

# Lineárna algebra 1

## (texty k prednáškam)

Gejza Jenča

Verzia 1

### 1 Množiny

**Definícia 1.1** (Množina). *Množina* je súbor objektov, nazývaných *prvkami množiny*. Fakt, že objekt  $x$  je prvkom množiny  $A$  značíme takto:

$$x \in A$$

Ak objekt  $x$  nepatrí do množiny  $A$ , značíme to takto:

$$x \notin A$$

Množiny môžu byť konečné alebo nekonečné. Konečnú množinu môžeme špecifikovať prostým vymenovaním jej prvkov takto:

$$A = \{1, \text{slon}, \{2\}\}$$

Platí  $1 \in A$ ,  $\text{slon} \in A$ . Zrejme  $4 \notin A$  mačka  $\notin A$ .

*Otázka.* Platí  $2 \in A$ ? Odpoveď: nie.

Ale ak si niekto myslí, že áno, musí si myslieť, že objekt 2 je rovný niektorému z objektov, ktoré patria do množiny  $A$ . Pravdepodobne si myslí, že

$$2 = \{2\}$$

To však nie je pravda: 2 nie je množina a  $\{2\}$  je množina a teda tieto dva objekty nemôžu byť rovné, pretože rovnaké objekty majú rovnaké vlastnosti. Príkladom nekonečnej množiny je množina všetkých prirodzených čísel

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Všimnime si, že  $0 \in \mathbb{N}$ ; je možné, že na iných prednáškach to bude konvencia  $0 \notin \mathbb{N}$ . Ďalšie množiny čísel, ktoré poznáte zo strednej školy, sú:

- množina všetkých celých čísel  $\mathbb{Z}$

- množina všetkých racionálnych čísel  $\mathbb{Q}$
- množina všetkých reálnych čísel  $\mathbb{R}$ .

**Definícia 1.2** (Prázdna množina). *Prázdna množina* je množina, ktorá neobsahuje žiadny objekt. Prázdnu množinu značíme  $\emptyset$ .

**Definícia 1.3** (Podmnožina). Hovoríme, že množina  $B$  je *podmnožinou* množiny  $A$ , ak pre každý prvok  $x$  množiny  $B$  platí, že  $x \in A$ . Fakt, že  $B$  je podmnožinou  $A$  značíme

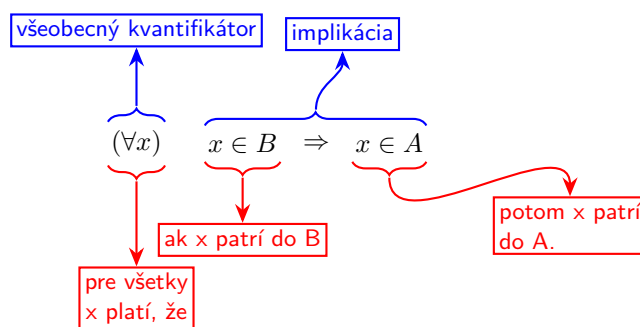
$$B \subseteq A$$

Ak  $B$  nie je podmnožinou  $A$ , značíme  $B \not\subseteq A$ . Vzťah  $B \subseteq A$  sa volá *inklúzia*.

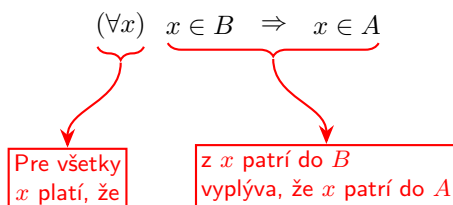
**Príklady:**

- $A = \{1, \text{slon}, \{2\}\}$ , potom
- $\{1, \text{slon}\} \subseteq A$
- $\{1, \{2\}\} \subseteq A$
- $\{1, 3\} \not\subseteq A$ , lebo  $3 \in \{1, 3\}$  a zároveň  $3 \notin A$
- $\{2\} \not\subseteq A$ , lebo  $2 \in \{2\}$  a zároveň  $2 \notin A$

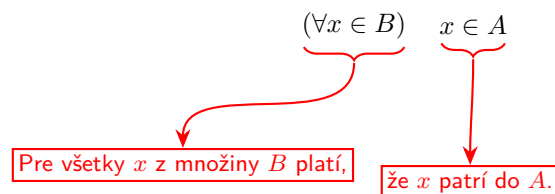
V jazyku formálnej logiky  $B \subseteq A$  zapisujeme takto:



Iný spôsob čítania tej istej formuly je tento:



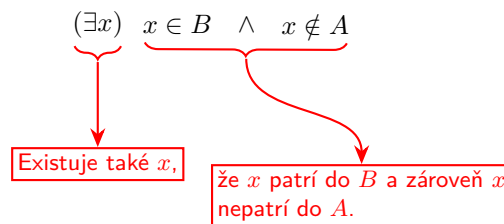
Iný spôsob zápisu  $B \subseteq A$  je tento



Tieto symbolické zápisy sú logicky ekvivalentné, teda vyjadrujú rovnaký vzťah medzi množinami  $B$  a  $A$ . V tejto chvíli je dobré uvedomiť si, že prázdna množina je podmnožinou každej množiny. Naozaj, ak by pre nejakú množinu  $A$  platilo  $\emptyset \not\subseteq A$ , musel by existovať prvok  $x$  množiny  $\emptyset$  taký, že  $x$  nepatrí do  $A$ . Inak povedané, malo by platiť  $x \in \emptyset$  a zároveň  $x \notin A$ ; to však nie je možné, pretože  $x \in \emptyset$  neplatí pre žiadny objekt  $x$ . Pri úvahách o vzťahu "byť podmnožinou" sme vlastne používali toto tvrdenie:

**Veta 1.4.** *Nech  $A, B$  sú množiny. Potom  $B \subseteq A$  práve vtedy, keď existuje  $x \in B$  také, že  $x \notin A$ .*

V jazyku formálnej logiky:



Kedy sú dve množiny rovné? Keďže množina je súbor objektov do nej patriacich, dve množiny sú rovné, ak obsahujú rovnaké prvky:

$A = B$  práve vtedy, keď pre všetky objekty  $x$  platí, že  $x \in A$  práve vtedy, keď  $x \in B$ .

Táto vlastnosť množín sa volá extenzionalita. Z toho vyplýva nasledujúce tvrdenie:

**Veta 1.5.** *Nech  $A, B$  sú množiny. Potom  $A = B$  práve vtedy, keď  $A \subseteq B$  a zároveň  $B \subseteq A$ .*

Jeden zo spôsobov ako môžeme špecifikovať množinu je vyделение z nejakej množiny pomocou výroku o prvkoch:

$$\{x \in A \mid \text{výrok o } x\}$$

**Príklady:**

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = [2, \infty)$

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} = (3, \infty)$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \text{ a zároveň } x < 100\} = \langle 4, 100 \rangle$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ a zároveň } x < 2\} = \emptyset$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 2\} = \emptyset$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid (n+1) \text{ je prvočíslo}\} = \{1, 2, 4, 6, \dots\}$

Podobný (ale významovo odlišný) zápis je

$$\{\text{výraz závislý od } x \mid x \in A\}$$

**Príklady:**

- $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$
- $\{\sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle -1, 1 \rangle$

### 1.1 Kardinalita množiny

Počet prvkov konečnej množiny  $A$  sa volá kardinalita  $A$  a označujeme  $|A|$ .

**Príklady:**

- $|\{1, 7, 8\}| = 3$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\{4'4, 2, 3\}\}| = 1$
- $|\{\emptyset\}| = 1$

### 1.2 Operácie na množinách

Ak  $A, B$  sú množiny môžeme z nich vytvoriť inú množinu pomocou množinových operácií.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ alebo } x \in B\} \quad (\text{zjednotenie množín } A, B)$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ a zároveň } x \in B\} \quad (\text{prieknik množín } A, B)$$

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\} \quad (\text{rozdiel množín})$$

**Príklady:**

- $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$

- $\langle 2, 4 \rangle \cap \langle 3, 5 \rangle = \langle 3, 4 \rangle$
- $\langle 2, 3 \rangle \cap \langle 3, 5 \rangle = \emptyset$
- $\langle 2, 4 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle = \langle 2, 5 \rangle$
- $A \cap A = A \cup A = A$ , pre všetky množiny  $A$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$
- $\langle 2, 4 \rangle \setminus \langle 3, 5 \rangle = \langle 2, 3 \rangle$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \text{iracionálne čísla}$
- $A \setminus A = \emptyset$ , pre všetky množiny  $A$

### 1.3 Kartézsky/Priamy súčin množín

Ak  $a, b$  sú nejaké objekty, môžeme z nich vytvoriť objekt zvaný usporiadaná dvojica  $(a, b)$ . Dôležité je, že  $(a, b) \neq (b, a)$ , ak  $a \neq b$ . V dvojici  $(a, b)$ ,  $a$  je prvá zložka a  $b$  je druhá zložka.

**Definícia 1.6** (Kartézsky súčin). Nech  $A, B$  sú množiny. *Kartézsky súčin*  $A \times B$  je množina všetkých usporiadaných dvojíc  $(a, b)$ , kde  $a \in A$  a  $b \in B$ . Symbolicky:  $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ .

**Príklady:**

- $\{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$
- $\{1\} \times \{\square, \oplus\} = \{(1, \square), (1, \oplus)\}$
- $\{3, 4\} \times \{1, 2\} = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$

Vidíme, že vo všeobecnosti nie je pravda, že  $A \times B = B \times A$ .

*Otázka.* Čo je  $A \times \emptyset$ ?

$$A \times \emptyset = \{(a, b) \mid a \in A, b \in \emptyset\}$$

Taký objekt  $b$  neexistuje! Teda  $A \times \emptyset = \emptyset$  pre každú množinu  $A$ . Nič nám nebráni vytvoriť kartézsky súčin  $A \times A$ : ak  $A = \{1, 2\}$ , potom

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Toto sa označuje aj  $A^2$  – druhá kartézska mocnina. Analogicky ako pojem usporiadanej dvojice môžeme vytvoriť pojem usporiadanej trojice, štvorice,  $n$ -tice,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$(a, b, c) \quad (a, b, c, d) \quad (a_1, \dots, a_n)$$

Neformálne budeme na prednáškach používať neexistujúce slovenské slovo „tica“ ak budem chcieť vyjadriť, že niečo je dvojica, trojica, ..., ale pritom mi je jedno koľko zložiek má. Toto je pokusom anglického slova *tuple*. Pojem kartézskeho súčinu dvoch množín môžeme rozšíriť analogicky na viac množín:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$

$$A \times B \times C \times D = \{(a, b, c, d) \mid a \in A, b \in B, c \in C, d \in D\}$$

Na tomto predmete nás budú najmä zaujímať tieto množiny:

- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}$  (všetky usporiadané  $n$ -tice reálnych čísel)

Pr.  $(1, \sqrt{2}, -\pi, 17) \in \mathbb{R}^4$ .

## 2 Zobrazenia

Zobrazenia sa často nazývajú funkcie. Obe slová znamenajú to isté, obvykle však funkcia zobrazuje do čísel ( $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$ ). Ktoré slovo sa použije je otázkou konvencie v danej časti matematiky.

**Definícia 2.1** (zobrazenie). Nech  $A, B$  sú množiny. *Zobrazenie*  $f$  z  $A$  do  $B$  je predpis, ktorý každému prvku  $A$  priradí nejaký prvok  $B$ . Zapisujeme

$$f: A \rightarrow B.$$

$A$  je *definičný obor*,  $B$  je *koobor*.

To znamená, že ak chceme špecifikovať nejaké zobrazenie  $f$ , musíme špecifikovať tri veci:

1. Z ktorej množiny sa zobrazuje (definičný obor).
2. Do ktorej množiny sa zobrazuje (koobor).
3. Predpis, ktorý nám určí, pre každý prvok definičného oboru ktorý prvok sa mu má zobrazit.

Predpis môže byť daný rôzne. Napríklad ak  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  môžeme predpis niekedy poznamenať pomocou vzorca, napr.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Ale  $A, B$  vôbec nemusia byť množiny čísel, a predpis nemusí byť vzorec!

**Príklad 2.2.** Niekedy  $A$  nemá číselnú povahu,  $B$  áno.

- $A$  = všetky adresy v meste
- $B = \mathbb{R}$

Zobrazenie  $d: A \rightarrow B$  môže byť

$d(x)$  = najkratšia vzdialenosť pri ceste peši medzi adresou  $x$  a SvF STU, v minútach.

Napríklad:  $d(\text{moje bydlisko}) = 80$ ,  $d(\text{Bernolákova 1}) = 8$ .

**Príklad 2.3.**  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dané predpisom  $g(n) = n^2 + 1$ . Toto nám hovorí, že  $g$  zobrazuje z množiny všetkých prirodzených čísel do množiny všetkých prirodzených čísel. Predpis je teda v tomto prípade daný vzorcom, ktorý nám umožňuje počítať hodnoty zobrazenia pre konkrétne prvky definičného oboru  $g$  (t.j. prirodzené čísla) dosadením a výpočtom.

$$g(2) = 2^2 + 1 = 5$$

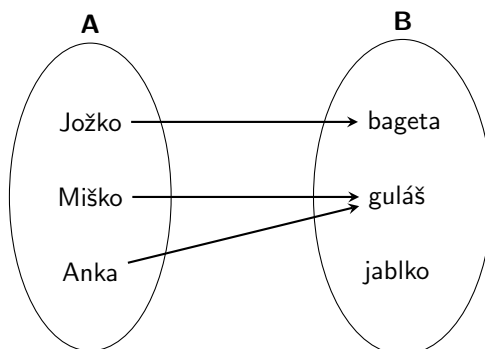
$$g(7) = 7^2 + 1 = 50$$

$g(-1) = ?$  Toto neexistuje, pretože  $-1 \notin \mathbb{N}$  a nie je to teda prvok definičného oboru  $g$ .

**Príklad 2.4.** Nech  $A = \{\text{Jožko, Miško}\}$  a  $B = \{\text{bageta, guláš, jablko}\}$ . Nech  $j: A \rightarrow B$  je zobrazenie "najobľúbenejšie jedlo". V tomto prípade je definičný konečná množina. Preto nám stačí napísať hodnotu zobrazenia  $j$  v každom prvku množiny  $A$ :

- $f(\text{Jožko}) = \text{bageta}$
- $f(\text{Miško}) = \text{guláš}$
- $f(\text{Janka}) = \text{guláš}$

Zobrazenie  $j$  môžeme aj nakresliť:



Iný spôsob špecifikácie predpisu zobrazenia je napríklad tabuľkou:

$x$	Jožko	Miško	Anka
$j(x)$	bageta	guláš	guláš

Tu sa, samozrejme, nesmú prvky v hornom riadku opakovať.

**Príklad 2.5.** Nech  $H$  je množina všetkých ľudí (aj z minulosti).  $\sigma: H \rightarrow H$  je zobrazenie dané predpisom  $\sigma(x) = \text{otec človeka } x$ .

**Príklad 2.6.**  $S$  - množina všetkých občanov SR.  $\eta: S \rightarrow \mathbb{N}$  dané predpisom  $\eta(x) = \text{rodné číslo}$ .

**Príklad 2.7.**  $B = \{\text{bageta, guláš, jablko}\}$ . Nech  $k: B \rightarrow \mathbb{R}$  je zobrazenie "koľko kalórií". Keďže  $B$  je konečná, stačí nám napísať:  $k(\text{guláš}) = 677$ ,  $k(\text{bageta}) = 1148$ ,  $k(\text{jablko}) = 301.4$ .

**Príklad 2.8.** Poznáme nejaký príklad zobrazenia typu  $A \times A \rightarrow A$ , kde  $A$  je nejaká množina? Samozrejme, už od prvého ročníka základnej školy. Vezmime  $A = \mathbb{N}$ ; sformulovať nejaký predpis pre zobrazenie  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  znamená povedať, ako vyrobiť z usporiadanej dvojice prirodzených čísel prirodzené číslo. Napríklad môžeme definovať zobrazenie  $+: A \times A \rightarrow A$  predpisom

$$+(x, y) = \text{súčet čísel } x, y$$

máme teda  $+(1, 3) = 4$ ,  $+(4, 4) = 8$ . Samozrejme, zaužívaný spôsob zapisovania hodnoty zobrazenia  $+$  v nejakej dvojici  $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  je iný, nepíšeme obvykle  $+(a, b)$ , ale znak zobrazenia dáme medzi prvú a druhú zložku usporiadanej dvojice,  $a + b$ . To je však detail, ktorý nič nemení na dôležitom náhlade, že sčítanie je zobrazením z nejakej množiny do inej množiny.

Predošlý príklad je poučný v tom, že ukazuje ako jazyk postavený na pojmoch „množina” a „zobrazenie” umožňuje popisovať matematické pojmy. Tento jazyk sa začal účinne používať na popis existujúcej a objavovanie novej matematiky v 20. storočí a dnes si už matematiku bez množín ani nevieme predstaviť.

Jeden zo spôsobov zapisovania zobrazení je „po prípadoch”, ako v nasledujúcich dvoch príkladoch.

**Príklad 2.9.** *Absolútna hodnota* je zobrazenie  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dané predpisom

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

**Príklad 2.10.** *Znamienková funkcia* alebo *signum* je zobrazenie  $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dané predpisom

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



Voči Definícii 2.1 by bolo možné vzniesť (z istého hľadiska oprávnene) námietku o nepresnosti; používa nejasné slová ako "priradí", "predpis". Námietku je možné vyriešiť takto:

**Definícia 2.11** (formálna definícia zobrazenia). Nech  $A, B$  sú množiny. Zobrazenie  $f$  z  $A$  do  $B$  je množina  $F \subseteq A \times B$  taká, že pre každé  $a \in A$  existuje práve jedno  $b \in B$  také, že  $(a, b) \in F$ .

$(a, b) \in f$  v zmysle Definície 2.11 potom znamená  $f(a) = b$  v zmysle Definície 2.1. Aj keď je Definícia 2.11 presnejšia, v skutočnosti ju bežne nikto nepoužíva, ani nikto bežne nerozmýšľa o zobrazeniach ako o množinách usporiadaných dvojíc. Niekedy však takéto presné uvažovanie nutne potrebujeme, a preto je dobré vedieť o existencii tohto pohľadu na pojem zobrazenia.

**Definícia 2.12** (Obor hodnôt). Nech  $f: A \rightarrow B$  je zobrazenie. Obor hodnôt je množina

$$\mathcal{H}(f) = \{f(a) | a \in A\}$$

Čiže máme  $b \in \mathcal{H}(f)$  práve vtedy, keď existuje  $a \in A$  také, že  $f(a) = b$ . Je dôležité si uvedomiť rozdiel medzi oborom hodnôt a kooborom. Ak napíšeme napríklad  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dané predpisom  $f(x) = x^2 - x + 1$ . Koobor je  $\mathbb{R}$ , ale  $\mathcal{H}(f) = \langle \frac{3}{4}, \infty \rangle$ . Určiť obor hodnôt zobrazenia môže byť teda ťažké a pre prácu so zobrazením to nemusí byť nutné. Čo potrebujeme o zobrazení nutne vedieť je koobor, nie obor hodnôt. Našťastie, keď sa pred našim duševným zrakom zjaví nejaké zobrazenie, vždy je vybavené kooborom. Trochu máťúce môže byť, že koobor sa často neuvádza explicitne a funkcia sa stotožňuje s predpisom, toto sa bežne bude diať na predmete *Matematická analýza*. V tomto (a iných) smere sa konvencie v matematických oblastiach líšia. Pre profesionálneho matematika však spravidla nie je problém sa odlišným konvenciám v prípade potreby prispôbiť, ak potrebuje pracovať s matematickou literatúrou a podobne.

**Definícia 2.13** (identické zobrazenie). Nech  $A$  je množina. *Identické zobrazenie* (na  $A$ ) je zobrazenie  $\text{id}_A: A \rightarrow A$  dané predpisom  $\text{id}_A(a) = a$ , pre každý prvok  $a \in A$ .

**Definícia 2.14** (rovnosť zobrazení). Nech  $A, B, C, D$  sú množiny, nech  $f: A \rightarrow B$  a  $g: C \rightarrow D$ . Hovoríme, že  $f$  je rovné  $g$ , ak  $A = C$ ,  $B = D$  a pre všetky  $x \in A = C$  platí, že  $f(x) = g(x)$ .

Na lineárnej algebre budeme ohľadom pojmu rovnosti zobrazení trochu striktnejší ako na iných predmetoch, budeme aplikovať definíciu 2.14 veľmi presne. Ilustruje to nasledujúci príklad.

**Príklad 2.15.**

- A)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  dané predpisom  $f(k) = \sqrt{k^2}$   
 $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  dané predpisom  $g(k) = |k|$   
 Platí  $f = g$ .

- B)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dané predpisom  $f(k) = \sqrt{k^2}$   
 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dané predpisom  $g(k) = |k|$   
 Platí  $f = g$ .
- C)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  dané  $f(x) = |x|$   
 $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  dané  $g(x) = x$   
 Platí  $f \neq g$  (pretože pre  $x = -1$  je  $f(-1) = 1$ , ale  $g(-1) = -1$ ).
- D)  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dané  $f(x) = x + 1$   
 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  dané  $g(x) = x + 1$   
 Platí  $f \neq g$  (pretože majú rôzne koobory).
- E)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  dané  $f(x) = x + 1$   
 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  dané  $g(x) = x + 1$   
 Platí  $f \neq g$  (pretože majú rôzne definičné obory).

Uvažujme teraz nejaké zobrazenie  $f: A \rightarrow B$  a množinu podmnožinu jeho definičného oboru  $X \subseteq A$ . *Zúženie  $f$  na  $X$*  je zobrazenie  $f|_X: X \rightarrow B$  dané predpisom

$$(f|_X)(x) = f(x)$$

Napríklad v E) Príkladu 2.15 máme  $f \neq g$ , ale pritom  $g = f|_{\mathbb{N}}$ .

## 2.1 Skladanie zobrazení

Najdôležitejšou vecou na zobrazeniach je to, že sa dajú skladať.

**Definícia 2.16.** Nech  $A, B, C$  sú množiny. Nech  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ . Potom *zložené zobrazenie*  $g \circ f$  je zobrazenie  $g \circ f: A \rightarrow C$  dané predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (1)$$

Vidíme, že nemôžeme ľubovoľné zobrazenie zložiť s ľubovoľným iným. Aby sme mohli vytvoriť zobrazenie  $g \circ f$ , musí platiť, že koobor  $f$  je rovnaká množina ako definičný obor  $g$ . Ďalšia pasca je v tom, že hodnota zobrazenia  $g \circ f$  vzniká tak, že najskôr aplikujeme  $f$  a potom aplikujeme  $g$ . Keďže píšeme a čítame zľava doprava, vnímame v zápise  $g \circ f$  písmeno  $g$  ako prvé a  $f$  ako druhé. Autor tohto textu používa pre zapamätanie si pravidla o skladaní fakt, že predpis (1) má písmená  $f, g$  v rovnakom poradí na oboch stranách rovnosti.

**Príklad 2.17.** Zobrazenie "koľko kalórií má najobľúbenejšie jedlo": Nech  $j: A \rightarrow B$  je zobrazenie "najobľúbenejšie jedlo" a  $k: B \rightarrow \mathbb{R}$  je zobrazenie "koľko kalórií". Potom  $k \circ j: A \rightarrow \mathbb{R}$  je zobrazenie "koľko kalórií má najobľúbenejšie jedlo". Napríklad:  $(k \circ j)(\text{Miško}) = k(j(\text{Miško})) = k(\text{guláš}) = 677$ .

**Príklad 2.18.** Nech  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je dané  $g(x) = x^2 + 1$  a  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je dané  $h(x) = 2x$ .

- $g \circ h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2x) = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1$
- $h \circ g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$   
 $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$

Vidíme, že  $g \circ h \neq h \circ g$ , lebo napríklad  $(g \circ h)(1) = 5$ , ale  $(h \circ g)(1) = 4$ .

**Príklad 2.19.** Čo je zobrazenie  $\sigma \circ \sigma: H \rightarrow H$ , ak  $\sigma(x)$  je otec človeka  $x$ ?  
 Odpoveď:  $\sigma(\sigma(x))$  je otcov otec, t.j. starý otec z otcovej strany.

Zavedieme teraz označenie, ktoré v základných kurzoch matematiky nie je príliš časté, ale autor tohto textu ho považuje za užitočné. Pre dve množiny  $A, B$  budeme ako  $\mathbf{Set}(A, B)$  označovať množinu všetkých zobrazení z množiny  $A$  do množiny  $B$ . Okrem už zavedených množinových operácií tým dostávame nový spôsob, ako z dvoch množín vyrobiť novú množinu. Na skladanie zobrazení sa môžeme pozeráť ako na zobrazenie: pomocou skladania vytvárame z usporiadanej dvojice zobrazení  $(g, f)$ , kde  $g \in \mathbf{Set}(B, C)$  a  $f \in \mathbf{Set}(A, B)$  zobrazenie  $g \circ f \in \mathbf{Set}(A, C)$ , alebo inak povedané, pre každú trojicu množín  $A, B, C$  máme zobrazenie typu

$$\circ: \mathbf{Set}(B, C) \times \mathbf{Set}(A, B) \rightarrow \mathbf{Set}(A, C)$$

Identické zobrazenia sa vo vzťahu na skladanie správajú špeciálne.

**Veta 2.20** (neutralita id vzhľadom na skladanie). *Nech  $A, B$  sú množiny, nech  $f: A \rightarrow B$  je zobrazenie. Potom platí  $f \circ \text{id}_A = f$  a  $\text{id}_B \circ f = f$ .*

*Dôkaz.* Máme dokázať, že dve zobrazenia sa rovnajú. Čo je rovnosť dvoch zobrazení, o tom hovorí Definícia 1.9. Pre  $f \circ \text{id}_A = f$ : Zobrazenie  $\text{id}_A$  je typu  $A \rightarrow A$ , zobrazenie  $f$  je typu  $A \rightarrow B$ . Teda  $f \circ \text{id}_A$  existuje a je typu  $A \rightarrow B$ . Majú rovnaký definičný obor aj koobor. Pre všetky  $x \in A$  platí:

$$(f \circ \text{id}_A)(x) = f(\text{id}_A(x)) = f(x)$$

Teda  $f \circ \text{id}_A = f$  v zmysle Definície 1.9. Dôkaz rovnosti  $\text{id}_B \circ f = f$  prenechávame čitateľovi ako cvičenie.  $\square$

**Veta 2.21** (Asociativita skladania zobrazení). *Nech  $A, B, C, D$  sú množiny, nech  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: B \rightarrow C$ ,  $h: C \rightarrow D$  sú zobrazenia. Potom  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .*

*Dôkaz.* Obe zobrazenia,  $h \circ (g \circ f)$  aj  $(h \circ g) \circ f$ , majú definičný obor  $A$  a koobor  $D$ . Pre všetky  $x \in A$ :

$$\begin{aligned} (h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \\ ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) \end{aligned}$$

Keďže obe zobrazenia majú rovnaký definičný obor, koobor a vo všetkých bodoch nadobúdajú rovnakú hodnotu, rovnajú sa.  $\square$

Veta 2.21 znamená, že vo výrazoch typu  $h \circ g \circ f$  nemusíme písať zátvorky, aby sme určili ktoré skladanie treba urobiť prvé.

### 3 Injekcie, surjekcie a bijekcie

V tejto časti si zavedieme dôležité vlastnosti zobrazení. Skladanie zobrazení môžeme chápať ako nejaký typ binárnej operácie, pre ktoré sa identické zobrazenie chová neutrálne, vid' vety 2.21 a 2.20. Z dostatočného odstupu a zanedbávajúc isté rozdiely môžeme  $g \circ f$  vidieť ako analógiu súčinu reálnych čísel a  $\text{id}$  ako analógiu <sup>1</sup> jednotky:

$$\begin{array}{l|l} a.b & g \circ f \\ a.1 = a & g \circ \text{id} = g \\ 1.b = b & \text{id} \circ f = f \end{array}$$

Pre násobenie čísel vieme ku každému číslu  $a \neq 0$  nájsť nejaké číslo  $a^{-1}$  také, že  $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$ , voláme ho prevrátená hodnota  $a$ . Prirodzene vzniká otázka, či a kedy vieme nájsť k nejakému zobrazeniu  $f$  analógiu prevrátenej hodnoty čísla, to znamená zobrazenie  $g$  z vlastnosťou  $g \circ f = \text{id}$  alebo  $f \circ g = \text{id}$ . Skúmanie tohto problému vedie k pojmom injekcie, surjekcie a bijekcie. Situácia je však trochu komplikovanejšia ako v prípade čísel, pretože zobrazenia sú trochu zložitejšie veci ako čísla.

**Definícia 3.1** (injekcia). Nech  $A, B$  sú množiny. Zobrazeniu  $f: A \rightarrow B$  hovoríme, *injekcia/injektívne* ak pre každé dva prvky  $a_1, a_2 \in A$  také, že  $a_1 \neq a_2$  platí, že  $f(a_1) \neq f(a_2)$ .

V jazyku formálnej logiky

$$(\forall a_1, a_2 \in A) \quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \quad (2)$$

**Príklad 3.2.** Zobrazenie  $j: A \rightarrow B$  v príklade 2.4 nie je injektívne. Platí totiž

$$\text{Miško} \neq \text{Janka} \quad j(\text{Miško}) = j(\text{Janka})$$

Dokázali sme teda negáciu formuly (2) (pre  $f = j$ , samozrejme), to znamená

$$(\exists a_1, a_2 \in A) \quad a_1 \neq a_2 \wedge j(a_1) = j(a_2)$$

Všimnite si, že neinjektívnosť  $j$  je vidno z obrázku.

Logicky ekvivalentná forma (2) je

$$(\forall a_1, a_2 \in A) \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2 \quad (3)$$

ktorá vznikne transpozíciou implikácie:

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \quad \text{je to isté ako} \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

<sup>1</sup>Táto analógia sa dá spresniť, takže z istého abstraktného hľadiska sa dajú súčin a skladanie naozaj pochopiť ako dve inštancie jediného abstraktného pojmu.

**Definícia 3.3** (surjekcia). Nech  $A, B$  sú množiny. Zobrazeniu  $f: A \rightarrow B$  hovoríme, *surjekcia/surjektívne* ak pre každý prvok  $b \in B$  existuje nejaký prvok  $a \in A$  taký, že  $f(a) = b$ .

**Príklad 3.4.** Zobrazenie  $j: A \rightarrow B$  z príkladu 2.4 nie je surjektívne. Na prvok jablko kooboru  $B$  zobrazenia  $j$  sa žiadny prvok definičného oboru  $A$  zobrazenia  $j$  nezobrazí. Inými slovami, pre všetky prvky  $a \in A$  platí, že  $j(a) \neq \text{jablko}$ .

V tejto chvíli je užitočné uvedomiť si, že zobrazenie  $f: A \rightarrow B$  je surjektívne práve vtedy, keď koobor  $B$  je rovný oboru hodnôt  $f$ ,  $B = \mathcal{H}(f)$ . To znamená, že z každého zobrazenia vieme spraviť surjektívne zobrazenie, ak zúžime jeho koobor: tieto dve zobrazenia

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & f_1(x) &= x^2 + 1 \\ f_2: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & & \langle 1, \infty \rangle \end{aligned}$$

majú rovnaký definičný obor a predpis (ale nie koobor, teda sú to rôzne funkcie). Pritom  $f_1$  nie je surjektívne, ale  $f_2$  je surjekcia.

**Definícia 3.5** (bijekcia). Nech  $A, B$  sú množiny. Zobrazeniu  $f: A \rightarrow B$  hovoríme, *bijekcia/bijektívne* ak pre každý prvok  $b \in B$  existuje nejaký prvok  $a \in A$  taký, že  $f(a) = b$ .

### 3.1 Ľavé a pravé inverzné zobrazenie

Definície injekcie a surjekcie vyzerajú veľmi odlišne. V tejto časti textu sa naučíme, že sú prepojené istou skrytou symetriou, ktorá sa týka toho, ako sa správajú vzhľadom na skladanie (operácia  $\circ$ ) a identické zobrazenia.

Pre každé dve množiny  $A, B$  máme tieto dve množiny:

- Zobrazenia z  $A$  do  $B$ , teda množina  $\mathbf{Set}(A, B)$ .
- Zobrazenia z  $B$  do  $A$ , teda množina  $\mathbf{Set}(B, A)$ .

Ak  $f \in \mathbf{Set}(A, B)$  (alebo  $f: A \rightarrow B$ , to je to isté), a  $g \in \mathbf{Set}(B, A)$ , vieme z nich vytvoriť dve zložené zobrazenia,  $g \circ f$  a  $f \circ g$ . Pritom  $f \circ g: B \rightarrow B$  a  $g \circ f: A \rightarrow A$ , alebo inak,

$$f \circ g \in \mathbf{Set}(B, B) \quad g \circ f \in \mathbf{Set}(A, A),$$

zobrazujú teda  $B$  (respektíve  $A$ ) do seba samej. V množine  $\mathbf{Set}(B, B)$  máme jeden význačný prvok, a to identické zobrazenie  $\text{id}_B$ ; podobne samozrejme  $\text{id}_A \in \mathbf{Set}(A, A)$ . Z týchto úvah nám akosi samovoľne vzniknú nasledujúce dva pojmy.

**Definícia 3.6** (zl'ava/sprava inverzné zobrazenie). Nech  $A, B$  sú množiny, nech  $f: A \rightarrow B$ . Hovoríme, že zobrazenie  $g: B \rightarrow A$  je

- *zlava inverzné k zobrazeniu  $f$  ak platí, že  $g \circ f = \text{id}_A$*
- *sprava inverzné k zobrazeniu  $f$  ak platí, že  $f \circ g = \text{id}_B$*

Všimnime si, že  $f$  je zlava inverzné ku  $g$  práve vtedy, keď  $g$  je sprava inverzné ku  $f$  (rozmyslite si to).

**Veta 3.7.** *Nech  $A, B$  sú množiny, nech  $f: A \rightarrow B$ . Potom*

- (a)  *$f$  je injekcia práve vtedy, ak existuje aspoň jedno zlava inverzné zobrazenie k  $f$ .*
- (b)  *$f$  je surjekcia práve vtedy, ak existuje aspoň jedno sprava inverzné zobrazenie k  $f$ .*

*Dôkaz.*

- (a) Nech  $f$  je injekcia. Chceme nájsť nejaké zobrazenie  $g: B \rightarrow A$ , pričom  $g$  má byť také, že  $g \circ f = \text{id}_A$ , teda pre všetky  $a \in A$  má platiť  $(g \circ f)(a) = \text{id}_A(a)$ , to znamená  $g(f(a)) = a$ . Keďže  $f$  je injekcia, pre  $b \in \mathcal{H}(f)$  existuje práve jedno  $a \in A$  také, že  $f(a) = b$ . Naozaj, ak by sme mali nejaké  $a_1, a_2 \in A$  také, že  $a_1 \neq a_2$  a zároveň  $f(a_1) = f(a_2)$ ,  $f$  by nebola injekcia. Pre  $b \in B$ , zvolíme  $g(b)$  tak, že pre  $b \in \mathcal{H}(f)$  máme  $g(b) = a$ , kde  $f(a) = b$  a pre  $b \in B \setminus \mathcal{H}(f)$  zvolíme  $g(b)$  ľubovoľne. Máme potom  $g(f(a)) = a$ , pre každé  $a \in A$ .

Predpokladajme teraz, že existuje  $g: B \rightarrow A$  také, že  $g \circ f = \text{id}_A$ . Použijeme charakterizáciu injekcie (3). Nech  $a_1, a_2 \in A$  sú také, že  $f(a_1) = f(a_2)$ . Z tohto predpokladu máme dokázať, že  $a_1 = a_2$ . Podľa predpokladu zrejme  $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ , čo znamená

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \quad (*)$$

Ale my sme predpokladali, že  $g \circ f = \text{id}_A$ , teda  $(*)$  znamená, že  $\text{id}_A(a_1) = \text{id}_A(a_2)$  a z toho máme ihneď  $a_1 = a_2$

- (b) Dôkaz vynechávame.

□

### 3.2 Inverzné zobrazenie

**Definícia 3.8** (inverzné zobrazenie). Nech  $A, B$  sú množiny, nech  $f: A \rightarrow B$ . Hovoríme, že zobrazenie  $g: B \rightarrow A$  je *inverzné* k zobrazeniu  $f$  ak je zlava inverzné k  $f$  a zároveň sprava inverzné k  $f$ .

**Veta 3.9.** *Nech  $A, B$  sú množiny. Potom  $f: A \rightarrow B$  má inverzné zobrazenie práve vtedy, keď  $f$  je bijekcia.*

*Dôkaz.* Z definície bijekcie, inverzného zobrazenia a vety 3.7 ihneď vidno, že ak má nejaké zobrazenie  $f$  inverzné zobrazenie, potom  $f$  je bijekcia.

Naopak, nech  $f$  je bijekcia. Podľa vety 3.7 má potom nejaké ľavé inverzné zobrazenie  $g_L: B \rightarrow A$  a aj nejaké pravé inverzné zobrazenie  $g_R: B \rightarrow A$ . Ak dokážeme z týchto predpokladov že  $g_L = g_R$ , potom to je už inverzné zobrazenie k  $f$ . Použijeme elegantný trik: vezmeme výraz  $g_L \circ f \circ g_R$  a zjednodušíme ho dvoma rôznymi spôsobmi:

$$\begin{aligned} g_L \circ f \circ g_R &= (g_L \circ f) \circ g_R = \text{id}_A \circ g_R = g_R \\ g_L \circ f \circ g_R &= g_L \circ (f \circ g_R) = g_L \circ \text{id}_B = g_L. \end{aligned}$$

Ale z toho zrejme vyplýva, že  $g_L = g_R$ . □

Všimnime si, že v dôkaze predošlej vety sme ukázali aj čosi navyše: pokiaľ  $f$  je bijekcia, nielenže má nejaké inverzné zobrazenie, ale toto inverzné zobrazenie je dokonca presne jedno. Z toho vyplýva, že môžeme zaviesť operáciu „invertuj zobrazenie”

$$f \mapsto f^{-1}$$

ktorá bude definovaná iba ak  $f$  je bijekcia. Zobrazenie  $f^{-1}$  je (vždy jediné) inverzné zobrazenie k zobrazeniu  $f$ .

## 4 Sústavy lineárnych rovníc

**Definícia 4.1** (Lineárna rovnica nad  $\mathbb{R}$ ). Lineárna rovnica o  $n$  neznámych je rovnica tvaru

$$(*) \quad a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c$$

kde  $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$ . Koeficienty  $a_1, \dots, a_n, c$  sú dané prvky  $\mathbb{R}$ . Riešenie tejto rovnice je taká  $n$ -tica  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , že po dosadení do  $(*)$  je vzniknutý výrok pravdivý.

**Príklad 4.2.** Daná je rovnica  $3x_1 + 2x_2 + (-1)x_3 = 7$ , ktorú zvyčajne zapisujeme ako

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$

Niektoré jej riešenia sú napríklad  $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0)$  alebo  $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, -7)$ . Táto rovnica má nekonečne veľa riešení.

**Definícia 4.3** (Sústava lineárnych rovníc). Sústava  $m$  lineárnych rovníc o  $n$  neznámych nad  $\mathbb{R}$  je usporiadaná  $m$ -tica rovníc o  $n$  neznámych nad  $\mathbb{R}$ , kde  $m, n \geq 1$ . Neznáme sú rovnaké pre všetky rovnice.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array} \tag{4}$$

Riešenie sústavy je taká usporiadaná  $n$ -tica  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , ktorá je riešením každej rovnice v sústave.

**Príklad 4.4.** Uvažujme sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned}$$

Ideme sa pokúsiť nájsť jej riešenie. Pripočítajme prvú rovnicu k druhej.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ 4x_1 - 0 &= -4 \end{aligned}$$

Vynásobme druhú rovnicu číslom  $\frac{1}{4}$ .

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - 0 &= -1 \end{aligned}$$

Teraz už vieme, že  $x_1 = -1$ , môžeme dosadiť túto hodnotu do prvej rovnice a vyjadriť  $x_2$ . Ale môžeme postupovať aj ďalej a napríklad pripočítať  $-3$ -násobok druhej rovnice k prvej. V každom prípade, jediným riešením je  $x_1 = -1$  a  $x_2 = 4$ .

Čo sme robili? Menili sme sústavu tak, aby zmenená sústava mala rovnakú množinu riešení. Transformujeme teda v každom probléme na iný, jednoduchší. Ale najviac dôležité pri tom je to, že vždy tak, aby sa množina všetkých riešení nezmenila. Aké úpravy môžeme robiť so sústavou lineárnych rovníc tak, aby sa nezmenila množina všetkých riešení?

Môžeme napríklad:

1. vymeniť dve rovnice v sústave medzi sebou
2. vynásobiť rovnicu nenulovou konštantou (prečo nenulovou?)
3. pripočítať ľubovoľný násobok jednej rovnice k druhej rovnici

#### 4.1 Matice: základná terminológia a označenia

Matica je typu  $m \times n$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) je obdĺžniková tabuľka reálnych čísel, ktorá má  $m$  riadkov a  $n$  stĺpcov. Matice označujeme veľkými písmenami. Všeobecnú maticu  $A$  typicky zapisujeme napríklad takto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Konvencia je, že prvý index v  $a_{ij}$  je číslo riadku a druhý je číslo stĺpca. Všimnime si, že (5) obsahuje v zásade iba informácie, že



- Matica sa volá  $A$ ,
- jej prvky sú značené  $a_{ij}$ ,
- jej typ je  $m \times n$ .

Toto budeme niekedy zapisovať krátko ako

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

## 4.2 Zápis sústavy lineárnych rovníc pomocou matice

S maticami budeme na lineárnej algebre pracovať často a budeme opakovane nachádzať ich nové významy. Ale v tejto chvíli, pre začiatok, použijeme maticu jednoducho pre zápis systému lineárnych rovníc. Zapišeme zo sústavy (4) len to podstatné: koeficienty  $(a_{ij})$  a pravú stranu  $(c_i)$ :

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right)$$

Zvislú stranu použijeme na oddelenie pravej strany. Je to čisto vizuálna pomôcka, nie je naozaj súčasťou matice. Túto maticu nazývame *rozšírená matica sústavy*, koeficienty  $(a_{ij})$  tvoria *maticu sústavy* a stĺpec  $(c_i)$  je *pravá strana*.

$$\underbrace{\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right)}_{\text{rozšírená matica sústavy}} \quad \begin{array}{c} \text{matica sústavy} \\ \text{pravá strana} \end{array}$$

Teda sústava  $m$  lineárnych rovníc o  $n$  neznámych sa bude zapisovať pomocou matice typu  $m \times (n + 1)$ .

V konkrétnom prípade to vyzerá takto. Sústava

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 &= 14 \\ -x_1 &+ 4x_3 &= -7 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

sa zapíše maticou

$$\underbrace{\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -7 & -14 \\ -1 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)}_{\text{rozšírená matica sústavy}} \quad \begin{array}{c} \text{matica sústavy} \\ \text{pravá strana} \end{array}$$

### 4.3 Elementárne riadkové operácie

Elementárna riadková operácia je zmena matice na inú maticu jedného z nasledujúcich typov.

1. Výmena riadkov  $k, l$ :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Pripočítanie  $\alpha$ -násobku riadku  $k$  k riadku  $l$ , kde  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \end{matrix} \alpha \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} + \alpha a_{k1} & \dots & a_{ln} + \alpha a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Vynásobenie riadku  $k$  číslom  $\beta \in \mathbb{R}$ , kde  $\beta \neq 0$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \longleftarrow \beta \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{k1} & \dots & \beta a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Definícia 4.5.** Hovoríme, že dve matice  $A, B$  rovnakého typu sú *riadkovo ekvivalentné*, ak existuje postupnosť elementárnych riadkových operácií, ktorou sa dá  $A$  upraviť na  $B$ .

Elementárne riadkové operácie sú pre nás v tejto chvíli dôležité kvôli nasledujúcej vete.

**Veta 4.6.** Dve sústavy  $m$  lineárnych rovníc o  $n$  neznámych majú rovnakú množinu riešení práve vtedy keď sú ich rozšírené matice riadkovo ekvivalentné.

Preto pri riešení sústavy lineárnych rovníc môžeme použiť nasledujúcu stratégiu:

- (Krok 1) Napíšeme si rozšírenú maticu sústavy.
- (Krok 2) Pomocou elementárnych riadkových operácií maticu upravíme na jednoduchší tvar.
- (Krok 3) Nájdeme riešenie tej sústavy, ktorá zodpovedá tomuto jednoduchšiemu tvaru.

Veta 4.6 nám hovorí, že tento postup je korektný.

Otázka je, čo budeme považovať za jednoduchší tvar; bude to takzvaný *stupňovitý tvar*, ktorý je naznačený na nasledujúcom obrázku.

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \bullet & ? & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ? \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \bullet & ? & \cdots & \cdots & \cdots & ? \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & ? \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V tomto obrázku  $\bullet$  znamená nenulový prvok (rôzny od 0), a prvok  $?$  môže byť ľubovoľný.

**Definícia 4.7** (vedúci prvok riadku). Ak  $A$  je matica typu  $m \times n$ , potom vedúci prvok  $i$ -teho riadku matice je najľavejší nenulový prvok toho riadku:  $a_{ij} \neq 0$  a zároveň  $a_{il} = 0$  pre všetky  $1 \leq l < j$ .

**Definícia 4.8.** Hovoríme, že matica  $A$  typu  $m \times n$  je v stupňovitom tvare, ak

- (a) Ak  $r_i(A) \neq (0, \dots, 0)$  a zároveň  $r_k(A) = (0, \dots, 0)$ , potom  $i < k$ .

Každý nenulový riadok je nad každým nulovým riadkom.

- (b) Ak  $a_{ij}$  je vedúci prvok  $i$ -teho riadku a  $a_{kl}$  je vedúci prvok  $k$ -teho riadku a  $i < k$  potom aj  $j < l$ .

Vedúci prvok vyššieho riadku leží viac vľavo ako vedúci prvok nižšieho riadku.

**Príklad 4.9.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nie je v stupňovitom tvare (prečo?)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{je v stupňovitom tvare}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nie je v stupňovitom tvare (prečo?)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{je v stupňovitom tvare}$$

**4.4 Gaussova eliminačná metóda**

*Gaussova eliminačná metóda* je spôsob riešenia sústavy lineárnych rovníc. Má dve fázy.

1. Najprv upravíme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitý tvar.
2. Potom nájdeme riešenie sústavy zodpovedajúcej stupňovitému tvaru pomocou spätného dosádzania.

Príklady boli na prednáške, budú ďalšie na cvičeniach.

**5 Vektory a operácie s nimi**

Sila lineárnej algebry spočíva v tom, že umožňuje viac pohľadov na rovnaký pojem. Tieto pohľady sú veľmi silne prepojené - niekedy sa medzi nimi ani nerozlišuje a plynule sa prechádza z jedného do druhého.

Vektor môže byť:

- (\*) množina všetkých orientovaných úsečiek v rovine/priestore, ktoré majú rovnakú veľkosť a smer.
- (\*\*) Zvoľme bod  $O$  v rovine/priestore. Vektor je orientovaná úsečka s počiatkom v tomto bode (môžeme ju stotožniť s jej druhým koncovým bodom; potom vektor = bod).
- (\*\*\*) Usporiadaná  $n$ -tica reálnych čísel;  $n = 2$  pre rovinu a  $n = 3$  pre priestor.

(\*\*\*\*) Prvok vektorového priestoru.

Zostaneme pri výklade pojmov v rovine; zovšeobecnenie do priestoru je priamočiare.

**Typografické pravidlo:** Vektory budeme písať so šípkou:  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}$ .

## 5.1 Prechody medzi definíciami

Vysvetlíme prechody medzi pohľadmi na vektor:

$$(*) \xrightarrow{\text{výber počiatku}} (**) \xrightarrow{\text{voľba súradnicových osí}} (***)$$

Všetci asi vieme, čo je úsečka; orientovaná úsečka je úsečka s vybratým krajným bodom. Keďže úsečka nenulovej dĺžky má dva krajné body, každej úsečke nenulovej dĺžky zodpovedajú dve orientované úsečky:

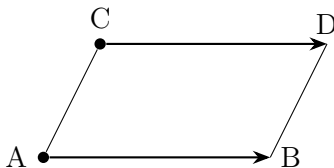


Podľa (\*) je (jeden!) vektor množina všetkých ( $\infty$ ) orientovaných úsečiek, ktoré majú rovnakú veľkosť a smer.

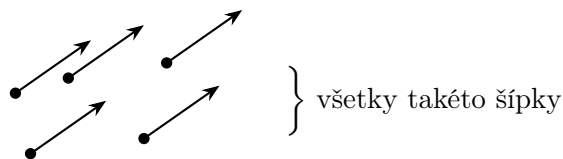
- Veľkosť orientovanej úsečky je jej dĺžka.
- Čo je smer, je akosi tiež jasné.

Asi najčistejší spôsob, ako na úrovni geometrie popísať veľkosť a smer je, že dve orientované úsečky  $\vec{AB}$  a  $\vec{CD}$  majú rovnakú veľkosť a smer práve vtedy, keď platí jedna z týchto možností:

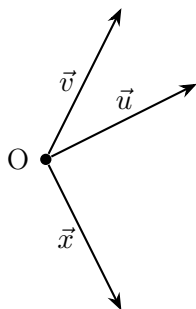
- $|AB| = |CD| = 0$  - nulový vektor.
- $A \neq B, C \neq D$  a  $ABDC$  je rovnobežník s uhlopriečkami  $AD, BC$ .



Teda vektor v zmysle (\*) si môžeme predstaviť takto:

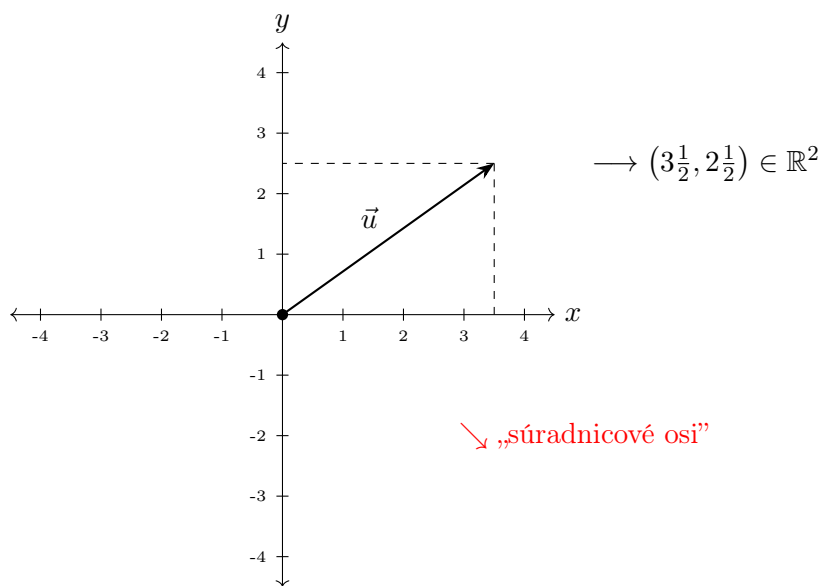


Definícia (\*) je úplne v poriadku, ale manipuluje sa s tým pojmom zle, pretože každý vektor je potom nekonečná množina. Poradíme si takto: vyberieme v rovine jeden ľubovoľný bod, nazveme ho "počiatok" a budeme ho označovať  $O$ . V každej množine orientovaných úsečiek, ktorá je vektorom v zmysle (\*), máme práve jednu orientovanú úsečku, ktorá má počiatok v  $O$ . Túto vyberieme z vektora v zmysle (\*) a máme vektor v zmysle (\*\*).



Všimnime si, že jeden z vektorov zodpovedá orientovanej úsečke  $\overrightarrow{OO}$ ; hovoríme mu nulový vektor a značíme ho  $\vec{0}$ .

Umiestnime teraz v rovine dve kópie číselnej osi: vodorovnú a zvislú tak, aby sa pretínali v bode  $O$ .



Premietnutím koncového bodu orientovanej úsečky reprezentujúcej vektor v pravom uhle na osi určíme usporiadanú dvojicu reálnych čísel a naopak, z usporiadanej dvojice reálnych čísel vieme zrejším spôsobom dostať vektor ako orientovanú úsečku s počiatkom v bode  $O$ . Pritom nulový vektor  $\vec{0}$  zodpovedá dvojici  $(0, 0)$ .

Voľba osí v rovine nám určuje bijekciu:

$$\text{vektory v rovine (body)} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

To, že sa body v rovine dajú jednoducho (a užitočne) vyjadrovať ako dvojice čísel je prekvapujúco mladý objav - pochádza z roku 1637 a vymyslel ho René Descartes. Zaujímavé je, že v tom čase sa už vyše tisíc rokov používali sférické súradnice pre určovanie polohy na Zemi pomocou rovnobežiek a poludníkov.

Zavedme teraz terminológiu týkajúcu sa  $\mathbb{R}^n$ , ktorú budeme používať: Pre  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_i$  je  $i$ -ta zložka vektora  $\vec{x}$ .

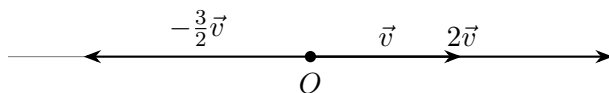
## 5.2 Operácie s vektormi

### 5.2.1 Násobenie vektora skalárom

**Definícia 5.1** (Násobenie geometrického vektora skalárom). Ak  $\alpha \in \mathbb{R}$  (skalár) a  $\vec{v}$  je vektor, potom  $\alpha\vec{v}$  je vektor  $|\alpha|$ -krát predĺžený/skrátený.

- ak  $\alpha > 0$ ,  $(\alpha\vec{v})$  a  $\vec{v}$  sú orientované rovnako,
- ak  $\alpha < 0$ ,  $(\alpha\vec{v})$  a  $\vec{v}$  sú orientované opačne,
- ak  $\alpha = 0$ ,  $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ .

**Príklad 5.2.**



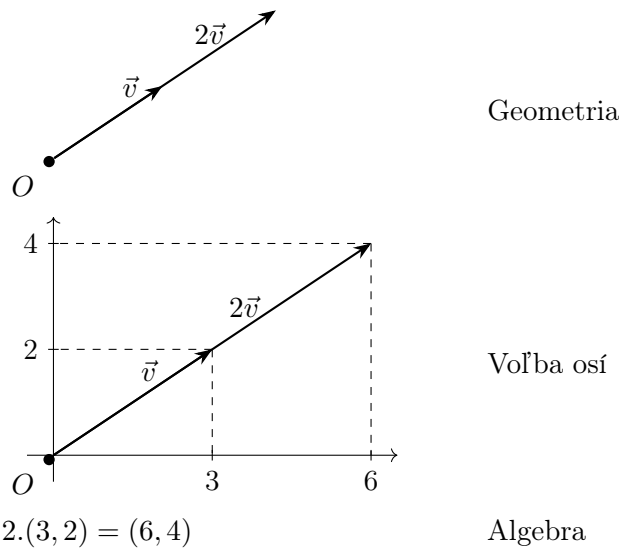
**Definícia 5.3** (násobenie vektora skalárom v  $\mathbb{R}^n$ ). Nech  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  a nech  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Potom

$$\alpha.\vec{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

**Príklad 5.4.**

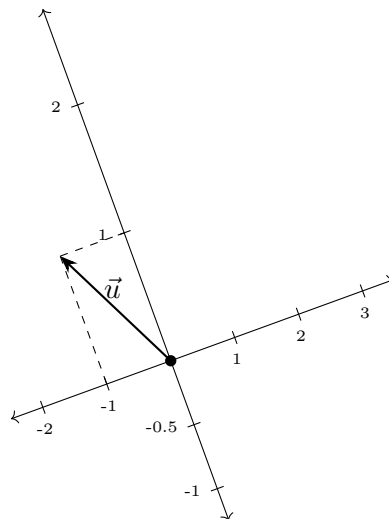
$$\begin{aligned} (-2).(2, -1, 0) &= (-4, 2, 0) \\ \sqrt{3}.(\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 2) &= (3, -1, 2.\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Ak si teraz zvolíme v rovine súradnicové osi, dostávame tým bijekciu medzi geometrickými vektormi a prvkami  $\mathbb{R}^2$ .



Vidíme, že operácii škálovania (násobenie  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) (geometrická operácia) zodpovedá vynásobenie usporiadanej n-tice skalárom  $\alpha$  vo všetkých zložkách n-tice.

Je dôležité si teraz uvedomiť, že korešpondencia medzi vektormi v geometrickom zmysle a usporiadanými n-ticami závisí na voľbe osí, osi môžu mať rôznu mierku a môžu byť dokonca trochu otočené.



Inou voľbou osí sa bijekcia (vektory v rovine  $\leftrightarrow \mathbb{R}^2$ ) zmení, ale to, že škálovanie zodpovedá násobeniu skalárom po zložkách bude stále platiť.

## 5.2.2 Vlastnosti násobenia vektora skalárom

Pre všetky vektory  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  a  $a, b \in \mathbb{R}$  platí:

- $(a \cdot b) \cdot \vec{x} = a \cdot (b \cdot \vec{x})$



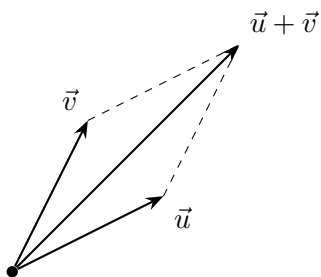
**Prečo?** Nech  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .

$$\begin{aligned}(a.b).\vec{x} &= (a.b).(x_1, \dots, x_n) = ((ab)x_1, \dots, (ab)x_n) \\ &= (a(bx_1), \dots, a(bx_n)) = a(bx_1, \dots, bx_n) \\ &= a(b(x_1, \dots, x_n)) = a(b.\vec{x})\end{aligned}$$

- Pre všetky  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  platí  $0\vec{x} = \vec{0}$ ,  $1\vec{x} = \vec{x}$ .

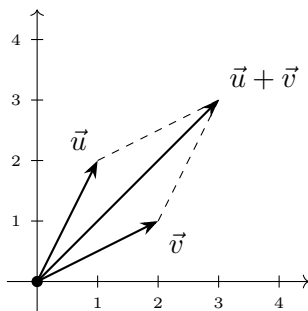
### 5.2.3 Sčítanie vektorov

Geometricky sa operácia sčítania vektorov zavádza rovnobežníkovým pravidlom:



Ak je jeden z vektorov  $\vec{0}$ , definujeme prirodzene  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ .

Na algebraickej strane tejto geometrickej operácii zodpovedá sčítanie po zložkách.



$$\vec{u} = (1, 2), \vec{v} = (2, 1) \implies \vec{u} + \vec{v} = (1 + 2, 2 + 1) = (3, 3).$$

Opäť, ako v prípade násobenia skalárom, tento vzťah medzi geometrickou operáciou sčítania vektorov a algebraickou operáciou sčítania po zložkách nezávisí na voľbe osí.

**Definícia 5.5** (Sčítanie vektorov v  $\mathbb{R}^n$ ). Nech  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  a  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Potom

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

**Príklad 5.6.**  $(1, -3, 2, 0) + (-1, 3, -1, 4) = (0, 0, 1, 4)$

### 5.2.4 Vlastnosti sčítania vektorov v $\mathbb{R}^n$

Pre všetky vektory  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$  platia rovnosti:

- $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$  (asociativita)
- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$  (komutativita)
- $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- $\vec{x} + (-1)\vec{x} = \vec{0}$

Dôkaz sa robí priamočiaro, napr. komutativita vektorov:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = \vec{y} + \vec{x}$$

pričom sme využili komutativitu sčítania reálnych čísel. Podobne pre ostatné rovnosti.

Násobenie skalárom a sčítanie vektorov sú navzájom prepojené pomocou distributivity.

- Pre všetky  $a \in \mathbb{R}$  a  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$  platí:  $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$
- Pre všetky  $a, b \in \mathbb{R}$  a  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  platí:  $(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$

Násobenie skalárom má prednosť pred sčítaním vektorov.

**POZOR:** Neexistuje nič také ako násobenie vektorov medzi sebou!

Nič nám nebráni zaviesť odčítanie vektorov  $\vec{x} - \vec{y}$  definované ako  $\vec{x} - \vec{y} := \vec{x} + (-1)\vec{y}$ . Je to teda odvodená operácia zavedená pomocou sčítania a násobenia  $(-1)$ . Samozrejme, ako ľahko vidieť, odčítanie vektorov prebieha tiež po zložkách:

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$$

### 5.3 Vektory z $\mathbb{R}^n$ ako stĺpce

Odteraz až do konca letného semestra budeme na tomto predmete stotožňovať usporiadané  $n$ -tice reálnych čísel so stĺpcovými vektormi (maticami typu  $n \times 1$ ).

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Teda prvok množiny  $\mathbb{R}^n$  môže byť zapísaný ako riadok s čiarkami, akebu ako stĺpec, oba zápisy označujú tú istú vec:

$$(1, -17, 0, \frac{8}{3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Budeme plynule prechádzať medzi týmito dvoma spôsobmi zápisu usporiadaných  $n$ -tíc.

## 5.4 Lineárne kombinácie

**Definícia 5.7** (Lineárna kombinácia). Nech  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$  a  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ . Potom *lineárna kombinácia* vektorov  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$  s koeficientami  $a_1, \dots, a_m$  je vektor

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_m\vec{v}_m$$

**Príklad 5.8.**  $\vec{v}_1 = (1, 3, 4)$ ,  $\vec{v}_2 = (2, 0, 1)$  v  $\mathbb{R}^3$ .  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 2$ .  $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = 3(1, 3, 4) + 2(2, 0, 1) = (3, 9, 12) + (4, 0, 2) = (7, 9, 14)$ .

**Príklad 5.9.** Zistite, či je  $\vec{u} = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$  lineárnou kombináciou vektorov  $\vec{v}_1 = (1, -1)$  a  $\vec{v}_2 = (2, 5)$  a určite koeficienty tejto lineárnej kombinácie.

Hľadáme  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  také, že platí:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = \vec{u}$$

Zapíšeme problém pomocou stĺpcových vektorov:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Podľa definície násobenia skalárom:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 5a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Podľa definície sčítania vektorov:

$$\begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 \\ -a_1 + 5a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dva vektory sa rovnajú, ak sa rovnajú po zložkách:

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= 1 \\ -a_1 + 5a_2 &= 2 \end{aligned}$$

Aha! Sústava lineárnych rovníc. Sčítaním oboch rovníc dostaneme:

$$7a_2 = 3 \implies a_2 = \frac{3}{7}$$

Dosadením do prvej rovnice:

$$a_1 + 2 \left( \frac{3}{7} \right) = 1 \implies a_1 + \frac{6}{7} = 1 \implies a_1 = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

Koeficienty sú  $a_1 = 1/7$  a  $a_2 = 3/7$ . Skúška:

$$\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/7 \\ 15/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/7 \\ 14/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$