



Pontificia Universidad  
**JAVERIANA**  
Colombia

# Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica

## Controles

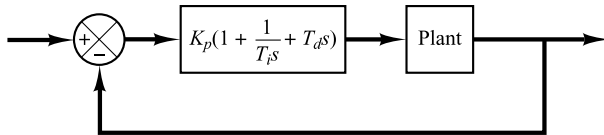
Clase 4: Sintonización de Controladores

Gerardo Becerra, Ph.D.

[gbecerra@javeriana.edu.co](mailto:gbecerra@javeriana.edu.co)

Febrero 19, 2020

# Introducción



- Controlador PID → Depende de los parámetros  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ .
- **Sintonización:** Selección de valores numéricos para los parámetros, con base en algún criterio.
- Existen muchos criterios para sintonización de controladores.
  - Experimentales
  - Análisis de la función de transferencia
  - Técnicas de optimización
  - Lugar geométrico de las raíces
  - Compensación en frecuencia

## Criterios Clásicos de Sintonización

---

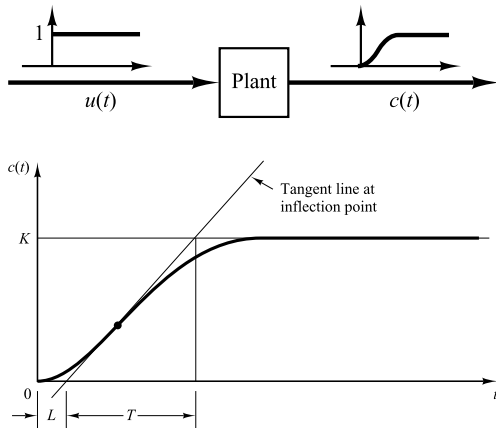
# Método de Ziegler-Nichols

---

- Método experimental.
- Útil cuando no se conoce un modelo matemático detallado de la planta.
- Está diseñado para proveer un buen rechazo a perturbaciones.
- Produce un sobrepico grande.
- Los parámetros resultantes no necesariamente son óptimos. Se toman como punto de partida para un ajuste fino.
- Dos métodos
  1. Lazo abierto: Características de la curva de reacción ante entrada paso.
  2. Lazo cerrado: Aumentar la ganancia proporcional hasta un valor crítico.

# Método de Ziegler-Nichols / Método 1: Lazo Abierto

- Aplicar entrada paso unitaria al sistema y medir la respuesta (experimental o simulación).
- Si la respuesta tiene forma de S, se puede aplicar el método.
- Caracterizar la curva obtenida usando dos parámetros: tiempo muerto  $L$  y constante de tiempo  $T$ .
- Los parámetros se encuentran dibujando una recta tangente al punto de inflexión de la curva en forma de S.



## Método de Ziegler-Nichols / Método 1: Lazo Abierto

- La función de transferencia  $C(s)/U(s)$  se puede aproximar a un sistema de primer orden mas tiempo muerto:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

- Ziegler y Nichols sugirieron asignar los valores para los parámetros de acuerdo con la siguiente tabla:

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$T/L$	$\infty$	0
PI	$0.9T/L$	$L/0.3$	0
PID	$1.2T/L$	$2L$	$0.5L$

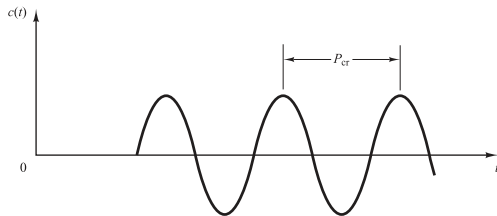
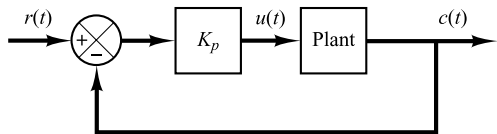
Note que el controlador PID obtenido por éste método tiene la forma:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\ &= 1.2 \frac{T}{L} \left( 1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) \\ &= 0.6T \frac{(s + \frac{1}{L})^2}{s} \end{aligned}$$

El controlador PID tiene un polo en el origen y doble cero en  $s = -1/L$ .

## Método de Ziegler-Nichols / Método 2: Lazo Cerrado

- Se inicia configurando  $T_i = \infty$  y  $T_d = 0$ .
- Usando sólo acción proporcional, aumentar  $K_p$  desde 0 hasta un valor crítico  $K_{cr}$  en el cual la salida presenta oscilaciones sostenidas.
- Si no se obtienen oscilaciones, el método no se puede aplicar.
- A partir del experimento se determinan la ganancia crítica  $K_{cr}$  y periodo crítico  $P_{cr}$ .



## Método de Ziegler-Nichols / Método 2: Lazo Cerrado

Ziegler y Nichols sugirieron asignar los valores para los parámetros de acuerdo con la siguiente tabla:

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0.45K_{cr}$	$P_{cr}/1.2$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$P_{cr}/2$	$0.125P_{cr}$

Note que el controlador PID obtenido por el segundo método tiene la forma:

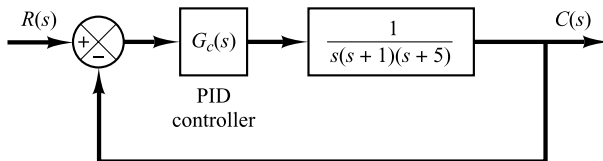
$$\begin{aligned}G_c(s) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\&= 0.6K_{cr} \left( 1 + \frac{1}{0.5P_{cr}s} + 0.125P_{cr}s \right) \\&= 0.075K_{cr}P_{cr} \frac{\left( s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s}\end{aligned}$$

Entonces, el controlador PID tiene un polo en el origen y doble cero en  $s = -4/P_{cr}$ .



## Método de Ziegler-Nichols / Ejemplo

Considere el sistema de control mostrado en la figura. Usando el método de Ziegler-Nichols, determine los parámetros del controlador PID tal que se obtenga un sobrepico máximo de aproximadamente 25%. Si el sobrepico máximo es excesivo, realice un ajuste fino para reducirlo.



## Método de Ziegler-Nichols / Ejemplo

- Dado que la planta tiene un integrador, se utiliza el segundo método.
- Definiendo  $T_i = \infty$  y  $T_d = 0$ , se obtiene la función de transferencia de lazo cerrado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5) + K_p} = \frac{K_p}{s^3 + 6s^2 + 5s + K_p}$$

- El valor crítico de  $K_p$  para obtener oscilaciones sostenidas se puede obtener usando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz para el polinomio característico  $q(s) = s^3 + 6s^2 + 5s + K_p = 0$ :

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K_p \\ s^1 & \frac{30-K_p}{6} & \\ s^0 & K_p & \end{array}$$

- El valor crítico de  $K_p$  para obtener oscilaciones sostenidas es  $K_{cr} = 30$ .
- En éste caso, el polinomio característico es  $q(s) = s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0$ .

## Método de Ziegler-Nichols / Ejemplo

- Para hallar la frecuencia de la oscilación se substituye  $s = j\omega$  en el polinomio característico:

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 30 = 0$$

$$6(5 - \omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{5}$$

- El periodo de oscilación sostenida es:

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.8099$$

- Usando la tabla para el método 2, se obtienen los valores del controlador PID como:

$$K_p = 0.6K_{cr} = 18$$

$$T_i = 0.5P_{cr} = 1.405$$

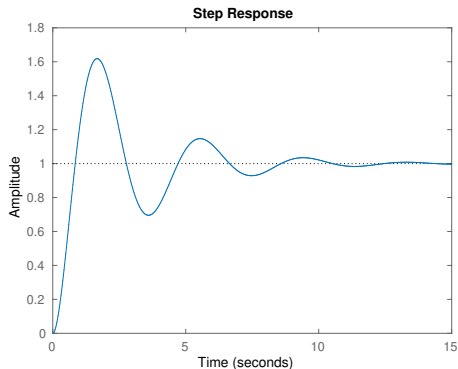
$$T_d = 0.125P_{cr} = 0.35124$$

- La función de transferencia del controlador PID queda:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= 18 \left( 1 + \frac{1}{1.405s} + 0.35124s \right) \\ &= \frac{6.3223(s + 1.4235)^2}{s} \end{aligned}$$

# Método de Ziegler-Nichols / Ejemplo

La respuesta del sistema en lazo cerrado ante una entrada paso es:



Sobrepico 60% aproximadamente → se requiere ajustar los parámetros para disminuir el sobrepico:

$$K_p = 39.42$$

$$T_i = 3.077$$

$$T_d = 0.7692$$

# Método de Cohen-Coon

- Ziegler-Nichols: sensible a la relación  $L/T$ .
- Cohen-Coon: Mejora el desempeño cuando el tiempo muerto es comparable a la constante de tiempo.

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\frac{T}{K_0 L} \left(1 + \frac{L}{3T}\right)$	$\infty$	0
PI	$\frac{T}{K_0 L} \left(0.9 + \frac{L}{12T}\right)$	$L \frac{30T+3L}{9T+20L}$	0
PID	$\frac{T}{K_0 L} \left(\frac{4}{3} + \frac{L}{4T}\right)$	$L \frac{32T+6L}{13T+8L}$	$\frac{4TL}{11T+22}$

$$K_0 = \frac{\Delta c}{\Delta u}$$

# Sintonía Óptima de Controladores

---

# Índices de Desempeño

Sistema de control óptimo: los parámetros del sistema se ajustan para minimizar (maximizar) un índice de desempeño.

- Integral del cuadrado del error (ISE):

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt$$

- Integral del valor absoluto del error (IAE):

$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt$$

- Integral del valor absoluto del error ponderado en el tiempo (ITAE):

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt$$

- Integral del cuadrado del error ponderado en el tiempo (ITSE):

$$ITSE = \int_0^T te^2(t)dt$$

$T$ : Es conveniente seleccionarlo como el tiempo de establecimiento  $T_s$ .

# Índices de Desempeño

---

- ISE: otorga más peso a errores grandes, lo cual usualmente ocurre al inicio de la respuesta, y menos peso a errores pequeños, lo cual ocurre normalmente hacia el final de la respuesta.
- ISE: produce ganancias del controlador grandes y respuestas muy oscilatorias.
- ITAE, ITSE: agrega un término de penalización asociado al tiempo transcurrido.
- Lopez et al [1967] desarrollaron fórmulas empíricas de mínimo error integral.
- Aplicables para el intervalo  $0.1 < L/T < 1$ .



# Sintonización Óptima para Regulación - Controlador P

---

Process Model:  $G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$

Proportional (P) Controller:  $G_e(s) = K_c$

---

Error Integral	ISE	IAE	ITAE
$K_c = \frac{a}{K} \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^b$	$a = 1.411$	0.902	0.490
	$b = -0.917$	-0.985	-1.084

---

# Sintonización Óptima para Regulación - Controlador PI

---

Process Model:  $G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$

Proportional-Integral (PI) Controller:

$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$$


---

Error Integral	ISE	IAE	ITAE
$K_c = \frac{a_1}{K} \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^{b_1}$	$a_1 = 1.305$	0.984	0.859
	$b_1 = -0.959$	-0.986	0.977
$\tau_I = \frac{\tau}{a_2} \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^{b_2}$	$a_2 = 0.492$	0.608	0.674
	$b_2 = 0.739$	0.707	0.680

# Sintonización Óptima para Regulación - Controlador PID

Process Model:  $G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$

Proportional-Integral-Derivative (PID) Controller:

$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

Error Integral	ISE	IAE	ITAE
$K_c = \frac{a_1}{K} \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^{b_1}$	$a_1 = 1.495$	1.435	1.357
	$b_1 = 0.945$	0.921	0.947
$\tau_I = \frac{\tau}{a_2} \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^{b_2}$	$a_2 = 1.101$	0.878	0.842
	$b_2 = 0.771$	0.749	0.738
$\tau_D = a_3 \tau \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^{b_3}$	$a_3 = 0.560$	0.482	0.381
	$b_3 = 1.006$	1.137	0.995

# Sintonización Óptima para Servos - Controlador PI

---

Process Model:  $G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$

Proportional-Integral (PI) Controller:

$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$$

---

Error Integral	IAE	ITAE
$K_c = \frac{a_1}{K} \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^{b_1}$	$a_1 = 0.758$	$0.586$
	$b_1 = -0.861$	$-0.916$
$\tau_I = \frac{\tau}{a_2 + b_2(t_0/\tau)}$	$a_2 = 1.02$	$1.03$
	$b_2 = -0.323$	$-0.165$

---

# Sintonización Óptima para Servos - Controlador PID

---

Process Model:  $G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$

Proportional-Integral-Derivative (PID) Controller:

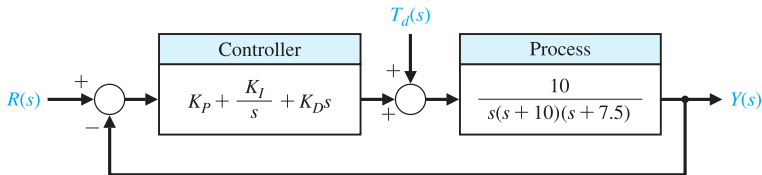
$$G_c(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$


---

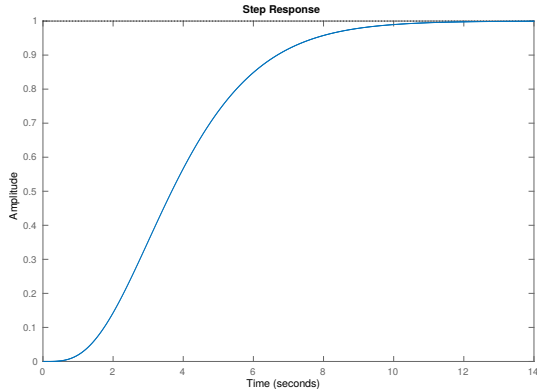
Error Integral	IAE	ITAE
$K_c = \frac{a_1}{K} \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^{b_1}$	$a_1 = 1.086$	0.965
	$b_1 = -0.869$	<b>- 0.855</b>
$\tau_I = \frac{\tau}{a_2 + b_2(t_0/\tau)}$	$a_2 = 0.740$	0.796
	$b_2 = -0.130$	0.147
$\tau_D = a_3 \tau \left( \frac{t_0}{\tau} \right)^{b_3}$	$a_3 = 0.348$	0.308
	$b_3 = 0.914$	0.9292

1. Considere el sistema de control mostrado en la figura.

- Diseñe un controlador PID usando el método de Ziegler-Nichols.
- Determine la respuesta a entrada unitaria y disturbio unitario.
- Cuál es el máximo sobrepico y tiempo de establecimiento para la respuesta a entrada unitaria?



2. La siguiente figura muestra la curva de reacción obtenida al aplicar una entrada paso al sistema  $G(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$ .



- Encuentre una aproximación de primer orden mas tiempo muerto (FOPDT) para el sistema.
- Diseñe un controlador PID usando los métodos de Ziegler-Nichols, Cohen-Coon e ITAE.
- Compare los valores de los parámetros obtenidos en cada caso.
- Evalúe el desempeño de cada controlador ante entrada paso unitario y disturbio paso unitario.