NOMBRE DEL CURSO

CÓDIGO DEL CURSO

Unidad X – Etapa Y

Tutor:

NOMBRE DEL DOCENTE

Grupo:

223456_123

Presentado por:

NOMBRE DEL AUTOR 1

Código: 1.000.000.000

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA

UNAD

Ciudad, Fecha

Introducción

Un sistema dinámico es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo. Los sistemas físicos en situación no estacionaria son ejemplos de sistemas dinámicos, pero también existen modelos económicos, matemáticos y de otros tipos que son sistemas abstractos y, a su vez, sistemas dinámicos. El comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se pueden elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema.

Al definir los límites del sistema se hace, en primer lugar, una selección de aquellos componentes que contribuyan a generar los modos de comportamiento, y luego se determina el espacio donde se llevará a cabo el estudio, omitiendo toda clase de aspectos irrelevantes.

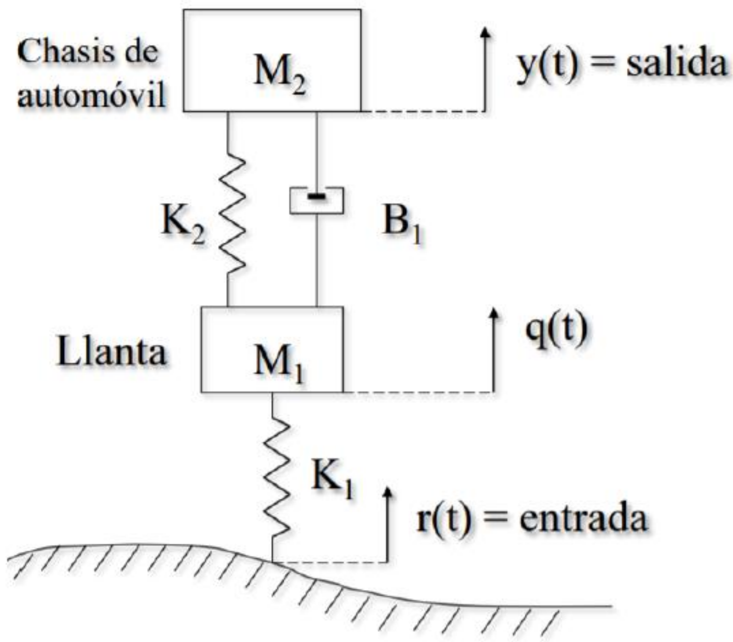
OBJETIVOS

- *Utilizar la presentación de espacios de estados para estudiar sistemas dinamicos*
- *Utilizar software especializado para simular el modelo matemático del sistema físico propuesto.*

DESARROLLO DE LA GUIA

1. *Cada estudiante continua con el mismo sistema seleccionado del Anexo 2, tomando como base para este desarrollo el modelo matemático obtenido en el dominio del tiempo en la Etapa 2.*

En la etapa 2 se seleccionó el sistema de suspensión de un automóvil



La masa m1 corresponde a la masa de la llanta y su valor corresponde al número de su grupo colaborativo. La masa m2 corresponde a la masa del chasis y es equivalente a su peso corporal en kilogramos. k1 representa la constante elástica de la llanta y su valor corresponde a los 2 primeros números de su documento de identidad. k2 es la constante elástica del resorte de suspensión y su valor corresponde a los 2 últimos números de su documento de identidad. b1 es *la constante del amortiguador y su valor corresponde al 5 número de su documento de identidad.*

Se tiene como señal de entra a r(t) que es el nivel de la calle y la salida es y(t) que representa la posición vertical del chasis del automóvil respecto a algún punto de equilibrio.

1. *Para el sistema seleccionado, aplicar principios físicos y matemáticos que le permitan obtener el modelo matemático del sistema representado por ecuaciones de espacios de estados.*

Las ecuaciones diferenciales que modelan el sistema en el dominio del tiempo son:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{k_1}{m_1}r - \frac{b_1}{m_1}\frac{dq}{dt} - \frac{k_2 + k_1}{m_1}q - \frac{b_1}{m_1}\frac{dy}{dt} - \frac{k_2}{m_1}y$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{b_1}{m_2}\frac{dy}{dt} - \frac{k_2}{m_2}y + \frac{b_1}{m_2}\frac{dq}{dt} + \frac{k_2}{m_2}q$$

$$x_1 = q$$

$$\dot{x_1} = \frac{dq}{dt}$$

$$\ddot{x_1} = \frac{d^2 q}{dt^2}$$

$$x_2 = y$$

$$\dot{x_2} = \frac{dy}{dt}$$

$$\ddot{x_2} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$u(t) = r$$

$$\ddot{x_1} = \frac{k_1}{m_1} u(t) - \frac{b_1}{m_1}\dot{x_1} - \frac{k_2 + k_1}{m_1} x_1 - \frac{b_1}{m_1}\dot{x_2} - \frac{k_2}{m_1} x_2$$

$$\ddot{x_2} = -\frac{b_1}{m_2}\dot{x_2} - \frac{k_2}{m_2} x_2 + \frac{b_1}{m_2}\dot{x_1} + \frac{k_2}{m_2} x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \ddot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \ddot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_2 + k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x_1} \\ x_2 \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x_1} \\ x_2 \\ \dot{x_2} \end{bmatrix}$$

- $K_1 = dos\ primeros\ digitos\ de\ su\ numero\ de\ documento\ de\ identidad = 80$
- $K_2 = dos\ ultimos\ digitos\ de\ su\ numero\ de\ documento\ de\ identidad = 69$
- $b_1 = quinto\ numero\ de\ su\ documento\ de\ identidad = 2$
- $m_1 = numero\ grupo\ colaborativo = 117$
- $m_2 = peso\ corporal\ en\ kilogramos = 70$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \ddot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \ddot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{149}{117} & -\frac{2}{117} & -\frac{80}{117} & -\frac{2}{117} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{69}{7} & \frac{2}{70} & -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x_1} \\ x_2 \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{80}{117} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x_1} \\ x_2 \\ \dot{x_2} \end{bmatrix}$$

2. *Obtener las ecuaciones de espacios de estados y su correlación con la función de transferencia que representa el sistema seleccionado.*

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{149}{117} & -\frac{2}{117} & -\frac{80}{117} & -\frac{2}{117} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{69}{7} & \frac{2}{70} & -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{80}{117} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

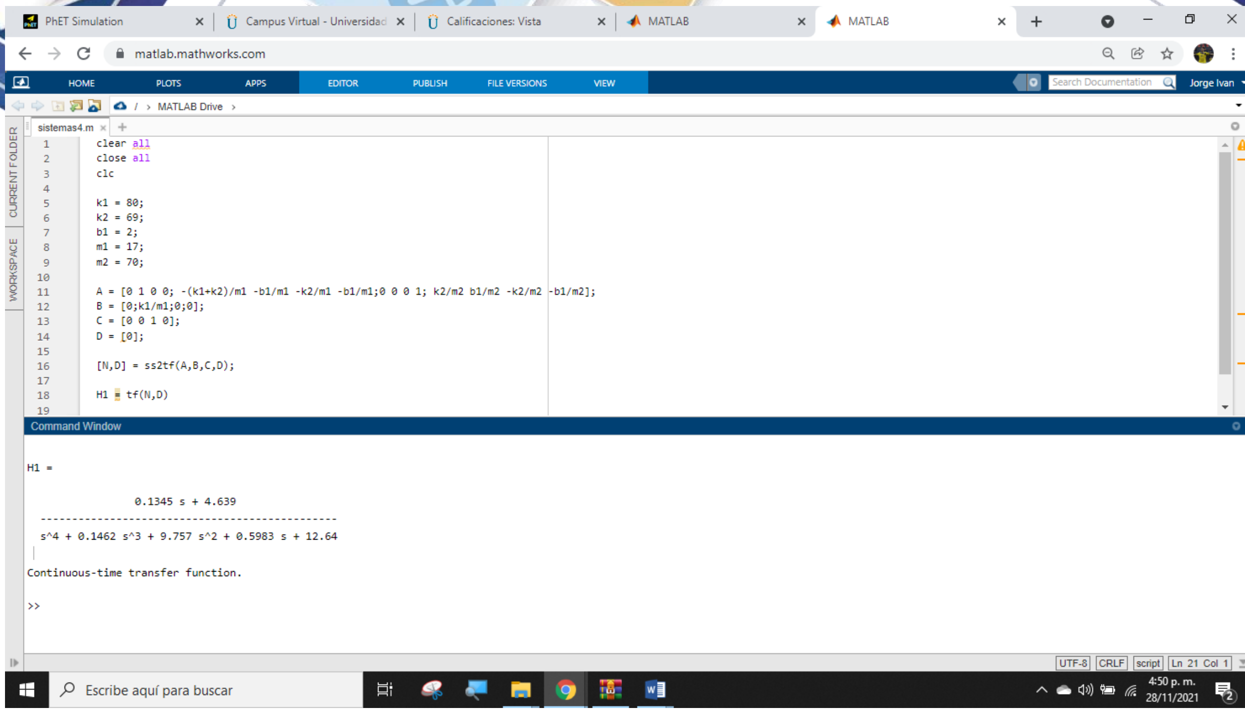
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - A = s\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\-\frac{149}{117} & -\frac{2}{117} & -\frac{80}{117} & -\frac{2}{117}\\0 & 0 & 0 & 1\\\frac{69}{7} & \frac{2}{70} & -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70}\end{bmatrix}$$

$$sI - A = \begin{bmatrix}s & -1 & 0 & 0\\-\frac{149}{117} & s+\frac{2}{117} & \frac{80}{117} & -\frac{2}{117}\\0 & 0 & s & -1\\-\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} & \frac{69}{7} & s+\frac{2}{70}\end{bmatrix}$$

Dada las dimensiones de la matriz, se realizo el resto del desarrollo de manera computacional con MATLAB:

```
clear all
close all
clc

k1 = 80;
k2 = 69;
b1 = 2;
m1 = 17;
m2 = 70;

A = [0 1 0 0; -(k1+k2)/m1 -b1/m1 -k2/m1 -b1/m1;0 0 0 1; k2/m2 b1/m2 -k2/m2 -b1/m2];
B = [0;k1/m1;0;0];
C = [0 0 1 0];
D = [0];

[N,D] = ss2tf(A,B,C,D);

H1 = tf(N,D)
```




```
H1 =

                0.1345 s + 4.639
  ----------------------------------------------
  s^4 + 0.1462 s^3 + 9.757 s^2 + 0.5983 s + 12.64

Continuous-time transfer function.

>>
```

$$H(s) = \frac{0.1345s + 4.639}{s^4 + 0.1462s^3 + 9.757s^2 + 0.5983s + 12.64}$$

Si comparamos esta ecuación con la obtenida por el método de transformada de Laplace:

$$H(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{(b_1 s + k_2)k_1}{(m_2 s^2 + \; b_1 s + k_2)(m_1 s^2 + b_1 s + k_2 + k_1) + (b_1 s + k_2)(b_1 s + k_2)}$$

```
clear all
close all
clc

k1 = 80;
k2 = 69;
b1 = 2;
m1 = 17;
m2 = 70;

s=tf('s')

num = (b1*s + k2)*k1
den = (m2*s^2 + b1*s + k2)*(m1*s^2 + b1*s + k2 + k1)+(b1*s + k2)*(b1*s + k2)

H = num/den
```

```
H =

                 160 s + 5520
  ---------------------------------------------
  1190 s^4 + 174 s^3 + 11611 s^2 + 712 s + 15042

Continuous-time transfer function.
```

Si a la anterior ecuación, dividimos el numerado y el denominador por 10010 obtenemos:

```
H = (1/10010 * num)/(1/10010 * den)
```

```
                  0.01598 s + 0.5514
  ------------------------------------------------------
  0.1189 s^4 + 0.01738 s^3 + 1.16 s^2 + 0.07113 s + 1.503

Continuous-time transfer function.
```

La anterior ecuación es igual a la obtenida por espacios de estado, por tanto, el desarrollo es correcto, ahora si calculamos el lugar geométrico de las raíces de este sistema nos encontramos:

Que el sistema tiene 2 polos en el semiplano derecho, por tanto, el sistema es inestable.

3. *Determinar la controlabilidad y observabilidad del sistema planteado por medio del procedimiento correspondiente.*

Partiendo de las matrices de estados:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{149}{117} & -\frac{2}{117} & -\frac{80}{117} & -\frac{2}{117} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{69}{7} & \frac{2}{70} & -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{80}{117} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de controlabilidad y observabilidad para un sistema de 4 dimensiones se definen como:

$$C_o = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{149}{117} & -\frac{2}{117} & -\frac{80}{117} & -\frac{2}{117} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{69}{7} & \frac{2}{70} & -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{80}{117} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6838 \\ -0.0117 \\ 0 \\ 0.0195 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = A(AB) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{149}{117} & -\frac{2}{117} & -\frac{80}{117} & -\frac{2}{117} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{69}{7} & \frac{2}{70} & -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.6838 \\ -0.0117 \\ 0 \\ 0.0195 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0117 \\ -0.8709 \\ 0.0195 \\ 0.6731 \end{bmatrix}$$

$$A^3B = A(A^2B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{149}{117} & -\frac{2}{117} & -\frac{80}{117} & -\frac{2}{117} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{69}{7} & \frac{2}{70} & -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.0117 \\ -0.8709 \\ 0.0195 \\ 0.6731 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8709 \\ 0.0067 \\ 0.6731 \\ -0.0749 \end{bmatrix}$$

$$C_o = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 0.6838 & -0.0117 & -0.8709 \\ 0.6838 & -0.0117 & -0.8709 & 0.0067 \\ 0 & 0 & 0.0195 & 0.6731 \\ 0 & 0.0195 & 0.6731 & -0.0749 \end{bmatrix}$$

La matriz de observabilidad para un sistema de 2 dimenciones se definen como:

$$O_b = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix}$$

$$CA = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{149}{117} & -\frac{2}{117} & -\frac{80}{117} & -\frac{2}{117} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{69}{7} & \frac{2}{70} & -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

$$CA^2 = (CA)A = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{149}{117} & -\frac{2}{117} & -\frac{80}{117} & -\frac{2}{117} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{69}{7} & \frac{2}{70} & -\frac{69}{7} & -\frac{2}{70} \end{bmatrix}$$

$$= [0.9857 \quad 0.0286 \quad -0.9857 \quad -0.6]$$

$CA^3 = (CA^2)A$

$$= [0.9857 \quad 0.0286 \quad -0.9857 \quad -0.0286]\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{20}{143} & -\frac{9}{143} & -\frac{10}{143} & -\frac{9}{143} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{9}{70} & -\frac{1}{7} & -\frac{9}{70} \end{bmatrix}$$

$$= [-0.0645 \quad 0.9844 \quad 0.0113 \quad -0.9854]$$

$$O_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.9857 & 0.0286 & -0.9857 & -0.0286 \\ -0.0645 & 0.9844 & 0.0113 & -0.9854 \end{bmatrix}$$

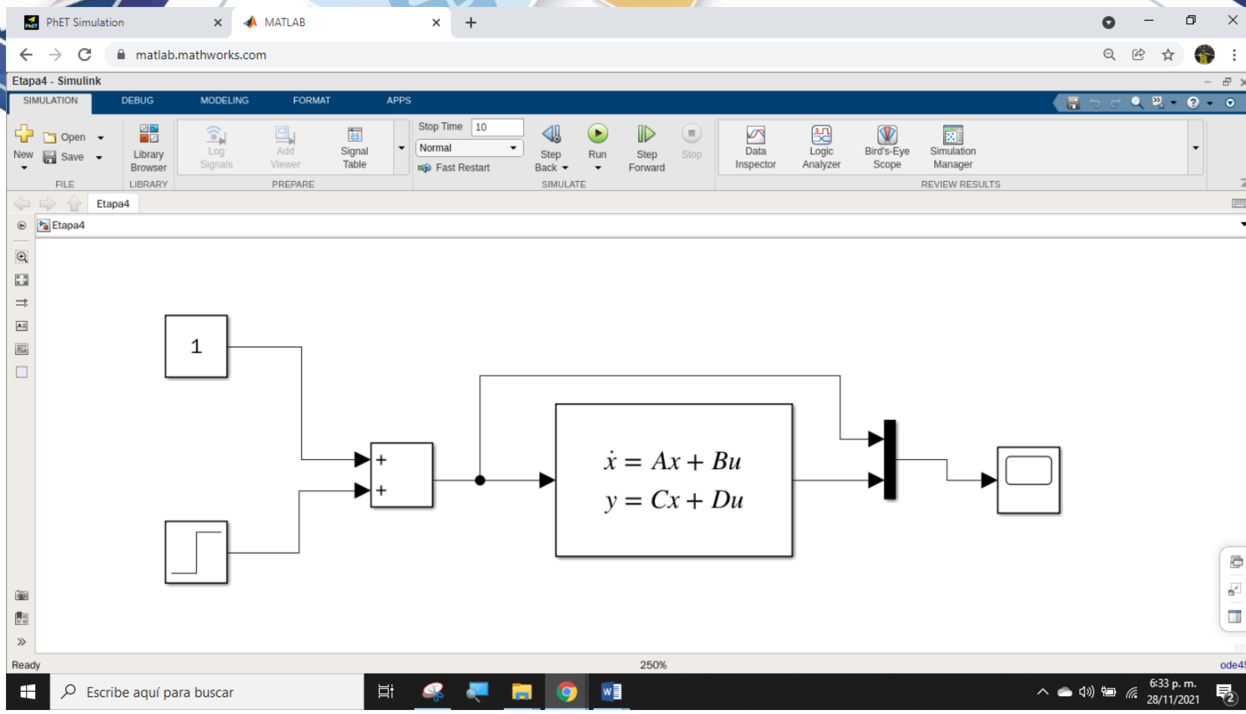
Para determinar si un sistema es controlable y/o observable, el rango de las matrices C_o *y* O_b *deben ser iguales a sus dimensiones, por lo tanto:*

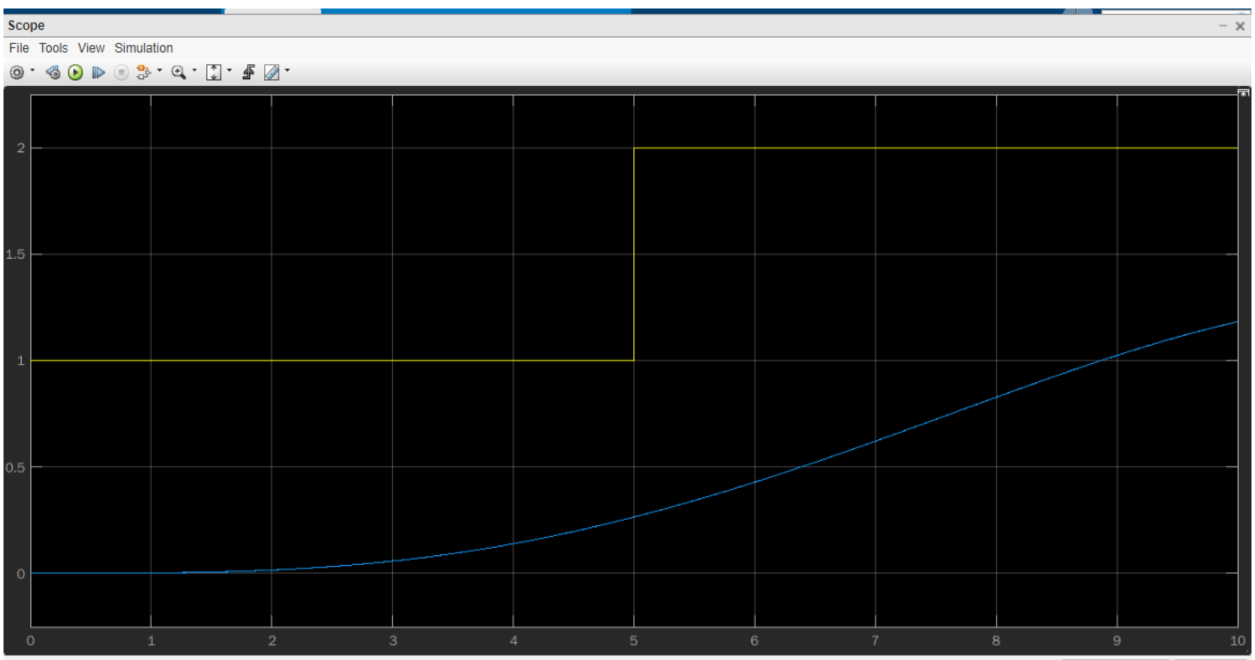
Command Window

```
--

         0    0.6838   -0.0117   -0.8709
    0.6838   -0.0117   -0.8709    0.0067
         0         0    0.0195    0.6731
         0    0.0195    0.6731   -0.0749


Ob =

         0         0    1.0000         0
         0         0         0    1.0000
    0.9857    0.0286   -0.9857   -0.0286
   -0.0645    0.9844    0.0113   -0.9854


unco =

     0


unob =

     0
```

Como se observa, si las variables unco y unob son iguales a 0, se cumple la condición de controlabilidad y observabilidad.

4. *Generar el diagrama de bloques que representa el modelo matemático en espacio de estados del sistema seleccionado, teniendo en cuenta que, una vez transcurridos los 5 primeros segundos, el sistema recibe una señal de perturbación que altera en una unidad la señal de entrada, aumentando así su valor.*


Etapa4 - Simulink
SIMULATION
DEBUG
MODELING
FORMAT
APPS
Stop Time 10
Normal
Fast Restart
Run
Step Forward
Data Inspector
Logic Analyzer
Bird's-Eye Scope
Simulation Manager
Etapa4
1
+
+
$\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx + Du$
Ready
250%
ode45


Scope
File Tools View Simulation
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
0 0.5 1 1.5 2

CONCLUSIONES

Representar sistemas dinámicos por medio de espacios de estados es de gran ayuda en el análisis de dichos sistemas, además de dar inicio al control, evalua sistemas físicos en el dominio del tiempo, y junto a Matlab y simulink son de gran ayuda en el estudio de sistemas dinámicos dado el estudio de las matrices de controlabilidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bolos, V. (s. f.). Matemáticas para los sistemas dinámicos. Recuperado 23 de octubre de 2021, de https://www.uv.es/vbolos/docencia/mplmd/apuntes.pdf

Proyecto OpenCourseWare (OCW) de la UPV/EHU. (s. f.). Estabilidad. Criterio de Routh-Hurwitz. Recuperado 23 de octubre de 2021, de https://ocw.ehu.eus/file.php/83/cap5_html/estabilidad.html