Pontificia Universidad Javeriana
Facultad de Ingeniería
Departamento de Electrónica

Control de Sistemas

Clase 4: Estabilidad de Sistemas Retroalimentados

Gerardo Becerra, Ph.D.
gbecerra@javeriana.edu.co

Febrero 18, 2020

Introducción

- Estabilidad $\rightarrow$ muy importante para el diseño y análisis de sistemas retroalimentados.
- Sistema de lazo cerrado inestable $\rightarrow$ en general no es muy útil.
- Sistemas inestables $\rightarrow$ pueden hacerse estables usando retroalimentación.
- Sistemas estables $\rightarrow$ pueden mejorar su desempeño usando retroalimentación.
- Tipos de estabilidad:
  - Estabilidad externa: asociada con las entradas.
  - Estabilidad interna: asociada al estado interno.

Estabilidad Externa

Estabilidad Externa

- Sistema SISO (single input, single output), lineal e invariante en el tiempo, con respuesta impulso $g(t)$:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

- Se asume sistema causal y relajado en $t = 0$.
- Entrada $u(t)$ acotada (bounded): no crece indefinidamente. Existe una constante u_m tal que $\|u(t)\| \leq u_m \leq \infty$ para todo $t >= 0$.
- **Estabilidad BIBO** (bounded input - bounded output): toda entrada acotada produce una salida acotada.

Estabilidad Externa

Theorem 1.

Un sistema es BIBO estable si y sólo si $g(t)$ *es absolutamente integrable en el intervalo* $[0, \infty)$ *para alguna constante M:*

$$\int_0^{\infty} |g(t)|dt \leq M \leq \infty$$

Para sistemas definidos en términos de función de transferencia:

Theorem 2.

Un sistema con función de transferencia racional propia $G(s)$ es BIBO estable si y sólo si todos los polos de $G(s)$ tienen parte real negativa, o se encuentran en el lado izquierdo del semiplano complejo, sin incluir el eje imaginario.

Estabilidad Externa: Ejemplo

Considere el sistema dado por la ecuación diferencial $\ddot{y} + \dot{y} - 2y = \dot{u} - u$. Verifique si el sistema es BIBO estable.

Aplicando la transformada de Laplace, se obtiene la función de transferencia:

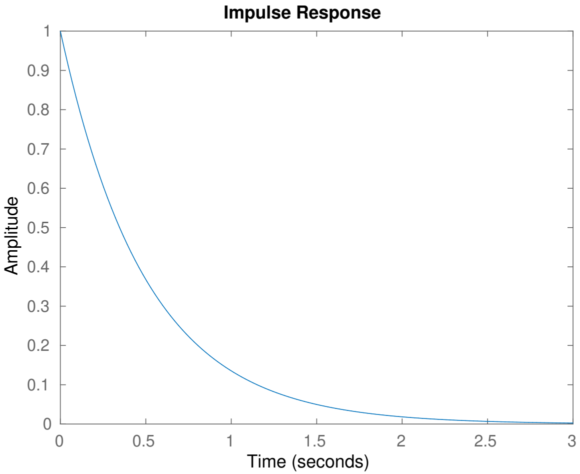
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{s^2+s-2}$$

Usando Matlab para graficar la respuesta impulso:

```
>> G = tf([1 -1],[1 1 -2])
impulse(G)
G =
     s - 1
   -----------
   s^2 + s - 2

Continuous-time transfer function.
```

Estabilidad Externa: Ejemplo



Teorema 1: $g(t)$ absolutamente integrable $\Rightarrow$ BIBO estable.

Estabilidad Externa: Ejemplo

Calculando los polos de la función de transferencia:

```
>> pole(G)

ans =

    -2
     1
```

No todos los polos tienen parte real negativa! Cuál es el problema?

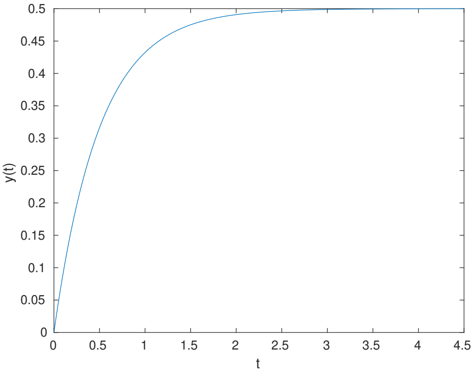
Estabilidad Externa: Ejemplo

Cancelación polo - cero

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\cancel{s-1}}{(s+2)\cancel{(s-1)}} = \frac{1}{s+2}$$

Entonces, el sistema satisface las condiciones del teorema 2 $\Rightarrow$ es BIBO estable.

Aplicando una entrada paso:



Respuesta acotada ante una entrada acotada.

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

- A. Hurwitz [1895] y E. J. Routh [1892]: método para investigar la estabilidad de un sistema lineal.
- Provee una respuesta a la pregunta por la estabilidad considerando el polinomio característico del sistema:

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

  sin necesidad de calcular las raíces.
- Recientemente no es tan usado gracias a los métodos numéricos para calcular las raíces.
- Factorizando $q(s)$ se obtiene:

$$a_n(s - r_1)(s - r_1)\ldots(s - r_n) = 0$$

  donde r_i corresponde a la i-esima raíz de $q(s)$.

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

- Multiplicando los factores se obtiene:

$$\begin{aligned} q(s) = a_n s^n - a_n(r_1 + r_2 + \dots + r_n)s^{n-1} + a_n(r_1 r_2 + r_2 r_3 + \dots)s^{n-2} \\ - a_n(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots)s^{n-3} + \dots - a_n(-1)^n(r_1 r_2 r_3 \dots r_n) = 0 \end{aligned}$$

- Entonces se obtiene la forma general:

$$\begin{aligned} q(s) = a_n s^n - a_n(\text{suma de todas las raíces})s^{n-1} \\ + a_n(\text{suma de productos de combinaciones de 2 raíces})s^{n-2} \\ - a_n(\text{suma de productos de combinaciones de 3 raíces})s^{n-3} + \dots \\ - a_n(-1)^n(\text{productos de todas las raíces}) = 0 \end{aligned}$$

- Si las raíces están en el semiplano izquierdo, los coeficientes tienen el mismo signo y son diferentes a cero (condición necesaria pero no suficiente).

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

- Criterio de Routh-Hurwitz: condición necesaria y suficiente para estabilidad de sistemas lineales.
- A partir del polinomio característico $a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$, se define el arreglo de Routh como:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\
s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \dots \\
s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
s^0 & h_{n-1} & & &
\end{array}$$

$$b_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix},$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}, \dots$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}, \dots$$

- Número de raíces de $q(s)$ con parte real positiva = número de cambios de signo en la primera columna del arreglo de Routh.

Caso 1: Ningún elemento de la primera columna es cero.

- Polinomio característico: $q(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$.
- Arreglo de Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & b_1 & 0 \end{array} \qquad b_1 = \frac{-1}{a_1}\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0$$

- Entonces, el sistema es estable si todos los coeficientes son positivos o todos son negativos.

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz - Caso 2

Caso 2: Existe un cero en la primera columna, pero otros elementos de esa fila son diferentes a cero.

- Polinomio característico: $q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$.
- Arreglo de Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & \epsilon & 6 & 0 \\ s^2 & c_1 & 10 & 0 \\ s^1 & d_1 & 0 & 0 \\ s^0 & 10 & 0 & 0 \end{array}$$

$$c_1 = \frac{4\epsilon - 12}{\epsilon}$$

$$d_1 = \frac{6c_1 - 10\epsilon}{c_1}$$

- Cuando $\epsilon \to 0^+$, se obtiene $c_1 < 0$ y $d_1 > 0$.
- Entonces, hay dos cambios de signo en la primera columna.
- Por lo tanto, el sistema es inestable con dos raíces en el semiplano derecho.

Caso 3: Todos los coeficientes en una fila son cero.

- Polinomio característico: $q(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$.
- Arreglo de Routh:

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	0	0	

- Se forma el polinomio auxiliar usando la fila anterior: $P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$.
- La fila se reemplaza por los coeficientes de $dP(s)/ds = 8s^3 + 96s$:

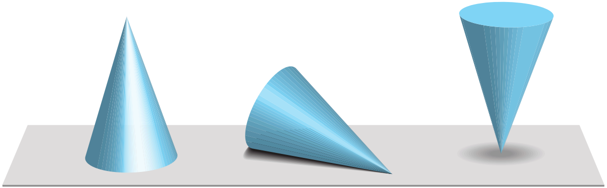
s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^0	8	96	
s^2	24	-50	
s^1	112.7	0	
s^0	-50		

- Hay un cambio de signo $\rightarrow$ una raíz con parte real positiva $\rightarrow$ sistema inestable.

Estabilidad Interna

Estabilidad Interna

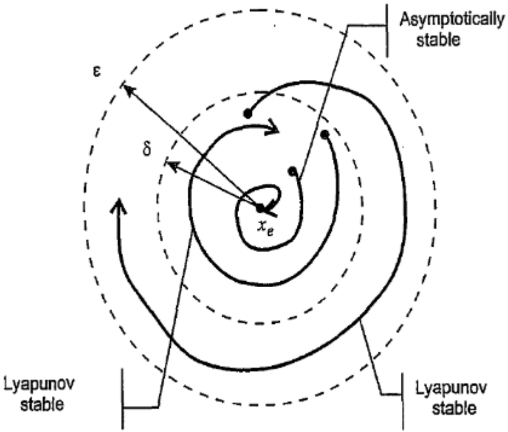
- Se estudia para el caso de respuesta a entrada cero: $\dot{x}(t) = \mathsf{A}x(t)$
- Se desea conocer si el sistema es internamente estable para una condición inicial x_0.
- Para el siguiente sistema, qué podría decirse sobre la estabilidad en cada caso?



Estabilidad Interna

Se presentan dos criterios de estabilidad:

- Estable en el sentido de Lyapunov: toda condición inicial limitada genera una respuesta limitada del estado.
- Asintóticamente estable: toda condición inicial limitada genera una respuesta del estado limitada que tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito.



Theorem 3.

- *El sistema es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de* $\mathbf{A}$ *tienen parte real negativa.*
- *El sistema es marginalmente estable si y sólo si todos los valores propios de* $\mathbf{A}$ *tienen parte real cero o negativa, y aquellos con parte real cero son raices simples del polinomio característico de* $\mathbf{A}$*.*

Estabilidad Interna - Ejemplo

El sistema definido por la ecuación diferencial $\ddot{y} + \dot{y} - 2y = \dot{u} - u$ puede escribirse en variables de estado como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

```
>> [A,B,C,D] = tf2ss([1 -1],[1 1 -2])
A =
    -1     2
     1     0
B =
     1
     0
C =
     1    -1
D =
     0
```

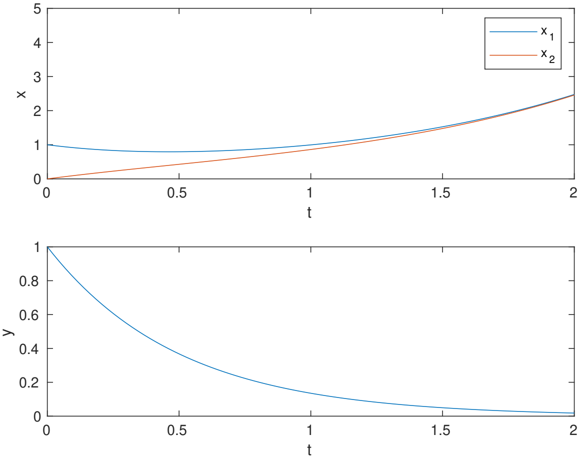
```
>> eig(A)
ans =
    -2
     1
```

Teorema 3 $\rightarrow$ internamente inestable!

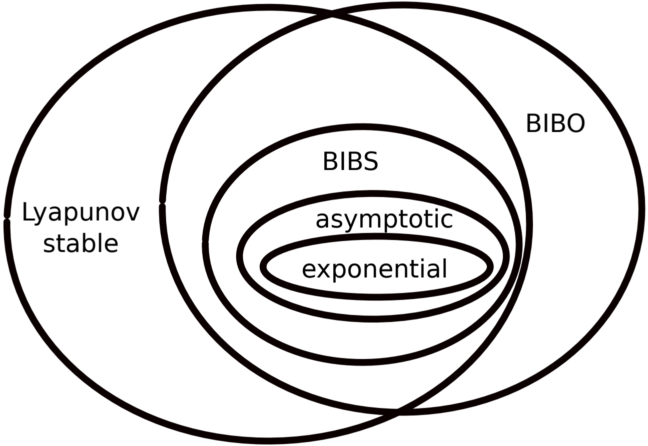
Estabilidad Interna - Ejemplo

```
sys = ss(A,B,C,D);
[y,t,x] = initial(sys,[1,0]);
```

Estados inestables, pero salida estable!

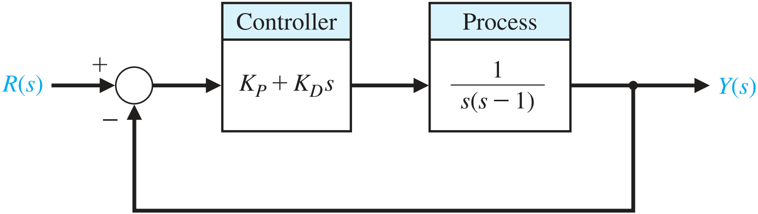


Relación entre los Diferentes Tipos de Estabilidad



Taller

1. El sistema mostrado en la figura representa un proceso controlado por un controlador proporcional-derivativo (PD).
   - Usando el criterio de Routh-Hurwitz, determine el rango de K_P y K_D para garantizar estabilidad del sistema en lazo cerrado.
   - Asigne valores a K_P y K_D dentro del rango encontrado. Verifique para éste caso las propiedades de estabilidad interna y externa usando los teoremas 2 y 3.



2. Considere el sistema representado en variables de estado con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -k & -k \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

- Encuentre la función de transferencia del sistema.
- Para qué valores de k el sistema es estable?

3. Considere la ecuación característica:

$$s^4 + 2s^3 + (4 + K)s^2 + 9s + 25 = 0$$

Usando el criterio de Routh-Hurwitz, determine el rango de K para estabilidad.