



Pontificia Universidad  
**JAVERIANA**  
Colombia

# Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica

## Controles

Clase 9: Respuesta en Frecuencia - Compensadores en Atraso, Atraso-Adelanto

Gerardo Becerra, Ph.D.

[gbecerra@javeriana.edu.co](mailto:gbecerra@javeriana.edu.co)

# Agenda

---

Compensación en Atraso Usando la Respuesta en Frecuencia

- Compensador en Atraso

- Procedimiento de Diseño

- Ejemplo

Compensación en Adelanto-Atraso Usando la Respuesta en Frecuencia

- Compensador en Atraso-Adelanto

- Procedimiento de Diseño

- Ejemplo

Conclusiones

# Compensadores - Características de los Diferentes Esquemas de Compensación

- Compensación en adelanto:
  - Ofrece una mejora notable en la respuesta transitoria con un pequeño cambio en la exactitud de estado estacionario.
  - Puede acentuar efectos de ruido de alta frecuencia.
  - Aumenta el orden del sistema en 1 (a menos que exista cancelación polo-cero).
- Compensación en atraso:
  - Ofrece una mejora notable en la exactitud de estado estacionario, pero aumentando el tiempo de la respuesta transitoria.
  - Elimina los efectos de señales de ruido de alta frecuencia.
  - Aumenta el orden del sistema en 1 (a menos que exista cancelación polo-cero).
- Compensación adelanto-atraso:
  - Combina las características de los dos tipos de compensación.
  - Aumenta el orden del sistema en 2 (a menos que exista cancelación polo-cero).
  - El sistema se hace más complejo y es más difícil controlar la respuesta transitoria.

## Compensación en Atraso Usando la Respuesta en Frecuencia

---

## Compensador en Atraso

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$

- El compensador tiene un cero en  $s = -1/T$  y un polo en  $s = -1/(\beta T)$ .
- Dado que  $\beta > 1 \Rightarrow$  el polo se ubica a la derecha del cero.

# Compensador en Atraso

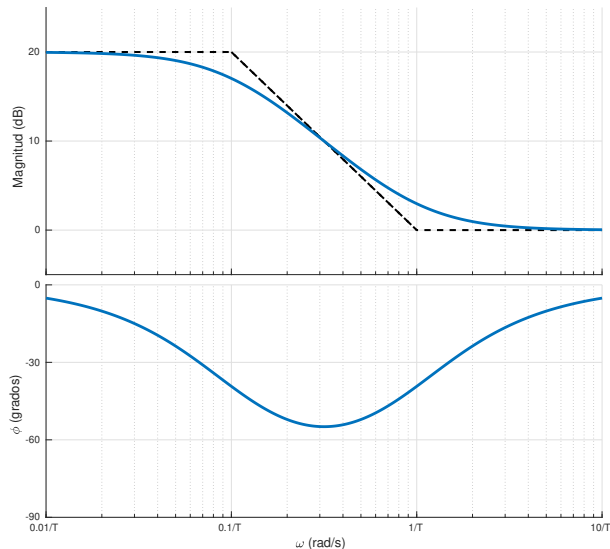
Diagrama de Bode del compensador para  $K_c = 1$ ,  $\beta = 10$ .

Frecuencias de quiebre:  $\omega = 1/T$ ,  
 $\omega = 1/(\beta T)$ .

Frecuencias bajas:  $|G_c(s)| = 20$  dB.

Frecuencias altas:  $|G_c(s)| = 0$  dB.

Compensador en atraso  $\Leftrightarrow$  Filtro pasabajos.



## Compensador en Atraso: Procedimiento de Diseño

1. Se asume la siguiente forma para el compensador en atraso:

$$G_c(s) = K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}, \quad (\beta > 1)$$

Definiendo  $K_c \beta = K$ , se tiene

$$G_c(s) = K \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}$$

La F.T. de lazo abierto del sistema compensado es:

$$G_c(s)G(s) = K \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} KG(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G_1(s)$$

donde  $G_1(s) = KG(s)$ . Determinar  $K$  para satisfacer el requerimiento dado por la constante de error estático de velocidad.

## Compensador en Atraso: Procedimiento de Diseño

2. Determine el margen de fase del sistema  $G_1(s)$ , y si es insuficiente continúe con los siguientes pasos.
3. Determine la frecuencia  $\omega'_c$  donde el requerimiento de margen de fase sería satisfecho si la curva de magnitud cruzara por 0 dB en ésta frecuencia. Incluya un margen adicional de seguridad de  $5^\circ$ .
4. Ubique el cero del compensador una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia:  $\omega_z = \omega'_c/10$ .

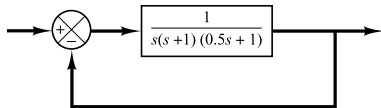


## Compensador en Atraso: Procedimiento de Diseño

5. Calcule la atenuación necesaria en  $\omega'_c$  para asegurar que la curva de magnitud cruce por cero.
6. Calcule el valor de  $\beta$  notando que la atenuación introducida por el compensador en  $\omega'_c$  es igual a  $20 \log \left( \frac{1}{\beta} \right)$ .
7. Calcule la ubicación del polo como  $\omega_p = \frac{1}{\beta T} = \frac{\omega_z}{\beta}$ .
8. Verifique si el sistema de control diseñado satisface los requerimientos. En caso contrario realizar nuevamente la ubicación del polo y cero hasta lograr un resultado satisfactorio.

## Compensador en Atraso: Ejemplo

Considere el sistema  $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$  con retroalimentación unitaria:



Se desea diseñar un compensador para que el sistema tenga una constante de error estático de velocidad  $K_v = 5$ , margen de fase de al menos  $40^\circ$  y margen de ganancia de al menos 10 dB.

## Compensador en Atraso: Ejemplo

En primer lugar se calcula  $K$  para satisfacer el requerimiento de  $K_v = 5$ :

$$K_v = 5 = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K_c \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} \frac{1}{(s + 1)(0.5s + 1)} = K_c \beta$$

$$\text{Asumiendo } K_c \beta = K \implies K = 5$$

Con  $K = 5$ , el sistema satisface el requerimiento de desempeño. Entonces, la función de transferencia de lazo abierto del sistema no compensado con ganancia ajustada queda:

$$G_1(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega + 1)(0.5j\omega + 1)}$$

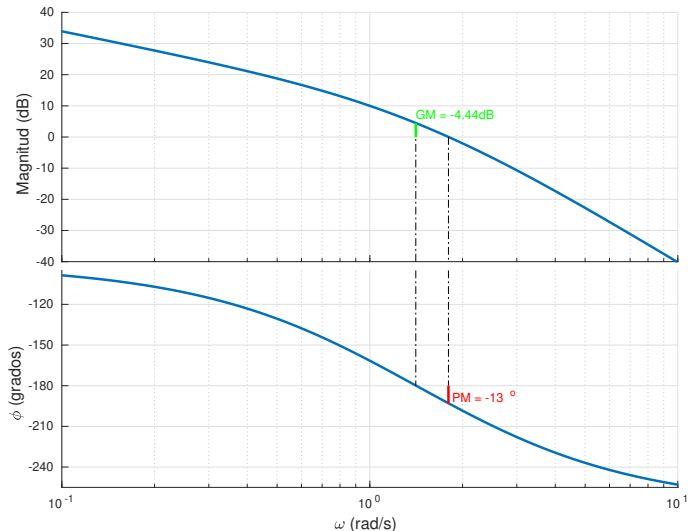
# Compensador en Atraso: Ejemplo

Usando la función `margin` de Matlab para  $G_1(s)$  se obtiene:

PM = -13° en 1.8 rad/s

GM = -4.44 dB en 1.41 rad/s

Note que el sistema no compensado con ganancia ajustada en lazo cerrado es **inestable!**

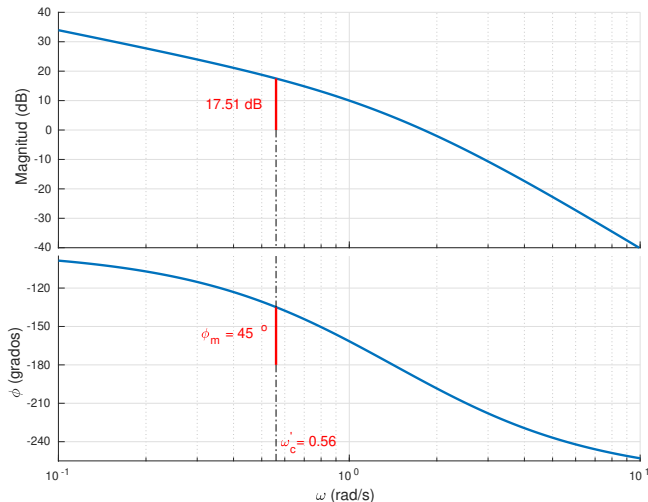


# Compensador en Atraso: Ejemplo

Para satisfacer el margen de fase deseado de  $40^\circ$  se identifica la frecuencia  $\omega'_c$  para la cual la fase faltante  $\phi_m$  para alcanzar  $-180^\circ$  es igual a  $40^\circ$  más un pequeño margen de  $5^\circ$ .

Del diagrama de Bode se observa que en  $\omega'_c = 0.56$  rad/s la fase es  $-135^\circ$ , es decir  $-135^\circ - \phi_m = -180^\circ$ .

$\omega'_c$  se toma como la nueva frecuencia de cruce de ganancia para el sistema compensado.



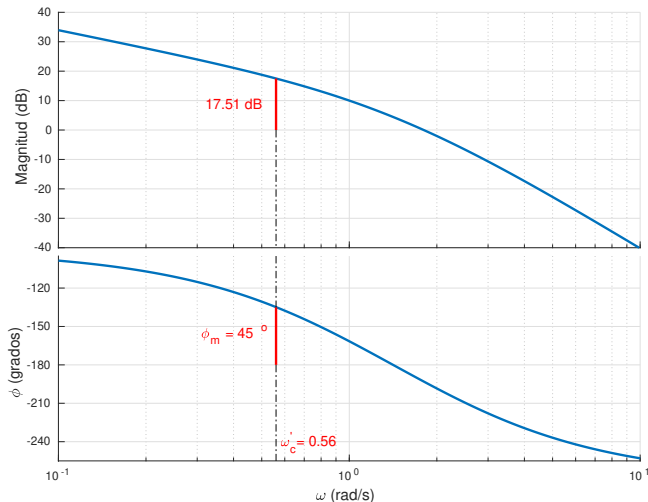
# Compensador en Atraso: Ejemplo

Ubicando el cero del compensador una década por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia  $\omega'_c$  se obtiene  $\omega_z = 0.056$  rad/s.

Calculando la atenuación necesaria en  $\omega'_c$  para garantizar el cruce por cero de la ganancia se tiene que:

$$20 \log \left( \frac{1}{\beta} \right) = -17.51$$

$$\Rightarrow \beta = 7.5076$$



## Compensador en Atraso: Ejemplo

La ubicación del polo se obtiene como

$$\omega_p = \frac{\omega_z}{\beta} = 0.0075$$

El parámetro  $T$  se obtiene como:

$$T = \frac{1}{\beta\omega_p} = 17.8571$$

Finalmente, se calcula  $K_c$  como:

$$K_c = \frac{K}{\beta} = 0.666$$

Entonces, el compensador obtenido es:

$$G_c(s) = 5 \frac{1 + 17.8571s}{1 + 134.0639s}$$

# Compensador en Atraso: Ejemplo - Diagrama de Bode

Los márgenes obtenidos para el sistema compensado son:

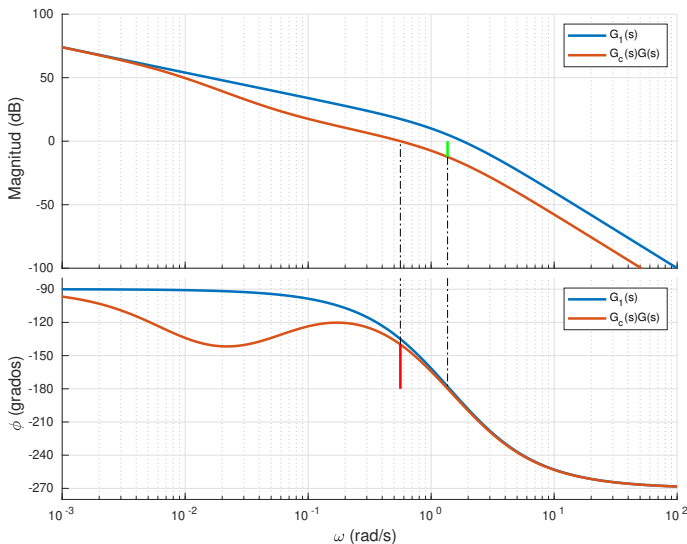
$PM = 40.1^\circ$  en  $0.562 \text{ rad/s}$ .

$GM = 12.4 \text{ dB}$  en  $1.36 \text{ rad/s}$ .

Se redujo el ancho de banda del sistema  $\rightarrow$  filtro pasabajos.

El compensador modifica la respuesta para bajas frecuencias.

La atenuación en altas frecuencias mejora el margen de fase.



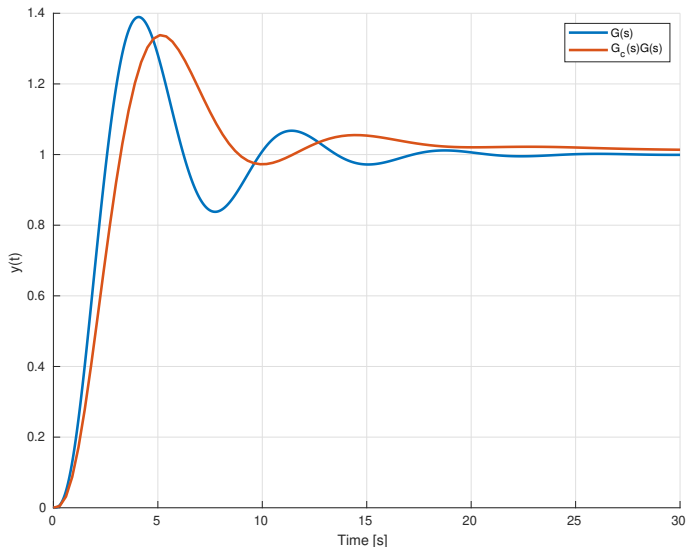


# Compensador en Atraso: Ejemplo - Respuesta Paso Sistema Compensado

El sistema compensado en lazo cerrado presenta una respuesta más lenta  $\Leftarrow$  menor ancho de banda.

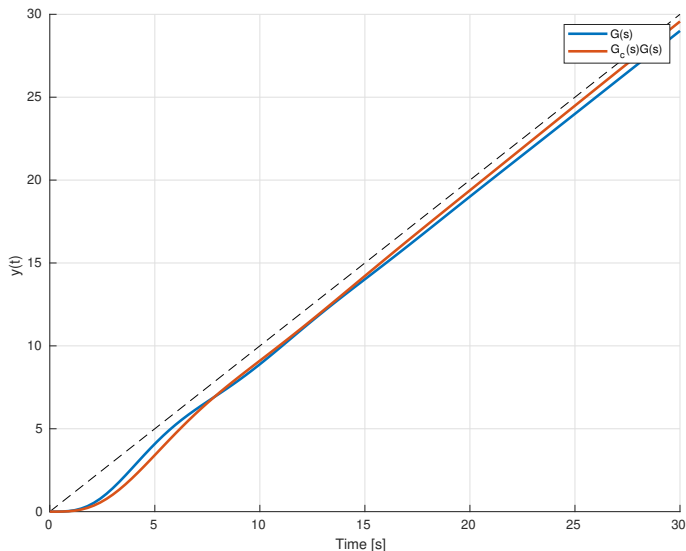
Polos de lazo cerrado:  
 $\{-0.2776 \pm 0.6629j, -2.3919, -0.0604\}$ .

Polo dominante muy cercano al eje  $j\omega \Rightarrow$  cola de baja amplitud y lenta caída.



## Compensador en Atraso: Ejemplo - Respuesta Rampa Sistema Compensado

El sistema compensado en lazo cerrado presenta un mejor seguimiento de la referencia rampa.



## Compensación en Adelanto-Atraso Usando la Respuesta en Frecuencia

---

## Compensador en Adelanto - Atraso

$$G_c(s) = K_c \underbrace{\left( \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right)}_{\text{Red de Adelanto}} \underbrace{\left( \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \right)}_{\text{Red de Atraso}}, \quad (\gamma > 1, \beta > 1)$$

El compensador se forma por una red de adelanto en cascada con una red de atraso.

Ceros del compensador:  $s = -1/T_1, s = -1/T_2$ .

Polos del compensador:  $s = -\gamma/T_1, s = -1/\beta T_2$ .

Con frecuencia se asume  $\gamma = \beta$ .

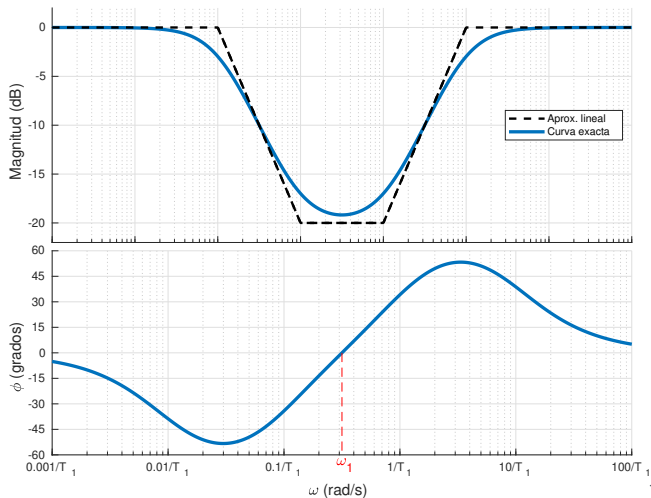
# Compensador en Adelanto - Atraso

Diagrama de Bode del compensador para  $K_c = 1$ ,  $\gamma = \beta = 10$ ,  $T_2 = 10T_1$ .

Frecuencia central (Fase igual a cero):  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ .

$0 < \omega < \omega_1$ : Compensador de atraso.

$\omega_1 < \omega < \infty$ : Compensador de adelanto.



## Compensador en Adelanto - Atraso: Procedimiento de Diseño

1. Asumir la forma del compensador en adelanto - atraso como:

$$G_c(s) = K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)}, \quad \beta > 1$$

2. Calcular el valor de  $K_c$  necesario para satisfacer el requerimiento de la constante de error estático de velocidad.

3. Obtener el diagrama de bode del sistema no compensado con ganancia ajustada y determinar el margen de fase. Si es insuficiente continuar con el procedimiento.
4. Seleccionar una frecuencia de cruce de ganancia deseada  $\omega'_c$ .
5. Ubicar la frecuencia de quiebre del cero de la red de atraso  $\omega_{z2} = 1/T_2$  una década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de ganancia  $\omega'_c$ .

## Compensador en Adelanto - Atraso: Procedimiento de Diseño

6. Recordando la relación entre el ángulo de adelanto de fase  $\phi_m$  y el parámetro  $\alpha$ :

$$\sin \phi_m = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

se sustituye  $\alpha = 1/\beta$  obteniendo:

$$\sin \phi_m = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

A partir del requerimiento de margen de fase, calcular el valor correspondiente de  $\beta$ .

7. Calcular la frecuencia de quiebre del polo de la red de atraso como  $\omega_{p2} = 1/(\beta T_2)$ .



## Compensador en Adelanto - Atraso: Procedimiento de Diseño

8. Calcular la magnitud del sistema no compensado con ganancia ajustada en la frecuencia de cruce de ganancia deseada.
9. Asumiendo que el compensador introduce una atenuación del mismo valor, identificar la recta con pendiente 20 db/década que pasa por éste punto. Calcular las frecuencias de cruce con los niveles 0 db y -20 dB. Dichas frecuencias ( $\omega_{z1}, \omega_{p1}$ ) corresponden a los puntos de quiebre (cero y polo) del compensador en adelanto.
10. Verificar si el sistema de control diseñado satisface los requerimientos. En caso contrario realizar nuevamente la ubicación de los polos y ceros hasta lograr un resultado satisfactorio.

## Compensador en Adelanto - Atraso: Ejemplo

---

Considere el sistema cuya función de transferencia de lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Se desea que el error estático de velocidad sea  $10 \text{ seg}^{-1}$ , el margen de fase sea  $50^\circ$ , y que el margen de ganancia sea mayor o igual a 10 dB.

## Compensador en Adelanto - Atraso: Ejemplo

A partir del requerimiento dado por la constante de error estático de velocidad se tiene:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K_c \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(\frac{T_1}{\beta} s + 1)(\beta T_2 s + 1)} \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_c}{2} = 10$$
$$\Rightarrow K_c = 20$$

Se obtiene el diagrama de Bode para el sistema no compensado con ganancia ajustada:

$$G_1(j\omega) = \frac{20}{j\omega(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

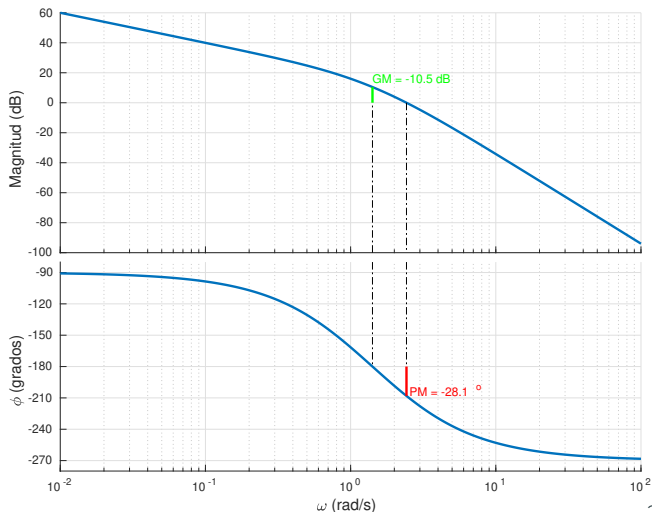
# Compensador en Adelanto - Atraso: Ejemplo

Se obtienen los siguientes márgenes:

PM =  $-28.1^\circ$  en 2.43 rad/s

GM = -10.5 dB en 1.41 rad/s

El sistema  $G_1(s)$  es inestable!



## Compensador en Adelanto - Atraso: Ejemplo

Para seleccionar  $\omega'_c$  se utiliza la frecuencia donde la fase es igual a  $-180^\circ$ :

$$\omega'_c = 1.41 \text{ rad/s}$$

La frecuencia de quiebre correspondiente al cero de la red de atraso corresponde a:

$$\omega_{z2} = \omega'_c/10 = 0.141 \text{ rad/s}$$

Por lo tanto  $T_2 = 1/\omega_{z2} = 7.0922$ .

Dado que el margen de fase deseado es  $50^\circ$ , se calcula el valor de  $\beta$  como:

$$\sin \phi_m = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \Rightarrow \beta = 7.5486$$

Entonces, la frecuencia de quiebre correspondiente al polo de la red de atraso es:

$$\omega_{p2} = \frac{1}{\beta T_2} = 0.0187 \text{ rad/s}$$

## Compensador en Adelanto - Atraso: Ejemplo

Para obtener los parámetros de la red de adelanto, se observa en el diagrama de Bode que la magnitud del sistema  $G_1(s)$  en la frecuencia  $\omega'_c$  es igual a 10.5 dB.

Por lo tanto el compensador debe generar una atenuación igual a -10.5 dB en esa misma frecuencia para garantizar el cruce por cero.

Entonces, la curva de magnitud puede aproximarse a una recta con pendiente igual a 20 dB/década que pasa por el punto  $(\omega'_c, |G_1(j\omega'_c)|) = (1.41, -10.5)$ .

Para calcular las frecuencias de quiebre de la red de adelanto, se calculan los puntos de corte de la recta mencionada con los niveles 0 dB y -20 dB.

## Compensador en Adelanto - Atraso: Ejemplo

Para calcular el punto de corte de la recta con el nivel 0 dB, se escribe la pendiente como:

$$20 = \frac{0 \text{ dB} - (-10.5 \text{ dB})}{\log_{10} \omega_{p1} - \log_{10} 1.41 \text{ rad/s}}$$
$$\Rightarrow \omega_{p1} = 4.7 \text{ rad/s}$$

Para calcular el punto de corte de la recta con el nivel -20 dB, se escribe la pendiente como:

$$20 = \frac{-10.5 \text{ dB} - (-20 \text{ dB})}{\log_{10} 1.41 \text{ rad/s} - \log_{10} \omega_{z1}}$$
$$\Rightarrow \omega_{z1} = 0.47 \text{ rad/s}$$

## Compensador en Adelanto - Atraso: Ejemplo

Por lo tanto, el compensador obtenido es:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_c \frac{\left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{\beta T_2}\right)} \\ &= 20 \frac{(s + 0.47)(s + 0.141)}{(s + 4.7)(s + 0.0187)} \end{aligned}$$



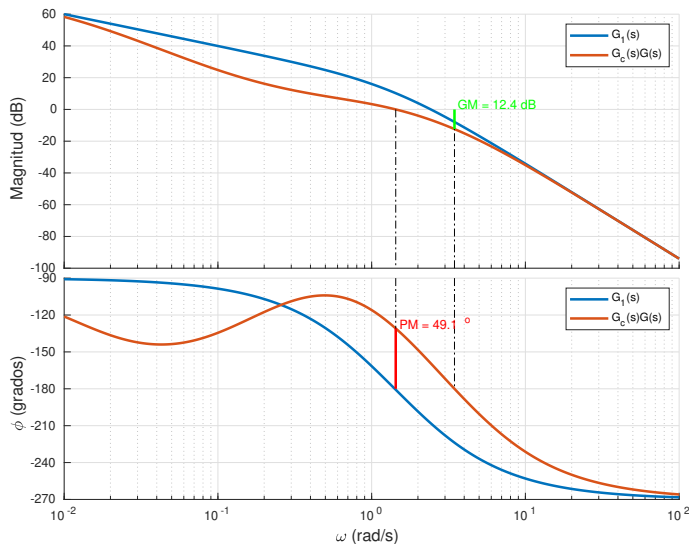
# Compensador en Atraso: Ejemplo - Diagrama de Bode

Los márgenes obtenidos para el sistema compensado son:

PM = 49.3° en 1.43 rad/s.

GM = 12.4 dB en 3.46 rad/s.

Se satisfacen los márgenes especificados en los requerimientos!

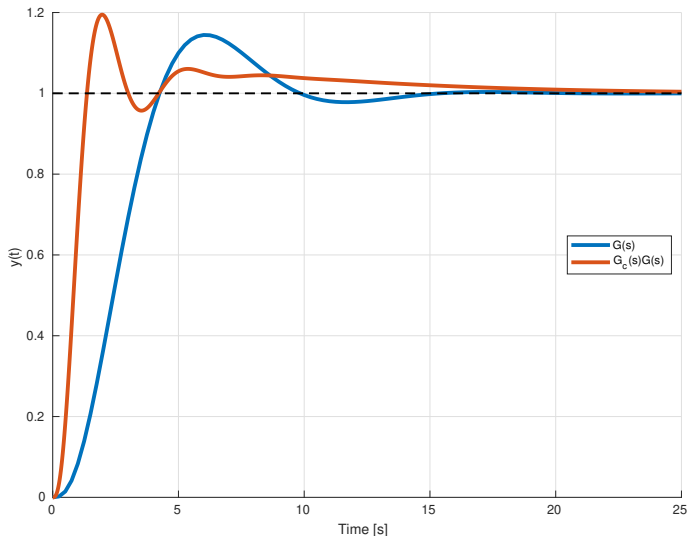


# Compensador en Atraso: Ejemplo - Respuesta Paso Sistema Compensado

El sistema compensado en lazo cerrado presenta un tiempo de respuesta más rápido, con un sobrepico ligeramente mayor.

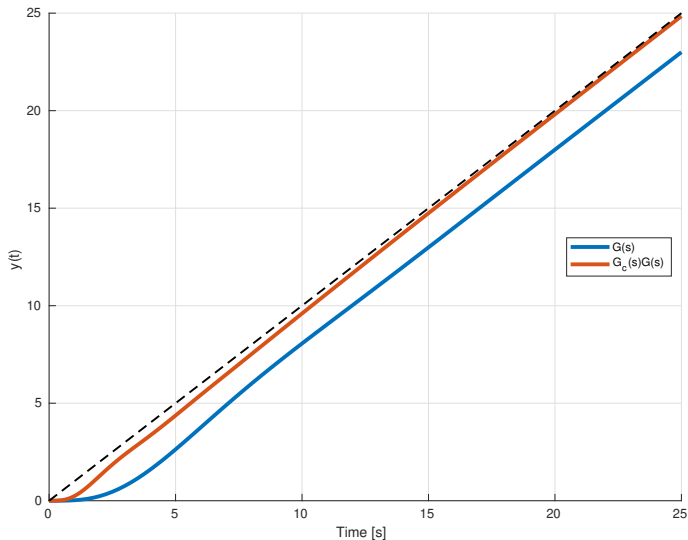
Polos de lazo cerrado:  
 $\{-5.7221, -0.3386, -0.1708, -0.7436 \pm 1.8576j\}$ .

Polo dominante muy cercano al eje  $j\omega \Rightarrow$  cola de baja amplitud y lenta caída.



## Compensador en Atraso: Ejemplo - Respuesta Rampa Sistema Compensado

El sistema compensado en lazo cerrado presenta un mejor seguimiento de la referencia rampa.



# Conclusiones

---

# Conclusiones

---

- Compensación en adelanto: usada para mejorar los márgenes de estabilidad. Se logra gracias a la contribución de ángulo de fase en adelanto.
- Compensación en atraso: usada para mejorar el desempeño de estado estacionario. Se logra debido a su atenuación en altas frecuencias.
- Es posible que en algunos casos tanto el compensador en adelanto como el de atraso satisfagan los requerimientos.
- Con la compensación en adelanto se puede lograr una frecuencia de cruce de ganancia mayor que la que es posible con la compensación en atraso.
- El ancho de banda de un sistema con compensación en adelanto siempre es mayor que el de un sistema con compensación en atraso.

# Conclusiones

---

- Si se requiere gran ancho de banda o respuesta rápida  $\Rightarrow$  utilizar un compensador en adelanto.
- Si hay presencia de ruido un gran ancho de banda no es deseable  $\Rightarrow$  utilizar un compensador en atraso.
- La compensación en adelanto puede generar señales grandes  $\rightarrow$  no es deseable, puede haber saturación.
- Compensación en atraso  $\rightarrow$  introduce un polo-cero cerca al origen lo cual genera una cola lenta de baja amplitud en la respuesta de tiempo.
- Compensador adelanto-atraso  $\rightarrow$  permite incrementar la ganancia en baja frecuencia (mejora el desempeño de estado estacionario) a la vez que se aumenta el ancho de banda o los márgenes de estabilidad.