Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica

Control de Sistemas

Clase 2: Modelos de Sistemas Dinámicos

Gerardo Becerra, Ph.D.

gbecerra@javeriana.edu.co

Febrero 4, 2020

Modelos Matemáticos de Sistemas Dinámicos

Modelos Matemáticos de Sistemas

- Para entender y controlar sistemas se requiere obtener modelos cuantitativos.
- Modelos matemáticos:
  - Obtenidos a partir del análisis de relaciones entre variables del sistema.
  - Pueden asumir diferentes formas: ecuaciones diferenciales, funciones de transferencia, espacio de estados.
  - Pueden ser útiles en diferentes contextos: Espacio de estados en control óptimo, funciones de transferencia en analisis de respuesta en frecuencia.
  - Se usan en conjunto con herramientas analíticas o computacionales para análisis o síntesis.
  - Existe un compromiso entre simplicidad vs exactitud.
  - Clasificación: lineales vs no lineales, variantes vs invariantes en el tiempo.

Modelamiento de Sistemas - Procedimiento

1. Definir el sistema y sus componentes.
2. Formular las relaciones básicas entre variables y suposiciones usando los principios fundamentales.
3. Obtener las ecuaciones diferenciales que representan el modelo matemático.
4. Solucionar las ecuaciones para las variables deseadas.
5. Examinar las soluciones y las suposiciones.
6. En caso necesario, analizar o diseñar el modelo nuevamente.

Ecuaciones Diferenciales de Sistemas Físicos

- Describen el comportamiento dinámico de los sistemas.
- Se obtienen utilizando los principios físicos de los procesos.
- Se utilizan leyes de interconexión para definir la interacción entre elementos/subsistemas.
- Ecuaciones diferenciales lineales $\rightarrow$ funciones de transferencia.
- Ecuaciones diferenciales no lineales $\rightarrow$ linealización.

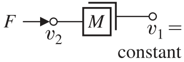
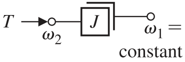
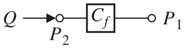
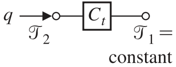
Variables y Parámetros:

- Variables pasantes: F (fuerza), T (torque), i (corriente), Q (flujo volumétrico), q (flujo de calor).
- Variables transversales: v (velocidad traslacional), ω (velocidad angular), V (voltaje), P (presión), $\mathcal{T}$ (temperatura).
- Almacenamiento inductivo: L (inductancia), $1/k$ (rigidez traslacional o rotacional inversa), I (inertancia).
- Almacenamiento capacitivo: C (capacitancia), M (masa), J (momento de inercia), C_f (capacitancia de fluido), C_t (capacitancia térmica).
- Disipación de energía: R (resistencia), b (fricción viscosa), R_f (resistencia de fluido), R_f (resistencia térmica).

Ecuaciones Diferenciales de Sistemas Físicos - Relaciones Fundamentales

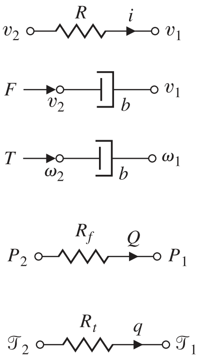
Type of Element	Physical Element	Governing Equation	Energy E or Power $\mathcal{P}$	Symbol
Inductive storage	Electrical inductance	$v_{21} = L\dfrac{di}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}Li^2$	
	Translational spring	$v_{21} = \dfrac{1}{k}\dfrac{dF}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}\dfrac{F^2}{k}$	
	Rotational spring	$\omega_{21} = \dfrac{1}{k}\dfrac{dT}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}\dfrac{T^2}{k}$	
	Fluid inertia	$P_{21} = I\dfrac{dQ}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}IQ^2$	

Ecuaciones Diferenciales de Sistemas Físicos - Relaciones Fundamentales

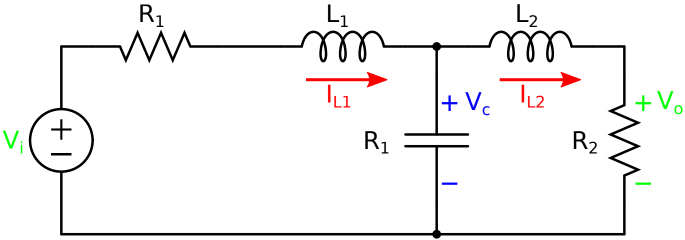
Type of Element	Physical Element	Governing Equation	Energy E or Power $\mathscr{P}$	Symbol
Capacitive storage	Electrical capacitance	$i = C\dfrac{dv_{21}}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}Cv_{21}^{2}$	
	Translational mass	$F = M\dfrac{dv_2}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}Mv_2^{2}$	
	Rotational mass	$T = J\dfrac{d\omega_2}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}J\omega_2^{2}$	
	Fluid capacitance	$Q = C_f\dfrac{dP_{21}}{dt}$	$E = \dfrac{1}{2}C_f P_{21}^{2}$	
	Thermal capacitance	$q = C_t\dfrac{d\mathscr{T}_2}{dt}$	$E = C_t\mathscr{T}_2$	

Ecuaciones Diferenciales de Sistemas Físicos - Relaciones Fundamentales

Type of Element	Physical Element	Governing Equation	Energy E or Power $\mathscr{P}$	Symbol
Energy dissipators	Electrical resistance	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$\mathscr{P} = \frac{1}{R} {v_{21}}^2$	
	Translational damper	$F = b v_{21}$	$\mathscr{P} = b {v_{21}}^2$	
	Rotational damper	$T = b \omega_{21}$	$\mathscr{P} = b {\omega_{21}}^2$	
	Fluid resistance	$Q = \frac{1}{R_f} P_{21}$	$\mathscr{P} = \frac{1}{R_f} {P_{21}}^2$	
	Thermal resistance	$q = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	$\mathscr{P} = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	



Modelos de Sistemas - Ejemplo 1



- Obtener las ecuaciones diferenciales que describen el sistema.
- Obtener la representación en variables de estado.
- Obtener la función de transferencia.

Ecuaciones diferenciales:

$$\frac{di_{L_1}(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L_1} i_{L_1}(t) - \frac{1}{L_1} v_C(t) + \frac{1}{L_1} v_i(t) \tag{1a}$$

$$\frac{di_{L_2}(t)}{dt} = -\frac{R_2}{L_2} i_{L_2}(t) + \frac{1}{L_2} v_C(t) \tag{1b}$$

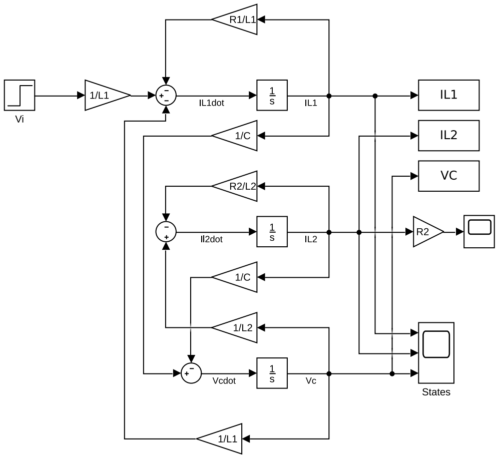
$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_{L_1}(t) - \frac{1}{C} i_{L_2}(t) \tag{1c}$$

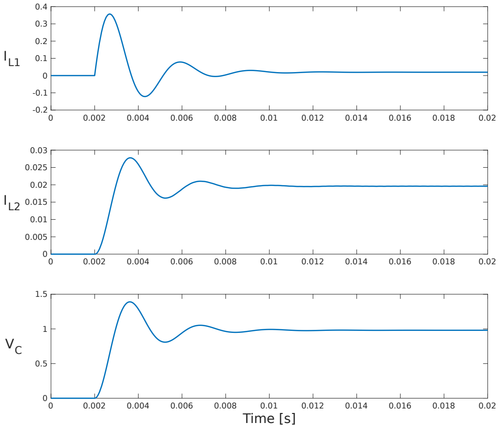
Ecuación de salida:

$$V_o(t) = R_2 i_{L_2}(t) \tag{1d}$$

Modelos de Sistemas - Ejemplo 1

Diagrama de bloques y respuesta paso:





Organizando las ecs. (1) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{L_1}(t)}{dt} \\ \frac{di_{L_2}(t)}{dt} \\ \frac{dv_C(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1}(t) \\ i_{L_2}(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_i(t) \tag{2a}$$

$$v_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L_1}(t) \\ i_{L_2}(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} v_i(t) \tag{2b}$$

se obtiene la **representación en variables de estado:**

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{3a}$$

$$y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t) \tag{3b}$$

$$\dot{x}(t) = \mathsf{A}x(t) + \mathsf{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathsf{C}x(t) + \mathsf{D}u(t)$$

Estado de un Sistema:

- Mínima cantidad de información que, junto con la entrada, determinan la respuesta del sistema.
- Resume la información pasada requerida para determinar el comportamiento futuro.
- Se definen en sistemas con almacenamiento de energía: no aplican para sistemas instantáneos.

Modelos de Sistemas - Ejemplo 1

Aplicando la transformada de Laplace a las Ecs. (1):

$$sI_{L_1}(s) = -\frac{R_1}{L_1}I_{L_1}(s) - \frac{1}{L_1}V_c(s) + \frac{1}{L_1}V_i(s) \tag{4a}$$

$$si_{L_2}(s) = -\frac{R_2}{L_2}I_{L_2}(s) + \frac{1}{L_2}V_c(s) \tag{4b}$$

$$sV_c(s) = \frac{1}{C}I_{L_1}(s) - \frac{1}{C}I_{L_2}(s) \tag{4c}$$

$$V_o(s) = R_2 I_{L_2}(s) \tag{4d}$$

- **Objetivo:** A partir de las Ecs. (4), obtener $V_o(s)/V_i(s)$.
- **Procedimiento:** Manipulación Algebráica.
- **Alternativa:** Usando la representación en variables de estado.

Modelos de Sistemas - Ejemplo 1

Usando la fórmula:

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{5}$$

se obtiene la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{2 \times 10^{11}}{s^3 + 5.1 \times 10^4 s^2 + 5.6 \times 10^7 s + 2.02 \times 10^{11}} \tag{6}$$

Tipos de Respuesta Transitoria

Tipos de Sistemas

- Sistemas de **primer orden**:

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

- Sistemas de **primer orden con tiempo muerto**:

$$H(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{\tau s + 1}$$

- Sistemas de **segundo orden**:

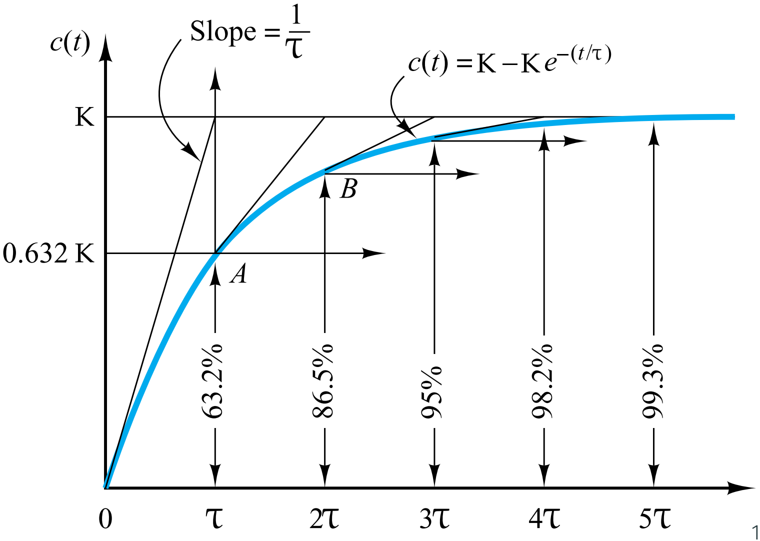
$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Sistemas de Primer Orden - Respuesta Paso

$$H(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

K: Ganancia

τ: Constante de tiempo



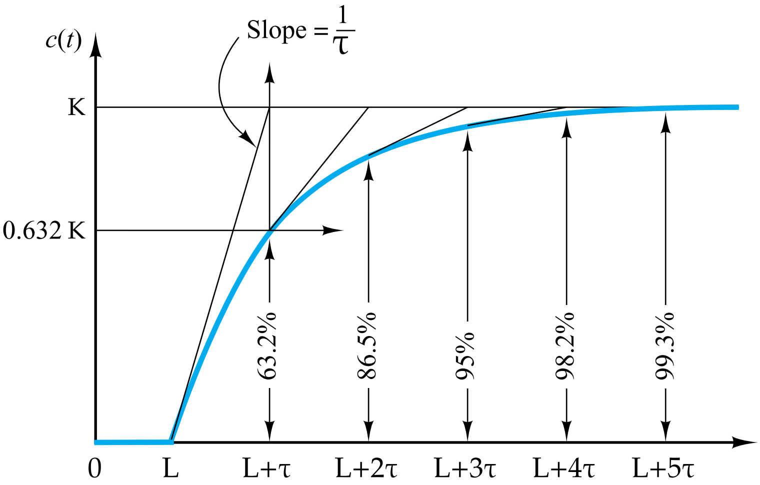
Sistemas de Primer Orden mas Tiempo Muerto - Respuesta Paso

$$H(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{\tau s + 1}$$

K: Ganancia

τ: Constante de tiempo

L: Tiempo muerto



Sistemas de Segundo Orden - Respuesta Paso

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

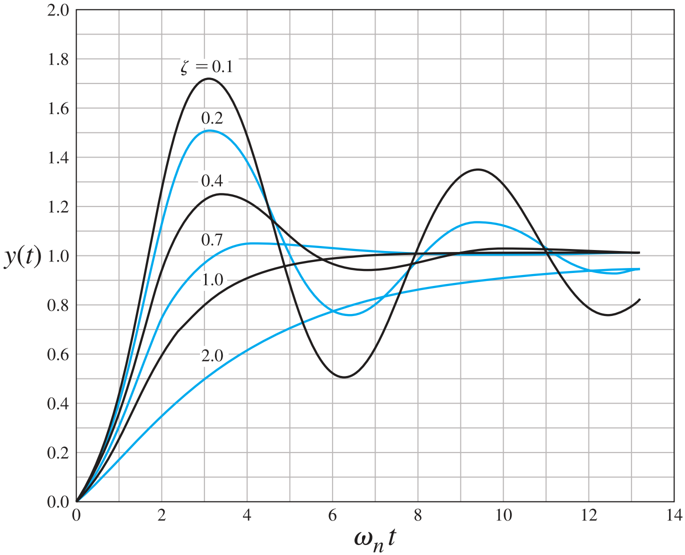
ω_n: Frecuencia natural

ζ: Factor de amortiguamiento

$\zeta < 1$: subamortiguado

$\zeta = 1$: críticamente amortiguado

$\zeta > 1$: sobreamortiguado



Respuesta Transitoria

La respuesta transitoria del sistema puede describirse en función de dos factores:

- La **rapidez de la respuesta**, la cual está representada por el **tiempo de subida** y el **tiempo pico**.
- La **proximidad de la respuesta al valor final**, representada por el **sobrepico** y el **tiempo de establecimiento**.

- **Tiempo de subida** (T_r): Tiempo que tarda la respuesta en ir del 10% al 90% del valor final.
- **Tiempo pico** (T_p): Tiempo en el cual la respuesta alcanza el valor máximo.
- **Sobrepico** (PO): Relación en porcentaje entre el valor máximo y el valor final.
- **Tiempo de establecimiento** (T_s): Tiempo que tarda la respuesta en mantenerse dentro de un 2% del valor final.

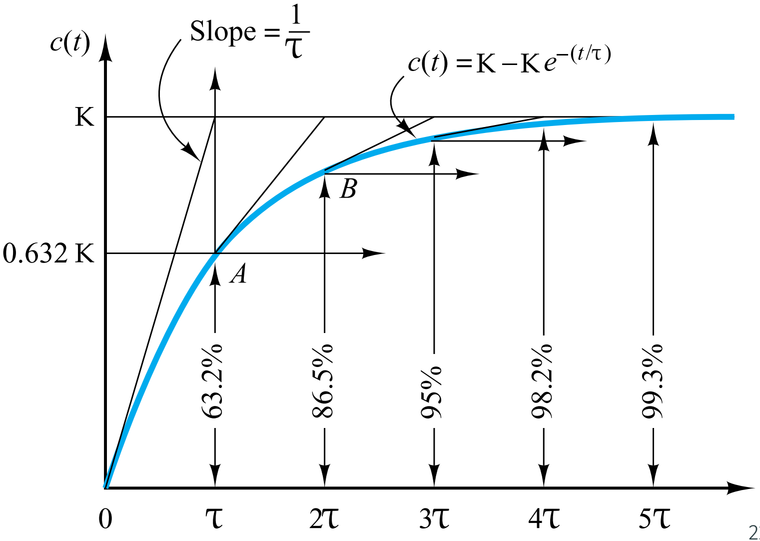
Respuesta Transitoria - Sistemas de Primer Orden

Tiempo de subida:

$$T_r = 2.2\tau$$

Tiempo de establecimiento:

$$T_s = 4\tau$$



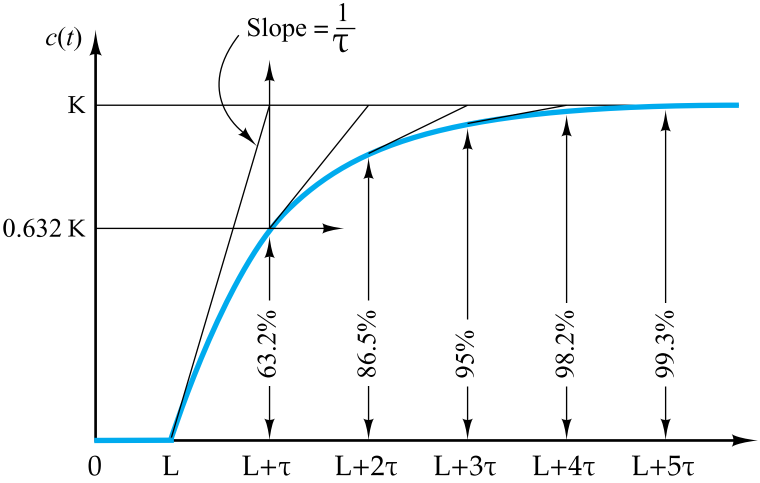
Respuesta Transitoria - Sistemas de Primer Orden mas Tiempo Muerto

Tiempo de subida:

$$T_r = 2.2\tau$$

Tiempo de establecimiento:

$$T_s = L + 4\tau$$



Respuesta Transitoria - Sistemas de Segundo Orden

Tiempo de establecimiento:

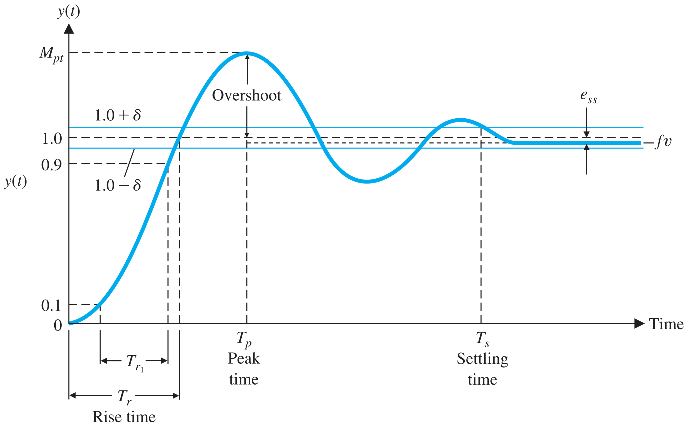
$$T_s = 4\tau = \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Tiempo de pico:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Sobrepico:

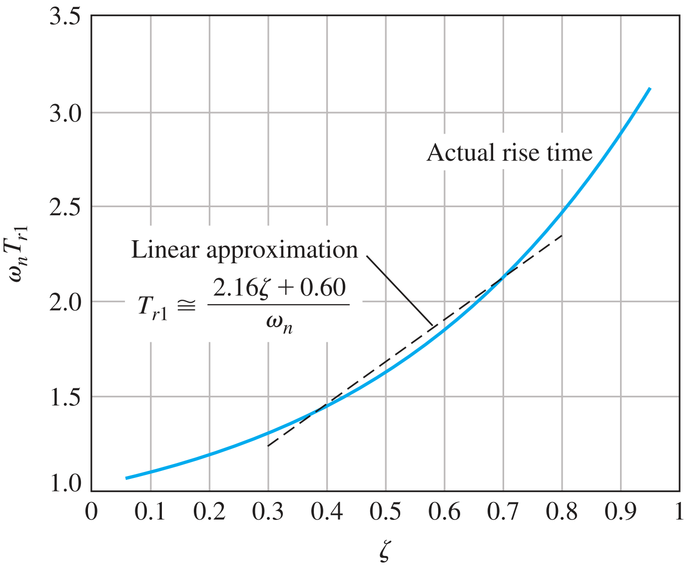
$$PO = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$



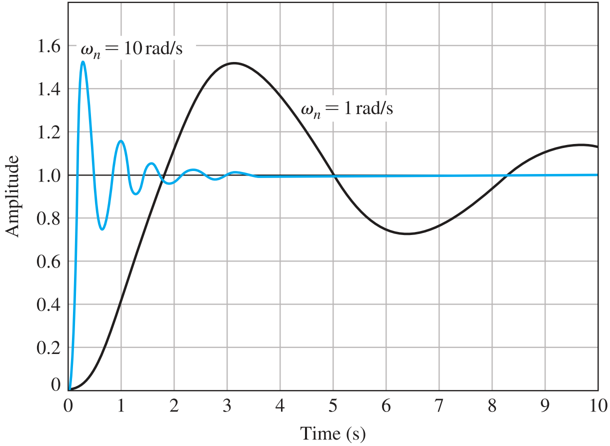
Tiempo de subida:

$$T_{r1} = \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n}$$

Aproximación lineal válida para $0.3 \leq \zeta \leq 0.8$.

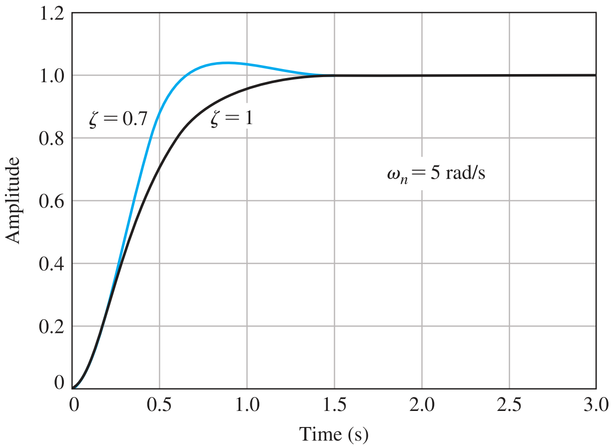


Respuesta Transitoria - Sistemas de Segundo Orden



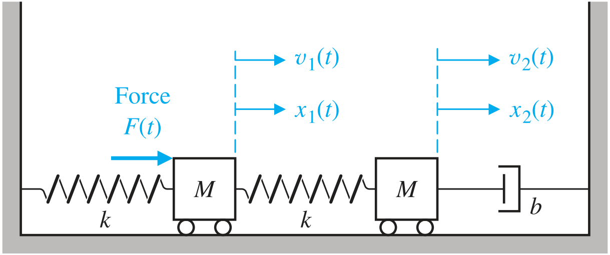
Respuesta paso para $\zeta = 0.2$ con $\omega_n = 1$ y $\omega_n = 10$.

Respuesta Transitoria - Sistemas de Segundo Orden



Respuesta paso para $\omega_n = 5$ con $\zeta = 0.7$ y $\zeta = 1$.

1. Para el sistema mostrado en la figura, considere como entrada la fuerza aplicada sobre la masa de la izquierda, y la salida como la distancia entre las dos masas. Obtenga las ecuaciones diferenciales que describen el sistema, la representación en el espacio de estados y la función de transferencia.



Taller

2. El control de inyecciones de insulina puede permitir mejorar la calidad de vida de pacientes diabéticos. La inyección automática de insulina usando una bomba y un sensor que mide los niveles de azucar en la sangre puede ser un tratamiento efectivo. La figura muestra el sistema de control correspondiente a éste proceso. Calcule un valor apropiado para K tal que $PO = 7\%$. Calcule T_s y T_p.