Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica

Controles

Clase 6: Diseño de Compensadores por LGR - Aproximación de Polos Dominantes

Gerardo Becerra, Ph.D.

gbecerra@javeriana.edu.co

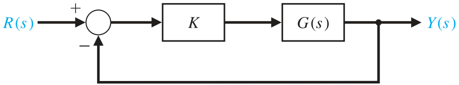
Marzo 5, 2020

Introducción

- Estabilidad y desempeño de un sistema de control retroalimentado $\rightarrow$ dependen de la ubicación de los polos de lazo cerrado en el plano complejo.
- Es interesante determinar cómo se mueven las raíces del polinomio característico a medida que se modifican ciertos parámetros $\rightarrow$ lugar de las raíces.
- Método de lugar de las raíces: método gráfico para hacer un bosquejo del lugar de las raíces.
- Información gráfica $\rightarrow$ información cualitativa de la estabilidad y desempeño del sistema.
- Es posible usar el lugar de las raíces para diseñar controladores.

Método del Lugar de las Raíces

Método del Lugar de las Raíces



- El comportamiento dinámico del sistema de control se describe por la función de transferencia

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

- El polinomio característico para el sistema de control de la figura es:

$$1 + KG(s) = 0, \quad 0 \leq K < \infty$$

- La ecuación se puede reescribir en forma polar como

$$|KG(s)|\angle KG(s) = -1 + j0$$

- Por lo tanto se debe cumplir

$$|KG(s)| = 1$$

$$\angle KG(s) = 180^o + k360^o$$

- El LGR debe satisfacer la condición de magnitud:

$$|KG(s)| = \frac{K|s+z_1||s+z_2|\ldots|s+z_M|}{|s+p_1||s+p_2|\ldots|s+p_n|} = 1$$

y la condición de ángulo:

$$\angle G(s) = \sum_{i=1}^{M} \angle(s+z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s+p_j) = 180^o + k360^o$$

El lugar de las raíces corresponde a las trayectorias seguidas por las raíces de la ecuación característica a medida que un parámetro del sistema varía desde cero hasta infinito.

Lugar de las Raíces - Procedimiento

Paso 1: Preparar el diagrama

- Escribir la ecuación característica para que el parámetro de interés K aparezca como un factor multiplicativo

$$1 + KG(s) = 0$$

- Factorizar $G(s)$ y escribir el polinomio en la forma de polos y ceros:

$$1 + K\frac{\prod_{i=1}^{M}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} \qquad (1)$$

- Localice los ceros $-z_i$ y polos $-p_j$ en el plano complejo usando los símbolos $\times$ y $\bigcirc$, respectivamente.
- Reescribiendo la Eq.(1) se tiene:

$$\prod_{j=1}^{n}(s+p_j) + K\prod_{i=1}^{n}(s+z_j) = 0$$

$$\frac{1}{K}\prod_{j=1}^{n}(s+p_j) + \prod_{i=1}^{n}(s+z_j) = 0$$

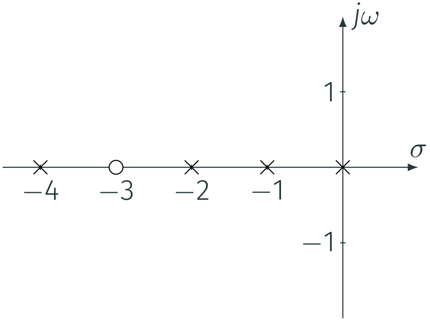
Si $K = 0 \Rightarrow$ las raíces del polinomio característico son los polos de $G(s)$.
Si $K \to \infty \Rightarrow$ las raíces del polinomio característico son los ceros de $G(s)$.

Paso 1: Preparar el diagrama

El lugar de las raíces de la ecuación característica $1 + KG(s) = 0$ inicia en los polos de $G(s)$ y termina en los ceros de $G(s)$ a medida que K se incrementa desde cero hasta infinito.

Paso 1 - Ejemplo

$$G(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$



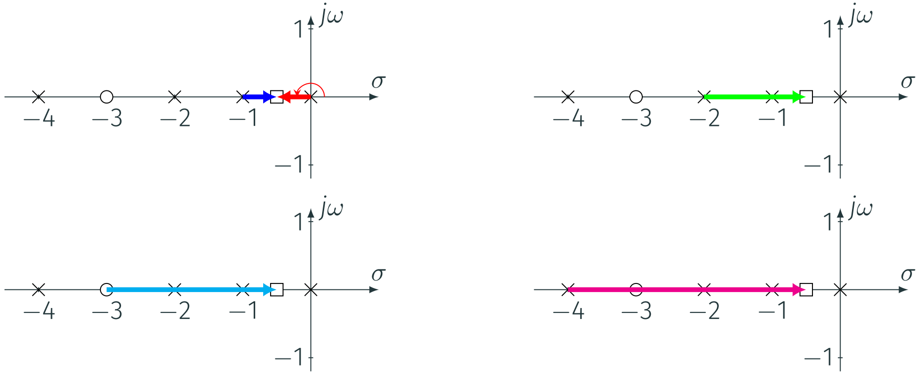
Ubicación de polos y ceros del sistema en lazo abierto.

Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real

Usando la condición de ángulo es posible determinar los segmentos del eje real que hacen parte del lugar de las raíces.

Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real - Ejemplo

Condición de ángulo en el intervalo $[-1, 0]$

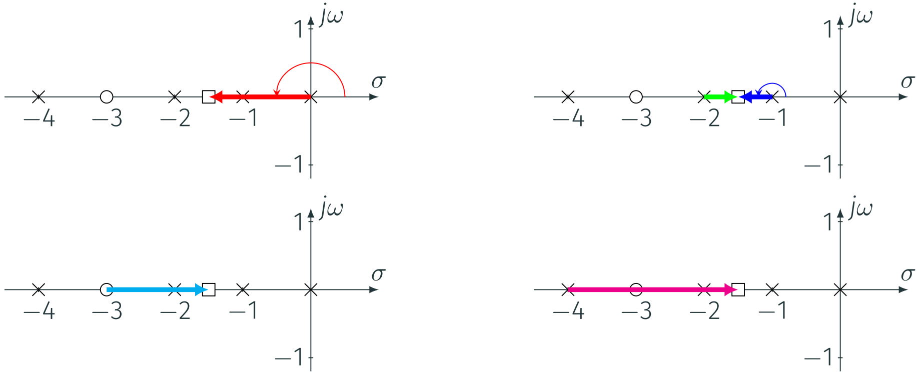


$$\angle(s+3) - (\angle(s) + \angle(s+1) + \angle(s+2) + \angle(s+4))$$

$= 0° - (180° + 0° + 0° + 0°) = -180° \Rightarrow$ El segmento si pertenece al LGR.

Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real - Ejemplo

Condición de ángulo en el intervalo $[-2, -1]$

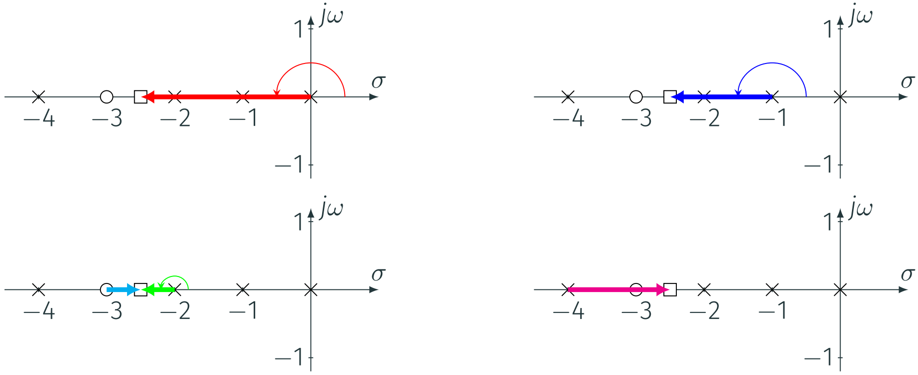


$$\angle(s+3) - (\angle(s) + \angle(s+1) + \angle(s+2) + \angle(s+4))$$

$= 0° - (180° + 180° + 0° + 0°) = -360° \neq 180 \Rightarrow$ El segmento no pertenece al LGR.

Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real - Ejemplo

Condición de ángulo en el intervalo $[-3, -2]$

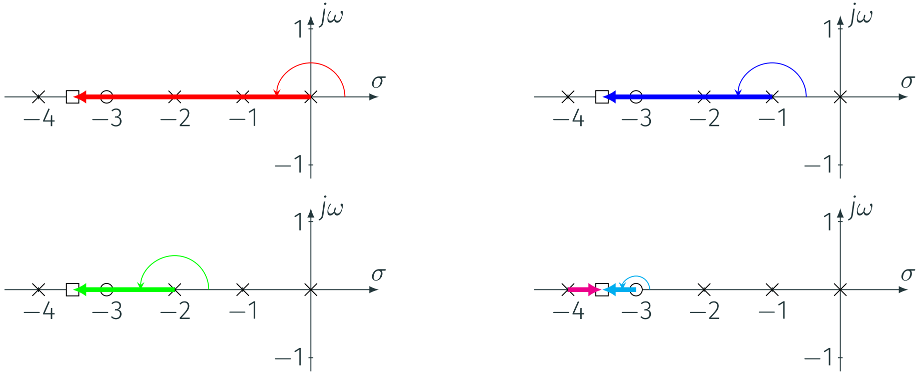


$$\angle(s+3) - (\angle(s) + \angle(s+1) + \angle(s+2) + \angle(s+4))$$

$= 0^\circ - (180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 0^\circ) = -180 \Rightarrow$ El segmento si pertenece al LGR.

Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real - Ejemplo

Condición de ángulo en el intervalo $[-4, -3]$

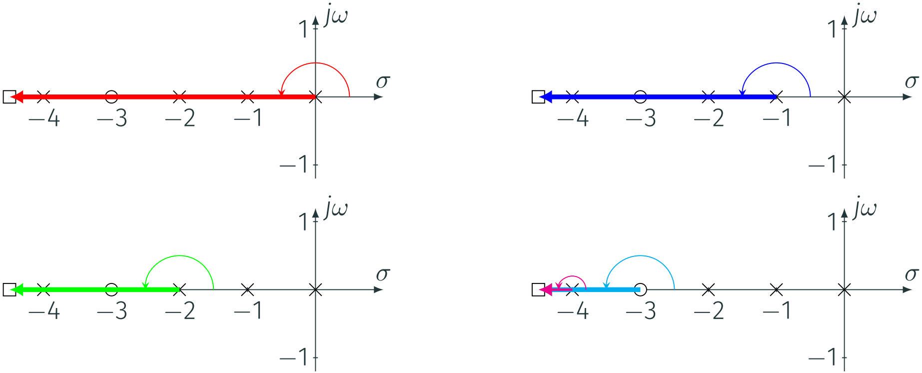


$$\angle(s+3) - (\angle(s) + \angle(s+1) + \angle(s+2) + \angle(s+4))$$

$= 180° - (180° + 180° + 180° + 0°) = -360 \neq 180 \Rightarrow$ El segmento no pertenece al LGR.

Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real - Ejemplo

Condición de ángulo en el intervalo $(-\infty, -4]$

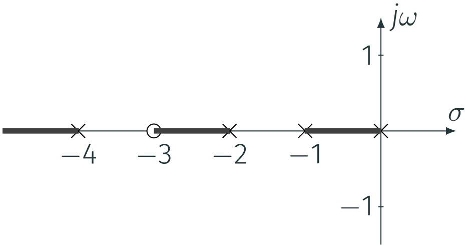


$$\angle(s+3) - (\angle(s) + \angle(s+1) + \angle(s+2) + \angle(s+4))$$

$= 180° - (180° + 180° + 180° + 180°) = -540 \Rightarrow$ El segmento si pertenece al LGR.

Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real - Ejemplo

Los segmentos que pertenecen al LGR son:



Segmentos del LGR en el eje real

Los segmentos del eje real que pertenecen al lugar de las raíces son aquellos que se encuentran a la izquierda de un número impar de polos y ceros.

Paso 3: Identificar asíntotas

- Cuando el número de ceros finitos M de $G(s)$ es menor que el número de polos n, entonces $N = n - M$ secciones del lugar de las raíces deben finalizar en ceros ubicados en el infinito.
- Éstas secciones se dirigen hacia los ceros en infinito a través de asíntotas, mientras $K \to \infty$.
- Las asíntotas cortan al eje horizontal en el punto σ_A definido como:

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{polos de } G(s) - \sum \text{ceros de } G(s)}{n - M} = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_j)}{n - M}$$

- El ángulo de las asíntotas respecto al eje real es:

$$\phi_{A_k} = \frac{2k+1}{n-M} 180^\circ, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, (n - M - 1)$$

Paso 3: Identificar asíntotas - Ejemplo

$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

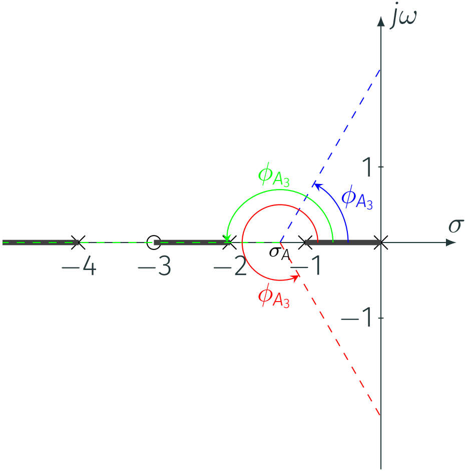
- Número de asíntotas: $N = n - M = 4 - 1 = 3$.
- Corte con el eje horizontal:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^{n}(-p_j) - \sum_{i=1}^{M}(-z_j)}{n-M} = \frac{(-1-2-4)-(-3)}{3} = -\frac{4}{3} = -1.3333$$

- Ángulos de las asíntotas:

$$\phi_{A_1} = \frac{1}{3}180° = 60°, \quad \phi_{A_2} = \frac{3}{3}180° = 180°, \quad \phi_{A_3} = \frac{5}{3}180° = 300°$$

Paso 3: Identificar asíntotas - Ejemplo



Paso 4: Determinar los puntos de ruptura

- Ocurren cuando el cambio neto de ángulo ante un pequeño desplazamiento es cero.
- El lugar de las raíces se separa en el lugar donde hay multiplicidad de raíces (típicamente 2).
- Para determinarlo analíticamente se parte del polinomio característico $1 + KG(s) = 0$. La ecuación se puede reescribir como $K = -1/G(s)$. Se calcula la derivada respecto a s y se iguala a cero:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

  Finalmente, se calculan las raíces del polinomio resultante.

Paso 4: Determinar los puntos de ruptura - Ejemplo

$$G(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{G(s)} \\ &= -\frac{s(s+1)(s+2)(s+4)}{(s+3)} \\ &= -\frac{s^4+7s^3+14s^2+8s}{s+3} \end{aligned}$$

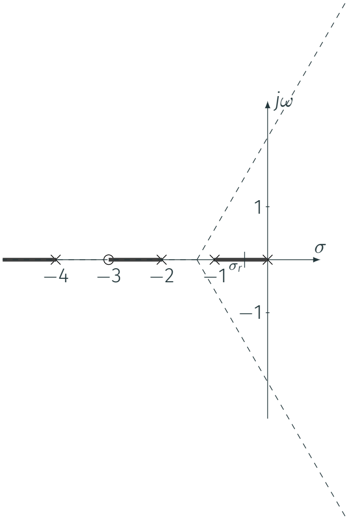
$$\frac{dK}{ds} = 0 = -\frac{3s^4+26s^3+77s^2+84s+24}{(s+3)^2}$$

$$0 = 3s^4+26s^3+77s^2+84s+24$$

$$s = \{-3.311 \pm j0.6812, -1.6097, -0.4349\}$$

La única raíz que se encuentra dentro del lugar de las raíces es $\sigma_r = -0.4349$.

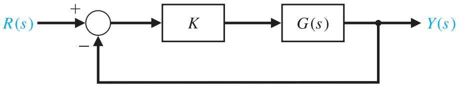
Paso 4: Determinar los puntos de ruptura - Ejemplo



Paso 5: Determinar el cruce por el eje imaginario

- Se encuentra utilizando el criterio de Routh-Hurwitz.
- Se calcula la ganancia crítica K_{cr} para llevar las raíces hasta el eje imaginario.
- Se reemplaza la ganancia crítica K_{cr} en el polinomio característico $1 + KG(s) = 0$ y se calculan las raíces.
- Se seleccionan las raíces complejas conjugadas (si existen) que tienen parte real igual a cero.

Paso 5: Determinar el cruce por el eje imaginario - Ejemplo



- Polinomio característico:

  $s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 8s + K(s+3) = 0$

- Arreglo de Routh:

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 14 & 3K \\
s^3 & 7 & 8+K & 0 \\
s^2 & b_1 & 3K & 0 \\
s^1 & c_1 & 0 & 0 \\
s^0 & 3K & 0 &
\end{array}
$$

- Condiciones de estabilidad:

$$b_1 = \frac{90-K}{7} > 0 \Rightarrow K < 90$$

$$c_1 = \frac{-K^2 - 65K + 720}{b_1} > 0 \Rightarrow K_1 < 74.64 \ \&$$

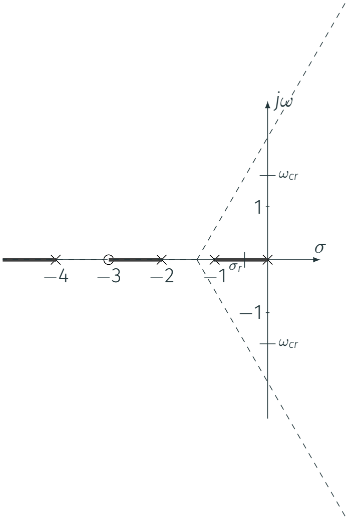
$$K_2 < 9.65 \Rightarrow K < 9.65$$

- Ganancia crítica: $K_{cr} = 9.65$
- Reemplazando K_{cr}:

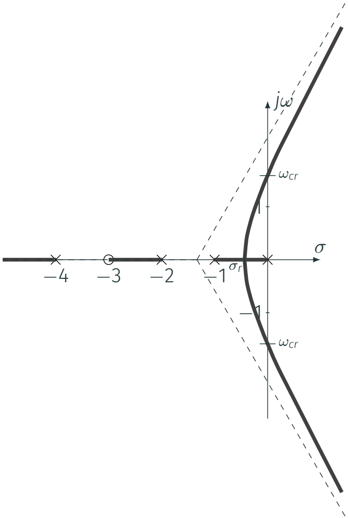
  $s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 17.65s + 28.95 = 0$

  $\Rightarrow \omega_{cr} = \pm 1.588$

Paso 5: Determinar el cruce por el eje imaginario - Ejemplo



Paso 6: Finalizar el bosquejo del diagrama - Ejemplo



Diseño de Compensadores por LGR - Aproximación de Polos Dominantes

Diseño de Compensadores por LGR - Aproximación de Polos Dominantes

- En el LGR, los polos de lazo cerrado se mueven hacia los ceros de lazo abierto a medida que la ganancia K aumenta.
- Lo anterior puede usarse para fijar los polos dominantes deseados del sistema.
- El procedimiento puede usarse para diseñar un controlador PID que aproxime los polos dominantes deseados.

Considere la función de transferencia del controlador PID:

$$G_c(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}$$

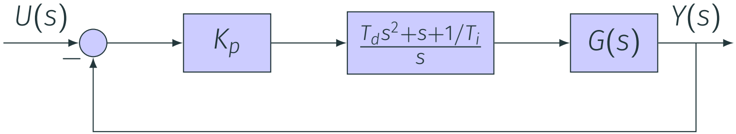
Reescribiendo el controlador en la forma ideal, donde $K_d = K_p T_d$, $K_i = K_p / T_i$:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left[1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right] = K_p \left[\frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s}\right] \\ &= \frac{K_p T_i T_d}{s} \left[\frac{s^2 + s/T_d + 1/T_i T_d}{T_i}\right] \end{aligned}$$

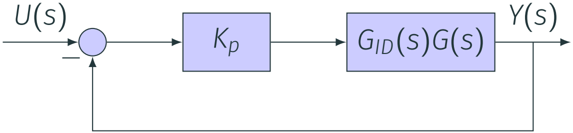
$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{K_p T_d}{s} \left[s^2 + \frac{s}{T_d} + \frac{1}{T_i T_d}\right] \\ &= \frac{K_p T_d}{s} h(s) \end{aligned} \tag{2}$$

Diseño de Compensadores por LGR - Aproximación de Polos Dominantes

- El diagrama de bloques del sistema se puede organizar como:



- Combinando el bloque que depende de T_i, T_d con la planta:



- Usando T_i, T_d es posible fijar los ceros de lazo abierto del sistema $G_{ID}(s)G(s)$.
- Usando K_p, es posible ubicar los polos de lazo cerrado cerca de los ceros de lazo abierto, aproximando el desempeño deseado.

Procedimiento de Diseño

1. A partir de los requerimientos de desempeño, encontrar un polinomio deseado $q_{des}(s)$ para el sistema en lazo cerrado. Calcular la ubicación de los polos de dicho polinomio.
2. Comparar el polinomio deseado con el polinomio $h(s)$ en la Ec.(2). Resolver el sistema de ecuaciones para hallar T_i, T_d.
3. Sustituir los valores T_i, T_d en $G_{ID}(s)$. Dibujar el lugar de las raíces para el sistema $G_{ID}(s)G(s)$.
4. Encontrar una ganancia K_p tal que los polos de lazo cerrado se aproximen a los ceros de lazo abierto.
5. Reemplazar K_p, T_i, T_d en $G_c(s)$. Simular el sistema y verificar el desempeño.

Considere el sistema:

$$G(s) = \frac{0.8}{(30s+1)(13s+1)(3s+1)}$$

Se desea un controlador PID sintonizado usando el LGR tal que tenga un sobrepico $PO \leq 15\%$ y tiempo de establecimiento $T_s = 100$ s con $e_{ss} = 0$.

Con el sobrepico se calcula el valor de ζ:

$$e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.15 \quad \Rightarrow \quad \zeta = 0.5165$$

Con el tiempo de estabilización T_s y el valor de ζ encontrado, se obtiene el valor de ω_n:

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad \Rightarrow \omega_n = 0.0774$$

Entonces, el polinomio deseado es:

$$q_{des} = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 0.08s + 0.006$$

Diseño de Compensadores por LGR - Ejemplo

Se compara el polinomio deseado con el polinomio que define los ceros del controlador PID:

$$h(s) = s^2 + \frac{s}{T_d} + \frac{1}{T_i T_d}$$

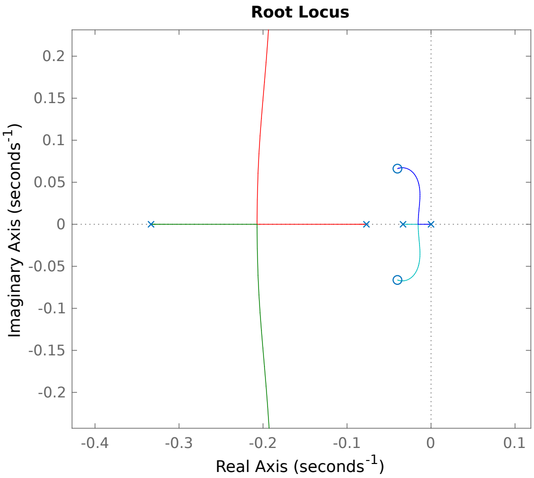
Entonces, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{T_d} = 0.080, \quad \frac{1}{T_i T_d} = 0.0059$$

$$T_i = 13.3608, T_d = 12.50$$

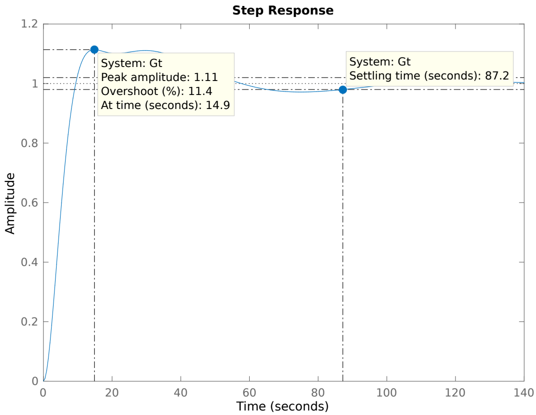
Diseño de Compensadores por LGR - Ejemplo

- Usando la función **`rlocus`** de Matlab, se obtiene el lugar de las raíces.
- Note que los dos polos reales ubicados en $s = 0$ y $s = 0.0333$ colisionan y se convierten en un par de polos complejos conjugados que tienden hacia los ceros ubicados en $-0.04 \pm j0.0662$ a medida que $K_p \to \infty$.



Diseño de Compensadores por LGR - Ejemplo

- Ahora hay que encontrar una ganancia K_p para aproximar la ubicación de los polos dominantes deseados. Para hacerlo se puede usar la herramienta **`rltool`**.
- Ajustando la ganancia en la herramienta **`rltool`** se encuentra que con $K_p = 131.01$, los polos dominantes resultantes se encuentran ubicados en $s = -0.0296 \pm j0.0667$.
- Con ésta ubicación se obtiene la siguiente respuesta paso:



Si se satisfacen los requerimientos!

1. Considere la función de transferencia de lazo abierto

$$KG(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+4s+5)}$$

- Realice un bosquejo del lugar de las raíces. Verifique el resultado usando `rlocus`.
- Calcule la ubicación de los polos dominantes cuando $K = 6.5$.
- Para los polos dominantes encontrados, calcule el tiempo de establecimiento y el sobrepico para una entrada paso. Verifique los resultados con una simulación.

2. Un sistema de control tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$KG(s) = \frac{K(s + 2.5)}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 4s + 5)}$$

- Realice un bosquejo del lugar de las raíces. Verifique el resultado usando `rlocus`.
- Encuentre la ganancia K que resulta en polos dominantes con un factor de amortiguamiento de 0.707.
- Encuentre el porcentaje de sobrepico y tiempo de pico para la ganancia K calculada. Verifique el resultado usando una simulación.

3. Un sistema de control tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$KG(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s+4)}$$

- Determine el rango de estabilidad de K.
- Realice un bosquejo del lugar de las raíces. Verifique el resultado usando `rlocus`.
- Determine el máximo valor de ζ de las raíces complejas estables.

4. Considere la planta caracterizada por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{(s+3)}{(s-1)(s+2)(s+5)}$$

Se desea diseñar un sistema de control que cumpla con las siguientes especificaciones ante una entrada paso unitaria:

- Porcentaje de sobrebico: 10%.
- Tiempo de establecimiento: 10 s.
- Error de estado estacionario: 0.

Diseñe un controlador PID usando el lugar de las raíces por el método de aproximación de polos dominantes. Verifique el resultado usando simulaciones.