0 \end{cases} \quad (11)$$

eş sınır özdeğer problemini verir. Problem (11)'in analizi, *çözümler uzayının* altı *alt uzayında* *altı* çeşit çözüm olduğunu ortaya çıkarır. $\omega_n \neq 0$ özdeğerlerine karşılık gelen çözümler, *solenoidal* vektörlerin *dört* alt uzayını verir. Eğer kavite hacmi silindirik bir kılavuzdan alınmış bir kesit ise, solenoidal vektörler fiziksel olarak, $TE-$ ve $TM-$ kavite modlarına karşılık gelir. $c^{-2} = \epsilon_0 \mu_0$ ve $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere, $\omega'_n > 0$; \mathfrak{R} operatörünün gerçek değerli özdeğerler kümesi, $\omega''_n > 0$; \mathfrak{R} operatörünün bir başka özdeğerler kümesidir. Solenoidal $TE-$ ve $TM-$ kavite modları sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}'\{\mathbf{E}'_n\} : & \quad \begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) + (\omega_n'^2 c^{-2}) \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) = 0, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_n(\mathbf{r})]|_S = \mathbf{0} \end{cases} \\ \mathfrak{H}'\{\mathbf{H}'_n\} : & \quad \begin{cases} \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) / (\omega_n' \mu_0) \\ \nabla \cdot \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}))|_S = 0 \end{cases} \\ \mathfrak{H}''\{\mathbf{H}''_n\} : & \quad \begin{cases} \nabla^2 \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) + (\omega_n''^2 c^{-2}) \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}))|_S = 0 \end{cases} \\ \mathfrak{E}''\{\mathbf{E}''_n\} : & \quad \begin{cases} \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) / (\omega_n'' \epsilon_0) \\ \nabla \cdot \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) = 0, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}''_n(\mathbf{r})]|_S = \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

sınır özdeğer problemlerinin çözümleridirler.

Denklem (10)'de ve sonuç olarak (11)'de $\omega_0 = 0$ olduğunda; $\alpha = 1, 2, \dots$ için $\kappa_\alpha^2 > 0$ özdeğerler ve ϕ_α 'lar κ_α^2 'lara karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\mathfrak{E}\{\mathbf{E}_\alpha\} : \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) = \nabla \phi_\alpha(\mathbf{r}) : \\ \nabla^2 \phi_\alpha(\mathbf{r}) + \kappa_\alpha^2 \phi_\alpha(\mathbf{r}) = 0, \\ \phi_\alpha(\mathbf{r})|_S = 0 \end{array} \right\}_{\alpha=1}^\infty \quad (14)$$

$\beta = 1, 2, \dots$ için $\nu_\beta^2 > 0$ özdeğerler ve ψ_β 'ler ν_β 'lere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\mathfrak{H}\{\mathbf{H}_\alpha\} : \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}) = \nabla \psi_\beta(\mathbf{r}) : \\ \nabla^2 \psi_\beta(\mathbf{r}) + \nu_\beta^2 \psi_\beta(\mathbf{r}) = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \psi_\beta(\mathbf{r})|_S = 0 \end{array} \right\}_{\beta=1}^\infty \quad (15)$$

problem (11)'nin iki *ayrık* sonsuz özçözüm seti vardır. Bu durum matematiksel olarak, \mathfrak{R} operatörünün özdeğeri ω_0 'ın *sonsuz* dejenerasyon derecesine sahip olduğu anlamındadır. $\{\mathbf{E}_\alpha\}_{\alpha=1}^\infty$ ve $\{\mathbf{H}_\beta\}_{\beta=1}^\infty$ kümeleri Hilbert uzayında sırasıyla \mathfrak{E}_E ve \mathfrak{E}_H şeklinde iki *alt uzay* oluştururlar. Bu alt uzaylar $\nabla \times \mathbf{E}_\alpha = \mathbf{0}$ ve $\nabla \times \mathbf{H}_\beta = \mathbf{0}$ olduğundan sadece *irrotasyonel* vektörleri içerirler.

(10) operatör denkleminin tüm \mathfrak{X}_n çözümleri $\mathfrak{M}\{\mathfrak{X}_n\}$ manifoldu ile belirtilsin ve \oplus notasyonu çözümler uzayında alt uzayların *doğrudan toplama*'sını sembolize etmek üzere

$$\mathfrak{M}\{\mathfrak{X}_n\} = \begin{matrix} \mathfrak{E}\{\mathbf{E}_{n,\alpha}\} \\ \mathfrak{H}\{\mathbf{H}_{n,\beta}\} \end{matrix} = \begin{matrix} \mathfrak{E}'\{\mathbf{E}'_n\} \oplus \mathfrak{E}''\{\mathbf{E}''_n\} \oplus \mathfrak{E}_E\{\mathbf{E}_\alpha\} \\ \mathfrak{H}'\{\mathbf{H}'_n\} \oplus \mathfrak{H}''\{\mathbf{H}''_n\} \oplus \mathfrak{E}_H\{\mathbf{H}_\beta\} \end{matrix} \quad (16)$$

şeklinde gösterilsin.

Üç önemli yorum: 1. $\mathfrak{M}\{\mathfrak{X}_n\}$ manifoldunun Hilbert uzayı $L_2(V)$ 'nda tamlığı fonksiyonel analizdeki Weyl teoremi [11] ile ispatlanmıştır [2]. **2.** Bütün altı bileşenli \mathfrak{X}_n vektörleri, \mathfrak{R} operatörünün kendine-eşlenik özvektörleri olarak, Hilbert uzayı $L_2(V)$ 'nda birbirlerine diktir. \mathfrak{X}_n 'in üçer bileşenli kısımları olan $\mathbf{E}_{n,\alpha}$ ve $\mathbf{H}_{n,\beta}$ de aynı şekilde birbirlerine diktir. Uygun normalizasyon; bütün $\mathbf{E}_{n,\alpha}$ ve $\mathbf{H}_{n,\beta}$ vektörlerinin, sırasıyla $V m^{-1}$ (volt per meter) ve $A m^{-1}$ (ampere per meter) fiziksel boyutlarını sağlayabilir. Bu anlamda, (16) manifoldu (16) kavite alanları için fiziksel anlamda bir *modal bazdır*. **3.** Modal bazın türetilmesi sürecinde, (5) *Maxwell denklemlerinde* ∂_t zamanda türev ifadesi korunmuş ve böylece modal genlikler için zamanda türev içeren bir problem elde edilmesi sağlanabilmiştir.

C. Zamana Bağlı Elektromanyetik Büyüklüklerin Modal Açılımları

Modal bazın vektör elemanları bilinen büyüklükler olarak değerlendirilmek üzere, elektrik ve manyetik alan vektörleri zaman domeninde modal açılımlar yolu ile

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) &= \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^\infty e'_n(t) \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) \\ + \sum_{n=1}^\infty e''_n(t) \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) \\ + \sum_{\alpha=1}^\infty a_\alpha(t) \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) &= \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^\infty h'_n(t) \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) \\ + \sum_{n=1}^\infty h''_n(t) \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) \\ + \sum_{\beta=1}^\infty b_\beta(t) \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

şeklinde gösterilebilir. Problem, *modal genlikler* olan fiziksel olarak boyutsuz zamana bağlı *skaler katsayıların bulunmasıdır*. (5) Maxwell denklemlerindeki uygulanan kaynak fonksiyonları, yani, \mathcal{J}_e ve \mathcal{J}_h , uygun bir şekilde belirlenmeli ve ardından

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t) &\stackrel{def}{=} \epsilon_0 \varpi_e \mathbf{e}(\mathbf{r}) E(t) \\ \mathcal{J}_e(\mathbf{r}, t) &= \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^\infty j'_n(t) \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) \\ + \sum_{n=1}^\infty j''_n(t) \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) \\ + \sum_{\alpha=1}^\infty j_\alpha(t) \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) \end{array} \right\} \\ \mathcal{J}_h(\mathbf{r}, t) &\stackrel{def}{=} \mu_0 \varpi_h \mathbf{h}(\mathbf{r}) H(t) \\ \mathcal{J}_h(\mathbf{r}, t) &= \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=1}^\infty i'_n(t) \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) \\ + \sum_{n=1}^\infty i''_n(t) \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) \\ + \sum_{\beta=1}^\infty i_\beta(t) \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}) \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

şeklinde, benzer modal açılımlarla sunulmalıdır. Tanımda olduğu gibi, uygulanan \mathcal{J}_e ve \mathcal{J}_h kaynak vektör fonksiyonları elektrik ve manyetik akımların yoğunluklarının sırasıyla $A m^{-2}$ ve $V m^{-2}$ fiziksel boyutlarına sahiptir. Bundan dolayı, skaler ϖ_e ve ϖ_h *serbest parametreleri* s^{-1} frekans boyutlarına, uygulanan sinyal taşıyıcıların vektör fonksiyonları $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ sırasıyla $V m^{-1}$ ve $A m^{-1}$ boyutlarına sahip olmalıdır. Uygulanan sinyalin zaman bağımlılığını belirleyen $E(t)$ ve $H(t)$ skaler fonksiyonları, boyutsuz olmalıdır. (18) modal açılımlarında, zamana bağlı bütün skaler katsayılar boyutsuzdur.

D. Modal Genlikler İçin Evrimsel Denklemler: Cauchy Problemi

Modal genlik problemi, zaman türevli Maxwell denklemleri modal bazın elemanları üzerine izdüşüm alınarak düzenlenebilir. Özellikle, Maxwell denklemlerinin, sırasıyla \mathfrak{E}' ve \mathfrak{H}' altuzaylarından alınmış olan, eşlenmiş iki \mathbf{E}'_n ve \mathbf{H}'_n elemanı üzerine izdüşümünün alınması, sonuç olarak $e'_n(t)$ ve $h'_n(t)$ genlikler çifti için;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} e'_n + 2\gamma e'_n - \omega'_n h'_n = -\varpi_e A'_n E(t) \\ \frac{d}{dt} h'_n + \omega'_n e'_n = -\varpi_h B'_n H(t) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} e'_n(0) = 0 \\ h'_n(0) = 0 \end{array} \right. \quad (19)$$

şeklinde zaman türevli bir çift adi diferansiyel denklemi ¹ verir. Burada $n = 1, 2, \dots$, $\gamma = \sigma/(2\epsilon_0)$, A'_n ; $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ vektörünün \mathbf{E}'_n elemanı üzerine izdüşümü, ve B'_n ; $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ vektörünün \mathbf{H}'_n elemanı üzerine izdüşümüdür. Zaman türevli Maxwell denklemleri vektör alanları için başlangıç koşulları ile tamamlanmalıdır. Burada başlangıç koşullarının $\mathcal{E}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{0}$ ve $\mathcal{H}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{0}$ olarak alınması denklem (19)'deki modal genlikler için bir çift başlangıç koşulunu verir. Denklem (19)'de başlangıç koşulları ile birlikte ele alınan evrimsel denklemler e'_n ve h'_n modal genlikleri için tek bir çözüme sahip ² *Cauchy problemini* oluşturur. Benzer prosedür akupile $e''_n(t)$ ve $h''_n(t)$ genlikler çifti için bir başka Cauchy problemini

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} e''_n + 2\gamma e''_n - \omega''_n h''_n = -\varpi_e A''_n E(t) \\ \frac{d}{dt} h''_n + \omega''_n e''_n = -\varpi_h B''_n H(t) \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} e''_n(0) = 0 \\ h''_n(0) = 0 \end{array} \right. \quad (20)$$

verir. Burada $n = 1, 2, \dots$, A''_n ve B''_n ; $\mathbf{e}(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ vektörlerinin sırasıyla \mathbf{E}''_n ve \mathbf{H}''_n elemanları üzerine izdüşümüdür.

Benzer olarak, irrotasyonel $a_\alpha(t)$ and $b_\beta(t)$ modları için

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} a_\alpha + 2\gamma a_\alpha = -\varpi_e A_\alpha^0 E(t), \quad a_\alpha(0) = 0 \\ \frac{d}{dt} b_\beta = -\varpi_h B_\beta^0 H(t), \quad b_\beta(0) = 0 \end{array} \right\} \quad (21)$$

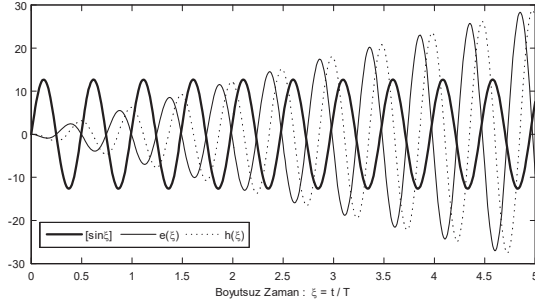
Cauchy problemleri elde edilir. (21) temel bir konvolüsyon integrali problemidir. (19) ve (20) problemlerinin açık çözümü "üstel matris" metodu ile bulunabilir [3]-[8]. Bu metod Fourier veya Laplace integral dönüşümlerinin kullanılmasına ihtiyaç duymadığından çeşitli geçici ve devamlı sinyallerin incelemesinde kullanmak için uygundur.

¹Matematikçiler zaman türevi içeren bütün diferansiyel denklemleri *evrimsel denklemler* olarak adlandırırlar.

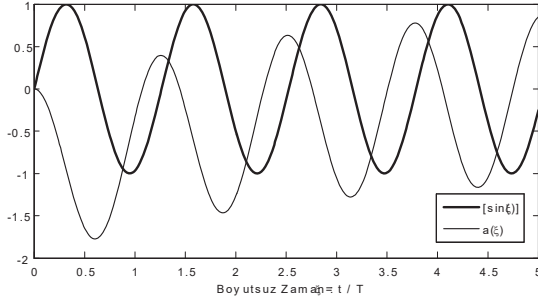
²Herhangi bir Cauchy probleminin çözümü; bir fiziksel sistemin başlangıç koşulları ile tanımlanan ilk durumundan gözlem zamanındaki durumuna kadar *zamanla nasıl gelişim gösterdiğini* (yani, *evrim geçirdiğini*) verir.

III. GRAFİKSEL SONUÇLAR

Kavite içerisindeki alanların zamanda bir başlangıcı olan sinusoidal sinyal ile uyarılması problemine ilişkin solenoidal modal genliklere ait zamanla değişim grafikleri Şekil 1’de, irrotasyonel genliklere ait zamanla değişim grafiği Şekil 2’de sergilenmiştir. Şekil 1, zamanda harmonik sinyal frekansı ile kavite özfrekansının örtüştüğü rezonans durumuna aittir.



Şekil 1. Sinusoidal sinyal ve uyarılan solenoidal alanlara $[e(\xi)$ ve $h(\xi)]$ ait modal genlikler.



Şekil 2. Sinusoidal sinyal ve uyarılan irrotasyonel alan modal alanı ait genlikler $[a(\xi)]$.

IV. DEĞERLENDİRME

1. Herhangi bir *zaman domen*i probleminde, problemin formülasyonu zamanda harmonik alan problemlerinde yer almayan ilave iki gereksinimi içermelidir.

Başlangıç koşulları: Zaman türevli Maxwell denklemleri *hiperbolik* kısmi diferansiyel denklemler sınıfına dahil olduğundan başlangıç koşullarına ihtiyaç duyarken, *zamanda harmonik* Maxwell denklemleri *eliptik* tip diferansiyel denklemler sınıfına dahildir ve başlangıç koşullarına ihtiyaç duymazlar.

Nedensellik prensibi: Gerçeğe uygun bir kaynak fonksiyonu zamanda bir başlangıca sahiptir. Oysa, bilindiği gibi; zamanda harmonik alanlar $t = -\infty$ anında başlar ve $t = +\infty$ anına kadar devam ederler.

Problemin formülasyonu konum ve zamanda değişim gösteren *ölçülebilir* fiziksel elektromanyetik sinyaller için verilmiştir. Bundan dolayı, alanlar, ölçülebilir fiziksel büyüklükler olan, koordinatların ve zamanın *gerçek değerli* fonksiyonları ile modellenmiştir. Böylece, *ETEY* elde edilen sonuçların fiziksel olarak yorumlanmasına olanak sağlamaktadır.

2. Kavite içerisindeki elektrik ve manyetik alanlar, *zamana bağlı* modal genlikler olarak, *solenoidal* ve *irrotasyonel*

kavite modlarının tam kümesi üzerine modal açılımlar şeklinde türetilmiştir. Modal genlikler, integrasyon değişkeninin zaman olduğu, problemin çözümünün aşağıdaki özellikleri sağladığı basit konvolüsyon integralleri olarak elde edilmiştir:

- başlangıç koşulları ve nedensellik prensibini sağlar;
- kavite içerisindeki alanları uyararak verilmiş bir sinyalin zamana bağlı kısmı, konvolüsyon integralinin integrandında *parametrik* bir faktör olarak yer alır;
- son belirtilen özellik, zamana bağlı geniş bir sinyal grubunun sadece bir kısıtlama hariç incelenmesine olanak verir: sinyal zamanda *integre edilebilir* olmalıdır.

3. Zamanda başlangıcı olan bir sinusoidal sinyal kaynağının *irrotasyonel* modları da kavite içerisinde zaman bağımlı olarak uyardığı görülmüştür.

4. Bu çalışma kavitenin ortamsız (oyuk) olduğu durumla sınırlı tutulmuştur. Kavite içerisinde *dispersif* veya *plazma* gibi dinamik bir ortam olması durumunda, zaman türevli Maxwell denklemleri *dinamik* bünye denklemleri ile desteklenmelidir. Literatürde, metodun çift üstel fonksiyon ile modellenen yıldırım darbesi gibi sinyaller ile uyarılan [5], [6] ve farklı ortam özelliklerine sahip [6], [9] kavite ve dalga kılavuzu alanları için uygulamaları [10] mevcuttur.

KAYNAKÇA

- [1] Dvorak, S. L., Dudley, D. G., “Propagation of ultra-wide-band electromagnetic pulses through dispersive media,” *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. 37 (2), 192-200, 1995. <http://dx.doi.org/10.1109/15.385883>
- [2] Tretyakov, O.A., “Essentials of nonstationary and nonlinear electromagnetic field theory,” Chapter 3 in *Analytical and numerical methods in electromagnetic wave theory*, Hashimoto, M., Idemen, M., and Tretyakov, O. A. (Eds.), Science House Co. Ltd., Tokyo, 1993.
- [3] Aksoy, S. and Tretyakov, O. A., “The evolution equations in study of the cavity oscillations excited by a digital signal,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 52, 263–270, 2004. <http://dx.doi.org/10.1109/TAP.2003.822399>
- [4] Erden F., Tretyakov, O.A., “Solenoidal Eşlenmiş Dejenere Kavite Modlarının Zaman Domeni Salınımları,” *II. URSI-Türkiye 2004 Bilimsel Kongresi*, 8-10 Eylül 2004, Bilkent Üniversitesi, Ankara, 204-206. www.ursi.org.tr/2004_kongre/BU56.PDF
- [5] Erden, F., Tretyakov, O. A., “Excitation by a transient signal of the real-valued electromagnetic fields in a cavity,” *Phys. Rev. E*, 77, 2008, p 056605. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.77.056605>
- [6] Tretyakov, O.A., Erden F., “Temporal Cavity Oscillations Caused by a Wide-Band Waveform,” *PIER B*, Vol. 6, 183-204, 2008. <http://dx.doi.org/10.2528/PIERB08031222>
- [7] Erden, F., Tretyakov, O. A., “Analytical Approach for Studying a Time-Domain Cavity Problem,” *2014 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI National Radio Science Meeting*, July 6-11, 2014, Memphis, TN, USA, 131-132. <http://dx.doi.org/10.1109/APS.2014.6904397>
- [8] Tretyakov, O. A., Erden, F., “Evolutionary Approach to Electromagnetics as an Alternative to the Time-Harmonic Field Method,” *2012 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI National Radio Science Meeting*, July 8-14, 2012, Chicago, IL, USA. <http://dx.doi.org/10.13140/2.1.2283.4242>
- [9] Erden, F., “Evolution of a double-exponential pulse signal in a rectangular cavity filled with a plasma,” *2015 23rd International Conference on Software, Telecommunications and Computer Networks (SoftCOM)*, Sept. 16-18, 2015, Split, Croatia, 69-72. <http://dx.doi.org/10.1109/SoftCOM.2015.7314092>
- [10] Akgun, O., Tretyakov, O.A., “Solution to the Klein-Gordon equation for the study of time-domain waveguide fields and accompanying energetic processes,” *IET MAP*, 9, (12), pp. 1337-1344, 2015.
- [11] Weyl, H., “The method of orthogonal projection in potential theory,” *Duke Math. J.*, Vol. 7, 411-444, January 1940.