Lineárna algebra 1
(texty k prednáškam)

Gejza Jenča

Verzia 1

1 Množiny

Definícia 1.1 (Množina)**.** *Množina* je súbor objektov, nazývaných *prvkami množiny.* Fakt, že objekt x je prvkom množiny A značíme takto:

$$x \in A$$

Ak objekt x nepatrí do množiny A, značíme to takto:

$$x \notin A$$

Množiny môžu byť konečné alebo nekonečné. Konečnú množinu môžeme špecifikovať prostým vymenovaním jej prvkov takto:

$$A = \{1, \mathrm{slon}, \{2\}\}$$

Platí $1 \in A$, slon $\in A$. Zrejme $4 \notin A$ mačka $\notin A$.

Otázka. Platí $2 \in A$? Odpoveď: nie.

Ale ak si niekto myslí, že áno, musí si myslieť, že objekt 2 je rovný niektorému z objektov, ktoré patria do množiny A. Pravdepodobne si myslí, že

$$2 = \{2\}$$

To však nie je pravda: 2 nie je množina a $\{2\}$ je množina a teda tieto dva objekty nemôžu byť rovné, pretože rovnaké objekty majú rovnaké vlastnosti. Príkladom nekonečnej množiny je množina všetkých prirodzených čísel

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Všimnime si, že $0 \in \mathbb{N}$; je možné, že na iných prednáškach to bude konvencia $0 \notin \mathbb{N}$. Ďalšie množiny čísel, ktoré poznáte zo strednej školy, sú:

- množina všetkých celých čísiel $\mathbb{Z}$

- množina všetkých racionálnych čísel $\mathbb{Q}$
- množina všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$.

Definícia 1.2 (Prázdna množina)**.** *Prázdna množina* je množina, ktorá neobsahuje žiadny objekt. Prázdnu množinu značíme $\emptyset$.

Definícia 1.3 (Podmnožina)**.** Hovoríme, že množina B je *podmnožinou* množiny A, ak pre každý prvok x množiny B platí, že $x \in A$. Fakt, že B je podmnožinou A značíme

$$B \subseteq A$$

Ak B nie je podmnožinou A, značíme $B \nsubseteq A$. Vzťah $B \subseteq A$ sa volá *inklúzia*.

Príklady:

- $A = \{1, \text{slon}, \{2\}\}$, potom
- $\{1, \text{slon}\} \subseteq A$
- $\{1, \{2\}\} \subseteq A$
- $\{1, 3\} \nsubseteq A$, lebo $3 \in \{1, 3\}$ a zároveň $3 \notin A$
- $\{2\} \nsubseteq A$, lebo $2 \in \{2\}$ a zároveň $2 \notin A$

V jazyku formálnej logiky $B \subseteq A$ zapisujeme takto:

$$\underbrace{\overbrace{(\forall x)}^{\boxed{\text{všeobecný kvantifikátor}}}}_{\boxed{\text{pre všetky x platí, že}}} \quad \overbrace{\underbrace{x \in B}_{\boxed{\text{ak x patrí do B}}} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{\boxed{\text{potom x patrí do A.}}}}^{\boxed{\text{implikácia}}}$$

Iný spôsob čítania tej istej formuly je tento:

$$\underbrace{(\forall x)}_{\boxed{\text{Pre všetky } x \text{ platí, že}}} \quad \underbrace{x \in B \Rightarrow x \in A}_{\boxed{\text{z } x \text{ patrí do } B \text{ vyplýva, že } x \text{ patrí do } A}}$$

Iný spôsob zápisu $B \subseteq A$ je tento

$$\underbrace{(\forall x \in B)}_{\boxed{\text{Pre všetky } x \text{ z množiny } B \text{ platí,}}} \quad \underbrace{x \in A}_{\boxed{\text{že } x \text{ patrí do } A.}}$$

Tieto symbolické zápisy sú logicky ekvivalentné, teda vyjadrujú rovnaký vzťah medzi množinami B a A. V tejto chvíli je dobré uvedomiť si, že prázdna množina je podmnožinou každej množiny. Naozaj, ak by pre nejakú množinu A platilo $\emptyset \not\subseteq A$, musel by existovať prvok x množiny $\emptyset$ taký, že x nepatrí do A. Inak povedané, malo by platiť $x \in \emptyset$ a zároveň $x \notin A$; to však nie je možné, pretože $x \in \emptyset$ neplatí pre žiadny objekt x. Pri úvahách o vzťahu "byť podmnožinou"sme vlastne používali toto tvrdenie:

Veta 1.4. *Nech A, B sú množiny. Potom $B \not\subseteq A$ práve vtedy, keď existuje $x \in B$ také, že $x \notin A$.*

V jazyku formálnej logiky:

$$\underbrace{(\exists x)}_{\boxed{\text{Existuje také } x,}} \quad \underbrace{x \in B \quad \wedge \quad x \notin A}_{\boxed{\text{že } x \text{ patrí do } B \text{ a zároveň } x \text{ nepatrí do } A.}}$$

Kedy sú dve množiny rovné? Keďže množina je súbor objektov do nej patriacich, dve množiny sú rovné, ak obsahujú rovnaké prvky:

$A = B$ práve vtedy, keď pre všetky objekty x platí, že $x \in A$ práve vtedy, keď $x \in B$.

Táto vlastnosť množín sa volá extenzionalita. Z toho vyplýva nasledujúce tvrdenie:

Veta 1.5. *Nech A, B sú množiny. Potom $A = B$ práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$.*

Jeden zo spôsobov ako môžeme špecifikovať množinu je vydelenie z nejakej množiny pomocou výroku o prvkoch:

$$\{x \in A \mid \text{výrok o } x\}$$

Príklady:

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = \langle 2, \infty)$

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} = (3, \infty)$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \text{ a zároveň } x < 100\} = \langle 4, 100)$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ a zároveň } x < 2\} = \emptyset$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 2\} = \emptyset$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid (n+1) \text{ je prvočíslo}\} = \{1, 2, 4, 6, ...\}$

Podobný (ale významovo odlišný) zápis je

$$\{\text{výraz závislý od } x \mid x \in A\}$$

Príklady:

- $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$
- $\{\sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle -1, 1 \rangle$

1.1 Kardinalita množiny

Počet prvkov konečnej množiny A sa volá kardinalita A a označujeme $|A|$.
Príklady:

- $|\{1, 7, 8\}| = 3$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\{4'4, 2, 3\}\}| = 1$
- $|\{\emptyset\}| = 1$

1.2 Operácie na množinách

Ak A, B sú množiny môžeme z nich vytvoriť inú množinu pomocou množinových operácií.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ alebo } x \in B\} \quad \text{(zjednotenie množín A, B)}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ a zároveň } x \in B\} \quad \text{(prienik množín A, B)}$$
$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\} \quad \text{(rozdiel množín)}$$

Príklady:

- $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$

- $\langle 2,4\rangle \cap \langle 3,5\rangle = \langle 3,4\rangle$
- $\langle 2,3) \cap \langle 3,5\rangle = \emptyset$
- $\langle 2,4\rangle \cup \langle 3,5\rangle = \langle 2,5\rangle$
- $A \cap A = A \cup A = A$, pre všetky množiny A
- $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$
- $\langle 2,4\rangle \setminus \langle 3,5\rangle = \langle 2,3)$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} =$ iracionálne čísla
- $A \setminus A = \emptyset$, pre všetky množiny A

1.3 Kartézsky/Priamy súčin množín

Ak a, b sú nejaké objekty, môžeme z nich vytvoriť objekt zvaný usporiadaná dvojica (a,b). Dôležité je, že $(a,b) \neq (b,a)$, ak $a \neq b$. V dvojici (a,b), a je prvá zložka a b je druhá zložka.

Definícia 1.6 (Kartézsky súčin)**.** Nech A, B sú množiny. *Kartézsky súčin* $A \times B$ je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a,b), kde $a \in A$ a $b \in B$. Symbolicky: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Príklady:

- $\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$
- $\{1\} \times \{\square, \oplus\} = \{(1,\square),(1,\oplus)\}$
- $\{3,4\} \times \{1,2\} = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$

Vidíme, že vo všeobecnosti nie je pravda, že $A \times B = B \times A$.

Otázka. Čo je $A \times \emptyset$?

$$A \times \emptyset = \{(a,b) \mid a \in A, b \in \emptyset\}$$

Taký objekt b neexistuje! Teda $A \times \emptyset = \emptyset$ pre každú množinu A. Nič nám nebráni vytvoriť kartézsky súčin $A \times A$: ak $A = \{1,2\}$, potom

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

Toto sa označuje aj A^2 – druhá kartézska mocnina. Analogicky ako pojem usporiadanej dvojice môžeme vytvoriť pojem usporiadanej trojice, štvorice, n-tice, $n \in \mathbb{N}$.

$$(a,b,c) \quad (a,b,c,d) \quad (a_1,\ldots,a_n)$$

Neformálne budeme na prednáškach používať neexistujúce slovenské slovo „tica” ak budem chcieť vyjadriť, že niečo je dvojica, trojica, ..., ale pritom mi je jedno koľko zložiek má. Toto je pokusom anglického slova *tuple*. Pojem kartézskeho súčinu dvoch množín môžeme rozšíriť analogicky na viac množín:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$
$$A \times B \times C \times D = \{(a, b, c, d) \mid a \in A, b \in B, c \in C, d \in D\}$$

Na tomto predmete nás budú najmä zaujímať tieto množiny:

- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}$ (všetky usporiadané n-tice reálnych čísel)

Pr. $(1, \sqrt{2}, -\pi, 17) \in \mathbb{R}^4$.

2 Zobrazenia

Zobrazenia sa často nazývajú funkcie. Obe slová znamenajú to isté, obvykle však funkcia zobrazuje do čísel ($\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$). Ktoré slovo sa použije je otázkou konvencie v danej časti matematiky.

Definícia 2.1 (zobrazenie)**.** Nech A, B sú množiny. *Zobrazenie* f z A do B je predpis, ktorý každému prvku A priradí nejaký prvok B. Zapisujeme

$$f \colon A \to B.$$

A je *definičný obor*, B je *koobor*.

To znamená, že ak chceme špecifikovať nejaké zobrazenie f, musíme špecifikovať tri veci:

1. Z ktorej množiny sa zobrazuje (definičný obor).
2. Do ktorej množiny sa zobrazuje (koobor).
3. Predpis, ktorý nám určí, pre každý prvok definičného oboru ktorý prvok sa mu má zobraziť.

Predpis môže byť daný rôzne. Napríklad ak $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ môžeme predpis niekedy poznamenať pomocou vzorca, napr.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Ale A, B vôbec nemusia byť množiny čísel, a predpis nemusí byť vzorec!

Príklad 2.2. Niekedy A nemá číselnú povahu, B áno.

- $A =$ všetky adresy v meste
- $B = \mathbb{R}$

Zobrazenie $d\colon A \to B$ môže byť

$d(x) =$ najkratšia vzdialenosť pri ceste peši medzi adresou x a SvF STU, v minútach.

Napríklad: $d(\text{moje bydlisko}) = 80$, $d(\text{Bernolákova 1}) = 8$.

Príklad 2.3. $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $g(n) = n^2 + 1$. Toto nám hovorí, že g zobrazuje z množiny všetkých prirodzených čísel do množiny všetkých prirodzených čísel. Predpis je teda v tomto prípade daný vzorcom, ktorý nám umožňuje počítať hodnoty zobrazenia pre konkrétne prvky definičného oboru g (t.j. prirodzené čísla) dosadením a výpočtom.

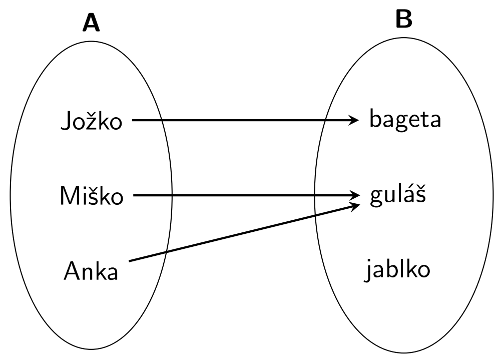
$$g(2) = 2^2 + 1 = 5$$
$$g(7) = 7^2 + 1 = 50$$

$g(-1) =?$ Toto neexistuje, pretože $-1 \notin \mathbb{N}$ a nie je to teda prvok definičného oboru g.

Príklad 2.4. Nech $A = \{\text{Jožko, Miško}\}$ a $B = \{\text{bageta, guláš, jablko}\}$. Nech $j\colon A \to B$ je zobrazenie "najobľúbenejšie jedlo". V tomto prípade je definičný konečná množina. Preto nám stačí napísať hodnotu zobrazenia j v každom prvku množiny A:

- $f(\text{Jožko}) =$ bageta
- $f(\text{Miško}) =$ guláš
- $f(\text{Janka}) =$ guláš

Zobrazenie j môžeme aj nakresliť:



Iný spôsob špecifikácie predpisu zobrazenia je napríklad tabuľkou:

x	Jožko	Miško	Anka
$j(x)$	bageta	guláš	guláš

Tu sa, samozrejme, nesmú prvky v hornom riadku opakovať.

Príklad 2.5. Nech H je množina všetkých ľudí (aj z minulosti). $\sigma\colon H \to H$ je zobrazenie dané predpisom $\sigma(x) = \text{otec človeka } x$.

Príklad 2.6. S - množina všetkých občanov SR. $\eta\colon S \to \mathbb{N}$ dané predpisom $\eta(x) = \text{rodné číslo}$.

Príklad 2.7. $B = \{\text{bageta, guláš, jablko}\}$. Nech $k\colon B \to \mathbb{R}$ je zobrazenie "koľko kalórií". Keďže B je konečná, stačí nám napísať: $k(\text{guláš}) = 677$, $k(\text{bageta}) = 1148$, $k(\text{jablko}) = 301.4$.

Príklad 2.8. Poznáme nejaký príklad zobrazenia typu $A \times A \to A$, kde A je nejaká množina? Samozrejme, už od prvého ročníka základnej školy. Vezmime $A = \mathbb{N}$; sformulovať nejaký predpis pre zobrazenie $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ znamená povedať, ako vyrobiť z usporiadanej dvojice prirodzených čísel prirodzené číslo. Napríklad môžeme definovať zobrazenie $+\colon A \times A \to A$ predpisom

$$+(x, y) = \text{súčet čísel } x, y$$

máme teda $+(1, 3) = 4$, $+(4, 4) = 8$. Samozrejme, zaužívaný spôsob zapisovania hodnoty zobrazenia $+$ v nejakej dvojici $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je iný, nepíšeme obvykle $+(a, b)$, ale znak zobrazenia dáme medzi prvú a druhú zložku usporiadanej dvojice, $a + b$. To je však detail, ktorý nič nemení na dôležitom náhľade, že sčítanie je zobrazením z nejakej množiny do inej množiny.

Predošlý príklad je poučný v tom, že ukazuje ako jazyk postavený na pojmoch „množina" a „zobrazenie" umožňuje popisovať matematické pojmy. Tento jazyk sa začal účinne používať na popis existujúcej a objavovanie novej matematiky v 20. storočí a dnes si už matematiku bez množín ani nevieme predstaviť.

Jeden zo spôsobov zapisovania zobrazení je „po prípadoch", ako v nasledujúcich dvoch príkladoch.

Príklad 2.9. *Absolútna hodnota* je zobrazenie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané predpisom

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Príklad 2.10. *Znamienková funkcia* alebo *signum* je zobrazenie $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané predpisom

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Voči Definícii 2.1 by bolo možné vzniesť (z istého hľadiska oprávnene) námietku o nepresnosti; používa nejasné slová ako "priradí", "predpis". Námietku je možné vyriešiť takto:

Definícia 2.11 (formálna definícia zobrazenia)**.** Nech A, B sú množiny. *Zobrazenie* f z A do B je množina $F \subseteq A \times B$ taká, že pre každé $a \in A$ existuje práve jedno $b \in B$ také, že $(a, b) \in F$.

$(a, b) \in f$ v zmysle Definície 2.11 potom znamená $f(a) = b$ v zmysle Definície 2.1. Aj keď je Definícia 2.11 presnejšia, v skutočnosti ju bežne nikto nepoužíva, ani nikto bežne nerozmýšľa o zobrazeniach ako o množinách usporiadaných dvojíc. Niekedy však takéto presné uvažovanie nutne potrebujeme, a preto je dobré vedieť o existencii tohto pohľadu na pojem zobrazenia.

Definícia 2.12 (Obor hodnôt)**.** Nech $f\colon A \to B$ je zobrazenie. *Obor hodnôt* je množina

$$\mathcal{H}(f) = \{f(a)|a \in A\}$$

Čiže máme $b \in \mathcal{H}(f)$ práve vtedy, keď existuje $a \in A$ také, že $f(a) = b$. Je dôležité si uvedomiť rozdiel medzi oborom hodnôt a kooborom. Ak napíšeme napríklad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané predpisom $f(x) = x^2 - x + 1$. Koobor je $\mathbb{R}$, ale $\mathcal{H}(f) = \langle \frac{3}{4}, \infty \rangle$. Určiť obor hodnôt zobrazenia môže byť teda ťažké a pre prácu so zobrazením to nemusí byť nutné. Čo potrebujeme o zobrazení nutne vedieť je koobor, nie obor hodnôt. Našťastie, keď sa pred našim duševným zrakom zjaví nejaké zobrazenie, vždy je vybavené kooborom. Trochu mätúce môže byť, že koobor sa často neuvádza explicitne a funkcia sa stotožňuje s predpisom, toto sa bežne bude diať na predmete *Matematická analýza*. V tomto (a iných) smere sa konvencie v matematických oblastiach líšia. Pre profesionálneho matematika však spravidla nie je problém sa odlišným konvenciám v prípade potreby prispôsobiť, ak potrebuje pracovať s matematickou literatúrou a podobne.

Definícia 2.13 (identické zobrazenie)**.** Nech A je množina. *Identické zobrazenie* (na A) je zobrazenie $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ dané predpisom $\mathrm{id}_A(a) = a$, pre každý prvok $a \in A$.

Definícia 2.14 (rovnosť zobrazení)**.** Nech A, B, C, D sú množiny, nech $f\colon A \to B$ a $g\colon C \to D$. Hovoríme, že f je *rovné* g, ak $A = C$, $B = D$ a pre všetky $x \in A = C$ platí, že $f(x) = g(x)$.

Na lineárnej algebre budeme ohľadom pojmu rovnosti zobrazení trochu striktnejší ako na iných predmetoch, budeme aplikovať definíciu 2.14 veľmi presne. Ilustruje to nasledujúci príklad.

Príklad 2.15.

A) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $f(k) = \sqrt{k^2}$
$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $g(k) = |k|$
Platí $f = g$.

B) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $f(k) = \sqrt{k^2}$
$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $g(k) = |k|$
Platí $f = g$.

C) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dané $f(x) = |x|$
$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dané $g(x) = x$
Platí $f \neq g$ (pretože pre $x = -1$ je $f(-1) = 1$, ale $g(-1) = -1$).

D) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané $f(x) = x + 1$
$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dané $g(x) = x + 1$
Platí $f \neq g$ (pretože majú rôzne koobory).

E) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dané $f(x) = x + 1$
$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dané $g(x) = x + 1$
Platí $f \neq g$ (pretože majú rôzne definičné obory).

Uvažujme teraz nejaké zobrazenie $f\colon A \to B$ a množinu podmnožinu jeho definičného oboru $X \subseteq A$. *Zúženie f na X* je zobrazenie $f|_X\colon X \to B$ dané predpisom

$$(f|_X)(x) = f(x)$$

Napríklad v E) Príkladu 2.15 máme $f \neq g$, ale pritom $g = f|_{\mathbb{N}}$.

2.1 Skladanie zobrazení

Najdôležitejšou vecou na zobrazeniach je to, že sa dajú skladať.

Definícia 2.16. Nech A, B, C sú množiny. Nech $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$. Potom *zložené zobrazenie* $g \circ f$ je zobrazenie $g \circ f\colon A \to C$ dané predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \tag{1}$$

Vidíme, že nemôžeme ľubovoľné zobrazenie zložiť s ľubovoľným iným. Aby sme mohli vytvoriť zobrazenie $g \circ f$, musí platiť, že koobor f je rovnaká množina ako definičný obor g. Ďalšia pasca je v tom, že hodnota zobrazenia $g \circ f$ vzniká tak, že najskôr aplikujeme f a potom aplikujeme g. Keďže píšeme a čítame zľava doprava, vnímame v zápise $g \circ f$ písmeno g ako prvé a f ako druhé. Autor tohto textu používa pre zapamätanie si pravidla o skladaní fakt, že predpis (1) má písmená f, g v rovnakom poradí na oboch stranách rovnosti.

Príklad 2.17. Zobrazenie "koľko kalórií má najobľúbenejšie jedlo": Nech $j\colon A \to B$ je zobrazenie "najobľúbenejšie jedlo" a $k\colon B \to \mathbb{R}$ je zobrazenie "koľko kalórií". Potom $k \circ j\colon A \to \mathbb{R}$ je zobrazenie "koľko kalórií má najobľúbenejšie jedlo". Napríklad: $(k \circ j)(\text{Miško}) = k(j(\text{Miško})) = k(\text{guláš}) = 677$.

Príklad 2.18. Nech $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dané $g(x) = x^2 + 1$ a $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dané $h(x) = 2x$.

- $g \circ h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2x) = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1$
- $h \circ g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$

Vidíme, že $g \circ h \neq h \circ g$, lebo napríklad $(g \circ h)(1) = 5$, ale $(h \circ g)(1) = 4$.

Príklad 2.19. Čo je zobrazenie $\sigma \circ \sigma \colon H \to H$, ak $\sigma(x)$ je otec človeka x? Odpoveď: $\sigma(\sigma(x))$ je otcov otec, t.j. starý otec z otcovej strany.

Zavedieme teraz označenie, ktoré v základných kurzoch matematiky nie je príliš časté, ale autor tohto textu ho považuje za užitočné. Pre dve množiny A, B budeme ako $\mathbf{Set}(A, B)$ označovať množinu všetkých zobrazení z množiny A do množiny B. Okrem už zavedených množinových operácií tým dostávame nový spôsob, ako z dvoch množín vyrobiť novú množinu. Na skladanie zobrazení sa môžeme pozerať ako na zobrazenie: pomocou skladania vytvárame z usporiadanej dvojice zobrazení (g, f), kde $g \in \mathbf{Set}(B, C)$ a $f \in \mathbf{Set}(A, B)$ zobrazenie $g \circ f \in \mathbf{Set}(A, C)$, alebo inak povedané, pre každú trojicu množín A, B, C máme zobrazenie typu

$$\circ \colon \mathbf{Set}(B, C) \times \mathbf{Set}(A, B) \to \mathbf{Set}(A, C)$$

Identické zobrazenia sa vo vzťahu na skladanie správajú špeciálne.

Veta 2.20 (neutralita id vzhľadom na skladanie)**.** *Nech A, B sú množiny, nech $f \colon A \to B$ je zobrazenie. Potom platí $f \circ \mathrm{id}_A = f$ a $\mathrm{id}_B \circ f = f$.*

Dôkaz. Máme dokázať, že dve zobrazenia sa rovnajú. Čo je rovnosť dvoch zobrazení, o tom hovorí Definícia 1.9. Pre $f \circ \mathrm{id}_A = f$: Zobrazenie id_A je typu $A \to A$, zobrazenie f je typu $A \to B$. Teda $f \circ \mathrm{id}_A$ existuje a je typu $A \to B$. Majú rovnaký definičný obor aj koobor. Pre všetky $x \in A$ platí:

$$(f \circ \mathrm{id}_A)(x) = f(\mathrm{id}_A(x)) = f(x)$$

Teda $f \circ \mathrm{id}_A = f$ v zmysle Definície 1.9. Dôkaz rovnosti $\mathrm{id}_B \circ f = f$ prenechávame čitateľovi ako cvičenie. □

Veta 2.21 (Asociativita skladania zobrazeni)**.** *Nech A, B, C, D sú množiny, nech $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$, $h \colon C \to D$ sú zobrazenia. Potom $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

Dôkaz. Obe zobrazenia, $h \circ (g \circ f)$ aj $(h \circ g) \circ f$, majú definičný obor A a koobor D. Pre všetky $x \in A$:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

Keďže obe zobrazenia majú rovnaký definičný obor, koobor a vo všetkých bodoch nadobúdajú rovnakú hodnotu, rovnajú sa. □

Veta 2.21 znamená, že vo výrazoch typu $h \circ g \circ f$ nemusíme písať zátvorky, aby sme určili ktoré skladanie treba urobiť prvé.

3 Injekcie, surjekcie a bijekcie

V tejto časti si zavedieme dôležité vlastnosti zobrazení. Skladanie zobrazení môžeme chápať ako nejaký typ binárnej operácie, pre ktoré sa identické zobrazenie chová neutrálne, viď vety 2.21 a 2.20. Z dostatočného odstupu a zanedbávajúc isté rozdiely môžeme $g \circ f$ vidieť ako analógiu súčinu reálnych čísel a id ako analógiu [1] jednotky:

$$\begin{array}{r|c} a.b & g \circ f \\ a.1 = a & g \circ \mathrm{id} = g \\ 1.b = b & \mathrm{id} \circ f = f \end{array}$$

Pre násobenie čísel vieme ku každému číslu $a \neq 0$ nájsť nejaké číslo a^{-1} také, že $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$, voláme ho prevrátená hodnota a. Prirodzene vzniká otázka, či a kedy vieme nájsť k nejakému zobrazeniu f analógiu prevrátenej hodnoty čísla, to znamená zobrazenie g z vlastnosťou $g \circ f = \mathrm{id}$ alebo $f \circ g = \mathrm{id}$. Skúmanie tohto problému vedie k pojmom injekcie, surjekcie a bijekcie. Situácia je však trochu komplikovanejšia ako v prípade čísel, pretože zobrazenia sú trochu zložitejšie veci ako čísla.

Definícia 3.1 (injekcia)**.** Nech A, B sú množiny. Zobrazeniu $f : A \to B$ hovoríme, *injekcia/injektívne* ak pre každé dva prvky $a_1, a_2 \in A$ také, že $a_1 \neq a_2$ platí, že $f(a_1) \neq f(a_2)$.

V jazyku formálnej logiky

$$(\forall a_1, a_2 \in A) \quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \tag{2}$$

Príklad 3.2. Zobrazenie $j : A \to B$ v príklade 2.4 nie je injektívne. Platí totiž

$$\text{Miško} \neq \text{Janka} \qquad j(\text{Miško}) = j(\text{Janka})$$

Dokázali sme teda negáciu formuly (2) (pre $f = j$, samozrejme), to znamená

$$(\exists a_1, a_2 \in A) \quad a_1 \neq a_2 \wedge j(a_1) = j(a_2)$$

Všimnite si, že neinjektívnosť j je vidno z obrázku.

Logicky ekvivalentná forma (2) je

$$(\forall a_1, a_2 \in A) \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2 \tag{3}$$

ktorá vznikne transpozíciou implikácie:

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \quad \text{je to isté ako} \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

[1] Táto analógia sa dá spresniť, takže z istého abstraktného hľadiska sa dajú súčin a skladanie naozaj pochopiť ako dve inštancie jediného abstraktného pojmu.

Definícia 3.3 (surjekcia)**.** Nech A, B sú množiny. Zobrazeniu $f\colon A \to B$ hovoríme, *surjekcia/surjektívne* ak pre každý prvok $b \in B$ existuje nejaký prvok $a \in A$ taký, že $f(a) = b$.

Príklad 3.4. Zobrazenie $j\colon A \to B$ z príkladu 2.4 nie je surjektívne. Na prvok jablko kooboru B zobrazenia j sa žiadny prvok definičného oboru A zobrazenia j nezobrazí. Inými slovami, pre všetky prvky $a \in A$ platí, že $j(a) \neq \text{jablko}$.

V tejto chvíli je užitočné uvedomiť si, že zobrazenie $f\colon A \to B$ je surjektívne práve vtedy, keď koobor B je rovný oboru hodnôt f, $B = \mathcal{H}(f)$. To znamená, že z každého zobrazenia vieme spraviť surjektívne zobrazenie, ak zúžime jeho koobor: tieto dve zobrazenia

$$\begin{aligned} f_1 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_1(x) &= x^2 + 1 \\ f_2 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} & &\langle 1, \infty) \end{aligned}$$

majú rovnaký definičný obor a predpis (ale nie koobor, teda sú to rôzne funkcie). Pritom f_1 nie je surjektívne, ale f_2 je surjekcia.

Definícia 3.5 (bijekcia)**.** Nech A, B sú množiny. Zobrazeniu $f\colon A \to B$ hovoríme, *bijekcia/bijektívne* ak pre každý prvok $b \in B$ existuje nejaký prvok $a \in A$ taký, že $f(a) = b$.

3.1 Ľavé a pravé inverzné zobrazenie

Definície injekcie a surjekcie vyzerajú veľmi odlišne. V tejto časti textu sa naučíme, že sú prepojené istou skrytou symetriou, ktorá sa týka toho, ako sa správajú vzhľadom na skladanie (operácia $\circ$) a identické zobrazenia.

Pre každé dve množiny A, B máme tieto dve množiny:

- Zobrazenia z A do B, teda množina $\mathbf{Set}(A, B)$.
- Zobrazenia z B do A, teda množina $\mathbf{Set}(B, A)$.

Ak $f \in \mathbf{Set}(A, B)$ (alebo $f\colon A \to B$, to je to isté), a $g \in \mathbf{Set}(B, A)$, vieme z nich vytvoriť dve zložené zobrazenia, $g \circ f$ a $f \circ g$. Pritom $f \circ g\colon B \to B$ a $g \circ f\colon A \to A$, alebo inak,

$$f \circ g \in \mathbf{Set}(B, B) \quad g \circ f \in \mathbf{Set}(A, A),$$

zobrazujú teda B (respektíve A) do seba samej. V množine $\mathbf{Set}(B, B)$ máme jeden význačný prvok, a to identické zobrazenie id_B; podobne samozrejme $\mathrm{id}_A \in \mathbf{Set}(A, A)$. Z týchto úvah nám akosi samovoľne vzniknú nasledujúce dva pojmy.

Definícia 3.6 (zľava/sprava inverzné zobrazenie)**.** Nech A, B sú množiny, nech $f\colon A \to B$. Hovoríme, že zobrazenie $g\colon B \to A$ je

- *zľava inverzné k zobrazeniu f* ak platí, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$
- *sprava inverzné k zobrazeniu f* ak platí, že $f \circ g = \mathrm{id}_B$

Všimnime si, že f je zľava inverzné ku g práve vtedy, keď g je sprava inverzné ku f (rozmyslite si to).

Veta 3.7. *Nech A, B sú množiny, nech $f\colon A \to B$. Potom*

(a) f je injekcia práve vtedy, ak existuje aspoň jedno zľava inverzné zobrazenie k f.

(b) f je surjekcia práve vtedy, ak existuje aspoň jedno sprava inverzné zobrazenie k f.

Dôkaz.

(a) Nech f je injekcia. Chceme nájsť nejaké zobrazenie $g\colon B \to A$, pričom g má byť také, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$, teda pre všetky $a \in A$ má platiť $(g \circ f)(a) = \mathrm{id}_A(a)$, to znamená $g(f(a)) = a$. Keďže f je injekcia, pre $b \in \mathcal{H}(f)$ existuje práve jedno $a \in A$ také, že $f(a) = b$. Naozaj, ak by sme mali nejaké $a_1, a_2 \in A$ také, že $a_1 \neq a_2$ a zároveň $f(a_1) = f(a_2)$, f by nebola injekcia. Pre $b \in B$, zvoľme $g(b)$ tak, že pre $b \in \mathcal{H}(f)$ máme $g(b) = a$, kde $f(a) = b$ a pre $b \in B \setminus \mathcal{H}(f)$ zvolíme $g(b)$ ľubovoľne. Máme potom $g(f(a)) = a$, pre každé $a \in A$.

Predpokladajme teraz, že existuje $g\colon B \to A$ také, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Použijeme charakterizáciu injekcie (3). Nech $a_1, a_2 \in A$ sú také, že $f(a_1) = f(a_2)$. Z tohto predpokladu máme dokázať, že $a_1 = a_2$. Podľa predpokladu zrejme $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, čo znamená

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \tag{*}$$

Ale my sme predpokladali, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$, teda (*) znamená, že $\mathrm{id}_A(a_1) = \mathrm{id}_A(a_2)$ a z toho máme ihneď $a_1 = a_2$

(b) Dôkaz vynechávame.

□

3.2 Inverzné zobrazenie

Definícia 3.8 (inverzné zobrazenie)**.** Nech A, B sú množiny, nech $f\colon A \to B$. Hovoríme, že zobrazenie $g\colon B \to A$ je *inverzné* k zobrazeniu f ak je zľava inverzné k f a zároveň sprava inverzné k f.

Veta 3.9. *Nech A, B sú množiny. Potom $f\colon A \to B$ má inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia.*

Dôkaz. Z definície bijekcie, inverzného zobrazenia a vety 3.7 ihneď vidno, že ak má nejaké zobrazenie f inverzné zobrazenie, potom f je bijekcia.

Naopak, nech f je bijekcia. Podľa vety 3.7 má potom nejaké ľavé inverzné zobrazenie $g_L: B \to A$ a aj nejaké pravé inverzné zobrazenie $g_R: B \to A$. Ak dokážeme z týchto predpokladov že $g_L = g_R$, potom to je už inverzné zobrazenie k f. Použijeme elegantný trik: vezmeme výraz $g_L \circ f \circ g_R$ a zjednodušíme ho dvoma rôznymi spôsobmi:

$$g_L \circ f \circ g_R = (g_L \circ f) \circ g_R = \mathrm{id}_A \circ g_R = g_R$$
$$g_L \circ f \circ g_R = g_L \circ (f \circ g_R) = g_L \circ \mathrm{id}_B = g_L.$$

Ale z toho zrejme vyplýva, že $g_L = g_R$. □

Všimnime si, že v dôkaze predošlej vety sme ukázali aj čosi navyše: pokiaľ f je bijekcia, nielenže má nejaké inverzné zobrazenie, ale toto inverzné zobrazenie je dokonca presne jedno. Z toho vyplýva, že môžeme zaviesť operáciu „invertuj zobrazenie”

$$f \mapsto f^{-1}$$

ktorá bude definovaná iba ak f je bijekcia. Zobrazenie f^{-1} je (vždy jediné) inverzné zobrazenie k zobrazeniu f.

4 Sústavy lineárnych rovníc

Definícia 4.1 (Lineárna rovnica nad $\mathbb{R}$)**.** Lineárna rovnica o n neznámych je rovnica tvaru

$$(*) \quad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c$$

kde $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Koeficienty $a_1, \ldots, a_n, c$ sú dané prvky $\mathbb{R}$. Riešenie tejto rovnice je taká n-tica $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, že po dosadení do (*) je vzniknutý výrok pravdivý.

Príklad 4.2. Daná je rovnica $3x_1 + 2x_2 + (-1)x_3 = 7$, ktorú zvyčajne zapisujeme ako

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$

Niektoré jej riešenia sú napríklad $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0)$ alebo $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, -7)$. Táto rovnica má nekonečne veľa riešení.

Definícia 4.3 (Sústava lineárnych rovníc)**.** Sústava m lineárnych rovníc o n neznámych nad $\mathbb{R}$ je usporiadaná m-tica rovníc o n neznámych nad $\mathbb{R}$, kde $m, n \geq 1$. Neznáme sú rovnaké pre všetky rovnice.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array} \tag{4}$$

Riešenie sústavy je taká usporiadaná n-tica $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ktorá je riešením každej rovnice v sústave.

Príklad 4.4. Uvažujme sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned}$$

Ideme sa pokúsiť nájsť jej riešenie. Pripočítajme prvú rovnicu k druhej.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ 4x_1 - 0 &= -4 \end{aligned}$$

Vynásobme druhú rovnicu číslom $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - 0 &= -1 \end{aligned}$$

Teraz už vieme, že $x_1 = -1$, môžeme dosadiť túto hodnotu do prvej rovnice a vyjadriť x_2. Ale môžeme postupovať aj ďalej a napríklad pripočítať -3-násobok druhej rovnice k prvej. V každom prípade, jediným riešením je $x_1 = -1$ a $x_2 = 4$.

Čo sme robili? Menili sme sústavu tak, aby zmenená sústava mala rovnakú množinu riešení. Transformujeme teda v každom problém na iný, jednoduchší. Ale najviac dôležité pri tom je to, že vždy tak, aby sa množina všetkých riešení nezmenila. Aké úpravy môžeme robiť so sústavou lineárnych rovníc tak, aby sa nezmenila množina všetkých riešení?

Môžeme napríklad:

1. vymeniť dve rovnice v sústave medzi sebou
2. vynásobiť rovnicu nenulovou konštantou (prečo nenulovou?)
3. pripočítať ľubovoľný násobok jednej rovnice k druhej rovnici

4.1 Matice: základná terminológia a označenia

Matica je typu $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ je obdĺžniková tabuľka reálnych čísel, ktorá má m riadkov a n stĺpcov. Matice označujeme veľkými písmenami. Všeobecnú maticu A typicky zapisujeme napríklad takto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Konvencia je, že prvý index v a_{ij} je číslo riadku a druhý je číslo stĺpca. Všimnime si, že (5) obsahuje v zásade iba informácie, že

- Matica sa volá A,
- jej prvky sú značené a_{ij},
- jej typ je $m \times n$.

Toto budeme niekedy zapisovať krátko ako

$$A = \left(\; a_{ij} \; \right)_{m \times n}$$

4.2 Zápis sústavy lineárnych rovníc pomocou matice

S maticami budeme na lineárnej algebre pracovať často a budeme opakovane nachádzať ich nové významy. Ale v tejto chvíli, pre začiatok, použijeme maticu jednoducho pre zápis systému lineárnych rovníc. Zapíšeme zo sústavy (4) len to podstatné: koeficienty (a_ij) a pravú stanu (c_i):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right)$$

Zvislú stranu použijeme na oddelenie pravej strany. Je to čisto vizuálna pomôcka, nie je naozaj súčasťou matice. Túto maticu nazývame *rozšírená matica sústavy*, koeficienty (a_{ij}) tvoria *maticu sústavy* a stĺpec (c_i) je *pravá strana.*

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\quad a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n} \quad}^{\text{matica sústavy}}} & \overbrace{c_1}^{\text{pravá strana}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right)}_{\text{rozšírená matica sústavy}}$$

Teda sústava m lineárnych rovníc o n neznámych sa bude zapisovať pomocou matice typu $m \times (n+1)$.

V konkrétnom príklade to vyzerá takto. Sústava

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 &= 14 \\ -x_1 \qquad + 4x_3 &= -7 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

sa zapíše maticou

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\; 3 \quad 2 \quad -7 \;}^{\text{matica sústavy}}} & \overbrace{-14}^{\text{pravá strana}} \\ -1 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)}_{\text{rozšírená matica sústavy}}$$

4.3 Elementárne riadkové operácie

Elementárna riadková operácia je zmena matice na inú maticu jedného z nasledujúcich typov.

1. Výmena riadkov k, l:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Pripočítanie α-násobku riadku k k riadku l, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \alpha \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} + \alpha a_{k1} & \dots & a_{ln} + \alpha a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Vynásobenie riadku k číslom $\beta \in \mathbb{R}$, kde $\beta \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \longleftarrow \beta \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{k1} & \dots & \beta a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definícia 4.5. Hovoríme, že dve matice A, B rovnakého typu sú *riadkovo ekvivalentné*, ak existuje postupnosť elementárnych riadkových operácií, ktorou sa dá A upraviť na B.

Elementárne riadkové operácie sú pre nás v tejto chvíli dôležité kvôli nasledujúcej vete.

Veta 4.6. *Dve sústavy m lineárnych rovníc o n neznámych majú rovnakú množinu riešení práve vtedy keď sú ich rozšírené matice riadkovo ekvivalentné.*

Preto pri riešení sústavy lineárnych rovníc môžeme použiť nasledujúcu stratégiu:

(Krok 1) Napíšeme si rozšírenú maticu sústavy.

(Krok 2) Pomocou elementárnych riadkových operácií maticu upravíme na jednoduchší tvar.

(Krok 3) Nájdeme riešenie tej sústavy, ktorá zodpovedá tomuto jednoduchšiemu tvaru.

Veta 4.6 nám hovorí, že tento postup je korektný.

Otázka je, čo budeme považovať za jednoduchší tvar; bude to takzvaný *stupňovitý tvar*, ktorý je naznačený na nasledujúcom obrázku.

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \bullet & ? & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ? \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \bullet & ? & \cdots & \cdots & \cdots & ? \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & ? \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

V tomto obrázku $\bullet$ znamená nenulový prvok (rôzny od 0), a prvok ? môže byť ľubovoľný.

Definícia 4.7 (vedúci prvok riadku)**.** Ak A je matica typu $m \times n$, potom vedúci prvok i-teho riadku matice je najľavejší nenulový prvok toho riadku: $a_{ij} \neq 0$ a zároveň $a_{il} = 0$ pre všetky $1 \leq l < j$.

Definícia 4.8. Hovoríme, že matica A typu $m \times n$ je v stupňovitom tvare, ak

(a) Ak $r_i(A) \neq (0, \ldots, 0)$ a zároveň $r_k(A) = (0, \ldots, 0)$, potom $i < k$.

> Každý nenulový riadok je nad každým nulovým riadkom.

(b) Ak a_{ij} je vedúci prvok i-teho riadku a a_{kl} je vedúci prvok k-teho riadku a $i < k$ potom aj $j < l$.

> Vedúci prvok vyššieho riadku leží viac vľavo ako vedúci prvok nižšieho riadku.

Príklad 4.9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{nie je v stupňovitom tvare (prečo?)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{je v stupňovitom tvare}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{nie je v stupňovitom tvare (prečo?)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{je v stupňovitom tvare}$$

4.4 Gaussova eliminačná metóda

Gaussova eliminačná metóda je spôsob riešenia sústavy lineárnych rovníc. Má dve fázy.

1. Najprv upravíme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitý tvar.
2. Potom nájdeme riešenie sústavy zodpovedajúcej stupňovitému tvaru pomocou spätného dosádzania.

Príklad 4.10. Riešme Gaussovou eliminačnou metódou sústavu

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= -8 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Zapíšeme si rozšírenú maticu sústavy:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Cieľom je upraviť ju na stupňovitý tvar, pomocou elementárnych riadkových operácií. V prvom kroku vymeníme prvý a druhý riadok.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

V druhom kroku pripočítame 1-násobok riadku 1 k riadku 3.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Teraz máme niekoľko možností, napríklad pripočítať $\frac{1}{2}$-násobok riadku 2 k riadku 3, aby sme dostali 0 na pozícii $(3, 2)$. To ale vedie ku zlomkom, preto urobíme radšej dva iné kroky:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{array}\right)$$

Dostaneme maticu v stupňovitom tvare. Táto zodpovedá sústave

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ - x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 11x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Každú takúto sústavu zodpovedajúcu matici v stupňovitom tvare vieme vyriešiť spätným dosádzaním.

Krok 1: Výpočet x_3

Z poslednej rovnice (3) priamo vyjadríme x_3:

$$\begin{aligned} 11x_3 &= -2 \\ x_3 &= -\frac{2}{11} \end{aligned}$$

Krok 2: Výpočet x_2

Dosadíme hodnotu x_3 do druhej rovnice (2) a vyriešime pre x_2:

$$\begin{aligned} -x_2 + 5x_3 &= 3 \\ -x_2 + 5\left(-\frac{2}{11}\right) &= 3 \\ -x_2 - \frac{10}{11} &= 3 \\ -x_2 &= 3 + \frac{10}{11} \\ -x_2 &= \frac{33}{11} + \frac{10}{11} \\ -x_2 &= \frac{43}{11} \\ x_2 &= -\frac{43}{11} \end{aligned}$$

Krok 3: Výpočet x_1
Dosadíme známe hodnoty x_2 a x_3 do prvej rovnice (1) a vyriešime pre x_1:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 - 2\left(-\frac{43}{11}\right) + 3\left(-\frac{2}{11}\right) &= 0 \\ x_1 + \frac{86}{11} - \frac{6}{11} &= 0 \\ x_1 + \frac{80}{11} &= 0 \\ x_1 &= -\frac{80}{11} \end{aligned}$$

Záver
Množina všetkých riešení sústavy je

$$\left\{\left(-\frac{80}{11}, -\frac{43}{11}, -\frac{2}{11}\right)\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Príklad 4.11. Teraz si ukážeme, že sústava lineárnych rovníc môže mať aj nekonečnú množinu riešení. Najskôr eliminácia.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & 18 & 6 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 6 & -3 & -3 & 18 & 6 \end{array}\right) -3 \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right) 3 \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dve z rovníc sa trivializovali, stali sa z nich rovnice

$$0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 = 0,$$

ktoré sú pravdivé pre každú usporiadanú štvoricu $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ a môžeme ich teda vynechať. Dve zostávajúce rovnice sú

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \quad + 4x_4 &= 2 \\ x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Množinu všetkých riešení nájdeme opäť spätným dosádzaním, pričom niektoré premenné zvolíme ako parametre.

> Ako parametre vždy volíme premenné zodpovedajúce stĺpcom *v ktorých nie je vedúci prvok.*

Teraz sú to stĺpce 2 a 4, teda ako parametre zvolíme x_2 a x_4.

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \phantom{\boxed{2}} & \downarrow & \phantom{\boxed{1}} & \downarrow & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
\boxed{2} & -1 & 0 & 4 & 2 \\
0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

V spätnom dosádzaní použijeme parametre:

$$x_4 = s$$

$$
\begin{aligned}
x_3 - 2s &= 0 \\
x_3 &= 2s
\end{aligned}
$$

$$x_2 = t$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 - t + 4s &= 2 \\
2x_1 &= 2 + t - 4s \\
x_1 &= 1 + \frac{1}{2}t - 2s
\end{aligned}
$$

Množina všetkých riešení teda je

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{2}t - 2s, t, 2s, s\right) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Príklad 4.12. V poslednom príklade si ukážeme, že sústava lineárnych rovníc môže mať aj prázdnu množinu riešení.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -2 & -6 & 12 \\
2 & 4 & 12 & -17 \\
1 & -4 & -12 & 22
\end{array}\right) -2
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -2 & -6 & 12 \\
0 & 8 & 24 & -41 \\
1 & -4 & -12 & 22
\end{array}\right) -1
\sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -2 & -6 & 12 \\
0 & 8 & 24 & -41 \\
0 & -2 & -6 & 10
\end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -2 & -6 & 12 \\
0 & -2 & -6 & 10 \\
0 & 8 & 24 & -41
\end{array}\right) 4
\sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -2 & -6 & 12 \\
0 & -2 & -6 & 10 \\
0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right)
$$

Posledný riadok v matici teraz zodpovedá rovnici

$$0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 = -1,$$

ale toto nie je pravda pre *žiadnu* usporiadanú trojicu $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Množina všetkých riešení je teda $\emptyset$.

5 Vektory a operácie s nimi

Sila lineárnej algebry spočíva v tom, že umožňuje viac pohľadov na rovnaký pojem. Tieto pohľady sú veľmi silne prepojené - niekedy sa medzi nimi ani nerozlišuje a plynule sa prechádza z jedného do druhého.
Vektor môže byť:

(*) množina všetkých orientovaných úsečiek v rovine/priestore, ktoré majú rovnakú veľkosť a smer.

(**) Zvoľme bod O v rovine/priestore. Vektor je orientovaná úsečka s počiatkom v tomto bode (môžeme ju stotožniť s jej druhým koncovým bodom; potom vektor = bod).

(***) Usporiadaná n-tica reálnych čísel; $n = 2$ pre rovinu a $n = 3$ pre priestor.

(****) Prvok vektorového priestoru.

Zostaneme pri výklade pojmov v rovine; zovšeobecnenie do priestoru je priamočiare.
Typografické pravidlo: Vektory budeme písať so šípkou: $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}$.

5.1 Prechody medzi definíciami

Vysvetlíme prechody medzi pohľadmi na vektor:

$$(*) \xrightarrow{\text{výber počiatku}} (**) \xrightarrow{\text{voľba súradnicových osí}} (***)$$

Všetci asi vieme, čo je úsečka; orientovaná úsečka je úsečka s vybratým krajným bodom. Keďže úsečka nenulovej dĺžky má dva krajné body, každej úsečke nenulovej dĺžky zodpovedajú dve orientované úsečky:

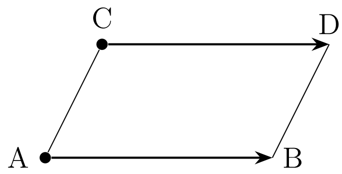
Podľa (*) je (jeden!) vektor množina všetkých (∞) orientovaných úsečiek, ktoré majú rovnakú veľkosť a smer.

- Veľkosť orientovanej úsečky je jej dĺžka.

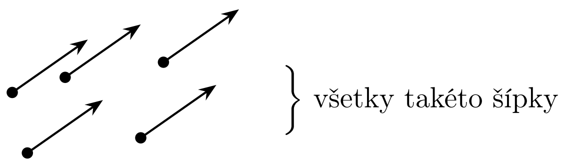
- Čo je smer, je akosi tiež jasné.

Asi najčistejší spôsob, ako na úrovni geometrie popísať veľkosť a smer je, že dve orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ majú rovnakú veľkosť a smer práve vtedy, keď platí jedna z týchto možností:

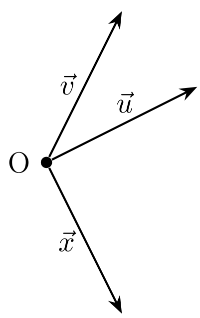
- $|AB| = |CD| = 0$ - nulový vektor.
- $A \neq B, C \neq D$ a $ABDC$ je rovnobežník s uhlopriečkami AD, BC.



Teda vektor v zmysle (*) si môžeme predstaviť takto:

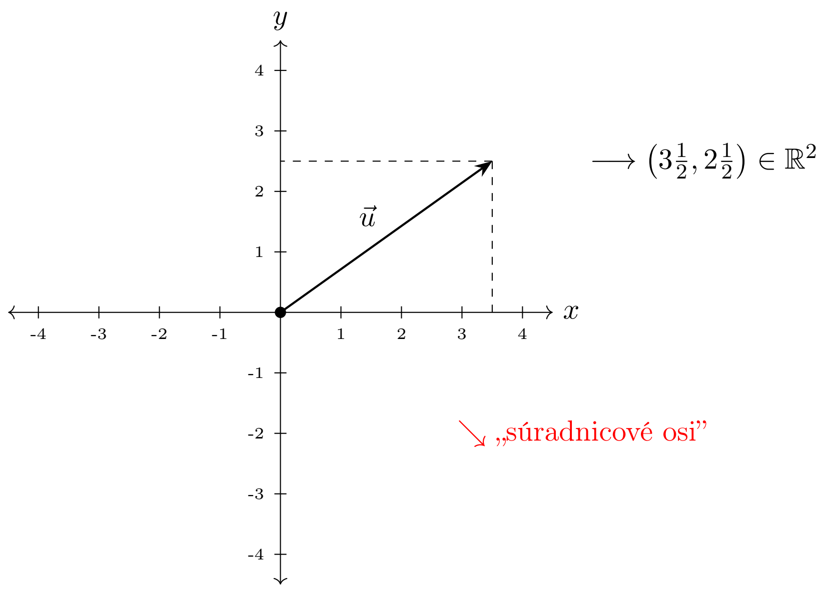


Definícia (*) je úplne v poriadku, ale manipuluje sa s tým pojmom zle, pretože každý vektor je potom nekonečná množina. Poradíme si takto: vyberieme v rovine jeden ľubovoľný bod, nazveme ho "počiatokä budeme ho označovať O. V každej množine orientovaných úsečiek, ktorá je vektorom v zmysle (*), máme práve jednu orientovanú úsečku, ktorá má počiatok v O. Túto vyberieme z vektora v zmysle (*) a máme vektor v zmysle (**).



Všimnime si, že jeden z vektorov zodpovedá orientovanej úsečke $\overrightarrow{OO}$; hovoríme mu nulový vektor a značíme ho $\vec{0}$.

Umiestnime teraz v rovine dve kópie číselnej osi: vodorovnú a zvislú tak, aby sa pretínali v bode O.



Premietnutím koncového bodu orientovanej úsečky reprezentujúcej vektor v pravom uhle na osi určíme usporiadanú dvojicu reálnych čísel a naopak, z usporiadanej dvojice reálnych čísel vieme zrejmým spôsobom dostať vektor ako orientovanú úsečku s počiatkom v bode O. Pritom nulový vektor $\vec{0}$ zodpovedá dvojici $(0, 0)$.

Voľba osí v rovine nám určuje bijekciu:

$$\text{vektory v rovine} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

To, že sa body v rovine dajú jednoducho (a užitočne) vyjadrovať ako dvojice čísel je prekvapujúco mladý objav - pochádza z roku 1637 a vymyslel ho René Descartes. Zaujímavé je, že v tom čase sa už vyše tisíc rokov používali sférické súradnice pre určovanie polohy na Zemi pomocou rovnobežiek a poludníkov.

Zaveďme teraz terminológiu týkajúcu sa $\mathbb{R}^n$, ktorú budeme používať: Pre $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, x_i je i-ta zložka vektora $\vec{x}$.

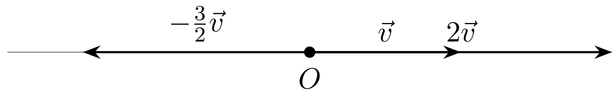
5.2 Operácie s vektormi

5.2.1 Násobenie vektora skalárom

Definícia 5.1 (Násobenie geometrického vektora skalárom)**.** Ak $\alpha \in \mathbb{R}$ (skalár) a $\vec{v}$ je vektor, potom $\alpha\vec{v}$ je vektor $|\alpha|$-krát predĺžený/skrátený.

- ak $\alpha > 0$, $(\alpha\vec{v})$ a $\vec{v}$ sú orientované rovnako,
- ak $\alpha < 0$, $(\alpha\vec{v})$ a $\vec{v}$ sú orientované opačne,
- ak $\alpha = 0$, $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

Príklad 5.2.



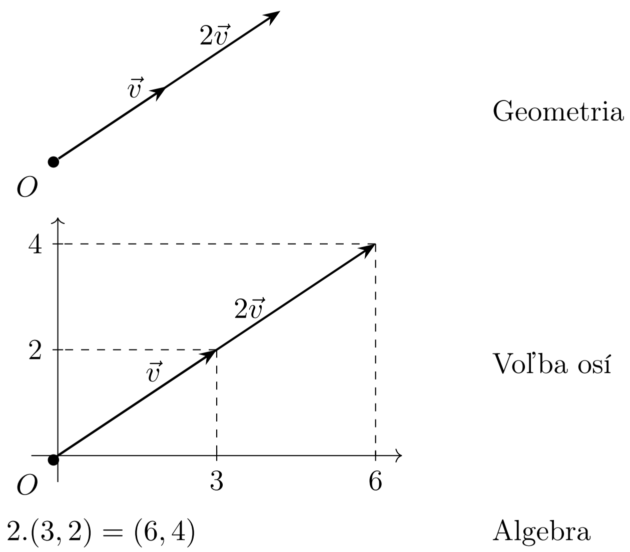
Definícia 5.3 (násobenie vektora skalarom v $\mathbb{R}^n$)**.** Nech $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a nech $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

$$\alpha.\vec{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

Príklad 5.4.

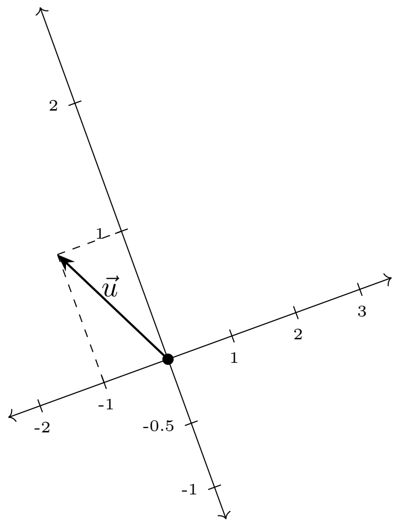
$$(-2).(2, -1, 0) = (-4, 2, 0)$$
$$\sqrt{3}.(\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 2) = (3, -1, 2.\sqrt{3})$$

Ak si teraz zvolíme v rovine súradnicové osi, dostávame tým bijekciu medzi geometrickými vektormi a prvkami $\mathbb{R}^2$. Táto bijekcia zachováva násobenie skalárom, čo znamená, že



Vidíme, že operácii škálovania (násobenie $\alpha \in \mathbb{R}$) (geometrická operácia) zodpovedá vynásobenie usporiadanej n-tice skalárom α vo všetkých zložkách n-tice.

Je dôležité si teraz uvedomiť, že korešpondencia medzi vektormi v geometrickom zmysle a usporiadanými n-ticami závisí na voľbe osí, osi môžu mať rôznu mierku a môžu byť dokonca trochu otočené.



Inou voľbou osí sa bijekcia (vektory v rovine $\leftrightarrow \mathbb{R}^2$) zmení, ale to, že škálovanie zodpovedá násobeniu skalárom po zložkách bude stále platiť.

5.2.2 Vlastnosti násobenia vektora skalárom

Pre všetky vektory $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ a $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

- $(a.b).\vec{x} = a.(b.\vec{x})$

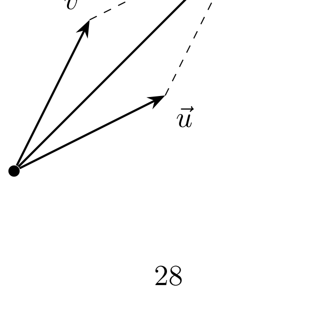
Prečo? Nech $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

$$\begin{aligned}(a.b).\vec{x} &= (a.b).(x_1, \ldots, x_n) = ((ab)x_1, \ldots, (ab)x_n) \\ &= (a(bx_1), \ldots, a(bx_n)) = a(bx_1, \ldots, bx_n) \\ &= a(b(x_1, \ldots, x_n)) = a(b.\vec{x})\end{aligned}$$

- Pre všetky $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $0\vec{x} = \vec{0}$, $1\vec{x} = \vec{x}$.

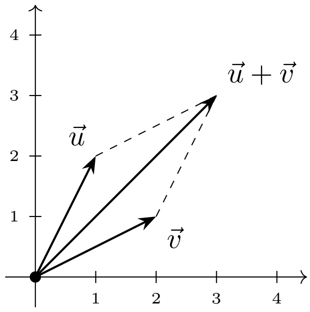
5.2.3 Sčítanie vektorov

Geometricky sa operácia sčítania vektorov zavádza rovnobežníkovým pravidlom:



Ak je jeden z vektorov $\vec{0}$, definujeme prirodzene $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

Na algebraickej strane tejto geometrickej operácii zodpovedá sčítanie po zložkách.



$\vec{u} = (1,2), \vec{v} = (2,1) \implies \vec{u} + \vec{v} = (1+2, 2+1) = (3,3)$.
Opäť, ako v prípade násobenia skalárom, tento vzťah medzi geometrickou operáciou sčítania vektorov a algebraickou operáciou sčítania po zložkách nezávisí na voľbe osí.

Definícia 5.5 (Sčítanie vektorov v $\mathbb{R}^n$)**.** Nech $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Príklad 5.6. $(1, -3, 2, 0) + (-1, 3, -1, 4) = (0, 0, 1, 4)$

5.2.4 Vlastnosti sčítania vektorov v $\mathbb{R}^n$

Pre všetky vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ platia rovnosti:

- $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (asociativita)
- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativita)
- $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- $\vec{x} + (-1)\vec{x} = \vec{0}$

Dôkaz sa robí priamočiaro, napr. komutativita vektorov:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) = \vec{y} + \vec{x}$$

pričom sme využili komutativitu sčítania reálnych čísel. Podobne pre ostatné rovnosti.

Násobenie skalárom a sčítanie vektorov sú navzájom prepojené pomocou distributivity.

- Pre všetky $a \in \mathbb{R}$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí: $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$

- Pre všetky $a, b \in \mathbb{R}$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí: $(a+b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$

Násobenie skalárom má prednosť pred sčítaním vektorov.
POZOR: Neexistuje nič také ako násobenie vektorov medzi sebou!

Nič nám nebráni zaviesť odčítanie vektorov $\vec{x} - \vec{y}$ definované ako $\vec{x} - \vec{y} := \vec{x} + (-1)\vec{y}$. Je to teda odvodená operácia zavedená pomocou sčítania a násobenia (-1). Samozrejme, ako ľahko vidieť, odčítanie vektorov prebieha tiež po zložkách:

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$$

5.3 Vektory z $\mathbb{R}^n$ ako stĺpce

Odteraz až do konca letného semestra budeme na tomto predmete stotožňovať usporiadané n-tice reálnych čísel so stĺpcovými vektormi (maticami typu $n \times 1$).

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Teda prvok množiny $\mathbb{R}^n$ môže byť zapísaný ako riadok s čiarkami, alebo ako stĺpec, oba zápisy označujú tú istú vec:

$$(1, -17, 0, \frac{8}{3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Budeme plynule prechádzať medzi týmito dvoma spôsobmi zápisu usporiadaných n-tíc.

5.4 Lineárne kombinácie

Definícia 5.7 (Lineárna kombinácia)**.** Nech $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ a $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Potom *lineárna kombinácia* vektorov $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ s koeficientami $a_1, \ldots, a_m$ je vektor

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_m\vec{v}_m$$

Príklad 5.8. $\vec{v}_1 = (1,3,4), \vec{v}_2 = (2,0,1)$ v $\mathbb{R}^3$. $a_1 = 3, a_2 = 2$. $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = 3(1,3,4) + 2(2,0,1) = (3,9,12) + (4,0,2) = (7,9,14)$.

Príklad 5.9. Zistite, či je $\vec{u} = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ lineárnou kombináciou vektorov $\vec{v}_1 = (1,-1)$ a $\vec{v}_2 = (2,5)$ a určite koeficienty tejto lineárnej kombinácie.

Hľadáme $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ také, že platí:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = \vec{u}$$

Zapíšeme problém pomocou stĺpcových vektorov:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Podľa definície násobenia skalárom:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 5a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Podľa definície sčítania vektorov:

$$\begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 \\ -a_1 + 5a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dva vektory sa rovnajú, ak sa rovnajú po zložkách:

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= 1 \\ -a_1 + 5a_2 &= 2 \end{aligned}$$

Aha! Sústava lineárnych rovníc. Sčítaním oboch rovníc dostaneme:

$$7a_2 = 3 \implies a_2 = \frac{3}{7}$$

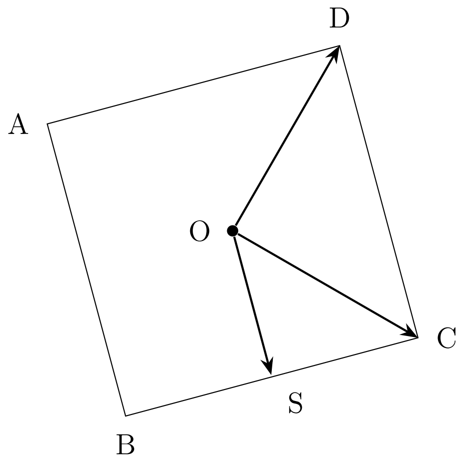
Dosadením do prvej rovnice:

$$a_1 + 2\left(\frac{3}{7}\right) = 1 \implies a_1 + \frac{6}{7} = 1 \implies a_1 = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

Koeficienty sú $a_1 = 1/7$ a $a_2 = 3/7$. Skúška:

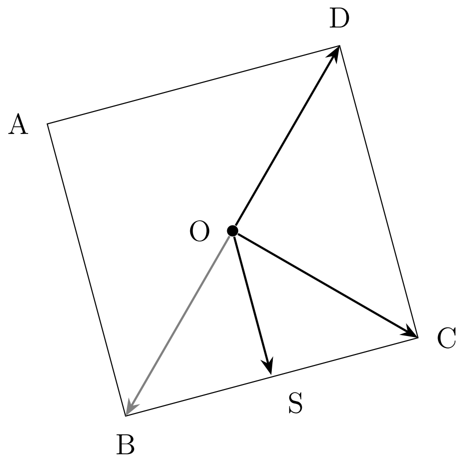
$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/7 \\ 15/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/7 \\ 14/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Príklad 5.10. Uvažujme vektory v rovine s počiatkom v bode O. Nech $ABCD$ je štvorec so stredom O.

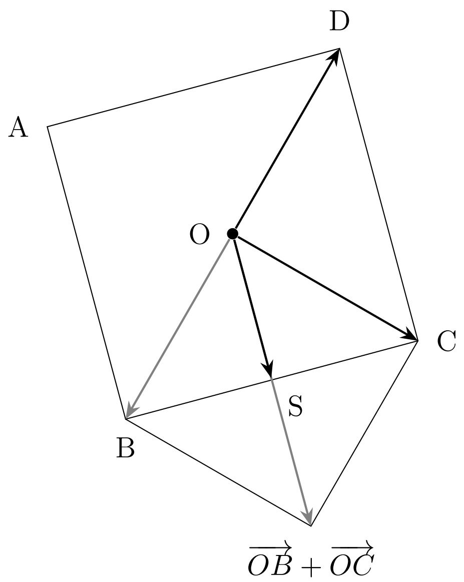


Nech S je stred strany BC. Vyjadrime vektor $\overrightarrow{OS}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$.

Najskôr si uvedomme, že $\overrightarrow{OB} = (-1).\overrightarrow{OD}$.



Vektory $\overrightarrow{OC}$ a $\overrightarrow{OB}$ sú kolmé a majú rovnakú dĺžku. Preto koncové vrcholy vektorov $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ spolu s bodom O tvoria štvorec.



Pritom bod S je stredom tohto štvorca, teda

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

a môžeme použiť pravidlá o počítaní s vektormi

$$\frac{1}{2}.(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}.\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}.((-1).\overrightarrow{OD})+\frac{1}{2}.\overrightarrow{OC} = \\ (\frac{1}{2}.(-1)).\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

Teda

$$\overrightarrow{OS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}, \tag{6}$$

čo je hľadaná lineárna kombinácia.

Skúste si teraz rozmyslieť, aká je poloha vektorov $-\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ v rovine. Keďže platí (6), spolu s bodmi O a S by mali ich koncové body tvoriť rovnobežník. Je to pravda?

6 Základy maticového počtu

Pripomenutie: matica A typu $m \times n$ je obdĺžniková tabuľka s m riadkami a n stĺpcami; inak povedané: šírka je n a výška je m:

$$\begin{array}{cc} & n \text{ stĺpcov} \\ & \longleftarrow \cdots \longrightarrow \\ \begin{array}{c}\uparrow \\ m \text{ riadkov} \\ \downarrow\end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Pozície v matici typu $m\times n$ sú usporiadané dvojice kladných prirodzených čísel (i,j), kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Inými slovami, pozície v matici sú $\{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$.

Číslo v matici na pozícii (i,j) referencujeme pomocou dvojitého indexu, napr. a_{ij}, b_{ij}.

Množina všetkých (reálnych) matíc typu $m \times n$ sa značí $\mathbb{R}^{m\times n}$. Podľa pravidla, "vektory sú stĺpce"stotožňujeme $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$. ... je to isté ako ...

6.1 Zápis matice pomocou predpisu

Zápis matice pomocou predpisu je tvaru

$$A_{m\times n} = (\underbrace{\quad\cdots\quad}_{\substack{\text{predpis pre prvok} \\ \text{na pozícii } i,j}})\ \underbrace{m \times n}_{\substack{\text{dve} \\ \text{prirodzené} \\ \text{čísla}}}$$

Predpis je obvykle výraz závislý na i,j.

Príklad 6.1. $(i+j)_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Príklad 6.2. $(i\cdot j)_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Tento zápis budeme používať mnoho razy na vyjadrenie maticových operácií.

6.2 Riadky a stĺpce matice

Nech

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

Týmto zápisom špecifikujeme typ matice A ako $m \times n$ ale aj to, že jej prvky označujeme a_{ij}.

i-ty riadok matice A je

$$r_i(A) = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

j-ty stĺpec matice A je

$$s_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

6.3 Pár druhov matíc

6.3.1 Štvorcové matice

sú matice typu $n \times n$. Ak $A = (a_{ij})_{n\times n}$ je štvorcová matica, potom (hlavná) diagonála matice je tvorená prvkami $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6.3.2 Diagonálna matica

je štvorcová matica, ktorá má všetky prvky okrem diagonálnych rovné 0.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6.3.3 Nulová matica

je matica, ktorá má všetky prvky rovné 0. Značíme ju 0. Nemusí byť nutne štvorcová.

6.3.4 Jednotková matica

je diagonálna matica, ktorá má na diagonále všade 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Jednotkovú maticu typu $n \times n$ značíme I_n. Ak n je nešpecifikované, značíme I.

6.4 Operácie s maticami

S maticami môžeme robiť to isté ako s vektormi: môžeme ich sčítať a násobiť skalárom. Avšak na rozdiel od vektorov môžeme matice medzi sebou násobiť.

6.4.1 Súčet matíc

Nech $A = (a_{ij})_{m\times n}$ $B = (b_{ij})_{m\times n}$ sú dve matice rovnakého typu $m \times n$. Potom súčet matíc A, B je matica

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Príklad 6.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Sčítať môžeme iba dvojice matíc rovnakého typu.

6.4.2 Násobenie matice skalárom

Nech $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$cA = (c \cdot a_{ij})_{m\times n} \quad \text{(bodka sa nepíše vždy)}$$

Príklad 6.4.

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

6.5 Vlastnosti súčtu matíc a násobenia matice skalárom

Zrejme doteraz zavedené operácie na maticiach manipulujú s maticami ako s vektormi $\mathbb{R}^{m \cdot n}$. V tomto zmysle nie sú pre nás ničím novým. Samozrejme, platia pre sčítanie a násobenie skalárom rovnaké pravidlá ako pre vektory.

Pre každú trojicu matíc A, B, C rovnakého typu a každú dvojicu $a, b \in \mathbb{R}$ platí

- $A + B = B + A$ (komutativita $+$)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativita $+$)
- $A + O = O + A = A$ (nulová matica, jej typ je nutne rovnaký ako typ A; O je neutrálna vzhľadom na $+$)
- $1A = A$
- $(ab)A = a(bA)$
- $(a + b)A = aA + bA$
- $a(A + B) = aA + aB$

6.5.1 Transpozícia matice

Nech $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Potom A transponovaná (alebo transpozícia A) je matica

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

Príklad 6.5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Pre každú dvojicu matíc A, B rovnakého typu a $c \in \mathbb{R}$ platí

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = c(A^T)$

Symetrická matica je taká matica, že

$$A = A^T$$

Každá symetrická matica je štvorcová (prečo?).

Príklad 6.6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je symetrická matica . Je zrejmé, že každá diagonálna matica je symetrická.

6.6 Súčin matíc

Teraz ideme definovať súčin matíc; najskôr to urobíme pre špeciálny prípad matíc $1 \times n$ a $n \times 1$. To nám umožní definovať všeobecný súčin matíc.

6.6.1 Súčin riadku a stĺpca

Uvažujme teraz dve matice, jedna typu $1 \times n$ (riadok) a druhá typu $n \times 1$ (stĺpec). Ich súčin je skalár daný

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

Príklad 6.7.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 3 = 2 - 4 + 0 = -2$$

6.6.2 Súčin matíc (všeobecne)

Nech A je typu $m \times n$, B je typu $n \times k$. (počet stĺpcov A = počet riadkov B)
Potom súčin matíc A a B je matica C typu $m \times k$ (počet riadkov A, počet stĺpcov B)
Prvok C_{ij} matice C na pozícii (i, j) je daný ako súčin i-teho riadku A a j-teho stĺpca B:

$$C_{ij} = r_i(A) \cdot s_j(B)$$

Príklad 6.8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & 8 \\ 1 & 7 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(\dots)}_{\text{typ } 3\times 2} \underbrace{(\dots)}_{\text{typ } 2\times 4} = \underbrace{(\dots)}_{\text{typ } 3\times 4}$$

Prechádzame postupne cez všetky usporiadané dvojice (riadok ľavej, stĺpec pravej). Pre každú dvojicu vyrobíme ich súčin a umiestnime to číslo do výslednej matice na pozíciu (i, j).

Vlastnosti násobenia matíc

- $A(BC) = (AB)C$ (asociativita)
  Dôkaz nie je zrejmý, ale priamy dôkaz je prácny a neposkytne generický vhľad do veci, preto ho neurobíme.
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributivita zľava)
- $(A + B)C = AC + BC$ (sprava)
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $a(AB) = (aA)B = A(aB)$ (kompatibilita násobenia matice skalárom a násobenia matíc)
- Ak A je matica typu $m \times n$ potom

  $$I_m A = A \quad AI_n = A$$

  kde I_m, I_n sú jednotkové matice typu $m \times m$ resp. $n \times n$
- Čo sa týka násobenia nulovou maticou,

  $$0A = 0 \quad A0 = 0$$

  kde 0 označuje nulové matice správneho typu.

POZOR! Operácia násobenia matíc **nie je komutatívna!**
Vôbec nie je pravda, že pre matice platí $AB = BA$. V prvom rade, ak existuje AB, musí byť počet stĺpcov A rovný počtu riadkov B.

A je typu $m \times n$, B je typu $n \times k$. Aby súčin BA vôbec existoval, musí byť $k = m$, ale to nie je vo všeobecnosti pravda.

Ale čo ak sú A, B štvorcové matice rovnakého typu? Potom AB aj BA existujú a majú aj rovnaký typ. Skúsme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teda vidíme, že $AB \neq BA$ Nič menej, pre niektoré dvojice matíc platí $AB = BA$, napríklad $AO = OA = O$. Prirodzená otázka, pre ktoré dvojice štvorcových matíc rovnakého typu platí $AB = BA$ je dôležitá, ale nemá jednoduchú odpoveď.

7 Matice ako zobrazenia vektorov

Uvažujme maticu $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$; sprava ju môžeme vynásobiť vektorom (t.j. stĺpcom) typu $n \times 1$; výsledok je opäť stĺpec typu $m \times 1$ (t.j. vektor).

Príkl.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Týmto spôsobom máme s každou maticou A typu $m \times n$ asociované zobrazenie

$$[[A]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

dané predpisom $[[A]](\vec{x}) = A\vec{x}$ alebo (slovne) vynásob vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ maticou A zľava. Máme teda nejaký typ matematického objektu (zobrazenie z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$) reprezentovaný iným objektom (matica typu $m \times n$).

Cieľom tohto textu je preskúmať väzbu medzi maticami a zobrazeniami, ktoré reprezentujú. Teraz uvedieme niekoľko matíc a popíšeme zobrazenia, ktoré reprezentujú. Ak to budeme vedieť, sformulujeme aj význam toho zobrazenia - geometrický alebo iný.

Príklad 7.1 (Nulové matice)**.** Uvažujme nulovú maticu typu $m \times n$. Aké zobrazenie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ táto matica reprezentuje? Počítajme:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^{m\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^m}$$

$\in \mathbb{R}^{m\times n} \qquad \in \mathbb{R}^n \qquad \in \mathbb{R}^m$

Vidíme teda, že nulová matica reprezentuje zobrazenie z $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ktoré zobrazí každý vektor z $\mathbb{R}^n$ na prvok $\vec{0} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$, t.j. konštantné zobrazenie s hodnotou $\vec{0}$. Asi nikoho neprekvapí, že toto zobrazenie sa značí O.

Príklad 7.2 (Jednotkové matice a ich skalárne násobky)**.** Spomeňme si, že jednotková matica I_n je diagonálna matica typu $n \times n$, ktorá má na diagonále samé 1. Preskúmajme, aké zobrazenie reprezentuje:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{I_n\in\mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^n}$$

Vidíme teda, že $I_n\vec{x} = \vec{x}$ pre všetky vektory $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ a teda I_n reprezentuje identické zobrazenie $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$:

$$[[I_n]] = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Príklad 7.3. Pozrime sa teraz na trochu všeobecnejší prípad; nech D_α je diagonálna matica typu $n \times n$, ktorá má na diagonále tú istú konštantu $\alpha \in \mathbb{R}$. Určme, aké zobrazenie takáto matica reprezentuje.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}}_{D_\alpha \in \mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n} = \alpha\vec{x}$$

(násobenie vektora sklárom)

Teda (symbolicky)

$$[[D_\alpha]](\vec{x}) = \alpha\vec{x},$$

pre všetky $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Všimnime si, že (keďže $D_0 = 0$ a $D_1 = I_n$) toto dostávame spätne ako špeciálne prípady $\alpha = 0, \alpha = 1$:

$$[[0]](\vec{x}) = [[D_0]](\vec{x}) = 0\vec{x} = \vec{0}$$

$$[[I_n]](\vec{x}) = [[D_1]](\vec{x}) = 1\vec{x} = \vec{x} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(\vec{x})$$

Príklad 7.4 (Súčty a priemery)**.** Každá matica $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ (riadok) reprezentuje zobrazenie $[[A]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. ($\downarrow$ prvky $\mathbb{R}^1$ sú usporiadané 1-ice; $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$)

Uvažujme špeciálne maticu z $\mathbb{R}^{1\times n}$ obsahujúcu iba 1; máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Zobrazenie z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^1$ reprezentované touto maticou je teda dané jednoducho ako "súčet zložiek vektora".

Podobne $(\frac{1}{n} \dots \frac{1}{n})$ reprezentuje zobrazenie "priemer zložiek vektora".

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{x_1}{n} + \dots + \frac{x_n}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Príklad 7.5 (Pravouhlá projekcia na priamku)**.** Vezmime si teraz maticu

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Táto reprezentuje zobrazenie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Predpis tohto zobrazenia rozpísaný do zložiek nájdeme ľahko

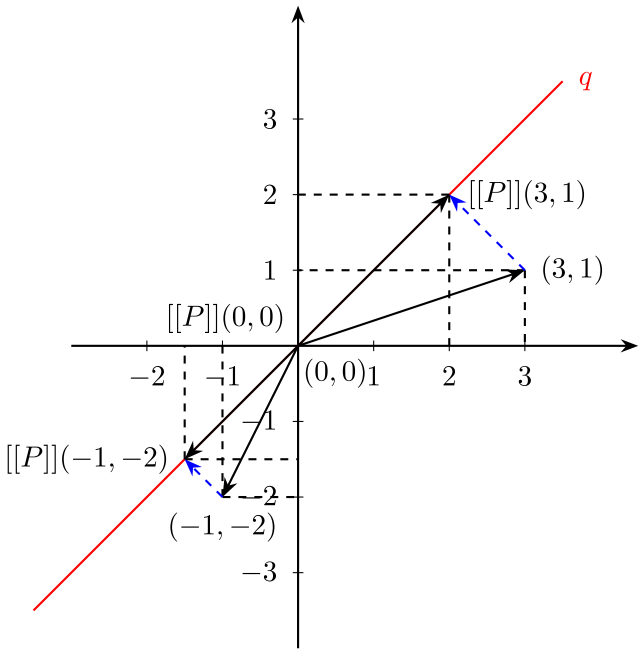
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$$

(obe zložky sú vždy rovnaké)

Pokúsme sa interpretovať toto zobrazenie geometricky; stotožníme vektory z $\mathbb{R}^2$ s vektormi v rovine prostredníctvom nejakých dvoch navzájom kolmých súradnicových osí a určíme polohu obrazov niekoľkých vektorov. Pre každý vektor $\vec{x}$ má $P\vec{x}$ obe zložky rovnaké. Geometricky toto znamená, že $P\vec{x}$ leží na priamke q prechádzajúcej počiatkom

$$q = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} [[P]](3,1) &= (2,2) \\ [[P]](0,0) &= (0,0) \\ [[P]](-1,-2) &= \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$



Po vyskúšaní pár bodov dospejeme k hypotéze $[[P]](\vec{x})$ je priemet $\vec{x}$ na q v pravom uhle. Táto hypotéza je naozaj pravdivá. Je možné ju dokázať holými rukami, ale rozumnejšie je odložiť jej dôkaz na neskôr, do druhého semestra, keď budeme mať k dispozícii mocnejšie nástroje.

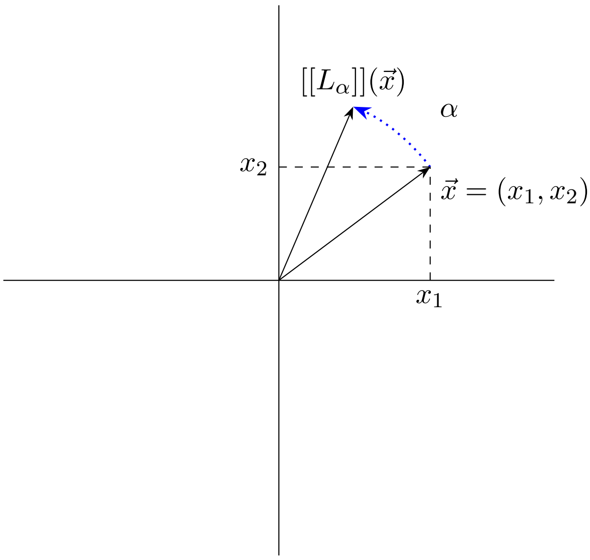
Príklad 7.6 (Rovinná rotácia)**.** Uvažujme, pre $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ maticu

$$L_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Máme

$$[[L_\alpha]](x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Význam tohto zobrazenia je rotácia proti smeru hodinových ručičiek o uhol α vľavo okolo počiatku.

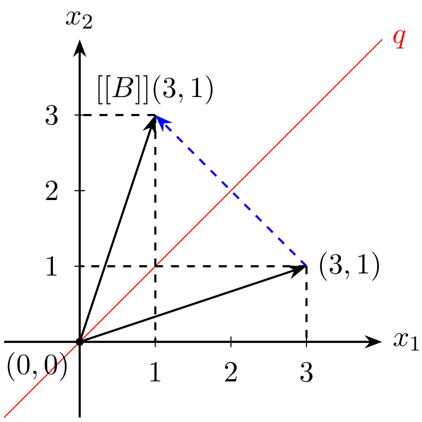


Toto nebudeme dokazovať teraz, ale dokážeme to neskôr.

Príklad 7.7 (Osová súmernosť podľa priamky)**.** Uvažujme maticu $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a počítajme pre $\vec{x} = (x_1, x_2)$ máme

$$[[B]](\vec{x}) = B\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Toto zobrazenie teda vymieňa zložky. Geometricky sa toto dá vyjadriť ako osová súmernosť podľa priamky q, ktorú už poznáme (7)



7.1 Ktoré zobrazenia sú reprezentovateľné maticami?

V tomto momente vzniká prirodzená otázka, ktoré zobrazenia $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sú reprezentovateľné maticami $R^{m\times n}$; väčšina toho, čo sa budeme učiť vo zvyšku tohto semestra sa bude týkať hľadania systematickej odpovede na túto otázku. Zatiaľ sa obmedzíme na konštatovanie, že nie všetky zobrazenia $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sú reprezentovateľné maticou. Napríklad iste platí, že $A\vec{0} = \vec{0}$ pre každú maticu A. Teda ľubovoľné zobrazenie, ktoré zobrazí vektor $\vec{0}$ na nenulový vektor iste reprezentovateľné maticou nebude.

7.2 Súčin matíc je reprezentácia zloženého zobrazenia

Veta 7.8. *Nech $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{k\times m}$. Uvažujme zobrazenia reprezentované maticami A, B.*

$$[[A]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$[[B]] : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

Potom zložené zobrazenie $[[B]]\circ[[A]]$ je práve zobrazenie asociované s maticou BA:

$$[[B]] \circ [[A]] = [[BA]]$$

Dôkaz. Máme dokázať, že $[[B]]\circ[[A]] = [[BA]]$. Obe tieto zobrazenia sú typu $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Nech $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
([[B]] \circ [[A]])(\vec{x}) &= [[B]]([[A]](\vec{x})) && \text{(definícia zloženého zobrazenia)}\\
&= [[B]](A\vec{x}) && \text{(predpis pre } [[A]])\\
&= B(A\vec{x}) && \text{(predpis pre } [[B]])\\
&= (BA)\vec{x} && \text{(asociativita násobenia matíc)}\\
&= [[BA]](\vec{x}) && \text{(predpis pre } [[BA]])
\end{aligned}$$

Zobrazenia $[[BA]]$ a $[[B]] \circ [[A]]$ majú rovnaký definičný obor aj koobor a každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ zobrazia na rovnaký vektor v $\mathbb{R}^k$. To znamená, že $[[B]] \circ [[A]] = [[BA]]$. □

Príklad 7.9. Uvažujme maticu rovinnej rotácie $L_{\frac{\pi}{2}}$:

$$L_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{\frac{\pi}{2}} L_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D_{-1}$$

Táto matica by mala reprezentovať zložené zobrazenie $[[L_{\frac{\pi}{2}}]] \circ [[L_{\frac{\pi}{2}}]]$, teda zobrazenie $[[L_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}]] = [[L_\pi]]$. Matica D_{-1} reprezentuje zobrazenie násobenie skalárom -1. Ale vynásobiť rovinný vektor skalárom -1 je to isté ako otočiť ho o π vľavo (alebo vpravo), teda $D_{-1} = L_\pi$.

Príklad 7.10. Ak vezmeme pravouhlú projekciu P na priamku q (viď vyššie), očakávame, že $PP = P$, pretože $[[P]] \circ [[P]] = [[P]]$. Naozaj:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4+1/4 & 1/4+1/4 \\ 1/4+1/4 & 1/4+1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

7.3 Inverzná matica

Definícia 7.11. Nech A je štvorcová matica typu $n \times n$. *Inverzná matica k A* je taká matica A^{-1} typu $n \times n$, pre ktorú platí

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Pozor! Inverzná matica k štvorcovej matici nemusí existovať. Napríklad nulová matica iste nemá inverznú, prečo?

Definícia 7.12. Nech A je štvorcová matica. Ak A má inverznú, hovoríme, že A je *regulárna*. V opačnom prípade hovoríme, že A je *singulárna*.

Príklad 7.13. Ak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

potom inverzná matica k A je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Príklad 7.14 (Inverzná rotácia)**.**

$$L_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

je inverzná matica k L_α.

Keďže A, A^{-1} sú štvorcové rovnakého typu, povedzme $A, A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, reprezentujú nejaké zobrazenia

$$[[A]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$[[A^{-1}]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Definícia inverznej matice hovorí, že

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Keďže tieto sú matice, sú rovnaké aj nimi reprezentované zobrazenia sú rovnaké

$$[[AA^{-1}]] = [[A^{-1}A]] = [[I_n]]$$

Podľa Vety 7.8 ale

$$[[AA^{-1}]] = [[A]] \circ [[A^{-1}]]$$

$$[[A^{-1}A]] = [[A^{-1}]] \circ [[A]]$$

a vieme, že

$$[[I_n]] = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Z toho dostávame rovnosť zobrazení

$$[[A]] \circ [[A^{-1}]] = [[A^{-1}]] \circ [[A]] = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Ale to presne znamená, že $[[A^{-1}]]$ je zobrazenie inverzné k zobrazeniu $[[A]]$, viď Definícia 3.8.

Veta 7.15 (Inverzia matice je inverzia zobrazenia)**.** *Nech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulárna matica. Potom $[[A^{-1}]]$ je inverzné zobrazenie k zobrazeniu $[[A]]$. Kompaktne to môžeme zapísať ako*

$$[[A^{-1}]] = [[A]]^{-1}$$

7.4 Inverzia súčinu matíc

Veta 7.16. *Nech A, B sú regulárne matice rovnakého typu. Vtom aj AB je regulárna matica a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Dôkaz.

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$
$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

□

POZOR: Nič podobné neplatí pre súčet matíc.

7.5 Počítanie inverznej matice

Postup: napíšeme si vedľa seba maticu, ktorú chceme invertovať a jednotkovú maticu, oddelíme čiarou.

$$(A|I_n)$$

(typu $n \times 2n$) potom používame na obe matice (celé riadky) rovnaké elementárne riadkové operácie, ktorými sa snažíme upraviť maticu vľavo od čiary tak, aby sme tam dostali I_n. Ak sa nám to podarí, napravo od čiary máme A^{-1}.

$$(I_n|A^{-1})$$

Príklad 7.17. Takto sa to urobí pre konkrétnu maticu.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] 3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] 3 \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] -1 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

7.6 Sústavy lineárnych rovníc - nový pohľad

Prizrime sa na sústavy lineárnych rovníc v kontexte zobrazení asociovaných z maticami. Každá matica $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nám určuje zobrazenie $[[A]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ predpisom $[[A]](\vec{x}) = A\vec{x}$. Ak si predpis pre $[A]$ rozpíšeme do zložiek, dostaneme, pre $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$[[A]](\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

To je ale presne a doslova to, čo poznáme pod menom ľavá strana sústavy lineárnych rovníc! Ak teraz vezmeme nejaký vektor $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, tak $[[A]](\vec{x}) = \vec{b}$ presne znamená:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

čo je doslova sústava lineárnych rovníc. Vidíme teda, že (pre danú maticu A a vektor $\vec{b}$) je to isté:

vyriešiť sústavu lineárnych rovníc $(A\vert\vec{b})$	$\Leftrightarrow$	nájsť množinu všetkých vektorov $\vec{x}$ takých, že $[A](\vec{x}) = \vec{b}$, resp. $A\vec{x} = \vec{b}$

7.7 Jednotkové vektory v $\mathbb{R}^n$

Zavedme novú notáciu: v $\mathbb{R}^n$ budeme označovať $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ vektory:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0)\\
\vec{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0)\\
&\vdots\\
\vec{e}_n &= (0, 0, \dots, 0, 1)
\end{aligned}$$

Všimnime si, že sú to presne stĺpce jednotkovej matice I_n; $s_i(I_n) = \vec{e}_i$ a môžeme teda písať

$$I_n = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \dots \vec{e}_n)$$

7.8 Prečo funguje algoritmus počítania inverznej matice

Spomeňme si, ako sme počítali sústavy lineárnych rovníc: pomocou elementárnych riadkových operácií sme upravovali ľavú stranu na stupňovitý tvar. Potom sme robili „spätné dosádzanie". Mohli sme ale postupovať aj trochu inak: pred fázou spätného dosádzania vynulovať aj prvky nad diagonálou:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
\blacksquare & 0 & 0 & \dots & 0 & \blacksquare\\
0 & \blacksquare & 0 & \dots & 0 & \blacksquare\\
0 & 0 & \blacksquare & \dots & 0 & \blacksquare\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & \blacksquare & \blacksquare
\end{array}\right)$$

to by nám spätné dosádzanie výrazne zjednodušilo.

Najlepší prípad je ten, keď máme n rovníc o n neznámych a na ľavej strane nám vyjde diagonálna matica. Vtedy môžeme postupovať ďalej a podeliť každý riadok diagonálnym prvkom. Vtedy nám na pravej strane vyjde priamo riešenie sústavy, a na ľavej strane máme jednotkovú maticu.

$$(A|\vec{b}) \sim \dots \sim (I|\vec{x})$$

Ak sa nám toto teda podarí, našli sme (jediný) vektor taký, že $A\vec{x} = \vec{b}$ a je to presne pravá strana po eliminácii matice sústavy na jednotkovú.

Pozrime sa teraz z novej perspektívy na algoritmus počítania inverznej matice:

$$(A|I_n) \sim \dots \sim (I_n|Y)$$

na tento postup môžeme nahliadať ako na
súbežné riešenie n sústav lineárnych rovníc
$(A|\vec{e}_1), \dots, (A|\vec{e}_n)$

o tejto matici Y tvrdíme, že je inverzná k A; označme jej stĺpce $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ $Y = (\vec{y}_1 \dots \vec{y}_n)$	$\vec{y}_i$ je riešenie sústavy $(A|\vec{e}_i)$, pre $i \in \{1, \dots, n\}$ $\Downarrow$ znamená, že $A\vec{y}_i = \vec{e}_i$ pre $i \in \{1, \dots, n\}$

Ak si teraz uvedomíme, ako sa násobia matice (napravo postupujeme po stĺpcoch), môžeme nahliadnuť, že toto znamená:

$$A \cdot \underbrace{(\vec{y}_1 \dots \vec{y}_n)}_{\text{Toto je } Y} = (A\vec{y}_1 \dots A\vec{y}_n) = \underbrace{(\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)}_{\text{Toto je } I_n} \implies AY = I_n$$

V poriadku, ale prečo platí aj $YA = I_n$? Aby sme to dokázali, je vhodné zaviesť pojem elementárnej matice:

Definícia 7.18 (Elementárna matica)**.** E je elementárna matica, ak vznikla z jednotkovej matice I vykonaním jednej elementárnej riadkovej operácie.

Napríklad pre pripočítanie $\frac{1}{2}$-násobku prvého riadku I_3 k druhému dostaneme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftarrow r_2 + \frac{1}{2} r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \text{elementárna matica}$$

Elementárne matice majú túto peknú vlastnosť: pre každú maticu A:

$A \sim A'$	$\Leftrightarrow$	$A' = EA$
$\uparrow$		$\uparrow$
elementárna riadková operácia		toto je presne tá matica, ktorá vznikne z A vykonaním elementárnej riadkovej operácie, „zakódovanej" v E.

Pri počítaní inverznej matice sa naľavo dialo toto:

$$\underbrace{A \sim \dots \sim I_n}_{\text{elementárne riadkové operácie}}$$

Pomocou elementárnych matíc to môžeme zapísať takto:

$$A \sim E_1 A \sim E_2 E_1 A \sim \dots \sim E_k \dots E_2 E_1 A = I_n \tag{8}$$

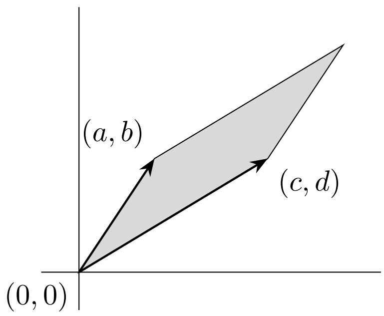
Napravo sa zase dialo toto:

$$I_n \sim E_1 I_n \sim E_2 E_1 I_n \sim \dots \sim E_k \dots E_2 E_1 I_n = E_k \dots E_2 E_1 = Y \tag{9}$$

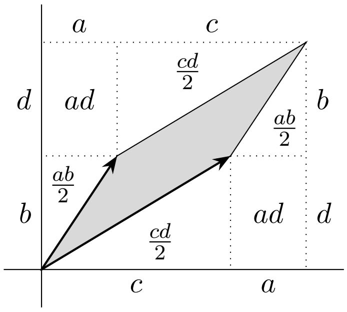
Z (8) a (9) zrejme dostávame $YA = I_n$. Teda platí $AY = YA = I_n$ a preto $Y = A^{-1}$, viď definícia inverznej matice 7.11.

8 Determinant matice

Determinant je reálne číslo, ktoré priradíme každej štvorcovej matici typu $n \times n$. Jeho skutočný význam je nemožné vysvetliť v tejto fáze, ničmenej intuitívne sa dá pochopiť ako (až na znamienko) objem n-rozmerného rovnobežnostena vytýčeného stĺpcami matice.



Pre $A = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$, kde stĺpce sú vektory (a, b) a (c, d), je plocha rovnobežníka rovná $cb - ad$. Dôkaz obrázkom nasleduje.



$$\text{plocha rovnobežníka} = (a + c).(b + d) - (2 \cdot \frac{ab}{2} + 2 \cdot \frac{cd}{2} + 2ad) =$$
$$(ab + cb + ad + cd) - (ab + cd + 2ad) = cb - ad$$

Toto funguje aj v troch rozmeroch, pre objem rovobežnostena. Skôr ako zadefinujeme determinant vo všeobecnosti, potrebujeme pomocný pojem.

Definícia 8.1 (Minor)**.** Nech A je matica typu $n \times n$. Minor A_{ij} je matica typu $(n-1) \times (n-1)$, ktorá vznikne z A vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca.

Príklad 8.2. Ak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

potom niektoré minory sú takéto

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad A_{42} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Definícia 8.3 (Determinant)**.** Determinant matice A typu $n \times n$ definujeme induktívne podľa n.

(1) Pre maticu 1×1: $\det((a)) = a$.

(2) Nech $n > 1$, $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Nech $i \in \{1, \dots, n\}$ je index nejakého riadku. Potom (toto je **rozvoj podľa i-teho riadku**):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

V bode 2) môžeme pritom spraviť rozvoj podľa ľubovoľného riadku i, $\det(A)$ vyjde rovnako nezávisle na voľbe i. Toto dokazovať nebudeme.

Podobne môžeme v bode 2) spraviť rozvoj podľa ľubovoľného stĺpca $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Notácia: $\det(A)$ sa zvykne niekedy označovať ako $|A|$.

8.1 Determinant matice 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Rozvoj podľa riadku 1 nám dáva:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{21}) \\ &= 1 \cdot a_{11} \cdot (a_{22}) - 1 \cdot a_{12} \cdot (a_{21}) \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{aligned}$$

Príklad 8.4.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= (1 \cdot 1 \cdot 1) + (3 \cdot (-1) \cdot 1) + (2 \cdot 0 \cdot 2) \\ &\quad - (2 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot (-1) \cdot 2) - (3 \cdot 0 \cdot 1) \\ &= 1 - 3 + 0 - 2 - (-2) - 0 = -2 \end{aligned}$$

8.2 Determinant matice 3x3

Môžeme počítať rozvojom podľa riadku/stĺpca alebo použiť **Sarrusovo pravidlo** pre $A = (a_{ij})_{3\times 3}$:

$$\begin{aligned}\det(A) =& (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ & - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Červené šípky sú kladný smer, modré záporný. Sarrusovo pravidlo síce vyzerá jednoducho, ale v skutočnosti je zložitejšie ako počítať determinant rozvojom podľa riadku alebo stĺpca. Vzorec pre Sarrusovo pravidlo má 12 násobení, rozvoj podľa riadku má násobení 9.

POZOR! Sarrusovo pravidlo nefunguje na matice 4×4 a väčšie!

8.3 Vlastnosti determinantu

Dôležitá vlastnosť determinantu je tá, že detekuje, kedy je matica singulárna.

Veta 8.5. *Štvorcová matica A je singulárna práve vtedy, keď* $\det(A) = 0$.

Veta 8.6. *Nech A, B sú štvorcové matice rovnakého typu. Potom:*

(a) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(b) $\det(A^T) = \det(A)$

(c) $\det(I) = 1$

(d) Ak A je regulárna, $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$

8.4 Elementárne riadkové operácie a determinant

Nie je pravda, že elementárne riadkové operácie zachovávajú determinant. Avšak pravda je, že vieme presne povedať, ako menia determinant.

Veta 8.7. *Nech A je štvorcová matica.*

(a) Ak A' je matica, ktorá vznikla z A pripočítaním skalárneho násobku niektorého riadku k inému riadku, potom $\det(A') = \det(A)$.

(b) Ak A' je matica, ktorá vznikla z matice A vynásobením niektorého riadku skalárom $c \in \mathbb{R}$, potom $\det(A') = c \cdot \det(A)$.

(c) *Ak A' je matica, ktorá vznikla z A výmenou riadkov, potom* $\det(A') = -\det(A)$.

Analogické tvrdenie platí pre stĺpce a elementárne stĺpcové operácie.

Príklad 8.8. Vypočítajme determinant matice typu 4×4

$$A = (a_{ij})_{4\times 4} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Samozrejme, môžeme použiť priamo vzorec na rozvoj podľa riadku, ale to je nerozumné, vedie to na komplikovaný výpočet. Miesto toho použijeme kombinovanú techniku: využijeme fakt, že pripočítanie násobku nejakého riadku k inému determinant nemení.

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \; -1 \quad = \quad \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teraz môžeme rozvinúť podľa posledného riadku:

$$(-1)^{1+4}.0.\det(\dots) + (-1)^{2+4}.0.\det(\dots) + \\ (-1)^{3+4}.0.\det(\dots) + (-1)^{4+4}.1.\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

pričom prvé tri minory ani nemusíme písať, keďže ich determinanty vo vzorci sú vynásobené 0. Determinant A je teda rovný

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tento môžeme vypočítať Sarrusovým pravidlom, ale ide to aj šikovnejšie.

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \; -1 \quad = \quad \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a rozvoj podľa druhého riadku nám dá (nulové členy vynechávame)

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^{2+1}.2.\det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ = (-2).(1.2 - (-3).(-1)) = (-2).(2-3) = (-2).(-1) = 2$$

Uvedomme si teraz, ako nám rozumné použitie elementáarnych riadkových operácií v predošlom príklade umožnilo zjednodušiť výpočet. Ak by sme spravili rozvoj podľa riadku/stĺpca hneď, počet násobení ktorý bu sme museli vykonať by bol (pri použití Sarrusovho pravidla) rovný $4 * 12 = 48$.

8.5 Determinanty trojuholníkových matíc

Horná trojuholníková matica je taká štvorcová matica, ktorá má pod diagonálou samé nuly. Analogicky definujeme dolnú trojuholníkovú maticu. Všimnime si, že matica je diagonálna práve vtedy, keď je zároveň horná aj dolná trojuholníková.

Veta 8.9. *Determinant hornej trojuholníkovej matice je súčin jej diagonálnych prvkov.*

Dôkaz. Tvrdenie platí pre matice 1×1.

Nech $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ a nech $A = (a_{ij})_{k \times k}$ je horná trojuholníková matica. Predpokladajme, že tvrdenie vety platí pre horné trojuholníkové matice rozmeru $k - 1$.

Rozvojom podľa prvého stĺpca dostaneme

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11})$$

ale pre minor $A_{11} \in \mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)}$ tvrdenie platí podľa predpokladu, teda

$$\det(A_{11}) = a_{22}. \dots .a_{nn}$$

Teda

$$\det(A) = a_{11}. \det(A_{11}) = a_{11}.a_{22}. \dots .a_{nn}$$

□

Príklad 8.10.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 7 = -14$$

8.6 Cramerovo pravidlo

Nech A je regulárna matica typu $n \times n$. Uvažujme sústavu n lineárnych rovníc o n neznámych $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. Označme A_i maticu, ktorá vznikne nahradením i-teho stĺpca matice A pravou stranou $\overrightarrow{b}$. Potom sústava má jediné riešenie $\overrightarrow{x} = (x_1, \dots, x_n)$, kde

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

8.7 Invertovanie matíc pomocou determinantov

Nech A je matica typu $n \times n$. *Kofaktorová matica* C je matica typu $n \times n$ definovaná ako $C = (c_{ij})$, kde:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Veta 8.11. *Nech A je regulárna matica. Potom*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T$$

kde C je kofaktorová matica A.

Príklad 8.12. Nájdime inverznú maticu k $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Krok 1: Determinant: $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$.

Krok 2: Kofaktory:

- $c_{11} = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = 1 \cdot \det((4)) = 4$
- $c_{12} = (-1)^{1+2} \det(A_{12}) = -1 \cdot \det((3)) = -3$
- $c_{21} = (-1)^{2+1} \det(A_{21}) = -1 \cdot \det((2)) = -2$
- $c_{22} = (-1)^{2+2} \det(A_{22}) = 1 \cdot \det((1)) = 1$

Krok 3: Kofaktorová matica: $C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Krok 4: Transponovaná matica kofaktorov: $C^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Krok 5: Inverzná matica: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^T = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Poznamenajme, že tento spôsob počítania inverznej matice je veľmi neefektívny v porovnaní s eliminačnou metódou pre ľubovoľnú maticu väčšiu ako 2×2.

9 Vektorové priestory

Na začiatku tejto časti si skúsme uvedomiť, aké objekty nazývame v tejto chvíli „vektory“:

- n-tice z $\mathbb{R}^n$
- orientované úsečky so spoločným počiatkom v rovine (označme množinu všetkých týchto úsečiek S)

S oboma typmi vektorov môžeme robiť isté operácie:

- sčítať
- násobiť skalárom

Teraz ideme spraviť toto: pokúsime sa zachytiť vlastnosti sčítania a násobenia skalárom pre „oba typy vektorov" do abstraktného pojmu. Skôr, ako to urobíme, musíme si vyjasniť, aký majú operácie sčítania a násobenia skalárom dátový typ.

Sčítanie vektorov je toto: predpis, ktorý nám hovorí, ako z dvoch vektorov vyrobiť vektor. V jazyku matematiky je sčítanie teda zobrazenie:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

kde V je množina všetkých vektorov, o ktorých uvažujeme. Napríklad ak $V = \mathbb{R}^2$, máme $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

$$+((1,2),(-2,3)) = (-1,5)$$

Samozrejme, súčet vektorov $\vec{u}, \vec{v}$ nezapisujeme bežne ako $+(\vec{u}, \vec{v})$, ale $\vec{u} + \vec{v}$.

Podobne násobenie vektora skalárom je zobrazenie typu

$$. : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

kde V je množina všetkých vektorov.

Základná idea definície vektorového priestoru spočíva v tom, že na vyjadrenie podstaty pojmu vektora nám stačí to, aby sme zachytili to, ako sa tieto operácie správajú. Teda definícia vektorového priestoru nehovorí nič o tom, čo je vektor, ale vyjadruje len vlastnosti operácií $+, .$.

Definícia 9.1. Nech V je neprázdna množina, vybavená

- operáciou $+ : V \times V \longrightarrow V$ (sčítanie vektorov)
- operáciou $. : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ (násobenie vektora skalárom)
- fixným vybratým prvkom $\vec{0} \in V$ (nulový vektor)

pričom platia tieto rovnosti, pre všetky $a, b \in \mathbb{R}$ a pre všetky $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$:

(V1) **asociativita sčítania vektorov**

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$$

(V2) **komutativita sčítania vektorov**

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$$

(V3) **nulový vektor je neutrálny vzhľadom na sčítanie**

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$$

(V4) **opačný vektor**

$$\text{existuje } -\vec{x} \text{ také, že } \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$$

(V5) **kompatibilita s násobením skalárom**

$$(a.b).\vec{x} = a.(b.\vec{x})$$

(V6) **distributivita násobenia skalárom vzhľadom na sčítanie vektorov**

$$a.(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$$

(V7) **distributivita násobenia skalárom vzhľadom na sčítanie skalárov**

$$(a + b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$$

(V8) **jednotkový zákon**

$$1.\vec{x} = \vec{x}$$

Potom hovoríme, že V je *vektorový priestor* alebo (čo je to isté) *lineárny priestor*. Prvky množiny V sa nazývajú *vektory*. Rovnosti z tejto definície sa volajú *axiómy vektorového priestoru*.

Príklad 9.2. Množina $\mathbb{R}^n$, vybavená sčítaním a násobením po zložkách, nulový vektor je $(0, \dots, 0)$.

Príklad 9.3. Množina ρ_O všetkých orientovaných úsečiek v rovine s fixným počiatkom O, sčítanie je dané rovnobežníkovým pravidlom, násobenie skalárom je škálovanie úsečky, nulový vektor je $\overrightarrow{OO}$.

Príklad 9.4. Množina všetkých funkcií z $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sčítanie je súčet funkcií, násobenie skalárom je násobenie funkcie číslom.

Príklad 9.5. Jednoprvková množina, povedzme $\{\star\}$; uvedomme si, že nutne $\vec{0} = \star$ a že sčítanie a násobenie skalárom sú jediné možné:

$$+ : \{\star\} \times \{\star\} \to \{\star\}$$

$$. : \mathbb{R} \times \{\star\} \to \{\star\}$$

Odčítanie vektorov: Na každom vektorovom priestore V môžeme zaviesť odvodenú operáciu rozdielu vektorov

$$- : V \times V \to V$$

danú predpisom

$$\vec{x} - \vec{y} := \vec{x} + (-1)\vec{y}$$

Veta 9.6. *Nech V je vektorový priestor. Potom pre všetky $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{u} \in V$ a pre všetky $a \in \mathbb{R}$ platí:*

a) ak $\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z}$, potom $\vec{y}=\vec{z}$

b) ak $a\vec{x}=a\vec{y}$ a $a \neq 0$, potom $\vec{x}=\vec{y}$

c) $a.\vec{0}=\vec{0}$ a $0.\vec{x}=\vec{0}$

d) ak $a\vec{x}=\vec{0}$, potom $a=0$ alebo $\vec{x}=\vec{0}$

e) $-\vec{x}=(-1)\vec{x}$

f) $a(\vec{x}-\vec{y})=a\vec{x}-a\vec{y}$

Dôkaz.

a) Nech $\vec{x}+\vec{y}=\vec{x}+\vec{z}$, potom zrejme $-\vec{x}+(\vec{x}+\vec{y})=-\vec{x}+(\vec{x}+\vec{z})$. Asociativita sčítania (V1) aplikovaná na oboch stranách nám dá rovnosť

$$(*)\quad (-\vec{x}+\vec{x})+\vec{y}=(-\vec{x}+\vec{x})+\vec{z}$$

Keďže sčítanie vektorov je komutatívne (V2), platí $\vec{x}+(-\vec{x})=-\vec{x}+\vec{x}$ a z toho a (*) dostávame

$$(**)\quad (\vec{x}+(-\vec{x}))+\vec{y}=(\vec{x}+(-\vec{x}))+\vec{z}$$

Podľa axiómy o opačnom vektore $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$ a (**) dostaneme

$$\vec{0}+\vec{y}=\vec{0}+\vec{z}$$

Aplikujeme na oboch stranách komutativitu sčítania (V2):

$$\vec{y}+\vec{0}=\vec{z}+\vec{0}$$

a teraz už stačí iba na oboch stranách aplikovať axiómu o nulovom vektore (V3), čím dostaneme $\vec{y}=\vec{z}$.

b) (menej podrobne)

$$a\vec{x}=a\vec{y}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{a}(a\vec{x})=\frac{1}{a}(a\vec{y})$$

s využitím predpokladu $a \neq 0$. Následne kompatibilita (V5) nám dá

$$(\frac{1}{a}.a)\vec{x}=(\frac{1}{a}.a)\vec{y}$$
$$1.\vec{x}=1.\vec{y}$$

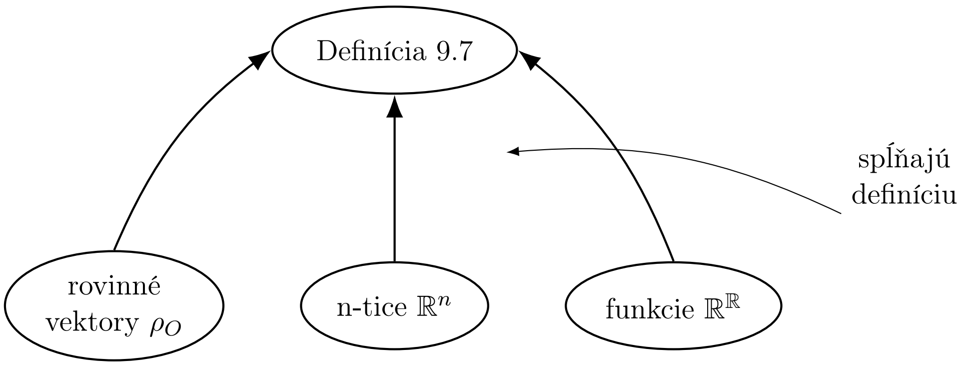
a potom podľa jednotkového zákona (V8)

$$\vec{x}=\vec{y}$$

c) ... f) Dôkazy vynechávame.

$\square$

Pointa tohto prístupu k veci je v tom, že keďže dôkaz vety 9.6 používa iba definíciu vektorového priestoru, veta platí pre všetky vektorové priestory (rovinné, n-tice, funkcie...), ktoré spĺňajú definíciu. Všetko, čo dokážeme pre vektorové priestory, bude platiť pre každý partikulárny prípad vektorového priestoru.



Preto budeme odteraz postupovať tak, že budeme formulovať pojmy a tvrdenia/vety v jazyku určenom definíciou vektorového priestoru.

9.1 Podpriestor vektorového priestoru

Začnime pojmom podpriestoru vektorového priestoru.

Definícia 9.7. Nech V je vektorový priestor. Množina $U \subseteq V$ sa nazýva **podpriestor**, ak platí:

1. $\vec{0} \in U$
2. Pre všetky dvojice $\vec{x}, \vec{y} \in U$ platí, že $\vec{x} + \vec{y} \in U$ (uzavretosť na sčítanie)
3. Pre všetky $\vec{x} \in U, a \in \mathbb{R}$ platí, že $a\vec{x} \in U$ (uzavretosť na násobenie skalárom)

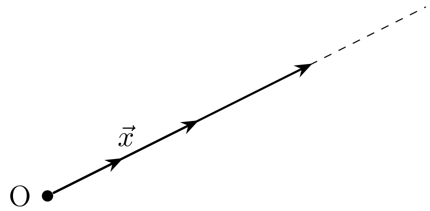
POZOR! Neexistuje nič také ako „U je podpriestor“ samé osebe, to slovné spojenie nemá žiaden zmysel; podobne ako „7 je menšie“. Slovné spojenie „je podpriestor“ totiž vyjadruje vzťah množiny a vektorového priestoru, podobne ako „je menšie“ vyjadruje vzťah medzi dvoma číslami.

Príklad 9.8. Uvažujme podmnožinu $U = \{(1,2),(0,0)\}$ vektorového priestoru $\mathbb{R}^2$. Je U podpriestor $\mathbb{R}^2$? Nie, pretože (medzi iným)

$$(1,2) + (1,2) = (2,4) \notin U$$

Veta 9.9. *Ak U je podpriestor vektorového priestoru V, potom množina U vybavená operáciami zdedenými z V je tiež vektorový priestor.*

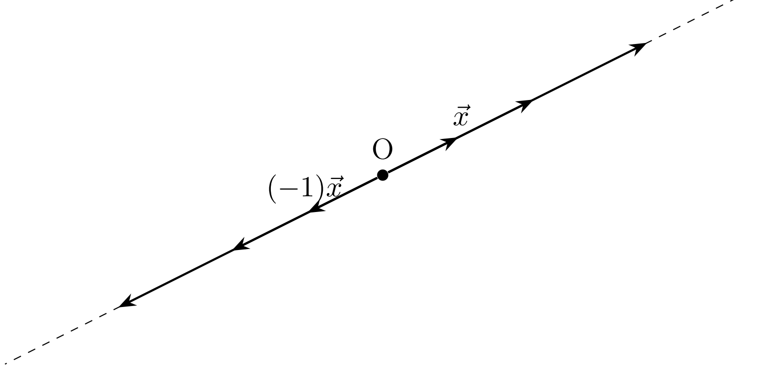
Príklad 9.10. Uvažujme podmnožinu U vektorového priestoru ρ_O „vektory v rovine s počiatkom O“ takú, že U obsahuje všetky vektory, ktorých koncový bod leží na nejakej polpriamke s počiatkom v O.



Je U podpriestor S? Nie, pretože ak $\vec{x} \in U$, potom $(-1).\vec{x} \notin U$, čo odporuje bodu 3. definície 9.7.

Všimnite si, že U spĺňa obidve zvyšné podmienky definície.

Príklad 9.11. Ak nahradíme polpriamku z predošlého príkladu priamkou, taká množina vektorov U už podpriestorom vektorového priestoru ρ_O bude:



Otázka: priamky prechádzajúce počiatkom sú teda podpriestory ρ_O. Aké ďalšie podpriestory ρ_O existujú? Zrejme dva: $\{\vec{0}\}$ a ρ_O.

Príklad 9.12. Nech U je podmnožina vektorového priestoru $\mathbb{R}^3$

$$U = \{(s + 2t, -t, 2s + t) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

Presvedčme sa, že U je podpriestorom $\mathbb{R}^3$.

1) $\vec{0} \in U$: ak $s = t = 0$, potom $(0 + 2.0, -0, 2.0 + 0) = (0, 0, 0) \in U$.

2) Nech $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in U$. $\vec{x}_1 \in U$ znamená, že $\vec{x}_1 = (s_1 + 2t_1, -t_1, 2s_1 + t_1)$ pre nejaké $s_1, t_1 \in \mathbb{R}$. Podobne $\vec{x}_2 = (s_2 + 2t_2, -t_2, 2s_2 + t_2)$ pre nejaké $s_2, t_2 \in \mathbb{R}$. Počítajme $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$:

$$((s_1 + s_2) + 2(t_1 + t_2), -(t_1 + t_2), 2(s_1 + s_2) + (t_1 + t_2))$$

ak položíme $S = s_1 + s_2$ a $T = t_1 + t_2$, vidíme, že $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in U$.

3) Ak $\vec{x} \in U$, tj. $\vec{x} = (s + 2t, -t, 2s + t)$ a $a \in \mathbb{R}$. Potom $a\vec{x} = (a(s + 2t), a(-t), a(2s + t)) = (as + 2at, -at, 2as + at)$. Položme $S' = as$ a $T' = at$.

$$a\vec{x} = (S' + 2T', -T', 2S' + T') \in U$$

a hotovo.

Príklad 9.13. Uvažujme vektorový priestor všetkých funkcií $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Nech P je podmnožina tvorená všetkými párnymi funkciami, teda:

$$P = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\}$$

Tvrdíme, že P je podpriestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Overíme podmienky z definície podpriestoru:

1. Nulová funkcia $0(x) = 0$ patrí do P, lebo pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $0(-x) = 0 = 0(x)$.

2. Nech $f, g \in P$. Potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

   $$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

   Teda $f + g \in P$.

3. Nech $f \in P$ a $c \in \mathbb{R}$. Potom:

   $$(cf)(-x) = c \cdot f(-x) = c \cdot f(x) = (cf)(x)$$

   Teda $cf \in P$.

Zistili sme, že množina párnych funkcií je uzavretá na súčet aj skalárny násobok a obsahuje nulový vektor, a teda tvorí podpriestor vektorového priestoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

9.2 Lineárny obal

Definícia 9.14. Nech V je vektorový priestor, nech $X = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)$ je n-tica vektorov z V. Potom **lineárny obal** je množina vektorov

$$\mathrm{Lo}(X) = \{a_1\vec{x}_1 + ... + a_n\vec{x}_n \mid a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$$

Vidíme, že predpis pre vytvorenie lineárneho obalu n-tice X sa dá vyjadriť slovne ako *všetky lineárne kombinácie vektorov* X. Analogicky môžeme definovať lineárny obal množiny vektorov.

Cvičenie: Ak $X = (\vec{u}, \vec{v})$ je dvojica vektorov v rovine, ako môže vyzerať $\mathrm{Lo}(X)$? Uvažujte prípady ako $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{u} = c\vec{v}$, $\vec{u} \neq c\vec{v}$.

Príklad 9.15. Skúsme si napísať ako vyzerá lineárny obal dvojice vektorov $((-1,2,3),(2,0,2))$ v $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Lo}(X) &= \{a_1(-1,2,3)+a_2(2,0,2) \mid a_1,a_2 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(-a_1,2a_1,3a_1)+(2a_2,0,2a_2) \mid a_1,a_2 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(-a_1+2a_2,2a_1,3a_1+2a_2) \mid a_1,a_2 \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Označme vektorový priestor všetkých funkcií $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ako $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Príklad 9.16. Ako vyzerá lineárny obal n-tice funkcií $(1,x,x^2,...,x^n)$? Tuto (trochu lajdácky) stotožňujeme funkciu v $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ s jej predpisom.

$$\mathrm{Lo}(1,x,x^2,...,x^n) = \{a_0+a_1x+...+a_nx^n \mid a_0,a_1,...,a_n \in \mathbb{R}\}$$

To je množina všetkých polynómov stupňa nanajvýš n, označujeme ju $\mathbb{R}^n[x]$.

Veta 9.17. *Nech V je vektorový priestor, nech $X = (\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$ je n-tica vektorov z V. Potom* $\mathrm{Lo}(X)$ *je podpriestor V.*

Dôkaz. Overíme podmienky podpriestoru:

1. $\vec{0} \in \mathrm{Lo}(X)$, lebo $\vec{0} = 0\vec{x}_1+...+0\vec{x}_n \in \mathrm{Lo}(X)$.

2. Nech $\vec{u},\vec{v} \in \mathrm{Lo}(X)$. Potom

$$\vec{u} = a_1\vec{x}_1+...+a_n\vec{x}_n$$

pre nejaké $a_1,...,a_n \in \mathbb{R}$ a

$$\vec{v} = b_1\vec{x}_1+...+b_n\vec{x}_n$$

pre nejaké $b_1,...,b_n \in \mathbb{R}$. Máme dokázať, že $\vec{u}+\vec{v} \in \mathrm{Lo}(X)$. Počítajme:

$$\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v} &= (a_1\vec{x}_1+...+a_n\vec{x}_n)+(b_1\vec{x}_1+...+b_n\vec{x}_n)\\ &= (a_1+b_1)\vec{x}_1+...+(a_n+b_n)\vec{x}_n \in \mathrm{Lo}(X)\end{aligned}$$

3. Nech $\vec{u}$ je ako v bode 2), $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$c\vec{u} = c(a_1\vec{x}_1+...+a_n\vec{x}_n) = (ca_1)\vec{x}_1+...+(ca_n)\vec{x}_n \in \mathrm{Lo}(X)$$

□

Vidíme teda, že každý lineárny obal n-tice je podpriestorom priestoru, z ktorého vyberáme. Teda medziiným je $\mathbb{R}^n[x] = \mathrm{Lo}(1,x,...,x^n)$ podpriestorom $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Definícia 9.18. Hovoríme, že vektorový priestor V je **konečnorozmerný**, ak existuje n-tica $X = (\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$ vektorov z V taká, že $\mathrm{Lo}(X) = V$. Ak V nie je konečnorozmerný, je **nekonečnorozmerný**.

Veta 9.19. *Vektorový priestor $\mathbb{R}^n$ je konečnorozmerný pre každé $n \geq 1$.*

Dôkaz. Vezmime vektory

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (1,0,0,...,0)\\
\vec{e}_2 &= (0,1,0,...,0)\\
&\vdots\\
\vec{e}_n &= (0,0,0,...,1)
\end{aligned}$$

Tvrdíme, že $\mathbb{R}^n = \mathrm{Lo}(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$. Nech $\vec{v} = (a_1,...,a_n)$ je nejaký vektor z $\mathbb{R}^n$. Máme:

$$\begin{aligned}
a_1\vec{e}_1 + ... + a_n\vec{e}_n &= a_1(1,0,...,0) + ... + a_n(0,0,...,1)\\
&= (a_1,0,...,0) + ... + (0,0,...,a_n)\\
&= (a_1,...,a_n) = \vec{v}
\end{aligned}$$

Teda $\vec{v} \in \mathrm{Lo}(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$. □

Uvedomme si, že $\mathbb{R}^n[x]$ je tiež konečnorozmerný (lebo sme ho definovali ako lineárny obal nejakej n-tice vektorov).

V tomto momente vzniká prirodzená otázka: existuje nejaký priestor, ktorý nie je konečnorozmerný? Odpoveď je, samozrejme, „Áno": napríklad vektorový priestor $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nie je konečnorozmerný. Dôkaz presahuje zamýšľaný rámec prednášky, preto ho nespravíme. Skoro všetky vektorové priestory na tejto prednáške budú však konečnorozmerné.

10 Lineárna závislosť a nezávislosť, bázy

Z dôkazu Vety 9.19 vieme, že $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Lo}((1,0),(0,1))$. Aké sú iné n-tice X také, že $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Lo}(X)$? Môžeme napríklad vziať $X = ((1,0),(0,1),(-2,1))$. Zrejme $\mathrm{Lo}(X) = \mathbb{R}^2$ (vektor $(-2,1)$ je „naviac"); ale môžeme napríklad vyhodiť z X iný vektor a položiť si otázku, či $\mathrm{Lo}((1,0),(-2,1)) = \mathbb{R}^2$? [áno]. Napríklad ale $\mathrm{Lo}((1,0),(2,0)) \neq \mathbb{R}^2$: prečo?

Pri rozmýšľaní o podobných otázkach vzniká prirodzene pojem z nasledujúcej definície. (Veta: $\mathrm{Lo}(X)$ sa nezmení, ak sú vektory lineárne kombinované).

Definícia 10.1. Nech V je vektorový priestor, nech $X = (\vec{x}_1,...,\vec{x}_n)$ je n-tica vektorov z V. Hovoríme, že X je **lineárne závislá**, ak existujú $a_1,...,a_n \in \mathbb{R}$, nie všetky rovné 0, také, že

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + ... + a_n\vec{x}_n = \vec{0}$$

Ak X nie je lineárne závislá, hovoríme, že X je **lineárne nezávislá**.

Inými slovami: n-tica vektorov $(\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)$ je lineárne nezávislá, ak má rovnica

$$a_1\vec{x}_1 + ... + a_n\vec{x}_n = \vec{0} \tag{10}$$

iné riešenie ako $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Príklad 10.2. Je $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = ((1,0),(0,1))$ lineárne závislá v $\mathbb{R}^2$? Napíšme si, čo znamená (10) v tomto prípade.

$$\begin{aligned} a_1(1,0) + a_2(0,1) &= (0,0) \\ (a_1, 0) + (0, a_2) &= (0,0) \\ (a_1, a_2) &= (0,0) \end{aligned}$$

Teda $a_1 = a_2 = 0$ a $((1,0),(0,1))$ je lineárne nezávislá. Veľmi podobne sa môžeme presvedčiť, že $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ je lineárne nezávislá v $\mathbb{R}^n$.

Príklad 10.3. Je $((-1,3),(2,-6))$ lineárne závislá v $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned} a_1(-1,3) + a_2(2,-6) &= (0,0) \\ (-a_1, 3a_1) + (2a_2, -6a_2) &= (0,0) \\ (-a_1 + 2a_2, 3a_1 - 6a_2) &= (0,0) \end{aligned}$$

Posledná rovnosť presne zodpovedá sústave lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} -a_1 + 2a_2 &= 0 \\ 3a_1 - 6a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Matica sústavy:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

Riešme sústavu (Gaussovou elimináciou):

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vieme, že takáto sústava má nekonečne veľa riešení, teda iste aj aspoň jedno iné, než $a_1 = a_2 = 0$. Z toho už vieme, že tá dvojica vektorov je lineárne závislá. Tým by sme mohli skončiť, takéto riešenie je v poriadku, ale (čisto pre ilustráciu pojmov): jedno z nenulových riešení je napríklad $a_1 = 2$, $a_2 = 1$:

$$2.(-1,3) + 1.(2,-6) = (0,0)$$

Teraz (na záver) pojem, ku ktorému smerujeme.

Definícia 10.4. Nech V je vektorový priestor. *Báza* V je taká n-tica X vektorov z V, že platí:

- X je lineárne nezávislá a zároveň
- $\mathrm{Lo}(X) = V$

Z horeuvedeného dostávame aspoň jeden príklad bázy vektorového priestoru: $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ je bázou $\mathbb{R}^n$. Nasledujúca veta by sa dala nazvať „načo sú dobré bázy".

Veta 10.5. *Nech $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ je usporiadaná n-tica vektorov vektorového priestoru V. Nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivalentné.*

a) X je báza V.

b) Pre každý vektor $\vec{v} \in V$ existuje jediná n-tica skalárov $(a_1, ..., a_n)$ taká, že

$$\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + ... + a_n\vec{x}_n$$

Dôkaz. *b)* $\Rightarrow$ *a)* Zrejme b) znamená, že každý vektor $\vec{v} \in V$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov X, teda pre každý vektor $\vec{v} \in V$ platí $\vec{v} \in \mathrm{Lo}(X)$, teda $\mathrm{Lo}(X) = V$. Zostáva dokázať, že X je lineárne nezávislá. To znamená, ak $a_1\vec{x}_1 + \cdots + a_n\vec{x}_n = \vec{0}$, potom $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

$$\vec{0} = a_1\vec{x}_1 + ... + a_n\vec{x}_n = 0\vec{x}_1 + ... + 0\vec{x}_n$$

ale podľa b) platí, že také $(a_1, \ldots, a_n)$ sú jediné, teda nutne $a_1 = 0, \ldots, a_n = 0$.

a) $\Rightarrow$ *b)* Nech

$$\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \cdots + a_n\vec{x}_n \quad \text{a zároveň} \quad \vec{v} = b_1\vec{x}_1 + b_2\vec{x}_2 + ... + b_n\vec{x}_n.$$

Odčítajme druhú rovnosť od prvej a dostaneme po úprave

$$(*) \quad \vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (a_1 - b_1)\vec{x}_1 + ... + (a_n - b_n)\vec{x}_n$$

Ale X je lineárne nezávislá, preto (*) implikuje

$$a_1 - b_1 = ... = a_n - b_n = 0$$

a teda $a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$. □

Definícia 10.6. Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor s bázou $X = (\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n)$, nech $\vec{v} \in V$. Potom n-tici skalárov $(a_1, \ldots, a_n)$, ktorá je jednoznačne určená vlastnosťou

$$\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + ... + a_n\vec{x}_n$$

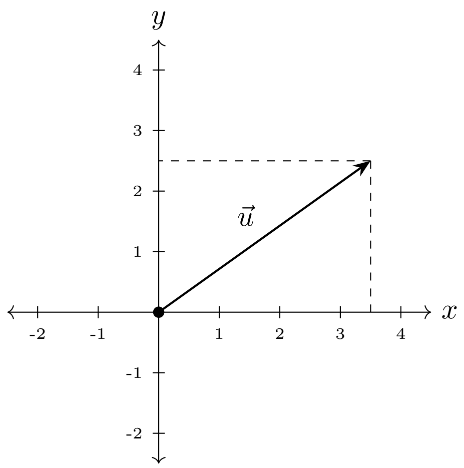
hovoríme *súradnice vektora* $\vec{v}$ v báze X a značíme

$$[\vec{v}]_X = (a_1, ..., a_n)$$

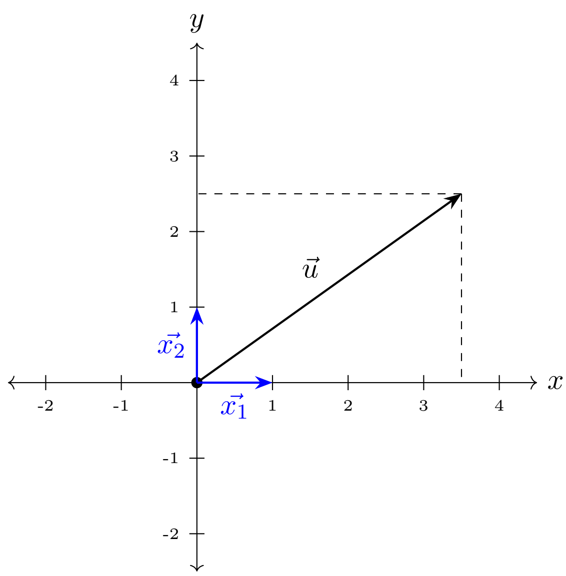
Pojem súradníc v báze nám umožňuje pozrieť sa inými očami na to,ako sme pomocou voľby súradnicových osí prevádzali rovinné vektory na dvojice skalárov.

Príklad 10.7. Uvažujme geometrické vektory v rovine. Vieme, že ak určíme súradnicové osi, môžeme geometrické vektory reprezentovať ako usporiadané dvojice skalárov.

$$\vec{u} \mapsto (3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$$



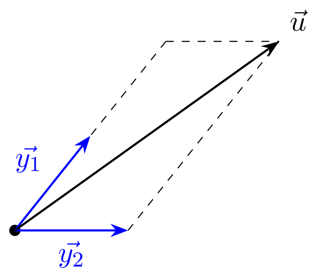
Prikreslime na obrázok dva vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ktoré končia v „jednotkách“.



Uvažujme bázu $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ a uvedomme si, že $3\frac{1}{2}\vec{x}_1$ a $2\frac{1}{2}\vec{x}_2$ sú pravouhlé priemety $\vec{u}$ na osi a teda (podľa rovnobežníkového pravidla) $3\frac{1}{2}\vec{x}_1 + 2\frac{1}{2}\vec{x}_2 = \vec{u}$. Ale to presne znamená

$$[\vec{u}]_X = (3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}).$$

Ak by sme vzali inú bázu, dostali by sme inú dvojicu skalárov reprezentujúcu $\vec{u}$.



$$Y = (\vec{y_1}, \vec{y_2}) \qquad \vec{u} = 2\vec{y_1} + \vec{y_2} \qquad [\vec{u}]_Y = (2, 1)$$

Príklad 10.8. Uvažujme vektorový priestor polynómov stupňa nanajvýš 2, $\mathbb{R}^2[x]$. Polynóm $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daný predpisom $p(x) = 3x^2 - 6$ je vektor v $\mathbb{R}^2[x]$. Jeho súradnice v báze $X = (1, x, x^2)$ sú $(-6, 0, 3)$.

Ale môžeme uvažovať aj inú bázu $\mathbb{R}^2[x]$, povedzme (zatiaľ nevieme, že toto je báza, ale na chvíľu tomu uveríme...):

$$Y = (x^2 - 1, x + 1, x - 2)$$

Máme $3(x^2-1)+(-1)(x+1)+(1)(x-2) = 3x^2-3-x-1+x-2 = 3x^2-6$, teda

$$[p]_Y = (3, -1, 1)$$

Vidíme teda teraz, že s každou bázou $X = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)$ vektorového priestoru V máme spojené zobrazenie

$$[\_]_X : V \to \mathbb{R}^n$$

dané predpisom $\vec{v} \mapsto [\vec{v}]_X$. Veta 10.5 nám hovorí, že toto zobrazenie je bijektívne. Jeho inverzné zobrazenie vezme nejakú ticu skalárov a použije ich ako koeficienty lineárnej kombinácie prvkov X.

$$V \xrightarrow{[\_]_X} \mathbb{R}^n$$

$$V \xleftarrow{\text{lineárne kombinuj prvky } X} \mathbb{R}^n$$

Toto je primárny účel zavedenia pojmu bázy: umožňuje prevádzať vektory na ich súradnice v danej báze a späť. Pritom je dôležité si uvedomiť, že pre rôzne bázy dostávame rôzne súradnice toho istého vektora.

Teraz si napíšeme zopár postačujúcich podmienok pre rozpoznanie lineárnej závislosti n-tice vektorov.

- Ak X obsahuje $\vec{0}$, X je lineárne závislá. Naozaj, nech $\vec{x}_j = \vec{0}$ pre nejaké j. Potom zrejme

  $$0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \cdots + 1\vec{x}_j + ... + 0\vec{x}_{n-1} + 0\vec{x}_n = \vec{0}$$

  Je to lineárna kombinácia, nie všetky koeficienty sú nulové, a teda X je lineárne závislá.

- Ak X obsahuje aspoň dvakrát ten istý vektor, potom X je lineárne závislá. Naozaj, ak $\vec{x}_i = \vec{x}_j$, $i < j$, potom

  $$0\vec{x}_1 + \cdots + 1\vec{x}_i + ... + (-1)\vec{x}_j + ... + 0\vec{x}_n = 1\vec{x}_i + (-1)\vec{x}_i = 0\vec{x}_i = \vec{0}$$

  Je to lineárna kombinácia, i-ty koeficient je 1, j-ty je -1 (teda nie všetky sú 0).

Pozor! Tieto podmienky sú postačujúce, ale nie nutné. Nutnú a postačujúcu podmienku nám dá Veta 10.9, ale predtým, ako ju sformulujeme, musíme sa vysporiadať s problémom, ktorý sa v tejto fáze zvykne študentom zatajiť: čo je bázou jednoprvkového vektorového priestoru $\{\vec{0}\}$?

Nemôže to byť $(\vec{0})$, lebo to je lineárne závislá n-tica. Takže buď $\{\vec{0}\}$ nemá bázu, alebo to je usporiadaná „0-tica“ – prázdny zoznam vektorov $()$; ak dodefinujeme $\mathrm{Lo}(()) = \{\vec{0}\}$, zistíme, že veci fungujú uspokojivo, nenastane problém a formulácia nasledujúcej vety sa výrazne zjednoduší.

Veta 10.9. *Nech $X = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)$ je n-tica vektorov vo vektorovom priestore V. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

a) X je lineárne závislá.

b) Jeden z vektorov $\vec{x}_i$ v X je lineárnou kombináciou predchádzajúcich vektorov v X; po vymazaní vektora $\vec{x}_i$ z X sa lineárny obal nezmení.

c) Jeden z vektorov $\vec{x}_i$ v X je lineárnou kombináciou ostatných vektorov v X; po vymazaní $\vec{x}_i$ z X sa lineárny obal X nezmení.

Dôkaz. Dôkaz vynechávam, je technický a nezaujímavý. □

Dôsledok 10.10. *Nech V je vektorový priestor, nech $X = (\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n)$, nech $\mathrm{Lo}(X) = V$. Potom existuje báza V, ktorá vznikne z X vymazaním nula a viac vektorov.*

Dôkaz. Ak X je lineárne nezávislá, X je báza V. Ak X je lineárne závislá, podľa Vety 10.9 z nej môžeme vymazať jeden vektor, pričom lineárny obal zostane stále rovnaký, t.j. V; toto môžeme opakovať, až kým nedostaneme bázu. □

Dôsledok 10.11. *Každý konečnorozmerný vektorový priestor má bázu.*

Dôkaz. Zjavné z predošlého dôsledku. $\square$

Veta 10.12. *Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. Potom dĺžka každej lineárne nezávislej tice vektorov z V je menšia alebo rovná ako dĺžka každej tice, ktorej lineárnym obalom je V.*

Dôkaz. Nech $X = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k)$ je lineárne nezávislá k-tica vektorov z V a nech $Y = (\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n)$ je taká, že $\mathrm{Lo}(Y) = V$. Máme dokázať, že $k \leq n$. Predpokladajme opak: že $k > n$. Ak dokážeme, že z toho vyplýva nejaká nepravda (spor), budeme vedieť, že $k \leq n$.

KROK: $(n+1)$-tica $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n)$ je lineárne závislá podľa ekvivalencie a) $\Leftrightarrow$ c) z Vety 10.9, pretože $\vec{x}_1 \in V = \mathrm{Lo}(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n)$ a teda $\vec{x}_1$ je lineárnou kombináciou $(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n)$. Opäť podľa Vety 10.9 je jeden z vektorov v tej $(n+1)$-tici lineárnou kombináciou predchádzajúcich vektorov, ale nemôže to byť $\vec{x}_1$, lebo potom by $\mathrm{Lo}(()) = \{\vec{0}\}$, teda $\vec{x}_1 = \vec{0}$, ale to nie je pravda, lebo $(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k)$ je lineárne nezávislá a teda neobsahuje $\vec{0}$. Teda to musí byť jeden z vektorov $\vec{y}_i$, a podľa Vety 10.9 ho môžeme z tej $(n+1)$-tice vymazať bez zmeny jej lineárneho obalu. Dostaneme n-ticu vektorov

$$Y' = (\vec{x}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_i, ..., \vec{y}_n)$$

(Tento $\vec{y}_i$ sme vymazali).

Ale teraz vezmeme $x' = (\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ a Y', môžeme KROK zopakovať, až kým sa všetky $\vec{y}_?$ neminú a nejaké $\vec{x}_i$ nám zostanú, lebo $k > n$. Ale to sa nemôže stať, lebo potom by sme mali $\mathrm{Lo}(\vec{x}_n, \vec{x}_{n-1}, ..., \vec{x}_1) = V \ni \vec{x}_m$ (pre $m > n$), teda X by bola (viď Veta 10.9) lineárne závislá. Teda $k > n$ vedie k sporu, a z toho vyplýva, že $k \leq n$. $\square$

Veta 10.13. *Každá báza konečnorozmerného vektorového priestoru má rovnako veľa prvkov.*

Dôkaz. Označme náš priestor V. Nech $X = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k)$, $Y = (\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_l)$ sú dve bázy konečnorozmerného vektorového priestoru. Potom podľa Vety 10.12:

- X je lineárne nezávislá, $\mathrm{Lo}(Y) = V \Rightarrow k \leq l$
- Y je lineárne nezávislá, $\mathrm{Lo}(X) = V \Rightarrow l \leq k$

Takže $l = k$. $\square$

Keďže všetky bázy konečnorozmerného vektorového priestoru majú rovnako veľa prvkov, nasledujúca definícia je zmysluplná:

Definícia 10.14. Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. *Dimenzia* V (značíme $\dim(V)$) je počet prvkov niektorej (každej) bázy V. Ak $\dim(V) = n$, hovoríme, že V je n-rozmerný.

Príklad 10.15. $\mathbb{R}^n$ je n-rozmerný priestor, lebo $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ sú báza $\mathbb{R}^n$.

Príklad 10.16. Všetky vektory v rovine tvoria dvojrozmerný vektorový priestor.

Príklad 10.17. Všetky vektory v priestore tvoria vektorový priestor dimenzie 3.

Príklad 10.18. $\mathbb{R}^n[x]$ je $(n+1)$-rozmerný vektorový priestor, lebo $(1, x, \ldots, x^n)$ je báza.

Veta 10.19. *Nech V je vektorový priestor, nech* $\dim(V) = n$*, nech X (k-prvková) je lineárne nezávislá n-tica vektorov z V. Potom buď X je báza (ak $k = n$) alebo $k < n$ a X sa dá doplniť na bázu.*

Dôkaz. Ak $\mathrm{Lo}(X) = V$, potom X je báza a teda $k = n$. Ak $\mathrm{Lo}(X) \neq V$, vyberme ľubovoľný vektor $\vec{y} \in V \setminus \mathrm{Lo}(X)$. Potom $(k+1)$-tica $X' = (X, \vec{y})$ je lineárne nezávislá. Naozaj, ak by bola lineárne závislá, podľa Vety 10.9 by musel jeden z vektorov v nej byť lineárnou kombináciou predchádzajúcich. Nemôže to byť žiaden z X (lebo potom by X bola lineárne závislá). Nemôže to ale byť ani $\vec{y}$, lebo potom by $\vec{y} \in \mathrm{Lo}(X)$. Keďže táto n-tica je lineárne nezávislá, tak $k+1 \leq n$ (podľa Vety 10.12) a teda $k < n$. Teraz buď $k+1 = n$ a máme bázu V, alebo môžeme proces opakovať, až kým nedostaneme bázu. $\square$

Dôsledok 10.20. *Ak V je vektorový priestor,* $\dim(V) = n$ *a X je lineárne nezávislá n-tica s n prvkami, X je báza V.*

Toto je dôležité, pretože nám to umožňuje ušetriť si robotu: ak vieme, že $\dim(V) = n$ (pretože poznáme nejakú bázu s n prvkami) a chceme dokázať, že X je báza, stačí nám dokázať, že X je lineárne nezávislá a má n prvkov. Nemusíme dokazovať, že $\mathrm{Lo}(X) = V$.

Na záver ukážeme, ako sa teória z dnešnej prednášky dá použiť na riešenie príkladov.

Príklad 10.21. Zistite, či sú nasledujúce výroky pravdivé s použitím tvrdení z dnešnej prednášky:

a) Je $((1, 2, 3), (0, 0, 0), (0, 1, 1))$ je báza $\mathbb{R}^3$?
NIE, pretože a obsahuje nulový vektor a teda je lineárne závislá.

b) Je $((1, 2, 3), (3, 2, 1))$ báza $\mathbb{R}^3$?
NIE, lebo má 2 prvky a $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

c) Je $((1, 1), (4, 4), (3, 2))$ lineárne závislá v $\mathbb{R}^2$?
ÁNO. Toto môžeme dokázať buď tak, že vyriešime sústavu, alebo si všimneme, že máme 3 vektory v priestore dimenzie 2, a použijeme Vetu 10.12 takto: vieme, že $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ a teda teda existuje báza X s dĺžkou

2. Máme teda $\mathrm{Lo}(X) = \mathbb{R}^2$. Ak by táto (alebo ľubovoľná iná) trojica vektorov v R^2 bola lineárne nezávislá, mali by sme podľa Vety 10.12

$$3 \leq 2$$

čo nie je pravda.

d) Je $((0,1,1),(1,1,0),(1,0,1))$ báza $\mathbb{R}^3$?
NIE. Vieme, že $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, takže podľa Dôsledku 10.20 nám stačí ukázať, že vektory sú lineárne nezávislé. Toto môžeme urobiť buď priamo, alebo ukázať, že žiadny z nich nie je lineárnou kombináciou predchádzajúcich. Zjavne $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{x}_2$ nie je skalárnym násobkom $\vec{x}_1$. A pre $\vec{x}_3$: ak $(1,0,1) = a(0,1,1) + b(1,1,0)$, tak z prvej zložky $1 = b$, z tretej $1 = a$, ale stredná $0 = a + b = 1 + 1 = 2$, čo je spor. Teda táto tica je lineárne nezávislá a je to báza.

e) Je pravda, že $\mathrm{Lo}(x+1, x^2 - 7x + 4) = \mathbb{R}^2[x]$?
NIE. Podľa pretože $\dim(\mathbb{R}^2[x]) = 3$ a podľa Vety 10.12 by sme potom dostali $3 \leq 2$.

f) Je pravda, že $\mathrm{Lo}(1, x+1, x^2 - 7x + 4) = \mathbb{R}^2[x]$?
ÁNO. Vieme, že $\dim(\mathbb{R}^2[x]) = 3$. Zrejme žiadny z vektorov v tici nie je lineárnou kombináciou predchádzajúcich, teda podľa Dôsledku 10.20 je tica bázou $\mathbb{R}^2[x]$, teda jej lineárnym obalom je celý vektorový priestor $R^2[x]$.

Príklad 10.22. $Y = (x^2-1, x+1, x-2)$ je báza $\mathbb{R}^2[x]$, lebo $\dim(\mathbb{R}^2[x]) = 3$ a Y je lineárne nezávislá. Opäť stačí dokázať, že jediná trojica $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ taká, že

$$a_1(x^2 - 1) + a_2(x + 1) + a_3(x - 2) = 0$$

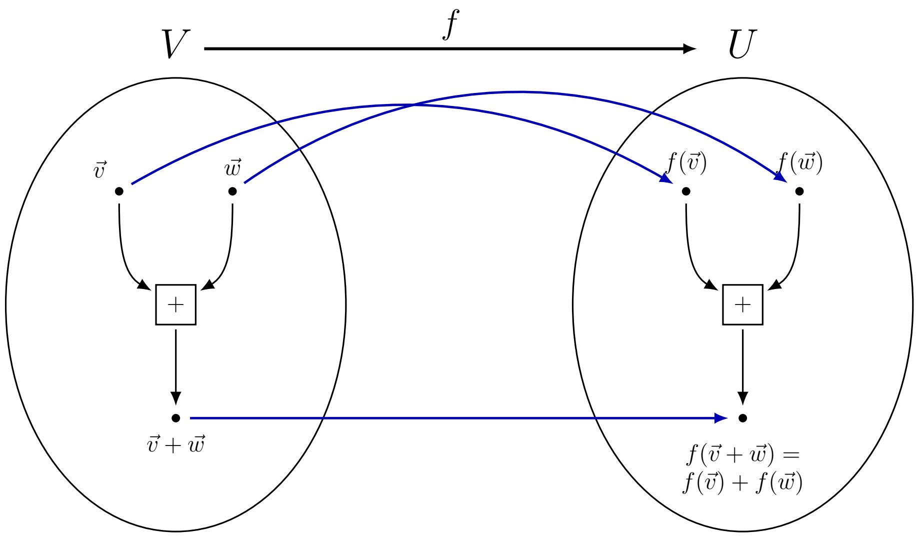
je $(0,0,0)$, pretože platí Dôsledok 10.20, Ale tento typ problémov poznáme z rátania príkladov na Matematickej analýze 1 (neurčité koeficienty) a vieme, že nám stačí dosadiť napríklad $x = -1, 1, 2$ a z toho dostaneme sústavu lineárnych rovníc, ktorej jediné riešenie $a_1 = a_2 = a + 3 = 0$. Inou možnosťou je pouvažovať a ukázať, že žiadny z vektorov v Y nie je vyjadriteľný ako lineárna kombinácia predchádzajúcich.

11 Lineárne zobrazenia

Definícia 11.1. Nech V, U sú vektorové priestory. Hovoríme, že zobrazenie $f : V \to U$ je **lineárne**, ak platia nasledujúce podmienky:

1. **Zachováva súčet:** Pre všetky $\vec{v}, \vec{w} \in V$ platí

$$f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$$



Obr. 1: Zachovávanie súčtu

(najprv sčítam v V, potom zobrazím do U = najprv zobrazím každý z V do U, obrazy potom sčítam v U. Teda „obraz súčtu" = „súčet obrazov".)

2. **Zachováva násobenie skalárom:** Pre všetky $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V$ platí

$$f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$$

(najprv vynásobím α, potom zobrazím výsledok do U = najprv zobrazím do U, potom vynásobím α. Teda „obraz škálovania" = „škálovanie obrazu".)

Príklad 11.2. Príklady lineárnych zobrazení:

1. $z : V \to U$. Pre každú dvojicu vektorových priestorov V, U je zobrazenie z dané predpisom $z(\vec{v}) = \vec{0}$ lineárne.

   - Pre všetky $\vec{v}, \vec{w} \in V$ platí:

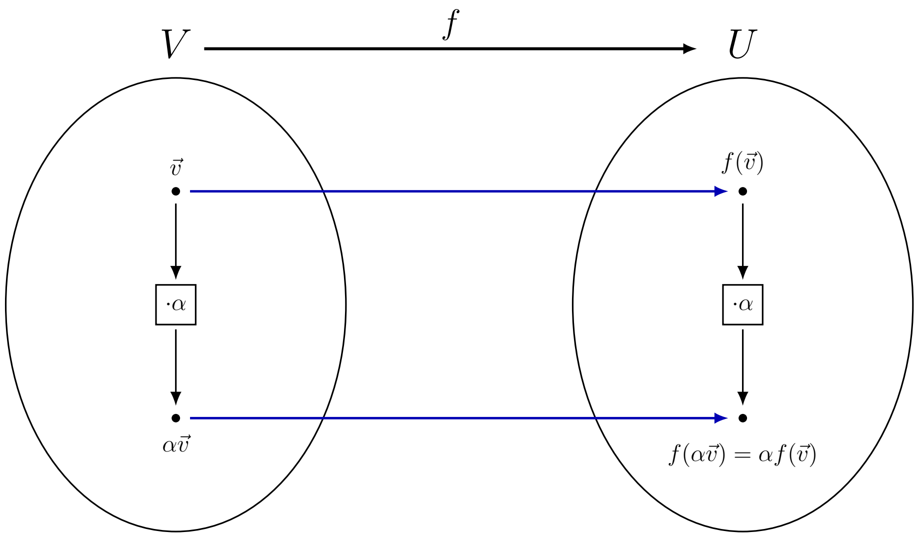
$$z(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = z(\vec{v}) + z(\vec{w})$$

   - Pre všetky $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V$ platí:

$$z(\alpha\vec{v}) = \vec{0} = \alpha \cdot \vec{0} = \alpha z(\vec{v})$$

2. Pre každý vektorový priestor V je zobrazenie $\mathrm{id} : V \to V$ dané predpisom $\mathrm{id}(\vec{v}) = \vec{v}$ lineárne:

   - $\mathrm{id}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{v}+\vec{w} = \mathrm{id}(\vec{v}) + \mathrm{id}(\vec{w})$



Obr. 2: Zachovávanie násobenia skalárom $\alpha \in \mathbb{R}$

- $\mathrm{id}(\alpha\vec{v}) = \alpha\vec{v} = \alpha\mathrm{id}(\vec{v})$

3. Nech ρ_O je vektorový priestor geometrických vektorov v rovine s počiatkom O, $\theta \in \langle 0, 2\pi)$. Nech $l_\theta : \rho_O \to \rho_O$ je rotácia vektora okolo počiatku doľava o uhol θ.

   Máme sa presvedčiť o zachovávaní sčítania a násobenia skalárom. To je ľahké, ak si poriadne uvedomíme, čo tieto veci znamenajú a použijeme geometrický náhľad:

   - $l_\theta(\vec{v} + \vec{w})$: najprv sčítame, potom rotujeme.
   - $l_\theta(\vec{v}) + l_\theta(\vec{w})$: najprv rotujeme, potom sčítame.

   V oboch prípadoch dostaneme ten istý vektor (pretože rovnobežník na dolnom obrázku je zrotovaný rovnobežník z horného obrázku).

   Podobne sa môžeme obrázkom presvedčiť o tom, že $l_\theta(\alpha\vec{v}) = \alpha l_\theta(\vec{v})$.

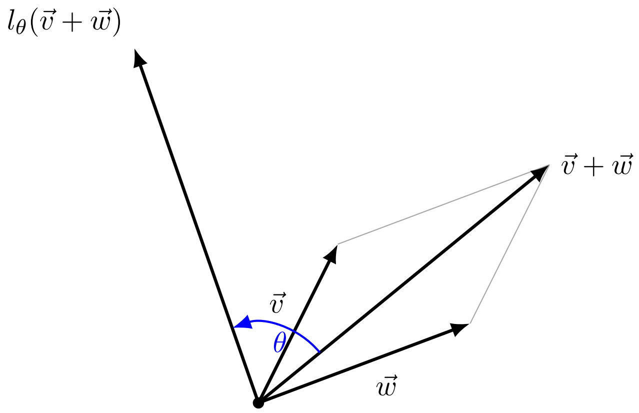
4. Zobrazenie polynómov $d : \mathbb{R}^n[x] \to \mathbb{R}^{n-1}[x]$ $(n \in \mathbb{N})$ dané predpisom $d(p) = p'$ (polynóm $\mapsto$ jeho derivácia).

   $$n = 3 : \quad d(x^3 - 3x^2 + x + 7) = (x^3 - 3x^2 + x + 7)' = 3x^2 - 6x + 1$$

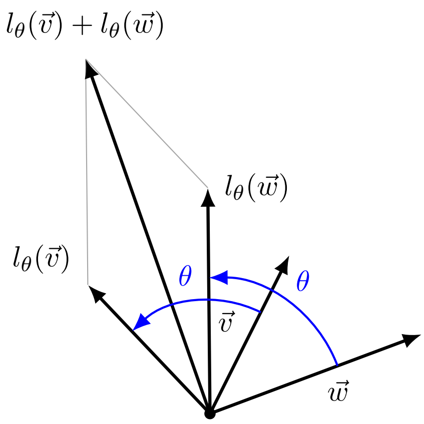
   To, že derivácia je lineárne zobrazenie, ste sa naučili na Matematickej analýze, sú to presne tie dobre známe vzorce:

   $$(p + q)' = p' + q' \quad \text{a} \quad (c \cdot p)' = c \cdot p' \quad (c \text{ je konštanta}),$$

   ktoré ste neustále používali na počítanie derivácií.



Obr. 3: $l_\theta(\vec{v}+\vec{w})$: najprv sčítame, potom rotujeme



Obr. 4: $l_\theta(\vec{v})+l_\theta(\vec{w})$: najprv rotujeme, potom sčítame

5. Evaluácia: $ev_c : \mathbb{R}^n[x] \to \mathbb{R}$ (evaluácia „v bode c") dané predpisom $ev_c(p) = p(c)$ (polynóm $\mapsto$ jeho hodnota v bode c). Napríklad pre $c = 2$ a $n = 3$:

$$ev_2(x^3 - 3x^2 + x + 7) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 + 7 = 8 - 12 + 2 + 7 = 5$$

   Overenie linearity:

   - Pre $p, q \in \mathbb{R}^n[x]$:

   $$ev_2(p + q) = (p + q)(2) = p(2) + q(2) = ev_2(p) + ev_2(q)$$

     (Toto je iba použitie toho, ako definujeme súčet funkcií, napr. polynómov).
   - Pre $p \in \mathbb{R}^n[x], \alpha \in \mathbb{R}$:

   $$ev_2(\alpha p) = (\alpha p)(2) = \alpha(p(2)) = \alpha \cdot ev_2(p)$$

6. Nech $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je matica; potom A reprezentuje zobrazenie $[[A]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (násobenie maticou zľava, pozri text Linalg 1.7):

$$[[A]](\vec{v}) = A\vec{v}$$

   Toto zobrazenie je lineárne:

   - Pre $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$:

   $$[[A]](\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w} = [[A]](\vec{v}) + [[A]](\vec{w})$$

     (distributivita násobenia matíc).
   - Pre $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$:

   $$[[A]](\alpha\vec{v}) = A(\alpha\vec{v}) = \alpha(A\vec{v}) = \alpha[[A]](\vec{v})$$

7. Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor, $\dim(V) = n$. Nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báza V. Potom zobrazenie $V \to \mathbb{R}^n$ dané predpisom

$$\vec{v} \mapsto [\vec{v}]_X$$

   (zobraz vektor na jeho súradnice v báze X) je lineárne.

11.1 Vlastnosti lineárnych zobrazení

Veta 11.3. *Nech V, U sú vektorové priestory, nech $f : V \to U$ je lineárne zobrazenie. Potom:*

a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$

b) Pre každú n-ticu skalárov $(a_1, \dots, a_n) \subset \mathbb{R}$ *a vektorov* $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ *platí:*

$$f(a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n) = a_1 f(\vec{x}_1) + \dots + a_n f(\vec{x}_n)$$

(Obraz lineárnej kombinácie je lineárna kombinácia obrazov s rovnakými koeficientami).

Dôkaz. a) $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$. (Využili sme, že $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ a linearitu f).

b)

$$\begin{aligned} f(a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n) &= f(a_1\vec{x}_1) + f(a_2\vec{x}_2 + \dots + a_n\vec{x}_n) = \dots \\ &= f(a_1\vec{x}_1) + \dots + f(a_n\vec{x}_n) \\ &= a_1 f(\vec{x}_1) + \dots + a_n f(\vec{x}_n) \end{aligned}$$

(V prvom kroku sme opakovane použili, že f zachováva súčet, v druhom kroku, že f zachováva škálovanie).

□

Veta 11.4. *Nech* V, U, W *sú vektorové priestory, nech* $f : V \to U$ *a* $g : U \to W$ *sú lineárne zobrazenia. Potom* $g \circ f : V \to W$ *je lineárne zobrazenie.*

Dôkaz. Nech $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$. Počítajme:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= g(f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) \\ &= g(f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)) \quad (f \text{ je lineárne}) \\ &= g(f(\vec{v}_1)) + g(f(\vec{v}_2)) \quad (g \text{ je lineárne}) \\ &= (g \circ f)(\vec{v}_1) + (g \circ f)(\vec{v}_2) \end{aligned}$$

Teda $g \circ f$ zachováva súčet.

Podobne, pre $\vec{v} \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ dostávame:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\alpha\vec{v}) &= g(f(\alpha\vec{v})) \\ &= g(\alpha f(\vec{v})) \quad (f \text{ je lineárne}) \\ &= \alpha g(f(\vec{v})) \quad (g \text{ je lineárne}) \\ &= \alpha (g \circ f)(\vec{v}) \end{aligned}$$

Teda $g \circ f$ zachováva násobenie skalárom. □

Definícia 11.5. Bijektívne lineárne zobrazenie sa volá **izomorfizmus**. Vektorové priestory sú navzájom **izomorfné**, ak medzi nimi existuje nejaký izomorfizmus.

Veta 11.6 (Základná veta o lineárnych zobrazeniach)**.** *Nech V, U sú konečnorozmerné vektorové priestory, nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báza V. Potom pre každú usporiadanú n-ticu vektorov $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \in U$ existuje **jediné** lineárne zobrazenie $f : V \to U$ také, že*

$$f(\vec{x}_1) = \vec{u}_1, \dots, f(\vec{x}_n) = \vec{u}_n$$

Skôr, ako si túto vetu dokážeme, pozrime sa na jej význam. Ak chceme určiť nejaké zobrazenie (nie nutne lineárne) $f : V \to U$ medzi dvoma vektorovými priestormi, musíme špecifikovať $f(\vec{v})$ pre každé $\vec{v} \in V$.

Veta 11.6 nám hovorí, že ak je V konečnorozmerný a f je lineárne, potom nám f jednoznačne špecifikujú tieto dáta:

- nejaká báza $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ vektorového priestoru V,
- hodnoty f v prvkoch tejto bázy X.

Dôkaz. Nech $\vec{v} \in V$, nech $(a_1, \dots, a_n)$ sú súradnice $\vec{v}$ v báze X, teda

$$[\vec{v}]_X = (a_1, \dots, a_n)$$

To znamená $\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n$.

Potom musí platiť (z Vety 11.3 b)):

$$f(\vec{v}) = f(a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n) = a_1 f(\vec{x}_1) + \dots + a_n f(\vec{x}_n) = a_1\vec{u}_1 + \dots + a_n\vec{u}_n$$

To nám ale presne určuje predpis f v každom $\vec{v} \in V$:

1. nájdi súradnice $\vec{v}$ v báze X,
2. použi ich ako koeficienty lineárnej kombinácie vektorov $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.

Je však takto definované f vždy lineárne? Nech $\vec{v}, \vec{w} \in V$. Máme dokázať, že $f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$. To vyžaduje zistiť vzťah medzi súradnicami vektorov $\vec{v}, \vec{w}$ a $\vec{v} + \vec{w}$ v báze X. Označme súradnice $\vec{v}$ a $\vec{w}$ v báze X:

$$[\vec{v}]_X = (a_1, \dots, a_n)$$

$$[\vec{w}]_X = (b_1, \dots, b_n)$$

Aké sú súradnice $\vec{v} + \vec{w}$ v báze X?

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{w} &= (a_1\vec{x}_1 + \dots + a_n\vec{x}_n) + (b_1\vec{x}_1 + \dots + b_n\vec{x}_n) \\ &= (a_1 + b_1)\vec{x}_1 + \dots + (a_n + b_n)\vec{x}_n \end{aligned}$$

Teda $[\vec{v} + \vec{w}]_X = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$.

Počítajme:

$$\begin{aligned} f(\vec{v}+\vec{w}) &= (a_1+b_1)\vec{u}_1 + \cdots + (a_n+b_n)\vec{u}_n \\ &= (a_1\vec{u}_1 + b_1\vec{u}_1) + \cdots + (a_n\vec{u}_n + b_n\vec{u}_n) \\ &= (a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_n\vec{u}_n) + (b_1\vec{u}_1 + \cdots + b_n\vec{u}_n) \\ &= f(\vec{v}) + f(\vec{w}) \end{aligned}$$

Pre škálovanie $f(\alpha\vec{v})$ sa dokáže podobne:

$$[\alpha\vec{v}]_X = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$$

$$f(\alpha\vec{v}) = \sum(\alpha a_i)\vec{u}_i = \alpha \sum a_i\vec{u}_i = \alpha f(\vec{v})$$

□

V nasledujúcej prednáške využijeme Vetu 11.6 na to, aby sme ukázali, že každé lineárne zobrazenie medzi dvoma konečnorozmernými vektorovými priestormi sa dá popísať pomocou matice.