

243005 - SISTEMAS DINÁMICOS

Unidad 3 - Etapa 4: Analizar comportamiento transitorio y
estacionario de sistemas en dominio de la frecuencia

Presentado a:

Gerardo de Jesús Becerra Becerra

Entregado por:

Juan Pablo Pérez Gómez

Código: 1.234.567.890

Carlos Alberto Fuentes

Código: 1.234.567.890

Luis Miguel Andrade

Código: 1.234.567.890

Grupo: **234567-123**

Universidad Nacional Abierta Y A Distancia - UNAD

Escuela De Ciencias Básicas, Tecnología E Ingeniería

Bogotá D.C.

Febrero 26, 2022

Índice

1. Introducción	1
2. Objetivos	1
3. Desarrollo de la Guía	1
4. Resultados	4
5. Conclusiones	5
Referencias	6

1. Introducción

Un sistema dinámico es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo. Los sistemas físicos en situación no estacionaria son ejemplos de sistemas dinámicos, pero también existen modelos económicos, matemáticos y de otros tipos que son sistemas abstractos y, a su vez, sistemas dinámicos. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se pueden elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema Albalooshi, 2003. Al definir los límites del sistema se hace, en primer lugar, una selección de aquellos componentes que contribuyan a generar los modos de comportamiento, y luego se determina el espacio donde se llevará a cabo el estudio, omitiendo toda clase de aspectos irrelevantes.

2. Objetivos

- Utilizar la presentación de espacios de estados para estudiar sistemas dinámicos.
- Utilizar software especializado para simular el modelo matemático del sistema físico propuesto.

3. Desarrollo de la Guía

1. Cada estudiante continua con el mismo sistema seleccionado del Anexo 2, tomando como base para este desarrollo el modelo matemático obtenido en el dominio del tiempo en la Etapa 2. En la etapa 2 se seleccionó el sistema de suspensión de un automóvil (Fig. 1).

La masa m_1 corresponde a la masa de la llanta y su valor corresponde al número de su grupo colaborativo. La masa m_2 corresponde a la masa del chasis y es equivalente a su peso corporal en kilogramos. k_1 representa la constante elástica de la llanta y su valor corresponde a los 2 primeros números de su documento de identidad. k_2 es la constante elástica del resorte de suspensión y su valor corresponde a los 2 últimos números de su documento de identidad. b_1 es la constante del amortiguador y su valor corresponde al 5 número de su documento de identidad.

Se tiene como señal de entrada a $r(t)$ que es el nivel de la calle y la salida es $y(t)$ que representa la posición vertical del chasis del automóvil respecto a algún punto de equilibrio.

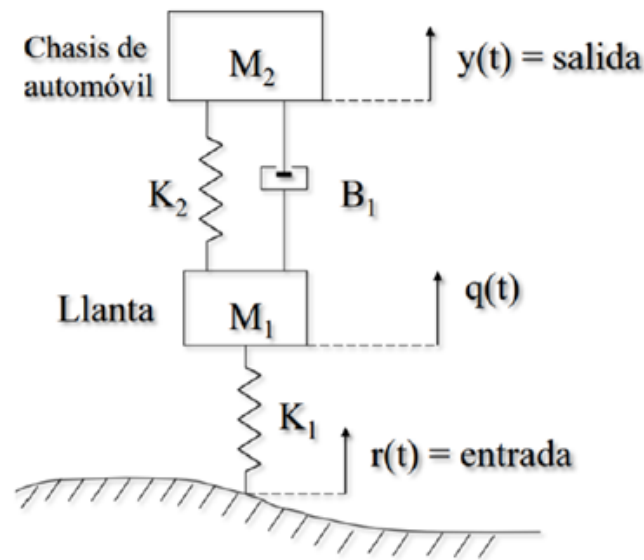


Figura 1: Sistema mecánico seleccionado.

2. Para el sistema seleccionado, aplicar principios físicos y matemáticos que le permitan obtener el modelo matemático del sistema representado por ecuaciones de espacios de estados.

Las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema en el dominio del tiempo son:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{k_1}{m_1} r - \frac{b_1}{m_1} \frac{dq}{dt} - \frac{k_1 + k_2}{m_1} q - \frac{b_1}{m_1} \frac{dy}{dt} - \frac{k_2}{m_1} y \quad (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{b_1}{m_2} \frac{dy}{dt} - \frac{k_2}{m_2} y + \frac{b_1}{m_2} \frac{dq}{dt} + \frac{k_2}{m_2} q \quad (2)$$

$$x_1 = q \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \ddot{x}_1 = \frac{d^2 q}{dt^2}$$

$$x_2 = y \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \ddot{x}_2 = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$u(t) = r$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{k_1}{m_1} u(t) - \frac{b_1}{m_1} \dot{x}_1 - \frac{k_1 + k_2}{m_1} x_1 - \frac{b_1}{m_1} \dot{x}_2 - \frac{k_2}{m_1} x_2 \quad (3)$$

$$\ddot{x}_2 = -\frac{b_1}{m_2} \dot{x}_2 - \frac{k_2}{m_2} x_2 + \frac{b_1}{m_2} \dot{x}_1 + \frac{k_2}{m_2} x_1 \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (6)$$

- k_1 : dos primeros dígitos de su número de documento de identidad = 80.
- k_2 : dos últimos dígitos de su número de documento de identidad = 69.
- b_1 : quinto número de su documento de identidad = 2.
- m_1 : número grupo colaborativo = 117.
- m_2 : peso corporal en kilogramos = 70.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{149}{117} & -\frac{2}{117} & -\frac{80}{117} & -\frac{2}{117} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{69}{7} & \frac{2}{70} & -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{80}{117} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (7)$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

3. Obtener las ecuaciones de espacios de estados y su correlación con la función de transferencia que representa el sistema seleccionado.

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{149}{117} & -\frac{2}{117} & -\frac{80}{117} & -\frac{2}{117} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{69}{7} & \frac{2}{70} & -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{80}{117} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$sI - A = s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{149}{117} & -\frac{2}{117} & -\frac{80}{117} & -\frac{2}{117} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{69}{7} & \frac{2}{70} & -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$= \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ \frac{149}{117} & s + \frac{2}{117} & \frac{80}{117} & \frac{2}{117} \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} & \frac{69}{7} & s + \frac{2}{70} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Dadas las dimensiones de la matriz, se realizó el resto del desarrollo de manera computacional con MATLAB:

```
clear all
close all
clc
```

```
k1 = 80;
k2 = 69;
b1 = 2;
m1 = 17;
m2 = 70;
```

```
A = [0 1 0 0; ...
      -(k1+k2)/m1 -b1/m1 -k2/m1 -b1/m1; ...
      0 0 0 1; ...
      k2/m2 b1/m2 -k2/m2 -b1/m2];
```

```
B = [0; k1/m1; 0; 0];
```

```
C = [0 0 1 0];
```

```
D = [0];
```

```
[N,D] = ss2tf(A,B,C,D);
```

```
H1 = tf(N,D)
```

$$H(s) = \frac{0,1345s + 4,639}{s^4 + 0,1462s^3 + 9,757s^2 + 0,5983s + 12,64}$$

Si comparamos esta ecuación con la obtenida por el método de transformada de Laplace:

4. Resultados

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor

```

1 clear all
2 close all
3 clc
4
5 k1 = 80;
6 k2 = 60;
7 b1 = 2;
8 m1 = 17;
9 m2 = 70;
10
11 A = [0 1 0 0; -(k1+k2)/m1 -b1/m1 -k2/m1 0 0 0; k2/m2 b1/m2 -k2/m2 -b1/m2];
12 B = [0;k1/m1;0;0];
13 C = [0 0 1 0];
14 D = [0];
15
16 [N,D] = ss2tf(A,B,C,D);
17
18 H1 = tf(N,D)
19
Command Window
H1 =
0.1345 s + 4.639
-----
s^4 + 0.1462 s^3 + 9.757 s^2 + 0.5983 s + 12.64
Continuous-time transfer function.
>>

```

Figura 2: Ejecución del código desarrollado.

gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa. Sternberg, 2010

5. Conclusiones

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi

tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris. Chatterjee, 2021

Referencias

- Albalooshi, F. (2003). *Virtual Education: Cases in Learning & Teaching Technologies*. IRM Press. <https://books.google.com.co/books?id=P7U2pjrBVP0C>
- Chatterjee, S. (2021). *COVID-19: Tackling Global Pandemics through Scientific and Social Tools*. Elsevier Science. <https://books.google.com.co/books?id=XHINEAAAQBAJ>
- Sternberg, S. (2010). *Dynamical Systems*. Dover Publications. <https://books.google.com.co/books?id=T2uTAwAAQBAJ>