Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica

Controles

Clase 5: Sintonización de Controladores

Gerardo Becerra, Ph.D.

gbecerra@javeriana.edu.co

Febrero 26, 2020

Introducción

- **Sintonización:** Selección de valores numéricos para los parámetros del controlador, con base en algún criterio.
- Existen muchos criterios para sintonización de controladores.
  - Experimentales
  - Análisis de la función de transferencia
  - Técnicas de optimización
  - Lugar geométrico de las raíces
  - Compensación en frecuencia

Análisis de la Función de Transferencia

1. A partir de los requerimientos de desempeño, se determina un polinomio característico deseado.
2. Se calcula la función de transferencia del sistema en lazo cerrado, en términos de los parámetros del controlador.
3. Se comparan el polinomio característico deseado con el denominador de la función de transferencia. Si hay correspondencia en los coeficientes, se resuelve el sistema de ecuaciones para calcular los valores de los parámetros del controlador. Si no, se prueba con un controlador con una estructura diferente.
4. Se verifica que el sistema en lazo cerrado cumpla con los requerimientos de desempeño.

Ejemplo

Considere el modelo de segundo orden de un sistema de control de altitud de una aeronave descrito por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{4500}{s(s + 361.2)}$$

Se establecen las especificaciones de desempeño como sigue:

- Error en estado estable debido a una rampa $e_{ss} \leq 0.000433$.
- Sobrepico máximo $PO \leq 5\%$
- Tiempo de subida $t_r \leq 0.005$ s.
- Tiempo de establecimiento $t_s \leq 0.005$ s.

Determine una estructura de control PID adecuada y calcule los valores de los parámetros.

Ejemplo

1. Polinomio característico deseado a partir de los requerimientos de desempeño.

$$PO = 0.05 = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta = 0.6901$$

Entonces, para $PO \leq 5\%$, $\zeta \geq 0.6901$. Ahora, con $t_s \leq 0.005$:

$$\frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 0.005 \quad \Rightarrow \quad \omega_n \geq \frac{4}{0.005\zeta}$$

Para $\zeta = 0.6901$, $\omega_n = 1159.2$. Entonces el polinomio característico deseado es:

$$q(s) = s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2 = s^2+2(0.6901)(1159.2)s+1159.2^2 = s^2+1600s+1.3737\times10^6$$

Ejemplo

2. Función de transferencia en lazo cerrado en términos de los parámetros del controlador.
   Qué estructura debe tener el controlador? Usando controlador P:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p \frac{4500}{s(s+361.2)}}{1 + K_p \frac{4500}{s(s+361.2)}} = \frac{4500K_p}{s^2 + 361.2s + 4500K_p}$$

   Comparando el denominador con el polinomio característico deseado:

$$q(s) = s^2 + 1600s + 1.3737 \times 10^6$$

   No hay correspondencia en el coeficiente de s! Entonces, no funciona utilizar el controlador P. Se debe probar con un controlador diferente.

Ejemplo

Usando un controlador PD:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_p + Kds)\frac{4500}{s(s+361.2)}}{1 + (K_p + Kds)\frac{4500}{s(s+361.2)}} = \frac{4500(K_p + Kds)}{s^2 + (361.2 + 4500Kd)s + 4500K_p}$$

Al agregar el controlador D, se tiene un nuevo grado de libertad para ajustar el coeficiente de s. Comparando con el polinomio característico deseado:

$$q(s) = s^2 + 1600s + 1.3737 \times 10^6$$

Ahora si se puede resover el sistema de ecuaciones.

Ejemplo

3. Comparando los coeficientes de los dos polinomios:

$$s^2 + (361.2 + 4500Kd)s + 4500K_p$$
$$s^2 + 1600s + 1.3737 \times 10^6$$

Se tiene el sistema de ecuaciones

$$4500K_p = 1.3737 \times 10^6$$
$$361.2 + 4500Kd = 1600$$

Entonces:

$$K_p = 298.6099$$
$$K_d = 0.2753$$

Ejemplo

4. Verificar que se cumplan los requerimientos de desempeño.

   Se puede usar una simulación para verificarlo...

Ejercicio 1

Considere el sistema descrito por

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 0.03s + 2.25}$$

Diseñe un controlador tal que el sistema tenga

1. Error en estado estable nulo ante escalón unitario.
2. Sobrepico $\leq 10\%$.
3. Tiempo de establecimiento $t_s \leq 10$ s.

Técnicas de Optimización

Índices de Desempeño

- Integral del cuadrado del error (ISE):

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt$$

- Integral del valor absoluto del error (IAE):

$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt$$

- Integral del valor absoluto del error ponderado en el tiempo (ITAE):

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt$$

- Integral del cuadrado del error ponderado en el tiempo (ITSE):

$$ITAE = \int_0^T te^2(t)dt$$

Objetivo: seleccionar parámetros del sistema para minimizar algún índice de desempeño.

Minimización de los Índices de Desempeño

- Sistema de control $\rightarrow$ es óptimo cuando se minimiza algún índice de desempeño seleccionado.
- Valor óptimo de los parámetros $\rightarrow$ depende del índice de desempeño.
- Para la función de transferencia de lazo cerrado de la forma general:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

  se han determinado los coeficientes óptimos que minimizan el ITAE para una entrada paso.
- Ésta función de transferencia tiene $e_{ss} = 0$ para entrada paso.

Coeficientes Óptimos Basados en el Criterio ITAE para una Entrada Paso

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

$$s + \omega_n$$

$$s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$$

$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

$$s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\,\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4$$

$$s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

$$s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6$$

Coeficientes Óptimos Basados en el Criterio ITAE para una Entrada Rampa

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

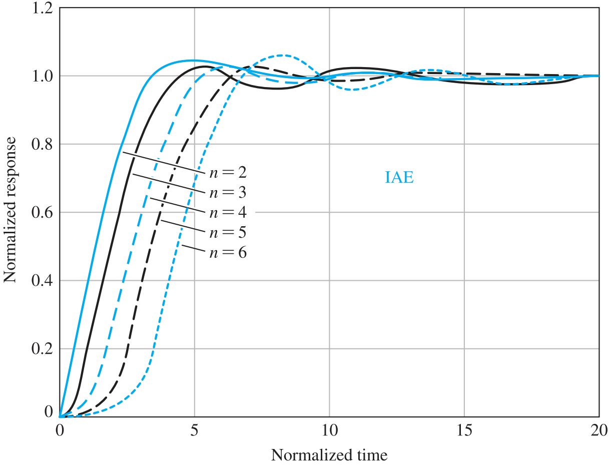
$$s^2 + 3.2\omega_n s + \omega_n^2$$

$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 3.25\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

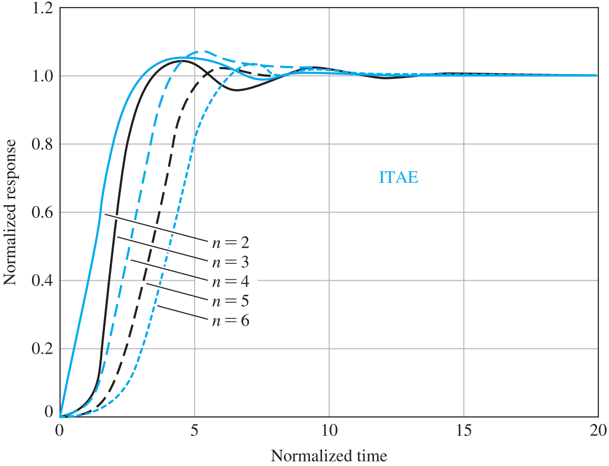
$$s^4 + 2.41\omega_n s^3 + 4.93\omega_n^2 s^2 + 5.14\omega_n^3 s + \omega_n^4$$

$$s^5 + 2.19\omega_n s^4 + 6.50\omega_n^2 s^3 + 6.30\omega_n^3 s^2 + 5.24\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

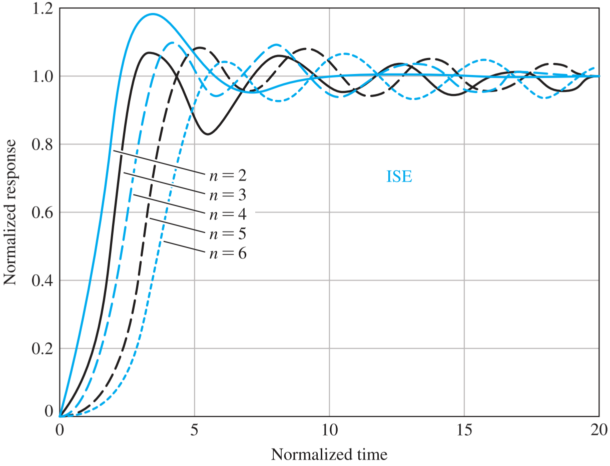
Respuesta Paso para Coeficientes Óptimos Basados en Criterio IAE



Respuesta Paso para Coeficientes Óptimos Basados en Criterio ITAE



Respuesta Paso para Coeficientes Óptimos Basados en Criterio ISE



Diseño de Controladores usando Coeficientes Óptimos - Ejemplo

Considere el sistema

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Encuentre un sistema de cero error de posición que minimice el criterio ITAE. También se requiere que la señal de control debida a una señal escalón unitario satisfaga $|u(t)| \leq 3$.

La función de transferencia óptima a partir de la tabla se selecciona como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_0 = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2}$$

Note que aumentando ω_n, aumentan la velocidad de respuesta y la señal de control. Se debe seleccionar ω_n tal que $|u(t)| \leq 3$.

Diseño de Controladores usando Coeficientes Óptimos - Ejemplo

La función de transferencia desde $R(s)$ hasta $U(s)$ es

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{G_0(s)}{G(s)} = \frac{\omega_n^2 s(s+2)}{s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$U(s) = \frac{\omega_n^2 s(s+2)}{s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2} R(s)$$

Usando simulación, se encuentra que el máximo valor de $u(t)$ ocurre en $t = 0^+$. Para encontrar dicho valor se usa el teorema del valor inicial:

$$u_{max} = u(0^+) = \lim_{s\to\infty} sU(s) = \lim_{s\to\infty} s\frac{\omega_n^2 s(s+2)}{s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s} = \omega_n^2$$

Entonces, para satisfacer $|u(t)| \leq 3$ se requiere $\omega_n^2 = 3$. Entonces el sistema ITAE óptimo es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3}{s^2 + 1.4\sqrt{3}s + 3} = \frac{3}{s^2 + 2.4s + 3}$$

Ejercicio 2

Considere una planta con función de transferencia $2/s^2$. Encuentre un sistema óptimo que minimice el criterio ITAE bajo la restricción $|u(t)| \leq 3$.

Ejercicio 3

Considere una planta con función de transferencia $2/s^2$. Encuentre un sistema óptimo que minimice el criterio ITAE bajo la restricción $|u(t)| \leq 3$ y que el error de velocidad sea cero.

Ejercicio 4

Considere una planta cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{2}{s(s^2 + 0.25s + 6.25)}$$

Encuentre un sistema óptimo ITAE de error de posición cero. Se requiere que la señal de control $u(t)$ debida a una señal de entrada escalón unitario satisfaga $|u(t)| \leq 10$.