

# 检验有限集合及其二元运算是否构成群的程序

惠 芳\* 吴俊佳\*\* 程 茜(通讯作者)\*  
HUI Fang WU Jun-jia CHENG Qian

**摘 要** 利用 C 语言编制程序检验有限集合及其上二元运算是否适合结合律, 是否存在单位元, 每一个元是否存在逆元, 从而快速检查一个有限集合对所给二元运算是否成一个群。

**关键词** 有限群 结合律 左单位元 左逆元 程序

doi: 10.3969/j.issn.1672-9528.2014.05.94

在半群论、群论的研究中, 经常需要构造反例以支持研究, 这就面临着检验对集合特别是有限集合规定的代数运算是否满足构成半群或群的条件, 其中结合律的检验尤为繁琐, 对含有  $N$  个元的集合, 就结

合律需检验  $N^3$  个式子, 每个式子又需进行四次二元运算; 虽然对于阶数不高于 20 的群的  $N^3$  个数和种类已完全得到<sup>[1]</sup>:

阶数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
群数	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	1	5	1	2	1	14	1	5	1	5

但在实际构建阶数不大于 20 的群时, 仍需与已知的群建立同构映射; 因而可借助编制程序利用计算机进行快速检验; 本文通过用数字字符代替字母字符, 将文 [2] 最多可检验含有 65536 个元的有限集合扩展为任意有限集合。

## 1 预备知识

定义 2.1<sup>[3]</sup> 群的第二定义

一个不空集合  $G$  对于一个叫做乘法的代数运算来说作成成一个群, 假如

I,  $G$  对于乘法来说是封闭的;

II, 结合律成立:  $a(bc)=(ab)c$

对于  $G$  的任意三个元  $a, b, c$  都对;

III,  $G$  里至少存在一个左单位元  $e$ , 能让

$$ea=a$$

对于  $G$  中的任何元  $a$  都成立;

IV, 对于  $G$  的每一个元  $a$ , 在  $G$  里至少存在一个左逆元  $a^{-1}$ , 能让

$$a^{-1}a=e$$

定义 2.2<sup>[3]</sup> 有限群的另一定义

一个有乘法的有限不空集合  $G$  作成成一个群, 假如

、 $G$  对于这个乘法来说是闭的;

、结合律成立:

$$(ab)c=a(bc)$$

对于  $G$  的任意三个元  $a, b, c$  都成立;

、消去律成立:

若  $ax=ax'$ , 那么  $x=x'$ ;

若  $ya=y'a$ , 那么  $y=y'$ 。

## 2 程序

对于一个有限集合来说: 如果利用有限群的另一定义来判断所给的有限集合及其代数运算是否构成群: 封闭性的检验很简单, 只需观察所给的运算表中没有新元素出现即可, 如果有新元素出现则不满足封闭性, 反之则满足封闭性; 对于消去律的验证, 只需

\* 青海师范大学 数学系 青海西宁 810008

\*\* 青海师范大学第二附属中学 青海西宁 810008

观察集合 A 中的所有元素都出现在所给的运算表中每行每列，因而只需检验结合律是否成立；但对于一个给定的阶数很大的群，在判断消去律的时候就会显得麻烦。这时依据群的第二定义检验有限集合及其上二元运算是否构成群，可利用计算机的方法检验结合律是否成立及左单位元，左逆元的存在性。下面，笔者给出利用 C 语言编制的检验程序。

## 2.1 结合律及左单位元的检验程序

```
#include <stdio.h>
#define N 100
int f( int m, int n, int b[N][N] )
{
    return b[m][n]; }
int g( int m, int n, int a[N], int b[N][N] )
{
    int k, t=-1;
    for(k=0; k<N; k++)
        if ( a[k]==f(m, n, b) )
        {
            t=k; break; }
    return t;
}
getdata(int a[N], int b[N][N], int n)
{
    int i, j;
    i=0; j=0;
    printf( "\n Enter the elements of set A:\n");
    for(i=0; i<n; i++)
        scanf("%d", &a[i]);
    printf("\n Enter the elements of matrix B:\n");
    for(i=0; i<n; i++)
        for(j=0; j<n; j++) scanf("%d", &b[i][j]);
    printf( "\n" );
    return;
}
void check(int a[N], int b[N][N], int n)
{
    int i, j, k, s=0;
    for( i=0; i<n; i++)
        if ( s==1 ) break;
        else
        for( j=0; j<n; j++)
            if ( s==1 ) break;
            else
            for( k=0; k<n; k++)
                if ( f(g(i, j, a, b), k, b) != f(i, g(j, k, a, b), b) )
```

```

        {
            s=1;
            printf("NO!\n");
            printf("%2c%2c%2c", a[i], a[j], a[k]);
            printf("\n");
            break;
        }
        if ( s==0 ) printf( "YES!\n");
        return;
    }
    main()
    {
        int i, j, n, t=0, a[N], b[N][N];
        do
        {
            printf("\n Enter the data n: ");
            scanf("%d", &n);
        } while(n<=0 || n>N);
        getdata( a, b, n);
        check(a, b, n);
        for(i=0; i<n; i++)
        {
            for(j=0; j<n; j++)
            {
                if(b[i][j]==a[j])
                {
                    printf("%d", a[i]);
                    t++;
                }
            }
            printf("%4d\n", t);
            return;
        }
    }
}
```

## 2.2 左逆元的检验程序

```
#include <stdio.h>
#define N 100
main()
{
    int i, j, n, s, m, a[N], b[N][N];
    printf("\n Enter the left identity m:\n");
    scanf("%d", &m);
    do
    {
        printf("\n Enter the data n: ");
        scanf("%d", &n);
    } while(n<=0 || n>N);
    printf("\n Enter the elements of set A:\n");
    for(i=0; i<n; i++)
        scanf("%d", &a[i]);
    printf("\n Enter the elements of matrix B:\n");
```

```

for(i=0;i<n;i++)
    for(j=0;j<n;j++) scanf("%d",&b[i][j]);
printf("\n");
for(i=0;i<n;i++)
    {for(j=0;j<n;j++)
      if(b[j][i]==m){
        s=0;
        break;
      }
    else s=1;
    }
    if(s==0)
    printf("Yes!\n");
    else
    printf("No!\n");
}

```

在检验过程中,需将运算表输入,输入的过程即可检验封闭性,因而本程序没有对封闭性检验的过程。

### 3 实例检验

设集合 A 中包含 e,a,b,c,d,f 六个元 .A 的乘法由下表规定 :

	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	e	d	f	b	c
b	b	f	e	d	c	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	c	a	b	f	e
f	f	b	c	a	e	d

试验证集合 A 对于该乘法来说是否作成群。

说明:由于本文中的程序仅对所给有限集 A 中的元为数字时能正常运行.若对于所给有限集 A 中的元为其外的字母或符号时,须先对其做一个替换。

在利用程序检验前,先做如下替换:分别用 1,2,3,4,5,6 代替字母 e,a,b,c,d,f. 则 A 的乘法表为

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	5	6	3	4
3	3	6	1	5	4	2
4	4	5	6	1	2	3
5	5	4	2	3	6	1
6	6	3	4	2	1	5

利用结合律和左单位元的检验程序进行检验,其运行过程如下:

Enter the data n: 6 <CR>

Enter the elements of set A:

1 2 3 4 5 6 <CR>

Enter the elements of matrix B:

1 2 3 4 5 6 2 1 5 6 3 4 3 6 1 5 4 2 4 5 6 1 2 3 5 4 2 3

6 1 6 3 4 2 1 5 <CR>

YES!

111111 6

说明:替换 e,a,b,c,d,f 的字母只要是数字即可,但替换后的数字不能重复(集合中元素具有互异性).YES! 说明所给运算结合律成立,“111111 6”表示有六个 1 即单位元为 1。

利用左逆元的检验程序进行检验,其运行过程如下:

Enter the leftidentity m:

1<CR>

Enter the data n: 6<CR>

Enter the elements of set A:

1 2 3 4 5 6 <CR>

Enter the elements of matrix B:

1 2 3 4 5 6 2 1 5 6 3 4 3 6 1 5 4 2 4 5 6 1 2 3 5 4 2 3

6 1 6 3 4 2 1 5 <CR>

YES!

说明:结果表明此六元集合及所给运算满足:以“1”为单位元,每一个元都有左逆元;因而此六元集合及其上定义的运算构成群。

设集合 A 中包含 a,b,c,d 四个元 .A 的乘法由下表规定:

(下转第 250 页)

与处理需要较高要求,许多信息需要通过计算机技术完成解析,传统人工分析无法满足电力系统检测得出的复杂图像数据,而且信息分析需要极短的处理时间,甚至需要图像收集后1微妙内完成分析,出现电力系统问题后,也需要在1微妙内进行处理,如果处理时间过长,就可能造成极大的电力事故。在电力系统中使用图像识别技术,可以实现智能化图像分析工作,也可以提高电力系统的直观性。使用图像分析可以提高电网的处理运行速度,并且与其他系统可以良好兼容,对提高输电线路安全性有着非常重要的帮助,可以使电网调度运行效果更加优秀。

#### 4 结语

计算机技术将不断在电力系统中应用,也是电力系统自动化的基础要求,对电力系统自动化发展有着非常重要的推动作用。在实际电力系统应用中,需要对计算机技术使用概况进行分析,掌握电力系统的运用方向与实际作用,从而加强实际使用过程的管理水平,加强电

力系统自动化,是提高系统智能水平的关键要素。

#### 参考文献:

- [1] 林艳华. 分析计算机技术在电力系统自动化中的应用[J]. 广东科技, 2010(16):114-145.
- [2] 庄国贤. 浅谈计算机技术在电力系统自动化的应用[J]. 科技资讯, 2011(33):224-225.
- [3] 张爽. 计算机技术的发展推动电力系统自动化进步[J]. 黑龙江科技信息, 2012(32):196-197.
- [4] 张作刚. 计算机技术在电力系统自动化中的应用分析[J]. 广东科技, 2013(4):105-106.
- [5] 刘颖. 计算机技术在电力系统自动化中的应用分析[J]. 城市建设理论研究, 2013(16).
- [6] 董绍彬. 计算机技术在电力系统自动化中的应用分析[J]. 电源技术应用, 2013(5):340.
- [7] 朱伟. 计算机技术在电力系统自动化中的应用分析[J]. 信息通信, 2013(7):142.

(收稿日期:2014-06-13)

(上接第243页)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>c</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>

利用程序进行检验,其运行过程如下:

Enter the data n: 4 <CR>

Enter the elements of set A:

1 2 3 4 <CR>

Enter the elements of matrix B:

1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4 1 2 3 4 <CR>

YES!

1234 4

说明:结果表示该运算结合律成立,但是左单位元不存在,因为输出的是1234四个不同的数字,显示有4个左单位元,这与群有唯一左单位元矛盾,因而左逆元的检验程序就没有必要执行,所以A对于该运算不构成群。

#### 4 结果分析

利用上述C语言程序运行时,输入乘法表,运行结果与实际情况完全相同;对于任意一个有限集合及其上二元运算,利用上面的程序大大节省了检验时间。本程序理论上可检验任意有限集合,但对于元素个数较高的有限集合,人工输入乘法表会比较繁琐,因而在实际过程中,本程序的实现还依赖于乘法表的输入。

#### 参考文献:

- [1] 施武杰. 关于有限群的阶[J]. 常熟理工学院学报, 2005(19):1-5.
- [2] 王绍恒. 有限群的结合律的计算机检查法[J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 2000(25):14-17.
- [3] 张禾瑞. 近世代数基础[M]. 北京:高等教育出版社, 1978.

基金项目:青海省科技项目(2011-Z-734);青海师范大学青年创新基金项目(2012-4-13);青海师范大学教科研项目(2012-6-4)。

[作者简介] 惠芳(1990-),女,湖北人,本科。  
通讯作者:程茜(1975-),女,重庆人,硕士,副教授。研究方向:半群代数。E-mail:cq751201@126.com。

(收稿日期:2014-06-13)