



Pontificia Universidad  
**JAVERIANA**  
Colombia

# Pontificia Universidad Javeriana

Facultad de Ingeniería

Departamento de Electrónica

## Control de Sistemas

Clase 5: Especificaciones de Desempeño

Gerardo Becerra, Ph.D.

[gbecerra@javeriana.edu.co](mailto:gbecerra@javeriana.edu.co)

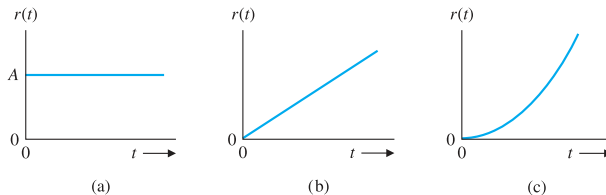
Febrero 25, 2020

# Introducción

- Objetivo del diseño de sistemas de control → ajustar la respuesta transitoria y de estado estacionario.
- Proceso de diseño → requiere definir y medir el desempeño.
- Desempeño deseado  $\Rightarrow$  ajuste de parámetros del controlador → respuesta deseada.
- Dos partes de la respuesta:
  - Respuesta transitoria: Desaparece con el tiempo.
  - Respuesta de estado estacionario: existe por un largo tiempo después del estímulo inicial.
- Especificaciones de diseño:
  - Índices de la respuesta en tiempo para determinada entrada de prueba.
  - Exactitud de la respuesta en estado estacionario.
- Compromiso entre diferentes índices de desempeño.

# Señales de Prueba

- Inicialmente, debe determinarse si el sistema de control es estable.
- Si es estable, la respuesta a determinadas señales de prueba provee varias medidas de desempeño.
- Usualmente, la entrada del sistema en condiciones de operación no es conocida  $\rightarrow$  se usan señales de prueba.
- Usar una señal de prueba estandar  $\rightarrow$  permite comparar diferentes diseños.



**Figure 1:** Señales de prueba: (a) escalón, (b) rampa, (c) parábola.

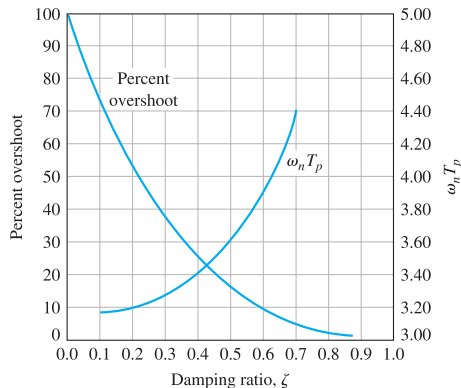
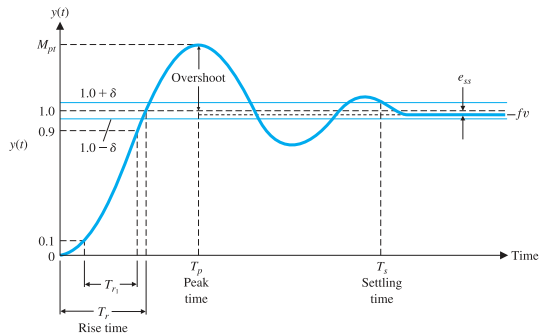
## Desempeño de Sistemas de Segundo Orden

---

# Desempeño de Sistemas de Segundo Orden

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$PO = 100e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$



**Compromiso entre velocidad de la respuesta y sobrepico!**

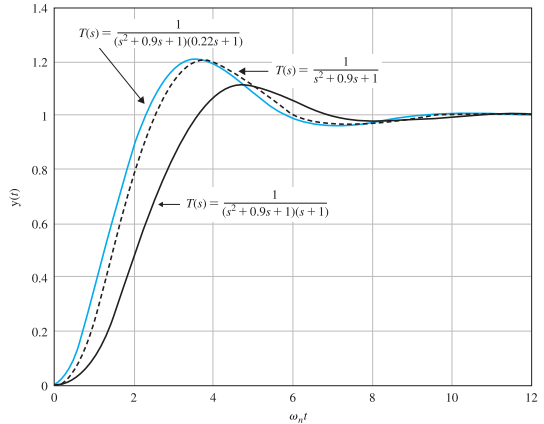
# Efectos de un Tercer Polo en la Respuesta de un Sistema de Segundo Orden

Sistema de Segundo Orden con un Polo en  $s = -1/\gamma$ :

$$T(s) = \frac{1}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + 1)(\gamma s + 1)}$$

Condición para asumir que el efecto del tercer polo sobre los polos dominantes es *despreciable*:

$$1/\gamma \geq 10\zeta\omega_n$$



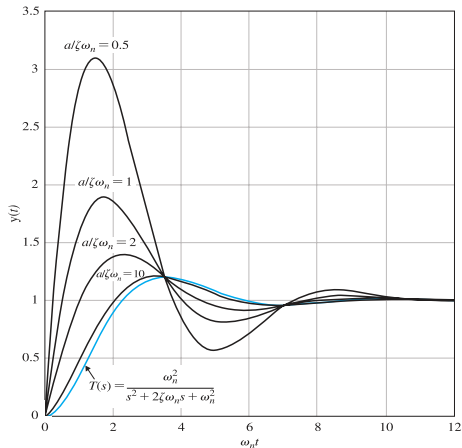
# Efectos de un Tercer Cero en la Respuesta de un Sistema de Segundo Orden

Sistema de Segundo Orden con un Cero  
en  $s = -a$ :

$$T(s) = \frac{(\omega_n^2/a)(s + a)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Condición para asumir que el efecto del  
cero sobre los polos dominantes es  
*despreciable*:

$$a \geq 10\zeta\omega_n$$



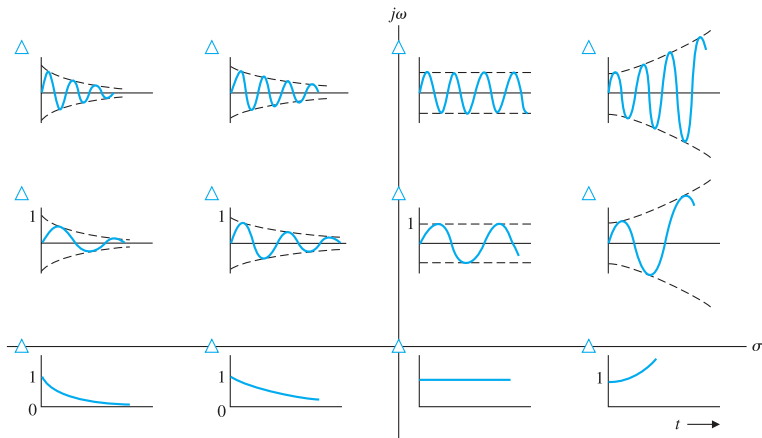
# Ubicación de los Polos y Respuesta Transitoria

---

- Relación polos - ceros determina la respuesta en tiempo.
- Análisis y diseño de sistemas de control: ubicación de polos y ceros.
- Efectos en la respuesta paso (impulso) al agregar o mover polos y ceros.
- Polos: Determinan los modos de respuesta.
- Ceros: Establecen ponderación relativa entre diferentes modos.
- Cero cercano a un polo: disminuye la contribución relativa del polo a la respuesta del sistema.



# Ubicación de los Polos y Respuesta Transitoria



Tipos de respuesta transitoria para diferentes ubicaciones de los polos.

## Error en Estado Estacionario

---

# Error en Estado Estacionario de Sistemas Retroalimentados

- Retroalimentación  $\rightarrow$  útil para disminuir el error en estado estacionario.
- Error en el lazo de retroalimentación:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}R(s)$$

- Usando el teorema del valor final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}R(s)$$

## Error en Estado Estacionario - Entrada Paso

- Entrada paso:  $R(s) = A/s$ :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A/s}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s)}$$

- Función de transferencia general:

$$G_c(s)G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^M (s + z_i)}{s^N \prod_{k=1}^Q (s + p_k)}$$

- $e_{ss}$  depende del número de integradores  $N$ .  
Para un sistema tipo cero ( $N = 0$ ):

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K \prod_{i=1}^M z_i / \prod_{k=1}^Q p_k}$$

- Constante de error de posición:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s)G(s).$$

- Error de estado estacionario para  $N = 0$ :

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + K_p}$$

- Error de estado estacionario Para  $N \geq 1$ :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + K \prod z_i / \prod p_k} = 0$$

## Error en Estado Estacionario - Entrada Rampa

- Para una rampa  $R(s) = A/s^2$ :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A/s^2}{1 + G_c(s)G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s + sG_c(s)G(s)}$$

- $e_{ss}$  depende del número de integradores  $N$ . Para un sistema tipo cero ( $N = 0$ ),  $e_{ss} = \infty$ .
- Para un sistema tipo 1 ( $N = 1$ ):

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{sK \prod (s + z_i) / (s \prod (s + p_k))} = \frac{A}{K \prod z_i / \prod p_k} = \frac{A}{K_v}$$

- Constante de error de velocidad:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) = K \prod z_i / \prod p_k$$

- Para un sistema tipo  $N \geq 2$ ,  $e_{ss} = 0$ .

## Error en Estado Estacionario - Entrada Parábola

- Para una parábola  $R(s) = A/s^3$ :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A/s^3}{1 + G_c(s)G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2 + s^2 G_c(s)G(s)}$$

- Para un sistema tipo 1 ( $N = 1$ ),  $e_{ss} = \infty$ .
- Para un sistema tipo 2 ( $N = 2$ ):

$$e_{ss} = \frac{A}{K \prod z_i / \prod p_k} = \frac{A}{K_a}$$

- Constante de error de aceleración:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s)G(s) = K \prod z_i / \prod p_k$$

- Para un sistema tipo  $N \geq 3$ ,  $e_{ss} = 0$ .

# Índices de Desempeño

---

# Índices de Desempeño

- Integral del cuadrado del error (ISE):

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt$$

- Integral del valor absoluto del error (IAE):

$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt$$

- Integral del valor absoluto del error ponderado en el tiempo (ITAE):

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt$$

- Integral del cuadrado del error ponderado en el tiempo (ITSE):

$$ITSE = \int_0^T te^2(t)dt$$

**Objetivo:** seleccionar parámetros del sistema para minimizar algún índice de desempeño.

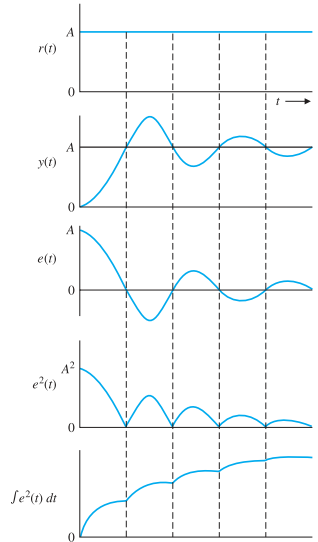


# Índices de Desempeño

- ISE: otorga más peso a errores grandes, lo cual usualmente ocurre al inicio de la respuesta, y menos peso a errores pequeños, lo cual ocurre normalmente hacia el final de la respuesta.
- ISE: produce ganancias del controlador grandes y respuestas muy oscilatorias.
- ITAE, ITSE: agrega un término de penalización asociado al tiempo transcurrido.

**Integral del cuadrado del error (ISE):**

$$ISE = \int_0^T e^2(t) dt$$



# Minimización de los Índices de Desempeño

- Sistema de control  $\rightarrow$  es óptimo cuando se minimiza algún índice de desempeño seleccionado.
- Valor óptimo de los parámetros  $\rightarrow$  depende del índice de desempeño.
- Para la función de transferencia de lazo cerrado de la forma general:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

se han determinado los coeficientes óptimos que minimizan el ITAE para una entrada paso.

- Ésta función de transferencia tiene  $e_{ss} = 0$  para entrada paso.

## Coeficientes Óptimos Basados en el Criterio ITAE para una Entrada Paso

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

$$s + \omega_n$$

$$s^2 + 1.4\omega_n s + \omega_n^2$$

$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 2.15\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

$$s^4 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4$$

$$s^5 + 2.8\omega_n s^4 + 5.0\omega_n^2 s^3 + 5.5\omega_n^3 s^2 + 3.4\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

$$s^6 + 3.25\omega_n s^5 + 6.60\omega_n^2 s^4 + 8.60\omega_n^3 s^3 + 7.45\omega_n^4 s^2 + 3.95\omega_n^5 s + \omega_n^6$$

## Coeficientes Óptimos Basados en el Criterio ITAE para una Entrada Rampa

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_1s + b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}$$

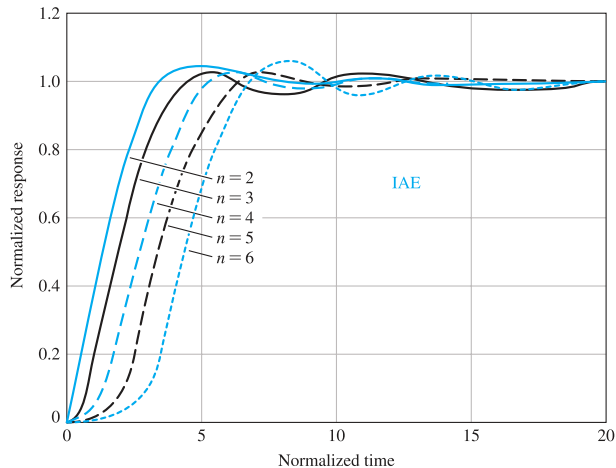
$$s^2 + 3.2\omega_n s + \omega_n^2$$

$$s^3 + 1.75\omega_n s^2 + 3.25\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

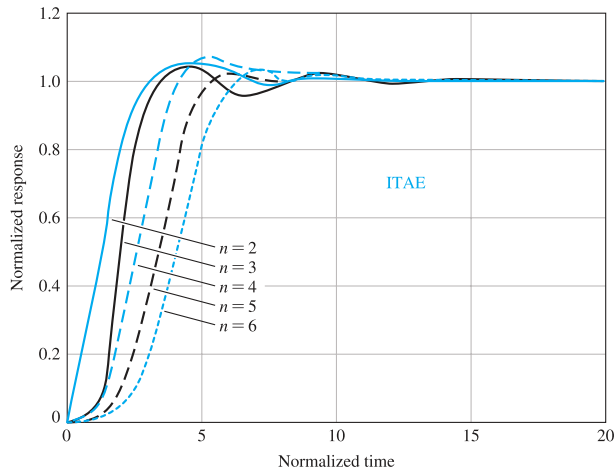
$$s^4 + 2.41\omega_n s^3 + 4.93\omega_n^2 s^2 + 5.14\omega_n^3 s + \omega_n^4$$

$$s^5 + 2.19\omega_n s^4 + 6.50\omega_n^2 s^3 + 6.30\omega_n^3 s^2 + 5.24\omega_n^4 s + \omega_n^5$$

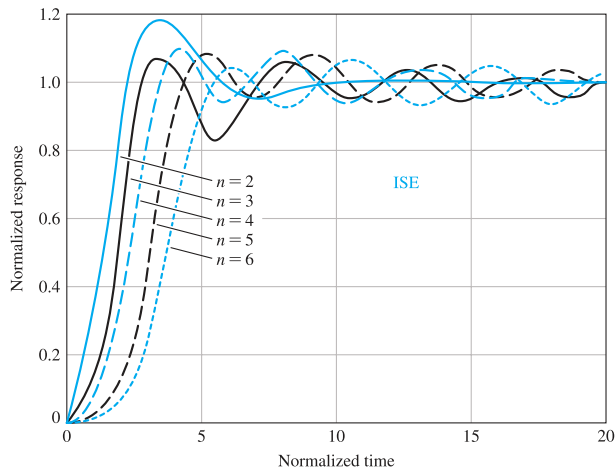
## Respuesta Paso para Coeficientes Óptimos Basados en Criterio IAE



## Respuesta Paso para Coeficientes Óptimos Basados en Criterio ITAE



## Respuesta Paso para Coeficientes Óptimos Basados en Criterio ISE



1. Un sistema de control tiene la siguiente función de transferencia de lazo cerrado:

$$T(s) = \frac{11.1(s + 18)}{(s + 20)(s^2 + 4s + 10)}$$

- Grafique los polos y ceros del sistema.
- Discuta la dominancia de los polos complejos conjugados.
- Qué porcentaje de sobrepico para entrada paso esperaría obtener?



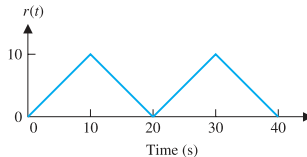
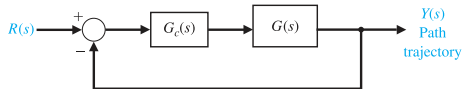
2. Un sistema de control de lazo cerrado con función de transferencia  $T(s)$  tiene dos polos dominantes complejos conjugados. Realice un bosquejo de la región en el semiplano complejo izquierdo donde los polos deben ubicarse para satisfacer los requerimientos dados:
- $0.6 \leq \zeta \leq 0.8, \omega_n \leq 10$ .
  - $0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \geq 10$ .
  - $\zeta \geq 0.5, 5 \leq \omega_n \leq 10$ .
  - $\zeta \leq 0.707, 5 \leq \omega_n \leq 10$ .
  - $\zeta \geq 0.6, \omega_n \leq 6$ .

3. Un sistema de control tiene la función de transferencia  $G_c(s)G(s)$ :

$$G_c(s)G(s) = \frac{75(s+1)}{s(s+5)(s+25)}$$

El sistema sigue una referencia en forma de diente de sierra como se muestra en la figura.

- Determine el error de estado estacionario.
- Realice un bosquejo de la respuesta obtenida.



4. Se desea obtener un sistema de control de velocidad que garantice un error de estado estacionario igual a cero ante una entrada rampa. Un sistema de tercer orden es suficiente para lograr éste objetivo.
- Determine la función de transferencia óptima  $T(s)$  del sistema para un criterio ITAE.
  - Estime el tiempo de asentamiento (settling time) para un criterio de 2% y el porcentaje de sobrepico para una entrada paso cuando  $\omega_n = 10$ .