Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica

Controles

Clase 7: Diseño de Compensadores por LGR - Adelanto, Atraso, Adelanto-Atraso

Gerardo Becerra, Ph.D.

gbecerra@javeriana.edu.co

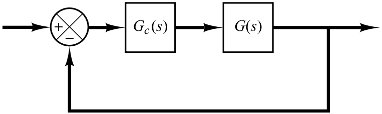
Marzo 11, 2020

Introducción

- Lugar de las raíces $\rightarrow$ puede indicar que no se pueden lograr el desempeño deseado simplemente modificando una ganancia.
- En éstos casos es necesario cambiar la forma del lugar de las raíces para lograr las especificaciones deseadas.
- El problema de control involucra insertar un compensador en el sistema.
- Compensación $\rightarrow$ diseño de un filtro cuyas carasterísticas tienden a compensar las características no deseadas de la planta.
- Diseño usando LGR: cambiar la forma del lugar de las raíces agregando polos y ceros para forzar a las raíces a pasar por las ubicaciones de los polos deseados.

Compensación en Adelanto

Compensación en Adelanto



- Compensador en serie con la planta $G(s)$.
- El problema principal involucra decidir la ubicación de los polos y ceros del compensador $G_c(s)$ para tener polos dominantes de lazo cerrado en las ubicaciones deseadas tal que se cumplan los requerimientos de desempeño.
- LGR es útil cuando se tienen las especificaciones en términos de la respuesta de tiempo (ζ, ω_n, T_s, PO, etc).
- Considere una planta inestable para cualquier $G_c(s) = K$, o estable pero con un desempeño indeseable durante la respuesta transitoria.
- El problema puede resolverse insertando un compensador en adelanto en cascada con la planta.

Procedimiento de Diseño para el Compensador en Adelanto usando LGR

1. Usando las especificaciones de desempeño, determinar la ubicación deseada de los polos dominantes de lazo cerrado.
2. Obtener el LGR del sistema no compensado y determinar si ajustando la ganancia K se pueden ubicar los polos en el lugar deseado. Si no, calcular la deficiencia de ángulo ϕ. Éste ángulo debe ser proporcionado por el compensador en adelanto.
3. Asumir la forma del compensador en adelanto como

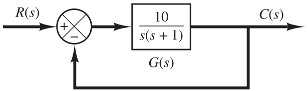
$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

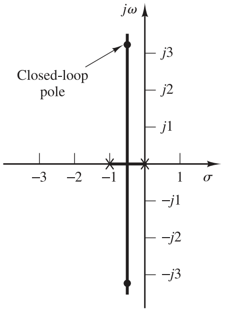
   donde α y T se determinan a partir de la deficiencia de ángulo, y K_c se determina del requerimiento de ganancia de lazo abierto.

Procedimiento de Diseño para el Compensador en Adelanto usando LGR

4. Si no se especifican constantes de error estático dentro de los requerimientos de desempeño, determinar la ubicación del polo y cero del compensador tal que el compensador contribuya el ángulo necesario ϕ. Buscar hacer α lo más grande posible.
5. Determinar el valor de K_c del compensador a partir de la condición de magnitud.
6. Verificar si el compensador diseñado satisface los requerimentos de desempeño. En caso contrario, repetir el proceso de diseño ajustando la ubicación del polo y cero del compensador.

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo





Considere el sistema de control presentado en la figura. La función de transferencia de la planta es:

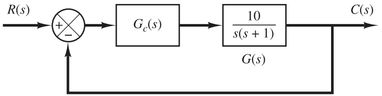
$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

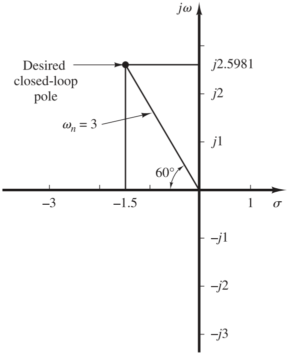
La función de transferencia de lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

Los polos de lazo cerrado están ubicados en $s = -0.5 \pm j3.1225$. El factor de amortiguamiento es $\zeta = 0.5/\sqrt{10} = 0.1581$. La frecuencia natural es $\omega_n = \sqrt{10} = 3.1623$ rad/s. Amortiguamiento pequeño $\Rightarrow$ sobrepico grande (no es deseable!)

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo





Se desea un compensador $G_c(s)$ tal que los polos de lazo cerrado tengan $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 3$ rad/s. Entonces los polos deseados son:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 3s + 9 = 0$$
$$s = -1.5 \pm j2.5981$$

Los polos deseados no se encuentran dentro del LGR del sistema sin compensar $\Rightarrow$ no es suficiente con cambiar la ganancia $K \Rightarrow$ Se requiere introducir un compensador.

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo

Usando la condición de ángulo se puede verificar que en este caso los polos deseados no se encuentran en el LGR:

$$\sum_{i=1}^{M} \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s + p_j)$$

$$= -\angle(s) - \angle(s+1)$$

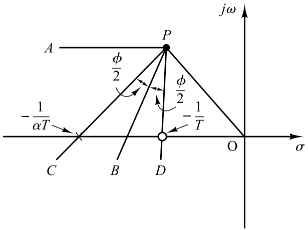
$$= -120^\circ - 100.894^\circ$$

$$= -220.894^\circ = 139.106^\circ \neq 180^\circ$$

Entonces, el compensador en adelanto debe contribuir un ángulo ϕ:

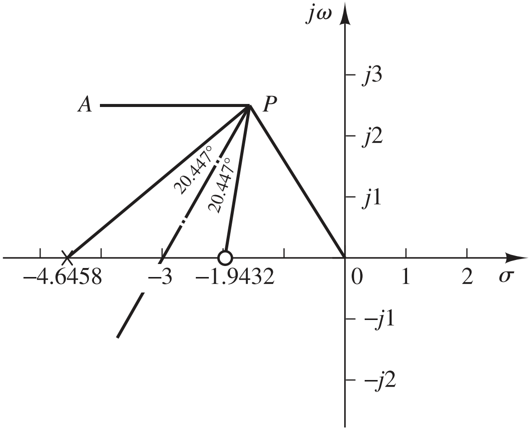
$$\phi = 180^\circ - 139.106^\circ = 40.894^\circ$$

La selección del polo y cero del compensador no es única. A continuación se muestra una forma para hacerlo.



Ubicación de polo y cero:

1. Dibujar una linea horizontal *PA* que pase a través de *P*, correspondiente a uno de los polos dominantes deseados.
2. Dibujar la línea *PO* que conecta a *P* con el origen.
3. Dibujar la bisectriz *PB* del ángulo formado por *PA* y *PO*.
4. Dibujar las líneas *PC* y *PD* que forman ángulos $\phi/2$ con la bisectriz *PB*.
5. Ubicar el polo y cero del compensador en adelanto en las intersecciones con el eje real negativo de *PC* y *PD*, respectivamente.



- Ángulo *PA*, *PO* = 120°
- Bisectriz = 60° respecto a *PO*.
- Cero en $s = -1.9432$.
- Polo en $s = -4.6458$
- Entonces, el compensador está dado por:

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = K_c \frac{s + 1.9432}{s + 4.6458}$$

con $\alpha = 1.9432/4.6458 = 0.418$.

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo

El valor de K_c puede determinarse usando la condición de magnitud:

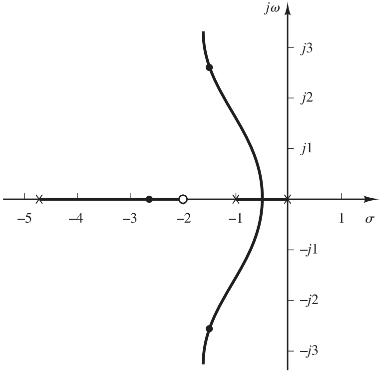
$$\left| K_c \frac{s+1.9432}{s+4.6458} \frac{10}{s(s+1)} \right|_{s=-1.5+j2.5981} = 1$$

$$K_c = \left| \frac{(s+4.6458)s(s+1)}{10(s+1.9432)} \right|_{s=-1.5+j2.5981} = 1.2287$$

El compensador diseñado es:

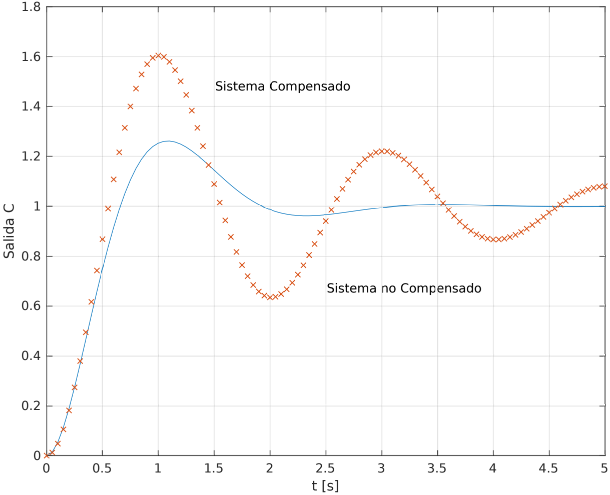
$$G_c(s) = 1.2287 \frac{s+1.9432}{s+4.6458}$$

El lugar de las raíces para el sistema compensado es:



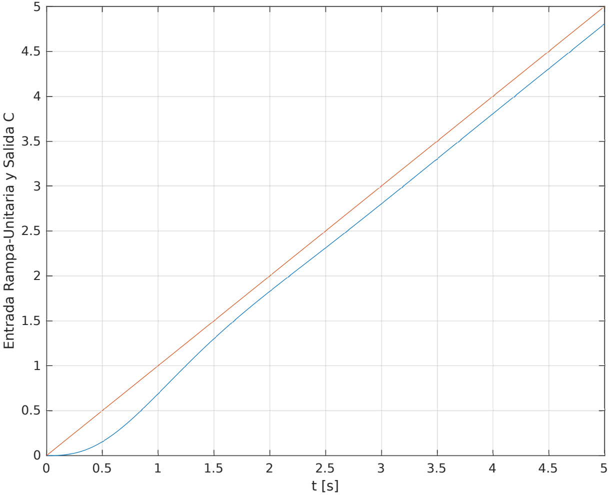
El polo ubicado en $s = -2.65$ está muy cerca del cero en $s = -1.9432$, por lo cual su influencia en el transitorio es mínima.

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo



Respuesta paso del Sistema no Compensado y Compensado

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo



Respuesta Rampa del Sistema Compensado

Compensación en Atraso

Compensación en Atraso

- Considere el problema de encontrar un compensador cuando el sistema tiene una respuesta transitoria satisfactoria pero características de estado estacionario insatisfactorias.
- Compensación $\rightarrow$ aumentar la ganancia de lazo abierto sin cambiar de forma notoria las características de la respuesta transitoria.
- El LGR en las cercanías a los polos dominantes no debería cambiar significativamente.
- La contribución del ángulo del compensador en atraso debe limitarse a un valor pequeño (p. ej. $-5° < \phi_{lag} < 0$). Para lograrlo se ubican un polo y un cero cercanos entre si y cercanos al origen.

Procedimiento de Diseño para el Compensador en Atraso usando LGR

1. Dibujar el LGR para el sistema no compensado. Con base en los requerimientos de la respuesta transitoria, localice los polos dominantes de lazo cerrado en el LGR.
2. Asuma un compensador en atraso de la forma:

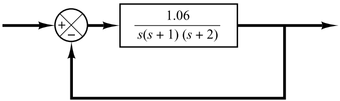
$$G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$$

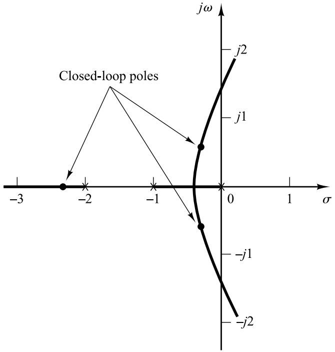
3. Evaluar la constante de error estático especificada por el problema.
4. Determine el incremento necesario en la constante de error estático para satisfacer los requerimientos.
5. Determine el polo y cero del compensador que produce el incremento necesario en la constante de error estático sin alterar apreciablemente el LGR original.

Procedimiento de Diseño para el Compensador en Atraso usando LGR

6. Dibujar un nuevo LGR para el sistema compensado. Localice los polos dominantes de lazo cerrado deseados. Si la contribución de ángulo del compensador es muy pequeña, el LGR debería ser casi idéntico. Ubique en el nuevo LGR los polos de lazo cerrado deseados de acuerdo con las especificaciones de la respuesta transitoria.
7. Ajustar la ganancia $\hat{K}_c$ del compensador usando la condición de magnitud para que los polos dominantes estén en la ubicación deseada. El valor de $\hat{K}_c$ será aproximadamente 1.

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo





Considere el sistema mostrado en la figura. La función de transferencia de la planta es:

$$G(s) = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$$

Los polos dominantes de lazo cerrado son $s = -0.3307 \pm j0.5864$. El factor de amortiguamiento es $\zeta = 0.491$. La frecuencia natural es $\omega_n = 0.673$ rad/s. La constante de error estático de velocidad es 0.53 s^{-1}.

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo

Se desea aumentar la constante de error estático de velocidad K_v a un valor de $5\ s^{-1}$ sin afectar la ubicación de los polos dominantes. Para lograrlo se introduce un compensador en atraso.

Para incrementar la constante de error estático de velocidad en un factor de 10, se selecciona $\beta = 10$, y se ubican el cero y el polo del compensador en $s = -0.05$ y $s = -0.005$, respectivamente.

La función de transferencia del compensador en atraso queda:

$$G_c(s) = \hat{K}_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005}$$

La contribución de ángulo del compensador sobre un polo dominante es:

$$\begin{aligned} \angle G_c(s) &= \angle(s + 0.05) - \angle(s + 0.005) \\ &= 115.5797^\circ - 119.0488^\circ = -3.4691^\circ \end{aligned}$$

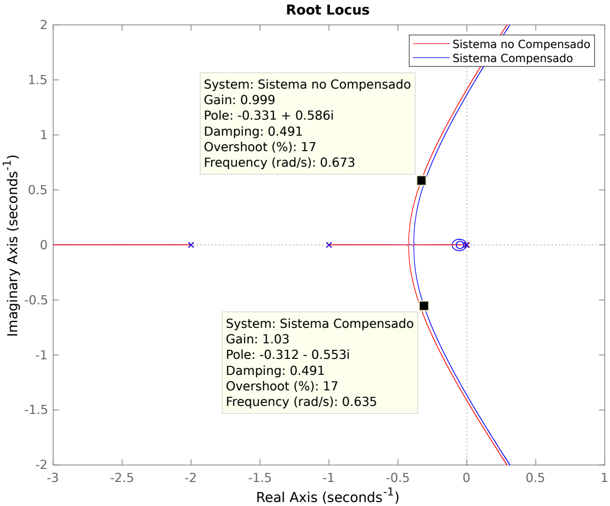
Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo

La función de transferencia de lazo abierto del sistema compensado es:

$$\begin{aligned} G_c(s)G(s) &= \hat{K}_c \frac{s+0.05}{s+0.005} \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{K(s+0.05)}{s(s+0.005)(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

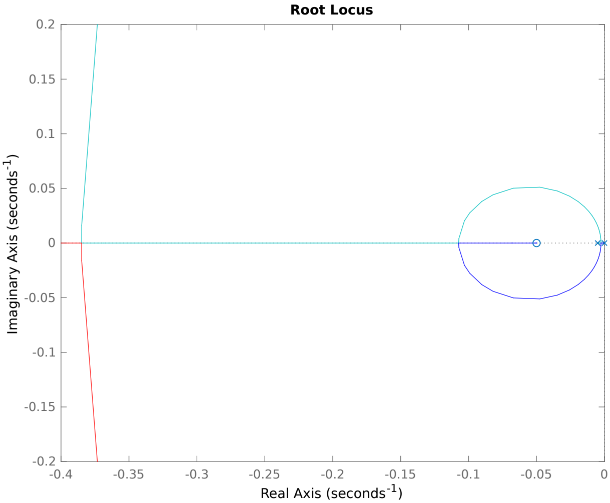
donde $K = 1.06\hat{K}_c$.

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo



Comparación de LGR sistema no compensado y sistema compensado.

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo



Lugar de las raíces en cercanías al origen.

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo

La ganancia K de lazo abierto se determina usando la condición de magnitud:

$$K = \left| \frac{s(s+0.005)(s+1)(s+2)}{s+0.05} \right|_{s=-0.31+j0.55}$$

$$= 1.0235$$

La ganancia del compensador se obtiene como:

$$\hat{K}_c = \frac{K}{1.06} = \frac{1.0235}{1.06} = 0.9656$$

Función de transferencia del compensador en atraso:

$$G_c(s) = 0.9656\frac{s+0.05}{s+0.005} = 9.656\frac{20s+1}{200s+1}$$

Función de transferencia de lazo abierto del sistema compensado:

$$G_c(s)G(s) = \frac{1.0235(s+0.05)}{s(s+0.005)(s+1)(s+2)}$$
$$= \frac{5.12(20s+1)}{s(200s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

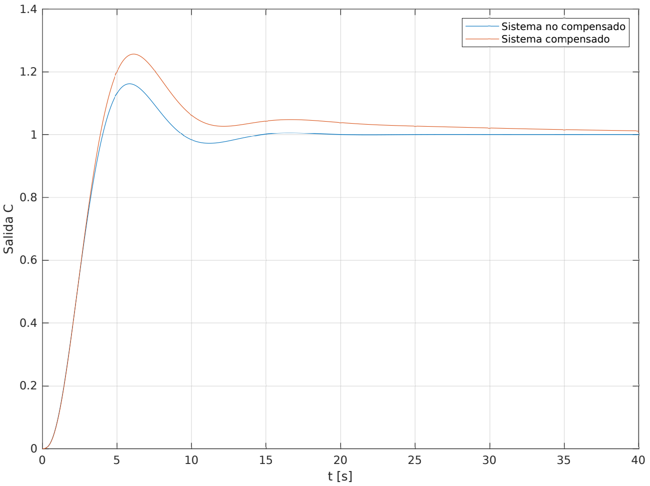
Constante de error estático de velocidad:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = 5.12s^{-1}$$

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo

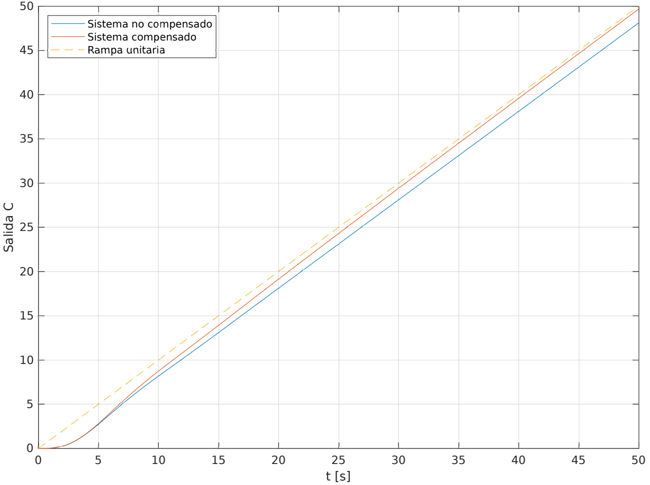
- Polo y cero localizados cerca del origen $\rightarrow$ efecto pequeño en la forma del LGR.
- El valor de la constante de error de velocidad estático aumentó aproximadamente 10 veces!
- El par polo y cero agregados genera una *cola larga* de pequeña amplitud en el transitorio.
- La respuesta del sistema compensado es más lenta que la del sistema original.

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo



Respuesta ante paso unitario para sistema no compensado y sistema compensado.

Procedimiento de Diseño Compensador en Adelanto usando LGR - Ejemplo



Respuesta ante rampa unitaria para sistema no compensado y sistema compensado.

Compensación Adelanto - Atraso

Compensación Adelanto - Atraso

- Compensación en adelanto: aumenta la velocidad de respuesta, aumenta la estabilidad del sistema.
- Compensación en atraso: mejora la exactitud del sistema en estado estacionario, reduce la velocidad de respuesta.
- Si se desea mejorar tanto la respuesta transitoria como la estacionaria, se puede utilizar simultaneamente un compensador en adelanto y uno en atraso $\rightarrow$ compensador de adelanto-atraso

Procedimiento de Diseño para el Compensador en Adelanto-Atraso usando LGR

Asumiendo un compensador en adelanto-atraso de la forma:

$$G_c(s) = K_c \frac{\beta}{\gamma} \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(\frac{T_1}{\gamma} s + 1)(\beta T_2 s + 1)} = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right)$$

donde $\beta > 1$ y $\gamma > 1$. Considere que K_c pertenece a la parte de adelanto del compensador.

Procedimiento de Diseño para el Compensador en Adelanto-Atraso usando LGR

Caso 1: $\gamma \neq \beta \rightarrow$ El proceso de diseño es una combinación del diseño de un compensador en adelanto y uno de atraso.

1. A partir de las especificaciones de desempeño, determine la ubicación deseada para los polos dominantes de lazo cerrado.
2. Usando la función de transferencia del sistema no compensado $G(s)$, determine el ángulo faltante ϕ. El compensador en adelanto debe contribuir dicho ángulo ϕ.

Procedimiento de Diseño para el Compensador en Adelanto-Atraso usando LGR

3. Asumiendo que más adelante se seleccionará T_2 suficientemente grande tal que la magnitud de la parte de atraso es aproximadamente la unidad, seleccione los valores de T_1 y γ tal que:

$$\angle\left(\frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\gamma}{T_1}}\right) = \phi$$

donde $s = s_1$ es uno de los polos dominantes. La selección de T_1 y γ no es única. Luego determine el valor de K_c de la condición de magnitud:

$$\left| K_c \frac{s_1 + \frac{1}{T_1}}{s_1 + \frac{\gamma}{T_1}} G(s_1) \right| = 1$$

4. Si la constante de error de velocidad estática K_v ha sido especificada, determine el valor de β para satisfacer dicho requerimiento. La constante de error de velocidad estática K_v está dada por:

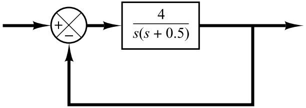
$$
\begin{aligned}
K_v &= \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) \\
&= \lim_{s\to 0} sK_c \left(\frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\gamma}{T_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right)G(s) \\
&= \lim_{s\to 0} sK_c \frac{\beta}{\gamma} G(s)
\end{aligned}
$$

donde K_c y γ ya han sido deteminados en el paso 3.

Tomando el valor de K_v se puede obtener el valor de β. Con dicho valor de β se selecciona T_2 tal que

$$
\left|\frac{s_1+\frac{1}{T_2}}{s_1+\frac{1}{\beta T_2}}\right| \approx 1
$$

$$
-5^\circ < \angle\left(\frac{s_1+\frac{1}{T_2}}{s_1+\frac{1}{\beta T_2}}\right) < 0^\circ
$$



Considere el sistema de control de la figura. La función de transferencia de la planta es:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$$

Los polos del sistema en lazo cerrado son $s = -0.25 \pm j1.9843$. En este caso $\zeta = 0.125$, $\omega_n = 2$ y $K_v = 8$.

El desempeño deseado es $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 5$, $K_v = 80$. Se debe diseñar un compensador apropiado para satisfacer todos los requerimientos.

Procedimiento Diseño Compensador en Adelanto-Atraso usando LGR - Ejemplo

Se asume que el compensador tiene la forma

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right), \ \beta > 1, \ \gamma > 1, \ \gamma \neq \beta$$

A partir de las especificaciones, los polos dominantes de lazo cerrado deseados son $s = -2.5 \pm j4.33$.

El ángulo del sistema no compensado es:

$$\angle \left. \frac{4}{s(s+0.5)} \right|_{s=-2.5\pm j4.33} = -120° - 114.7919° = -234.7926° = 125.2074°$$

El ángulo faltante ϕ que debe contribuir la parte de adelanto es:

$$\phi = 180° - 125.2074° = 54.7926°$$

Procedimiento Diseño Compensador en Adelanto-Atraso usando LGR - Ejemplo

Se procede a determinar la ubicación del cero y polo que contribuyen el ángulo ϕ. En éste caso se decide ubicar el cero en $s = -0.5$ para que se cancele con el polo de la planta en $s = -0.5$.

Con ésta ubicación del cero, se calcula que el polo debe estar ubicado en $s = -5.02$ para contribuir el ángulo ϕ.

Entonces, la parte de adelanto del compensador será:

$$K_c \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} = K_c \frac{s + 0.5}{s + 5.02}$$

Por lo tanto, $T_1 = 2$, $\gamma = \frac{5.02}{0.5} = 10.04$.

Procedimiento Diseño Compensador en Adelanto-Atraso usando LGR - Ejemplo

El valor de K_c se determina de la condición de magnitud:

$$\left| K_c \frac{s+0.5}{s+5.02} \frac{4}{s(s+0.5)} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 1$$

$$K_c = \left| \frac{(s+5.02)s}{4} \right|_{s=-2.5+j4.33} = 6.26$$

Procedimiento Diseño Compensador en Adelanto-Atraso usando LGR - Ejemplo

Ahora se procede a diseñar la parte de atraso del compensador. Primero se determina el valor de β para satisfacer el requerimiento de constante de error de velocidad estática:

$$\begin{aligned}
K_v &= \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) \\
&= \lim_{s\to 0} sK_c\frac{\beta}{\gamma}G(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s(6.26)\frac{\beta}{10.04}\frac{4}{s(s+0.5)} = 4.988\beta = 80 \\
\Rightarrow \beta &= 16.04
\end{aligned}$$

Finalmente, se selecciona el valor de T_2 tal que las siguientes condiciones sean satisfechas:

$$\left|\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{16.04T_2}}\right|_{s=-2.5+j4.33} \approx 1, \qquad -5^\circ < \angle\left(\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}\right)\Bigg|_{s=-2.5+j4.33} < 0^\circ$$

Se pueden seleccionar varios valores de T_2 y verificar si las condiciones se satisfacen. Tomando $T_2 = 5$ se encuentra que:

$$0.98 < \text{magnitud} < 1, \qquad -2.10^\circ < \text{ángulo} < 0^\circ$$

Como se satisfacen ambas condiciones, se selecciona $T_2 = 5$.

Procedimiento Diseño Compensador en Adelanto-Atraso usando LGR - Ejemplo

La función de transferencia del compensador adelanto-atraso diseñado es:

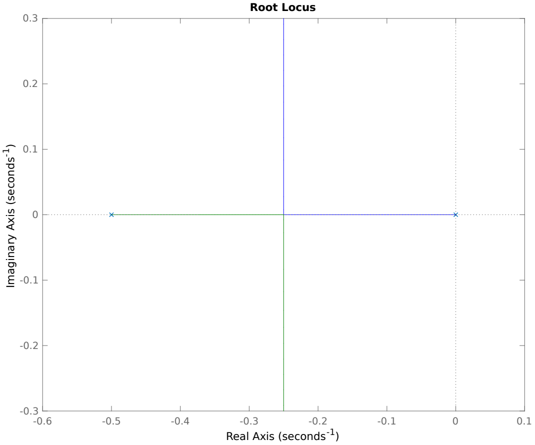
$$\begin{aligned} G_c(s) &= 6.26\left(\frac{s+\frac{1}{2}}{s+\frac{10.04}{2}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{5}}{s+\frac{1}{(16.04)(5)}}\right) \\ &= 6.26\left(\frac{s+0.5}{s+5.02}\right)\left(\frac{s+0.2}{s+0.01247}\right) \\ &= \frac{10(2s+1)(5s+1)}{(0.1992s+1)(80.19s+1)} \end{aligned}$$

La función de transferencia de lazo abierto del sistema compensado es:

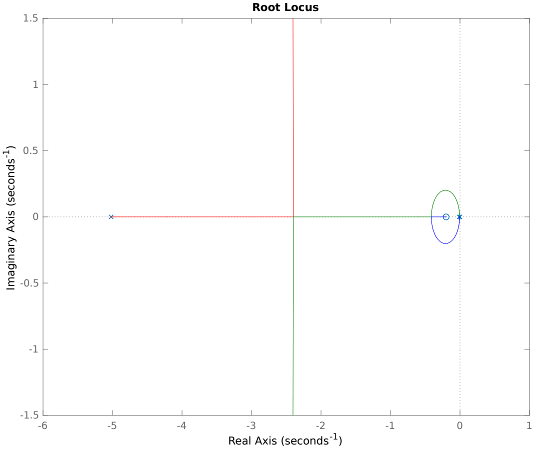
$$G_c(s)G(s) = \frac{25.04(s+0.2)}{s(s+50.2)(s+0.01247)}$$

Debido a la cancelación polo-cero, el sistema compensado es de tercer orden.

Procedimiento Diseño Compensador en Adelanto-Atraso usando LGR - Ejemplo

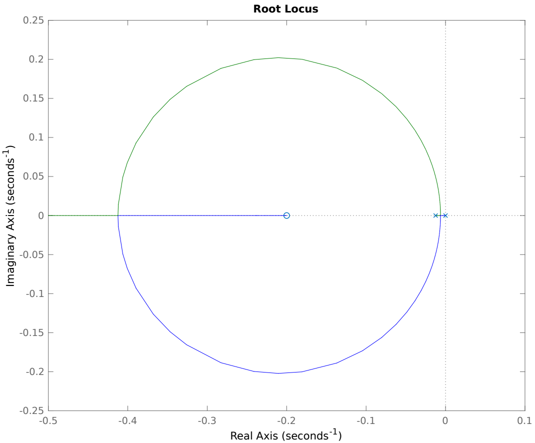


LGR para el sistema no compensado



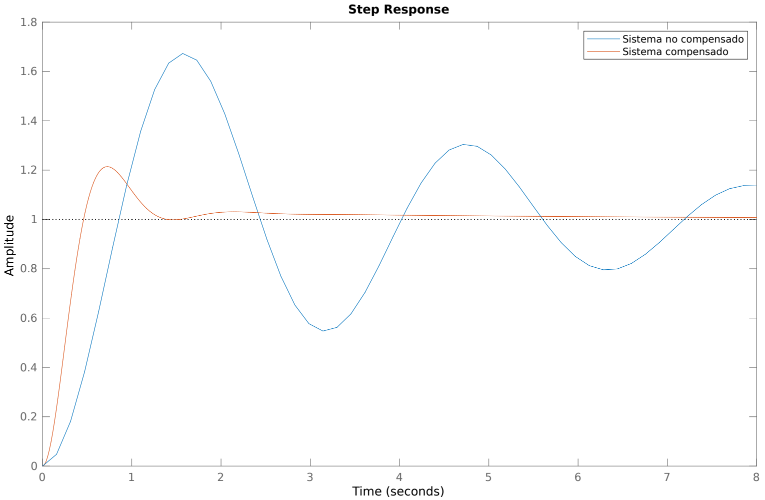
LGR para el sistema compensado

Procedimiento Diseño Compensador en Adelanto-Atraso usando LGR - Ejemplo



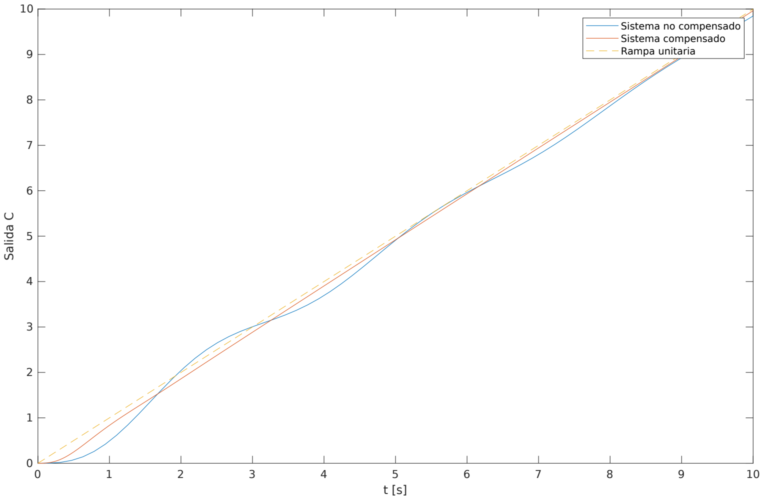
LGR para el sistema compensado - detalle cerca del origen

Procedimiento Diseño Compensador en Adelanto-Atraso usando LGR - Ejemplo



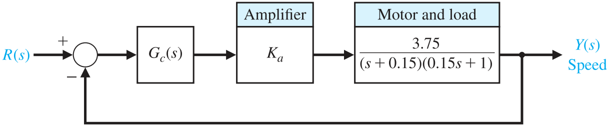
Respuesta paso para sistema no compensado y compensado

Procedimiento Diseño Compensador en Adelanto-Atraso usando LGR - Ejemplo



Respuesta rampa para sistema no compensado y compensado

1. El sistema de control mostrado en la figura representa el control de velocidad de un motor DC, usando un tacómetro de precisión. Se desea mantener una alta precisión en estado estacionario para el control de velocidad. Diseñe un compensador de adelanto para que se satisfagan los siguientes requerimientos: $PO = 10\%$, $T_s \leq 1.5$ s.



Taller

2. Un sistema de control con retroalimentación unitaria tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G_c(s)G(s) = G_c(s)\frac{5}{s(s^2+5s+12)}$$

- Diseñe un compensador de atraso usando el LGR tal que la constante de velocidad sea incrementada en 10.
- Compare la respuesta paso del sistema no compensado con la del sistema compensado.

3. Un sistema de control con retroalimentación unitaria tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$G_c(s)G(s) = G_c(s)\frac{160}{s^2}$$

- Diseñe un compensador de adelanto-atraso usando el LGR tal que los siguientes requerimientos sean satisfechos: $PO \leq 5\%$, $T_s \leq 1$ s, $K_a >= 7500$ (constante de aceleración).
- Compare la respuesta paso del sistema no compensado con la del sistema compensado.