



Pontificia Universidad
JAVERIANA
Colombia

Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica

Control de Sistemas

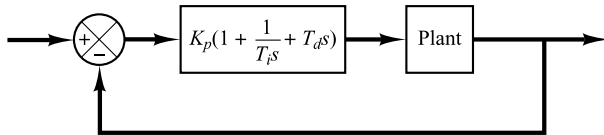
Clase 7: Sintonización de Controladores

Gerardo Becerra, Ph.D.

gbecerra@javeriana.edu.co

Marzo 3, 2020

Introducción



- Controlador PID → Depende de los parámetros K_p , T_i , T_d .
- **Sintonización:** Selección de valores numéricos para los parámetros, con base en algún criterio.
- Existen muchos criterios para sintonización de controladores.
 - Experimentales
 - Análisis de la función de transferencia
 - Técnicas de optimización
 - Lugar geométrico de las raíces
 - Compensación en frecuencia

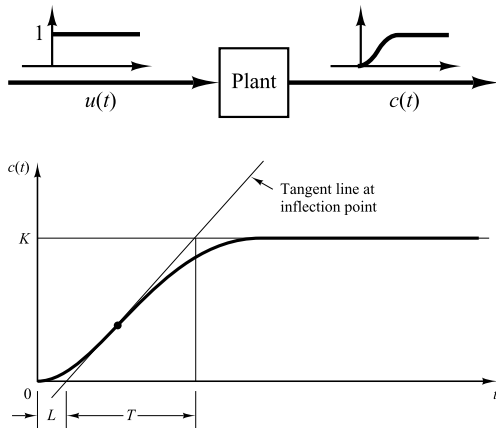
Criterios Clásicos de Sintonización

Método de Ziegler-Nichols

- Método experimental.
- Útil cuando no se conoce un modelo matemático detallado de la planta.
- Está diseñado para proveer un buen rechazo a perturbaciones.
- Produce un sobrepico grande.
- Los parámetros resultantes no necesariamente son óptimos. Se toman como punto de partida para un ajuste fino.
- Dos métodos
 1. Lazo abierto: Características de la curva de reacción ante entrada paso.
 2. Lazo cerrado: Aumentar la ganancia proporcional hasta un valor crítico.

Método de Ziegler-Nichols / Método 1: Lazo Abierto

- Aplicar entrada paso unitaria al sistema y medir la respuesta (experimental o simulación).
- Si la respuesta tiene forma de S, se puede aplicar el método.
- Caracterizar la curva obtenida usando dos parámetros: tiempo muerto L y constante de tiempo T .
- Los parámetros se encuentran dibujando una recta tangente al punto de inflexión de la curva en forma de S.



Método de Ziegler-Nichols / Método 1: Lazo Abierto

- La función de transferencia $C(s)/U(s)$ se puede aproximar a un sistema de primer orden mas tiempo muerto:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

- Ziegler y Nichols sugirieron asignar los valores para los parámetros de acuerdo con la siguiente tabla:

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	T/L	∞	0
PI	$0.9T/L$	$L/0.3$	0
PID	$1.2T/L$	$2L$	$0.5L$

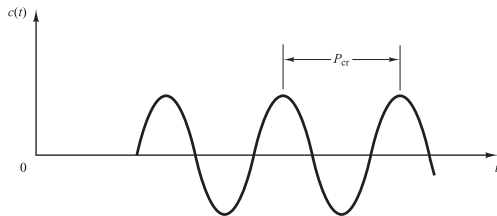
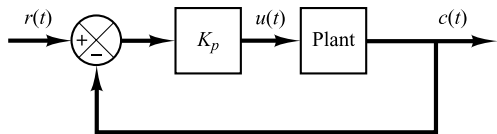
Note que el controlador PID obtenido por éste método tiene la forma:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\ &= 1.2 \frac{T}{L} \left(1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) \\ &= 0.6T \frac{(s + \frac{1}{L})^2}{s} \end{aligned}$$

El controlador PID tiene un polo en el origen y doble cero en $s = -1/L$.

Método de Ziegler-Nichols / Método 2: Lazo Cerrado

- Se inicia configurando $T_i = \infty$ y $T_d = 0$.
- Usando sólo acción proporcional, aumentar K_p desde 0 hasta un valor crítico K_{cr} en el cual la salida presenta oscilaciones sostenidas.
- Si no se obtienen oscilaciones, el método no se puede aplicar.
- A partir del experimento se determinan la ganancia crítica K_{cr} y periodo crítico P_{cr} .



Método de Ziegler-Nichols / Método 2: Lazo Cerrado

Ziegler y Nichols sugirieron asignar los valores para los parámetros de acuerdo con la siguiente tabla:

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.5K_{cr}$	∞	0
PI	$0.45K_{cr}$	$P_{cr}/1.2$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$P_{cr}/2$	$0.125P_{cr}$

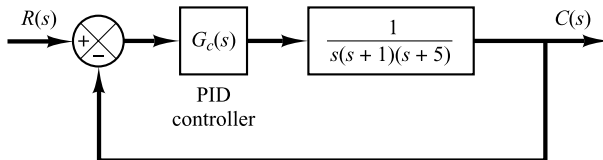
Note que el controlador PID obtenido por el segundo método tiene la forma:

$$\begin{aligned}G_c(s) &= K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\&= 0.6K_{cr} \left(1 + \frac{1}{0.5P_{cr}s} + 0.125P_{cr}s \right) \\&= 0.075K_{cr}P_{cr} \frac{\left(s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s}\end{aligned}$$

Entonces, el controlador PID tiene un polo en el origen y doble cero en $s = -4/P_{cr}$.

Método de Ziegler-Nichols: Ejemplo

Considere el sistema de control mostrado en la figura. Usando el método de Ziegler-Nichols, determine los parámetros del controlador PID tal que se obtenga un sobrepico máximo de aproximadamente 25%. Si el sobrepico máximo es excesivo, realice un ajuste fino para reducirlo.



Método de Ziegler-Nichols: Ejemplo

- Dado que la planta tiene un integrador, se utiliza el segundo método.
- Definiendo $T_i = \infty$ y $T_d = 0$, se obtiene la función de transferencia de lazo cerrado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p}{s(s+1)(s+5) + K_p} = \frac{K_p}{s^3 + 6s^2 + 5s + K_p}$$

- El valor crítico de K_p para obtener oscilaciones sostenidas se puede obtener usando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz para el polinomio característico $q(s) = s^3 + 6s^2 + 5s + K_p = 0$:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & K_p \\ s^1 & \frac{30-K_p}{6} & \\ s^0 & K_p & \end{array}$$

- El valor crítico de K_p para obtener oscilaciones sostenidas es $K_{cr} = 30$.
- En éste caso, el polinomio característico es $q(s) = s^3 + 6s^2 + 5s + 30 = 0$.

Método de Ziegler-Nichols: Ejemplo

- Para hallar la frecuencia de la oscilación se substituye $s = j\omega$ en el polinomio característico:

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 30 = 0$$

$$6(5 - \omega^2) + j\omega(5 - \omega^2) = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{5}$$

- El periodo de oscilación sostenida es:

$$P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.8099$$

- Usando la tabla para el método 2, se obtienen los valores del controlador PID como:

$$K_p = 0.6K_{cr} = 18$$

$$T_i = 0.5P_{cr} = 1.405$$

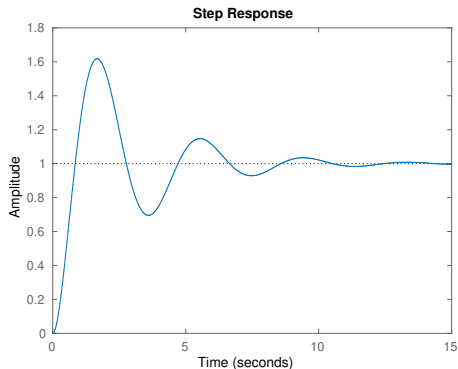
$$T_d = 0.125P_{cr} = 0.35124$$

- La función de transferencia del controlador PID queda:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= 18 \left(1 + \frac{1}{1.405s} + 0.35124s \right) \\ &= \frac{6.3223(s + 1.4235)^2}{s} \end{aligned}$$

Método de Ziegler-Nichols: Ejemplo

La respuesta del sistema en lazo cerrado ante una entrada paso es:



Sobrepico 60% aproximadamente → se requiere ajustar los parámetros para disminuir el sobrepico:

$$K_p = 39.42$$

$$T_i = 3.077$$

$$T_d = 0.7692$$

Método de Cohen-Coon

- Ziegler-Nichols: sensible a la relación L/T .
- Cohen-Coon: Mejora el desempeño cuando el tiempo muerto es comparable a la constante de tiempo.

Controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{K_0 L} \left(1 + \frac{L}{3T}\right)$	∞	0
PI	$\frac{T}{K_0 L} \left(0.9 + \frac{L}{12T}\right)$	$L \frac{30T+3L}{9T+20L}$	0
PID	$\frac{T}{K_0 L} \left(\frac{4}{3} + \frac{L}{4T}\right)$	$L \frac{32T+6L}{13T+8L}$	$\frac{4TL}{11T+22L}$

$$K_0 = \frac{\Delta c}{\Delta u}$$

Análisis de la Función de Transferencia

Método Matemático de Sintonización de Controladores

1. A partir de los requerimientos de desempeño, se determina un polinomio característico deseado.
2. Se calcula la función de transferencia del sistema en lazo cerrado, en términos de los parámetros del controlador.
3. Se comparan el polinomio característico deseado con el denominador de la función de transferencia. Si hay correspondencia en los coeficientes, se resuelve el sistema de ecuaciones para calcular los valores de los parámetros del controlador. Si no, se prueba con un controlador con una estructura diferente.
4. Se verifica que el sistema en lazo cerrado cumpla con los requerimientos de desempeño.

Método Matemático: Ejemplo

Considere el modelo de segundo orden de un sistema de control de altitud de una aeronave descrito por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{4500}{s(s + 361.2)}$$

Se establecen las especificaciones de desempeño como sigue:

- Error en estado estable debido a una rampa $e_{ss} \leq 0.000433$.
- Sobrepico máximo $PO \leq 5\%$
- Tiempo de subida $t_r \leq 0.005$ s.
- Tiempo de establecimiento $t_s \leq 0.005$ s.

Determine una estructura de control PID adecuada y calcule los valores de los parámetros.

Método Matemático: Ejemplo

1. Polinomio característico deseado a partir de los requerimientos de desempeño.

$$PO = 0.05 = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta = 0.6901$$

Entonces, para $PO \leq 5\%$, $\zeta \geq 0.6901$. Ahora, con $t_s \leq 0.005$:

$$\frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 0.005 \quad \Rightarrow \quad \omega_n \geq \frac{4}{0.005\zeta}$$

Para $\zeta = 0.6901$, $\omega_n = 1159.2$. Entonces el polinomio característico deseado es:

$$q(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 2(0.6901)(1159.2)s + 1159.2^2 = s^2 + 1600s + 1.3737 \times 10^6$$

Método Matemático: Ejemplo

2. Función de transferencia en lazo cerrado en términos de los parámetros del controlador.

Qué estructura debe tener el controlador? Usando controlador P:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p \frac{4500}{s(s+361.2)}}{1 + K_p \frac{4500}{s(s+361.2)}} = \frac{4500K_p}{s^2 + 361.2s + 4500K_p}$$

Comparando el denominador con el polinomio característico deseado:

$$q(s) = s^2 + 1600s + 1.3737 \times 10^6$$

No hay correspondencia en el coeficiente de s ! Entonces, no funciona utilizar el controlador P. Se debe probar con un controlador diferente.

Método Matemático: Ejemplo

Usando un controlador PD:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_p + K_d s) \frac{4500}{s(s+361.2)}}{1 + (K_p + K_d s) \frac{4500}{s(s+361.2)}} = \frac{4500(K_p + K_d s)}{s^2 + (361.2 + 4500K_d)s + 4500K_p}$$

Al agregar el controlador D, se tiene un nuevo grado de libertad para ajustar el coeficiente de s . Comparando con el polinomio característico deseado:

$$q(s) = s^2 + 1600s + 1.3737 \times 10^6$$

Ahora si se puede resolver el sistema de ecuaciones.

Método Matemático: Ejemplo

3. Comparando los coeficientes de los dos polinomios:

$$s^2 + (361.2 + 4500K_d)s + 4500K_p$$

$$s^2 + 1600s + 1.3737 \times 10^6$$

Se tiene el sistema de ecuaciones

$$4500K_p = 1.3737 \times 10^6$$

$$361.2 + 4500K_d = 1600$$

Entonces:

$$K_p = 298.6099$$

$$K_d = 0.2753$$

4. Verificar que se cumplan los requerimientos de desempeño.

Se puede usar una simulación para verificarlo...

Sintonía Óptima de Controladores

Índices de Desempeño

Sistema de control óptimo: los parámetros del sistema se ajustan para minimizar (maximizar) un índice de desempeño.

- Integral del cuadrado del error (ISE):

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt$$

- Integral del valor absoluto del error (IAE):

$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt$$

- Integral del valor absoluto del error ponderado en el tiempo (ITAE):

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt$$

- Integral del cuadrado del error ponderado en el tiempo (ITSE):

$$ITSE = \int_0^T te^2(t)dt$$

T : Es conveniente seleccionarlo como el tiempo de establecimiento T_s .

Objetivo: seleccionar parámetros del sistema para minimizar algún índice de desempeño. 20

Índices de Desempeño

- ISE: otorga más peso a errores grandes, lo cual usualmente ocurre al inicio de la respuesta, y menos peso a errores pequeños, lo cual ocurre normalmente hacia el final de la respuesta.
- ISE: produce ganancias del controlador grandes y respuestas muy oscilatorias.
- ITAE, ITSE: agrega un término de penalización asociado al tiempo transcurrido.
- Lopez et al [1967] desarrollaron fórmulas empíricas de mínimo error integral.
- Aplicables para el intervalo $0.1 < L/T < 1$.

Sintonización Óptima para Regulación - Controlador P

Process Model: $G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$

Proportional (P) Controller: $G_e(s) = K_c$

Error Integral	ISE	IAE	ITAE
$K_c = \frac{a}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^b$	$a = 1.411$	0.902	0.490
	$b = -0.917$	-0.985	-1.084

Sintonización Óptima para Regulación - Controlador PI

Process Model: $G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$

Proportional-Integral (PI) Controller:

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$$

Error Integral	ISE	IAE	ITAE
$K_c = \frac{a_1}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{b_1}$	$a_1 = 1.305$	0.984	0.859
	$b_1 = -0.959$	-0.986	0.977
$\tau_I = \frac{\tau}{a_2} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{b_2}$	$a_2 = 0.492$	0.608	0.674
	$b_2 = 0.739$	0.707	0.680

Sintonización Óptima para Regulación - Controlador PID

Process Model: $G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$

Proportional-Integral-Derivative (PID) Controller:

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

Error Integral	ISE	IAE	ITAE
$K_c = \frac{a_1}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{b_1}$	$a_1 = 1.495$ $b_1 = 0.945$	1.435 - 0.921	1.357 - 0.947
$\tau_I = \frac{\tau}{a_2} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{b_2}$	$a_2 = 1.101$ $b_2 = 0.771$	0.878 0.749	0.842 0.738
$\tau_D = a_3 \tau \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{b_3}$	$a_3 = 0.560$ $b_3 = 1.006$	0.482 1.137	0.381 0.995

Sintonización Óptima para Servos - Controlador PI

Process Model: $G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$

Proportional-Integral (PI) Controller:

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} \right)$$

Error Integral	IAE	ITAE
$K_c = \frac{a_1}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{b_1}$	$a_1 = 0.758$	0.586
	$b_1 = -0.861$	-0.916
$\tau_I = \frac{\tau}{a_2 + b_2(t_0/\tau)}$	$a_2 = 1.02$	1.03
	$b_2 = -0.323$	-0.165

Sintonización Óptima para Servos - Controlador PID

Process Model: $G(s) = \frac{Ke^{-t_0s}}{\tau s + 1}$

Proportional-Integral-Derivative (PID) Controller:

$$G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s \right)$$

Error Integral	IAE	ITAE
$K_c = \frac{a_1}{K} \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{b_1}$	$a_1 = 1.086$	0.965
	$b_1 = -0.869$	- 0.855
$\tau_I = \frac{\tau}{a_2 + b_2(t_0/\tau)}$	$a_2 = 0.740$	0.796
	$b_2 = -0.130$	0.147
$\tau_D = a_3 \tau \left(\frac{t_0}{\tau} \right)^{b_3}$	$a_3 = 0.348$	0.308
	$b_3 = 0.914$	0.9292

Coeficientes Óptimos Basados en el Criterio ITAE para una Entrada Paso

- Para la función de transferencia de lazo cerrado de la forma general:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

se han determinado los coeficientes óptimos que minimizan el ITAE para una entrada paso.

- Ésta función de transferencia tiene $e_{ss} = 0$ para entrada paso.

Coeficientes Óptimos Basados en el Criterio ITAE para una Entrada Paso

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

$$s + \omega_n$$

$$s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$$

$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

$$s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4$$

$$s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

$$s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6$$

Coeficientes Óptimos Basados en el Criterio ITAE para una Entrada Rampa

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

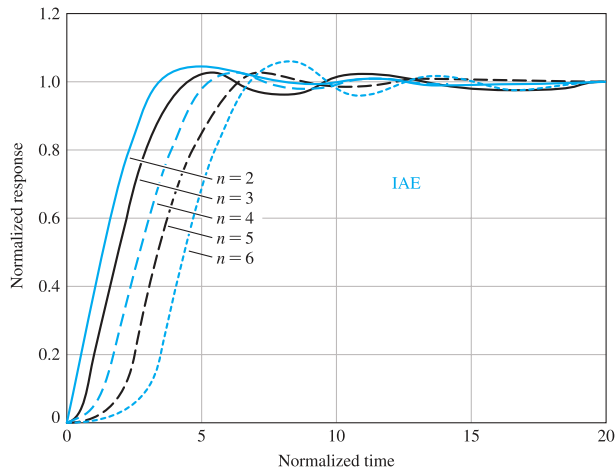
$$s^2 + 3.2\omega_n s + \omega_n^2$$

$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 3.25\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

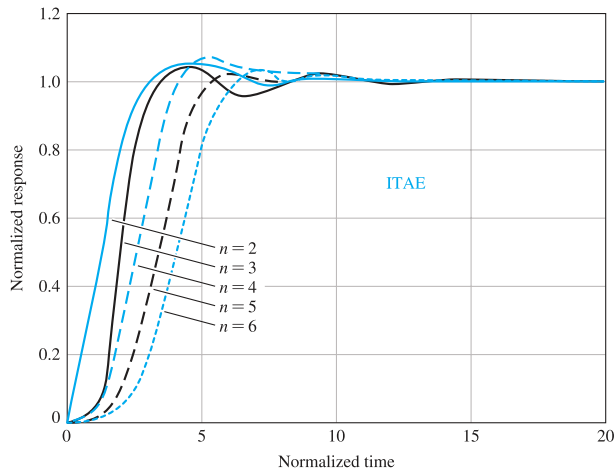
$$s^4 + 2.41\omega_n s^3 + 4.93\omega_n^2 s^2 + 5.14\omega_n^3 s + \omega_n^4$$

$$s^5 + 2.19\omega_n s^4 + 6.50\omega_n^2 s^3 + 6.30\omega_n^3 s^2 + 5.24\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

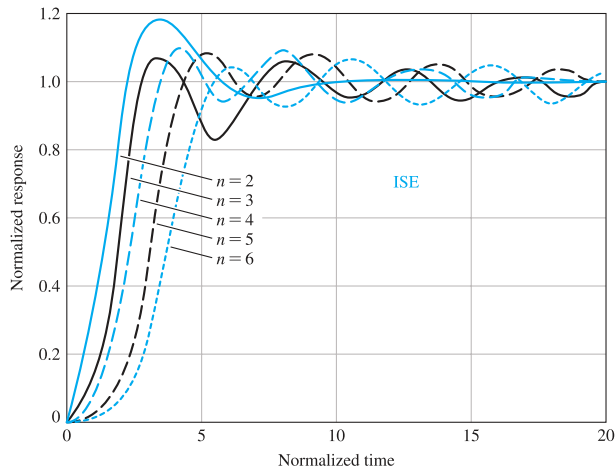
Respuesta Paso para Coeficientes Óptimos Basados en Criterio IAE



Respuesta Paso para Coeficientes Óptimos Basados en Criterio ITAE



Respuesta Paso para Coeficientes Óptimos Basados en Criterio ISE



Diseño de Controladores usando Coeficientes Óptimos: Ejemplo

Considere el sistema

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Encuentre un sistema de cero error de posición que minimice el criterio ITAE. También se requiere que la señal de control debida a una señal escalón unitario satisfaga $|u(t)| \leq 3$.

La función de transferencia óptima a partir de la tabla se selecciona como:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G_0 = \frac{\omega_n}{s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2}$$

Note que aumentando ω_n , aumentan la velocidad de respuesta y la señal de control. Se debe seleccionar ω_n tal que $|u(t)| \leq 3$.

Diseño de Controladores usando Coeficientes Óptimos: Ejemplo

La función de transferencia desde $R(s)$ hasta $U(s)$ es

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{G_0(s)}{G(s)} = \frac{\omega_n^2 s(s+2)}{s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$U(s) = \frac{\omega_n^2 s(s+2)}{s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2} R(s)$$

Usando simulación, se encuentra que el máximo valor de $u(t)$ ocurre en $t = 0^+$. Para encontrar dicho valor se usa el teorema del valor inicial:

$$u_{max} = u(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sU(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{\omega_n^2 s(s+2)}{s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} = \omega_n^2$$

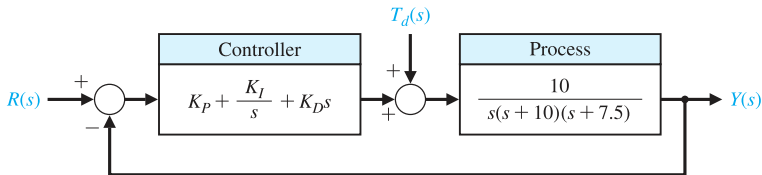
Entonces, para satisfacer $|u(t)| \leq 3$ se requiere $\omega_n^2 = 3$. Entonces el sistema ITAE óptimo es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3}{s^2 + 1.4\sqrt{3}s + 3} = \frac{3}{s^2 + 2.4s + 3}$$

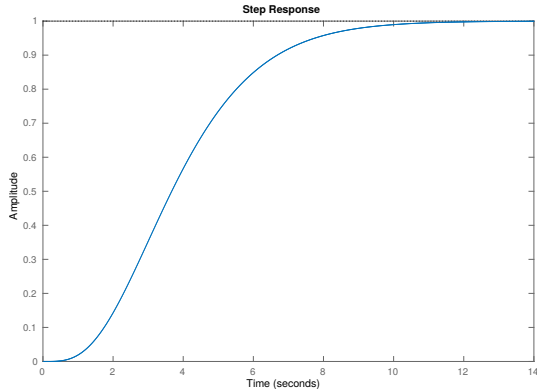
Taller

1. Considere el sistema de control mostrado en la figura.

- Diseñe un controlador PID usando el método de Ziegler-Nichols.
- Determine la respuesta a entrada unitaria y disturbio unitario.
- Cuál es el máximo sobrepico y tiempo de establecimiento para la respuesta a entrada unitaria?



2. La siguiente figura muestra la curva de reacción obtenida al aplicar una entrada paso al sistema $G(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$.



- Encuentre una aproximación de primer orden mas tiempo muerto (FOPDT) para el sistema.
- Diseñe un controlador PID usando los métodos de Ziegler-Nichols, Cohen-Coon e ITAE.
- Compare los valores de los parámetros obtenidos en cada caso.
- Evalúe el desempeño de cada controlador ante entrada paso unitario y disturbio paso unitario.

3. Considere el sistema descrito por

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 0.03s + 2.25}$$

Diseñe un controlador tal que el sistema tenga

- 3.1 Error en estado estable nulo ante escalón unitario.
- 3.2 Sobrepico $\leq 10\%$.
- 3.3 Tiempo de establecimiento $t_s \leq 10$ s.

4. Considere una planta con función de transferencia $2/s^2$. Encuentre un sistema óptimo que minimice el criterio ITAE bajo la restricción $|u(t)| \leq 3$.

5. Considere una planta con función de transferencia $2/s^2$. Encuentre un sistema óptimo que minimice el criterio ITAE bajo la restricción $|u(t)| \leq 3$ y que el error de velocidad sea cero.

6. Considere una planta cuya función de transferencia es

$$G(s) = \frac{2}{s(s^2 + 0.25s + 6.25)}$$

Encuentre un sistema óptimo ITAE de error de posición cero. Se requiere que la señal de control $u(t)$ debida a una señal de entrada escalón unitario satisfaga $|u(t)| \leq 10$.