

Algorytmy i struktury danych

Algorytmy dokładne i przybliżone na przykładzie
zagadnienia plecakowego

Ewa Figielska

0-1 problem plecakowy

■ Sformułowanie

Dysponujemy kwotą w wysokości b , którą w nadchodzącym roku możemy zainwestować w realizację pewnych projektów. Rozważamy n projektów. Dla każdego projektu j znamy wymagane dla niego nakłady a_j oraz spodziewany zysk c_j . Celem jest wybór do realizacji zbioru projektów, tak żeby budżet nie został przekroczony, a spodziewany zysk był maksymalizowany.

■ Metody rozwiązywania:

1. Wygenerowanie wszystkich podzbiorów zbioru projektów – algorytm dokładny.
2. Algorytm programowania dynamicznego – algorytm dokładny.
3. Algorytm zachłanny – algorytm przybliżony.

Wyznaczenie i ocena wszystkich możliwych podzbiorów projektów (algorytm wykładniczy dokładny)

Przykład, dane:

n=4

b=10

| projekt | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------|---|---|----|---|
| zysk | 3 | 9 | 12 | 8 |
| nakłady | 2 | 5 | 6 | 5 |

Dla n projektów:

liczba wszystkich podzbiorów = 2^n

Złożoność obliczeniowa: $O(2^n)$

| | podzbiór | całkowite nakłady | całkowity zysk | |
|----|--------------|----------------------|-------------------|---|
| 1 | \emptyset | 0 | 0 | |
| 2 | {1} | 2 | 3 | |
| 3 | {2} | 5 | 9 | |
| 4 | {3} | 6 | 12 | |
| 5 | {4} | 5 | 8 | |
| 6 | {1,2} | 7 | 12 | |
| 7 | {1,3} | 8 | 15 | |
| 8 | {1,4} | 7 | 11 | |
| 9 | {2,3} | 11 | | budżet przekroczony - rozwiązanie niedopuszczalne |
| 10 | {2,4} | 10 | 17 | największy zysk (17) - rozwiązanie optymalne |
| 11 | {3,4} | 11 | | rozwiązanie niedopuszczalne |
| 12 | {1,2,3} | 13 | | rozwiązanie niedopuszczalne |
| 13 | {1,2,4} | 12 | | rozwiązanie niedopuszczalne |
| 14 | {1,3,4} | 13 | | rozwiązanie niedopuszczalne |
| 15 | {2,3,4} | 16 | | rozwiązanie niedopuszczalne |
| 16 | {1,2,3,4} | 18 | | rozwiązanie niedopuszczalne |

$n=4$ $b=10$

się przejść



Algorytm zachłanny

(algorytm wielomianowy przybliżony)

- 1 Umieść projekty na liście w kolejności nierosnących wartości ilorazu zysk/nakłady
- 2 Wybieraj do realizacji kolejne projekty z listy, tak aby nie przekroczyć budżetu

Kolejność: **3, 2, 4, 1**

| projekt | decyzja | zbiór wynikowy | całkowity zysk | pozostały budżet |
|---------|---|-------------------|-------------------|---------------------|
| 3 | wybrany | {3} | 12 | 4 |
| 2 | pominięty - nie dysponujemy wystarczającym budżetem | | | |
| 4 | pominięty - nie dysponujemy wystarczającym budżetem | | | |
| 1 | wybrany | {3,1} | 15 | 2 |

Rozwiązanie przybliżone:

Inwestujemy w projekty 3 i 1, co daje zysk 15

Ocena dokładności algorytmu przybliżonego:

Należy wyznaczyć względne odchylenie rozwiązania przybliżonego od wartości optymalnej

$$\delta = \frac{|z^{opt} - z|}{z^{opt}} \times 100\%$$

z^{opt} rozwiązanie optymalne (właściwie: wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego)

z rozwiązanie przybliżone

δ względne odchylenie rozwiązania otrzymanego algorytmem przybliżonym od wartości optymalnej

Na podstawie otrzymanych rozwiązań mamy:

$$\delta = \frac{|z^{opt} - z|}{z^{opt}} \times 100\% = \frac{17 - 15}{17} \times 100\% = \frac{2}{17} \times 100\% = 11.77\%$$

Złożoność obliczeniowa = złożoności obliczeniowej zastosowanego algorytmu sortowania, np.

$O(n \log n)$

Przykład, dane:

| | n=4 | b=10 | | | |
|---------|-----|------|---|----|---|
| projekt | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| zysk | | 3 | 9 | 12 | 8 |
| nakłady | | 2 | 5 | 6 | 5 |

| | | | | |
|--------------|------|------|------|------|
| zysk/nakłady | 1.50 | 1.80 | 2.00 | 1.60 |
|--------------|------|------|------|------|

