Lineárna algebra 1
(texty k prednáškam)

Gejza Jenča

Verzia 1

1 Matica lineárneho zobrazenia

Uvažujme teraz tieto dáta:

- Konečnorozmerné vektorové priestory V, U.
- $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báza V (teda $\dim(V) = n$).
- $Y = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je báza U (teda $\dim(U) = m$).
- $f : V \to U$ je lineárne zobrazenie.

Vieme z Vety 12.4, že f je jednoznačne určené n-ticou vektorov $(f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_n))$.

Ale! Každý z týchto vektorov $f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_n)$ je vektor z U, a teda každý z nich má nejaké súradnice v báze Y, ktoré ho určujú. Vzniká nám táto definícia:

Definícia 1.1. Nech V, U sú konečnorozmerné vektorové priestory, nech $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je báza V, nech $Y = (\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_m)$ je báza U, nech $f : V \to U$ je lineárne zobrazenie. Potom **matica** f **v bázach** X, Y je matica typu $m \times n$:

$$[f]_{YX} = ([f(\vec{x}_1)]_Y \dots [f(\vec{x}_n)]_Y)$$

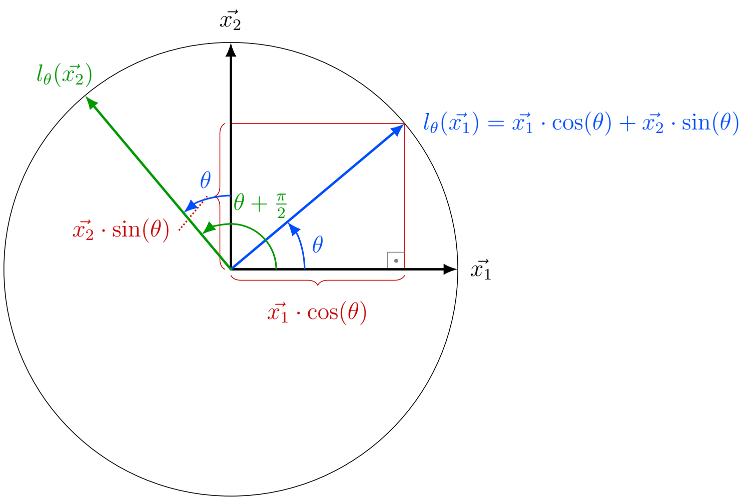
- $f : V \to U$
- X je báza V, počet stĺpcov je $\dim(V) = n$.
- Y je báza U, každý stĺpec má $\dim(U)$ riadkov, teda máme m riadkov.

Príklad 1.2. Uvažujme nasledujúce príklady lineárnych zobrazení:

1. **Nulové lineárne zobrazenie** $f : V \to U$, $f(\vec{v}) = \vec{0}$.

$$[f]_{YX} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

Je to nulová matica, bez ohľadu na bázy X, Y.



Obr. 1: Rotácia vektorov $\vec{x_1}$ a $\vec{x_2}$.

2. **Identické lineárne zobrazenie** $\mathrm{id} : V \to V$, $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ je ľubovoľná báza.

$$[\mathrm{id}]_{XX} = ([\mathrm{id}(\vec{x}_1)]_X \dots [\mathrm{id}(\vec{x}_n)]_X) = ([\vec{x}_1]_X \dots [\vec{x}_n]_X)$$

Keďže platí:

$$\vec{x}_1 = 1\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n \implies [\vec{x}_1]_X = (1, 0, \dots, 0)^T = \vec{e}_1$$
$$\vec{x}_2 = 0\vec{x}_1 + 1\vec{x}_2 + \dots + 0\vec{x}_n \implies [\vec{x}_2]_X = (0, 1, \dots, 0)^T = \vec{e}_2$$

Dostávame:

$$[\mathrm{id}]_{XX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

3. **2-vektory v rovine s počiatkom.** Nech $l_\theta : S \to S$ je rotácia okolo počiatku doľava o uhol θ. Nech $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ sú dva vektory, kolmé na seba, rovnakej dĺžky. $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ je báza S. Aká je matica $[l_\theta]_{XX}$?

Z obrázka (rotácia vektorov) dostávame súradnice vektorov:

$$l_\theta(\vec{x}_1) = \vec{x}_1 \cos(\theta) + \vec{x}_2 \sin(\theta)$$
$$l_\theta(\vec{x}_2) = \vec{x}_1 \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) + \vec{x}_2 \sin(\theta + \frac{\pi}{2})$$
$$= -\vec{x}_1 \sin(\theta) + \vec{x}_2 \cos(\theta)$$

Teda súradnice v báze X:

$$[l_\theta(\vec{x}_1)]_X = (\cos\theta, \sin\theta)^T$$

$$[l_\theta(\vec{x}_2)]_X = (-\sin\theta, \cos\theta)^T$$

Teda matica l_θ v bázach X, X je:

$$[l_\theta]_{XX} = ([l_\theta(\vec{x}_1)]_X, [l_\theta(\vec{x}_2)]_X) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

4. **Lineárne zobrazenie** $d : \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ **(derivácia)** Báza $\mathbb{R}^3[x]$ je $X = (1, x, x^2, x^3)$. Báza $\mathbb{R}^2[x]$ je $Y = (1, x, x^2)$. Obrazy bázových vektorov:

$$d(1) = 0 \implies [0]_Y = (0,0,0)^T$$
$$d(x) = 1 \implies [1]_Y = (1,0,0)^T$$
$$d(x^2) = 2x \implies [2x]_Y = (0,2,0)^T$$
$$d(x^3) = 3x^2 \implies [3x^2]_Y = (0,0,3)^T$$

Teda matica d v bázach X, Y je:

$$[d]_{YX} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. **Lineárne zobrazenie** $ev_{1,2,3} : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^3$ Dané predpisom $ev_{1,2,3}(p) = (p(1), p(2), p(3))$. Báza $X = (1, x, x^2)$ pre $\mathbb{R}^2[x]$. Báza $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ pre $\mathbb{R}^3$.

$$ev_{1,2,3}(1) = (1,1,1)^T$$
$$ev_{1,2,3}(x) = (1,2,3)^T$$
$$ev_{1,2,3}(x^2) = (1,4,9)^T$$

Matica zobrazenia:

$$[ev_{1,2,3}]_{EX} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

6. **Projekcia na priamku** Uvažujme priamku q v rovine s počiatkom S takú, že prechádza počiatkom. Zobrazenie $P_q : S \to S$, ktoré zobrazí každý vektor $\vec{v} \in S$ na jeho ortogonálnu projekciu na q je lineárne (nedokazujeme).

Nech $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ sú dva navzájom kolmé vektory rovnakej dĺžky, ktoré (oba) zvierajú s priamkou q uhol $45°$. Oba sa pravouhlo premietajú na priamku q do rovnakého vektora $P_q(\vec{x}_1) = P_q(\vec{x}_2)$, ktorého koncový vrchol leží presne v strede štvorca vytýčeného $\vec{x}_1, \vec{x}_2$.

Platí:

$$P_q(\vec{x}_1) = P_q(\vec{x}_2) = \frac{1}{2}\vec{x}_1 + \frac{1}{2}\vec{x}_2$$

Súradnice tohto vektora v báze $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ sú $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Teda matica P_q v báze X je:

$$[P_q]_{XX} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Veta 1.3. *Nech V, U sú konečnorozmerné vektorové priestory, nech X je báza V, nech Y je báza U. Nech $f : V \to U$ je lineárne zobrazenie. Potom pre každý vektor $\vec{v} \in V$ platí:*

$$[f(\vec{v})]_Y = [f]_{YX}[\vec{v}]_X$$

(T.j. súradnice obrazu = matica zobrazenia $\times$ súradnice vzoru).

Dôkaz. Označme $X = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$. Uvažujme najprv prípad, že $\vec{v}$ je priamo vektor z X, povedzme $\vec{v} = \vec{x}_1$. Zrejme $\vec{x}_1 = 1\vec{x}_1 + 0\vec{x}_2 + \cdots + 0\vec{x}_n$, teda súradnice $\vec{x}_1$ v báze X sú $[\vec{x}_1]_X = (1, 0, \dots, 0)^T = \vec{e}_1$.

Počítajme, čomu je rovná pravá strana dokazovanej rovnosti pre $\vec{v} = \vec{x}_1$:

$$[f]_{YX}[\vec{x}_1]_X = ([f(\vec{x}_1)]_Y \dots [f(\vec{x}_n)]_Y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = [f(\vec{x}_1)]_Y$$

Čo je presne prvý stĺpec matice $[f]_{YX}$. Zrejme to takto bude fungovať aj pre ostatné stĺpce (prvky bázy X), teda vidíme, že pre všetky $i = 1, \dots, n$ máme:

$$[f]_{YX}[\vec{x}_i]_X = [f(\vec{x}_i)]_Y$$

Uvažujme teraz ľubovoľný vektor $\vec{v} \in V$ a označíme jeho súradnice v báze X ako $[\vec{v}]_X = (c_1, \dots, c_n)^T$, čo vlastne znamená, že $\vec{v} = c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_n\vec{x}_n$. Počítajme:

$$\begin{aligned} [f]_{YX}[\vec{v}]_X &= [f]_{YX}(c_1\vec{e}_1 + \cdots + c_n\vec{e}_n) \\ &= c_1([f]_{YX}\vec{e}_1) + \cdots + c_n([f]_{YX}\vec{e}_n) \\ &= c_1[f(\vec{x}_1)]_Y + \cdots + c_n[f(\vec{x}_n)]_Y \end{aligned}$$

Využili sme distributívny zákon maticového násobenia. Ďalej, keďže zobrazenie vektora na jeho súradnice je lineárne:

$$\begin{aligned} c_1[f(\vec{x}_1)]_Y + \cdots + c_n[f(\vec{x}_n)]_Y &= [c_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + c_n f(\vec{x}_n)]_Y \\ &= [f(c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_n\vec{x}_n)]_Y \\ &= [f(\vec{v})]_Y \end{aligned}$$

V poslednom kroku sme využili, že f je lineárne zobrazenie. □

Ukážeme si, ako Veta 1.3 funguje na príklade:

Príklad 1.4. Uvažujme polynóm $p \in \mathbb{R}^3[x]$ daný predpisom $p(x) = -3x^3 + 2x - 2$. Jeho súradnice v báze $X = (1, x, x^2, x^3)$ sú $(-2, 2, 0, -3)^T$. Uvažujme zobrazenie $d : \mathbb{R}^3[x] \to \mathbb{R}^2[x]$ „derivácia". Ak zvolíme bázu $Y = (1, x, x^2)$ vektorového priestoru $\mathbb{R}^2[x]$, potom:

$$[d(p)]_Y = [d]_{YX}[p]_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Čo sú súradnice polynómu $2 - 9x^2$ v báze Y. Zároveň $d(p) = p' = (-3x^3 + 2x - 2)' = -9x^2 + 2$, čiže všetko sedí.

Vetu 1.3 môžeme vyjadriť kompaktne pomocou diagramu:

$$\begin{tikzcd} V^f \arrow[r] \arrow[d, "\text{súradnice v } X"'] & U^{\text{súradnice v } Y} \arrow[d] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "{M=[f]_{YX}}"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Veta 1.3 potom znamená, že tento diagram **komutuje**. Ak zložíme zobrazenia, ktoré sú na obrázku reprezentované šípkami →↓, dostaneme rovnaké zobrazenie, ako keď zložíme zobrazenia reprezentované šípkami ↓→.

2 Skladanie lineárnych zobrazení a násobenie matíc

Uvažujme teraz tri konečnorozmerné vektorové priestory V, U, W a dve lineárne zobrazenia $f : V \to U$, $g : U \to W$. Podľa Vety 12.2 je zobrazenie $g \circ f : V \to W$ lineárne.

Ak vyberieme v každom z priestorov nejaké bázy, každé zo zobrazení $f, g, g \circ f$ bude reprezentované nejakou maticou. Nasledujúca veta nám hovorí o vzťahu medzi týmito tromi maticami.

Veta 2.1. *Nech V, U, W sú konečnorozmerné vektorové priestory, $f : V \to U$, $g : U \to W$ sú lineárne zobrazenia. X je báza V, Y je báza U, Z je báza W. Potom:*

$$[g \circ f]_{ZX} = [g]_{ZY}[f]_{YX}$$

(Skladanie zobrazení zodpovedá násobeniu matíc).

Dôkaz. Najskôr dokážeme, že pre každý vektor $\vec{v} \in V$ platí:

$$[g \circ f]_{ZX}[\vec{v}]_X = [g]_{ZY}[f]_{YX}[\vec{v}]_X$$

A naozaj, naľavo máme:

$$[g \circ f]_{ZX}[\vec{v}]_X \overset{\text{Veta 13.2}}{=} [(g \circ f)(\vec{v})]_Z = [g(f(\vec{v}))]_Z$$

A napravo:

$$[g]_{ZY}([f]_{YX}[\vec{v}]_X) \overset{\text{Veta 13.2}}{=} [g]_{ZY}[f(\vec{v})]_Y \overset{\text{Veta 13.2}}{=} [g(f(\vec{v}))]_Z$$

Označme teraz $A = [g \circ f]_{ZX}$ a $B = [g]_{ZY}[f]_{YX}$. Pre všetky $\vec{v} \in V$ je $A[\vec{v}]_X = B[\vec{v}]_X$. Špeciálne pre $\vec{v} = \vec{x}_i$ (kde $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$) máme $[\vec{x}_i]_X = \vec{e}_i$. Súčin matice A s i-tym stĺpcom $\vec{e}_i$ je i-ty stĺpec matice A. Teda A a B majú rovnaký i-ty stĺpec pre všetky $i = 1, \ldots, n$, a teda sú to rovnaké matice. □

Príklad 2.2. Pozrime sa najprv na rovinné rotácie z príkladu 3. Zrejme pre dva uhly θ, ϕ platí $l_\phi \circ l_\theta = l_{\phi+\theta}$ (najprv otočiť doľava o θ a potom ešte o ϕ je to isté, ako otočiť doľava o $\theta + \phi$). Podľa Vety 1.3 musí pre každú bázu X platiť $[l_\phi \circ l_\theta]_{XX} = [l_\phi]_{XX}[l_\theta]_{XX}$. Z toho dostávame maticovú rovnosť:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Po vynásobení matíc napravo dostaneme rovnosť matíc:

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\sin\theta + \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}$$

Porovnaním prvkov v týchto maticiach dostaneme známe súčtové vzorce:

$$\cos(\phi+\theta) = \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta$$
$$\sin(\phi+\theta) = \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta$$

Príklad 2.3. Pozrime sa opäť na projekciu P_q z príkladu 6. Zrejme platí $P_q \circ P_q = P_q$. (Pretože $P_q(\vec{v})$ je už na priamke q a teda jeho pravouhlou projekciou na priamku q je on sám). Z tohto pozorovania a z Vety 13.3 máme:

$$[P_q \circ P_q]_{XX} = [P_q]_{XX}[P_q]_{XX}$$

Zároveň $[P_q \circ P_q]_{XX} = [P_q]_{XX}$. Teda musí platiť:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

A to je naozaj pravda, ako sa môžete sami presvedčiť.

3 Inverzné lineárne zobrazenie a inverzná matica

Veta 3.1. *Nech V, U sú konečnorozmerné vektorové priestory, nech f je bijektívne lineárne zobrazenie $f : V \to U$. Nech X je báza V, Y je báza U. Potom matica $[f^{-1}]_{XY}$ je inverzná k matici $[f]_{YX}$.*

Dôkaz. Máme dokázať, že $[f^{-1}]_{XY}[f]_{YX} = I$ a $[f]_{YX}[f^{-1}]_{XY} = I$. Počítajme:

$$[f^{-1}]_{XY}[f]_{YX} \overset{\text{Veta 13.3}}{=} [f^{-1} \circ f]_{XX} = [\mathrm{id}]_{XX} = I$$

Druhá rovnosť sa dokáže rovnako. □

Príklad 3.2. Zrejme inverzné zobrazenie k rovinnej rotácii doľava o θ je rovinná rotácia doprava o θ (alebo, čo je to isté, rotácia doľava o záporný uhol $-\theta$). Teda $l_\theta^{-1} = l_{-\theta}$. Podľa Vety 13.4 má byť matica $[l_{-\theta}]_{XX}$ inverzná k matici $[l_\theta]_{XX}$. Počítajme:

$$[l_{-\theta}]_{XX} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Skúška:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Príklad 3.3. Pozrime sa opäť na lineárne zobrazenie $ev_{1,2,3}$ z príkladu 5. Presvedčte sa, že je bijektívne (aký význam má, že je bijektívne?). Inverzné zobrazenie k $ev_{1,2,3} : \mathbb{R}^2[x] \to \mathbb{R}^3$ je zobrazenie, ktoré priraďuje usporiadaným trojiciam reálnych čísel polynómy. Má vlastnosti:

$$ev_{1,2,3}^{-1} \circ ev_{1,2,3} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2[x]}$$

$$ev_{1,2,3} \circ ev_{1,2,3}^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$$

To znamená, že ak vezmeme ľubovoľné $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, tak $ev_{1,2,3}^{-1}(y_1, y_2, y_3)$ je polynóm p, pre ktorý platí:

$$ev_{1,2,3}(p) = (y_1, y_2, y_3)$$

Ale $ev_{1,2,3}(p) = (p(1), p(2), p(3))$, a teda $p(1) = y_1$, $p(2) = y_2$, $p(3) = y_3$.

Ak si teda zvolíme povedzme trojicu $(1, 2, 5)$, potom $ev_{1,2,3}^{-1}(1, 2, 5)$ musí byť polynóm $p \in \mathbb{R}^2[x]$, taký, že $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 5$.

Maticu inverznú k $[ev_{1,2,3}]_{EX}$ môžeme vypočítať:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$$

A podľa Vety 13.4 je to matica $[ev_{1,2,3}^{-1}]_{XE}$. Ak vezmeme teraz napríklad vektor $\vec{v} = (1,2,5)^T$, potom

$$[ev_{1,2,3}^{-1}(\vec{v})]_X = [ev_{1,2,3}^{-1}]_{XE}[\vec{v}]_E$$

čo sú súradnice polynómu $p(x) = x^2 - 2x + 2$ v báze X. A naozaj máme $p(1) = 1, p(2) = 2, p(3) = 5$ pre tento polynóm p.