Lineárna algebra 1
(texty k prednáškam)

Gejza Jenča

Verzia 1

Nasledujúca veta by sa dala nazvať „načo sú dobré bázy".

Veta 0.1. *Nech* $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n)$ *je usporiadaná* n*-tica vektorov vektorového priestoru* V*. Nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivalentné.*

a) X *je báza* V*.*

b) Pre každý vektor $\vec{v} \in V$ *existuje jediná* n*-tica skalárov* $(a_1, ..., a_n)$ *taká, že*

$$\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + ... + a_n\vec{x}_n$$

Dôkaz. $b) \Rightarrow a)$ Zrejme b) znamená, že každý vektor $\vec{v} \in V$ sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov X, teda pre každý vektor $\vec{v} \in V$ platí $\vec{v} \in \mathrm{Lo}(X)$, teda $\mathrm{Lo}(X) = V$. Zostáva dokázať, že X je lineárne nezávislá. To znamená, ak $a_1\vec{x}_1 + \cdots + a_n\vec{x}_n = \vec{0}$, potom $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

$$\vec{0} = a_1\vec{x}_1 + ... + a_n\vec{x}_n = 0\vec{x}_1 + ... + 0\vec{x}_n$$

ale podľa b) platí, že také $(a_1, \dots, a_n)$ sú jediné, teda nutne $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$.

$a) \Rightarrow b)$ Nech

$$\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + \cdots + a_n\vec{x}_n \quad \text{a zároveň} \quad \vec{v} = b_1\vec{x}_1 + b_2\vec{x}_2 + ... + b_n\vec{x}_n.$$

Odčítajme druhú rovnosť od prvej a dostaneme po úprave

$$(*) \quad \vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (a_1 - b_1)\vec{x}_1 + ... + (a_n - b_n)\vec{x}_n$$

Ale X je lineárne nezávislá, preto (*) implikuje

$$a_1 - b_1 = ... = a_n - b_n = 0$$

a teda $a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$. $\square$

Definícia 0.2. Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor s bázou $X = (\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n)$, nech $\vec{v} \in V$. Potom n-tici skalárov $(a_1, \ldots, a_n)$, ktorá je jednoznačne určená vlastnosťou

$$\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + ... + a_n\vec{x}_n$$

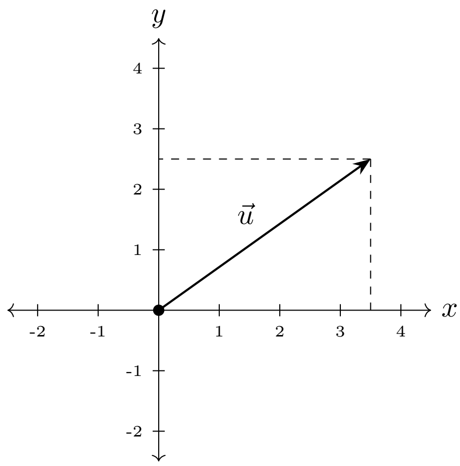
hovoríme *súradnice vektora* $\vec{v}$ v báze X a značíme

$$[\vec{v}]_X = (a_1, ..., a_n)$$

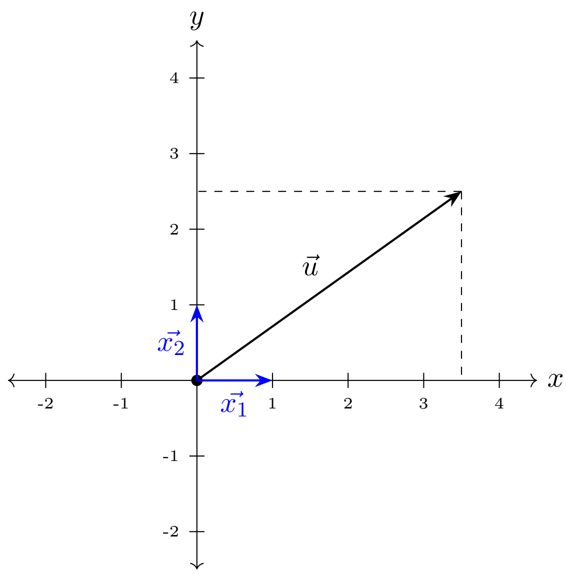
Pojem súradníc v báze nám umožňuje pozrieť sa inými očami na to,ako sme pomocou voľby súradnicových osí prevádzali rovinné vektory na dvojice skalárov.

Príklad 0.3. Uvažujme geometrické vektory v rovine. Vieme, že ak určíme súradnicové osi, môžeme geometrické vektory reprezentovať ako usporiadané dvojice skalárov.

$$\vec{u} \mapsto (3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$$



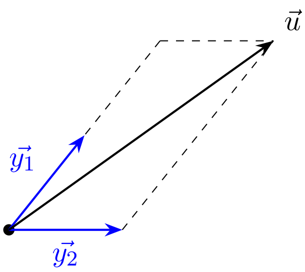
Prikreslime na obrázok dva vektory $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, ktoré končia v „jednotkách“.



Uvažujme bázu $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ a uvedomme si, že $3\frac{1}{2}\vec{x}_1$ a $2\frac{1}{2}\vec{x}_2$ sú pravouhlé priemety $\vec{u}$ na osi a teda (podľa rovnobežníkového pravidla) $3\frac{1}{2}\vec{x}_1 + 2\frac{1}{2}\vec{x}_2 = \vec{u}$. Ale to presne znamená

$$[\vec{u}]_X = (3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}).$$

Ak by sme vzali inú bázu, dostali by sme inú dvojicu skalárov reprezentujúcu $\vec{u}$.



$$Y = (\vec{y_1}, \vec{y_2}) \qquad \vec{u} = 2\vec{y_1} + \vec{y_2} \qquad [\vec{u}]_Y = (2, 1)$$

Príklad 0.4. Uvažujme vektorový priestor polynómov stupňa nanajvýš 2, $\mathbb{R}^2[x]$. Polynóm $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daný predpisom $p(x) = 3x^2 - 6$ je vektor v $\mathbb{R}^2[x]$. Jeho súradnice v báze $X = (1, x, x^2)$ sú $(-6, 0, 3)$.

Ale môžeme uvažovať aj inú bázu $\mathbb{R}^2[x]$, povedzme (zatiaľ nevieme, že toto je báza, ale na chvíľu tomu uveríme...):

$$Y = (x^2 - 1, x + 1, x - 2)$$

Máme $3(x^2-1)+(-1)(x+1)+(1)(x-2) = 3x^2-3-x-1+x-2 = 3x^2-6$, teda

$$[p]_Y = (3, -1, 1)$$

Vidíme teda teraz, že s každou bázou $X = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)$ vektorového priestoru V máme spojené zobrazenie

$$[\_]_X : V \to \mathbb{R}^n$$

dané predpisom $\vec{v} \mapsto [\vec{v}]_X$. Veta 0.1 nám hovorí, že toto zobrazenie je bijektívne. Jeho inverzné zobrazenie vezme nejakú ticu skalárov a použije ich ako koeficienty lineárnej kombinácie prvkov X.

$$V \xrightarrow{[\_]_X} \mathbb{R}^n$$

$$V \xleftarrow{\text{lineárne kombinuj prvky } X} \mathbb{R}^n$$

Toto je primárny účel zavedenia pojmu bázy: umožňuje prevádzať vektory na ich súradnice v danej báze a späť. Pritom je dôležité si uvedomiť, že pre rôzne bázy dostávame rôzne súradnice toho istého vektora.

Teraz si napíšeme zopár postačujúcich podmienok pre rozpoznanie lineárnej závislosti n-tice vektorov.

- Ak X obsahuje $\vec{0}$, X je lineárne závislá. Naozaj, nech $\vec{x}_j = \vec{0}$ pre nejaké j. Potom zrejme

  $$0\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \cdots + 1\vec{x}_j + ... + 0\vec{x}_{n-1} + 0\vec{x}_n = \vec{0}$$

  Je to lineárna kombinácia, nie všetky koeficienty sú nulové, a teda X je lineárne závislá.

- Ak X obsahuje aspoň dvakrát ten istý vektor, potom X je lineárne závislá. Naozaj, ak $\vec{x}_i = \vec{x}_j$, $i < j$, potom

  $$0\vec{x}_1 + \cdots + 1\vec{x}_i + ... + (-1)\vec{x}_j + ... + 0\vec{x}_n = 1\vec{x}_i + (-1)\vec{x}_i = 0\vec{x}_i = \vec{0}$$

  Je to lineárna kombinácia, i-ty koeficient je 1, j-ty je -1 (teda nie všetky sú 0).

Pozor! Tieto podmienky sú postačujúce, ale nie nutné. Nutnú a postačujúcu podmienku nám dá Veta 0.5, ale predtým, ako ju sformulujeme, musíme sa vysporiadať s problémom, ktorý sa v tejto fáze zvykne študentom zatajiť: čo je bázou jednoprvkového vektorového priestoru $\{\vec{0}\}$?

Nemôže to byť $(\vec{0})$, lebo to je lineárne závislá n-tica. Takže buď $\{\vec{0}\}$ nemá bázu, alebo to je usporiadaná „0-tica“ – prázdny zoznam vektorov (); ak dodefinujeme $\mathrm{Lo}(()) = \{\vec{0}\}$, zistíme, že veci fungujú uspokojivo, nenastane problém a formulácia nasledujúcej vety sa výrazne zjednoduší.

Veta 0.5. *Nech $X = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n)$ je n-tica vektorov vo vektorovom priestore V. Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:*

a) X je lineárne závislá.

b) Jeden z vektorov $\vec{x}_i$ v X je lineárnou kombináciou predchádzajúcich vektorov v X; po vymazaní vektora $\vec{x}_i$ z X sa lineárny obal nezmení.

c) Jeden z vektorov $\vec{x}_i$ v X je lineárnou kombináciou ostatných vektorov v X; po vymazaní $\vec{x}_i$ z X sa lineárny obal X nezmení.

Dôkaz. Dôkaz vynechávam, je technický a nezaujímavý. □

Dôsledok 0.6. *Nech V je vektorový priestor, nech $X = (\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n)$, nech $\mathrm{Lo}(X) = V$. Potom existuje báza V, ktorá vznikne z X vymazaním nula a viac vektorov.*

Dôkaz. Ak X je lineárne nezávislá, X je báza V. Ak X je lineárne závislá, podľa Vety 0.5 z nej môžeme vymazať jeden vektor, pričom lineárny obal zostane stále rovnaký, t.j. V; toto môžeme opakovať, až kým nedostaneme bázu. □

Dôsledok 0.7. *Každý konečnorozmerný vektorový priestor má bázu.*

Dôkaz. Zjavné z predošlého dôsledku. □

Veta 0.8. *Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. Potom dĺžka každej lineárne nezávislej tice vektorov z V je menšia alebo rovná ako dĺžka každej tice, ktorej lineárnym obalom je V.*

Dôkaz. Nech $X = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k)$ je lineárne nezávislá k-tica vektorov z V a nech $Y = (\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n)$ je taká, že $\mathrm{Lo}(Y) = V$. Máme dokázať, že $k \leq n$. Predpokladajme opak: že $k > n$. Ak dokážeme, že z toho vyplýva nejaká nepravda (spor), budeme vedieť, že $k \leq n$.

KROK: $(n+1)$-tica $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n)$ je lineárne závislá podľa ekvivalencie a) $\Leftrightarrow$ c) z Vety 0.5, pretože $\vec{x}_1 \in V = \mathrm{Lo}(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n)$ a teda $\vec{x}_1$ je lineárnou kombináciou $(\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n)$. Opäť podľa Vety 0.5 je jeden z vektorov v tej $(n+1)$-tici lineárnou kombináciou predchádzajúcich vektorov, ale nemôže to byť $\vec{x}_1$, lebo potom by $\mathrm{Lo}(()) = \{\vec{0}\}$, teda $\vec{x}_1 = \vec{0}$, ale to nie je pravda, lebo $(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_k)$ je lineárne nezávislá a teda neobsahuje $\vec{0}$. Teda to musí byť jeden z vektorov $\vec{y}_i$, a podľa Vety 0.5 ho môžeme z tej $(n+1)$-tice vymazať bez zmeny jej lineárneho obalu. Dostaneme n-ticu vektorov

$$Y' = (\vec{x}_1, \vec{y}_2, ..., \vec{y}_i, ..., \vec{y}_n)$$

(Tento $\vec{y}_i$ sme vymazali).

Ale teraz vezmeme $x' = (\vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k)$ a Y', môžeme KROK zopakovať, až kým sa všetky $\vec{y}_?$ neminú a nejaké $\vec{x}_i$ nám zostanú, lebo $k > n$. Ale to sa nemôže stať, lebo potom by sme mali $\mathrm{Lo}(\vec{x}_n, \vec{x}_{n-1}, ..., \vec{x}_1) = V \ni \vec{x}_m$ (pre $m > n$), teda X by bola (viď Veta 0.5) lineárne závislá. Teda $k > n$ vedie k sporu, a z toho vyplýva, že $k \leq n$. □

Veta 0.9. *Každá báza konečnorozmerného vektorového priestoru má rovnako veľa prvkov.*

Dôkaz. Označme náš priestor V. Nech $X = (\vec{x}_1, ..., \vec{x}_k)$, $Y = (\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_l)$ sú dve bázy konečnorozmerného vektorového priestoru. Potom podľa Vety 0.8:

- X je lineárne nezávislá, $\mathrm{Lo}(Y) = V \Rightarrow k \leq l$
- Y je lineárne nezávislá, $\mathrm{Lo}(X) = V \Rightarrow l \leq k$

Takže $l = k$. □

Keďže všetky bázy konečnorozmerného vektorového priestoru majú rovnako veľa prvkov, nasledujúca definícia je zmysluplná:

Definícia 0.10. Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. *Dimenzia* V (značíme $\dim(V)$) je počet prvkov niektorej (každej) bázy V. Ak $\dim(V) = n$, hovoríme, že V je n-rozmerný.

Príklad 0.11. $\mathbb{R}^n$ je n-rozmerný priestor, lebo $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ sú báza $\mathbb{R}^n$.

Príklad 0.12. Všetky vektory v rovine tvoria dvojrozmerný vektorový priestor.

Príklad 0.13. Všetky vektory v priestore tvoria vektorový priestor dimenzie 3.

Príklad 0.14. $\mathbb{R}^n[x]$ je $(n+1)$-rozmerný vektorový priestor, lebo $(1, x, \ldots, x^n)$ je báza.

Veta 0.15. *Nech V je vektorový priestor, nech* $\dim(V) = n$*, nech X (k-prvková) je lineárne nezávislá n-tica vektorov z V. Potom buď X je báza (ak $k = n$) alebo $k < n$ a X sa dá doplniť na bázu.*

Dôkaz. Ak $\mathrm{Lo}(X) = V$, potom X je báza a teda $k = n$. Ak $\mathrm{Lo}(X) \neq V$, vyberme ľubovoľný vektor $\vec{y} \in V \setminus \mathrm{Lo}(X)$. Potom $(k+1)$-tica $X' = (X, \vec{y})$ je lineárne nezávislá. Naozaj, ak by bola lineárne závislá, podľa Vety 0.5 by musel jeden z vektorov v nej byť lineárnou kombináciou predchádzajúcich. Nemôže to byť žiaden z X (lebo potom by X bola lineárne závislá). Nemôže to ale byť ani $\vec{y}$, lebo potom by $\vec{y} \in \mathrm{Lo}(X)$. Keďže táto n-tica je lineárne nezávislá, tak $k + 1 \leq n$ (podľa Vety 0.8) a teda $k < n$. Teraz buď $k + 1 = n$ a máme bázu V, alebo môžeme proces opakovať, až kým nedostaneme bázu. □

Dôsledok 0.16. *Ak V je vektorový priestor,* $\dim(V) = n$ *a X je lineárne nezávislá n-tica s n prvkami, X je báza V.*

Toto je dôležité, pretože nám to umožňuje ušetriť si robotu: ak vieme, že $\dim(V) = n$ (pretože poznáme nejakú bázu s n prvkami) a chceme dokázať, že X je báza, stačí nám dokázať, že X je lineárne nezávislá a má n prvkov. Nemusíme dokazovať, že $\mathrm{Lo}(X) = V$.

Na záver ukážeme, ako sa teória z dnešnej prednášky dá použiť na riešenie príkladov.

Príklad 0.17. Zistite, či sú nasledujúce výroky pravdivé s použitím tvrdení z dnešnej prednášky:

a) Je $((1,2,3),(0,0,0),(0,1,1))$ je báza $\mathbb{R}^3$?
NIE, pretože a obsahuje nulový vektor a teda je lineárne závislá.

b) Je $((1,2,3),(3,2,1))$ báza $\mathbb{R}^3$?
NIE, lebo má 2 prvky a $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

c) Je $((1,1),(4,4),(3,2))$ lineárne závislá v $\mathbb{R}^2$?
ÁNO. Toto môžeme dokázať buď tak, že vyriešime sústavu, alebo si všimneme, že máme 3 vektory v priestore dimenzie 2, a použijeme Vetu 0.8 takto: vieme, že $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ a teda teda existuje báza X s dĺžkou 2. Máme teda $\mathrm{Lo}(X) = \mathbb{R}^2$. Ak by táto (alebo ľubovoľná iná) trojica vektorov v R^2 bola lineárne nezávislá, mali by sme podľa Vety 0.8

$$3 \leq 2$$

čo nie je pravda.

d) Je $((0,1,1),(1,1,0),(1,0,1))$ báza $\mathbb{R}^3$?
NIE. Vieme, že $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, takže podľa Dôsledku 0.16 nám stačí ukázať, že vektory sú lineárne nezávislé. Toto môžeme urobiť buď priamo, alebo ukázať, že žiadny z nich nie je lineárnou kombináciou predchádzajúcich. Zjavne $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{x}_2$ nie je skalárnym násobkom $\vec{x}_1$. A pre $\vec{x}_3$: ak $(1,0,1) = a(0,1,1) + b(1,1,0)$, tak z prvej zložky $1 = b$, z tretej $1 = a$, ale stredná $0 = a + b = 1 + 1 = 2$, čo je spor. Teda táto tica je lineárne nezávislá a je to báza.

e) Je pravda, že $\mathrm{Lo}(x+1, x^2 - 7x + 4) = \mathbb{R}^2[x]$?
NIE. Podľa pretože $\dim(\mathbb{R}^2[x]) = 3$ a podľa Vety 0.8 by sme potom dostali $3 \leq 2$.

f) Je pravda, že $\mathrm{Lo}(1, x+1, x^2 - 7x + 4) = \mathbb{R}^2[x]$?
ÁNO. Vieme, že $\dim(\mathbb{R}^2[x]) = 3$. Zrejme žiadny z vektorov v tici nie je lineárnou kombináciou predchádzajúcich, teda podľa Dôsledku 0.16 je tica bázou $\mathbb{R}^2[x]$, teda jej lineárnym obalom je celý vektorový priestor $R^2[x]$.

Príklad 0.18. $Y = (x^2-1, x+1, x-2)$ je báza $\mathbb{R}^2[x]$, lebo $\dim(\mathbb{R}^2[x]) = 3$ a Y je lineárne nezávislá. Opäť stačí dokázať, že jediná trojica $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ taká, že

$$a_1(x^2-1) + a_2(x+1) + a_3(x-2) = 0$$

je $(0,0,0)$, pretože platí Dôsledok 0.16, Ale tento typ problémov poznáme z rátania príkladov na Matematickej analýze 1 (neurčité koeficienty) a vieme, že nám stačí dosadiť napríklad $x = -1, 1, 2$ a z toho dostaneme sústavu lineárnych rovníc, ktorej jediné riešenie $a_1 = a_2 = a + 3 = 0$. Inou možnosťou je pouvažovať a ukázať, že žiadny z vektorov v Y nie je vyjadriteľný ako lineárna kombinácia predchádzajúcich.