Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica

Controles

Clase 10: Introducción al Control Digital

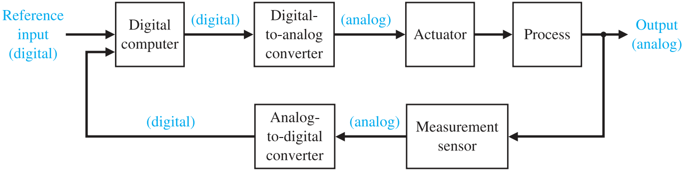
Gerardo Becerra, Ph.D.

gbecerra@javeriana.edu.co

Introducción

- Control analógico estudiado hasta el momento $\rightarrow$ se implementa usando circuitos electrónicos analógicos.
- Actualmente, los sistemas de control se implementan usando sistemas digitales (microprocesadores, microcontroladores).
- Su uso se ha incrementado a medida que su precio disminuye y sus capacidades aumentan.
- Sistema de control digital $\rightarrow$ usa señales digitales y un computador digital para controlar el proceso.
- Se requieren circuitos especiales para convertir las señales entre sus representaciones digital / analógica y actuar como interfaz entre el controlador y el proceso.

Elementos de un Sistema de Control Digital

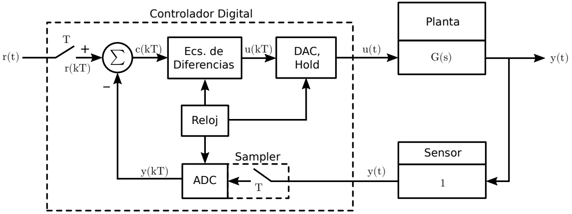


- Actuador, proceso: sistemas físicos que poseen señales analógicas.
- Sensor: captura la señal de salida de la planta, generando una señal eléctrica.
- Convertidor analógico-digital (ADC): transforma la señal eléctrica generada por el sensor a una representación digital.
- Computador digital: implementa la función del controlador/compensador. Calcula la ley de control a partir de la referencia y la medición y genera una señal de control digital.
- Convertidor digital-analógico (DAC): transforma la señal de control generada por el computador en una representación analógica.

Elementos de un Sistema de Control Digital

- Controladores analógicos $\rightarrow$ se construyen usando circuitos analógicos (resistores, capacitores, amplificadores operacionales).
- Dichos circuitos realizan implícitamente la operación de integración.
- Integración: operación fundamental para la solución de ecuaciones diferenciales.
- Computadores digitales $\rightarrow$ no pueden integrar.
- Integración numérica: aproximación de la solución usando una ecuación algebráica.
- Diseño de controladores digitales:
  - Diseño del controlador en tiempo continuo y discretización del controlador obtenido $\rightarrow$ implementación directa usando los métodos que ya conocemos, puede presentar errores de aproximación.
  - Diseño del controlador directamente en el dominio digital $\rightarrow$ no hay errores de aproximación, se requiere conocer métodos específicos de sintonización.

Elementos de un Sistema de Control Digital



Convertidor analógico - digital (ADC):

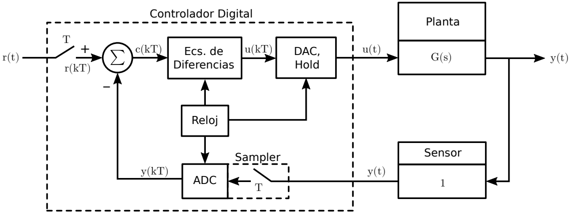
- Convierte el voltaje $y(t)$ en un número binario (10 - 12 bits).
- 10 bits: $2^{10} = 1024$ valores $\rightarrow$ resolución de 0.1%.

- La conversión de $y(t)$ se realiza con un periodo de muestreo T obteniendo la señal discreta $y(kT)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Referencia $r(kT)$:

- Usando un sampler-ADC para digitalizar una señal analógica $r(t)$.
- Valor digital obtenido desde un puerto de comunicaciones.

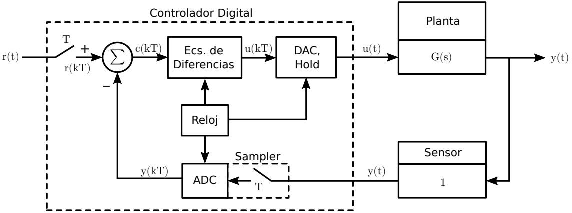
Elementos de un Sistema de Control Digital



Convertidor digital - analógico:

- Convierte el número binario $u(kT)$ en un voltaje $u(t)$.
- Un retenedor de orden cero (ZOH) mantiene el voltaje durante el periodo de muestreo.
- El voltaje $u(t)$ se aplica sobre el actuador como en el caso de un sistema de control analógico.

Elementos de un Sistema de Control Digital



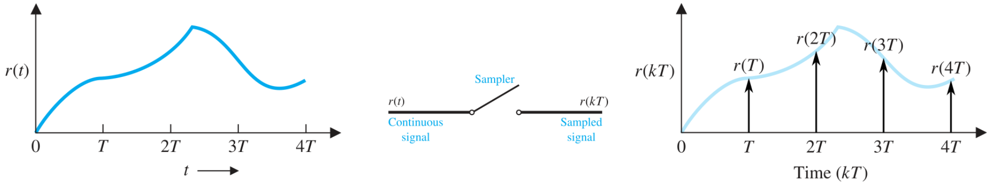
Controlador digital:

- Opera sobre muestras de la señal de salida de la planta.
- Dinámica del controlador $\rightarrow$ se implementa usando ecuaciones de diferencias.

- Diseño:
  - Discretización de un controlador de tiempo continuo.
  - Métodos de sintonización de controladores discretos.
- Métodos de discretización:
  - Backward
  - Tustin
  - Mapeo de polos y ceros
- Se requiere un T suficientemente pequeño para obtener una buena aproximación.

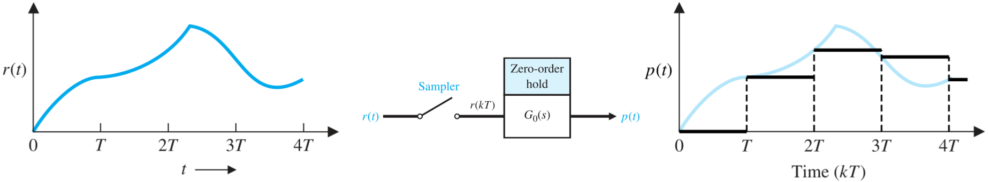
Sistemas de Datos Muestreados

- Señal discreta: Señal obtenida a partir de una señal de tiempo contínuo $x(t)$ al tomar muestras en instantes de tiempo discretos $x(kT)$.
- Sistema de datos muestreados: Sistema donde parte de éste tiene señales discretas.
- Muestreador (sampler): switch que se cierra por un instante cada T segundos.



Sistemas de Datos Muestreados

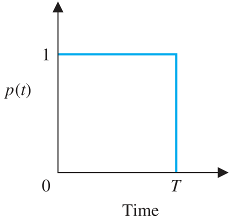
- Muestreador-retenedor (sample and hold): sistema que mantiene el valor de la muestra tomada durante el periodo de muestreo T.



- Retenedor de orden cero (zero order hold):

$$p(t) = u(t) - u(t - T)$$

$$G_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$



Transformada Zeta

- Se utiliza en sistemas de datos muestreados para transformar una señal/sistema a una representación en el dominio de la frecuencia compleja.
- Es el equivalente de tiempo discreto de la transformada de Laplace.
- Se define como:

$$\mathcal{Z}\left[f(t)\right] = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

- Ejemplo: Encontrar la transformada $\mathcal{Z}$ de un escalón unitario.

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Para $t < 0$: $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 0z^{-k} = 0$

Para $t \geq 0$: $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$

Propiedades de la Transformada Zeta

Prop	$x(t)$	$X(z)$
1	$kx(t)$	$kX(z)$
2	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(z) + X_2(z)$
3	$x(t - nT)$	$z^{-n}X(z)$, si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y $X(z)$ existe
4	$x(0)$, valor inicial	$\lim_{z\to\infty} X(z)$, si el límite existe
5	$x(\infty)$, valor final	$\lim_{z\to 1}(z - 1)X(z)$, si el límite existe y el sistema es estable

Transformada Zeta de la Derivada de una Función

Encuentre la transformada Zeta de $\frac{dx(t)}{dt}$.

$$\frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \text{ (approximación de primer orden)}$$

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}\right\} = \frac{X(z) - z^{-1}X(z)}{T} = \frac{1 - z^{-1}}{T}X(z)$$

$$= \frac{z-1}{zT}X(z)$$

Note que:

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} \approx \frac{1 - z^{-1}}{T}X(z)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s)$$

Entonces usando la aproximación de primer orden (backward):

$$s \approx \frac{z-1}{zT}$$

Transformada Zeta de la Integral de una Función

Usando la aproximación integral por trapecios:

$$\mathcal{Z}\left\{\int x(t)dt\right\} \approx \frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}X(z) = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}X(z)$$

$$\mathcal{L}\left\{\int x(t)dt\right\} = \frac{1}{s}X(s)$$

Entonces, usando la aproximación trapezoidal (Tustin):

$$s \approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

Discretización de Sistemas

- Transformada $\mathcal{Z} \rightarrow$ discretizar sistemas.
- Función de transferencia de tiempo continuo $G(s) \Longrightarrow$ Función de tiempo discreto $G(z)$:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}\right\}$$

- Dos formas de hacerlo:
    - Calcular $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\right\}$ y luego $G(z) = \mathcal{Z}\left\{g(kT)\right\}$ para un tiempo de muestreo T.
    - Reemplazar la variable s en $G(s)$ por una de las aproximaciones presentadas en función de la variable z.

Discretización de Sistemas - Ejemplo

Discretizar $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ para $T = 1$ usando el método backward.

Aproximación backward:

$$s = \frac{z-1}{zT}$$

$$G(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{z}\right)^2 + \frac{z-1}{z} + 1}$$

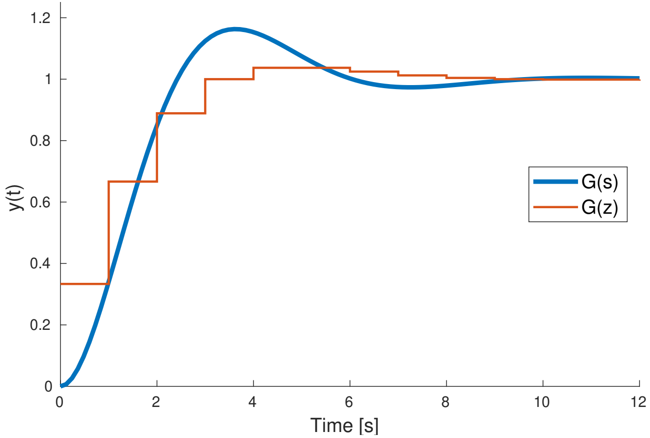
$$= \frac{z^3}{3z^3 - 3z^2 + z}$$

```matlab
%% Example 1: Backward Discretization
zeta = 0.5; wn = 1;
Gs = tf(wn^2,[1 2*zeta*wn wn^2]);   % Continuous-time system G(s)
Tf = 12;                            % Final time for simulation
[ys,ts] = step(Gs,Tf);  % Computes step response for G(s)
T = 1;                  % Sample time T = 1 second
z = tf('z',T);          % Defines the discrete time variable z
s = (z-1)/(z*T);        % Defines the backward approximation
Gz = wn^2 / (s^2 + 2*zeta*wn*s + wn^2); % Substitutes s in G(s)
[yz,tz] = step(Gz,Tf);  % Computes step response for G(z)
figure(1), cla, hold on
plot(ts,ys,'LineWidth',3);
stairs(tz,yz,'LineWidth',1.5);      % Plots the step responses
xlabel('Time [s]','FontSize',13)    % and sets labels and legends
ylabel('y(t)','FontSize',13)
legend('G(s)','G(z)','Location','east','FontSize',13)
xlim([0 12]), ylim([0 1.25])
% exportgraphics(gcf,'../images/backwardStepResp.eps')
```

Discretización de Sistemas - Ejemplo

Discretizar $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ para $T = 1$ usando el método backward.

Respuesta paso del sistema de tiempo continuo $G(s)$ y del sistema discretizado $G(z)$.



Discretización de Sistemas - Ejemplo

Discretizar $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ para $T = 1$ usando el método Tustin.

Approximación Tustin:

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

$$G(z) = \frac{1}{\left(2\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 2\frac{z-1}{z+1} + 1}$$

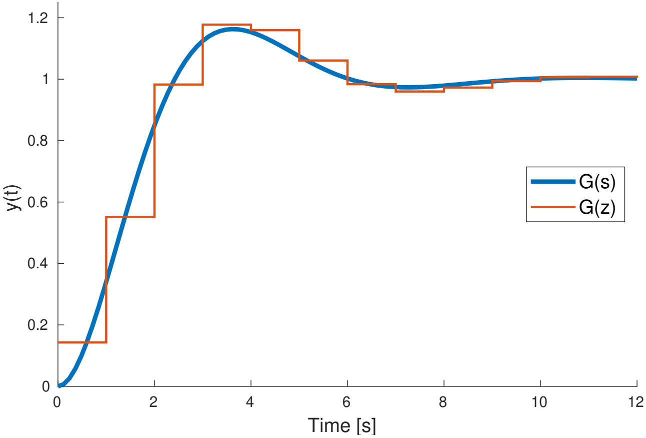
$$= \frac{z^3 + 3z^2 + 3z + 1}{7z^3 + z^2 - 3z + 3}$$

```
%% Example 1: Tustin Discretization
zeta = 0.5; wn = 1;
Gs = tf(wn^2,[1 2*zeta*wn wn^2]);   % Continuous—time system G(s)
Tf = 12;                            % Final time for simulation
[ys,ts] = step(Gs,Tf);  % Computes step response for G(s)
T = 1;                  % Sample time T = 1 second
z = tf('z',T);          % Defines the discrete time variable z
s = (2/T)*((z—1)/(z+1));    % Defines the Tustin approximation
Gz = wn^2 / (s^2 + 2*zeta*wn*s + wn^2); % Substitutes s in G(s)
[yz,tz] = step(Gz,Tf);  % Computes step response for G(z)
figure(1), cla, hold on
plot(ts,ys,'LineWidth',3);
stairs(tz,yz,'LineWidth',1.5);      % Plots the step responses
xlabel('Time [s]','FontSize',13)    % and sets labels and legends
ylabel('y(t)','FontSize',13)
legend('G(s)','G(z)','Location','east','FontSize',13)
xlim([0 12]), ylim([0 1.25])
% exportgraphics(gcf,'../images/tustinStepResp.eps')
```

Discretización de Sistemas - Ejemplo

Discretizar $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ para $T = 1$ usando el método Tustin.

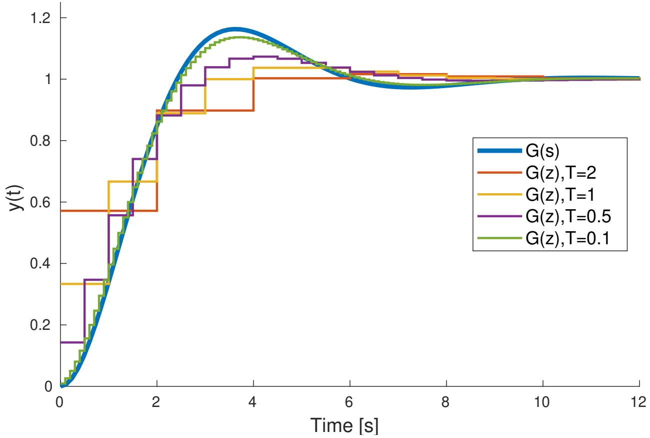
Respuesta paso del sistema de tiempo continuo $G(s)$ y del sistema discretizado $G(z)$.



Discretización de Sistemas - Ejemplo

Discretizar $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ para $T = \{2, 1, 0.5, 0.1\}$ usando el método backward.

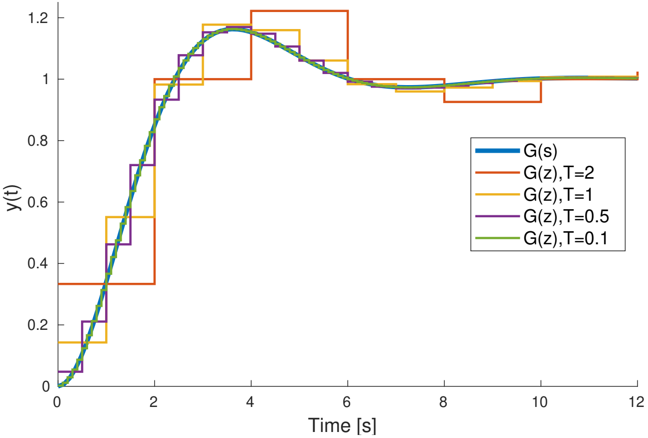
Respuesta paso del sistema continuo $G(s)$ y de sistemas discretizados $G(z)$ con differentes periodos de muestreo T.



Discretización de Sistemas - Ejemplo

Discretizar $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$ para $T = \{2, 1, 0.5, 0.1\}$ usando el método Tustin.

Respuesta paso del sistema continuo $G(s)$ y de sistemas discretizados $G(z)$ con differentes periodos de muestreo T.



Procedimiento para el Diseño de Controladores Digitales

1. Diseñar el controlador usando las técnicas para tiempo continuo.
2. Seleccionar un método de discretización.
3. Seleccionar el tiempo de muestreo T.
4. Discretizar el controlador.
5. Verificar que se satisfacen los requerimientos del sistema en lazo cerrado con el controlador discretizado.
6. Expresar la función de transferencia de tiempo discreto como una ecuación de diferencias.

Procedimiento para Diseño de Controladores Digitales - Ejemplo

Considere el sistema

$$G(s) = \frac{0.8}{(30s+1)(13s+1)(3s+1)}$$

Diseñe un algoritmo de control digital tal que el sistema:

1. Error de estado estacionario ante escalón unitario $e_{ss} = 0$.
2. Porcentaje de sobrepico $PO \leq 15\%$.
3. Tiempo de establecimiento $T_s \leq 100$.

Procedimiento para Diseño de Controladores Digitales - Ejemplo

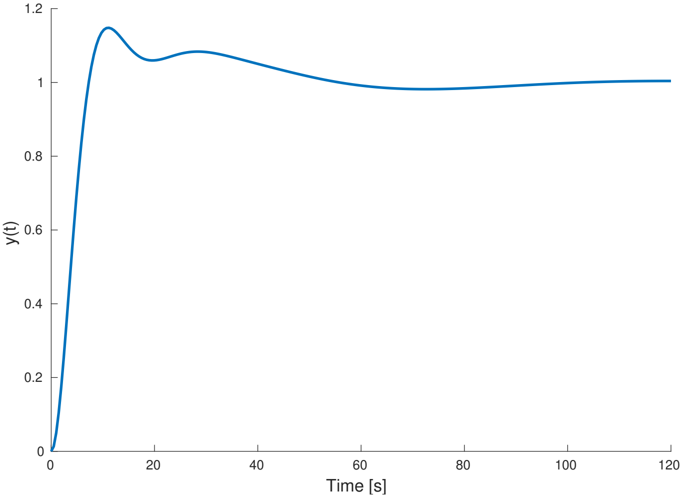
- A partir de los requerimientos del problema se calcula que para el sistema de lazo cerrado $\zeta = 0.5165$, $\omega_n = 0.0774$. El polinomio deseado correspondiente es $q(s) = s^2 + 0.08s + 0.006$. Los polos deseados son $s_{1,2} = -0.04 \pm 0.0663j$.
- Se decide utilizar un controlador PID:

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

  Usando el método de LGR por aproximación de polos dominantes se encuentra que $K_p = 14.029$, $T_i = 13.5593$, $T_d = 12.5$.

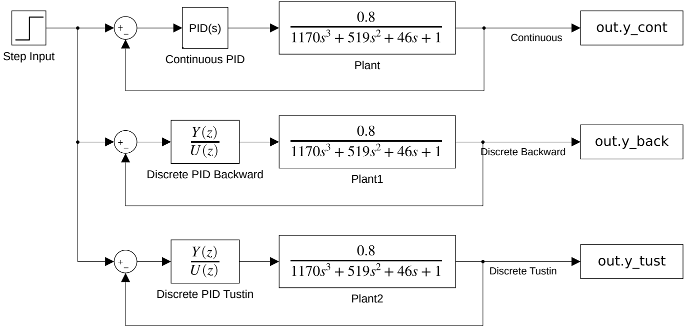
Procedimiento para Diseño de Controladores Digitales - Ejemplo

La respuesta paso del sistema en lazo cerrado con el controlador PID de tiempo continuo cumple con los requerimientos especificados.



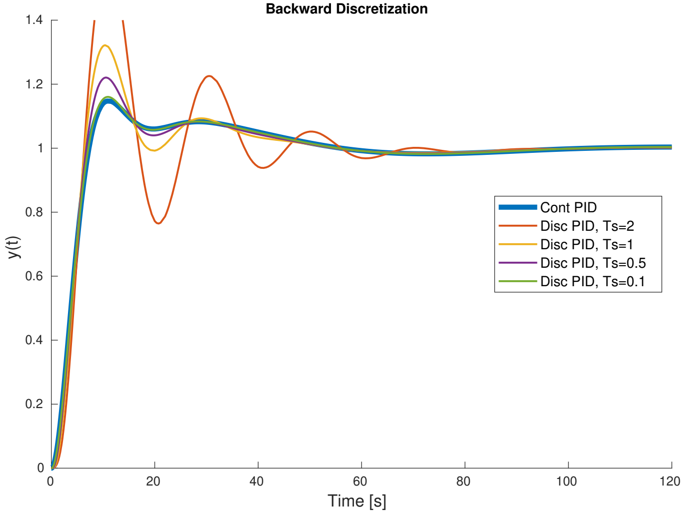
Procedimiento para Diseño de Controladores Digitales - Ejemplo

Modelo de Simulink empleado para comparar el desempeño de los controladores PID discretizados respecto al controlador PID de tiempo continuo.



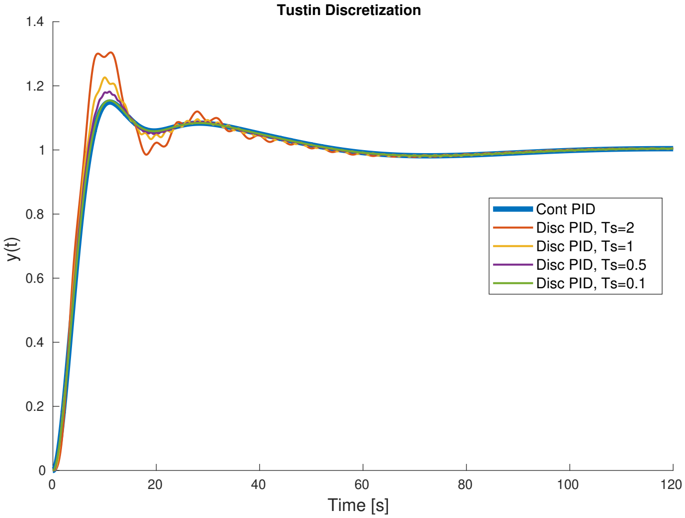
Procedimiento para Diseño de Controladores Digitales - Ejemplo

Comparación de respuestas paso del sistema en lazo cerrado con controlador PID de tiempo continuo y con controlador PID discretizado usando método backward con diferentes tiempos de muestreo.



Procedimiento para Diseño de Controladores Digitales - Ejemplo

Comparación de respuestas paso del sistema en lazo cerrado con controlador PID de tiempo continuo y con controlador PID discretizado usando método Tustin con diferentes tiempos de muestreo.



Procedimiento para Diseño de Controladores Digitales - Ejemplo

Se decide utilizar el controlador discretizado usando el método de Tustin con un periodo de muestreo $T_s = 0.1$ s. En este caso la función de transferencia del PID en tiempo discreto es:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{9.549 \times 10^5 z^2 - 1.902 \times 10^6 z + 9.473 \times 10^5}{271.2 z^2 - 271.2}$$

Asignando nombres a los coeficientes de la función de transferencia:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_0}$$

Multiplicando el numerador y denominador por z^{-2} se obtiene:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{a_2 + a_0 z^{-2}}$$

Procedimiento para Diseño de Controladores Digitales - Ejemplo

Reorganizando:

$$U(z)\left(a_2 + a_0 z^{-2}\right) = E(z)\left(b_2 + b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}\right)$$
$$a_2 U(z) + a_0 z^{-2} U(z) = b_2 E(z) + b_1 z^{-1} E(z) + b_0 z^{-2} E(z)$$

Aplicando la transformada $\mathcal{Z}$ inversa:

$$a_2 u(k) + a_0 u(k-2) = b_2 e(k) + b_1 e(k-1) + b_0 e(k-2)$$

Despejando $u(k)$ se obtiene:

$$u(k) = -\frac{a_0}{a_2} u(k-2) + \frac{b_2}{a_2} e(k) + \frac{b_1}{a_2} e(k-1) + \frac{b_0}{a_2} e(k-2)$$

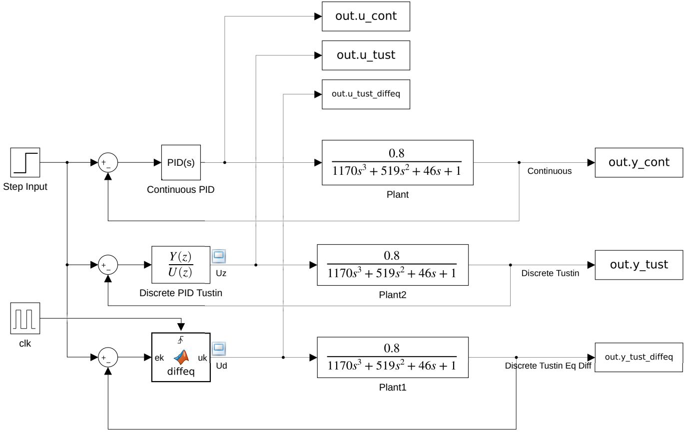
Esta ecuación de diferencias puede implementarse como un algoritmo recursivo que calcula el valor de e en cada instante de tiempo discreto k a partir de valores presentes y pasados de e y u.

Listing 1: Implementación del controlador PID discretizado como una ecuación de diferencias

```
function uk = diffeq(ek,num_tust,den_tust)
persistent ek1      % e(k-1)
persistent ek2      % e(k-2)
persistent uk1      % u(k-1)
persistent uk2      % u(k-2)
if isempty(ek1) && isempty(ek2) && isempty(uk1) && isempty(uk2)
    ek1 = 0; ek2 = 0;   % Initializes persistent variables
    uk1 = 0; uk2 = 0;   % during the first execution
end
b2 = num_tust(1);
b1 = num_tust(2);   % Configures coefficients in the
b0 = num_tust(3);   % difference equation
a2 = den_tust(1);
a1 = den_tust(2);
a0 = den_tust(3);
% Computes the current iteration of the difference equation
uk = -(a0/a2)*uk2 + (b2/a2)*ek + (b1/a2)*ek1 + (b0/a2)*ek2;
% Shifts the values in e and u for the next iteration
% e(k-2) <- e(k-1), e(k-1) <- e(k)
% u(k-2) <- u(k-1), u(k-1) <- u(k),
ek2 = ek1; ek1 = ek; uk2 = uk1; uk1 = uk;
```

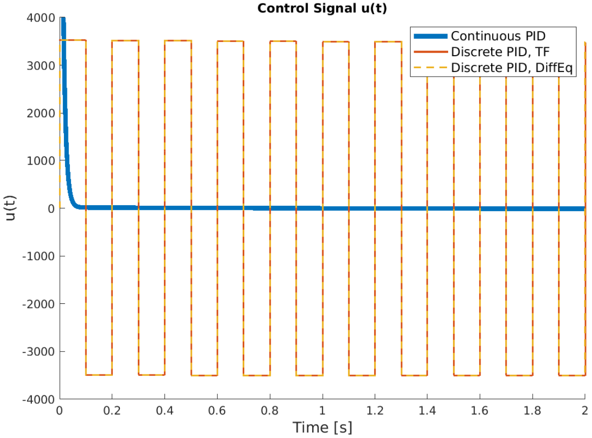
Procedimiento para Diseño de Controladores Digitales - Ejemplo

Modelo de Simulink empleado para comparar el desempeño del control PID continuo, PID discreto como función de transferencia y PID discreto como ecuación de diferencias.



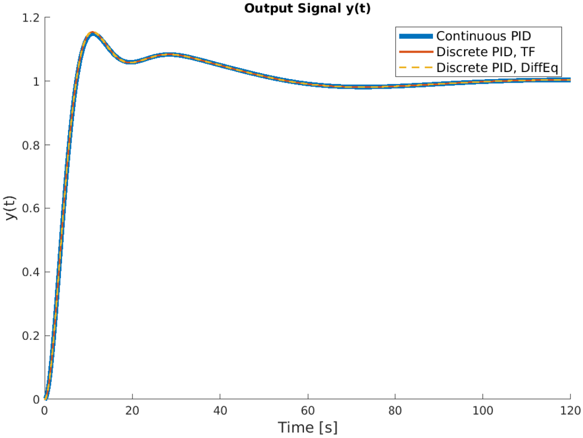
Procedimiento para Diseño de Controladores Digitales - Ejemplo

Señal de control $u(t)$ generada por el controlador PID continuo, PID discreto como función de transferencia y PID discreto como ecuación de diferencias.



Procedimiento para Diseño de Controladores Digitales - Ejemplo

Señal de salida $y(t)$ de la planta obtenida usando el controlador PID continuo, PID discreto como función de transferencia y PID discreto como ecuación de diferencias.



Conclusión

- Control digital $\rightarrow$ alternativa interesante frente al control analógico.
- Ventajas:
  - Mayor flexibilidad en la implementación respecto al control analógico.
  - Menor susceptibilidad respecto al paso del tiempo y a las condiciones ambientales.
  - Bajo costo - alto desempeño.
  - Gran variedad de microcontroladores - microprocesadores con múltiples funciones y diseñados para diferentes aplicaciones.
- Desventajas:
  - Existencia de errores de aproximación en el paso de discretización $\rightarrow$ puede subsanarse diseñando el controlador digital directamente en el dominio discreto.
  - Requiere usar retenedores (ZOH) que agregan retardos al lazo de control y pueden disminuir la estabilidad del sistema.