

Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ingeniería Departamento de Electrónica

Control de Sistemas

Clase 4: Estabilidad de Sistemas Retroalimentados

Gerardo Becerra, Ph.D.

gbecerra@javeriana.edu.co

Febrero 18, 2020

1

Introducción

- Estabilidad → muy importante para el diseño y análisis de sistemas retroalimentados.
- ullet Sistema de lazo cerrado inestable o en general no es muy útil.
- ullet Sistemas inestables o pueden hacerse estables usando retroalimentación.
- Sistemas estables → pueden mejorar su desempeño usando retroalimentación.
- Tipos de estabilidad:
 - Estabilidad externa: asociada con las entradas.
 - Estabilidad interna: asociada al estado interno.

• Sistema SISO (single input, single output), lineal e invariante en el tiempo, con respuesta impulso g(t):

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

- Se asume sistema causal y relajado en t = 0.
- Entrada u(t) acotada (bounded): no crece indefinidamente. Existe una constante u_m tal que $||u(t)|| \le u_m \le \infty$ para todo t >= 0.
- Estabilidad BIBO (bounded input bounded output): toda entrada acotada produce una salida acotada.

Theorem 1.

Un sistema es BIBO estable si y sólo si g(t) es absolutamente integrable en el intervalo $[0, \infty)$ para alguna constante M:

$$\int_0^\infty |g(t)|dt \le M \le \infty$$

Para sistemas definidos en términos de función de transferencia:

Theorem 2.

Un sistema con función de transferencia racional propia G(s) es BIBO estable si y sólo si todos los polos de G(s) tienen parte real negativa, o se encuentran en el lado izquierdo del semiplano complejo, sin incluir el eje imaginario.

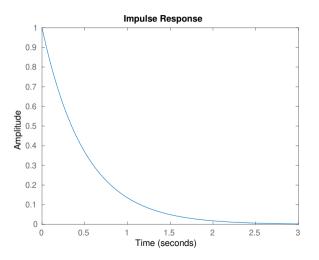
Considere el sistema dado por la ecuación diferencial $\ddot{y} + \dot{y} - 2y = \dot{u} - u$. Verifique si el sistema es BIBO estable.

Aplicando la transformada de Laplace, se obtiene la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{s^2 + s - 2}$$

Usando Matlab para graficar la respuesta impulso:

Continuous-time transfer function.



Teorema 1: g(t) absolutamente integrable \Rightarrow BIBO estable.

Calculando los polos de la función de transferencia:

```
>> pole(G)
```

ans =

-2

1

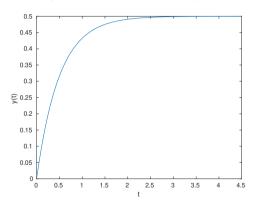
No todos los polos tienen parte real negativa! Cuál es el problema?

Cancelación polo - cero

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{(s+2)(s-1)} = \frac{1}{s+2}$$

Entonces, el sistema satisface las condiciones del teorema $2 \Rightarrow$ es BIBO estable.

Aplicando una entrada paso:



Respuesta acotada ante una entrada acotada.

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

- A. Hurwitz [1895] y E. J. Routh [1892]: método para investigar la estabilidad de un sistema lineal.
- Provee una respuesta a la pregunta por la estabilidad considerando el polinomio característico del sistema:

$$q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

sin necesidad de calcular las raíces.

- Recientemente no es tan usado gracias a los métodos numéricos para calcular las raíces.
- Factorizando q(s) se obtiene:

$$a_n(s-r_1)(s-r_1)...(s-r_n)=0$$

donde r_i corresponde a la i-esima raíz de q(s).

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

• Multiplicando los factores se obtiene:

$$q(s) = a_n s^n - a_n (r_1 + r_2 + \dots + r_n) s^{n-1} + a_n (r_1 r_2 + r_2 r_3 + \dots) s^{n-2}$$

$$- a_n (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots) s^{n-3} + \dots - a_n (-1)^n (r_1 r_2 r_3 \dots r_n) = 0$$

• Entonces se obtiene la forma general:

$$q(s) = a_n s^n - a_n$$
 (suma de todas las raíces) s^{n-1}
+ a_n (suma de productos de combinaciones de 2 raíces) s^{n-2}
- a_n (suma de productos de combinaciones de 3 raíces) $s^{n-3} + \dots$
- $a_n(-1)^n$ (productos de todas las raíces) = 0

 Si las raíces están en el semiplano izquierdo, los coeficientes tienen el mismo signo y son diferentes a cero (condición necesaria pero no suficiente).

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

- Criterio de Routh-Hurwitz: condición necesaria y suficiente para estabilidad de sistemas lineales.
- A partir del polinomio característico $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$, se define el arreglo de Routh como:

• Número de raíces de *q*(*s*) con parte real positiva = número de cambios de signo en la primera columna del arreglo de Routh.

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz - Caso 1

Caso 1: Ningún elemento de la primera columna es cero.

- Polinomio característico: $q(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$.
- Arreglo de Routh:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^2 & a_2 & a_0 \\
s^1 & a_1 & 0 \\
s^0 & b_1 & 0
\end{array}$$

$$b_1 = \frac{-1}{a_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0$$

• Entonces, el sistema es estable si todos los coeficientes son positivos o todos son negativos.

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz - Caso 2

Caso 2: Existe un cero en la primera columna, pero otros elementos de esa fila son diferentes a cero.

- Polinomio característico: $q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10 = 0$.
- Arreglo de Routh:

$$\begin{vmatrix}
s^{5} & 1 & 2 & 11 \\
s^{4} & 2 & 4 & 10 \\
s^{3} & \epsilon & 6 & 0 \\
s^{2} & c_{1} & 10 & 0 \\
s^{1} & d_{1} & 0 & 0 \\
s^{0} & 10 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

$$c_{1} = \frac{4\epsilon - 12}{\epsilon}$$

$$d_{1} = \frac{6c_{1} - 10\epsilon}{c_{1}}$$

- Cuando $\epsilon \to 0^+$, se obtiene $c_1 < 0$ y $d_1 > 0$.
- Entonces, hay dos cambios de signo en la primera columna.
- Por lo tanto, el sistema es inestable con dos raíces en el semiplano derecho.

Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz - Caso 3

Caso 3: Todos los coeficientes en una fila son cero.

- Polinomio característico: $q(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 25s 50 = 0$.
- Arreglo de Routh:

 Se forma el polinomio auxiliar usando la fila anterior:

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50.$$

• La fila se reemplaza por los coeficientes de $dP(s)/ds = 8s^3 + 96s$: 1 24 -25 5^4 2 48 -50 8 96 24 -50 112.7 0 -50

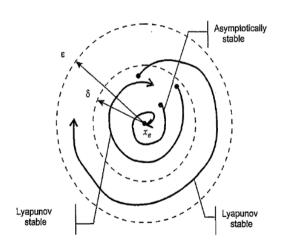
 Hay un cambio de signo → una raíz con parte real positiva → sistema inestable.

- Se estudia para el caso de respuesta a entrada cero: $\dot{x}(t) = Ax(t)$
- Se desea conocer si el sistema es internamente estable para una condición inicial x_0 .
- Para el siguiente sistema, qué podría decirse sobre la estabilidad en cada caso?



Se presentan dos criterios de estabilidad:

- Estable en el sentido de Lyapunov: toda condición inicial limitada genera una respuesta limitada del estado.
- Asintóticamente estable: toda condición inicial limitada genera una respuesta del estado limitada que tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito.



Theorem 3.

- El sistema es asintóticamente estable si y sólo si todos los valores propios de A tienen parte real negativa.
- El sistema es marginalmente estable si y sólo si todos los valores propios de A tienen parte real cero o negativa, y aquellos con parte real cero son raices simples del polinomio característico de A.

Estabilidad Interna - Ejemplo

El sistema definido por la ecuación diferencial $\ddot{y} + \dot{y} - 2y = \dot{u} - u$ puede escribirse en variables de estado como:

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_{1} \\ \dot{x}_{2} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_{1} \\ \dot{x}_{2} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1} \\ x_{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_{1} \\ \dot{x}_{2} \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

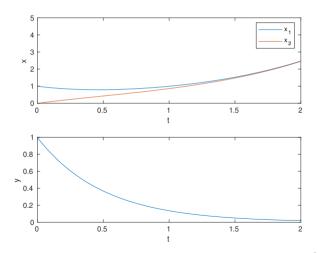
$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

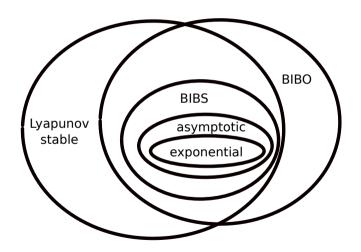
Teorema $3 \rightarrow$ internamente inestable!

Estabilidad Interna - Ejemplo

Estados inestables, pero salida estable!

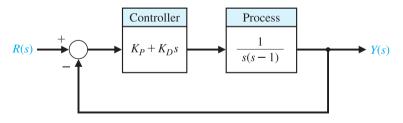


Relación entre los Diferentes Tipos de Estabilidad



Taller

- 1. El sistema mostrado en la figura representa un proceso que controlador por un controlador proporcional-derivativo (PD).
 - Usando el criterio de Routh-Hurwitz, determine el rango de K_P y K_D para garantizar estabilidad del sistema en lazo cerrado.
 - Asigne valores a K_P y K_D dentro del rango encontrado. Verifique para éste caso las propiedades de estabilidad interna y externa usando los teoremas 2 y 3.



2. Considere el sistema representado en variables de estado con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -k & -k \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

- Encuentre la función de transferencia del sistema.
- Para qué valores de *k* el sistema es estable?

Taller

3. Considere la ecuación característica:

$$s^4 + 2s^3 + (4 + K)s^2 + 9s + 25 = 0$$

Usando el criterio de Routh-Hurwitz, determine el rango de *K* para estabilidad.