



Pontificia Universidad  
**JAVERIANA**  
Colombia

# Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica

## Control de Sistemas

Clase 8: Diseño de Compensadores por LGR - Aproximación de Polos Dominantes

Gerardo Becerra, Ph.D.

[gbecerra@javeriana.edu.co](mailto:gbecerra@javeriana.edu.co)

Marzo 24, 2020

# Introducción

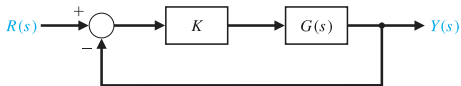
---

- Estabilidad y desempeño de un sistema de control retroalimentado  $\rightarrow$  dependen de la ubicación de los polos de lazo cerrado en el plano complejo.
- Es interesante determinar cómo se mueven las raíces del polinomio característico a medida que se modifican ciertos parámetros  $\rightarrow$  lugar de las raíces.
- Método de lugar de las raíces: método gráfico para hacer un bosquejo del lugar de las raíces.
- Información gráfica  $\rightarrow$  información cualitativa de la estabilidad y desempeño del sistema.
- Es posible usar el lugar de las raíces para diseñar controladores.

# Método del Lugar de las Raíces

---

# Método del Lugar de las Raíces



- El comportamiento dinámico del sistema de control se describe por la función de transferencia

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{p(s)}{q(s)}$$

- El polinomio característico para el sistema de control de la figura es:

$$1 + KG(s) = 0, \quad 0 \leq K < \infty$$

- La ecuación se puede reescribir en forma polar como

$$|KG(s)| \angle KG(s) = -1 + j0$$

- Por lo tanto se debe cumplir

$$|KG(s)| = 1$$

$$\angle KG(s) = 180^\circ + k360^\circ$$

# Método del Lugar de las Raíces

- El LGR debe satisfacer la condición de magnitud:

$$|KG(s)| = \frac{K|s + z_1||s + z_2| \dots |s + z_M|}{|s + p_1||s + p_2| \dots |s + p_n|} = 1$$

y la condición de ángulo:

$$\angle G(s) = \sum_{i=1}^M \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = 180^\circ + k360^\circ$$

El lugar de las raíces corresponde a las trayectorias seguidas por las raíces de la ecuación característica a medida que un parámetro del sistema varía desde cero hasta infinito.

## Lugar de las Raíces - Procedimiento

---

## Paso 1: Preparar el diagrama

- Escribir la ecuación característica para que el parámetro de interés  $K$  aparezca como un factor multiplicativo

$$1 + KG(s) = 0$$

- Factorizar  $G(s)$  y escribir el polinomio en la forma de polos y ceros:

$$1 + K \frac{\prod_{i=1}^M (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \quad (1)$$

- Localice los ceros  $-z_i$  y polos  $-p_j$  en el plano complejo usando los símbolos  $\times$  y  $\bigcirc$ , respectivamente.
- Reescribiendo la Eq.(1) se tiene:

$$\prod_{j=1}^n (s + p_j) + K \prod_{i=1}^M (s + z_i) = 0$$
$$\frac{1}{K} \prod_{j=1}^n (s + p_j) + \prod_{i=1}^M (s + z_i) = 0$$

Si  $K = 0 \Rightarrow$  las raíces del polinomio característico son los polos de  $G(s)$ .  
Si  $K \rightarrow \infty \Rightarrow$  las raíces del polinomio característico son los ceros de  $G(s)$ .



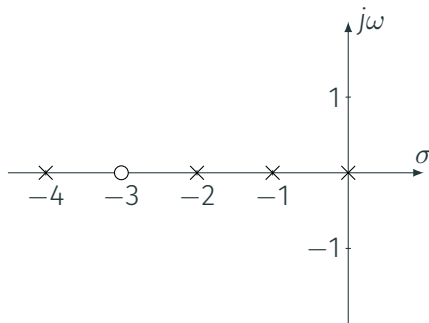
## Paso 1: Preparar el diagrama

---

El lugar de las raíces de la ecuación característica  $1 + KG(s) = 0$  inicia en los polos de  $G(s)$  y termina en los ceros de  $G(s)$  a medida que  $K$  se incrementa desde cero hasta infinito.

## Paso 1 - Ejemplo

$$G(s) = \frac{(s + 3)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 4)}$$



Ubicación de polos y ceros del sistema  
en lazo abierto.

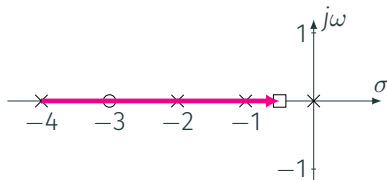
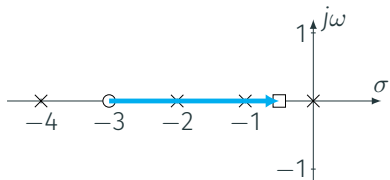
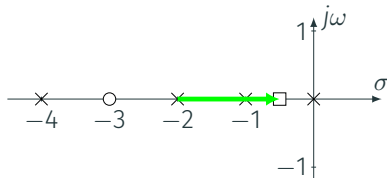
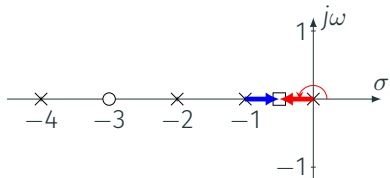
## Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real

---

Usando la condición de ángulo es posible determinar los segmentos del eje real que hacen parte del lugar de las raíces.

## Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real - Ejemplo

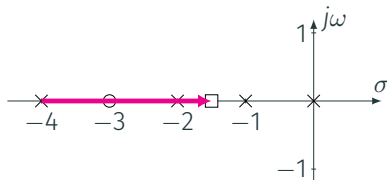
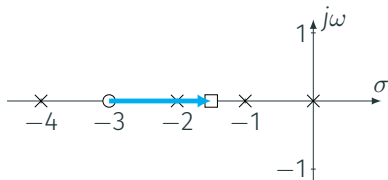
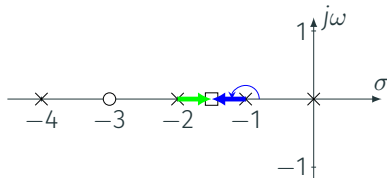
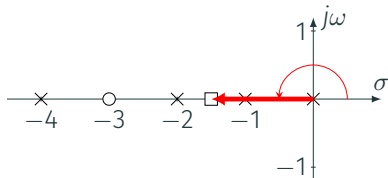
Condición de ángulo en el intervalo  $[-1, 0]$



$$\begin{aligned} & \angle(s+3) - (\angle(s) + \angle(s+1) + \angle(s+2) + \angle(s+4)) \\ &= 0^\circ - (180^\circ + 0^\circ + 0^\circ + 0^\circ) = -180^\circ \Rightarrow \text{El segmento si pertenece al LGR.} \end{aligned}$$

## Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real - Ejemplo

Condición de ángulo en el intervalo  $[-2, -1]$

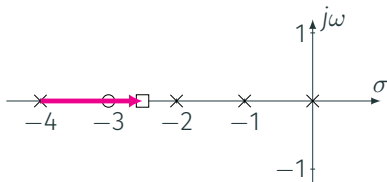
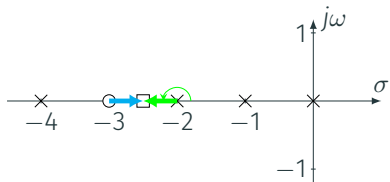
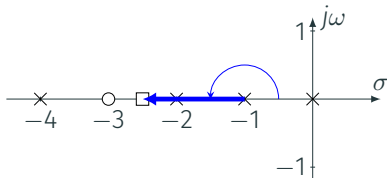
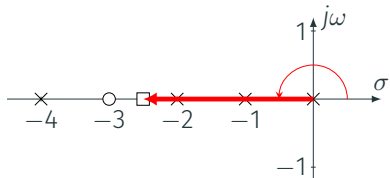


$$\angle(s + 3) - (\angle(s) + \angle(s + 1) + \angle(s + 2) + \angle(s + 4))$$

$$= 0^\circ - (180^\circ + 180^\circ + 0^\circ + 0^\circ) = -360^\circ \neq 180 \Rightarrow \text{El segmento no pertenece al LGR.}$$

## Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real - Ejemplo

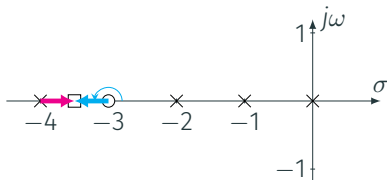
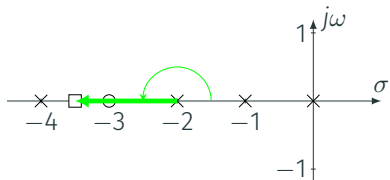
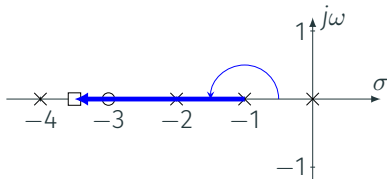
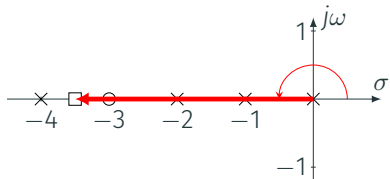
Condición de ángulo en el intervalo  $[-3, -2]$



$$\begin{aligned} & \angle(s+3) - (\angle(s) + \angle(s+1) + \angle(s+2) + \angle(s+4)) \\ &= 0^\circ - (180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 0^\circ) = -180 \Rightarrow \text{El segmento si pertenece al LGR.} \end{aligned}$$

## Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real - Ejemplo

Condición de ángulo en el intervalo  $[-4, -3]$

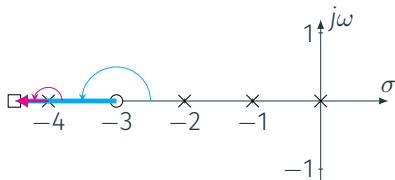
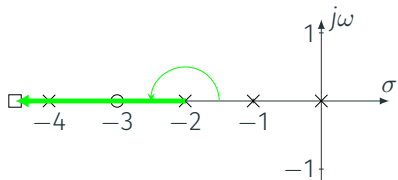
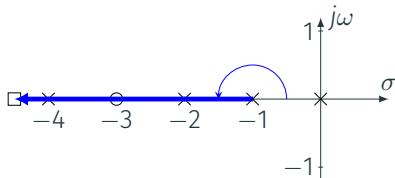
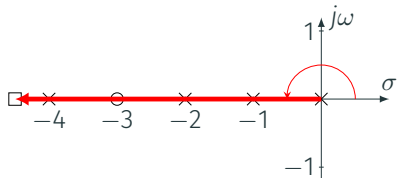


$$\angle(s + 3) - (\angle(s) + \angle(s + 1) + \angle(s + 2) + \angle(s + 4))$$

$$= 180^\circ - (180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 0^\circ) = -360^\circ \neq 180^\circ \Rightarrow \text{El segmento no pertenece al LGR.}$$

## Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real - Ejemplo

Condición de ángulo en el intervalo  $(-\infty, -4]$

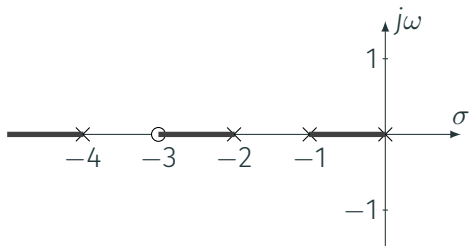


$$\begin{aligned} & \angle(s+3) - (\angle(s) + \angle(s+1) + \angle(s+2) + \angle(s+4)) \\ &= 180^\circ - (180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ) = -540^\circ \Rightarrow \text{El segmento si pertenece al LGR.} \end{aligned}$$



## Paso 2: Localizar segmentos del LGR en el eje real - Ejemplo

Los segmentos que pertenecen al LGR son:



### Segmentos del LGR en el eje real

Los segmentos del eje real que pertenecen al lugar de las raíces son aquellos que se encuentran a la izquierda de un número impar de polos y ceros.

### Paso 3: Identificar asíntotas

- Cuando el número de ceros finitos  $M$  de  $G(s)$  es menor que el número de polos  $n$ , entonces  $N = n - M$  secciones del lugar de las raíces deben finalizar en ceros ubicados en el infinito.
- Éstas secciones se dirigen hacia los ceros en infinito a través de asíntotas, mientras  $K \rightarrow \infty$ .
- Las asíntotas cortan al eje horizontal en el punto  $\sigma_A$  definido como:

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{polos de } G(s) - \sum \text{ceros de } G(s)}{n - M} = \frac{\sum_{j=1}^n (-p_j) - \sum_{i=1}^M (-z_i)}{n - M}$$

- El ángulo de las asíntotas respecto al eje real es:

$$\phi_{A_k} = \frac{2k + 1}{n - M} 180^\circ, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n - M - 1)$$

### Paso 3: Identificar asíntotas - Ejemplo

$$G(s) = \frac{s + 3}{s(s + 1)(s + 2)(s + 4)}$$

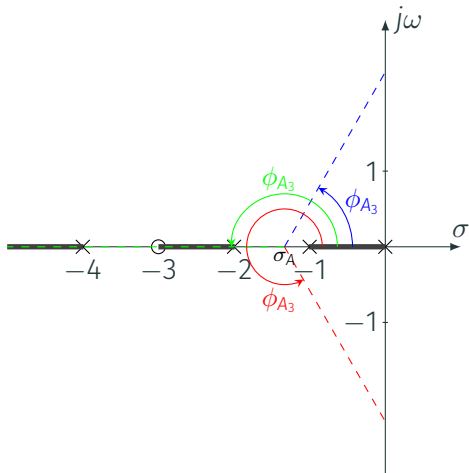
- Número de asíntotas:  $N = n - M = 4 - 1 = 3$ .
- Corte con el eje horizontal:

$$\sigma_A = \frac{\sum_{j=1}^n (-p_j) - \sum_{i=1}^M (-z_i)}{n - M} = \frac{(-1 - 2 - 4) - (-3)}{3} = -\frac{4}{3} = -1.3333$$

- Ángulos de las asíntotas:

$$\phi_{A_1} = \frac{1}{3}180^\circ = 60^\circ, \quad \phi_{A_2} = \frac{3}{3}180^\circ = 180^\circ, \quad \phi_{A_3} = \frac{5}{3}180^\circ = 300^\circ$$

### Paso 3: Identificar asíntotas - Ejemplo



## Paso 4: Determinar los puntos de ruptura

- Ocurren cuando el cambio neto de ángulo ante un pequeño desplazamiento es cero.
- El lugar de las raíces se separa en el lugar donde hay multiplicidad de raíces (típicamente 2).
- Para determinarlo analíticamente se parte del polinomio característico  $1 + KG(s) = 0$ . La ecuación se puede reescribir como  $K = -1/G(s)$ . Se calcula la derivada respecto a  $s$  y se iguala a cero:

$$\frac{dK}{ds} = 0$$

Finalmente, se calculan las raíces del polinomio resultante.

## Paso 4: Determinar los puntos de ruptura - Ejemplo

$$G(s) = \frac{(s + 3)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 4)}$$

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{G(s)} \\ &= -\frac{s(s + 1)(s + 2)(s + 4)}{(s + 3)} \\ &= -\frac{s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 8s}{s + 3} \end{aligned}$$

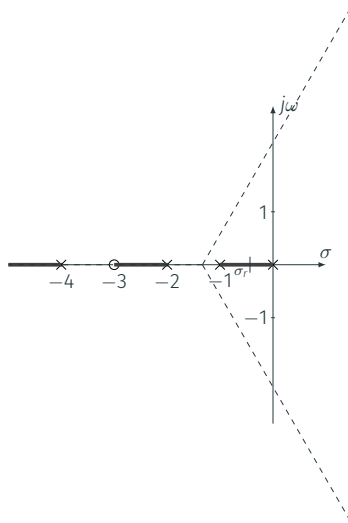
$$\frac{dK}{ds} = 0 = -\frac{3s^4 + 26s^3 + 77s^2 + 84s + 24}{(s + 3)^2}$$

$$0 = 3s^4 + 26s^3 + 77s^2 + 84s + 24$$

$$s = \{-3.311 \pm j0.6812, -1.6097, -0.4349\}$$

La única raíz que se encuentra dentro del lugar de las raíces es  $\sigma_r = -0.4349$ .

## Paso 4: Determinar los puntos de ruptura - Ejemplo



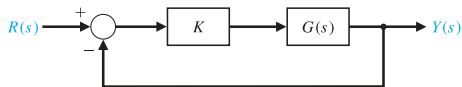
## Paso 5: Determinar el cruce por el eje imaginario

---

- Se encuentra utilizando el criterio de Routh-Hurwitz.
- Se calcula la ganancia crítica  $K_{cr}$  para llevar las raíces hasta el eje imaginario.
- Se reemplaza la ganancia crítica  $K_{cr}$  en el polinomio característico  $1 + KG(s) = 0$  y se calculan las raíces.
- Se seleccionan las raíces complejas conjugadas (si existen) que tienen parte real igual a cero.



## Paso 5: Determinar el cruce por el eje imaginario - Ejemplo



- Polinomio característico:

$$s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 8s + K(s + 3) = 0$$

- Arreglo de Routh:

$s^4$	1	14	$3K$
$s^3$	7	$8 + K$	0
$s^2$	$b_1$	$3K$	0
$s^1$	$c_1$	0	0
$s^0$	$3K$	0	

- Condiciones de estabilidad:

$$b_1 = \frac{90 - K}{7} > 0 \Rightarrow K < 90$$

$$c_1 = \frac{-K^2 - 65K + 720}{b_1} > 0 \Rightarrow K_1 < 74.64 \text{ \&}$$

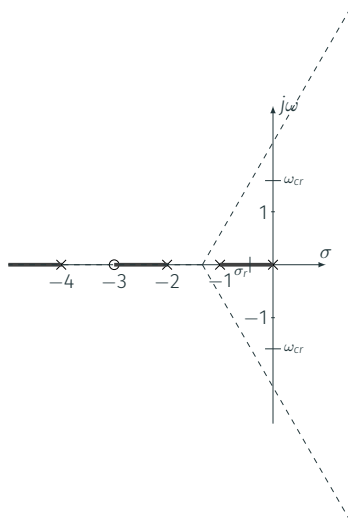
$$K_2 < 9.65 \Rightarrow K < 9.65$$

- Ganancia crítica:  $K_{cr} = 9.65$

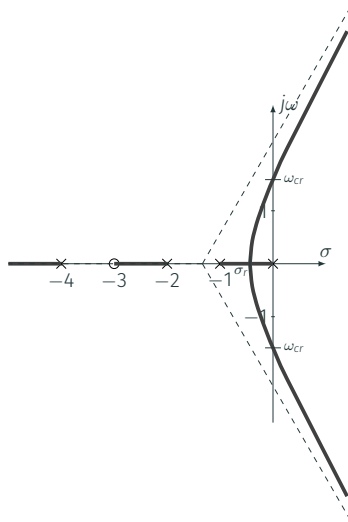
- Reemplazando  $K_{cr}$ :

$$s^4 + 7s^3 + 14s^2 + 17.65s + 28.95 = 0$$
$$\Rightarrow \omega_{cr} = \pm 1.588$$

## Paso 5: Determinar el cruce por el eje imaginario - Ejemplo



## Paso 6: Finalizar el bosquejo del diagrama - Ejemplo



## Diseño de Compensadores por LGR - Aproximación de Polos Dominantes

---

## Diseño de Compensadores por LGR - Aproximación de Polos Dominantes

---

- En el LGR, los polos de lazo cerrado se mueven hacia los ceros de lazo abierto a medida que la ganancia  $K$  aumenta.
- Lo anterior puede usarse para fijar los polos dominantes deseados del sistema.
- El procedimiento puede usarse para diseñar un controlador PID que aproxime los polos dominantes deseados.

## Diseño de Compensadores por LGR - Aproximación de Polos Dominantes

Considere la función de transferencia del controlador PID:

$$G_c(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}$$

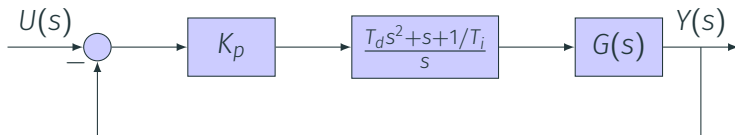
Reescribiendo el controlador en la forma ideal, donde  $K_d = K_p T_d$ ,  $K_i = K_p/T_i$ :

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left[ 1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right] = K_p \left[ \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s} \right] \\ &= \frac{K_p T_i T_d}{s} \left[ \frac{s^2 + s/T_d + 1/T_i T_d}{T_i} \right] \end{aligned}$$

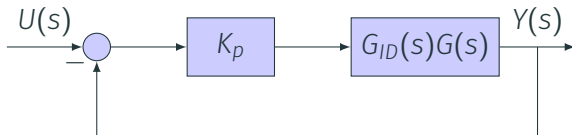
$$\begin{aligned} G_c(s) &= \frac{K_p T_d}{s} \left[ s^2 + \frac{s}{T_d} + \frac{1}{T_i T_d} \right] \\ &= \frac{K_p T_d}{s} h(s) \end{aligned} \tag{2}$$

# Diseño de Compensadores por LGR - Aproximación de Polos Dominantes

- El diagrama de bloques del sistema se puede organizar como:



- Combinando el bloque que depende de  $T_i, T_d$  con la planta:



- Usando  $T_i, T_d$  es posible fijar los ceros de lazo abierto del sistema  $G_{ID}(s)G(s)$ .
- Usando  $K_p$ , es posible ubicar los polos de lazo cerrado cerca de los ceros de lazo abierto, aproximando el desempeño deseado.

## Procedimiento de Diseño

1. A partir de los requerimientos de desempeño, encontrar un polinomio deseado  $q_{des}(s)$  para el sistema en lazo cerrado. Calcular la ubicación de los polos de dicho polinomio.
2. Comparar el polinomio deseado con el polinomio  $h(s)$  en la Ec.(2). Resolver el sistema de ecuaciones para hallar  $T_i, T_d$ .
3. Sustituir los valores  $T_i, T_d$  en  $G_{ID}(s)$ . Dibujar el lugar de las raíces para el sistema  $G_{ID}(s)G(s)$ .
4. Encontrar una ganancia  $K_p$  tal que los polos de lazo cerrado se aproximen a los ceros de lazo abierto.
5. Reemplazar  $K_p, T_i, T_d$  en  $G_c(s)$ . Simular el sistema y verificar el desempeño.



## Diseño de Compensadores por LGR - Ejemplo

Considere el sistema:

$$G(s) = \frac{0.8}{(30s + 1)(13s + 1)(3s + 1)}$$

Se desea un controlador PID sintonizado usando el LGR tal que tenga un sobrepico  $PO \leq 15\%$  y tiempo de establecimiento  $T_s = 100$  s con  $e_{ss} = 0$ .

## Diseño de Compensadores por LGR - Ejemplo

Con el sobrepico se calcula el valor de  $\zeta$ :

$$e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.15 \Rightarrow \zeta = 0.5165$$

Con el tiempo de estabilización  $T_s$  y el valor de  $\zeta$  encontrado, se obtiene el valor de  $\omega_n$ :

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \omega_n = 0.0774$$

Entonces, el polinomio deseado es:

$$q_{des} = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 0.08s + 0.006$$

## Diseño de Compensadores por LGR - Ejemplo

Se compara el polinomio deseado con el polinomio que define los ceros del controlador PID:

$$h(s) = s^2 + \frac{s}{T_d} + \frac{1}{T_i T_d}$$

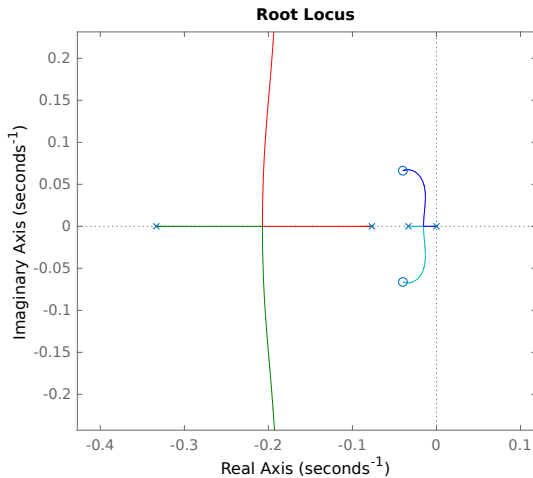
Entonces, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{T_d} = 0.080, \quad \frac{1}{T_i T_d} = 0.0059$$

$$T_i = 13.3608, T_d = 12.50$$

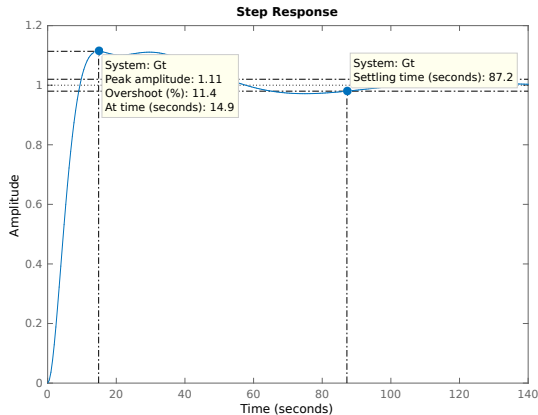
## Diseño de Compensadores por LGR - Ejemplo

- Usando la función `rlocus` de Matlab, se obtiene el lugar de las raíces.
- Note que los dos polos reales ubicados en  $s = 0$  y  $s = 0.0333$  colisionan y se convierten en un par de polos complejos conjugados que tienden hacia los ceros ubicados en  $-0.04 \pm j0.0662$  a medida que  $K_p \rightarrow \infty$ .



## Diseño de Compensadores por LGR - Ejemplo

- Ahora hay que encontrar una ganancia  $K_p$  para aproximar la ubicación de los polos dominantes deseados. Para hacerlo se puede usar la herramienta **rltool**.
- Ajustando la ganancia en la herramienta **rltool** se encuentra que con  $K_p = 131.01$ , los polos dominantes resultantes se encuentran ubicados en  $s = -0.0296 \pm j0.0667$ .
- Con ésta ubicación se obtiene la siguiente respuesta paso:



Si se satisfacen los requerimientos!

1. Considere la función de transferencia de lazo abierto

$$KG(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+4s+5)}$$

- Realice un bosquejo del lugar de las raíces. Verifique el resultado usando `rlocus`.
- Calcule la ubicación de los polos dominantes cuando  $K = 6.5$ .
- Para los polos dominantes encontrados, calcule el tiempo de establecimiento y el sobrepico para una entrada paso. Verifique los resultados con una simulación.

2. Un sistema de control tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$KG(s) = \frac{K(s + 2.5)}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 4s + 5)}$$

- Realice un bosquejo del lugar de las raíces. Verifique el resultado usando `rlocus`.
- Encuentre la ganancia  $K$  que resulta en polos dominantes con un factor de amortiguamiento de 0.707.
- Encuentre el porcentaje de sobrepico y tiempo de pico para la ganancia  $K$  calculada. Verifique el resultado usando una simulación.

3. Un sistema de control tiene la siguiente función de transferencia de lazo abierto:

$$KG(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s+4)}$$

- Determine el rango de estabilidad de  $K$ .
- Realice un bosquejo del lugar de las raíces. Verifique el resultado usando `rlocus`.
- Determine el máximo valor de  $\zeta$  de las raíces complejas estables.



4. Considere la planta caracterizada por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{(s + 3)}{(s - 1)(s + 2)(s + 5)}$$

Se desea diseñar un sistema de control que cumpla con las siguientes especificaciones ante una entrada paso unitaria:

- Porcentaje de sobrebico: 10%.
- Tiempo de establecimiento: 10 s.
- Error de estado estacionario: 0.

Diseñe un controlador PID usando el lugar de las raíces por el método de aproximación de polos dominantes. Verifique el resultado usando simulaciones.