Lineárna algebra 1
(texty k prednáškam)

Gejza Jenča

Verzia 1

1 Matica lineárneho zobrazenia

Uvažujme teraz tieto dáta:

- Konečnorozmerné vektorové priestory V, U.
- $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báza V (teda $\dim(V) = n$).
- $Y = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)$ je báza U (teda $\dim(U) = m$).
- $f : V \to U$ je lineárne zobrazenie.

Vieme z Vety 12.4, že f je jednoznačne určené n-ticou vektorov $(f(\vec{x}_1), \ldots, f(\vec{x}_n))$.

Každý z týchto vektorov $f(\vec{x}_1), \ldots, f(\vec{x}_n)$ je vektor z U, a teda každý z nich má nejaké súradnice v báze Y, ktoré ho určujú:

$$[f(\vec{x}_1]_Y, \ldots, [f(\vec{x}_n)]_Y$$

Vzniká nám nasledujúca definícia.

Definícia 1.1 (Matica lineárneho zobrazenia)**.** Nech V, U sú konečnorozmerné vektorové priestory, nech $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báza V, nech $Y = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_m)$ je báza U, nech $f : V \to U$ je lineárne zobrazenie. Potom **matica f v bázach** X, Y je matica typu $m \times n$:

$$[f]_{YX} = ([f(\vec{x}_1)]_Y \ldots [f(\vec{x}_n)]_Y)$$

1.1 Príklady matíc lineárnych zobrazení

Uvažujme nasledujúce príklady lineárnych zobrazení:

Príklad 1.2 (Nulové lineárne zobrazenie)**.** $f : V \to U$, $f(\vec{v}) = \vec{0}$.

$$[f]_{YX} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \ldots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Je to nulová matica, bez ohľadu na bázy X, Y.

Príklad 1.3 (Identické lineárne zobrazenie)**.** $\mathrm{id} : V \to V$, $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je ľubovoľná báza.

$$[\mathrm{id}]_{XX} = ([\mathrm{id}(\vec{x}_1)]_X \dots [\mathrm{id}(\vec{x}_n)]_X) = ([\vec{x}_1]_X \dots [\vec{x}_n]_X)$$

Keďže platí:

$$\vec{x}_1 = 1\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n \implies [\vec{x}_1]_X = (1, 0, \dots, 0) = \vec{e}_1$$
$$\vec{x}_2 = 0\vec{x}_1 + 1\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n \implies [\vec{x}_2]_X = (0, 1, \dots, 0) = \vec{e}_2$$

Dostávame:

$$[\mathrm{id}]_{XX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Nech ρ_O je vektorový priestor geometrických vektorov v rovine s počiatkom O, nech $l_\theta : \rho_O \to \rho_O$ je rotácia okolo počiatku doľava o uhol θ. Nech $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ sú dva vektory, kolmé na seba, rovnakej dĺžky; $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ je potom báza ρ_O. Aká je matica $[l_\theta]_{XX}$?

Z obrázka (rotácia vektorov) dostávame súradnice vektorov:

$$\begin{aligned} l_\theta(\vec{x}_1) &= \cos(\theta)\vec{x}_1 + \sin(\theta)\vec{x}_2 \\ l_\theta(\vec{x}_2) &= \cos(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{x}_1 + \sin(\theta + \frac{\pi}{2})\vec{x}_2 \\ &= -\sin(\theta)\vec{x}_1 + \cos(\theta)\vec{x}_2 \end{aligned}$$

Teda súradnice v báze X sú

$$[l_\theta(\vec{x}_1)]_X = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$[l_\theta(\vec{x}_2)]_X = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

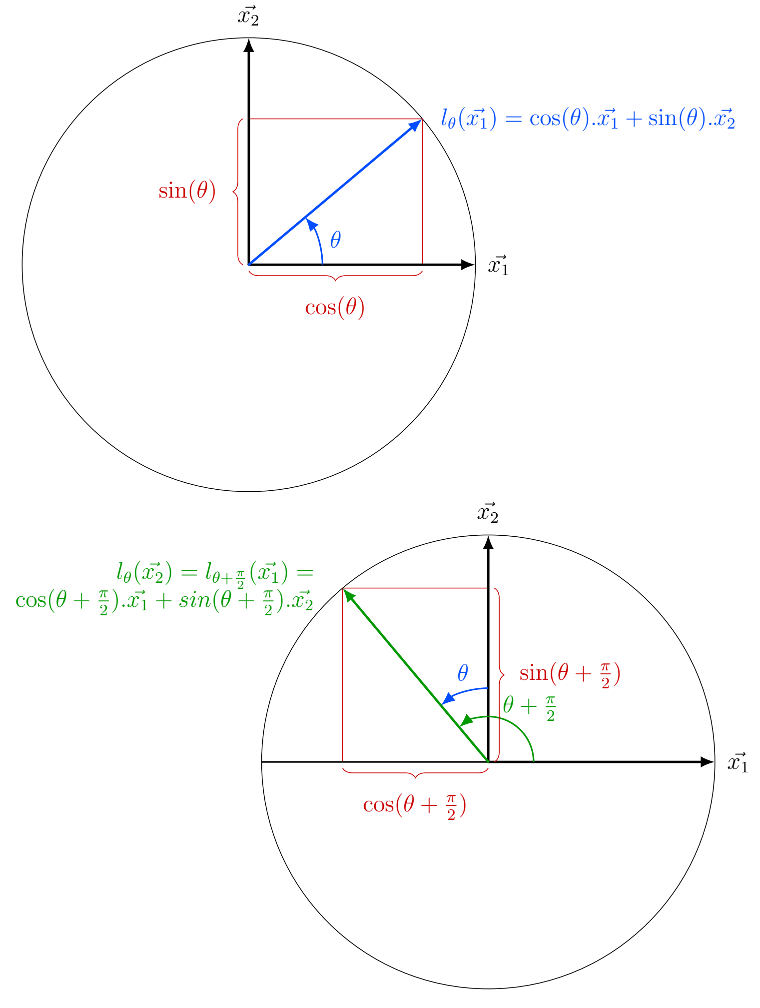
a matica l_θ v bázach X, X je

$$[l_\theta]_{XX} = ([l_\theta(\vec{x}_1)]_X, [l_\theta(\vec{x}_2)]_X) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Príklad 1.5 (Derivácia polynómov)**.** Nech $d : \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ je lineárne zobrazenie "derivácia". Báza $\mathbb{R}^3[x]$ je $X = (1, x, x^2, x^3)$. Báza $\mathbb{R}^2[x]$ je $Y = (1, x, x^2)$. Vypočítajme obrazy bázových vektorov z X:

$$\begin{aligned} d(1) = 0 &\implies [0]_Y = (0, 0, 0) \\ d(x) = 1 &\implies [1]_Y = (1, 0, 0) \\ d(x^2) = 2x &\implies [2x]_Y = (0, 2, 0) \\ d(x^3) = 3x^2 &\implies [3x^2]_Y = (0, 0, 3) \end{aligned}$$

Príklad 1.4 (rovinná rotácia)**.**



Obr. 1: Rotácia vektorov $\vec{x_1}$ a $\vec{x_2}$.

Teda matica d v bázach X, Y je:

$$[d]_{YX} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Príklad 1.6 (Evaluácia polynómu)**.** Lineárne zobrazenie $ev_{1,2,3} : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^3$ je dané predpisom

$$ev_{1,2,3}(p) = (p(1), p(2), p(3))$$

Pre $\mathbb{R}^2[x]$ zvolíme bázu $X = (1, x, x^2)$ Pre $\mathbb{R}^3$ zvolíme bázu $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$\begin{aligned} ev_{1,2,3}(1) &= (1, 1, 1) \\ ev_{1,2,3}(x) &= (1, 2, 3) \\ ev_{1,2,3}(x^2) &= (1, 4, 9) \end{aligned}$$

Matica zobrazenia:

$$[ev_{1,2,3}]_{EX} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Príklad 1.7 (Pravouhlá projekcia na priamku)**.** Uvažujme priamku q v rovine s počiatkom S takú, že prechádza počiatkom. Zobrazenie $P_q : S \to S$, ktoré zobrazí každý vektor $\vec{v} \in S$ na jeho ortogonálnu projekciu na q je lineárne (nedokazujeme).

Nech $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ sú dva navzájom kolmé vektory rovnakej dĺžky, ktoré (oba) zvierajú s priamkou q uhol $45°$. Oba sa pravouhlo premietajú na priamku q do rovnakého vektora $P_q(\vec{x}_1) = P_q(\vec{x}_2)$, ktorého koncový vrchol leží presne v strede štvorca vytýčeného $\vec{x}_1, \vec{x}_2$.

Platí:

$$P_q(\vec{x}_1) = P_q(\vec{x}_2) = \frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2$$

Súradnice tohto vektora v báze $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ sú $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Teda matica P_q v báze X je:

$$[P_q]_{XX} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Veta 1.8. *Nech V, U sú konečnorozmerné vektorové priestory, nech X je báza V, nech Y je báza U. Nech $f : V \to U$ je lineárne zobrazenie. Potom pre každý vektor $\vec{v} \in V$ platí:*

$$[f(\vec{v})]_Y = [f]_{YX}[\vec{v}]_X$$

Dôkaz. Označme $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Uvažujme najprv prípad, že $\vec{v}$ je priamo vektor z X, povedzme $\vec{v} = \vec{x}_1$. Zrejme $\vec{x}_1 = 1\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \cdots + 0\vec{x}_n$, teda súradnice $\vec{x}_1$ v báze X sú $[\vec{x}_1]_X = (1, 0, \dots, 0) = \vec{e}_1$.

Počítajme, čomu je rovná pravá strana dokazovanej rovnosti pre $\vec{v} = \vec{x}_1$:

$$[f]_{YX}[\vec{x}_1]_X = ([f(\vec{x}_1)]_Y \dots [f(\vec{x}_n)]_Y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = [f(\vec{x}_1)]_Y$$

to je ale presne prvý stĺpec matice $[f]_{YX}$. Zrejme to takto bude fungovať aj pre ostatné stĺpce (prvky bázy X), teda vidíme, že pre všetky $i = 1, \dots, n$ máme:

$$[f]_{YX}[\vec{x}_i]_X = [f(\vec{x}_i)]_Y$$

Uvažujme teraz ľubovoľný vektor $\vec{v} \in V$ a označíme jeho súradnice v báze X ako $[\vec{v}]_X = (c_1, \dots, c_n)$, čo vlastne znamená, že $\vec{v} = c_1\vec{x}_1 + \dots + c_n\vec{x}_n$. Počítajme:

$$\begin{aligned} [f]_{YX}[\vec{v}]_X &= [f]_{YX}(c_1\vec{e}_1 + \dots + c_n\vec{e}_n) \\ &= c_1([f]_{YX}\vec{e}_1) + \dots + c_n([f]_{YX}\vec{e}_n) \\ &= c_1[f(\vec{x}_1)]_Y + \dots + c_n[f(\vec{x}_n)]_Y \end{aligned}$$

Využili sme, že zobrazenie „násobenie vektora maticou zľava” je lineárne. Ďalej, keďže zobrazenie vektora na jeho súradnice je tiež lineárne, môžeme počítať

$$\begin{aligned} c_1[f(\vec{x}_1)]_Y + \dots + c_n[f(\vec{x}_n)]_Y &= [c_1 f(\vec{x}_1) + \dots + c_n f(\vec{x}_n)]_Y \\ &= [f(c_1\vec{x}_1 + \dots + c_n\vec{x}_n)]_Y \\ &= [f(\vec{v})]_Y \end{aligned}$$

V poslednom kroku sme využili, že f je lineárne zobrazenie. □

Ukážeme si, ako Veta 1.8 funguje na príklade:

Príklad 1.9. Uvažujme polynóm $p \in \mathbb{R}^3[x]$ daný predpisom $p(x) = -3x^3 + 2x - 2$. Jeho súradnice v báze $X = (1, x, x^2, x^3)$ sú $(-2, 2, 0, -3)$. Uvažujme zobrazenie $d : \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ „derivácia". Ak zvolíme bázu $Y = (1, x, x^2)$ vektorového priestoru $\mathbb{R}^2[x]$, potom:

$$[d(p)]_Y = [d]_{YX}[p]_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Čo sú súradnice polynómu $2 - 9x^2$ v báze Y. Zároveň $d(p) = p' = (-3x^3 + 2x - 2)' = -9x^2 + 2$, čiže všetko sedí.

Vetu 1.8 môžeme vyjadriť kompaktne pomocou diagramu:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & U \\ {\scriptstyle [\_]_X}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle [\_]_Y} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[{[f]_{YX}\cdot\_}]{} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Veta 1.8 potom znamená, že tento diagram *komutuje*. Ak zložíme zobrazenia, ktoré sú na obrázku reprezentované šípkami $\to\downarrow$, dostaneme rovnaké zobrazenie, ako keď zložíme zobrazenia reprezentované šípkami $\downarrow\to$.

1.2 Skladanie lineárnych zobrazení a násobenie matíc

Uvažujme teraz tri konečnorozmerné vektorové priestory V, U, W a dve lineárne zobrazenia $f : V \to U$, $g : U \to W$. Podľa Vety 12.2 je zobrazenie $g \circ f : V \to W$ lineárne.

Ak vyberieme v každom z priestorov nejaké bázy, každé zo zobrazení $f, g, g\circ f$ bude reprezentované nejakou maticou. Nasledujúca veta nám hovorí o vzťahu medzi týmito tromi maticami.

Veta 1.10. *Nech V, U, W sú konečnorozmerné vektorové priestory, $f : V \to U$, $g : U \to W$ sú lineárne zobrazenia. X je báza V, Y je báza U, Z je báza W. Potom:*

$$[g \circ f]_{ZX} = [g]_{ZY}[f]_{YX}$$

(Skladanie zobrazení zodpovedá násobeniu matíc).

Dôkaz. Najskôr dokážeme, že pre každý vektor $\vec{v} \in V$ platí:

$$[g \circ f]_{ZX}[\vec{v}]_X = [g]_{ZY}[f]_{YX}[\vec{v}]_X$$

A naozaj, naľavo máme:

$$[g \circ f]_{ZX}[\vec{v}]_X \overset{1.8}{=} [(g \circ f)(\vec{v})]_Z = [g(f(\vec{v}))]_Z$$

A napravo:

$$[g]_{ZY}([f]_{YX}[\vec{v}]_X) \overset{1.8}{=} [g]_{ZY}[f(\vec{v})]_Y \overset{1.8}{=} [g(f(\vec{v}))]_Z$$

Označme teraz $A = [g \circ f]_{ZX}$ a $B = [g]_{ZY}[f]_{YX}$. Pre všetky $\vec{v} \in V$ je $A[\vec{v}]_X = B[\vec{v}]_X$. Špeciálne pre $\vec{v} = \vec{x}_i$ (kde $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$) máme $[\vec{x}_i]_X = \vec{e}_i$. Súčin matice A s i-tym stĺpcom $\vec{e}_i$ je i-ty stĺpec matice A. Teda A a B majú rovnaký i-ty stĺpec pre všetky $i = 1, \ldots, n$, a teda sú to rovnaké matice. $\square$

Príklad 1.11. Pozrime sa najprv na rovinné rotácie z príkladu 3. Zrejme pre dva uhly θ, ϕ platí $l_\phi \circ l_\theta = l_{\phi+\theta}$ (najprv otočiť doľava o θ a potom ešte o ϕ je to isté, ako otočiť doľava o $\theta + \phi$). Podľa Vety 1.8 musí pre každú bázu X platiť $[l_\phi \circ l_\theta]_{XX} = [l_\phi]_{XX}[l_\theta]_{XX}$. Z toho dostávame maticovú rovnosť:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Po vynásobení matíc napravo dostaneme rovnosť matíc:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\sin\theta + \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}$$

Porovnaním prvkov v týchto maticiach dostaneme známe súčtové vzorce:

$$\cos(\phi+\theta) = \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta$$
$$\sin(\phi+\theta) = \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta$$

Príklad 1.12. Pozrime sa opäť na projekciu P_q z príkladu 6. Zrejme platí $P_q \circ P_q = P_q$. (Pretože $P_q(\vec{v})$ je už na priamke q a teda jeho pravouhlou projekciou na priamku q je on sám). Z tohto pozorovania a z Vety 1.10 máme:

$$[P_q \circ P_q]_{XX} = [P_q]_{XX}[P_q]_{XX}$$

Zároveň $[P_q \circ P_q]_{XX} = [P_q]_{XX}$. Teda musí platiť:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

A to je naozaj pravda, ako sa môžete sami presvedčiť.

1.3 Inverzné lineárne zobrazenie a inverzná matica

Veta 1.13. *Nech V, U sú konečnorozmerné vektorové priestory, nech f je bijektívne lineárne zobrazenie $f : V \to U$. Nech X je báza V, Y je báza U. Potom matica $[f^{-1}]_{XY}$ je inverzná k matici $[f]_{YX}$.*

Dôkaz. Máme dokázať, že $[f^{-1}]_{XY}[f]_{YX} = I$ a $[f]_{YX}[f^{-1}]_{XY} = I$. Počítajme:

$$[f^{-1}]_{XY}[f]_{YX} \overset{1.10}{=} [f^{-1} \circ f]_{XX} = [\mathrm{id}]_{XX} = I$$

Druhá rovnosť sa dokáže rovnako. □

Príklad 1.14. Zrejme inverzné zobrazenie k rovinnej rotácii doľava o θ je rovinná rotácia doprava o θ (alebo, čo je to isté, rotácia doľava o záporný uhol $-\theta$). Teda $l_\theta^{-1} = l_{-\theta}$. Podľa Vety 13.4 má byť matica $[l_{-\theta}]_{XX}$ inverzná k matici $[l_\theta]_{XX}$. Počítajme:

$$[l_{-\theta}]_{XX} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Skúška:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Príklad 1.15. Pozrime sa opäť na lineárne zobrazenie $ev_{1,2,3}$ z príkladu 5. Presvedčte sa, že je bijektívne (aký význam má, že je bijektívne?). Inverzné zobrazenie k $ev_{1,2,3} : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^3$ je zobrazenie, ktoré priraďuje usporiadaným trojiciam reálnych čísel polynómy. Má vlastnosti:

$$ev_{1,2,3}^{-1} \circ ev_{1,2,3} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2[x]}$$

$$ev_{1,2,3} \circ ev_{1,2,3}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$$

To znamená, že ak vezmeme ľubovoľné $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, tak $ev_{1,2,3}^{-1}(y_1, y_2, y_3)$ je polynóm p, pre ktorý platí:

$$ev_{1,2,3}(p) = (y_1, y_2, y_3)$$

Ale $ev_{1,2,3}(p) = (p(1), p(2), p(3))$, a teda $p(1) = y_1$, $p(2) = y_2$, $p(3) = y_3$.

Ak si teda zvolíme povedzme trojicu $(1, 2, 5)$, potom $ev_{1,2,3}^{-1}(1, 2, 5)$ musí byť polynóm $p \in \mathbb{R}^2[x]$, taký, že $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 5$.

Maticu inverznú k $[ev_{1,2,3}]_{EX}$ môžeme vypočítať:

$$([ev_{1,2,3}]_{EX})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A podľa Vety 13.4 je to matica $[ev_{1,2,3}^{-1}]_{XE}$. Ak vezmeme teraz napríklad vektor $\vec{v} = (1, 2, 5)$, potom

$$[ev_{1,2,3}^{-1}(\vec{v})]_X = [ev_{1,2,3}^{-1}]_{XE}[\vec{v}]_E = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -\frac{5}{2} & 4 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

čo sú súradnice polynómu $p(x) = x^2 - 2x + 2$ v báze X. A naozaj máme $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 5$ pre tento polynóm p.