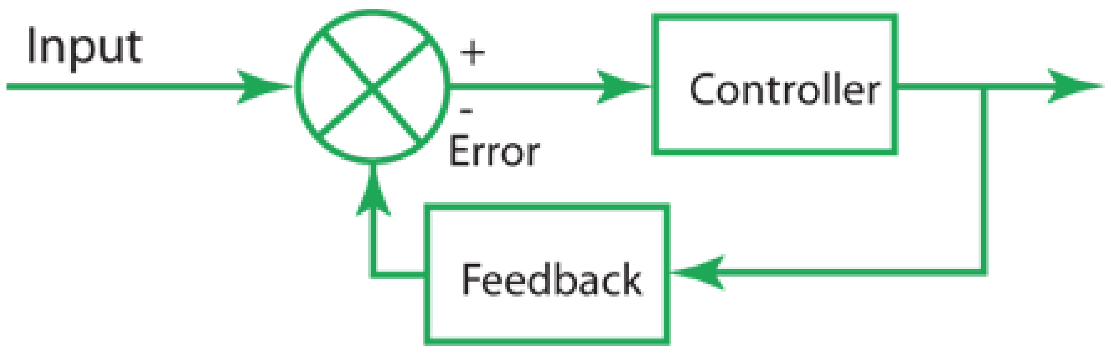


Controles

Departamento Ingeniería Electrónica,
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia

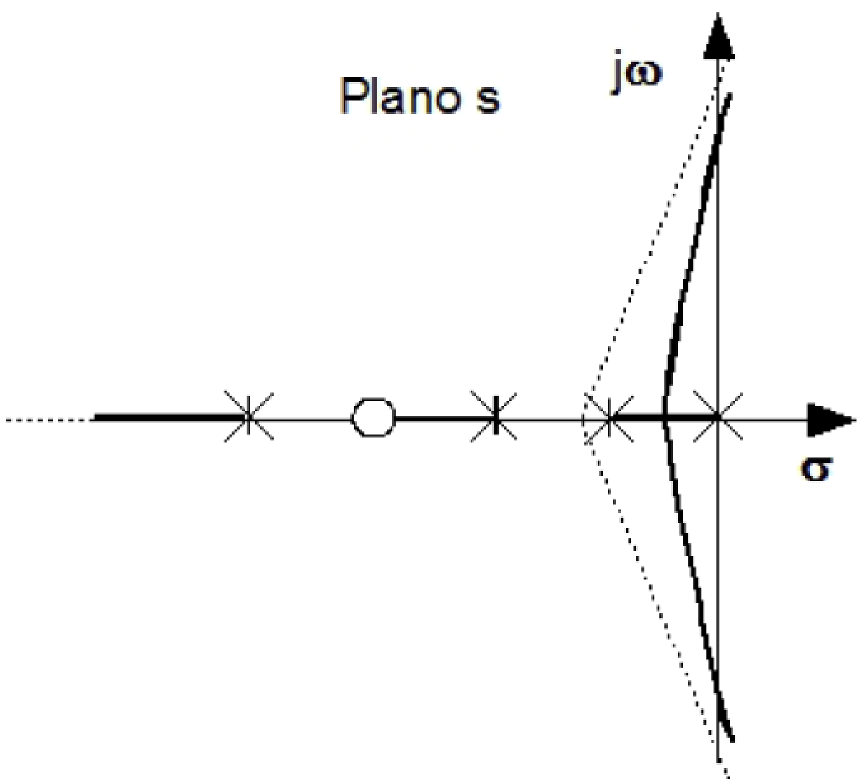
Clase 6: Diseño de Compensadores por Lugar Geométrico de las Raíces – Aproximación por polos dominantes

Prof. Gerardo Becerra, Ph.D
email: gbecerra@javeriana.edu.co

Pontificia Universidad JAVERIANA Colombia

LGR

La respuesta de un sistema en lazo cerrado está estrechamente ligada la ubicación de los polos de lazo cerrado. Es posible diseñar controladores analizando el Lugar Geométrico de las raíces (LGR)



Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Diseño por LGR

Encontrar un valor de ganancia K que ubiquen los polos del sistema en el lugar deseado.

Los polos en lazo cerrado de:

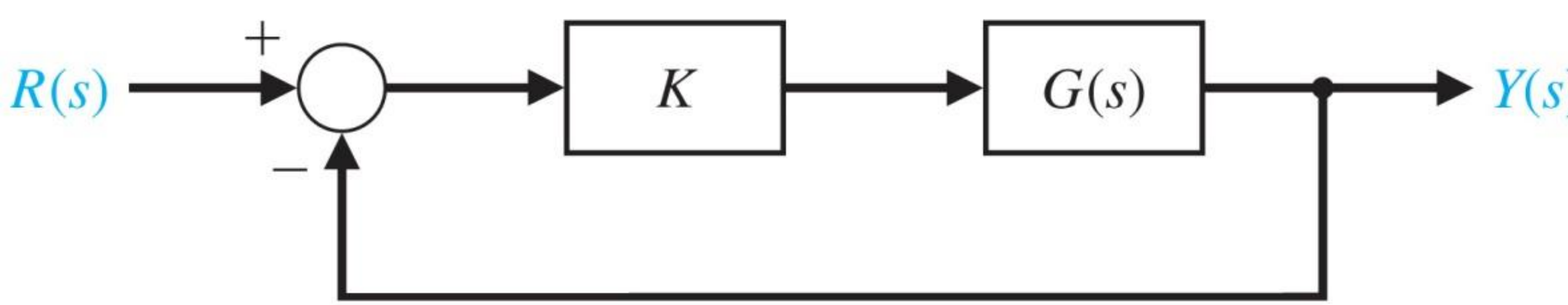


Figure: 07-01

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{zeros}{1 + K\dfrac{\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{M}(s+p_i)}}$$

Si K=0, polos LC = polos LA
Si K->∞, polos LC = ceros LA

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Diseño por LGR

$$\frac{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)+K\left(\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)\right)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}=0 \;\Rightarrow\; \prod_{j=1}^{n}(s+p_j)+K\left(\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)\right)=0 \qquad (1.8)$$

Como se puede observar en la Ec. 1.8, cuando K es igual a cero, la solución de la ecuación característica a lazo cerrado coincide con los polos de la función de transferencia a lazo abierto, en tanto que, cuando K tiende a infinito, la solución de la ecuación característica a lazo cerrado coincide con los ceros de la función de transferencia a lazo abierto. Es por ello que se concluye que **el lugar geométrico de las raíces comienza en los polos del lazo abierto y termina en los ceros del lazo abierto a medida que K aumenta desde cero hasta infinito**. También se puede concluir que el número de tramos o ramas del lugar geométrico será igual al número de polos de la función de transferencia de lazo abierto.

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Diseño por LGR

Dado que los polos en lazo cerrado debe terminar en los ceros en lazo abierto, es posible fijar los polos deseados como los ceros del controlador (a través de Ti y Td), y luego, encontrar Kp para que queden en la posición deseada.

$$PID(s) = Kp + Kds + \frac{Ki}{s}$$

En función de los tiempos:

$$PID(s) = Kp\left[1 + Tds + \frac{1}{Tis}\right]$$

Por lo tanto,

$$Kd = KpTd$$

$$Ki = \frac{Kp}{Ti}$$

$$PID(s) = Kp + KpTds + \frac{Kp}{Tis}$$

$$PID(s) = Kp\left[\frac{Tis + TiTds^2 + 1}{Tis}\right]$$

Factorizando T_iT_d:

$$PID(s) = Kp\cancel{Ti}Td\left[\frac{s/Td + s^2 + 1/TiTd}{\cancel{Ti}s}\right]$$

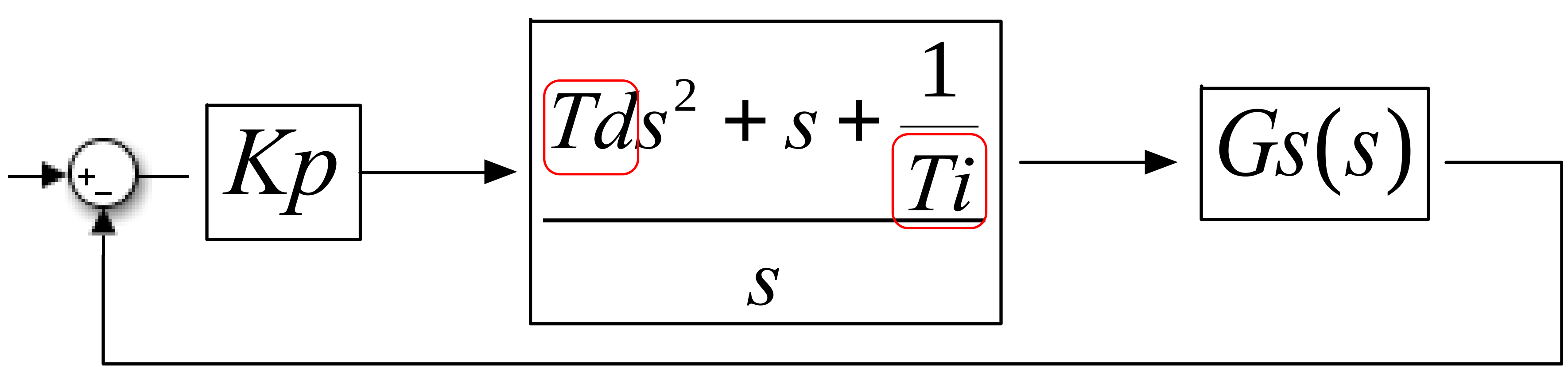
$$PID(s) = \boxed{\frac{KpTd}{s}\left[s^2 + \frac{s}{Td} + \frac{1}{TiTd}\right]}$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Diseño por LGR

Dado que los polos en lazo cerrado debe terminar en los ceros en lazo abierto, es posible fijar los polos deseados como los ceros del controlador (a través de Ti y Td), y luego, encontrar Kp para que queden en la posición deseada.

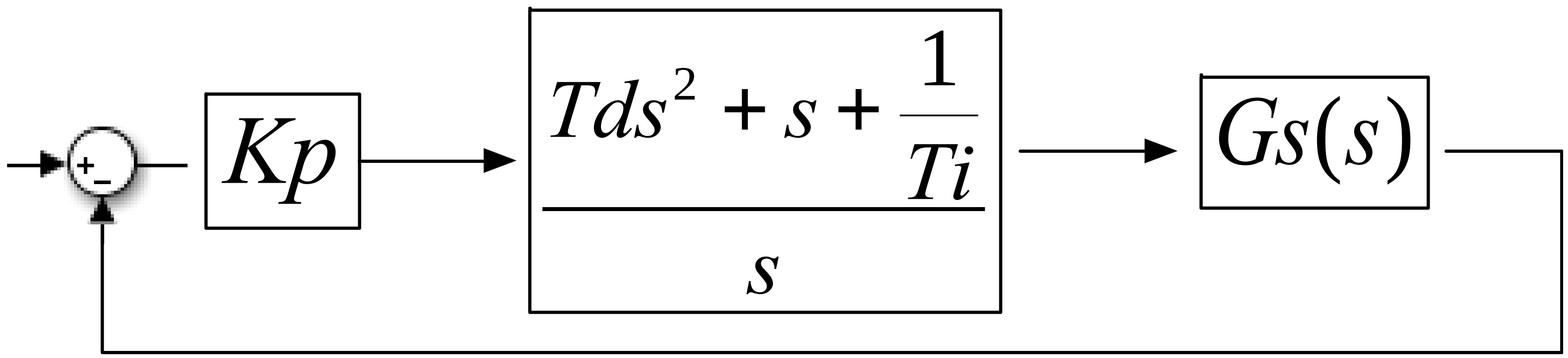
$$PID(s) = Kp\left[\frac{Tds^2 + s + {}^{1}\!/_{Ti}}{s}\right]$$



Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Diseño por LGR

Ejemplo:



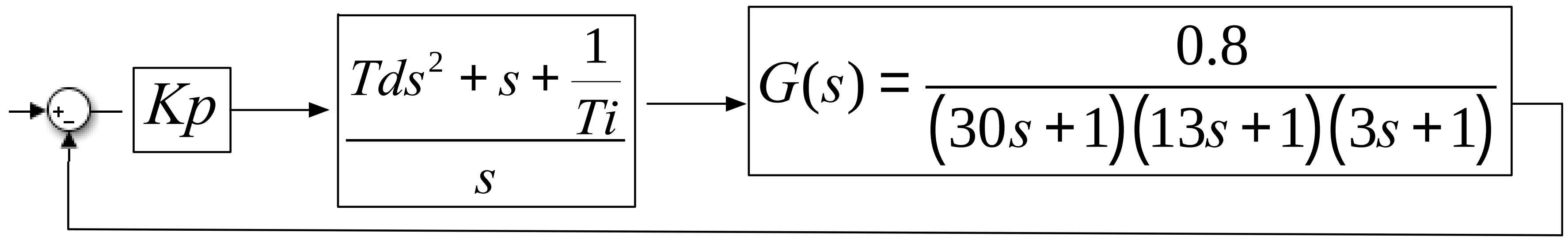
siendo: $$Gs(s) = \frac{0.8}{(30s+1)(13s+1)(3s+1)}$$

Se desea un controlador PID sintonizado por el LGR tal que tenga un sobrepico <=15% y tiempo de estabilización de 100s con Ess=0.

Pontificia Universidad JAVERIANA Colombia

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Diseño por LGR



Sobrepico <= al 15% (0.15)

$$\frac{-zp}{\sqrt{1-z^2}} £ Ln(0.15)$$

$$z £ 0.5165$$

Tiempo estabilización <=100s

$$t £ 100s$$

$$\frac{4}{w_n z} £ t, \quad \text{para } z = 0.5$$

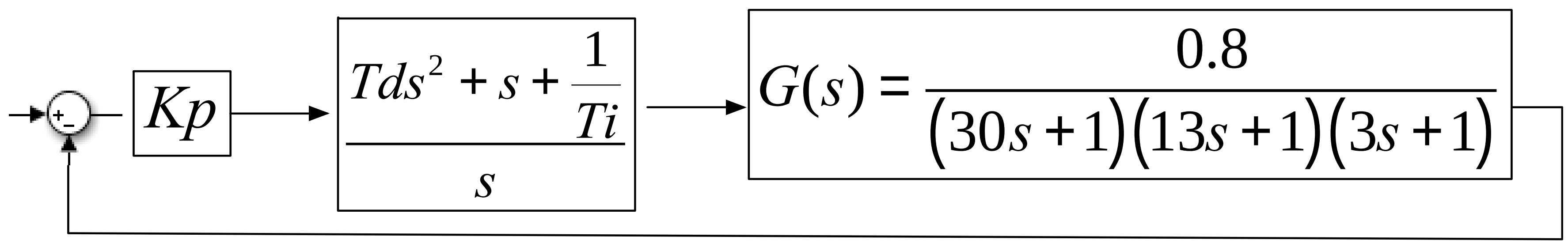
$$w_n \,{}^3\, \frac{4}{100(0.5)} = 0.08$$

Polinomio característico:

$$s^2 + 2zw_n s + w_n^2 = \boxed{s^2 + 0.08s + 0.0064}$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Diseño por LGR



Por definición del LGR, los polos en **lazo cerrado** debe terminar en los **ceros en lazo abierto**:

$$1 + K\frac{\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{M}(s+p_i)} = 0$$

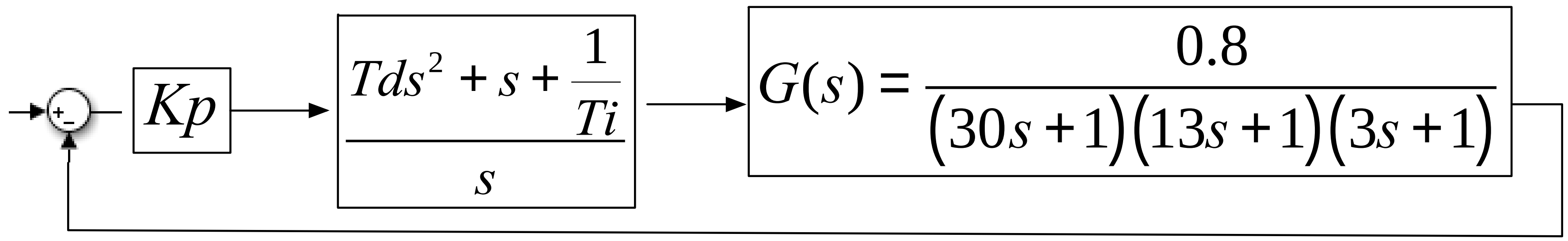
Si K=0, polos LC = polos LA
Si K->∞, polos LC = ceros LA

Ec. de lazo abierto
Del sistema:

$$G_{lazo\_abierto} = (Kp)\left(\frac{Tds^2 + s + \frac{1}{Ti}}{s}\right)\left(\frac{0.8}{(30s+1)(13s+1)(3s+1)}\right)$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Diseño por LGR



Por definición del LGR, los polos en **lazo cerrado** debe terminar en los **ceros en lazo abierto cuand K->∞**:

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j) + K\left(\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)\right) = 0$$

Factorizando Td para aislar el término cuadrático:

$$G_{lazo\_abierto} = \left(\frac{KpTd}{s}\right)\boxed{\left(s^2 + \frac{1}{Td}s + \frac{1}{TiTd}\right)}\left(\frac{0.8}{(30s+1)(13s+1)(3s+1)}\right)$$

Comparando con la Ec. característica

$$s^2 + 0.08s + 0.0064$$

$$\frac{1}{Td} = 0.08 \qquad \frac{1}{TiTd} = 0.0064$$

$$Td = 12.5 \qquad Ti = 12.5$$

Ver ejemplo control_PID_2.mdl

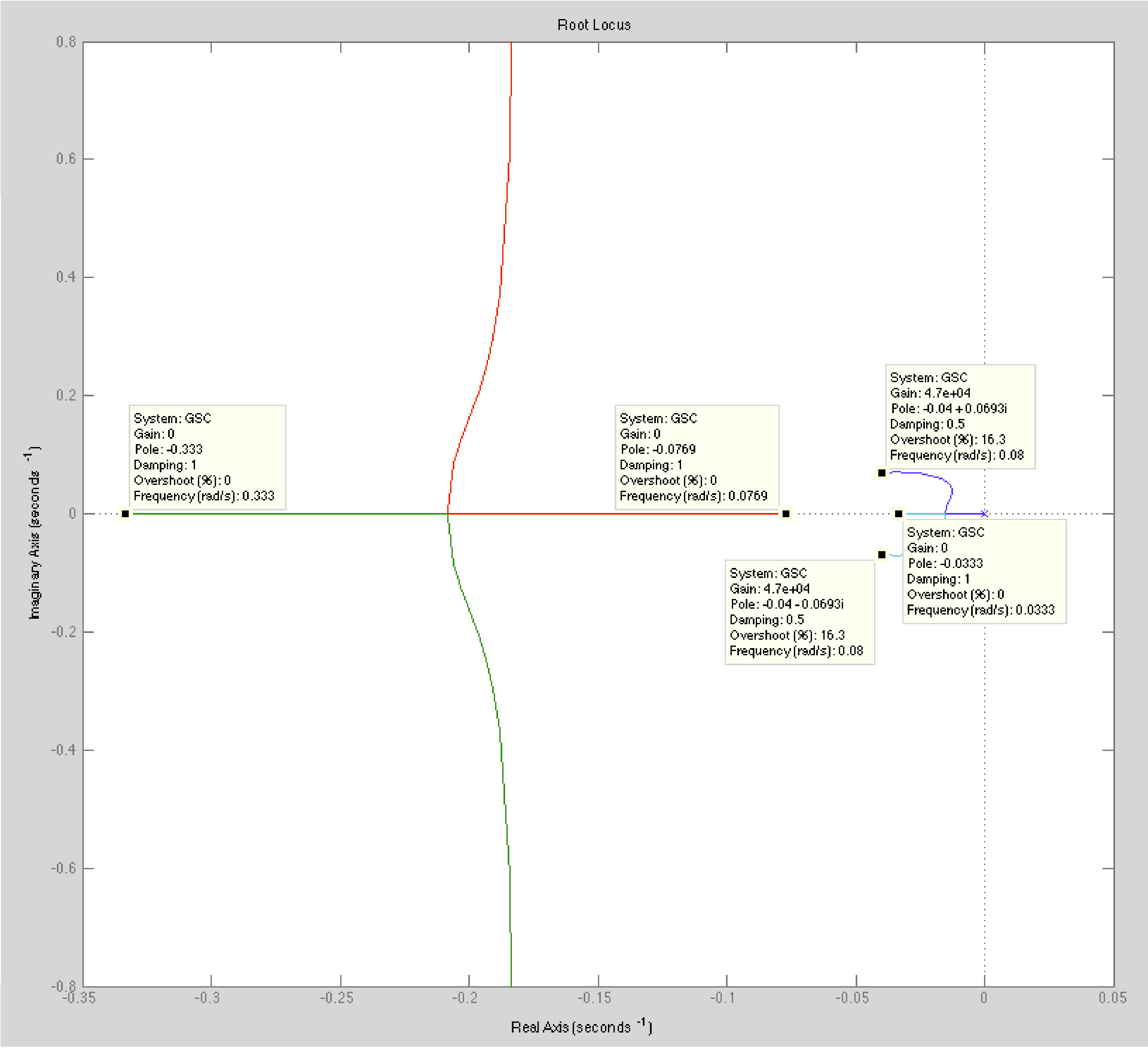
Pontificia Universidad JAVERIANA Colombia

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Diseño por LGR

Dibujando el LGR:

```
>> num=[0.8]

num =

    0.8000

>> den=[1170 519 46 1]

den =

        1170         519          46           1

>> Gs=tf(num,den)

Gs =

                0.8
  ----------------------------
  1170 s^3 + 519 s^2 + 46 s + 1

Continuous-time transfer function.

>> numc=[12.5 1 1/12.5];
>> denc=[1 0];
>> Cs=tf(numc,denc)

Cs =

  12.5 s^2 + s + 0.08
  -------------------
           s

Continuous-time transfer function.

>> GSC=Cs*Gs;
>> GLC=feedback(4,GSC,1);
>> step(GLC)
>>
```



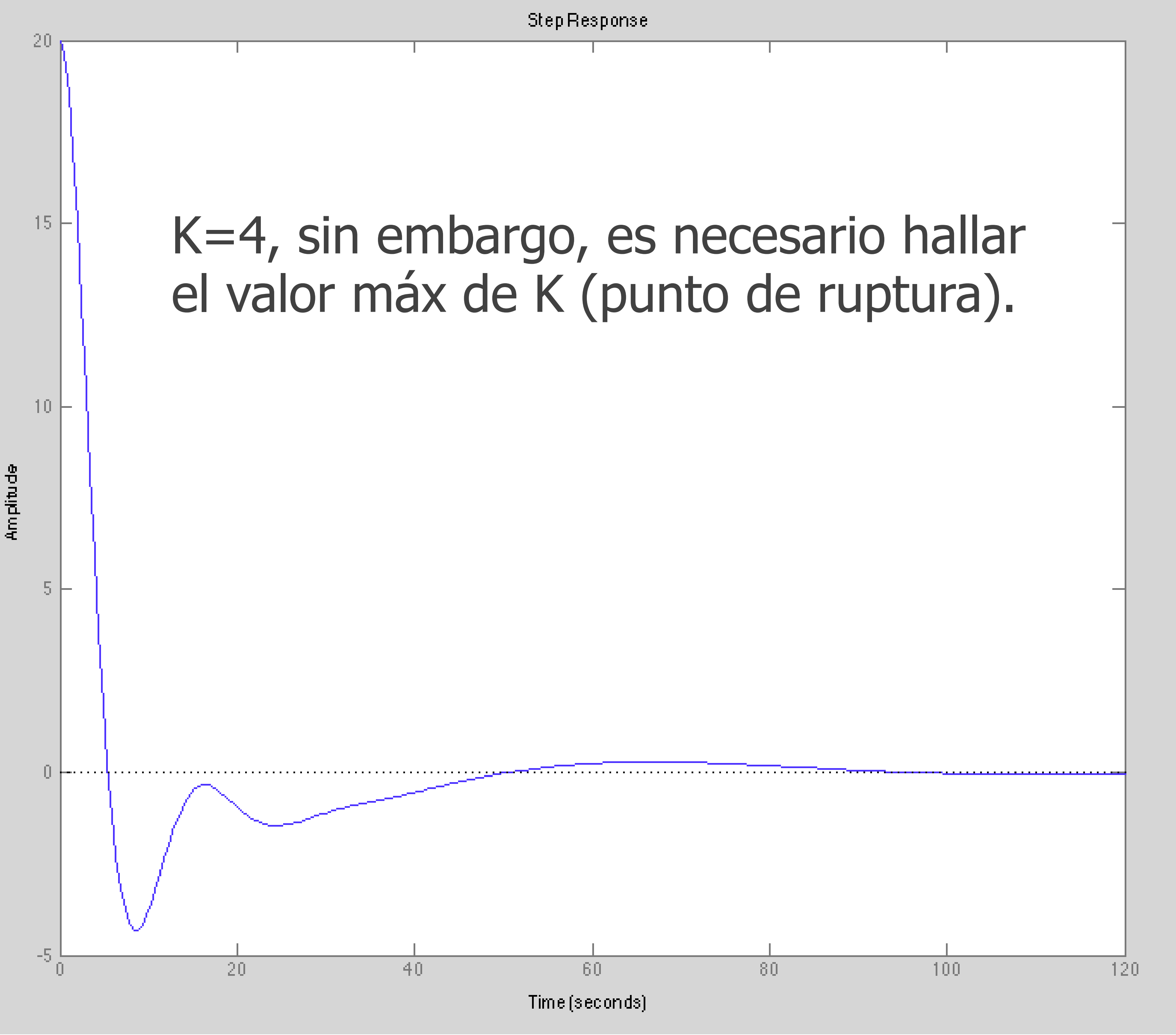
Pontificia Universidad JAVERIANA Colombia

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Diseño por LGR

Dibujando el LGR:

```
>> num=[0.8]

num =

    0.8000

>> den=[1170 519 46 1]

den =

        1170         519          46           1

>> Gs=tf(num,den)

Gs =

               0.8
  ------------------------------
  1170 s^3 + 519 s^2 + 46 s + 1

Continuous-time transfer function.

>> numc=[12.5 1 1/12.5];
>> denc=[1 0];
>> Cs=tf(numc,denc)

Cs =

  12.5 s^2 + s + 0.08
  -------------------
           s

Continuous-time transfer function.

>> GSC=Cs*Gs;
>> GLC=feedback(4,GSC,1);
>> step(GLC)
>>
```



K=4, sin embargo, es necesario hallar el valor máx de K (punto de ruptura).

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

En resumen…para calcular el LGR

Paso 1 Dibujar sobre el Plano s los polos y ceros del lazo abierto.

Paso 2 Determinar que parte del eje real pertenece al lugar geométrico. A partir de la condición de ángulo se determina que **las partes del eje real que pertenecen al lugar geométrico son aquellas que se encuentran a la izquierda de un número impar de polos y ceros**.

Paso 3 Determinar el número de asíntotas, N_A, la ubicación de su punto de partida, σ_A, y del ángulo de las mismas, ϕ_A, utilizando las Ec. 1.14, 1.15 y 1.16, respectivamente.

Paso 4 Si existe, calcular los puntos de ruptura o despegue del eje real.

Paso 5 Dibujar un esbozo completo del lugar geométrico de las raíces.

Paso 6 Si existe, calcular el corte con el eje imaginario.

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Características del LGR

Teniendo en cuenta el sig. sistema:

$$G(s)H(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Paso 1

Debido a que el lugar geométrico de las raíces comienza en los polos de lazo abierto y termina en los ceros de lazo abierto se deben dibujar sobre el Plano s dichos polos y ceros, para lo cual se utiliza la convención de marcar los polos con una "X" y los ceros con un "O". En la Fig. 1.2 se realiza este paso para el ejemplo propuesto.

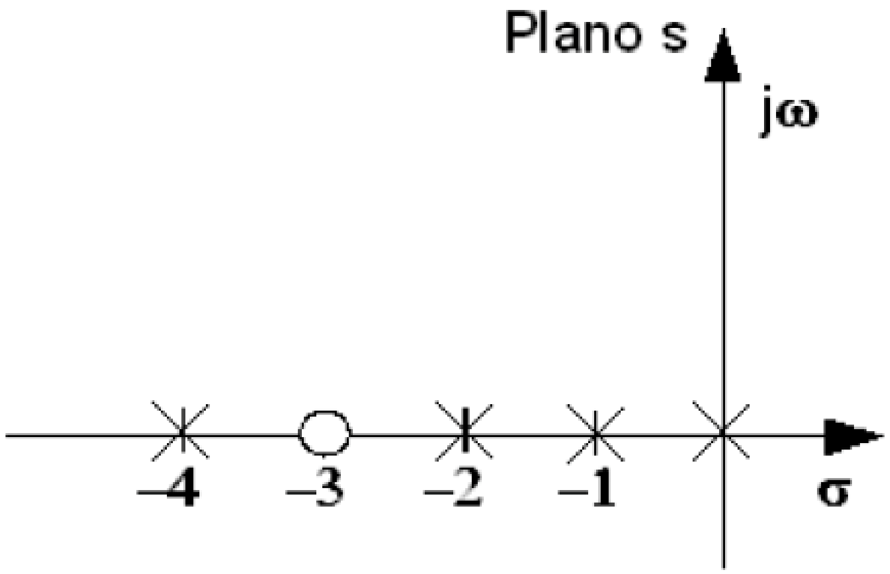


Figura 1.2: Ubicación de las raíces en el Plano s. $G(s)H(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Características del LGR

Cómo dibujar el LGR?

$$KG(s)H(s) = K\left(\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}\right) \tag{1.5}$$

$$K\left(\frac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s+p_j|}\right) = 1 \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m}[\angle(s+z_i)] - \sum_{i=1}^{n}[\angle(s+p_j)] = 180^0 \pm k360^0 \tag{1.7}$$

Las dos condiciones anteriores deben cumplirse para cada una de las raíces que formen parte del lugar geométrico, de forma tal que se garantize que cada una de ellas sea solución de la ecuación característica a lazo cerrado. Gracias a la condición de ángulo se determina la ubicación geométrica de las raíces, es decir, la forma del lugar geométrico, en tanto que la condición de módulo permite determinar el valor de la ganancia K a lo largo de dicho lugar geométrico. Cabe destacar que, dado que se están representando las raíces de una ecuación, el lugar geométrico siempre será simétrico respecto al eje real.

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Características del LGR

Cómo dibujar el LGR?

Paso 2

Utilizando la condición de ángulo se determina que parte del eje real pertenece al lugar geométrico, para lo cual se debe verificar en cada tramo del eje real el cumplimiento o no de la condición. Si se parte de un caso hipotético en el cual se tienen dos polos (p_1 y p_2) y un cero (z_1) sobre el eje real, tal como se muestra en la Fig. 1.3, se verifica la condición de ángulo en los distintos tramos del eje real, suponiendo la ocurrencia de raíces, tal como se muestra a continuación.

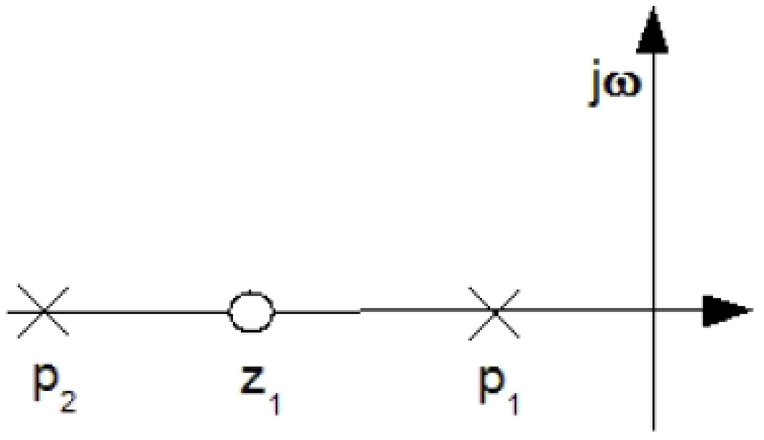


Figura 1.3: Ubicación de las raíces en el Plano s

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Características del LGR

Cómo dibujar el LGR?

Si se supone que existe una raíz s_1 entre el polo p_1 y el origen, se deben trazar los vectores correspondientes para comprobar el ángulo de los mismos. En la Fig. 1.4 (a), (b) y (c) se pueden observar dichos vectores, a partir de allí se puede determina la sumatoria de ángulos tal como lo expresa la Ec. 1.10, de donde se concluye que la condición de ángulo no se cumple por lo que dicho segmento no pertenece al lugar geométrico.

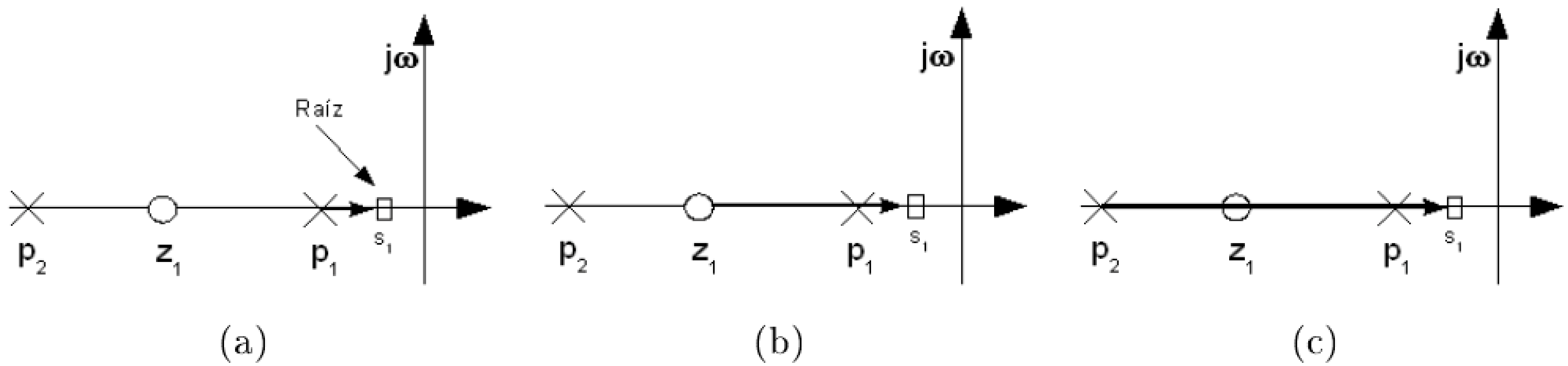


Figura 1.4: Verificación de la condición de angulo para s_1

$$\angle(s+z_1) - [\angle(s+p_1) + \angle(s+p_2)] = 0^0 - [0^0 + 0^0] = 0^0 \neq -180^0 \tag{1.10}$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Características del LGR

Cómo dibujar el LGR?

Si ahora se supone que existe una raíz s_2 entre el polo p_1 y el cero z_1, se pueden observar los nuevos vectores en las Figs. 1.5 (a) y (b), a partir de las cuales se determina la sumatoria de ángulos tal como lo expresa la Ec. 1.11, de donde se concluye que la condición de ángulo se cumple por lo que dicho segmento pertenece al lugar geométrico.

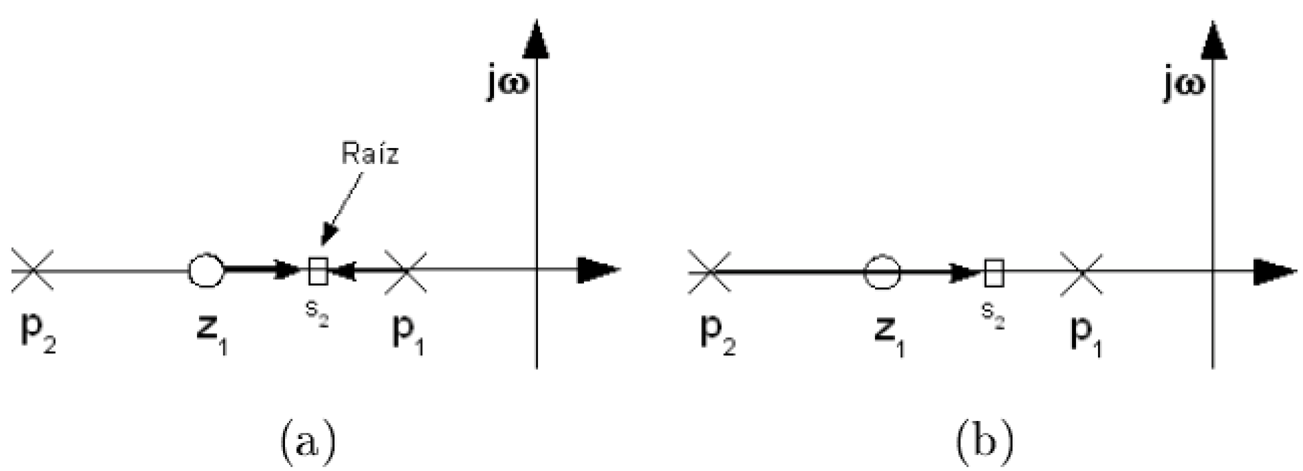


Figura 1.5: Verificación de la condición de ángulo para s_2

$$\angle(s+z_1) - [\angle(s+p_1) + \angle(s+p_2)] = 0^0 - \left[180^0 + 0^0\right] = -180^0 \qquad (1.11)$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo dibujar el LGR?

De manera similar se pueden suponer la existencia de dos raíces más, s_3 y s_4, para las cuales los vectores correspondientes se muestran en las Figs. 1.6 (a) y (b) y 1.7 (a), (b) y (c) respectivamente, así como en las ecuaciones 1.12 y 1.13 se muestran las sumatorias de los ángulos. A partir de allí se puede concluir que para la raíz s_3 no se cumple con la condición de módulo, mientras que para la raíz s_4 si se cumple.

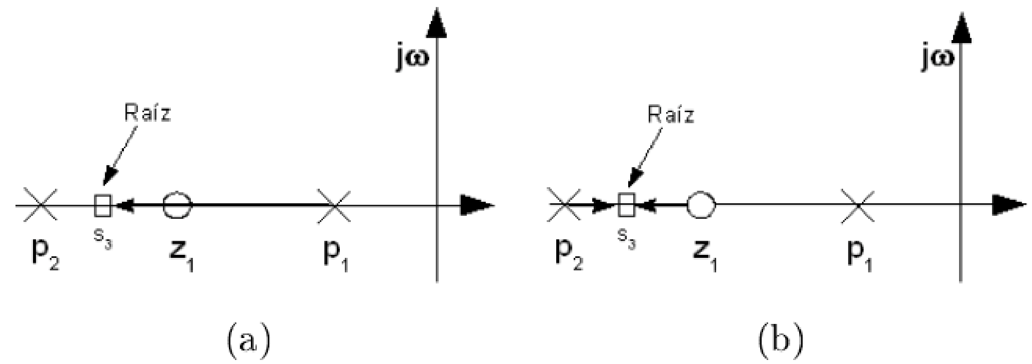


Figura 1.6: Verificación de la condición de angulo para s_3

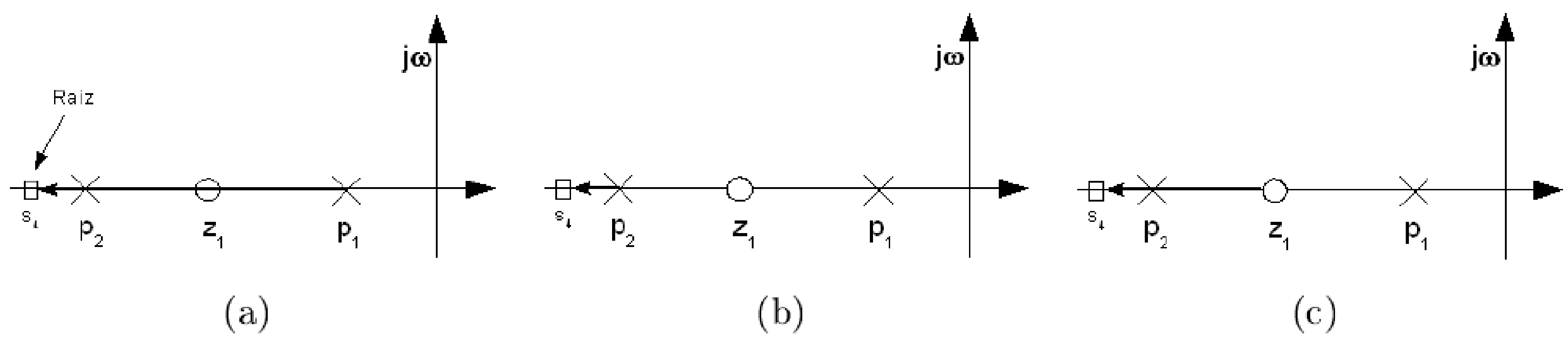


Figura 1.7: Verificación de la condición de angulo para s_4

$$\angle(s+z_1) - [\angle(s+p_1) + \angle(s+p_2)] = 180^0 - [180^0 + 0^0] = 0^0 \neq -180^0 \quad (1.12)$$

$$\angle(s+z_1) - [\angle(s+p_1) + \angle(s+p_2)] = 180^0 - [180^0 + 180^0] = -(180^0) \quad (1.13)$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo dibujar el LGR?

A partir del análisis anterior se concluye que **las partes del eje real que pertenecen al lugar geométrico son aquellas que se encuentran a la izquierda de un número impar de polos y ceros**.

Para el ejemplo que se está desarrollando se muestra en la Fig. 1.8 las partes del eje real que pertenecen al lugar geométrico.

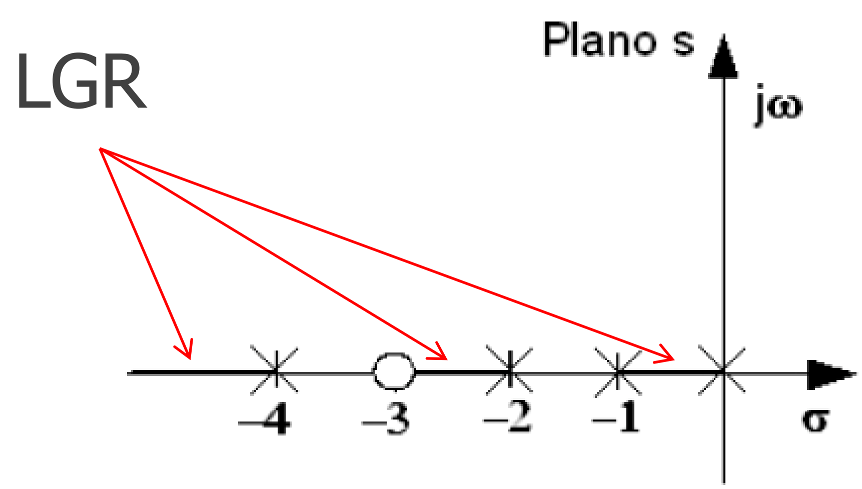


Figura 1.8: Partes del eje real que pertenencen al LGR. $G(s)H(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo dibujar el LGR?

Paso 3

Considerando que la función de transferencia a lazo abierto tiene n polos y m ceros, y que para los sistemas en estudio $n > m$, se tiene un cierto número de ramas que comienzan en los polos pero, debido a que existen más polos que ceros, dichas ramas se dirigen a ceros en el infinito a lo largo de asíntotas. El número de asíntotas, N_A, se determina como la diferencia entre polos y ceros, tal como se expresa en la Ec. 1.14 y para la ubicación de su punto de partida del eje real, σ_A, y del ángulo de las mismas, ϕ_A, se utilizan las Ecs. 1.15 y 1.16, respectivamente.

\# de asíntotas $\longrightarrow$

$$N_A = n - m \tag{1.14}$$

posición $\longrightarrow$

$$\sigma_A = \frac{\sum polos\ de\ G(s)H(s) - \sum ceros\ de\ G(s)H(s)}{N_A} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j) - \sum_{i=1}^{m}(-z_i)}{N_A} \tag{1.15}$$

ángulos $\longrightarrow$

$$\phi_A = \frac{(2q + 1)}{N_A}180^0 \tag{1.16}$$

donde $q = 0, 1, 2, \cdots, (N_A - 1)$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo dibujar el LGR?

$$G(s)H(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

A partir del conocimiento del número de asíntotas, de su ubicación y de sus ángulos es bastante simple trazar la forma aproximada del lugar geométrico.

Para el ejemplo en cuestión se calculan N_A, σ_A y ϕ_A y en la Fig. 1.9 se muestra la ubicación de los mismos.

$$N_A = 4 - 1 = 3$$

$$\sigma_A = \frac{\sum(-1-2-4) - \sum(-3)}{3} = -\frac{4}{3} = -1,33$$

$$\phi_{A_1} = 60^0 \;\; \phi_{A_2} = 180^0 \;\; \phi_{A_3} = 300^0$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo dibujar el LGR?

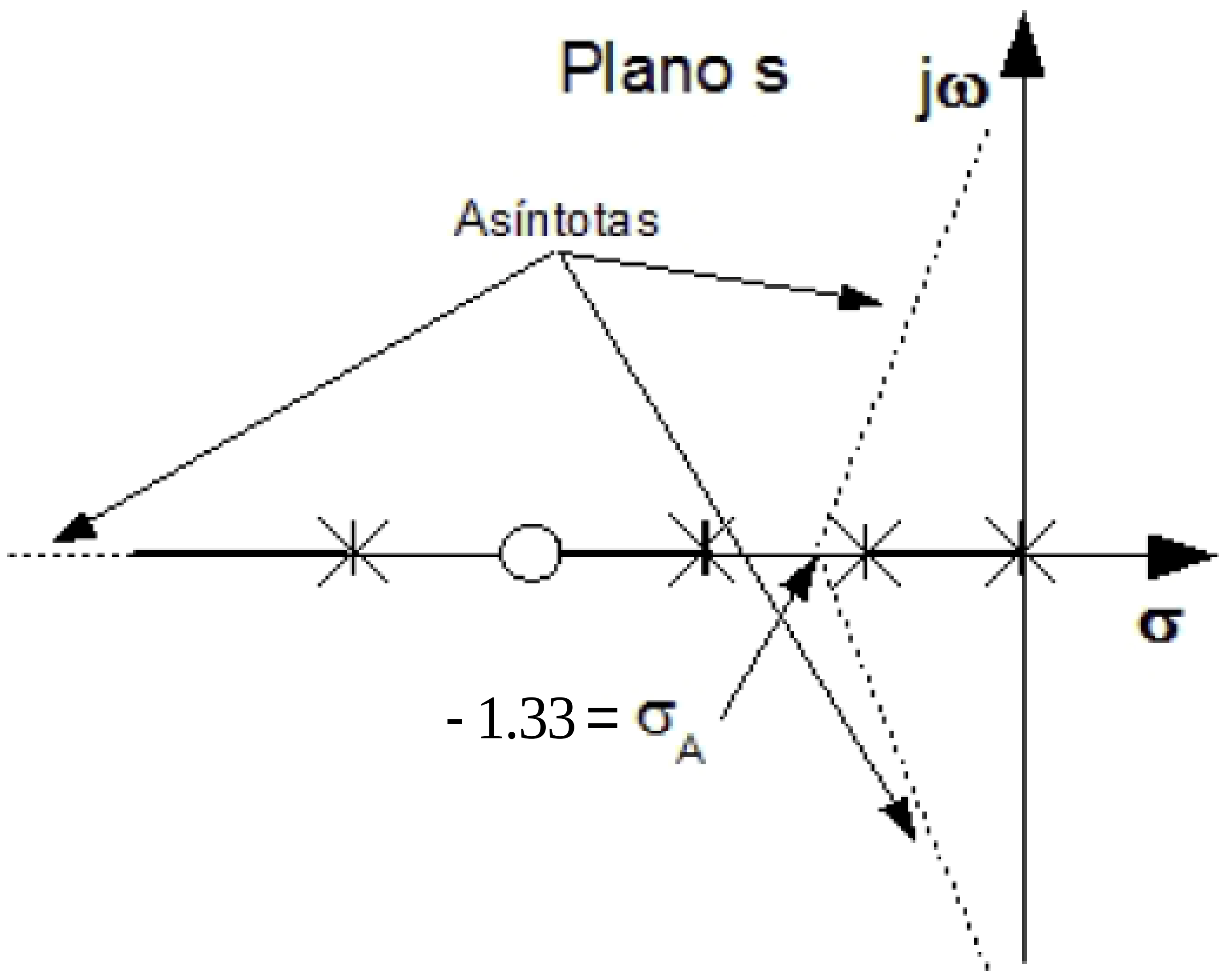


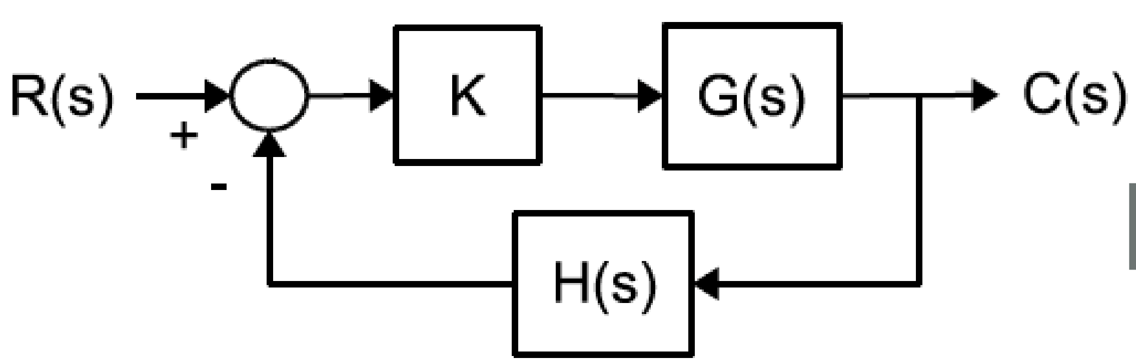
Figura 1.9: Asíntotas y σ_A. $G(s)H(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo dibujar el LGR?

Paso 4

El punto o los puntos del eje real en el cual las raíces se despegan del eje y se convierten en raíces imaginarias se conocen como puntos de ruptura y ocurren cuando hay multiplicidad de raíces en un tramo, es decir, si dos o más raíces se van acercando a medida que aumenta K, llega un punto en donde se encuentran y son iguales. Es allí en donde, al seguir aumentando K, dichas raíces se convierten en raíces imaginarias y se despegan del eje real. Tomando en consideración lo anterior se determina que el punto ruptura ocurre cuando se llega a un valor máximo de K después del cual las raíces dejan de ser reales. Para obtener analíticamente dicho punto se debe reescribir la ecuación característica despejando el valor de K, tal como lo expresa la Ec. 1.17. A partir de allí es posible obtener el máximo de K



$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)}$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo dibujar el LGR?

Retomando la función de transferencia:

$$G(s)H(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)}$$

$$K = -\frac{1}{\dfrac{s+3}{s(s+1)(s+2)(s+3)}} = -\frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{s+3}$$

Para encontrar el punto de ruptura, se deriva K con respecto a s (punto máximo):

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dK}{ds} = -\frac{3s^4 + 26s^3 + 77s^2 + 84s + 24}{(s+3)^2} = 0$$

Pontificia Universidad JAVERIANA Colombia

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

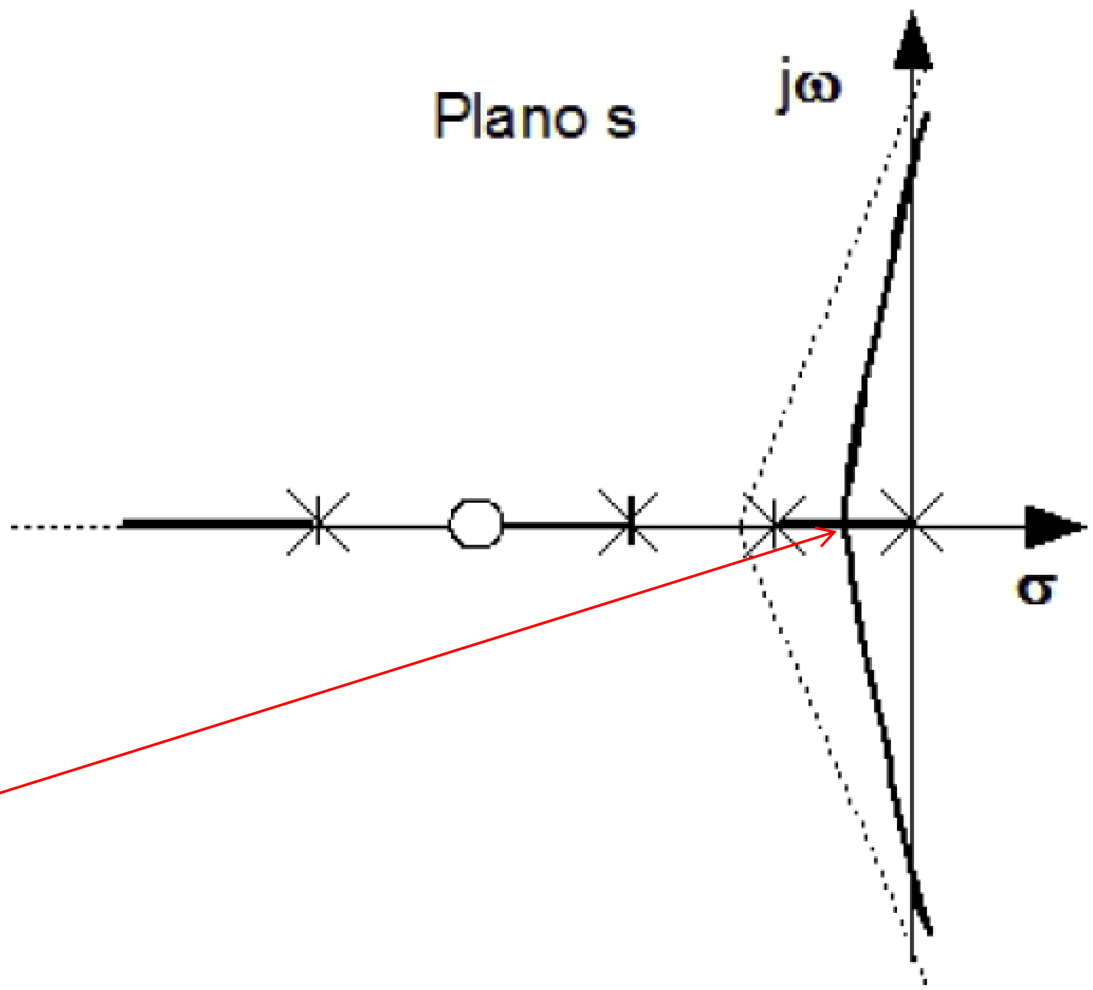
Cómo dibujar el LGR?

Hallando las raíces:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{3s^4 + 26s^3 + 77s^2 + 84s + 24}{(s+3)^2} = 0$$

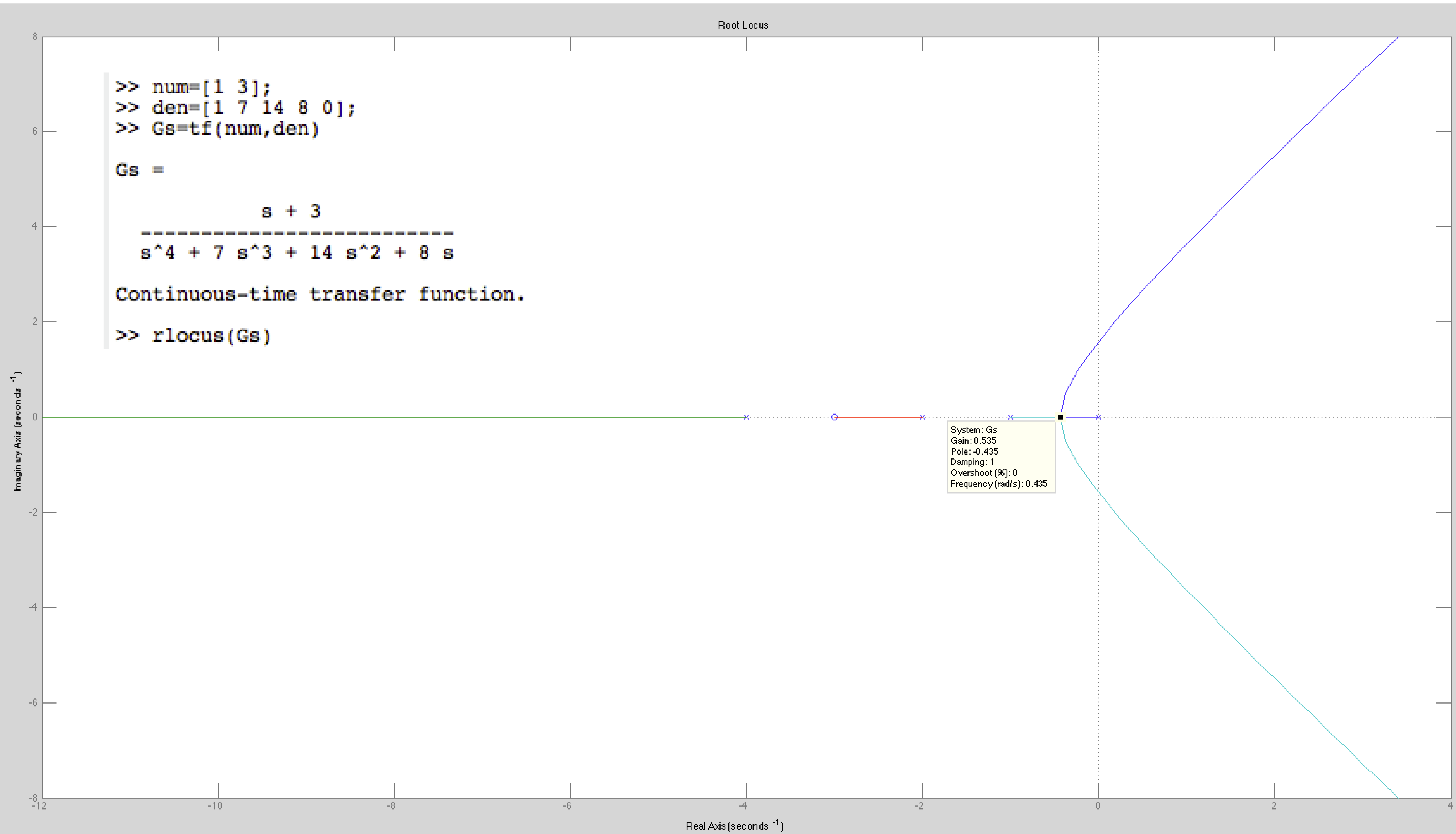
De todas las raíces solo -0.4349 está dentro del LGR:

```
>> num=[3 26 77 84 24];
>> den=[1 6 9];
>> Gs=tf(num,den)

Gs =

  3 s^4 + 26 s^3 + 77 s^2 + 84 s + 24
  -----------------------------------
             s^2 + 6 s + 9

Continuous-time transfer function.

>> roots(num)

ans =

  -3.3110 + 0.6812i
  -3.3110 - 0.6812i
  -1.6097 + 0.0000i
  -0.4349 + 0.0000i
```



Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo dibujar el LGR?



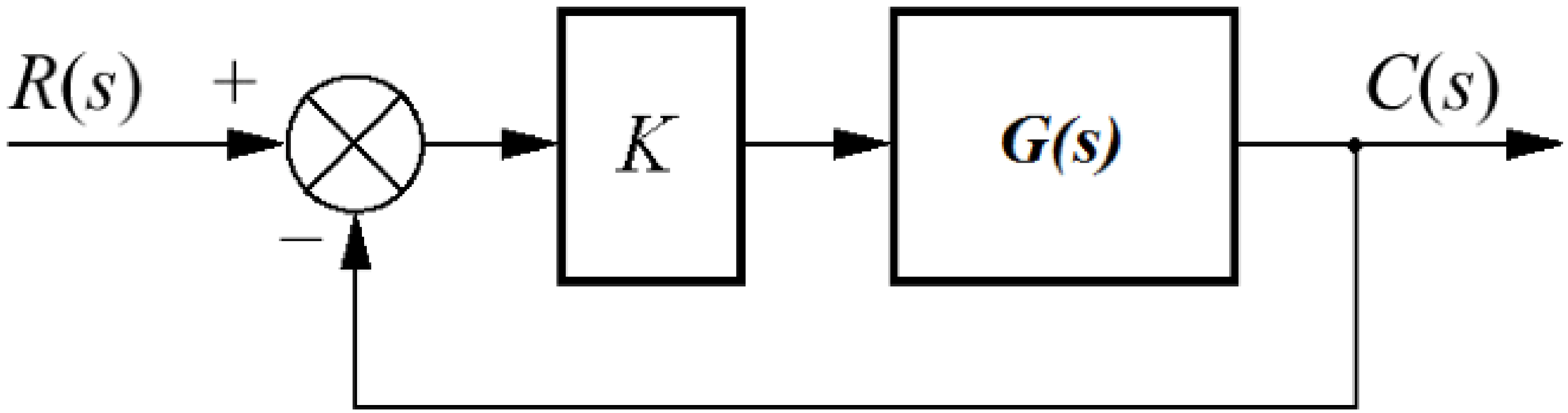
Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo hallar el valor de K (ganancia crítica)?

Se aplica el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Ejemplo:

Dado el sistema, determine el rango de K (ganancia del controlador proporcional) para que el sistema en lazo cerrado sea estable.



$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo hallar el valor de K (ganancia crítica)?
Se aplica el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

- *Criterio de Routh Hurwitz:*
- Es una forma de verificar la estabilidad de un sistema mediante un examen del polinomio característico

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

- Condiciones necesarias:
  - Coeficientes del mismo signo

$$a_i > 0, \forall i = 0, \cdots, n$$

Pontificia Universidad JAVERIANA Colombia

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo hallar el valor de K (ganancia crítica)?

Se aplica el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

El sistema es estable si todos los coeficientes de la primera columna del arreglo de Routh mantienen el mismo signo.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\
s^{n-3} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & \delta_1 & & &
\end{array}
$$

$$\alpha_1 = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-2}) - (a_n \cdot a_{n-3})}{a_{n-1}} \qquad \beta_1 = \frac{(\alpha_1 \cdot a_{n-3}) - (a_{n-1} \cdot \alpha_2)}{\alpha_1} \quad \cdots$$

$$\alpha_2 = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-4}) - (a_n \cdot a_{n-5})}{a_{n-1}} \qquad \beta_2 = \frac{(\alpha_1 \cdot a_{n-5}) - (a_{n-1} \cdot \alpha_3)}{\alpha_1} \quad \cdots$$

$$\alpha_3 = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-6}) - (a_n \cdot a_{n-7})}{a_{n-1}} \qquad \beta_3 = \frac{(\alpha_1 \cdot a_{n-7}) - (a_{n-1} \cdot \alpha_4)}{\alpha_1} \quad \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo hallar el valor de K (ganancia crítica)?

Se aplica el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

1. Se halla la función en lazo cerrado

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s^3+3s^2+2s+K}$$

La ecuación característica del sistema es:

$$s^3+3s^2+2s+K=0$$

Se construye la tabla, con los coeficientes:

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	a_1	
s^0	b_1	

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo hallar el valor de K (ganancia crítica)?

Se aplica el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

La ecuación característica del sistema es:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & a_1 & \\ s^0 & b_1 & \end{array}$$

$$a_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{3*2 - 1*K}{3} = \frac{6 - K}{3}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_{n-3} - a_{n-1} a_2}{a_1} = \frac{K\dfrac{6-K}{3} - 0}{\dfrac{6-K}{3}} = K$$

La tabla queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & \dfrac{6-K}{3} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo hallar el valor de K (ganancia crítica)?

Se aplica el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

La tabla queda de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{c|c|c}
s^3 & 1 & 2 \\
s^2 & 3 & K \\
s^1 & \dfrac{6-K}{3} & \\
s^0 & K &
\end{array}
$$

Ahora, la condición para que la ecuación característica no tenga raíces positivas, es decir el sistema no tenga polos positivos y por ende sea estable, es que no haya cambios de signos en la primera columna, por lo que se debe cumplir que todos los coeficientes de esa columna sean positivos:

$$\frac{6-K}{3} > 0 \qquad \text{y} \qquad K > 0$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo hallar el valor de K (ganancia crítica)?

Se aplica el criterio de estabilidad de <u>Routh-Hurwitz</u>

Resolviendo el sistema de inecuaciones se tiene que:

$$\frac{6-K}{3} > 0$$

$$6-K > 0 \qquad \text{y} \qquad K > 0$$

$$6 > K$$

De esta forma se obtiene el rango de valores de K para que el sistema en lazo cerrado sea estable:

$$\boxed{0 < K < 6.}$$

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo hallar el valor de K (ganancia crítica)?

Retomando el ejercicio de la diapositiva No.: 14

$$G(s)H(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Paso 6

El punto en el cual el lugar geométrico corta el eje imaginario puede ser calculado de dos formas, utilizando el Criterio de Routh-Hurwitz o partiendo del hecho de que la raíz en dicho punto solamente tendrá parte imaginaria. Ambos métodos serán explicados utilizando el ejemplo que se está estudiando. El uso de Criterio de Routh-Hurwitz proporciona el valor de la ganancia crítica utilizando la ecuación característica a lazo cerrado tal como sigue.

$$s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 8s + K(s+3) = 0$$

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 14 & 3K \\ s^3 & 7 & 8+K & 0 \\ s^2 & b_1 & 3K & 0 \\ s^1 & c_1 & 0 & 0 \\ s^0 & 3K & 0 & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{90-K}{7} \quad \Rightarrow \quad b_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 90$$

$$c_1 = \frac{-K^2-65K+720}{b_1} > 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 < -74,64 \;\; K_2 < 9,65 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K < 9,65}$$

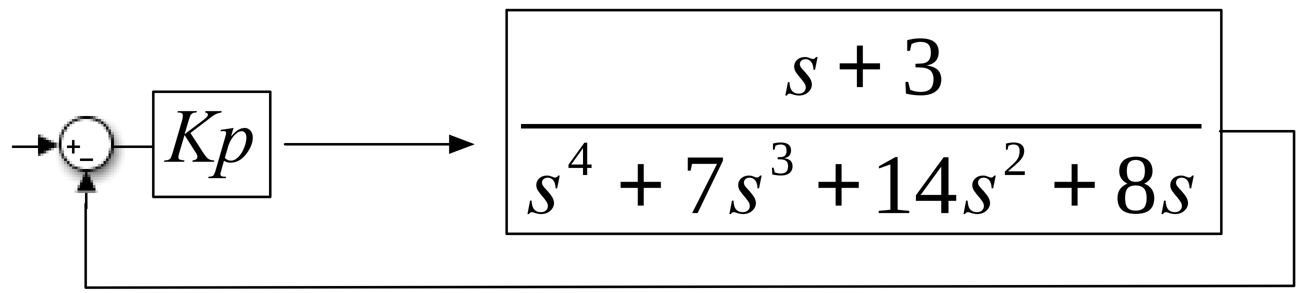
Pontificia Universidad JAVERIANA Colombia

Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo hallar el valor de K (ganancia crítica)?

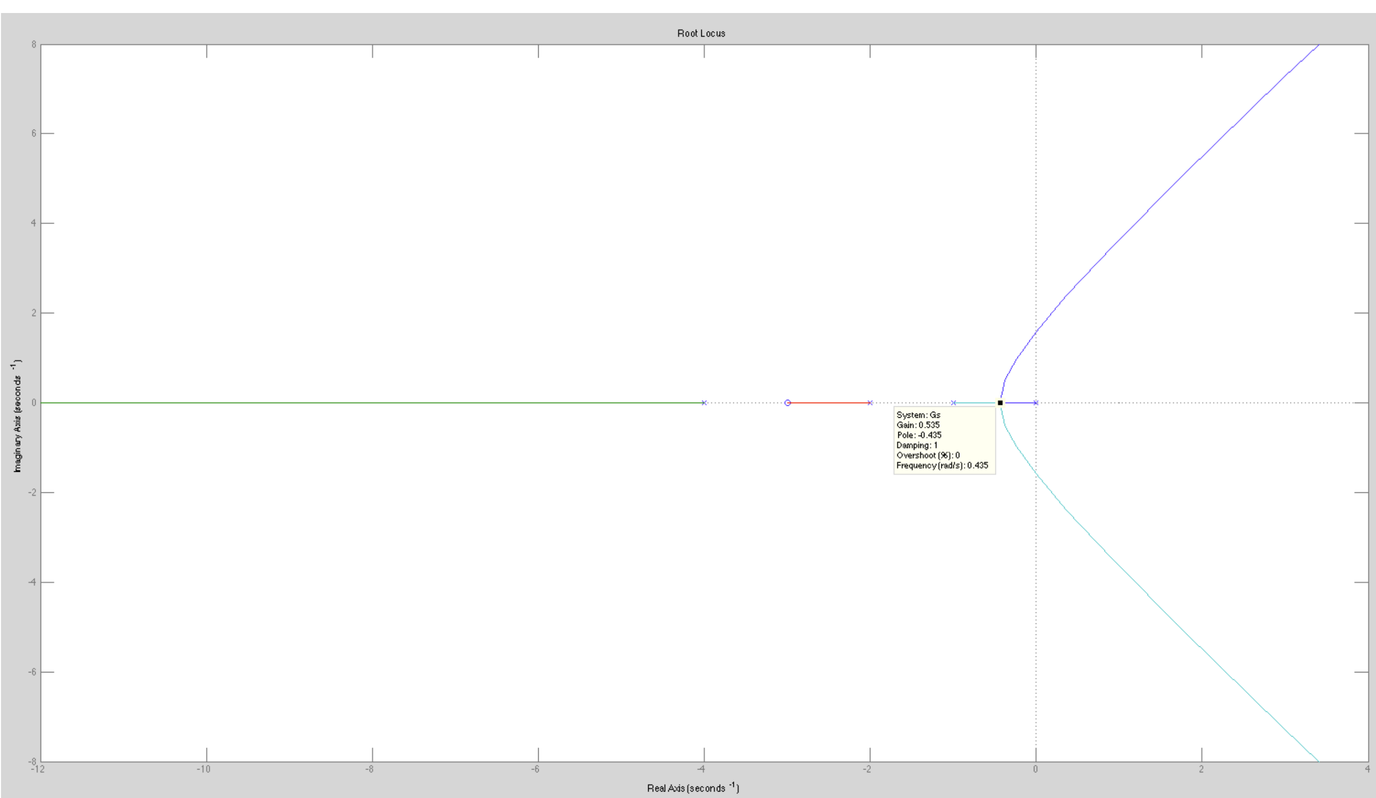
Retomando el ejercicio de la diapositiva No.: 14

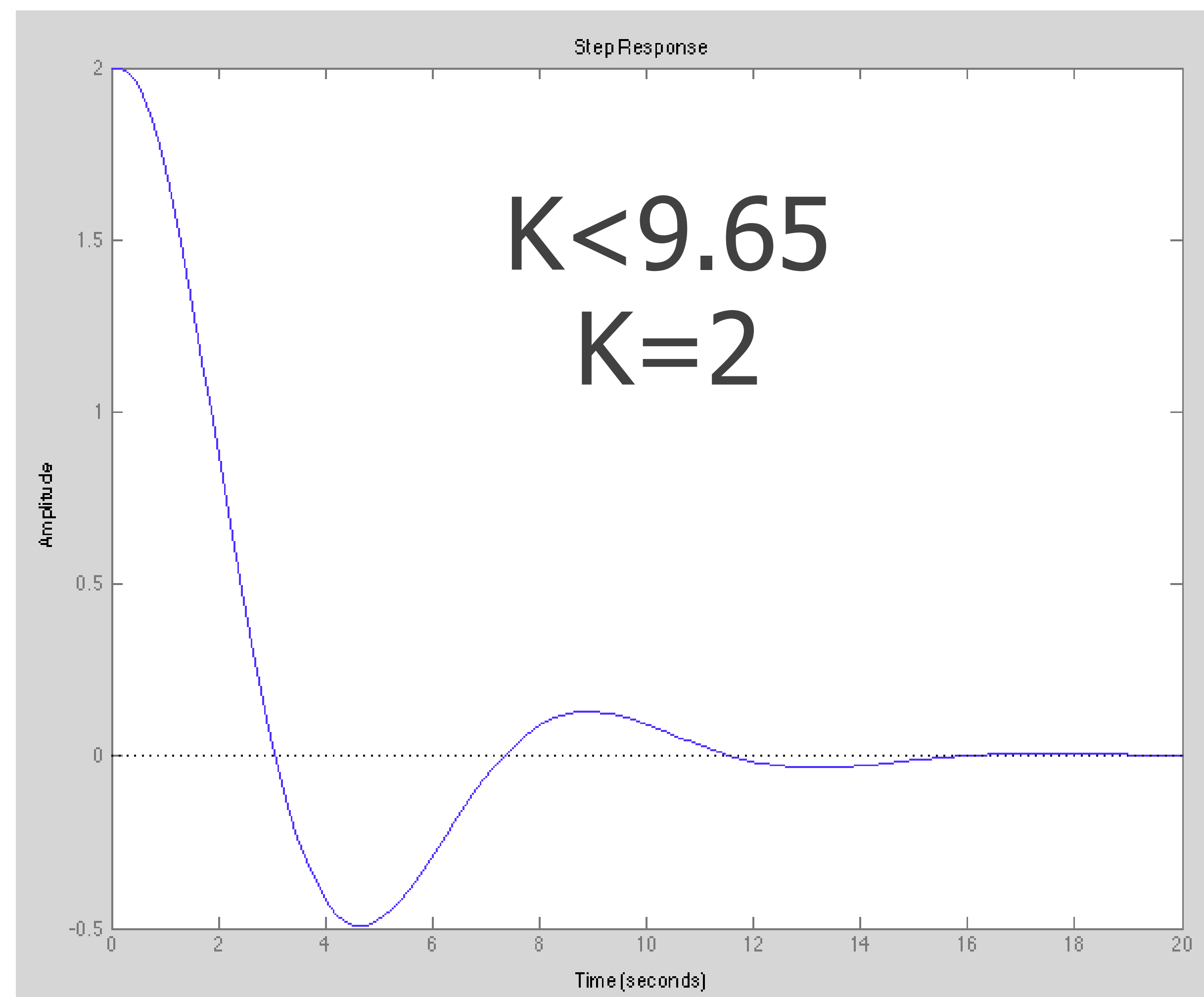
$$G(s)H(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$



Setpoint=0

LGR:





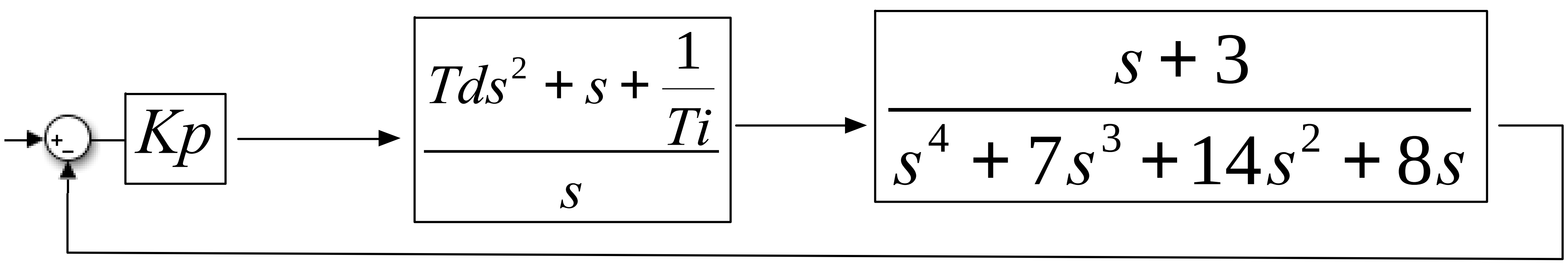
Lugar Geométrico de las Raíces - LGR

Cómo hallar el valor de K (ganancia crítica)?

Retomando el ejercicio de la diapositiva No.: 14

$$G(s)H(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Si se desea controlar el %sobrepico, ts, y Ess, añadir un PID:



Ejercicio: Hallar Td y Ti que cumplan con sobrepico <10% y ts<20s

Recordar...por definición del LGR, los polos en **lazo cerrado** debe terminar en los **ceros en lazo abierto cuand K->∞**:

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j) + K\left(\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)\right) = 0$$