Pontificia Universidad Javeriana

Colombia

Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica

Control de Sistemas

Clase 5: Especificaciones de Desempeño

Gerardo Becerra, Ph.D.

gbecerra@javeriana.edu.co

Febrero 25, 2020

Introducción

- Objetivo del diseño de sistemas de control $\rightarrow$ ajustar la respuesta transitoria y de estado estacionario.
- Proceso de diseño $\rightarrow$ requiere definir y medir el desempeño.
- Desempeño deseado $\Rightarrow$ ajuste de parámetros del controlador $\rightarrow$ respuesta deseada.
- Dos partes de la respuesta:
  - Respuesta transitoria: Desaparece con el tiempo.
  - Respueta de estado estacionario: existe por un largo tiempo después del estímulo inicial.
- Especificaciones de diseño:
  - Índices de la respuesta en tiempo para determinada entrada de prueba.
  - Exactitud de la respuesta en estado estacionario.
- Compromiso entre diferentes índices de desempeño.

Señales de Prueba

- Inicialmente, debe determinarse si el sistema de control es estable.
- Si es estable, la respuesta a determinadas señales de prueba provee varias medidas de desempeño.
- Usualmente, la entrada del sistema en condiciones de operación no es conocida $\rightarrow$ se usan señales de prueba.
- Usar una señal de prueba estandar $\rightarrow$ permite comparar diferentes diseños.

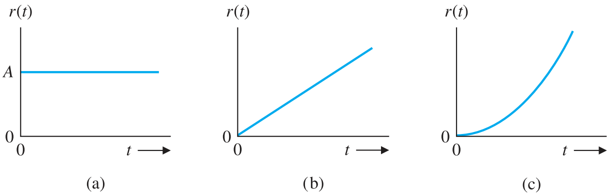


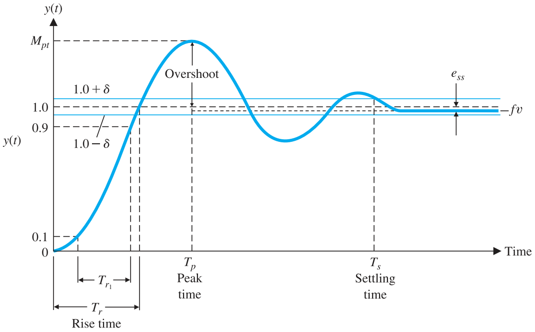
Figure 1: Señales de prueba: (a) escalón, (b) rampa, (c) parábola.

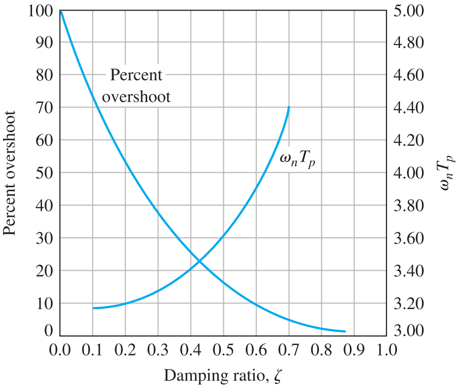
Desempeño de Sistemas de Segundo Orden

Desempeño de Sistemas de Segundo Orden

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$PO = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$





Compromiso entre velocidad de la respuesta y sobrepico!

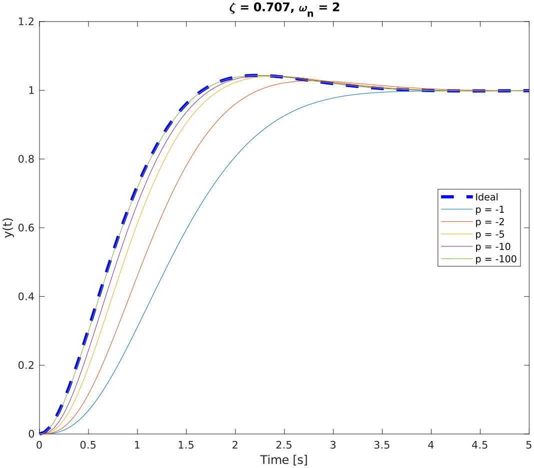
Efectos de un Tercer Polo en la Respuesta de un Sistema de Segundo Orden

Sistema de Segundo Orden con un Polo en $s = -z$:

$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + 1)(\frac{1}{p}s + 1)}$$

Condición para asumir que el efecto del tercer polo sobre los polos dominantes es *despreciable*:

$$p << \zeta\omega_n$$



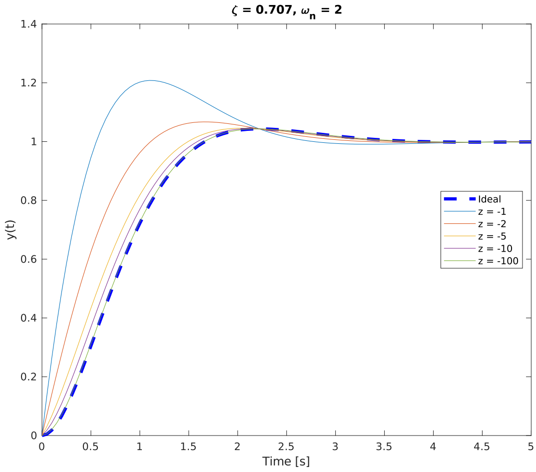
Efectos de un Tercer Cero en la Respuesta de un Sistema de Segundo Orden

Sistema de Segundo Orden con un Cero en $s = -z$:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2(\frac{1}{z}s + 1)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Condición para asumir que el efecto del cero sobre los polos dominantes es *despreciable*:

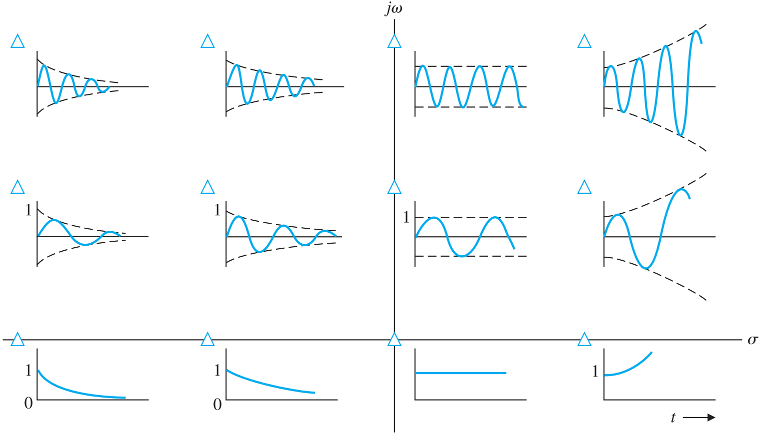
$$z << \zeta\omega_n$$



Ubicación de los Polos y Respuesta Transitoria

- Relación polos - ceros determina la respuesta en tiempo.
- Análisis y diseño de sistemas de control: ubicación de polos y ceros.
- Efectos en la respuesta paso (impulso) al agregar o mover polos y ceros.
- Polos: Determinan los modos de respuesta.
- Ceros: Establecen ponderación relativa entre diferentes modos.
- Cero cercano a un polo: disminuye la contribución relativa del polo a la respuesta del sistema.

Ubicación de los Polos y Respuesta Transitoria



Tipos de respuesta transitoria para diferentes ubicaciones de los polos.

Error en Estado Estacionario

Error en Estado Estacionario de Sistemas Retroalimentados

- Retroalimentación $\rightarrow$ útil para disminuir el error en estado estacionario.
- Error en el lazo de retroalimentación:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s)$$

- Usando el teorema del valor final:

$$\lim_{t \to \infty} e(t) = e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s)$$

Error en Estado Estacionario - Entrada Paso

- Entrada paso: $R(s) = A/s$:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{A/s}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \to 0} G_c(s)G(s)}$$

- Función de transferencia general:

$$G_c(s)G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{M}(s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^{Q}(s + p_k)}$$

- e_{ss} depende del número de integradores N. Para un sistema tipo cero ($N = 0$):

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K \prod_{i=1}^{M} z_i / \prod_{k=1}^{Q} p_k}$$

- Constante de error de posición: $K_p = \lim_{s \to 0} G_c(s)G(s)$.
- Error de estado estacionario para $N = 0$:

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$$

- Error de estado estacionario Para $N \geq 1$:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{A}{1 + K \prod z_i / \prod p_k} = 0$$

Error en Estado Estacionario - Entrada Rampa

- Para una rampa $R(s) = A/s^2$:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} s \frac{A/s^2}{1 + G_c(s)G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{A}{s + sG_c(s)G(s)}$$

- e_{ss} depende del número de integradores N. Para un sistema tipo cero $(N = 0)$, $e_{ss} = \infty$.
- Para un sistema tipo 1 $(N = 1)$:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{A}{sK\prod(s + z_i)/\left(s\prod(s + p_k)\right)} = \frac{A}{K\prod z_i / \prod p_k} = \frac{A}{K_v}$$

- Constante de error de velocidad:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_c(s)G(s) = K\prod z_i / \prod p_k$$

- Para un sistema tipo $N \geq 2$, $e_{ss} = 0$.

Error en Estado Estacionario - Entrada Parábola

- Para una parábola $R(s) = A/s^3$:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{A/s^3}{1 + G_c(s)G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s^2 + s^2 G_c(s)G(s)}$$

- Para un sistema tipo 1 $(N = 1)$, $e_{ss} = \infty$.
- Para un sistema tipo 2 $(N = 2)$:

$$e_{ss} = \frac{A}{K\prod z_i/\prod p_k} = \frac{A}{K_a}$$

- Constante de error de aceleración:

$$K_v = \lim_{s\to 0} s^2 G_c(s)G(s) = K\prod z_i/\prod p_k$$

- Para un sistema tipo $N \geq 3$, $e_{ss} = 0$.

Índices de Desempeño

Índices de Desempeño

- Integral del cuadrado del error (ISE):

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt$$

- Integral del valor absoluto del error (IAE):

$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt$$

- Integral del valor absoluto del error ponderado en el tiempo (ITAE):

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt$$

- Integral del cuadrado del error ponderado en el tiempo (ITSE):

$$ITAE = \int_0^T te^2(t)dt$$

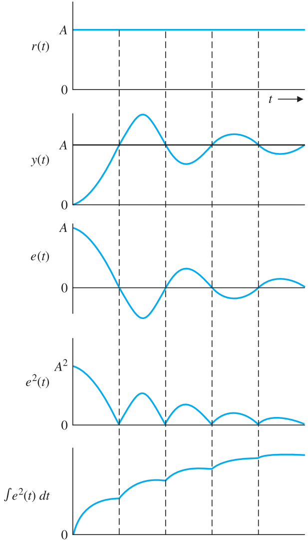
Objetivo: seleccionar parámetros del sistema para minimizar algún índice de desempeño.

Índices de Desempeño

- ISE: otorga más peso a errores grandes, lo cual usualmente ocurre al inicio de la respuesta, y menos peso a errores pequeños, lo cual ocurre normalmente hacia el final de la respuesta.
- ISE: produce ganancias del controlador grandes y respuestas muy oscilatorias.
- ITAE, ITSE: agrega un término de penalización asociado al tiempo transcurrido.

Integral del cuadrado del error (ISE):

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt$$



Minimización de los Índices de Desempeño

- Sistema de control $\rightarrow$ es óptimo cuando se minimiza algún índice de desempeño seleccionado.
- Valor óptimo de los parámetros $\rightarrow$ depende del índice de desempeño.
- Para la función de transferencia de lazo cerrado de la forma general:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b0}$$

  se han determinado los coeficientes óptimos que minimizan el ITAE para una entrada paso.
- Ésta función de transferencia tiene $e_{ss} = 0$ para entrada paso.

Coeficientes Óptimos Basados en el Criterio ITAE para una Entrada Paso

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b0}$$

$$s + \omega_n$$

$$s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$$

$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

$$s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\,\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4$$

$$s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

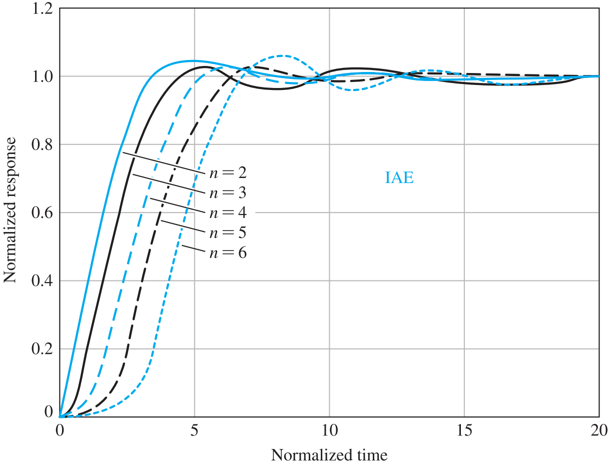
$$s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6$$

Coeficientes Óptimos Basados en el Criterio ITAE para una Entrada Rampa

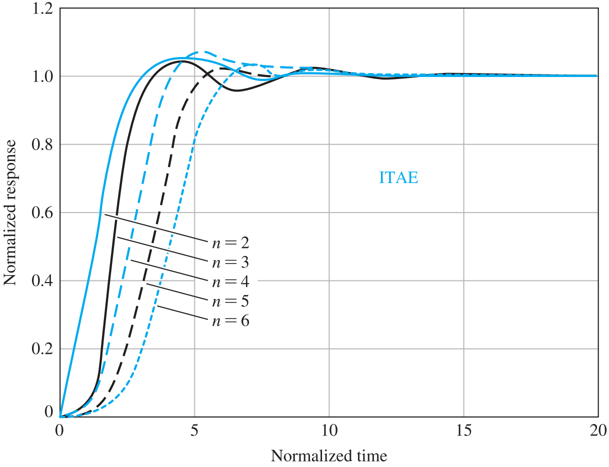
$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b0}$$

$$s^2 + 3.2\omega_n s + \omega_n^2$$
$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 3.25\omega_n^2 s + \omega_n^3$$
$$s^4 + 2.41\omega_n s^3 + 4.93\omega_n^2 s^2 + 5.14\omega_n^3 s + \omega_n^4$$
$$s^5 + 2.19\omega_n s^4 + 6.50\omega_n^2 s^3 + 6.30\omega_n^3 s^2 + 5.24\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

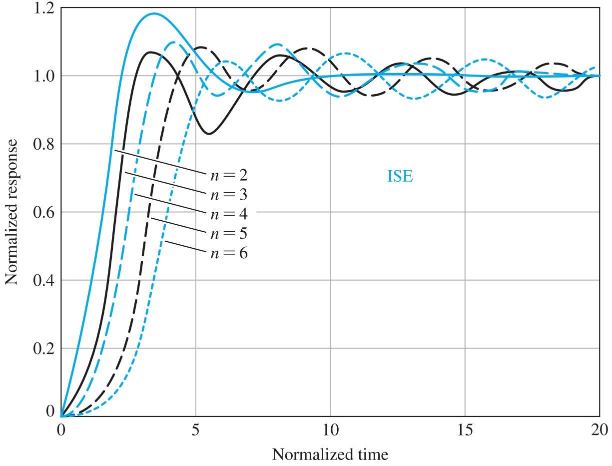
Respuesta Paso para Coeficientes Óptimos Basados en Criterio IAE



Respuesta Paso para Coeficientes Óptimos Basados en Criterio ITAE



Respuesta Paso para Coeficientes Óptimos Basados en Criterio ISE



1. Un sistema de control tiene la siguiente función de transferencia de lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{11.1(s+18)}{(s+20)(s^2+4s+10)}$$

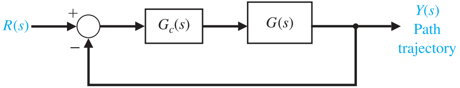
- Grafique los polos y ceros del sistema.
- Discuta la dominancia de los polos complejos conjugados.
- Qué porcentaje de sobrepico para entrada paso esperaría obtener?

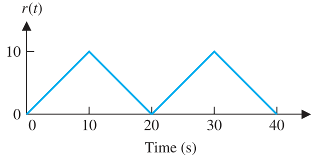
2. Un sistema de control de lazo cerrado con función de transferencia $T(s)$ tiene dos polo dominantes complejos conjugados. Realice un bosquejo de la región en el semiplano complejo izquierdo donde los polos deben ubicarse para satisfacer los requerimientos dados:
    - $0.6 \leq \zeta \leq 0.8$, $\omega_n \leq 10$.
    - $0.5 \leq \zeta \leq 0.707$, $\omega_n \geq 10$.
    - $\zeta \geq 0.5$, $5 \leq \omega_n \leq 10$.
    - $\zeta \leq 0.707$, $5 \leq \omega_n \leq 10$.
    - $\zeta \geq 0.6$, $\omega_n \leq 6$.

3. Un sistema de control tiene la función de transferencia $G_c(s)G(s)$:

$$G_c(s)G(s) = \frac{75(s+1)}{s(s+5)(s+25)}$$

El sistema sigue una referencia en forma de diente de sierra como se muestra en la figura.





- Determine el error de estado estacionario.
- Realice un bosquejo de la respuesta obtenida.

4. Se desea obtener un sistema de control de velocidad que garantice un error de estado estacionario igual a cero ante una entrada rampa. Un sistema de tercer orden es suficiente para lograr éste objetivo.
    - Determine la función de transferencia óptima $T(s)$ del sistema para un criterio ITAE.
    - Estime el tiempo de asentamiento (settling time) para un criterio de 2% y el porcentaje de sobrepico para una entrada paso cuando $\omega_n = 10$.