Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Ingeniería
Departamento de Electrónica

Controles

Clase 3: Tipos de Control - Sintonización

Gerardo Becerra, Ph.D.
gbecerra@javeriana.edu.co

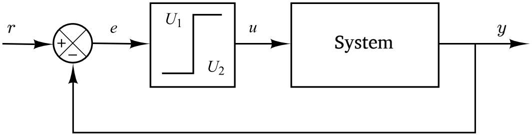
Febrero 12, 2020

Clasificación Básica de Controladores

Se clasifican según la acción de control:

1. Dos posiciones (ON-OFF o BANG-BANG)
2. Proporcional (P)
3. Integral (I)
4. Derivativo (D)
5. Proporcional - Integral (PI)
6. Proporcional - Derivativo (PD)
7. Proporcional - Integral - Derivativo (PID)

Controlador ON-OFF / BANG-BANG / TODO-NADA

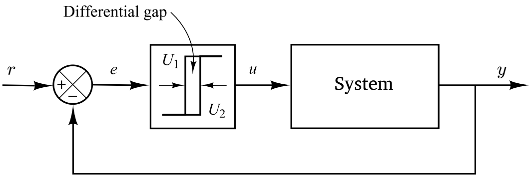


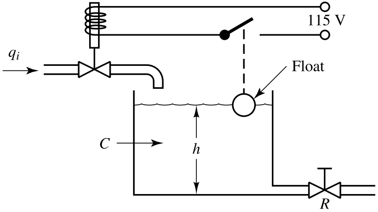
$$u(t) = \begin{cases} U_1 & \text{si } e(t) > 0 \\ U_2 & \text{si } e(t) < 0 \end{cases}$$

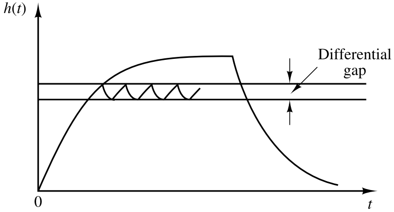
- Se caracteriza porque el actuador posee sólo dos posiciones: encendido - apagado.
- Ventajas:
  - Implementación simple.
  - Implementación barata.
  - Uso común en aplicaciones domésticas.

- En la práctica generalmente no se usa éste controlador $\rightarrow$ puede provocar muchas conmutaciones $\rightarrow$ puede producir desgaste en el actuador.
- En su lugar se usa un controlador con histéresis.

Controlador ON-OFF con Histéresis

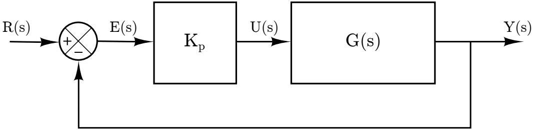






- Permite mantener el valor presente de $u(t)$ hasta que la señal de error se haya movido más allá del valor cero.
- La amplitud de la oscilación puede reducirse disminuyendo la brecha diferencial $\rightarrow$ más conmutaciones.
- No se puede utilizar para modificar transitorios.

Controlador Proporcional (P)



- Es un amplificador de error.

$$U(s) = K_p E(s)$$

- Dependencia de $E(s)$ de la ganancia K_p:

$$E(s) = \frac{1}{1 + K_p G(s)} R(s)$$

- K_p aumenta $\Rightarrow$ menor error de estado estacionario.
- K_p muy grande no elimina el error de estado estacionario:
- K_p muy grande puede ocasionar inestabilidad.

Controlador Proporcional (P) - Error de Estado Estacionario

$$E(s) = \frac{1}{1 + K_p G(s)} R(s)$$

Asumiendo $G(s)$ de la forma:

$$G(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

Usando el teorema del valor final:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{1}{1 + K_p G(s)}\right) = \frac{1}{1 + K_p \frac{a_0}{b_0}}$$

Controlador Proporcional (P) - Ejemplo

Suponga $G(s) = \frac{1}{s+a}$. Entonces la ganancia de lazo cerrado será:

$$G_{lc}(s) = \frac{K_p}{s + a + K_p}$$

Si $R(s) = 1/s$ (escalón unitario) entonces:

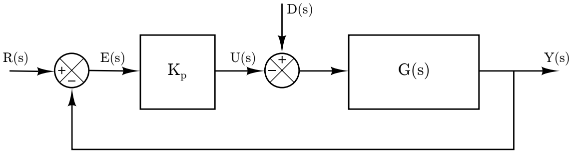
$$Y(s) = \left(\frac{K_p}{s + a + K_p} \right) \frac{1}{s}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = \frac{K_p}{K_p + a} \left(1 - e^{-t(K_p + a)} \right)$$

Si K_p se incrementa, el sistema será más rápido (no es el caso general).

Controlador Proporcional (P) - Rechazo a Perturbaciones



Asumiendo $R(s) = 0$:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + K_p G(s)}$$

Asumiendo $G(s)$ de la forma:

$$G(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

Usando el teorema del valor final, asumiendo perturbación constante:

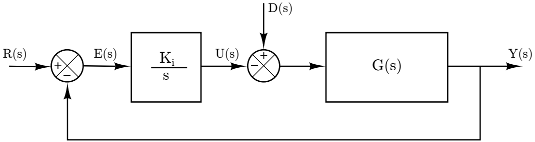
$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{s \to 0} s \left(\frac{1}{s}\right) \left(\frac{G(s)}{1 + K_p G(s)}\right) \\ &= \frac{a_0}{b_0 + K_p a_0} \end{aligned}$$

Incrementar K_p reduce el efecto de la perturbación, pero no lo elimina. No es inmune al ruido.

Controlador Proporcional (P) - Ventajas y Desventajas

- Ventajas:
  - Instantaneidad de aplicación.
  - Facilidad para comprobar resultados.
- Desventajas:
  - Falta de inmunidad a ruido.
  - No corrige algunos errores en estado estacionario.
  - Puede hacer inestable al sistema.

Controlador Integral (I)



$$u(t) = \int_0^t e(t)dt \longrightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s}$$

Ganancia de lazo cerrado:

$$G_{lc}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_i G(s)}{s + K_i G(s)}$$

Dependencia de $E(s)$ de la ganancia K_i:

$$E(s) = (1 - G_{lc}(s)) = \frac{s}{s + K_i G(s)} R(s)$$

Asumiendo $G(s)$ de la forma:

$$G(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

Usando el teorema del valor final:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{s}{s + K_i \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}} R(s)$$

Si $R(s) = 1/s$, entonces $e_{ss} = 0$.
El integrador anula el error de estado estable.

Controlador Integral (I) - Rechazo a Perturbaciones

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + \frac{K_i}{s}G(s)} = \frac{\frac{a_n s^n + \cdots + a_0}{b_m s^m + \cdots + b_0}}{1 + \frac{K_i}{s}\frac{a_n s^n + \cdots + a_0}{b_m s^m + \cdots + b_0}}$$

$$= \frac{(a_n s^n + \cdots + a_0)s}{(b_m s^m + \cdots + b_0)s + K_i(a_n s^n + \cdots + a_0)}$$

Si $D(s) = 1/s$ (escalón unitario), entonces

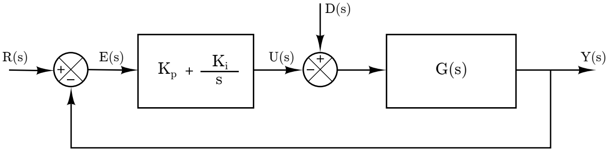
$$y_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s} \frac{(a_n s^n + \cdots + a_0)s}{(b_m s^m + \cdots + b_0)s + K_i(a_n s^n + \cdots + a_0)} = 0$$

El integrador elimina perturbaciones en estado estacionario.

Controlador Integral (I) - Ventajas y Desventajas

- Ventajas:
    - Elimina error de estado estacionario.
    - Elimina efecto de las perturbaciones (robustez).
- Desventajas:
    - La aplicación no es instantánea.
    - Puede agregar inestabilidad al sistema total debido al polo en el origen.

Controlador Proporcional - Integral (PI)



$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt \longrightarrow U(s) = K_p E(s) + K_i \frac{E(s)}{s}$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s}$$

Controlador Proporcional - Integral (PI)

$$G_{lc}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_p s + K_i}{s} G(s)}{1 + \frac{K_p s + K_i}{s} G(s)} = \frac{(K_p s + K_i) G(s)}{s + (K_p s + K_i) G(s)}$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - G_{lc}(s) R(s)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - G_{lc}(s) = 1 - \frac{(K_p s + K_i) G(s)}{s + (K_p s + K_i) G(s)} = \frac{s}{s + (K_p s + K_i) G(s)}$$

Aplicando el teorema del valor final:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{s}{s + (K_p s + K_i) G(s)} R(s)$$

Si $R(s) = 1/s$ (escalón unitario), entonces $e_{ss} = 0$. **El controlador anula el error de estado estacionario.**

Controlador Proporcional - Integral (PI) - Rechazo a Perturbaciones

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)\frac{K_p s + K_i}{s}} = \frac{G(s)s}{s + G(s)(K_p s + K_i)}$$

Si $D(s) = 1/s$, entonces:

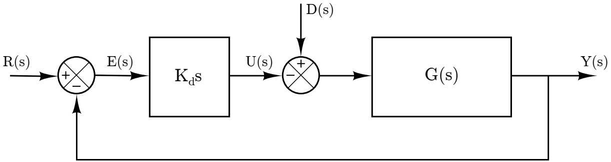
$$y_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s} \frac{G(s)s}{s + G(s)(K_p s + K_i)} = 0$$

El controlador elimina el efecto de las perturbaciones.

Controlador Proporcional - Integral (PI) - Ventajas

- Respuesta inmediata
- Elimina error de estado estacionario.
- Elimina efecto de las perturbaciones (robustez).

Control Derivativo (D)



$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \longrightarrow U(s) = K_d s E(s) \rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = K_d s$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = 1 - G_{lc}(s) = 1 - \frac{G(s) K_d s}{1 + G(s) K_d s} = \frac{1}{1 + K_d s G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{A}{s} \frac{1}{1 + K_d s G(s)} = A$$

No elimina el error de estado estacionario!

Control Derivativo (D) - Rechazo a Perturbaciones

Si $R(s) = 0$:

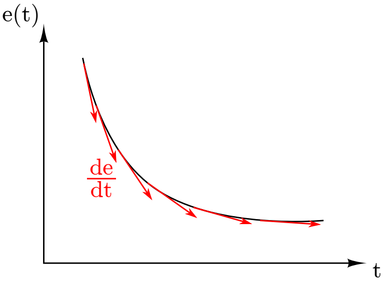
$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)K_d s}$$

Asumiendo $D(s) = A/s$:

$$y_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{A_p}{s} \frac{G(s)}{1 + G(s)K_d s} = A_p G(s)$$

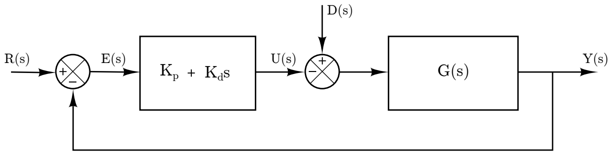
No elimina perturbaciones!

Control Derivativo (D) - Análisis en Tiempo



- Debido a la dinámica del proceso, pasa algún tiempo hasta que cambios en la variable de control produzcan cambios en la salida del proceso.
- La acción derivativa trata de *predecir* o *anticipar* el valor que tomará la señal de error para dar un valor a la señal de control.
- Ventaja: Es anticipativo. adelanta la acción de control frente a la aparición de una tendencia del error (sólo aplica a transitorios).
- Desventaja: Inaplicable ante la presencia de ruido.

Control Proporcional - Derivativo (PD)



$$u(t) = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \longrightarrow U(s) = K_p E(s) + K_d s E(s) \rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + K_d s$$

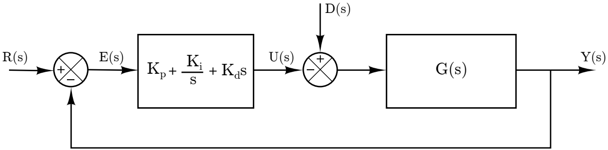
Ventajas:

- Reduce el error de estado estable.
- Adelanta la acción de control (es anticipativo).
- La respuesta es inmediata.

Desventajas:

- No corrije errores en estado estacionario.
- Es sensible a ruidos. Generalmente se utiliza con un filtro en la entrada.

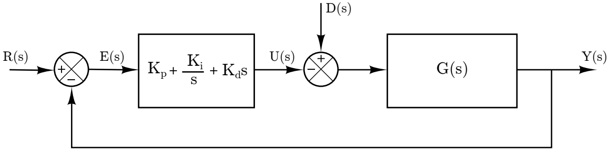
Control Proporcional - Integral - Derivativo (PID)



$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(t)dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$U(s) = K_p E(s) + K_i \frac{E(s)}{s} + K_d s E(s) \rightarrow \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

Control Proporcional - Integral - Derivativo (PID)



Ventajas:

- Elimina error de estado estacionario (I).
- Elimina efecto de las perturbaciones (I).
- Es anticipativo (D).
- Tiene una acción inmediata (P).

Desventajas:

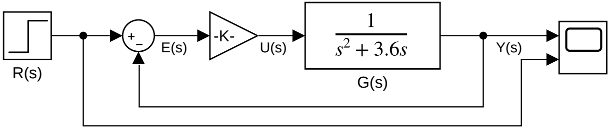
- Tiene un polo en el origen (genera inestabilidad).
- La parte derivativa amplifica el ruido.

Cómo encontrar los valores K_p, K_i, K_d? No existe una manera única de encontrarlos! Existen muchos métodos:

- Experimental.
- Análisis de una F.T.
- Técnicas de optimización.
- Lugar geométrico de las raíces.
- Compensación en frecuencia.

Ejemplo: Control PID de un Sistema de Segundo Orden

Considere el siguiente lazo de control:



1. Calcule el valor de la ganancia K_p para obtener un sobrepico de 10% ante una entrada paso unitaria. Realice la simulación y verifique el resultado.
2. Considere ahora el sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+3.6s+1}$. Cómo cambia la respuesta al simular el sistema con la ganancia encontrada anteriormente?
3. Usando prueba y error, encuentre ganancias K_p y K_i de un control PI que mejore la respuesta del nuevo sistema.
4. Usando prueba y error, encuentre ganancias K_p y K_d de un control PD que mejore la respuesta del nuevo sistema.
5. Usando prueba y error, encuentre ganancias K_p, K_i y K_d de un control PID que mejore la respuesta del nuevo sistema.