Control de Sistemas

Clase 11: Control y Observación de Sistemas en Variables de Estados

Gerardo Becerra, Ph.D.
gbecerra@javeriana.edu.co

Agenda

Modelos de Sistemas en Variables de Estados

Controlabilidad - Observabilidad

Control por Retroalimentación de Estados

Observadores de Estados

Control por Retroalimentación y Observación de Estados

Seguimiento de Referencias

Compensador con Seguimiento de Referencia

Conclusión

Introducción

- Diseño de sistemas de control usando variables de estado.

Introducción

- Diseño de sistemas de control usando variables de estado.
- El sistema es controlado usando la señal de control $u(t)$, que es una función de las variables de estado medibles.

Introducción

- Diseño de sistemas de control usando variables de estado.
- El sistema es controlado usando la señal de control $u(t)$, que es una función de las variables de estado medibles.
- No siempre es posible medir directamente todas las variables de estado de un sistema. $\rightarrow$ Observadores de estados.

Introducción

- Diseño de sistemas de control usando variables de estado.
- El sistema es controlado usando la señal de control $u(t)$, que es una función de las variables de estado medibles.
- No siempre es posible medir directamente todas las variables de estado de un sistema. $\rightarrow$ Observadores de estados.
- Ubicación de polos del sistema de lazo cerrado en lugares donde se satisfacen los requerimientos de desempeño.

Introducción

- Diseño de sistemas de control usando variables de estado.
- El sistema es controlado usando la señal de control $u(t)$, que es una función de las variables de estado medibles.
- No siempre es posible medir directamente todas las variables de estado de un sistema. $\rightarrow$ Observadores de estados.
- Ubicación de polos del sistema de lazo cerrado en lugares donde se satisfacen los requerimientos de desempeño.
- Proceso de Diseño:

Introducción

- Diseño de sistemas de control usando variables de estado.
- El sistema es controlado usando la señal de control $u(t)$, que es una función de las variables de estado medibles.
- No siempre es posible medir directamente todas las variables de estado de un sistema. $\rightarrow$ Observadores de estados.
- Ubicación de polos del sistema de lazo cerrado en lugares donde se satisfacen los requerimientos de desempeño.
- Proceso de Diseño:
  - Asumiendo que todas las variables de estado son medibles diseñar una ley de control de retroalimentación de estados completos.

Introducción

- Diseño de sistemas de control usando variables de estado.
- El sistema es controlado usando la señal de control $u(t)$, que es una función de las variables de estado medibles.
- No siempre es posible medir directamente todas las variables de estado de un sistema. $\rightarrow$ Observadores de estados.
- Ubicación de polos del sistema de lazo cerrado en lugares donde se satisfacen los requerimientos de desempeño.
- Proceso de Diseño:
    - Asumiendo que todas las variables de estado son medibles diseñar una ley de control de retroalimentación de estados completos.
    - Construir un observador de estados para estimar los estados que no son directamente medibles.

Introducción

- Diseño de sistemas de control usando variables de estado.
- El sistema es controlado usando la señal de control $u(t)$, que es una función de las variables de estado medibles.
- No siempre es posible medir directamente todas las variables de estado de un sistema. $\rightarrow$ Observadores de estados.
- Ubicación de polos del sistema de lazo cerrado en lugares donde se satisfacen los requerimientos de desempeño.
- Proceso de Diseño:
    - Asumiendo que todas las variables de estado son medibles diseñar una ley de control de retroalimentación de estados completos.
    - Construir un observador de estados para estimar los estados que no son directamente medibles.
    - Conectar el observador y la retroalimentación de estados al sistema.

Modelos de Sistemas en Variables de Estados

Las ecuaciones de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo pueden escribirse de la forma:

Las ecuaciones de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo pueden escribirse de la forma:

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \mathsf{A}\mathsf{x}(t) + \mathsf{B}\mathsf{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Estado)}$$

Modelos de Sistemas en Variables de Estados

Las ecuaciones de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo pueden escribirse de la forma:

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \mathsf{A}\mathsf{x}(t) + \mathsf{B}\mathsf{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Estado)}$$

$$\mathsf{y}(t) = \mathsf{C}\mathsf{x}(t) + \mathsf{D}\mathsf{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Salida)}$$

Modelos de Sistemas en Variables de Estados

Las ecuaciones de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo pueden escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathsf{x}}(t) &= \mathsf{A}\mathsf{x}(t) + \mathsf{B}\mathsf{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Estado)} \\ \mathsf{y}(t) &= \mathsf{C}\mathsf{x}(t) + \mathsf{D}\mathsf{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Salida)} \end{aligned}$$

- $\mathsf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$: Variables de estado.

Las ecuaciones de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo pueden escribirse de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \text{(Ec. de Estado)}$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad \text{(Ec. de Salida)}$$

- $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$: Variables de estado.
- $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$: Variables de entrada.

Modelos de Sistemas en Variables de Estados

Las ecuaciones de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo pueden escribirse de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad \text{(Ec. de Estado)}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad \text{(Ec. de Salida)}$$

- $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$: Variables de estado.
- $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$: Variables de entrada.
- $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$: Variables de salida.

Modelos de Sistemas en Variables de Estados

Las ecuaciones de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo pueden escribirse de la forma:

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \mathsf{A}\mathsf{x}(t) + \mathsf{B}\mathsf{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Estado)}$$
$$\mathsf{y}(t) = \mathsf{C}\mathsf{x}(t) + \mathsf{D}\mathsf{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Salida)}$$

- $\mathsf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$: Variables de estado.
- $\mathsf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$: Variables de entrada.
- $\mathsf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$: Variables de salida.

- $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Matriz del sistema.

Las ecuaciones de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo pueden escribirse de la forma:

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \mathsf{A}\mathsf{x}(t) + \mathsf{B}\mathsf{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Estado)}$$

$$\mathsf{y}(t) = \mathsf{C}\mathsf{x}(t) + \mathsf{D}\mathsf{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Salida)}$$

- $\mathsf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$: Variables de estado.
- $\mathsf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$: Variables de entrada.
- $\mathsf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$: Variables de salida.

- $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Matriz del sistema.
- $\mathsf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$: Matriz de entrada.

Las ecuaciones de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo pueden escribirse de la forma:

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{A}\mathrm{x}(t) + \mathrm{B}\mathrm{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Estado)}$$
$$\mathrm{y}(t) = \mathrm{C}\mathrm{x}(t) + \mathrm{D}\mathrm{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Salida)}$$

- $\mathrm{x}(t) \in \mathbb{R}^n$: Variables de estado.
- $\mathrm{u}(t) \in \mathbb{R}^p$: Variables de entrada.
- $\mathrm{y}(t) \in \mathbb{R}^q$: Variables de salida.

- $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Matriz del sistema.
- $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$: Matriz de entrada.
- $\mathrm{C} \in \mathbb{R}^{q\times n}$: Matriz de salida.

Las ecuaciones de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo pueden escribirse de la forma:

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \mathsf{A}\mathsf{x}(t) + \mathsf{B}\mathsf{u}(t) \quad \text{(Ec. de Estado)}$$
$$\mathsf{y}(t) = \mathsf{C}\mathsf{x}(t) + \mathsf{D}\mathsf{u}(t) \quad \text{(Ec. de Salida)}$$

- $\mathsf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$: Variables de estado.
- $\mathsf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$: Variables de entrada.
- $\mathsf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$: Variables de salida.

- $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Matriz del sistema.
- $\mathsf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$: Matriz de entrada.
- $\mathsf{C} \in \mathbb{R}^{q\times n}$: Matriz de salida.
- $\mathsf{D} \in \mathbb{R}^{q\times p}$: Matriz de transferencia directa.

Las ecuaciones de cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo pueden escribirse de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Estado)}$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \qquad \text{(Ec. de Salida)}$$

- $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$: Variables de estado.
- $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$: Variables de entrada.
- $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$: Variables de salida.

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Matriz del sistema.
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$: Matriz de entrada.
- $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q\times n}$: Matriz de salida.
- $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q\times p}$: Matriz de transferencia directa.

Por simplicidad, se considerarán sistemas con $p = 1$, $q = 1$.

Un sistema no lineal puede escribirse de la forma:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathsf{x}}(t) &= \mathsf{F}(\mathsf{x}(t), \mathsf{u}(t)), \quad F(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \\
\mathsf{y}(t) &= \mathsf{H}(\mathsf{x}(t), \mathsf{u}(t)), \quad H(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q
\end{aligned}
$$

Un sistema no lineal puede escribirse de la forma:

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \mathsf{F}(\mathsf{x}(t), \mathsf{u}(t)), \quad F(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$
$$\mathsf{y}(t) = \mathsf{H}(\mathsf{x}(t), \mathsf{u}(t)), \quad H(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$$

Se definen los puntos de operación (puntos de equilibrio) como:

$$\bar{\mathsf{x}} \in \mathbb{R}^n : 0 = \mathsf{F}(\bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{u}}), \quad \bar{\mathsf{u}} \in \mathbb{R}^p$$

Un sistema no lineal puede escribirse de la forma:

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \mathsf{F}(\mathsf{x}(t), \mathsf{u}(t)), \quad F(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$
$$\mathsf{y}(t) = \mathsf{H}(\mathsf{x}(t), \mathsf{u}(t)), \quad H(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$$

Se definen los puntos de operación (puntos de equilibrio) como:

$$\bar{\mathsf{x}} \in \mathbb{R}^n : 0 = \mathsf{F}(\bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{u}}), \quad \bar{\mathsf{u}} \in \mathbb{R}^p$$

Dado un punto de operación $\{\bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{u}}\}$, es posible encontrar un sistema lineal e invariante en el tiempo que aproxime al sistema no lineal en la vecindad de $\{\bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{u}}\}$

Un sistema no lineal puede escribirse de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathsf{x}}(t) &= \mathsf{F}(\mathsf{x}(t), \mathsf{u}(t)), \quad F(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \\ \mathsf{y}(t) &= \mathsf{H}(\mathsf{x}(t), \mathsf{u}(t)), \quad H(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q \end{aligned}$$

Se definen los puntos de operación (puntos de equilibrio) como:

$$\bar{\mathsf{x}} \in \mathbb{R}^n : 0 = \mathsf{F}(\bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{u}}), \quad \bar{\mathsf{u}} \in \mathbb{R}^p$$

Dado un punto de operación $\{\bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{u}}\}$, es posible encontrar un sistema lineal e invariante en el tiempo que aproxime al sistema no lineal en la vecindad de $\{\bar{\mathsf{x}}, \bar{\mathsf{u}}\} \longrightarrow$ Linealización.

Para obtener el modelo linealizado se calcula la matriz Jacobiana (matriz de derivadas parciales) de las funciones $\mathbf{F}$ y $\mathbf{H}$ respecto a las variables $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$:

Para obtener el modelo linealizado se calcula la matriz Jacobiana (matriz de derivadas parciales) de las funciones **F** y **H** respecto a las variables **x** y **u**:

$$A = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}$$

Para obtener el modelo linealizado se calcula la matriz Jacobiana (matriz de derivadas parciales) de las funciones $\mathbf{F}$ y $\mathbf{H}$ respecto a las variables $\mathbf{x}$ y $\mathbf{u}$:

$$A = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} \qquad B = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}$$

Linealización de Sistemas no Lineales

Para obtener el modelo linealizado se calcula la matriz Jacobiana (matriz de derivadas parciales) de las funciones **F** y **H** respecto a las variables **x** y **u**:

$$A = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} \qquad B = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}$$

$$C = \left.\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_q}{\partial x_1} & \frac{\partial h_q}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}$$

Para obtener el modelo linealizado se calcula la matriz Jacobiana (matriz de derivadas parciales) de las funciones **F** y **H** respecto a las variables **x** y **u**:

$$A = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} \qquad B = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}$$

$$C = \left.\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_q}{\partial x_1} & \frac{\partial h_q}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_q}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} \qquad D = \left.\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \frac{\partial h_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial h_2}{\partial u_1} & \frac{\partial h_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial u_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_q}{\partial u_1} & \frac{\partial h_q}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial h_q}{\partial u_p} \end{bmatrix}\right|_{\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{u}}}$$

El sistema linealizado obtenido corresponde a:

$$\dot{\hat{\mathsf{x}}}(t) = \mathsf{A}\hat{\mathsf{x}}(t) + \mathsf{B}\hat{\mathsf{u}}(t)$$
$$\hat{\mathsf{y}}(t) = \mathsf{C}\hat{\mathsf{x}}(t) + \mathsf{D}\hat{\mathsf{u}}(t)$$

El sistema linealizado obtenido corresponde a:

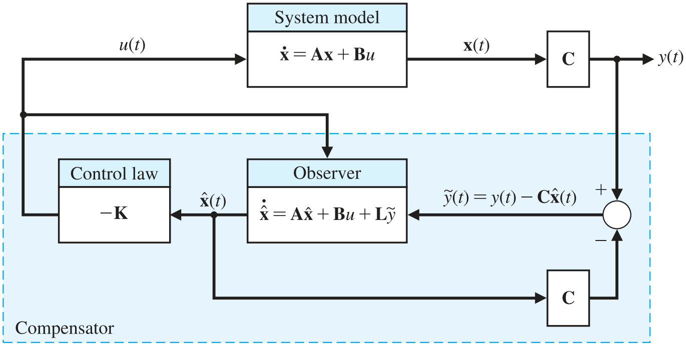
$$\dot{\hat{\mathsf{x}}}(t) = \mathsf{A}\hat{\mathsf{x}}(t) + \mathsf{B}\hat{\mathsf{u}}(t)$$
$$\hat{\mathsf{y}}(t) = \mathsf{C}\hat{\mathsf{x}}(t) + \mathsf{D}\hat{\mathsf{u}}(t)$$

donde

$$\hat{\mathsf{x}}(t) = \mathsf{x}(t) - \bar{\mathsf{x}}$$
$$\hat{\mathsf{u}}(t) = \mathsf{u}(t) - \bar{\mathsf{u}}$$
$$\hat{\mathsf{y}}(t) = \mathsf{y}(t) - \bar{\mathsf{y}}$$

Esquema de Control por Retroalimentación de Estados

Compensador: Ley de control por retroalimentación de estados + observador de estados.



Controlabilidad - Observabilidad

Controlabilidad

La controlabilidad es necesaria para poder ubicar los polos del sistema en lazo cerrado de forma arbitraria.

Controlabilidad

La controlabilidad es necesaria para poder ubicar los polos del sistema en lazo cerrado de forma arbitraria.

Definition (Controlabilidad)

Un sistema es completamente controlable si existe una señal de control $u(t)$ que logre transferir cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado $x(t)$ en un tiempo finito t, con $t_0 \leq t \leq T$.

La controlabilidad es necesaria para poder ubicar los polos del sistema en lazo cerrado de forma arbitraria.

Definition (Controlabilidad)

Un sistema es completamente controlable si existe una señal de control $u(t)$ que logre transferir cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado $x(t)$ en un tiempo finito t, con $t_0 \leq t \leq T$.

Para verificar la controlabilidad de un sistema, se evalúa si la matriz de controlabilidad es de rango completo:

$$rank\,(\mathcal{P}_c) = rank\left(\begin{bmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{AB} & \mathrm{A}^2\mathrm{B} & \dots & \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{B} \end{bmatrix}\right) = n$$

Ejemplo: Controlabilidad de un Sistema

Determine si el siguiente sistema es controlable:

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \mathsf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Ejemplo: Controlabilidad de un Sistema

Determine si el siguiente sistema es controlable:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Construyendo la matriz de controlabilidad:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ d \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Controlabilidad de un Sistema

Determine si el siguiente sistema es controlable:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Construyendo la matriz de controlabilidad:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ d \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{P}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Controlabilidad de un Sistema

Determine si el siguiente sistema es controlable:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Construyendo la matriz de controlabilidad:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ d \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{P}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

$d \neq 0 \iff rank(\mathcal{P}_c) = 2 \iff$ El sistema es controlable.

Observabilidad

La observabilidad se refiere a la posibilidad de estimar las variables de estado.

Observabilidad

La observabilidad se refiere a la posibilidad de estimar las variables de estado.

Definition (Observabilidad)

Un sistema es completamente observable si y sólo si existe un tiempo finito T tal que el estado inicial $x(t_0)$ puede determinarse a partir de la historia observada $y(t)$ dada una señal de control $u(t)$, para $t_0 \leq t \leq T$.

Observabilidad

La observabilidad se refiere a la posibilidad de estimar las variables de estado.

Definition (Observabilidad)

Un sistema es completamente observable si y sólo si existe un tiempo finito T tal que el estado inicial $x(t_0)$ puede determinarse a partir de la historia observada $y(t)$ dada una señal de control $u(t)$, para $t_0 \leq t \leq T$.

Para verificar la observabilidad de un sistema se evalúa si la matriz de observabilidad es de rango completo:

$$rank(\mathcal{P}_o) = rank\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n$$

Ejemplo: Controlabilidad de un Sistema

Determine si el siguiente sistema es observable:

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \mathsf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathsf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Ejemplo: Controlabilidad de un Sistema

Determine si el siguiente sistema es observable:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Construyendo la matriz de observabilidad:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Controlabilidad de un Sistema

Determine si el siguiente sistema es observable:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Construyendo la matriz de observabilidad:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{P}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ d & -3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Controlabilidad de un Sistema

Determine si el siguiente sistema es observable:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Construyendo la matriz de observabilidad:

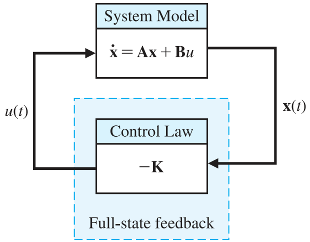
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ d & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{P}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ d & -3 \end{bmatrix}$$

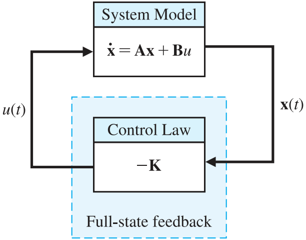
$d \neq 0 \iff rank(\mathcal{P}_o) = 2 \iff$ El sistema es observable.

Control por Retroalimentación de Estados

Control por Retroalimentación de Estados - Problema de Regulación



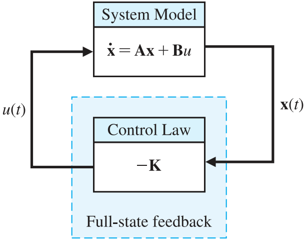
Control por Retroalimentación de Estados - Problema de Regulación



Modelo en variables de estado:

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$

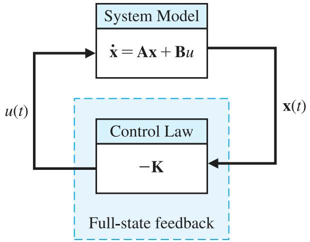
Control por Retroalimentación de Estados - Problema de Regulación



Modelo en variables de estado:
$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t).$

Señal de control:
$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t).$

Control por Retroalimentación de Estados - Problema de Regulación



Modelo en variables de estado:

$\dot{\mathsf{x}}(t) = \mathsf{A}\mathsf{x}(t) + \mathsf{B}u(t).$

Señal de control:

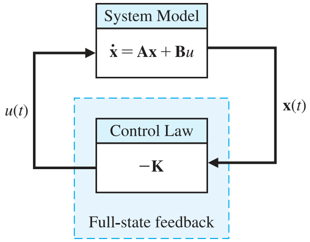
$u(t) = -\mathsf{K}\mathsf{x}(t).$

Reemplazando $u(t)$ en el modelo:

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = \mathsf{A}\mathsf{x}(t) + \mathsf{B}u(t) = \mathsf{A}\mathsf{x}(t) - \mathsf{B}\mathsf{K}\mathsf{x}(t)$$

$$\dot{\mathsf{x}}(t) = (\mathsf{A} - \mathsf{B}\mathsf{K})\mathsf{x}(t)$$

Control por Retroalimentación de Estados - Problema de Regulación



Modelo en variables de estado:

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$.

Señal de control:

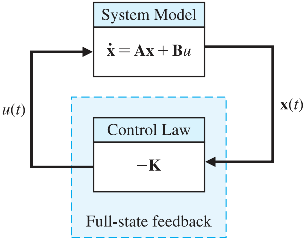
$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$.

Reemplazando $u(t)$ en el modelo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)$$

Ecuación característica: $\det(\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = 0$.



Modelo en variables de estado:
$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$.

Señal de control:
$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$.

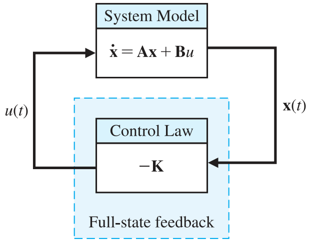
Reemplazando $u(t)$ en el modelo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)$$

Ecuación característica: $\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = 0$.

Si todas las raíces de la ecuación característica se encuentran en el semiplano izquierdo, el sistema de lazo cerrado es estable. Por lo tanto: $\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})t}\mathbf{x}(t_0) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Control por Retroalimentación de Estados - Problema de Regulación



Modelo en variables de estado:
$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$.

Señal de control:
$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$.

Reemplazando $u(t)$ en el modelo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)$$

Ecuación característica: $\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = 0$.

Si todas las raíces de la ecuación característica se encuentran en el semiplano izquierdo, el sistema de lazo cerrado es estable. Por lo tanto: $\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})t}\mathbf{x}(t_0) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Problema de Regulación: Calcular $\mathbf{K}$ tal que la condición inicial $x(t_0) \to 0$ de acuerdo con los requerimientos de diseño.

Control por Retroalimentación de Estados - Problema de Regulación - Ejemplo

Considere el sistema:

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathrm{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{x}(t)$$

Considere el sistema:

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathrm{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathrm{x}(t)$$

Calculando el rango de la matriz de controlabilidad se determina que el sistema es controlable.

Control por Retroalimentación de Estados - Problema de Regulación - Ejemplo

Considere el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Calculando el rango de la matriz de controlabilidad se determina que el sistema es controlable.

Asumiendo una matriz de retroalimentación de estados $\mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ k_3]$, el sistema de lazo cerrado es $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)$, donde:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 - 2 & -k_2 - 3 & -k_3 - 5 \end{bmatrix}$$

Control por Retroalimentación de Estados - Problema de Regulación - Ejemplo

Considere el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Calculando el rango de la matriz de controlabilidad se determina que el sistema es controlable.

Asumiendo una matriz de retroalimentación de estados $\mathbf{K} = [k_1 \; k_2 \; k_3]$, el sistema de lazo cerrado es $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t)$, donde:

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 - 2 & -k_2 - 3 & -k_3 - 5 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) \\ &= \lambda^3 + (k_3 + 5)\lambda^2 + (k_2 + 3)\lambda + (k_1 + 2) = 0 \end{aligned}$$

Control por Retroalimentación de Estados - Problema de Regulación - Ejemplo

Considere el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Calculando el rango de la matriz de controlabilidad se determina que el sistema es controlable.

Asumiendo una matriz de retroalimentación de estados $\mathbf{K} = [k_1 \; k_2 \; k_3]$, el sistema de lazo cerrado es $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t)$, donde:

$$\mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 - 2 & -k_2 - 3 & -k_3 - 5 \end{bmatrix}$$

La ecuación característica es:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) \\ &= \lambda^3 + (k_3 + 5)\lambda^2 + (k_2 + 3)\lambda + (k_1 + 2) = 0 \end{aligned}$$

Se define la ecuación característica deseada como:

$$\Delta_d(\lambda) = (\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2)(\lambda + 10\zeta\omega_n)$$

Seleccionando $PO = 5\%$, $T_s = 5$ se obtiene $\zeta = 0.69$, $\omega_n = 1.16$. La ecuación característica deseada es:

$$\begin{aligned}\Delta_d(\lambda) &= (\lambda^2 + 0.6\lambda + 36)(\lambda + 4.8) \\ &= \lambda^3 + 9.6\lambda^2 + 14.14\lambda + 10.75\end{aligned}$$

Seleccionando $PO = 5\%$, $T_s = 5$ se obtiene $\zeta = 0.69$, $\omega_n = 1.16$. La ecuación característica deseada es:

$$\begin{aligned}\Delta_d(\lambda) &= (\lambda^2 + 0.6\lambda + 36)(\lambda + 4.8) \\ &= \lambda^3 + 9.6\lambda^2 + 14.14\lambda + 10.75\end{aligned}$$

Comparando los polinomios se obtiene:

$$\begin{aligned}k_1 + 2 &= 10.75 \\ k_2 + 3 &= 14.14 \\ k_3 + 5 &= 9.6\end{aligned}$$

Control por Retroalimentación de Estados - Problema de Regulación - Ejemplo

Seleccionando $PO = 5\%$, $T_s = 5$ se obtiene $\zeta = 0.69$, $\omega_n = 1.16$. La ecuación característica deseada es:

$$\begin{aligned}\Delta_d(\lambda) &= (\lambda^2 + 0.6\lambda + 36)(\lambda + 4.8) \\ &= \lambda^3 + 9.6\lambda^2 + 14.14\lambda + 10.75\end{aligned}$$

Comparando los polinomios se obtiene:

$$\begin{aligned}k_1 + 2 &= 10.75 \\ k_2 + 3 &= 14.14 \\ k_3 + 5 &= 9.6\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ganancia de retroalimentación de estados es:

$$\mathrm{K} = [8.75,\ 11.14,\ 4.6]$$

Seleccionando $PO = 5\%$, $T_s = 5$ se obtiene $\zeta = 0.69$, $\omega_n = 1.16$. La ecuación característica deseada es:

$$\begin{aligned}\Delta_d(\lambda) &= (\lambda^2 + 0.6\lambda + 36)(\lambda + 4.8)\\ &= \lambda^3 + 9.6\lambda^2 + 14.14\lambda + 10.75\end{aligned}$$

Comparando los polinomios se obtiene:

$$\begin{aligned}k_1 + 2 &= 10.75\\ k_2 + 3 &= 14.14\\ k_3 + 5 &= 9.6\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ganancia de retroalimentación de estados es:

$$\mathrm{K} = [8.75,\ 11.14,\ 4.6]$$

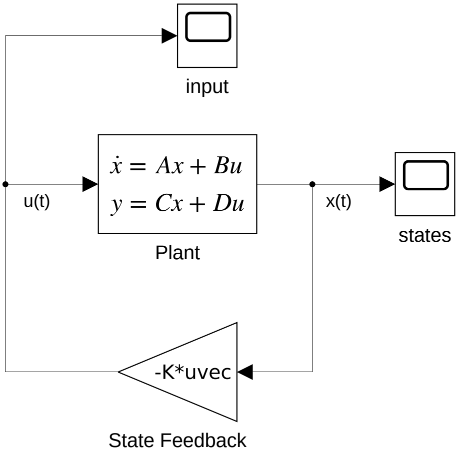
Las raíces del polinomio deseado son $p_{des} = \{-0.8 \pm 0.839, -8\}$. Usando la función `place` de Matlab:

```
p_des = [-0.8+0.839j, -0.8-0.839j, -8];
K = place(A,B,p_des)

K =

    8.7514    11.1439     4.6000
```

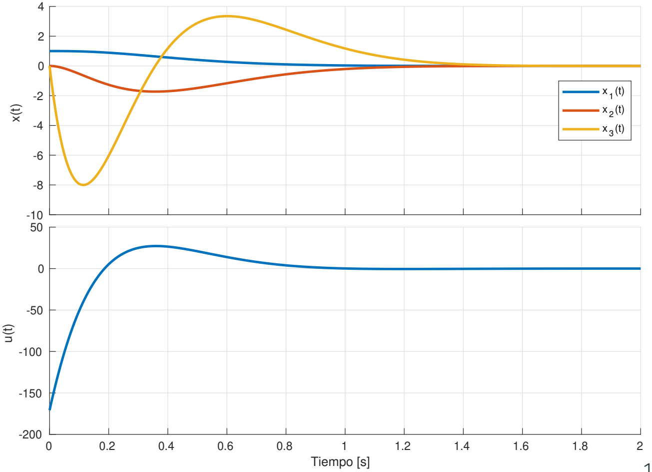
Implementación en Simulink del control por retroalimentación de estados.



Respuesta del sistema en lazo cerrado ante condiciones iniciales $x(t_0) = [1,\ 0,\ 0]^\intercal$.

El estado $x(t)$ converge hacia el punto de equilibrio $\bar{x} = [0,\ 0,\ 0]^\intercal$.

La retroalimentación de estados genera la señal de control $u(t)$ necesaria para estabilizar el sistema en el punto de equilibrio dada cualquier condición inicial $x(t_0)$.



Observadores de Estados

Diseño de Observadores de Estados

- Durante el diseño del control por retroalimentación de estados se asume que todos los estados del sistema están disponibles para ser retroalimentados.

Diseño de Observadores de Estados

- Durante el diseño del control por retroalimentación de estados se asume que todos los estados del sistema están disponibles para ser retroalimentados.
- En la práctica, es posible que sólo algunos de éstos se encuentren disponibles para ser medidos.

- Durante el diseño del control por retroalimentación de estados se asume que todos los estados del sistema están disponibles para ser retroalimentados.
- En la práctica, es posible que sólo algunos de éstos se encuentren disponibles para ser medidos.
- En algunos casos, instalar sensores puede incrementar demasiado la complejidad del sistema.

Diseño de Observadores de Estados

- Durante el diseño del control por retroalimentación de estados se asume que todos los estados del sistema están disponibles para ser retroalimentados.
- En la práctica, es posible que sólo algunos de éstos se encuentren disponibles para ser medidos.
- En algunos casos, instalar sensores puede incrementar demasiado la complejidad del sistema.
- Si el sistema es observable es posible determinar (estimar) los estados que no son directamente medidos (observados).

Diseño de Observadores de Estados

Considere el sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\mathsf{x}}(t) &= \mathsf{A}\mathsf{x}(t) + \mathsf{B}u(t)\\ y(t) &= \mathsf{C}\mathsf{x}(t)\end{aligned}$$

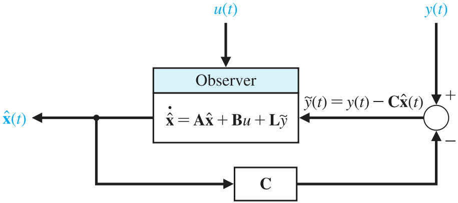
Diseño de Observadores de Estados

Considere el sistema:

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \mathrm{A}\mathrm{x}(t) + \mathrm{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathrm{C}\mathrm{x}(t)$$

El observador de estados completos de Luenberger se define como:

$$\dot{\hat{\mathrm{x}}}(t) = \mathrm{A}\hat{\mathrm{x}}(t) + \mathrm{B}u(t) + \mathrm{L}(y(t) - \mathrm{C}\hat{\mathrm{x}}(t))$$



Diseño de Observadores de Estados

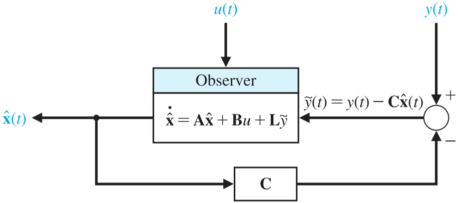
Considere el sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

El observador de estados completos de Luenberger se define como:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$$

La matriz **L** es la ganancia del observador y se calcula durante el procedimiento de diseño del observador.



Diseño de Observadores de Estados

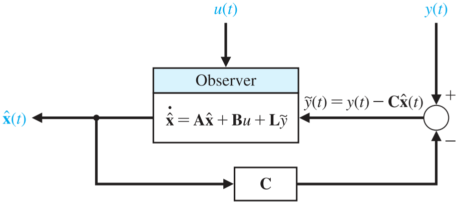
Considere el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

El observador de estados completos de Luenberger se define como:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$$

La matriz $\mathbf{L}$ es la ganancia del observador y se calcula durante el procedimiento de diseño del observador.



Dos entradas $u(t)$, $y(t)$ y una salida $\hat{\mathbf{x}}(t)$.

Diseño de Observadores de Estados

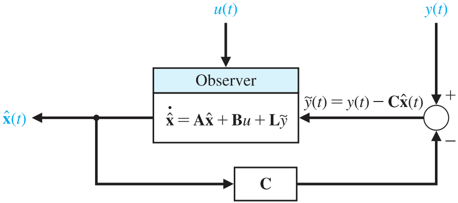
Considere el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

El observador de estados completos de Luenberger se define como:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$$

La matriz $\mathbf{L}$ es la ganancia del observador y se calcula durante el procedimiento de diseño del observador.



Dos entradas $u(t)$, $y(t)$ y una salida $\hat{\mathbf{x}}(t)$.

Objetivo: proveer un estimado $\hat{\mathbf{x}}(t)$ tal que $\hat{\mathbf{x}}(t) \to \mathbf{x}(t)$ cuando $t \to \infty$.

Diseño de Observadores de Estados

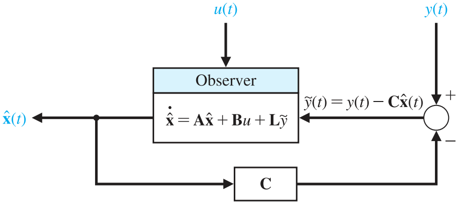
Considere el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

El observador de estados completos de Luenberger se define como:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$$

La matriz $\mathbf{L}$ es la ganancia del observador y se calcula durante el procedimiento de diseño del observador.



Dos entradas $u(t)$, $y(t)$ y una salida $\hat{\mathbf{x}}(t)$.

Objetivo: proveer un estimado $\hat{\mathbf{x}}(t)$ tal que $\hat{\mathbf{x}}(t) \to \mathbf{x}(t)$ cuando $t \to \infty$.

Se define el error de estimación como:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) \tag{1}$$

Se define el error de estimación como:

$$\mathsf{e}(t) = \mathsf{x}(t) - \hat{\mathsf{x}}(t)$$

Se define el error de estimación como:

$$\mathrm{e}(t) = \mathrm{x}(t) - \hat{\mathrm{x}}(t)$$

Derivando se obtiene:

$$\dot{\mathrm{e}}(t) = \dot{\mathrm{x}}(t) - \dot{\hat{\mathrm{x}}}(t)$$

Se define el error de estimación como:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Derivando se obtiene:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$

Usando la ecuación de estado y del observador se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\
&= A(x(t) - \hat{x}(t)) - L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\
&= A(x(t) - \hat{x}(t)) - L(Cx(t) - C\hat{x}(t)) \\
&= (A - LC)e(t)
\end{aligned}$$

Diseño de Observadores de Estados

Se define el error de estimación como:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$$

Derivando se obtiene:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$$

Usando la ecuación de estado y del observador se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{e}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}u(t) - \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \\
&= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t)
\end{aligned}$$

Se puede garantizar que $\mathbf{e}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para cualquier error de estimación inicial $\mathbf{e}(t_0)$ si la ecuación característica tiene todas sus raíces en el semiplano izquierdo:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})) = 0$$

Diseño de Observadores de Estados

Se define el error de estimación como:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$$

Derivando se obtiene:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$$

Usando la ecuación de estado y del observador se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{B}u(t) - \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - \mathbf{L}(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\mathbf{e}(t)\end{aligned}$$

Se puede garantizar que $\mathbf{e}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$ para cualquier error de estimación inicial $\mathbf{e}(t_0)$ si la ecuación característica tiene todas sus raíces en el semiplano izquierdo:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})) = 0$$

Diseño del observador: encontrar la matriz $\mathbf{L}$ tal que las raíces de la ecuación característica se encuentren en el semiplano izquierdo, asumiendo que el sistema es observable.

Diseño de Observadores de Estados - Ejemplo

Diseñe un observador de estados para el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Diseñe un observador de estados para el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Calculando el rango de la matriz de observabilidad se determina que el sistema es observable.

Diseño de Observadores de Estados - Ejemplo

Diseñe un observador de estados para el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Calculando el rango de la matriz de observabilidad se determina que el sistema es observable.

Dada la ganancia del observador $\mathbf{L} = [l_1 \; l_2 \; l_3]^\intercal$, la dinámica del error es $\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}(t)$, donde:

$$\mathbf{A} - \mathbf{LC} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 & 0 \\ -l_2 & 0 & 1 \\ -l_3 - 2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Diseño de Observadores de Estados - Ejemplo

Diseñe un observador de estados para el sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Calculando el rango de la matriz de observabilidad se determina que el sistema es observable.

Dada la ganancia del observador $\mathbf{L} = [l_1 \; l_2 \; l_3]^\mathsf{T}$, la dinámica del error es $\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{LC})\mathbf{e}(t)$, donde:

$$\mathbf{A} - \mathbf{LC} = \begin{bmatrix} -l_1 & 1 & 0 \\ -l_2 & 0 & 1 \\ -l_3 - 2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico del sistema es:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \det(\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{LC})) = 0 \\ &= \lambda^3 + (l_1 + 5)\lambda^2 + (5l_1 + l_2 + 3)\lambda \\ &+ (3l_1 + 5l_2 + l_3 + 2) = 0 \end{aligned}$$

Diseño de Observadores de Estados - Ejemplo

Asumiendo $PO = 5\%$, $T_s = 1$ se obtiene $\zeta = 0.69$ y $\omega_n = 5.79$. El polinomio característico deseado es:

$$\begin{aligned}\Delta_d(\lambda) &= (\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2)(\lambda + 10\zeta\omega_n)\\ &= \lambda^3 + 48\lambda^2 + 353.6\lambda + 1343.8\end{aligned}$$

Diseño de Observadores de Estados - Ejemplo

Asumiendo $PO = 5\%$, $T_s = 1$ se obtiene $\zeta = 0.69$ y $\omega_n = 5.79$. El polinomio característico deseado es:

$$\begin{aligned}\Delta_d(\lambda) &= (\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2)(\lambda + 10\zeta\omega_n)\\ &= \lambda^3 + 48\lambda^2 + 353.6\lambda + 1343.8\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes se obtiene:

$$\begin{aligned}l_1 + 5 &= 48\\ 5l_1 + l_2 + 3 &= 353.6\\ 3l_1 + 5l_2 + l_3 + 2 &= 1343.8\end{aligned}$$

Diseño de Observadores de Estados - Ejemplo

Asumiendo $PO = 5\%$, $T_s = 1$ se obtiene $\zeta = 0.69$ y $\omega_n = 5.79$. El polinomio característico deseado es:

$$
\begin{aligned}
\Delta_d(\lambda) &= (\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2)(\lambda + 10\zeta\omega_n) \\
&= \lambda^3 + 48\lambda^2 + 353.6\lambda + 1343.8
\end{aligned}
$$

Igualando los coeficientes se obtiene:

$$
\begin{aligned}
l_1 + 5 &= 48 \\
5l_1 + l_2 + 3 &= 353.6 \\
3l_1 + 5l_2 + l_3 + 2 &= 1343.8
\end{aligned}
$$

Entonces, la ganancia del observador es:

$$
\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 43 & 135.6 & 534.85 \end{bmatrix}^\mathsf{T}
$$

Diseño de Observadores de Estados - Ejemplo

Asumiendo $PO = 5\%$, $T_s = 1$ se obtiene $\zeta = 0.69$ y $\omega_n = 5.79$. El polinomio característico deseado es:

$$\begin{aligned}\Delta_d(\lambda) &= (\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2)(\lambda + 10\zeta\omega_n) \\ &= \lambda^3 + 48\lambda^2 + 353.6\lambda + 1343.8\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes se obtiene:

$$\begin{aligned}l_1 + 5 &= 48 \\ 5l_1 + l_2 + 3 &= 353.6 \\ 3l_1 + 5l_2 + l_3 + 2 &= 1343.8\end{aligned}$$

Entonces, la ganancia del observador es:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 43 & 135.6 & 534.85 \end{bmatrix}^T$$

Las raíces del polinomio deseado son $p_{des} = \{-4 \pm 4.1948, -40\}$. Usando la función `place` de Matlab:

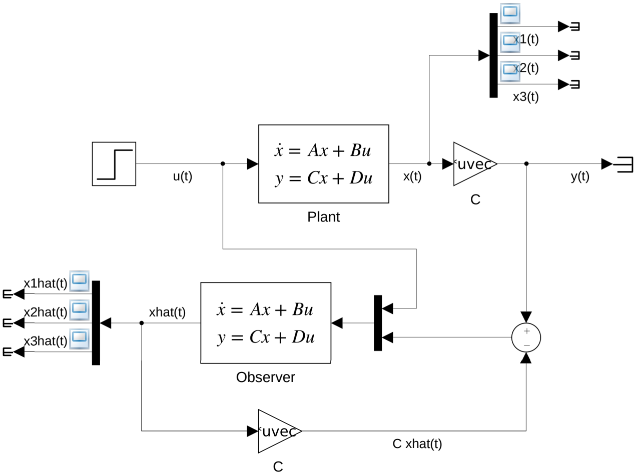
```
p_des = [-4+4.1948j, -4-4.1948j, -40];
L = place(A',C',p_des)'

L =

   43.0000
  135.5963
  534.8721
```

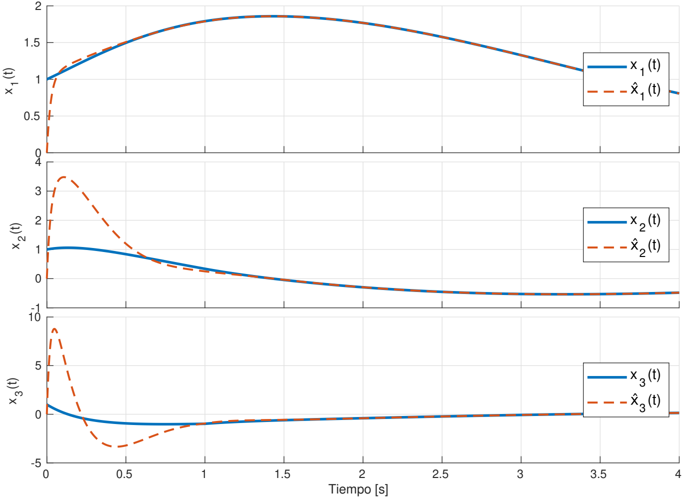
Diseño de Observadores de Estados - Ejemplo

Implementación en Simulink del Observador de Estados



Respuesta del sistema ante una entrada paso

El estado estimado converge al estado real en 1 segundo, dada cualquier condición inicial $\mathbf{x}(t_0)$ del sistema.



Control por Retroalimentación y Observación de Estados

- El compensador por variables de estado se construye conectando la ley de control de estado completo al observador de estados.

- El compensador por variables de estado se construye conectando la ley de control de estado completo al observador de estados.
- Luego de diseñar la ley de control y el observador de estados, se puede conectar la salida del observador a la entrada de la retroalimentación de estados:

$$u(t) = -\mathrm{K}\hat{\mathrm{x}}(t) \tag{2}$$

- El compensador por variables de estado se construye conectando la ley de control de estado completo al observador de estados.
- Luego de diseñar la ley de control y el observador de estados, se puede conectar la salida del observador a la entrada de la retroalimentación de estados:

$$u(t) = -\mathrm{K}\hat{\mathrm{x}}(t) \tag{2}$$

- Principio de separación: la ley de control y el observador pueden diseñarse independientemente.

Considere el observador:

$$\dot{\hat{\mathsf{x}}}(t) = \mathsf{A}\hat{\mathsf{x}}(t) + \mathsf{B}u(t) + \mathsf{L}(y(t) - \mathsf{C}\hat{\mathsf{x}}(t))$$

Considere el observador:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$$

Reemplazando la ley de control (2) y reorganizando:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - BK - LC)\hat{x}(t) + Ly(t)$$
$$u(t) = -K\hat{x}(t)$$

Control por Retroalimentación y Observación de Estados

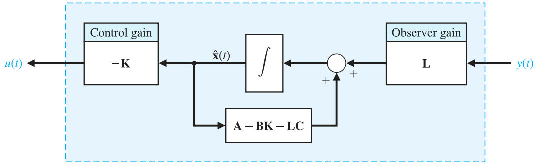
Considere el observador:

$$\dot{\hat{\mathsf{x}}}(t) = \mathsf{A}\hat{\mathsf{x}}(t) + \mathsf{B}u(t) + \mathsf{L}(y(t) - \mathsf{C}\hat{\mathsf{x}}(t))$$

Reemplazando la ley de control (2) y reorganizando:

$$\dot{\hat{\mathsf{x}}}(t) = (\mathsf{A} - \mathsf{BK} - \mathsf{LC})\hat{\mathsf{x}}(t) + \mathsf{L}y(t)$$
$$u(t) = -\mathsf{K}\hat{\mathsf{x}}(t)$$

Las ecuaciones se pueden representar usando el siguiente diagrama:



Control por Retroalimentación y Observación de Estados

Considere el observador:

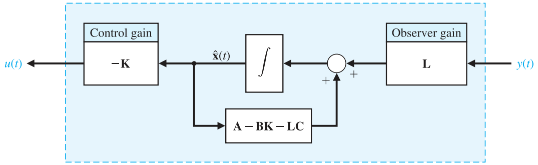
$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))$$

Reemplazando la ley de control (2) y reorganizando:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - BK - LC)\hat{x}(t) + Ly(t)$$

$$u(t) = -K\hat{x}(t)$$

Las ecuaciones se pueden representar usando el siguiente diagrama:



Reemplazando la ley de control en la ecuación del sistema se tiene:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BK\hat{x}(t)$$

Control por Retroalimentación y Observación de Estados

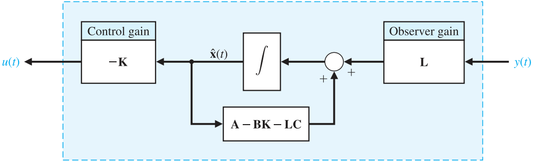
Considere el observador:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$$

Reemplazando la ley de control (2) y reorganizando:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{L}y(t)$$
$$u(t) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}(t)$$

Las ecuaciones se pueden representar usando el siguiente diagrama:



Reemplazando la ley de control en la ecuación del sistema se tiene:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{BK}\hat{\mathbf{x}}(t)$$

Con $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{e}(t)$ se tiene:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) + \mathbf{BK}\mathbf{e}(t) \qquad (3)$$

Calculando el error de estimación para el compensador se tiene:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathsf{e}}(t) &= \dot{\mathsf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathsf{x}}}(t) \\
&= \mathsf{A}\mathsf{x}(t) + \cancel{\mathsf{B}u(t)} - \mathsf{A}\hat{\mathsf{x}}(t) - \cancel{\mathsf{B}u(t)} \\
&- \mathsf{L}y(t) + \mathsf{L}\mathsf{C}\hat{\mathsf{x}}(t) \\
&= \mathsf{A}(\mathsf{x}(t) - \hat{\mathsf{x}}(t)) - \mathsf{L}\mathsf{C}(\mathsf{x}(t) - \hat{\mathsf{x}}(t)) \\
&= \mathsf{A}\mathsf{e}(t) - \mathsf{L}\mathsf{C}\mathsf{e}(t) \\
&= (\mathsf{A} - \mathsf{L}\mathsf{C})\mathsf{e}(t) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Control por Retroalimentación y Observación de Estados

Calculando el error de estimación para el compensador se tiene:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathrm{e}}(t) &= \dot{\mathrm{x}}(t) - \dot{\hat{\mathrm{x}}}(t) \\
&= \mathrm{A}\mathrm{x}(t) + \cancel{\mathrm{B}u(t)} - \mathrm{A}\hat{\mathrm{x}}(t) - \cancel{\mathrm{B}u(t)} \\
&- \mathrm{L}y(t) + \mathrm{L}\mathrm{C}\hat{\mathrm{x}}(t) \\
&= \mathrm{A}(\mathrm{x}(t) - \hat{\mathrm{x}}(t)) - \mathrm{L}\mathrm{C}(\mathrm{x}(t) - \hat{\mathrm{x}}(t)) \\
&= \mathrm{A}\mathrm{e}(t) - \mathrm{L}\mathrm{C}\mathrm{e}(t) \\
&= (\mathrm{A} - \mathrm{L}\mathrm{C})\mathrm{e}(t) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Reescribiendo las ecuaciones (3), (4) en forma matricial se tiene:

$$
\begin{bmatrix} \dot{\mathrm{x}}(t) \\ \dot{\mathrm{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} - \mathrm{B}\mathrm{K} & \mathrm{B}\mathrm{K} \\ 0 & \mathrm{A} - \mathrm{L}\mathrm{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}(t) \\ \mathrm{e}(t) \end{bmatrix} \qquad (5)
$$

Calculando el error de estimación para el compensador se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{e}}(t) &= \dot{\mathrm{x}}(t) - \dot{\hat{\mathrm{x}}}(t)\\ &= \mathrm{Ax}(t) + \cancel{\mathrm{B}u(t)} - \mathrm{A}\hat{\mathrm{x}}(t) - \cancel{\mathrm{B}u(t)}\\ &- \mathrm{L}y(t) + \mathrm{LC}\hat{\mathrm{x}}(t)\\ &= \mathrm{A}(\mathrm{x}(t) - \hat{\mathrm{x}}(t)) - \mathrm{LC}(\mathrm{x}(t) - \hat{\mathrm{x}}(t))\\ &= \mathrm{Ae}(t) - \mathrm{LCe}(t)\\ &= (\mathrm{A} - \mathrm{LC})\mathrm{e}(t) \qquad (4)\end{aligned}$$

Reescribiendo las ecuaciones (3), (4) en forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathrm{x}}(t)\\ \dot{\mathrm{e}}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{A} - \mathrm{BK} & \mathrm{BK}\\ 0 & \mathrm{A} - \mathrm{LC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{x}(t)\\ \mathrm{e}(t)\end{bmatrix} \qquad (5)$$

La ecuación característica asociada al sistema (5) es:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I} - (\mathrm{A} - \mathrm{BK}))\det(\lambda\mathrm{I} - (\mathrm{A} - \mathrm{LC}))$$

Control por Retroalimentación y Observación de Estados

Calculando el error de estimación para el compensador se tiene:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathrm{e}}(t) &= \dot{\mathrm{x}}(t) - \dot{\hat{\mathrm{x}}}(t) \\
&= \mathrm{Ax}(t) + \cancel{\mathrm{B}u(t)} - \mathrm{A}\hat{\mathrm{x}}(t) - \cancel{\mathrm{B}u(t)} \\
&- \mathrm{L}y(t) + \mathrm{LC}\hat{\mathrm{x}}(t) \\
&= \mathrm{A}(\mathrm{x}(t) - \hat{\mathrm{x}}(t)) - \mathrm{LC}(\mathrm{x}(t) - \hat{\mathrm{x}}(t)) \\
&= \mathrm{Ae}(t) - \mathrm{LCe}(t) \\
&= (\mathrm{A} - \mathrm{LC})\mathrm{e}(t) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Reescribiendo las ecuaciones (3), (4) en forma matricial se tiene:

$$
\begin{bmatrix} \dot{\mathrm{x}}(t) \\ \dot{\mathrm{e}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} - \mathrm{BK} & \mathrm{BK} \\ 0 & \mathrm{A} - \mathrm{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{x}(t) \\ \mathrm{e}(t) \end{bmatrix} \qquad (5)
$$

La ecuación característica asociada al sistema (5) es:

$$
\Delta(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - (\mathrm{A} - \mathrm{BK}))\det(\lambda \mathrm{I} - (\mathrm{A} - \mathrm{LC}))
$$

Si las raíces de $\det(\lambda \mathrm{I} - (\mathrm{A} - \mathrm{BK})) = 0$ y $\det(\lambda \mathrm{I} - (\mathrm{A} - \mathrm{LC})) = 0$ están en el semiplano izquierdo, todo el sistema es estable.

Procedimiento de Diseño

1. Determinar K tal que $\det(\lambda \mathsf{I} - (\mathsf{A} - \mathsf{BK})) = 0$ tenga sus raíces en el semiplano izquierdo, en ubicaciones apropiadas de acuerdo con las especificaciones de diseño.

Procedimiento de Diseño

1. Determinar K tal que $\det(\lambda \mathsf{I} - (\mathsf{A} - \mathsf{BK})) = 0$ tenga sus raíces en el semiplano izquierdo, en ubicaciones apropiadas de acuerdo con las especificaciones de diseño.
2. Determinar L tal que $\det(\lambda \mathsf{I} - (\mathsf{A} - \mathsf{LC})) = 0$ tenga sus raíces en el semiplano izquierdo, en ubicaciones apropiadas para tener un buen desempeño en el observador.

Procedimiento de Diseño

1. Determinar K tal que $\det(\lambda \mathsf{I} - (\mathsf{A} - \mathsf{BK})) = 0$ tenga sus raíces en el semiplano izquierdo, en ubicaciones apropiadas de acuerdo con las especificaciones de diseño.
2. Determinar L tal que $\det(\lambda \mathsf{I} - (\mathsf{A} - \mathsf{LC})) = 0$ tenga sus raíces en el semiplano izquierdo, en ubicaciones apropiadas para tener un buen desempeño en el observador.
3. Conectar el observador a la retroalimentación de estados usando:

$$u(t) = -\mathsf{K}\hat{\mathsf{x}}(t)$$

Control por Retroalimentación y Observación de Estados - Ejemplo

Considere el sistema

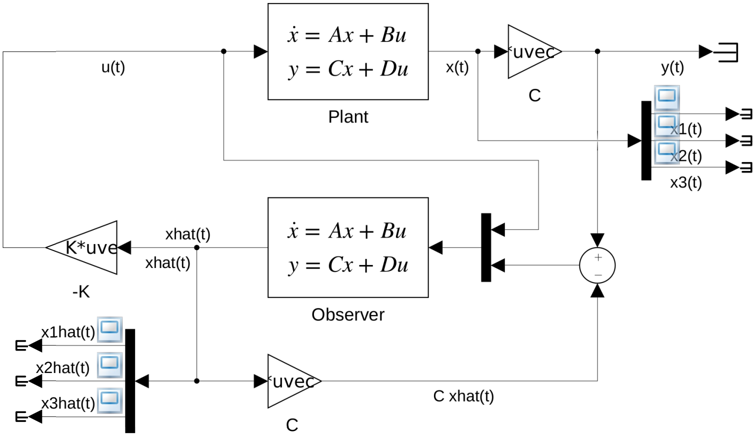
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Ya se realizó el diseño por separado de la retroalimentación de estados y el observador de estados. Por lo tanto, se puede realizar la conexión del observador y la retroalimentación a la planta.

Control por Retroalimentación y Observación de Estados - Ejemplo

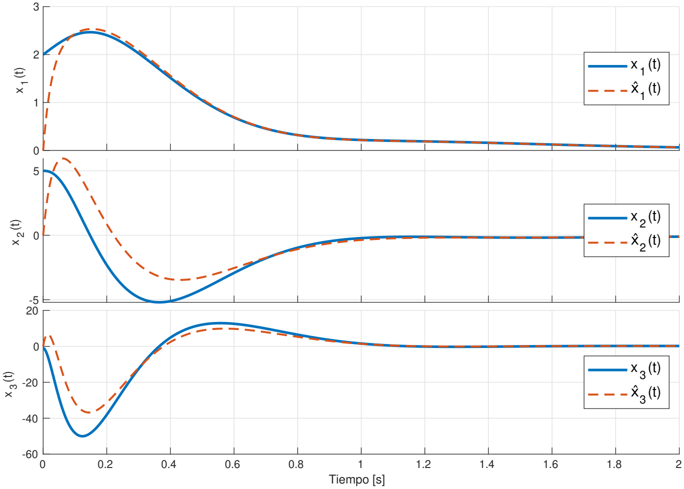
Implementación en Simulink del Compensador (Control y Observador de Estados)



Control por Retroalimentación y Observación de Estados - Ejemplo

Respuesta del sistema con compensador ante condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0) = [2,\ 5,\ -1]^\intercal$.

La velocidad de convergencia de la estimación se ajusta cambiando la posición relativa de los polos del observador respecto a los de la retroalimentación de estados.



Seguimiento de Referencias

- En el esquema de control por retroalimentación de estados presentado el sistema funciona sólamente como regulador (sin entrada de referencia).

Seguimiento de Referencias

- En el esquema de control por retroalimentación de estados presentado el sistema funciona sólamente como regulador (sin entrada de referencia).
- El seguimiento de referencias es muy importante en el diseño de sistemas de control.

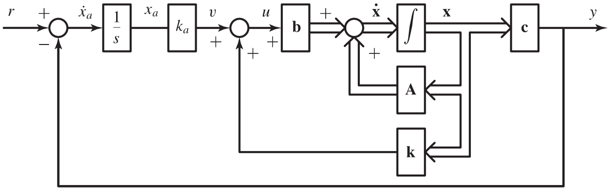
Seguimiento de Referencias

- En el esquema de control por retroalimentación de estados presentado el sistema funciona sólamente como regulador (sin entrada de referencia).
- El seguimiento de referencias es muy importante en el diseño de sistemas de control.
- Se pueden emplear diferentes métodos para introducir una señal de referencia en el control por retroalimentación de estados.

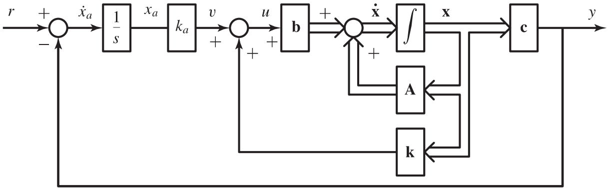
Seguimiento de Referencias

- En el esquema de control por retroalimentación de estados presentado el sistema funciona sólamente como regulador (sin entrada de referencia).
- El seguimiento de referencias es muy importante en el diseño de sistemas de control.
- Se pueden emplear diferentes métodos para introducir una señal de referencia en el control por retroalimentación de estados.
- A continuación se presenta un método que elimina el error de estado estacionario respecto a la referencia y rechaza las perturbaciones.

Seguimiento de Referencias

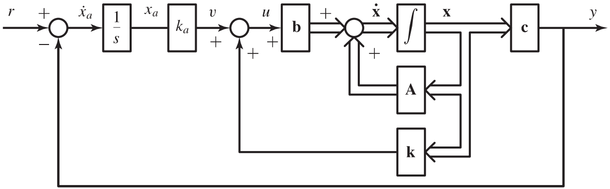


Seguimiento de Referencias



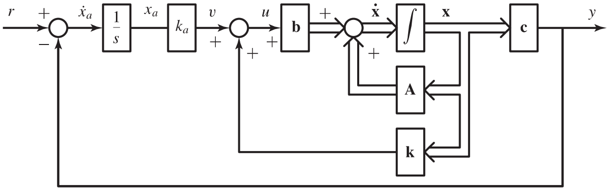
- Se introduce una retroalimentación desde la salida que se compara con la referencia.

Seguimiento de Referencias



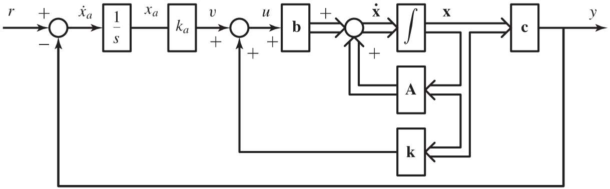
- Se introduce una retroalimentación desde la salida que se compara con la referencia.
- El error de la referencia respecto al error se introduce a un integrador.

Seguimiento de Referencias



- Se introduce una retroalimentación desde la salida que se compara con la referencia.
- El error de la referencia respecto al error se introduce a un integrador.
- El resultado se suma a la salida de la retroalimentación de estados.

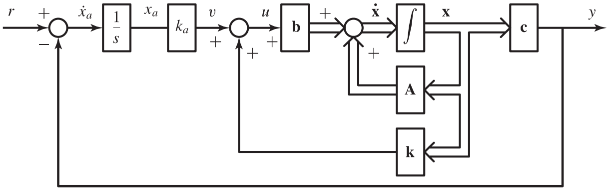
Seguimiento de Referencias



Se agrega una nueva variable de estado:

$$\dot{x}_a(t) = r(t) - y(t) = r(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & k_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix}$$



Se agrega una nueva variable de estado:

$$\dot{x}_a(t) = r(t) - y(t) = r(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

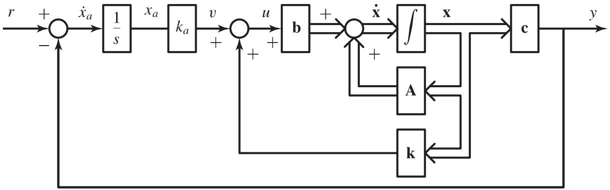
$$u(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & k_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix}$$

Reemplazando en la ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{x}_a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}k_a \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

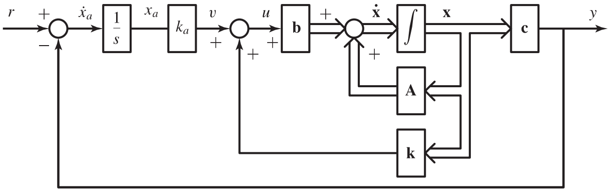
$$y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_a(t) \end{bmatrix}$$

Seguimiento de Referencias



Para calcular las ganancias K y k_a se construyen las matrices expandidas

$$A_e = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$



Para calcular las ganancias K y k_a se construyen las matrices expandidas

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

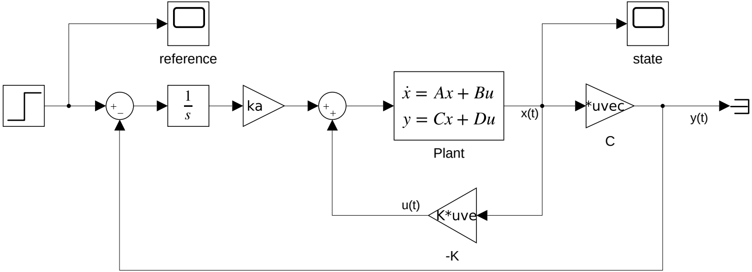
y se utiliza la función `place` de Matlab:

```
A = [0 1 0; 0 0 1; -2 -3 -5];
B = [0; 0; 1];
C = [1 0 0];
D = 0;
Ae = [A zeros(3,1); -C 0];
Be = [B; 0];

p_des = [-0.8+0.839, -0.8-0.839, -8 -10];
Ke = place(Ae,Be,p_des);
K = Ke(1:3);
ka = Ke(4);
```

Seguimiento de Referencias - Ejemplo

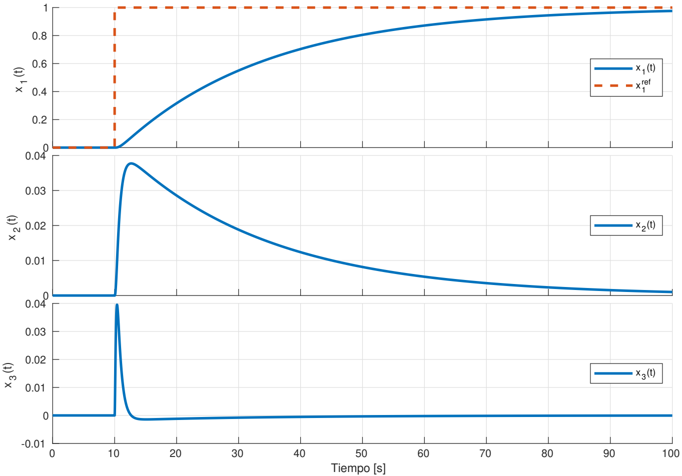
Implementación en Simulink de la retroalimentación de estados con seguimiento de referencia.



Seguimiento de Referencias - Ejemplo

Respuesta del sistema con compensador ante condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0) = [2,\ 5,\ -1]^\intercal$.

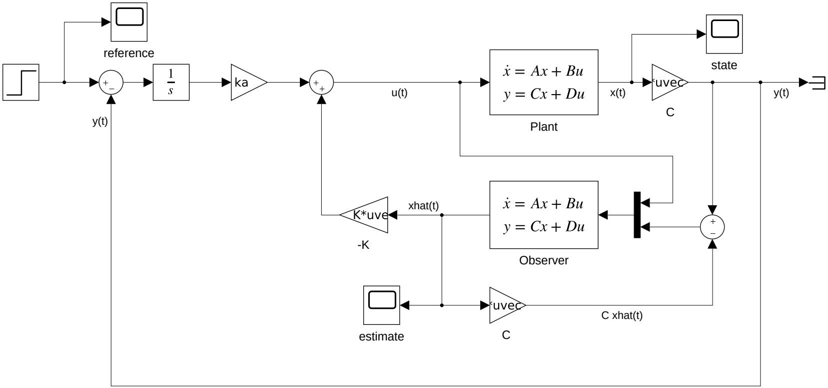
La salida del sistema (correspondiente a $x_1(t)$) sigue a la referencia, mientras los otros estados convergen al equilibrio.



Compensador con Seguimiento de Referencia

Compensador con Seguimiento de Referencia - Ejemplo

Implementación en Simulink del compensador (control y observador de estados) con seguimiento de referencia:

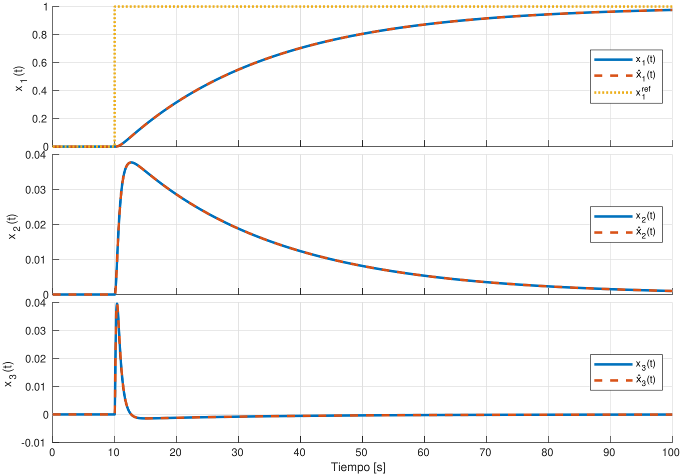


Compensador con Seguimiento de Referencia - Ejemplo

Respuesta del sistema con compensador ante condiciones iniciales $\mathbf{x}(t_0) = [0,\ 0,\ 0]^{\mathsf{T}}$.

El observador produce un estimado correcto de las variables de estado.

El control por retroalimentación de estados garantiza la estabilidad del sistema mientras que la retroalimentación de la salida permite el seguimiento de la referencia.



Conclusión

Conclusión

- El método de diseño basado en ubicación de polos combinado con observadores es muy útil.

Conclusión

- El método de diseño basado en ubicación de polos combinado con observadores es muy útil.
- Los polos deseados de lazo cerrado pueden ubicarse de manera arbitraria si la planta es completamente controlable.

Conclusión

- El método de diseño basado en ubicación de polos combinado con observadores es muy útil.
- Los polos deseados de lazo cerrado pueden ubicarse de manera arbitraria si la planta es completamente controlable.
- Si no todos los estados son medibles, un observador debe ser incorporado para estimarlos.

Conclusión

- El método de diseño basado en ubicación de polos combinado con observadores es muy útil.
- Los polos deseados de lazo cerrado pueden ubicarse de manera arbitraria si la planta es completamente controlable.
- Si no todos los estados son medibles, un observador debe ser incorporado para estimarlos.
- Durante el diseño, diferentes conjuntos de polos deseados de lazo cerrado pueden considerarse para seleccionar el que genere un mejor desempeño.