Lineárna algebra 1
(texty k prednáškam)

Gejza Jenča

Verzia 1

1 Lineárne zobrazenia

Definícia 1.1. Nech V, U sú vektorové priestory. Hovoríme, že zobrazenie $f : V \to U$ je **lineárne**, ak platia nasledujúce podmienky:

1. **Zachováva súčet:** Pre všetky $\vec{v}, \vec{w} \in V$ platí

   $$f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$$

   (najprv sčítam v V, potom zobrazím do U = najprv zobrazím každý z V do U, obrazy potom sčítam v U. Teda „obraz súčtu" = „súčet obrazov".)

2. **Zachováva násobenie skalárom:** Pre všetky $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V$ platí

   $$f(\alpha\vec{v}) = \alpha f(\vec{v})$$

   (najprv vynásobím α, potom zobrazím výsledok do U = najprv zobrazím do U, potom vynásobím α. Teda „obraz škálovania" = „škálovanie obrazu".)

Príklad 1.2. Príklady lineárnych zobrazení:

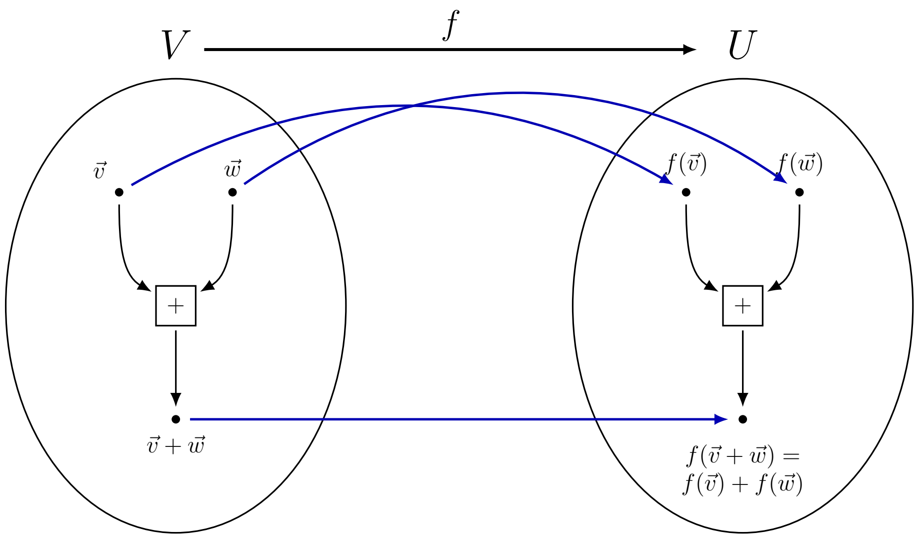
1. $z : V \to U$. Pre každú dvojicu vektorových priestorov V, U je zobrazenie z dané predpisom $z(\vec{v}) = \vec{0}$ lineárne.

   - Pre všetky $\vec{v}, \vec{w} \in V$ platí:

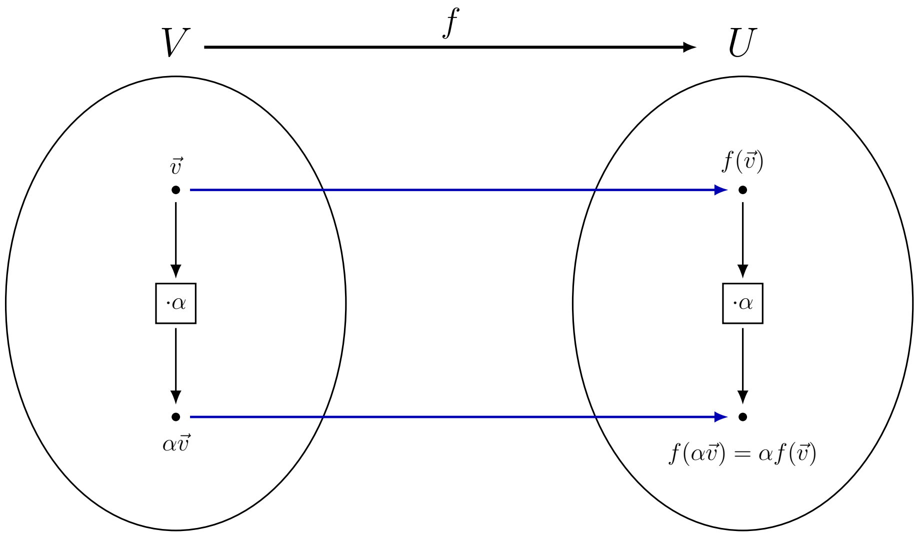
     $$z(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = z(\vec{v}) + z(\vec{w})$$

   - Pre všetky $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V$ platí:

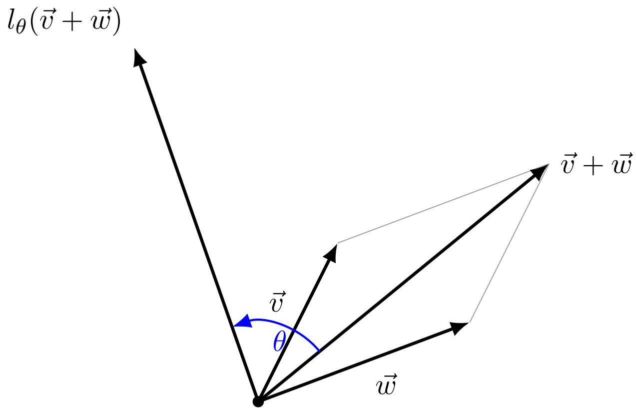
     $$z(\alpha\vec{v}) = \vec{0} = \alpha \cdot \vec{0} = \alpha z(\vec{v})$$



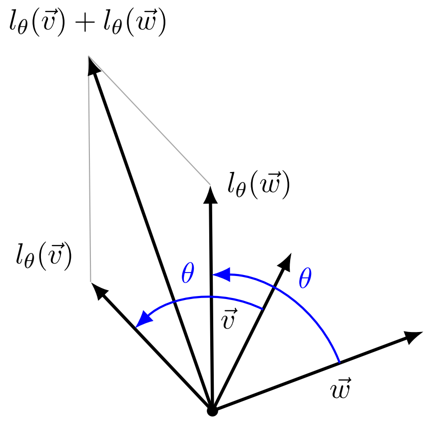
Obr. 1: Zachovávanie súčtu



Obr. 2: Zachovávanie násobenia skalárom $\alpha \in \mathbb{R}$



Obr. 3: $l_\theta(\vec{v}+\vec{w})$: najprv sčítame, potom rotujeme



Obr. 4: $l_\theta(\vec{v})+l_\theta(\vec{w})$: najprv rotujeme, potom sčítame

2. Pre každý vektorový priestor V je zobrazenie $\mathrm{id}: V \to V$ dané predpisom $\mathrm{id}(\vec{v}) = \vec{v}$ lineárne:
   - $\mathrm{id}(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{v}+\vec{w} = \mathrm{id}(\vec{v}) + \mathrm{id}(\vec{w})$
   - $\mathrm{id}(\alpha\vec{v}) = \alpha\vec{v} = \alpha\mathrm{id}(\vec{v})$

3. Nech ρ_O je vektorový priestor geometrických vektorov v rovine s počiatkom O, $\theta \in \langle 0, 2\pi)$. Nech $l_\theta : \rho_O \to \rho_O$ je rotácia vektora okolo počiatku doľava o uhol θ.

   Máme sa presvedčiť o zachovávaní sčítania a násobenia skalárom. To je ľahké, ak si poriadne uvedomíme, čo tieto veci znamenajú a použijeme geometrický náhľad:

   - $l_\theta(\vec{v}+\vec{w})$: najprv sčítame, potom rotujeme.

- $l_\theta(\vec{v}) + l_\theta(\vec{w})$: najprv rotujeme, potom sčítame.

V oboch prípadoch dostaneme ten istý vektor (pretože rovnobežník na dolnom obrázku je zrotovaný rovnobežník z horného obrázku).

Podobne sa môžeme obrázkom presvedčiť o tom, že $l_\theta(\alpha\vec{v}) = \alpha l_\theta(\vec{v})$.

4. Zobrazenie polynómov $d : \mathbb{R}^n[x] \to \mathbb{R}^{n-1}[x]$ ($n \in \mathbb{N}$) dané predpisom $d(p) = p'$ (polynóm $\mapsto$ jeho derivácia).

$$n = 3: \quad d(x^3 - 3x^2 + x + 7) = (x^3 - 3x^2 + x + 7)' = 3x^2 - 6x + 1$$

To, že derivácia je lineárne zobrazenie, ste sa naučili na Matematickej analýze, sú to presne tie dobre známe vzorce:

$$(p + q)' = p' + q' \quad \text{a} \quad (c \cdot p)' = c \cdot p' \quad (c \text{ je konštanta}),$$

ktoré ste neustále používali na počítanie derivácií.

5. Evaluácia: $ev_c : \mathbb{R}^n[x] \to \mathbb{R}$ (evaluácia „v bode c") dané predpisom $ev_c(p) = p(c)$ (polynóm $\mapsto$ jeho hodnota v bode c). Napríklad pre $c = 2$ a $n = 3$:

$$ev_2(x^3 - 3x^2 + x + 7) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 + 7 = 8 - 12 + 2 + 7 = 5$$

Overenie linearity:

- Pre $p, q \in \mathbb{R}^n[x]$:

$$ev_2(p + q) = (p + q)(2) = p(2) + q(2) = ev_2(p) + ev_2(q)$$

(Toto je iba použitie toho, ako definujeme súčet funkcií, napr. polynómov).

- Pre $p \in \mathbb{R}^n[x], \alpha \in \mathbb{R}$:

$$ev_2(\alpha p) = (\alpha p)(2) = \alpha(p(2)) = \alpha \cdot ev_2(p)$$

6. Nech $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matica; potom A reprezentuje zobrazenie $[[A]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (násobenie maticou zľava, pozri text Linalg 1.7):

$$[[A]](\vec{v}) = A\vec{v}$$

Toto zobrazenie je lineárne:

- Pre $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$:

$$[[A]](\vec{v} + \vec{w}) = A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w} = [[A]](\vec{v}) + [[A]](\vec{w})$$

(distributivita násobenia matíc).

- Pre $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$:

$$[[A]](\alpha\vec{v}) = A(\alpha\vec{v}) = \alpha(A\vec{v}) = \alpha[[A]](\vec{v})$$

7. Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor, $\dim(V) = n$. Nech $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báza V. Potom zobrazenie $V \to \mathbb{R}^n$ dané predpisom

$$\vec{v} \mapsto [\vec{v}]_X$$

(zobraz vektor na jeho súradnice v báze X) je lineárne.

1.1 Vlastnosti lineárnych zobrazení

Veta 1.3. *Nech V, U sú vektorové priestory, nech $f : V \to U$ je lineárne zobrazenie. Potom:*

a) $f(\vec{0}) = \vec{0}$

b) Pre každú n-ticu skalárov $(a_1, \ldots, a_n) \subset \mathbb{R}$ a vektorov $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in V$ platí:

$$f(a_1\vec{x}_1 + \cdots + a_n\vec{x}_n) = a_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + a_n f(\vec{x}_n)$$

(Obraz lineárnej kombinácie je lineárna kombinácia obrazov s rovnakými koeficientami).

Dôkaz. a) $f(\vec{0}) = f(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot f(\vec{0}) = \vec{0}$. (Využili sme, že $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$ a linearitu f).

b)

$$\begin{aligned} f(a_1\vec{x}_1 + \cdots + a_n\vec{x}_n) &= f(a_1\vec{x}_1) + f(a_2\vec{x}_2 + \cdots + a_n\vec{x}_n) = \ldots \\ &= f(a_1\vec{x}_1) + \cdots + f(a_n\vec{x}_n) \\ &= a_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + a_n f(\vec{x}_n) \end{aligned}$$

(V prvom kroku sme opakovane použili, že f zachováva súčet, v druhom kroku, že f zachováva škálovanie).

□

Veta 1.4. *Nech V, U, W sú vektorové priestory, nech $f : V \to U$ a $g : U \to W$ sú lineárne zobrazenia. Potom $g \circ f : V \to W$ je lineárne zobrazenie.*

Dôkaz. Nech $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$. Počítajme:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= g(f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)) \\ &= g(f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)) \quad (f \text{ je lineárne}) \\ &= g(f(\vec{v}_1)) + g(f(\vec{v}_2)) \quad (g \text{ je lineárne}) \\ &= (g \circ f)(\vec{v}_1) + (g \circ f)(\vec{v}_2) \end{aligned}$$

Teda $g \circ f$ zachováva súčet.

Podobne, pre $\vec{v} \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ dostávame:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha\vec{v}) &= g(f(\alpha\vec{v})) \\ &= g(\alpha f(\vec{v})) \quad (f \text{ je lineárne}) \\ &= \alpha g(f(\vec{v})) \quad (g \text{ je lineárne}) \\ &= \alpha(g \circ f)(\vec{v})\end{aligned}$$

Teda $g \circ f$ zachováva násobenie skalárom. □

Definícia 1.5. Bijektívne lineárne zobrazenie sa volá **izomorfizmus**. Vektorové priestory sú navzájom **izomorfné**, ak medzi nimi existuje nejaký izomorfizmus.

Veta 1.6 (Základná veta o lineárnych zobrazeniach)**.** *Nech V, U sú konečnorozmerné vektorové priestory, nech $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ je báza V. Potom pre každú usporiadanú n-ticu vektorov $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \in U$ existuje **jediné** lineárne zobrazenie $f : V \to U$ také, že*

$$f(\vec{x}_1) = \vec{u}_1, \ldots, f(\vec{x}_n) = \vec{u}_n$$

Skôr, ako si túto vetu dokážeme, pozrime sa na jej význam. Ak chceme určiť nejaké zobrazenie (nie nutne lineárne) $f : V \to U$ medzi dvoma vektorovými priestormi, musíme špecifikovať $f(\vec{v})$ pre každé $\vec{v} \in V$.

Veta 1.6 nám hovorí, že ak je V konečnorozmerný a f je lineárne, potom nám f jednoznačne špecifikujú tieto dáta:

- nejaká báza $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ vektorového priestoru V,
- hodnoty f v prvkoch tejto bázy X.

Dôkaz. Nech $\vec{v} \in V$, nech $(a_1, \ldots, a_n)$ sú súradnice $\vec{v}$ v báze X, teda

$$[\vec{v}]_X = (a_1, \ldots, a_n)$$

To znamená $\vec{v} = a_1\vec{x}_1 + \cdots + a_n\vec{x}_n$.

Potom musí platiť (z Vety 1.3 b)):

$$f(\vec{v}) = f(a_1\vec{x}_1 + \cdots + a_n\vec{x}_n) = a_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + a_n f(\vec{x}_n) = a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_n\vec{u}_n$$

To nám ale presne určuje predpis f v každom $\vec{v} \in V$:

1. nájdi súradnice $\vec{v}$ v báze X,
2. použi ich ako koeficienty lineárnej kombinácie vektorov $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$.

Je však takto definované f vždy lineárne? Nech $\vec{v}, \vec{w} \in V$. Máme dokázať, že $f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$. To vyžaduje zistiť vzťah medzi súradnicami vektorov $\vec{v}, \vec{w}$ a $\vec{v} + \vec{w}$ v báze X. Označme súradnice $\vec{v}$ a $\vec{w}$ v báze X:

$$[\vec{v}]_X = (a_1, \dots, a_n)$$

$$[\vec{w}]_X = (b_1, \dots, b_n)$$

Aké sú súradnice $\vec{v} + \vec{w}$ v báze X?

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{w} &= (a_1\vec{x}_1 + \cdots + a_n\vec{x}_n) + (b_1\vec{x}_1 + \cdots + b_n\vec{x}_n) \\ &= (a_1 + b_1)\vec{x}_1 + \cdots + (a_n + b_n)\vec{x}_n \end{aligned}$$

Teda $[\vec{v} + \vec{w}]_X = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$.

Počítajme:

$$\begin{aligned} f(\vec{v} + \vec{w}) &= (a_1 + b_1)\vec{u}_1 + \cdots + (a_n + b_n)\vec{u}_n \\ &= (a_1\vec{u}_1 + b_1\vec{u}_1) + \cdots + (a_n\vec{u}_n + b_n\vec{u}_n) \\ &= (a_1\vec{u}_1 + \cdots + a_n\vec{u}_n) + (b_1\vec{u}_1 + \cdots + b_n\vec{u}_n) \\ &= f(\vec{v}) + f(\vec{w}) \end{aligned}$$

Pre škálovanie $f(\alpha\vec{v})$ sa dokáže podobne:

$$[\alpha\vec{v}]_X = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n)$$

$$f(\alpha\vec{v}) = \sum(\alpha a_i)\vec{u}_i = \alpha \sum a_i\vec{u}_i = \alpha f(\vec{v})$$

$\square$

V nasledujúcej prednáške využijeme Vetu 1.6 na to, aby sme ukázali, že každé lineárne zobrazenie medzi dvoma konečnorozmernými vektorovými priestormi sa dá popísať pomocou matice.