Lineárna algebra 1
(texty k prednáškam)

Gejza Jenča

Verzia 1

1 Množiny

Definícia 1.1 (Množina)**.** *Množina* je súbor objektov, nazývaných *prvkami množiny.* Fakt, že objekt x je prvkom množiny A značíme takto:

$$x \in A$$

Ak objekt x nepatrí do množiny A, značíme to takto:

$$x \notin A$$

Množiny môžu byť konečné alebo nekonečné. Konečnú množinu môžeme špecifikovať prostým vymenovaním jej prvkov takto:

$$A = \{1, \text{slon}, \{2\}\}$$

Platí $1 \in A$, slon $\in A$. Zrejme $4 \notin A$ mačka $\notin A$.

Otázka. Platí $2 \in A$? Odpoveď: nie.

Ale ak si niekto myslí, že áno, musí si myslieť, že objekt 2 je rovný niektorému z objektov, ktoré patria do množiny A. Pravdepodobne si myslí, že

$$2 = \{2\}$$

To však nie je pravda: 2 nie je množina a $\{2\}$ je množina a teda tieto dva objekty nemôžu byť rovné, pretože rovnaké objekty majú rovnaké vlastnosti. Príkladom nekonečnej množiny je množina všetkých prirodzených čísel

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Všimnime si, že $0 \in \mathbb{N}$; je možné, že na iných prednáškach to bude konvencia $0 \notin \mathbb{N}$. Ďalšie množiny čísel, ktoré poznáte zo strednej školy, sú:

- množina všetkých celých čísiel $\mathbb{Z}$

- množina všetkých racionálnych čísel $\mathbb{Q}$
- množina všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$.

Definícia 1.2 (Prázdna množina)**.** *Prázdna množina* je množina, ktorá neobsahuje žiadny objekt. Prázdnu množinu značíme $\emptyset$.

Definícia 1.3 (Podmnožina)**.** Hovoríme, že množina B je *podmnožinou* množiny A, ak pre každý prvok x množiny B platí, že $x \in A$. Fakt, že B je podmnožinou A značíme

$$B \subseteq A$$

Ak B nie je podmnožinou A, značíme $B \nsubseteq A$. Vzťah $B \subseteq A$ sa volá *inklúzia.*

Príklady:

- $A = \{1, \text{slon}, \{2\}\}$, potom
- $\{1, \text{slon}\} \subseteq A$
- $\{1, \{2\}\} \subseteq A$
- $\{1, 3\} \nsubseteq A$, lebo $3 \in \{1, 3\}$ a zároveň $3 \notin A$
- $\{2\} \nsubseteq A$, lebo $2 \in \{2\}$ a zároveň $2 \notin A$

V jazyku formálnej logiky $B \subseteq A$ zapisujeme takto:

$$\underbrace{\overbrace{(\forall x)}^{\text{všeobecný kvantifikátor}}}_{\text{pre všetky x platí, že}} \quad \overbrace{\underbrace{x \in B}_{\text{ak x patrí do B}} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{\text{potom x patrí do A.}}}^{\text{implikácia}}$$

Iný spôsob čítania tej istej formuly je tento:

$$\underbrace{(\forall x)}_{\text{Pre všetky } x \text{ platí, že}} \quad \underbrace{x \in B \Rightarrow x \in A}_{\text{z } x \text{ patrí do } B \text{ vyplýva, že } x \text{ patrí do } A}$$

Iný spôsob zápisu $B \subseteq A$ je tento

$$\underbrace{(\forall x \in B)}_{\text{Pre všetky } x \text{ z množiny } B \text{ platí,}} \quad \underbrace{x \in A}_{\text{že } x \text{ patrí do } A.}$$

Tieto symbolické zápisy sú logicky ekvivalentné, teda vyjadrujú rovnaký vzťah medzi množinami B a A. V tejto chvíli je dobré uvedomiť si, že prázdna množina je podmnožinou každej množiny. Naozaj, ak by pre nejakú množinu A platilo $\emptyset \nsubseteq A$, musel by existovať prvok x množiny $\emptyset$ taký, že x nepatrí do A. Inak povedané, malo by platiť $x \in \emptyset$ a zároveň $x \notin A$; to však nie je možné, pretože $x \in \emptyset$ neplatí pre žiadny objekt x. Pri úvahách o vzťahu "byť podmnožinou"sme vlastne používali toto tvrdenie:

Veta 1.4. *Nech A, B sú množiny. Potom $B \nsubseteq A$ práve vtedy, keď existuje $x \in B$ také, že $x \notin A$.*

V jazyku formálnej logiky:

$$\underbrace{(\exists x)}_{\text{Existuje také } x,} \quad \underbrace{x \in B \quad \wedge \quad x \notin A}_{\text{že } x \text{ patrí do } B \text{ a zároveň } x \text{ nepatrí do } A.}$$

Kedy sú dve množiny rovné? Keďže množina je súbor objektov do nej patriacich, dve množiny sú rovné, ak obsahujú rovnaké prvky:

$A = B$ práve vtedy, keď pre všetky objekty x platí, že $x \in A$ práve vtedy, keď $x \in B$.

Táto vlastnosť množín sa volá extenzionalita. Z toho vyplýva nasledujúce tvrdenie:

Veta 1.5. *Nech A, B sú množiny. Potom $A = B$ práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$.*

Jeden zo spôsobov ako môžeme špecifikovať množinu je vydelenie z nejakej množiny pomocou výroku o prvkoch:

$$\{x \in A \mid \text{výrok o } x\}$$

Príklady:

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = \langle 2, \infty)$

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} = (3, \infty)$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \text{ a zároveň } x < 100\} = \langle 4, 100)$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ a zároveň } x < 2\} = \emptyset$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 2\} = \emptyset$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid (n+1) \text{ je prvočíslo}\} = \{1, 2, 4, 6, ...\}$

Podobný (ale významovo odlišný) zápis je

$$\{\text{výraz závislý od } x \mid x \in A\}$$

Príklady:

- $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$
- $\{\sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle -1, 1 \rangle$

1.1 Kardinalita množiny

Počet prvkov konečnej množiny A sa volá kardinalita A a označujeme $|A|$.
Príklady:

- $|\{1, 7, 8\}| = 3$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\{4'4, 2, 3\}\}| = 1$
- $|\{\emptyset\}| = 1$

1.2 Operácie na množinách

Ak A, B sú množiny môžeme z nich vytvoriť inú množinu pomocou množinových operácií.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ alebo } x \in B\} \quad \text{(zjednotenie množín A, B)}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ a zároveň } x \in B\} \quad \text{(prienik množín A, B)}$$
$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\} \quad \text{(rozdiel množín)}$$

Príklady:

- $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$

- $\langle 2,4\rangle \cap \langle 3,5\rangle = \langle 3,4\rangle$
- $\langle 2,3) \cap \langle 3,5\rangle = \emptyset$
- $\langle 2,4\rangle \cup \langle 3,5\rangle = \langle 2,5\rangle$
- $A \cap A = A \cup A = A$, pre všetky množiny A
- $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$
- $\langle 2,4\rangle \setminus \langle 3,5\rangle = \langle 2,3)$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} =$ iracionálne čísla
- $A \setminus A = \emptyset$, pre všetky množiny A

1.3 Kartézsky/Priamy súčin množín

Ak a, b sú nejaké objekty, môžeme z nich vytvoriť objekt zvaný usporiadaná dvojica (a, b). Dôležité je, že $(a, b) \neq (b, a)$, ak $a \neq b$. V dvojici (a, b), a je prvá zložka a b je druhá zložka.

Definícia 1.6 (Kartézsky súčin)**.** Nech A, B sú množiny. *Kartézsky súčin* $A \times B$ je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$. Symbolicky: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Príklady:

- $\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$
- $\{1\} \times \{\square, \oplus\} = \{(1,\square),(1,\oplus)\}$
- $\{3,4\} \times \{1,2\} = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$

Vidíme, že vo všeobecnosti nie je pravda, že $A \times B = B \times A$.

Otázka. Čo je $A \times \emptyset$?

$$A \times \emptyset = \{(a, b) \mid a \in A, b \in \emptyset\}$$

Taký objekt b neexistuje! Teda $A \times \emptyset = \emptyset$ pre každú množinu A. Nič nám nebráni vytvoriť kartézsky súčin $A \times A$: ak $A = \{1,2\}$, potom

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

Toto sa označuje aj A^2 – druhá kartézska mocnina. Analogicky ako pojem usporiadanej dvojice môžeme vytvoriť pojem usporiadanej trojice, štvorice, n-tice, $n \in \mathbb{N}$.

$$(a, b, c) \quad (a, b, c, d) \quad (a_1, \ldots, a_n)$$

Neformálne budeme na prednáškach používať neexistujúce slovenské slovo „tica” ak budem chcieť vyjadriť, že niečo je dvojica, trojica, ..., ale pritom mi je jedno koľko zložiek má. Toto je pokusom anglického slova *tuple*. Pojem kartézskeho súčinu dvoch množín môžeme rozšíriť analogicky na viac množín:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$
$$A \times B \times C \times D = \{(a, b, c, d) \mid a \in A, b \in B, c \in C, d \in D\}$$

Na tomto predmete nás budú najmä zaujímať tieto množiny:

- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}$ (všetky usporiadané n-tice reálnych čísel)

Pr. $(1, \sqrt{2}, -\pi, 17) \in \mathbb{R}^4$.

2 Zobrazenia

Zobrazenia sa často nazývajú funkcie. Obe slová znamenajú to isté, obvykle však funkcia zobrazuje do čísel ($\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$). Ktoré slovo sa použije je otázkou konvencie v danej časti matematiky.

Definícia 2.1 (zobrazenie)**.** Nech A, B sú množiny. *Zobrazenie* f z A do B je predpis, ktorý každému prvku A priradí nejaký prvok B. Zapisujeme

$$f \colon A \to B.$$

A je *definičný obor*, B je *koobor*.

To znamená, že ak chceme špecifikovať nejaké zobrazenie f, musíme špecifikovať tri veci:

1. Z ktorej množiny sa zobrazuje (definičný obor).
2. Do ktorej množiny sa zobrazuje (koobor).
3. Predpis, ktorý nám určí, pre každý prvok definičného oboru ktorý prvok sa mu má zobraziť.

Predpis môže byť daný rôzne. Napríklad ak $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ môžeme predpis niekedy poznamenať pomocou vzorca, napr.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Ale A, B vôbec nemusia byť množiny čísel, a predpis nemusí byť vzorec!

Príklad 2.2. Niekedy A nemá číselnú povahu, B áno.

- $A =$ všetky adresy v meste
- $B = \mathbb{R}$

Zobrazenie $d\colon A \to B$ môže byť

$d(x) =$ najkratšia vzdialenosť pri ceste peši medzi adresou x a SvF STU, v minútach.

Napríklad: d(moje bydlisko) $= 80$, d(Bernolákova 1) $= 8$.

Príklad 2.3. $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $g(n) = n^2 + 1$. Toto nám hovorí, že g zobrazuje z množiny všetkých prirodzených čísel do množiny všetkých prirodzených čísel. Predpis je teda v tomto prípade daný vzorcom, ktorý nám umožňuje počítať hodnoty zobrazenia pre konkrétne prvky definičného oboru g (t.j. prirodzené čísla) dosadením a výpočtom.

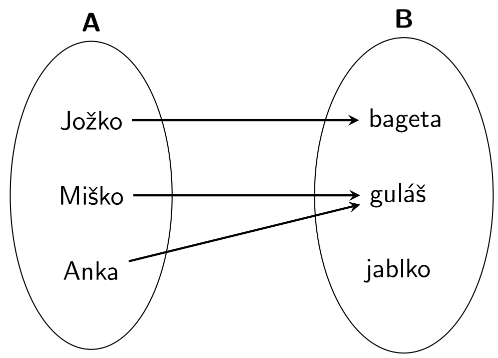
$$g(2) = 2^2 + 1 = 5$$
$$g(7) = 7^2 + 1 = 50$$

$g(-1) =?$ Toto neexistuje, pretože $-1 \notin \mathbb{N}$ a nie je to teda prvok definičného oboru g.

Príklad 2.4. Nech $A = \{$Jožko, Miško$\}$ a $B = \{$bageta, guláš, jablko$\}$. Nech $j\colon A \to B$ je zobrazenie "najobľúbenejšie jedlo". V tomto prípade je definičný konečná množina. Preto nám stačí napísať hodnotu zobrazenia j v každom prvku množiny A:

- f(Jožko) $=$ bageta
- f(Miško) $=$ guláš
- f(Janka) $=$ guláš

Zobrazenie j môžeme aj nakresliť:



Iný spôsob špecifikácie predpisu zobrazenia je napríklad tabuľkou:

x	Jožko	Miško	Anka
$j(x)$	bageta	guláš	guláš

Tu sa, samozrejme, nesmú prvky v hornom riadku opakovať.

Príklad 2.5. Nech H je množina všetkých ľudí (aj z minulosti). $\sigma\colon H \to H$ je zobrazenie dané predpisom $\sigma(x) =$ otec človeka x.

Príklad 2.6. S - množina všetkých občanov SR. $\eta\colon S \to \mathbb{N}$ dané predpisom $\eta(x) =$ rodné číslo.

Príklad 2.7. $B = \{$bageta, guláš, jablko$\}$. Nech $k\colon B \to \mathbb{R}$ je zobrazenie "koľko kalórií". Keďže B je konečná, stačí nám napísať: k(guláš) $= 677$, k(bageta) $= 1148$, k(jablko) $= 301.4$.

Príklad 2.8. Poznáme nejaký príklad zobrazenia typu $A \times A \to A$, kde A je nejaká množina? Samozrejme, už od prvého ročníka základnej školy. Vezmime $A = \mathbb{N}$; sformulovať nejaký predpis pre zobrazenie $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ znamená povedať, ako vyrobiť z usporiadanej dvojice prirodzených čísel prirodzené číslo. Napríklad môžeme definovať zobrazenie $+\colon A \times A \to A$ predpisom

$$+(x, y) = \text{súčet čísel } x, y$$

máme teda $+(1, 3) = 4$, $+(4, 4) = 8$. Samozrejme, zaužívaný spôsob zapisovania hodnoty zobrazenia $+$ v nejakej dvojici $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je iný, nepíšeme obvykle $+(a, b)$, ale znak zobrazenia dáme medzi prvú a druhú zložku usporiadanej dvojice, $a + b$. To je však detail, ktorý nič nemení na dôležitom náhľade, že sčítanie je zobrazením z nejakej množiny do inej množiny.

Predošlý príklad je poučný v tom, že ukazuje ako jazyk postavený na pojmoch „množina” a „zobrazenie” umožňuje popisovať matematické pojmy. Tento jazyk sa začal účinne používať na popis existujúcej a objavovanie novej matematiky v 20. storočí a dnes si už matematiku bez množín ani nevieme predstaviť.

Jeden zo spôsobov zapisovania zobrazení je „po prípadoch”, ako v nasledujúcich dvoch príkladoch.

Príklad 2.9. *Absolútna hodnota* je zobrazenie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané predpisom

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Príklad 2.10. *Znamienková funkcia* alebo *signum* je zobrazenie $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané predpisom

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Voči Definícii 2.1 by bolo možné vzniesť (z istého hľadiska oprávnene) námietku o nepresnosti; používa nejasné slová ako "priradí", "predpis". Námietku je možné vyriešiť takto:

Definícia 2.11 (formálna definícia zobrazenia)**.** Nech A, B sú množiny. *Zobrazenie* f z A do B je množina $F \subseteq A \times B$ taká, že pre každé $a \in A$ existuje práve jedno $b \in B$ také, že $(a, b) \in F$.

$(a, b) \in f$ v zmysle Definície 2.11 potom znamená $f(a) = b$ v zmysle Definície 2.1. Aj keď je Definícia 2.11 presnejšia, v skutočnosti ju bežne nikto nepoužíva, ani nikto bežne nerozmýšľa o zobrazeniach ako o množinách usporiadaných dvojíc. Niekedy však takéto presné uvažovanie nutne potrebujeme, a preto je dobré vedieť o existencii tohto pohľadu na pojem zobrazenia.

Definícia 2.12 (Obor hodnôt)**.** Nech $f\colon A \to B$ je zobrazenie. *Obor hodnôt* je množina

$$\mathcal{H}(f) = \{f(a) | a \in A\}$$

Čiže máme $b \in \mathcal{H}(f)$ práve vtedy, keď existuje $a \in A$ také, že $f(a) = b$. Je dôležité si uvedomiť rozdiel medzi oborom hodnôt a kooborom. Ak napíšeme napríklad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané predpisom $f(x) = x^2 - x + 1$. Koobor je $\mathbb{R}$, ale $\mathcal{H}(f) = \langle \frac{3}{4}, \infty \rangle$. Určiť obor hodnôt zobrazenia môže byť teda ťažké a pre prácu so zobrazením to nemusí byť nutné. Čo potrebujeme o zobrazení nutne vedieť je koobor, nie obor hodnôt. Našťastie, keď sa pred našim duševným zrakom zjaví nejaké zobrazenie, vždy je vybavené kooborom. Trochu mätúce môže byť, že koobor sa často neuvádza explicitne a funkcia sa stotožňuje s predpisom, toto sa bežne bude diať na predmete *Matematická analýza.* V tomto (a iných) smere sa konvencie v matematických oblastiach líšia. Pre profesionálneho matematika však spravidla nie je problém sa odlišným konvenciám v prípade potreby prispôsobiť, ak potrebuje pracovať s matematickou literatúrou a podobne.

Definícia 2.13 (identické zobrazenie)**.** Nech A je množina. *Identické zobrazenie* (na A) je zobrazenie $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ dané predpisom $\mathrm{id}_A(a) = a$, pre každý prvok $a \in A$.

Definícia 2.14 (rovnosť zobrazení)**.** Nech A, B, C, D sú množiny, nech $f\colon A \to B$ a $g\colon C \to D$. Hovoríme, že f je *rovné* g, ak $A = C$, $B = D$ a pre všetky $x \in A = C$ platí, že $f(x) = g(x)$.

Na lineárnej algebre budeme ohľadom pojmu rovnosti zobrazení trochu striktnejší ako na iných predmetoch, budeme aplikovať definíciu 2.14 veľmi presne. Ilustruje to nasledujúci príklad.

Príklad 2.15.

A) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $f(k) = \sqrt{k^2}$
$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $g(k) = |k|$
Platí $f = g$.

B) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $f(k) = \sqrt{k^2}$
$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $g(k) = |k|$
Platí $f = g$.

C) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dané $f(x) = |x|$
$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dané $g(x) = x$
Platí $f \neq g$ (pretože pre $x = -1$ je $f(-1) = 1$, ale $g(-1) = -1$).

D) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané $f(x) = x + 1$
$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dané $g(x) = x + 1$
Platí $f \neq g$ (pretože majú rôzne koobory).

E) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dané $f(x) = x + 1$
$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dané $g(x) = x + 1$
Platí $f \neq g$ (pretože majú rôzne definičné obory).

Uvažujme teraz nejaké zobrazenie $f\colon A \to B$ a množinu podmnožinu jeho definičného oboru $X \subseteq A$. *Zúženie f na X* je zobrazenie $f\big|_X\colon X \to B$ dané predpisom

$$(f\big|_X)(x) = f(x)$$

Napríklad v E) Príkladu 2.15 máme $f \neq g$, ale pritom $g = f\big|_{\mathbb{N}}$.

2.1 Skladanie zobrazení

Najdôležitejšou vecou na zobrazeniach je to, že sa dajú skladať.

Definícia 2.16. Nech A, B, C sú množiny. Nech $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$. Potom *zložené zobrazenie* $g \circ f$ je zobrazenie $g \circ f\colon A \to C$ dané predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \tag{1}$$

Vidíme, že nemôžeme ľubovoľné zobrazenie zložiť s ľubovoľným iným. Aby sme mohli vytvoriť zobrazenie $g \circ f$, musí platiť, že koobor f je rovnaká množina ako definičný obor g. Ďalšia pasca je v tom, že hodnota zobrazenia $g \circ f$ vzniká tak, že najskôr aplikujeme f a potom aplikujeme g. Keďže píšeme a čítame zľava doprava, vnímame v zápise $g \circ f$ písmeno g ako prvé a f ako druhé. Autor tohto textu používa pre zapamätanie si pravidla o skladaní fakt, že predpis (1) má písmená f, g v rovnakom poradí na oboch stranách rovnosti.

Príklad 2.17. Zobrazenie "koľko kalórií má najobľúbenejšie jedlo": Nech $j\colon A \to B$ je zobrazenie "najobľúbenejšie jedlo" a $k\colon B \to \mathbb{R}$ je zobrazenie "koľko kalórií". Potom $k \circ j\colon A \to \mathbb{R}$ je zobrazenie "koľko kalórií má najobľúbenejšie jedlo". Napríklad: $(k \circ j)(\text{Miško}) = k(j(\text{Miško})) = k(\text{guláš}) = 677$.

Príklad 2.18. Nech $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dané $g(x) = x^2 + 1$ a $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dané $h(x) = 2x$.

- $g \circ h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2x) = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1$
- $h \circ g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$

Vidíme, že $g \circ h \neq h \circ g$, lebo napríklad $(g \circ h)(1) = 5$, ale $(h \circ g)(1) = 4$.

Príklad 2.19. Čo je zobrazenie $\sigma \circ \sigma \colon H \to H$, ak $\sigma(x)$ je otec človeka x? Odpoveď: $\sigma(\sigma(x))$ je otcov otec, t.j. starý otec z otcovej strany.

Zavedieme teraz označenie, ktoré v základných kurzoch matematiky nie je príliš časté, ale autor tohto textu ho považuje za užitočné. Pre dve množiny A, B budeme ako $\mathbf{Set}(A, B)$ označovať množinu všetkých zobrazení z množiny A do množiny B. Okrem už zavedených množinových operácií tým dostávame nový spôsob, ako z dvoch množín vyrobiť novú množinu. Na skladanie zobrazení sa môžeme pozerať ako na zobrazenie: pomocou skladania vytvárame z usporiadanej dvojice zobrazení (g, f), kde $g \in \mathbf{Set}(B, C)$ a $f \in \mathbf{Set}(A, B)$ zobrazenie $g \circ f \in \mathbf{Set}(A, C)$, alebo inak povedané, pre každú trojicu množín A, B, C máme zobrazenie typu

$$\circ \colon \mathbf{Set}(B, C) \times \mathbf{Set}(A, B) \to \mathbf{Set}(A, C)$$

Identické zobrazenia sa vo vzťahu na skladanie správajú špeciálne.

Veta 2.20 (neutralita id vzhľadom na skladanie)**.** *Nech A, B sú množiny, nech $f \colon A \to B$ je zobrazenie. Potom platí $f \circ \mathrm{id}_A = f$ a $\mathrm{id}_B \circ f = f$.*

Dôkaz. Máme dokázať, že dve zobrazenia sa rovnajú. Čo je rovnosť dvoch zobrazení, o tom hovorí Definícia 1.9. Pre $f \circ \mathrm{id}_A = f$: Zobrazenie id_A je typu $A \to A$, zobrazenie f je typu $A \to B$. Teda $f \circ \mathrm{id}_A$ existuje a je typu $A \to B$. Majú rovnaký definičný obor aj koobor. Pre všetky $x \in A$ platí:

$$(f \circ \mathrm{id}_A)(x) = f(\mathrm{id}_A(x)) = f(x)$$

Teda $f \circ \mathrm{id}_A = f$ v zmysle Definície 1.9. Dôkaz rovnosti $\mathrm{id}_B \circ f = f$ prenechávame čitateľovi ako cvičenie. □

Veta 2.21 (Asociativita skladania zobrazeni)**.** *Nech A, B, C, D sú množiny, nech $f \colon A \to B$, $g \colon B \to C$, $h \colon C \to D$ sú zobrazenia. Potom $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

Dôkaz. Obe zobrazenia, $h \circ (g \circ f)$ aj $(h \circ g) \circ f$, majú definičný obor A a koobor D. Pre všetky $x \in A$:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$
$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

Keďže obe zobrazenia majú rovnaký definičný obor, koobor a vo všetkých bodoch nadobúdajú rovnakú hodnotu, rovnajú sa. □

Veta 2.21 znamená, že vo výrazoch typu $h \circ g \circ f$ nemusíme písať zátvorky, aby sme určili ktoré skladanie treba urobiť prvé.

3 Injekcie, surjekcie a bijekcie

V tejto časti si zavedieme dôležité vlastnosti zobrazení. Skladanie zobrazení môžeme chápať ako nejaký typ binárnej operácie, pre ktoré sa identické zobrazenie chová neutrálne, viď vety 2.21 a 2.20. Z dostatočného odstupu a zanedbávajúc isté rozdiely môžeme $g \circ f$ vidieť ako analógiu súčinu reálnych čísel a id ako analógiu [1] jednotky:

$$\begin{array}{r|c} a.b & g \circ f \\ a.1 = a & g \circ \mathrm{id} = g \\ 1.b = b & \mathrm{id} \circ f = f \end{array}$$

Pre násobenie čísel vieme ku každému číslu $a \neq 0$ nájsť nejaké číslo a^{-1} také, že $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$, voláme ho prevrátená hodnota a. Prirodzene vzniká otázka, či a kedy vieme nájsť k nejakému zobrazeniu f analógiu prevrátenej hodnoty čísla, to znamená zobrazenie g z vlastnosťou $g \circ f = \mathrm{id}$ alebo $f \circ g = \mathrm{id}$. Skúmanie tohto problému vedie k pojmom injekcie, surjekcie a bijekcie. Situácia je však trochu komplikovanejšia ako v prípade čísel, pretože zobrazenia sú trochu zložitejšie veci ako čísla.

Definícia 3.1 (injekcia)**.** Nech A, B sú množiny. Zobrazeniu $f\colon A \to B$ hovoríme, *injekcia/injektívne* ak pre každé dva prvky $a_1, a_2 \in A$ také, že $a_1 \neq a_2$ platí, že $f(a_1) \neq f(a_2)$.

V jazyku formálnej logiky

$$(\forall a_1, a_2 \in A) \quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \tag{2}$$

Príklad 3.2. Zobrazenie $j\colon A \to B$ v príklade 2.4 nie je injektívne. Platí totiž

$$\text{Miško} \neq \text{Janka} \qquad j(\text{Miško}) = j(\text{Janka})$$

Dokázali sme teda negáciu formuly (2) (pre $f = j$, samozrejme), to znamená

$$(\exists a_1, a_2 \in A) \quad a_1 \neq a_2 \wedge j(a_1) = j(a_2)$$

Všimnite si, že neinjektívnosť j je vidno z obrázku.

Logicky ekvivalentná forma (2) je

$$(\forall a_1, a_2 \in A) \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2 \tag{3}$$

ktorá vznikne transpozíciou implikácie:

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \quad \text{je to isté ako} \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

[1] Táto analógia sa dá spresniť, takže z istého abstraktného hľadiska sa dajú súčin a skladanie naozaj pochopiť ako dve inštancie jediného abstraktného pojmu.

Definícia 3.3 (surjekcia)**.** Nech A, B sú množiny. Zobrazeniu $f\colon A \to B$ hovoríme, *surjekcia/surjektívne* ak pre každý prvok $b \in B$ existuje nejaký prvok $a \in A$ taký, že $f(a) = b$.

Príklad 3.4. Zobrazenie $j\colon A \to B$ z príkladu 2.4 nie je surjektívne. Na prvok jablko kooboru B zobrazenia j sa žiadny prvok definičného oboru A zobrazenia j nezobrazí. Inými slovami, pre všetky prvky $a \in A$ platí, že $j(a) \neq$ jablko.

V tejto chvíli je užitočné uvedomiť si, že zobrazenie $f\colon A \to B$ je surjektívne práve vtedy, keď koobor B je rovný oboru hodnôt f, $B = \mathcal{H}(f)$. To znamená, že z každého zobrazenia vieme spraviť surjektívne zobrazenie, ak zúžime jeho koobor: tieto dve zobrazenia

$$
\begin{aligned}
f_1 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & f_1(x) &= x^2 + 1 \\
f_2 &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & &\langle 1, \infty)
\end{aligned}
$$

majú rovnaký definičný obor a predpis (ale nie koobor, teda sú to rôzne funkcie). Pritom f_1 nie je surjektívne, ale f_2 je surjekcia.

Definícia 3.5 (bijekcia)**.** Nech A, B sú množiny. Zobrazeniu $f\colon A \to B$ hovoríme, *bijekcia/bijektívne* ak pre každý prvok $b \in B$ existuje nejaký prvok $a \in A$ taký, že $f(a) = b$.

3.1 Ľavé a pravé inverzné zobrazenie

Definície injekcie a surjekcie vyzerajú veľmi odlišne. V tejto časti textu sa naučíme, že sú prepojené istou skrytou symetriou, ktorá sa týka toho, ako sa správajú vzhľadom na skladanie (operácia $\circ$) a identické zobrazenia.

Pre každé dve množiny A, B máme tieto dve množiny:

- Zobrazenia z A do B, teda množina $\mathbf{Set}(A, B)$.
- Zobrazenia z B do A, teda množina $\mathbf{Set}(B, A)$.

Ak $f \in \mathbf{Set}(A, B)$ (alebo $f\colon A \to B$, to je to isté), a $g \in \mathbf{Set}(B, A)$, vieme z nich vytvoriť dve zložené zobrazenia, $g \circ f$ a $f \circ g$. Pritom $f \circ g\colon B \to B$ a $g \circ f\colon A \to A$, alebo inak,

$$
f \circ g \in \mathbf{Set}(B, B) \quad g \circ f \in \mathbf{Set}(A, A),
$$

zobrazujú teda B (respektíve A) do seba samej. V množine $\mathbf{Set}(B, B)$ máme jeden význačný prvok, a to identické zobrazenie id_B; podobne samozrejme $\mathrm{id}_A \in \mathbf{Set}(A, A)$. Z týchto úvah nám akosi samovoľne vzniknú nasledujúce dva pojmy.

Definícia 3.6 (zľava/sprava inverzné zobrazenie)**.** Nech A, B sú množiny, nech $f\colon A \to B$. Hovoríme, že zobrazenie $g\colon B \to A$ je

- *zľava inverzné k zobrazeniu* f ak platí, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$
- *sprava inverzné k zobrazeniu* f ak platí, že $f \circ g = \mathrm{id}_B$

Všimnime si, že f je zľava inverzné ku g práve vtedy, keď g je sprava inverzné ku f (rozmyslite si to).

Veta 3.7. *Nech A, B sú množiny, nech $f\colon A \to B$. Potom*

(a) f je injekcia práve vtedy, ak existuje aspoň jedno zľava inverzné zobrazenie k f.

(b) f je surjekcia práve vtedy, ak existuje aspoň jedno sprava inverzné zobrazenie k f.

Dôkaz.

(a) Nech f je injekcia. Chceme nájsť nejaké zobrazenie $g\colon B \to A$, pričom g má byť také, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$, teda pre všetky $a \in A$ má platiť $(g \circ f)(a) = \mathrm{id}_A(a)$, to znamená $g(f(a)) = a$. Keďže f je injekcia, pre $b \in \mathcal{H}(f)$ existuje práve jedno $a \in A$ také, že $f(a) = b$. Naozaj, ak by sme mali nejaké $a_1, a_2 \in A$ také, že $a_1 \neq a_2$ a zároveň $f(a_1) = f(a_2)$, f by nebola injekcia. Pre $b \in B$, zvoľme $g(b)$ tak, že pre $b \in \mathcal{H}(f)$ máme $g(b) = a$, kde $f(a) = b$ a pre $b \in B \setminus \mathcal{H}(f)$ zvolíme $g(b)$ ľubovoľne. Máme potom $g(f(a)) = a$, pre každé $a \in A$.

Predpokladajme teraz, že existuje $g\colon B \to A$ také, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Použijeme charakterizáciu injekcie (3). Nech $a_1, a_2 \in A$ sú také, že $f(a_1) = f(a_2)$. Z tohto predpokladu máme dokázať, že $a_1 = a_2$. Podľa predpokladu zrejme $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, čo znamená

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \tag{*}$$

Ale my sme predpokladali, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$, teda (*) znamená, že $\mathrm{id}_A(a_1) = \mathrm{id}_A(a_2)$ a z toho máme ihneď $a_1 = a_2$

(b) Dôkaz vynechávame.

□

3.2 Inverzné zobrazenie

Definícia 3.8 (inverzné zobrazenie)**.** Nech A, B sú množiny, nech $f\colon A \to B$. Hovoríme, že zobrazenie $g\colon B \to A$ je *inverzné* k zobrazeniu f ak je zľava inverzné k f a zároveň sprava inverzné k f.

Veta 3.9. *Nech A, B sú množiny. Potom $f\colon A \to B$ má inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia.*

Dôkaz. Z definície bijekcie, inverzného zobrazenia a vety 3.7 ihneď vidno, že ak má nejaké zobrazenie f inverzné zobrazenie, potom f je bijekcia.

Naopak, nech f je bijekcia. Podľa vety 3.7 má potom nejaké ľavé inverzné zobrazenie $g_L\colon B \to A$ a aj nejaké pravé inverzné zobrazenie $g_R\colon B \to A$. Ak dokážeme z týchto predpokladov že $g_L = g_R$, potom to je už inverzné zobrazenie k f. Použijeme elegantný trik: vezmeme výraz $g_L \circ f \circ g_R$ a zjednodušíme ho dvoma rôznymi spôsobmi:

$$g_L \circ f \circ g_R = (g_L \circ f) \circ g_R = \mathrm{id}_A \circ g_R = g_R$$
$$g_L \circ f \circ g_R = g_L \circ (f \circ g_R) = g_L \circ \mathrm{id}_B = g_L.$$

Ale z toho zrejme vyplýva, že $g_L = g_R$. □

Všimnime si, že v dôkaze predošlej vety sme ukázali aj čosi navyše: pokiaľ f je bijekcia, nielenže má nejaké inverzné zobrazenie, ale toto inverzné zobrazenie je dokonca presne jedno. Z toho vyplýva, že môžeme zaviesť operáciu „invertuj zobrazenie"

$$f \mapsto f^{-1}$$

ktorá bude definovaná iba ak f je bijekcia. Zobrazenie f^{-1} je (vždy jediné) inverzné zobrazenie k zobrazeniu f.

4 Sústavy lineárnych rovníc

Definícia 4.1 (Lineárna rovnica nad $\mathbb{R}$)**.** Lineárna rovnica o n neznámych je rovnica tvaru

$$(*) \quad a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = c$$

kde $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Koeficienty $a_1, \ldots, a_n, c$ sú dané prvky $\mathbb{R}$. Riešenie tejto rovnice je taká n-tica $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, že po dosadení do (*) je vzniknutý výrok pravdivý.

Príklad 4.2. Daná je rovnica $3x_1 + 2x_2 + (-1)x_3 = 7$, ktorú zvyčajne zapisujeme ako

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7$$

Niektoré jej riešenia sú napríklad $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0)$ alebo $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, -7)$. Táto rovnica má nekonečne veľa riešení.

Definícia 4.3 (Sústava lineárnych rovníc)**.** Sústava m lineárnych rovníc o n neznámych nad $\mathbb{R}$ je usporiadaná m-tica rovníc o n neznámych nad $\mathbb{R}$, kde $m, n \geq 1$. Neznáme sú rovnaké pre všetky rovnice.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & c_m
\end{array} \tag{4}$$

Riešenie sústavy je taká usporiadaná n-tica $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ktorá je riešením každej rovnice v sústave.

Príklad 4.4. Uvažujme sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -5 \end{aligned}$$

Ideme sa pokúsiť nájsť jej riešenie. Pripočítajme prvú rovnicu k druhej.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ 4x_1 - 0 &= -4 \end{aligned}$$

Vynásobme druhú rovnicu číslom $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - 0 &= -1 \end{aligned}$$

Teraz už vieme, že $x_1 = -1$, môžeme dosadiť túto hodnotu do prvej rovnice a vyjadriť x_2. Ale môžeme postupovať aj ďalej a napríklad pripočítať -3-násobok druhej rovnice k prvej. V každom prípade, jediným riešením je $x_1 = -1$ a $x_2 = 4$.

Čo sme robili? Menili sme sústavu tak, aby zmenená sústava mala rovnakú množinu riešení. Transformujeme teda v každom problém na iný, jednoduchší. Ale najviac dôležité pri tom je to, že vždy tak, aby sa množina všetkých riešení nezmenila. Aké úpravy môžeme robiť so sústavou lineárnych rovníc tak, aby sa nezmenila množina všetkých riešení?

Môžeme napríklad:

1. vymeniť dve rovnice v sústave medzi sebou
2. vynásobiť rovnicu nenulovou konštantou (prečo nenulovou?)
3. pripočítať ľubovoľný násobok jednej rovnice k druhej rovnici

4.1 Matice: základná terminológia a označenia

Matica je typu $m \times n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ je obdĺžniková tabuľka reálnych čísel, ktorá má m riadkov a n stĺpcov. Matice označujeme veľkými písmenami. Všeobecnú maticu A typicky zapisujeme napríklad takto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Konvencia je, že prvý index v a_{ij} je číslo riadku a druhý je číslo stĺpca. Všimnime si, že (5) obsahuje v zásade iba informácie, že

- Matica sa volá A,
- jej prvky sú značené a_{ij},
- jej typ je $m \times n$.

Toto budeme niekedy zapisovať krátko ako

$$A = \left(\ a_{ij}\ \right)_{m \times n}$$

4.2 Zápis sústavy lineárnych rovníc pomocou matice

S maticami budeme na lineárnej algebre pracovať často a budeme opakovane nachádzať ich nové významy. Ale v tejto chvíli, pre začiatok, použijeme maticu jednoducho pre zápis systému lineárnych rovníc. Zapíšeme zo sústavy (4) len to podstatné: koeficienty (a_ij) a pravú stranu (c_i):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

Zvislú stranu použijeme na oddelenie pravej strany. Je to čisto vizuálna pomôcka, nie je naozaj súčasťou matice. Túto maticu nazývame *rozšírená matica sústavy*, koeficienty (a_{ij}) tvoria *maticu sústavy* a stĺpec (c_i) je *pravá strana.*

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}}^{\text{matica sústavy}} & \overbrace{\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{matrix}}^{\text{pravá strana}} \end{array}\right)}_{\text{rozšírená matica sústavy}}$$

Teda sústava m lineárnych rovníc o n neznámych sa bude zapisovať pomocou matice typu $m \times (n+1)$.

V konkrétnom príklade to vyzerá takto. Sústava

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 &= 14 \\ -x_1 \qquad + 4x_3 &= -7 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

sa zapíše maticou

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} 3 & 2 & -7 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}}^{\text{matica sústavy}} & \overbrace{\begin{matrix} -14 \\ -7 \\ 0 \end{matrix}}^{\text{pravá strana}} \end{array}\right)}_{\text{rozšírená matica sústavy}}$$

4.3 Elementárne riadkové operácie

Elementárna riadková operácia je zmena matice na inú maticu jedného z nasledujúcich typov.

1. Výmena riadkov k, l:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Pripočítanie α-násobku riadku k k riadku l, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \alpha \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} + \alpha a_{k1} & \dots & a_{ln} + \alpha a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

3. Vynásobenie riadku k číslom $\beta \in \mathbb{R}$, kde $\beta \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \longleftarrow \beta \sim \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta a_{k1} & \dots & \beta a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definícia 4.5. Hovoríme, že dve matice A, B rovnakého typu sú *riadkovo ekvivalentné*, ak existuje postupnosť elementárnych riadkových operácií, ktorou sa dá A upraviť na B.

Elementárne riadkové operácie sú pre nás v tejto chvíli dôležité kvôli nasledujúcej vete.

Veta 4.6. *Dve sústavy m lineárnych rovníc o n neznámych majú rovnakú množinu riešení práve vtedy keď sú ich rozšírené matice riadkovo ekvivalentné.*

Preto pri riešení sústavy lineárnych rovníc môžeme použiť nasledujúcu stratégiu:

(Krok 1) Napíšeme si rozšírenú maticu sústavy.

(Krok 2) Pomocou elementárnych riadkových operácií maticu upravíme na jednoduchší tvar.

(Krok 3) Nájdeme riešenie tej sústavy, ktorá zodpovedá tomuto jednoduchšiemu tvaru.

Veta 4.6 nám hovorí, že tento postup je korektný.

Otázka je, čo budeme považovať za jednoduchší tvar; bude to takzvaný *stupňovitý tvar*, ktorý je naznačený na nasledujúcom obrázku.

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \bullet & ? & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & ? \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \bullet & ? & \cdots & \cdots & \cdots & ? \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & ? \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

V tomto obrázku $\bullet$ znamená nenulový prvok (rôzny od 0), a prvok ? môže byť ľubovoľný.

Definícia 4.7 (vedúci prvok riadku)**.** Ak A je matica typu $m \times n$, potom vedúci prvok i-teho riadku matice je najľavejší nenulový prvok toho riadku: $a_{ij} \neq 0$ a zároveň $a_{il} = 0$ pre všetky $1 \leq l < j$.

Definícia 4.8. Hovoríme, že matica A typu $m \times n$ je v stupňovitom tvare, ak

(a) Ak $r_i(A) \neq (0, \ldots, 0)$ a zároveň $r_k(A) = (0, \ldots, 0)$, potom $i < k$.

Každý nenulový riadok je nad každým nulovým riadkom.

(b) Ak a_{ij} je vedúci prvok i-teho riadku a a_{kl} je vedúci prvok k-teho riadku a $i < k$ potom aj $j < l$.

Vedúci prvok vyššieho riadku leží viac vľavo ako vedúci prvok nižšieho riadku.

Príklad 4.9.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{nie je v stupňovitom tvare (prečo?)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{je v stupňovitom tvare}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{nie je v stupňovitom tvare (prečo?)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{je v stupňovitom tvare}$$

4.4 Gaussova eliminačná metóda

Gaussova eliminačná metóda je spôsob riešenia sústavy lineárnych rovníc. Má dve fázy.

1. Najprv upravíme rozšírenú maticu sústavy na stupňovitý tvar.
2. Potom nájdeme riešenie sústavy zodpovedajúcej stupňovitému tvaru pomocou spätného dosádzania.

Príklad 4.10. Riešme Gaussovou eliminačnou metódou sústavu

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= -8 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Zapíšeme si rozšírenú maticu sústavy:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Cieľom je upraviť ju na stupňovitý tvar, pomocou elementárnych riadkových operácií. V prvom kroku vymeníme prvý a druhý riadok.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

V druhom kroku pripočítame 1-násobok riadku 1 k riadku 3.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) 1 \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Teraz máme niekoľko možností, napríklad pripočítať $\frac{1}{2}$-násobok riadku 2 k riadku 3, aby sme dostali 0 na pozícii $(3, 2)$. To ale vedie ku zlomkom, preto urobíme radšej dva iné kroky:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right) 2 \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -2 \end{array}\right)$$

Dostaneme maticu v stupňovitom tvare. Táto zodpovedá sústave

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 11x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Každú takúto sústavu zodpovedajúcu matici v stupňovitom tvare vieme vyriešiť spätným dosádzaním.

Krok 1: Výpočet x_3

Z poslednej rovnice (3) priamo vyjadríme x_3:

$$\begin{aligned} 11x_3 &= -2 \\ x_3 &= -\frac{2}{11} \end{aligned}$$

Krok 2: Výpočet x_2

Dosadíme hodnotu x_3 do druhej rovnice (2) a vyriešime pre x_2:

$$\begin{aligned} -x_2 + 5x_3 &= 3 \\ -x_2 + 5\left(-\frac{2}{11}\right) &= 3 \\ -x_2 - \frac{10}{11} &= 3 \\ -x_2 &= 3 + \frac{10}{11} \\ -x_2 &= \frac{33}{11} + \frac{10}{11} \\ -x_2 &= \frac{43}{11} \\ x_2 &= -\frac{43}{11} \end{aligned}$$

Krok 3: Výpočet x_1

Dosadíme známe hodnoty x_2 a x_3 do prvej rovnice (1) a vyriešime pre x_1:

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0\\
x_1 - 2\left(-\frac{43}{11}\right) + 3\left(-\frac{2}{11}\right) &= 0\\
x_1 + \frac{86}{11} - \frac{6}{11} &= 0\\
x_1 + \frac{80}{11} &= 0\\
x_1 &= -\frac{80}{11}
\end{aligned}$$

Záver

Množina všetkých riešení sústavy je

$$\left\{\left(-\frac{80}{11}, -\frac{43}{11}, -\frac{2}{11}\right)\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Príklad 4.11. Teraz si ukážeme, že sústava lineárnych rovníc môže mať aj nekonečnú množinu riešení. Najskôr eliminácia.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}
2 & -1 & 0 & 4 & 2\\
2 & -1 & 1 & 2 & 2\\
0 & 0 & 2 & -4 & 0\\
6 & -3 & -3 & 18 & 6
\end{array}\right) -1 \sim
\left(\begin{array}{rrrr|r}
2 & -1 & 0 & 4 & 2\\
0 & 0 & 1 & -2 & 0\\
0 & 0 & 2 & -4 & 0\\
6 & -3 & -3 & 18 & 6
\end{array}\right) -3 \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}
2 & -1 & 0 & 4 & 2\\
0 & 0 & 1 & -2 & 0\\
0 & 0 & 2 & -4 & 0\\
0 & 0 & -3 & 6 & 0
\end{array}\right) -2 \sim
\left(\begin{array}{rrrr|r}
2 & -1 & 0 & 4 & 2\\
0 & 0 & 1 & -2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -3 & 6 & 0
\end{array}\right) 3 \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r}
2 & -1 & 0 & 4 & 2\\
0 & 0 & 1 & -2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

Dve z rovníc sa trivializovali, stali sa z nich rovnice

$$0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 = 0,$$

ktoré sú pravdivé pre každú usporiadanú štvoricu $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ a môžeme ich teda vynechať. Dve zostávajúce rovnice sú

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 \quad + 4x_4 &= 2\\
x_3 - 2x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Množinu všetkých riešení nájdeme opäť spätným dosádzaním, pričom niektoré premenné zvolíme ako parametre.

> Ako parametre vždy volíme premenné zodpovedajúce stĺpcom *v ktorých nie je vedúci prvku.*

Teraz sú to stĺpce 2 a 4, teda ako parametre zvolíme x_2 a x_4.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \phantom{\boxed{2}} & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

V spätnom dosádzaní použijeme parametre:

$$x_4 = s$$

$$\begin{aligned} x_3 - 2s &= 0 \\ x_3 &= 2s \end{aligned}$$

$$x_2 = t$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - t + 4s &= 2 \\ 2x_1 &= 2 + t - 4s \\ x_1 &= 1 + \frac{1}{2}t - 2s \end{aligned}$$

Množina všetkých riešení teda je

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{2}t - 2s, t, 2s, s\right) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Príklad 4.12. V poslednom príklade si ukážeme, že sústava lineárnych rovníc môže mať aj prázdnu množinu riešení.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 12 \\ 2 & 4 & 12 & -17 \\ 1 & -4 & -12 & 22 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & 8 & 24 & -41 \\ 1 & -4 & -12 & 22 \end{array}\right) -1 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & 8 & 24 & -41 \\ 0 & -2 & -6 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & 8 & 24 & -41 \end{array}\right) 4 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -6 & 12 \\ 0 & -2 & -6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Posledný riadok v matici teraz zodpovedá rovnici

$$0.x_1 + 0.x_2 + 0.x_3 = -1,$$

ale toto nie je pravda pre *žiadnu* usporiadanú trojicu $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Množina všetkých riešení je teda $\emptyset$.

5 Vektory a operácie s nimi

Sila lineárnej algebry spočíva v tom, že umožňuje viac pohľadov na rovnaký pojem. Tieto pohľady sú veľmi silne prepojené - niekedy sa medzi nimi ani nerozlišuje a plynule sa prechádza z jedného do druhého.
Vektor môže byť:

(*) množina všetkých orientovaných úsečiek v rovine/priestore, ktoré majú rovnakú veľkosť a smer.

(**) Zvoľme bod O v rovine/priestore. Vektor je orientovaná úsečka s počiatkom v tomto bode (môžeme ju stotožniť s jej druhým koncovým bodom; potom vektor = bod).

(***) Usporiadaná n-tica reálnych čísel; $n = 2$ pre rovinu a $n = 3$ pre priestor.

(****) Prvok vektorového priestoru.

Zostaneme pri výklade pojmov v rovine; zovšeobecnenie do priestoru je priamočiare.
Typografické pravidlo: Vektory budeme písať so šípkou: $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}$.

5.1 Prechody medzi definíciami

Vysvetlíme prechody medzi pohľadmi na vektor:

$$(*) \xrightarrow{\text{výber počiatku}} (**) \xrightarrow{\text{voľba súradnicových osí}} (***)$$

Všetci asi vieme, čo je úsečka; orientovaná úsečka je úsečka s vybratým krajným bodom. Keďže úsečka nenulovej dĺžky má dva krajné body, každej úsečke nenulovej dĺžky zodpovedajú dve orientované úsečky:

$$\text{A} \underset{\overrightarrow{AB}}{\bullet\!\!\longrightarrow} \text{B} \qquad \text{A} \underset{\overrightarrow{BA}}{\longleftarrow\!\!\bullet} \text{B}$$

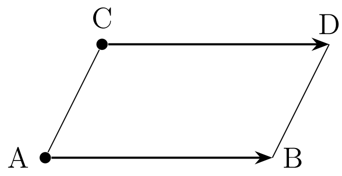
Podľa (*) je (jeden!) vektor množina všetkých (∞) orientovaných úsečiek, ktoré majú rovnakú veľkosť a smer.

- Veľkosť orientovanej úsečky je jej dĺžka.

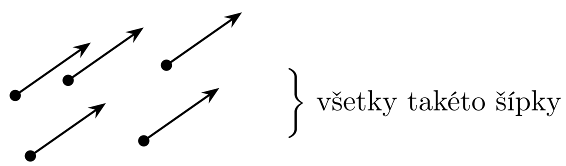
- Čo je smer, je akosi tiež jasné.

Asi najčistejší spôsob, ako na úrovni geometrie popísať veľkosť a smer je, že dve orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ majú rovnakú veľkosť a smer práve vtedy, keď platí jedna z týchto možností:

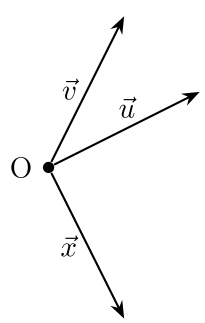
- $|AB| = |CD| = 0$ - nulový vektor.
- $A \neq B, C \neq D$ a $ABDC$ je rovnobežník s uhlopriečkami AD, BC.



Teda vektor v zmysle (*) si môžeme predstaviť takto:

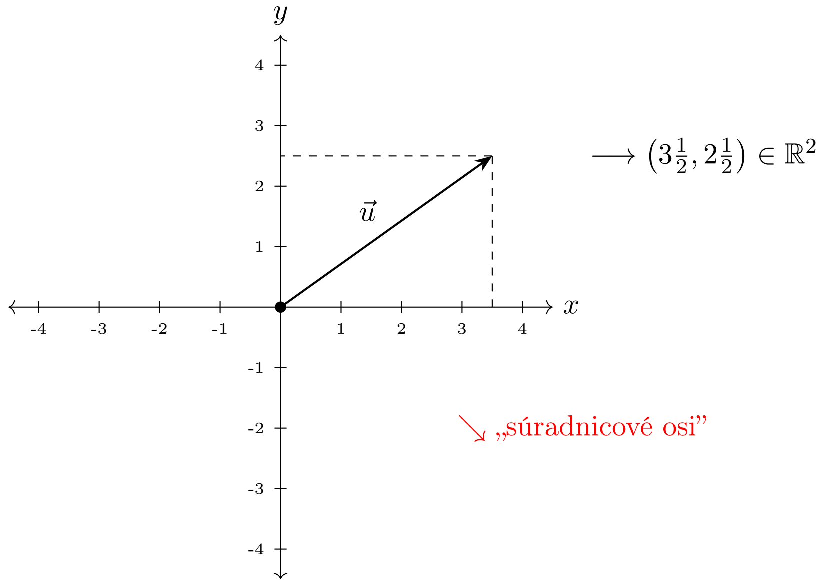


Definícia (*) je úplne v poriadku, ale manipuluje sa s tým pojmom zle, pretože každý vektor je potom nekonečná množina. Poradíme si takto: vyberieme v rovine jeden ľubovoľný bod, nazveme ho "počiatokä budeme ho označovať O. V každej množine orientovaných úsečiek, ktorá je vektorom v zmysle (*), máme práve jednu orientovanú úsečku, ktorá má počiatok v O. Túto vyberieme z vektora v zmysle (*) a máme vektor v zmysle (**).



Všimnime si, že jeden z vektorov zodpovedá orientovanej úsečke $\overrightarrow{OO}$; hovoríme mu nulový vektor a značíme ho $\vec{0}$.

Umiestnime teraz v rovine dve kópie číselnej osi: vodorovnú a zvislú tak, aby sa pretínali v bode O.



Premietnutím koncového bodu orientovanej úsečky reprezentujúcej vektor v pravom uhle na osi určíme usporiadanú dvojicu reálnych čísel a naopak, z usporiadanej dvojice reálnych čísel vieme zrejmým spôsobom dostať vektor ako orientovanú úsečku s počiatkom v bode O. Pritom nulový vektor $\vec{0}$ zodpovedá dvojici $(0, 0)$.

Voľba osí v rovine nám určuje bijekciu:

$$\text{vektory v rovine} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$

To, že sa body v rovine dajú jednoducho (a užitočne) vyjadrovať ako dvojice čísel je prekvapujúco mladý objav - pochádza z roku 1637 a vymyslel ho René Descartes. Zaujímavé je, že v tom čase sa už vyše tisíc rokov používali sférické súradnice pre určovanie polohy na Zemi pomocou rovnobežiek a poludníkov.

Zaveďme teraz terminológiu týkajúcu sa $\mathbb{R}^n$, ktorú budeme používať: Pre $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, x_i je i-ta zložka vektora $\vec{x}$.

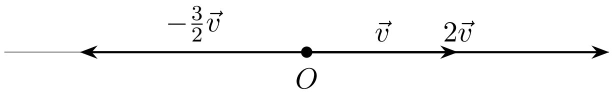
5.2 Operácie s vektormi

5.2.1 Násobenie vektora skalárom

Definícia 5.1 (Násobenie geometrického vektora skalárom)**.** Ak $\alpha \in \mathbb{R}$ (skalár) a $\vec{v}$ je vektor, potom $\alpha\vec{v}$ je vektor $|\alpha|$-krát predĺžený/skrátený.

- ak $\alpha > 0$, $(\alpha\vec{v})$ a $\vec{v}$ sú orientované rovnako,
- ak $\alpha < 0$, $(\alpha\vec{v})$ a $\vec{v}$ sú orientované opačne,
- ak $\alpha = 0$, $\alpha\vec{v} = \vec{0}$.

Príklad 5.2.



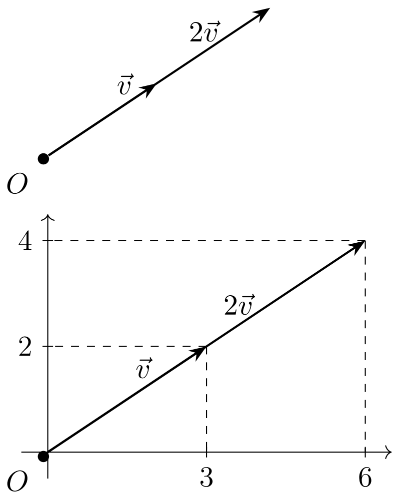
Definícia 5.3 (násobenie vektora skalarom v $\mathbb{R}^n$)**.** Nech $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a nech $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom

$$\alpha.\vec{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$$

Príklad 5.4.

$$(-2).(2, -1, 0) = (-4, 2, 0)$$
$$\sqrt{3}.(\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 2) = (3, -1, 2.\sqrt{3})$$

Ak si teraz zvolíme v rovine súradnicové osi, dostávame tým bijekciu medzi geometrickými vektormi a prvkami $\mathbb{R}^2$. Táto bijekcia zachováva násobenie skalárom, čo znamená, že



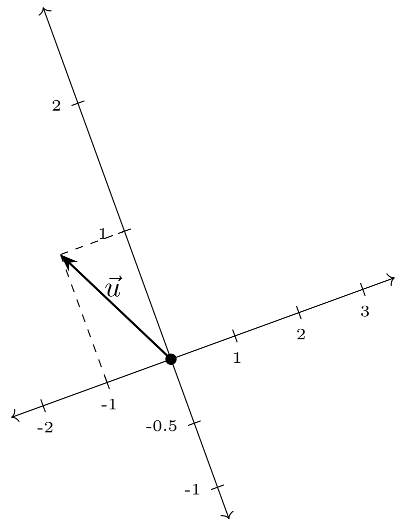
Geometria

Voľba osí

$2.(3, 2) = (6, 4)$ Algebra

Vidíme, že operácii škálovania (násobenie $\alpha \in \mathbb{R}$) (geometrická operácia) zodpovedá vynásobenie usporiadanej n-tice skalárom α vo všetkých zložkách n-tice.

Je dôležité si teraz uvedomiť, že korešpondencia medzi vektormi v geometrickom zmysle a usporiadanými n-ticami závisí na voľbe osí, osi môžu mať rôznu mierku a môžu byť dokonca trochu otočené.



Inou voľbou osí sa bijekcia (vektory v rovine $\leftrightarrow \mathbb{R}^2$) zmení, ale to, že škálovanie zodpovedá násobeniu skalárom po zložkách bude stále platiť.

5.2.2 Vlastnosti násobenia vektora skalárom

Pre všetky vektory $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ a $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

- $(a.b).\vec{x} = a.(b.\vec{x})$

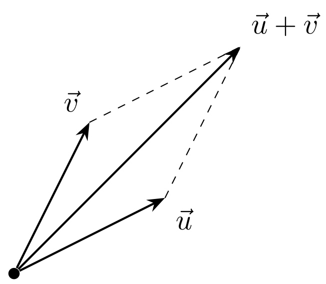
Prečo? Nech $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

$$\begin{aligned}(a.b).\vec{x} &= (a.b).(x_1, \ldots, x_n) = ((ab)x_1, \ldots, (ab)x_n) \\ &= (a(bx_1), \ldots, a(bx_n)) = a(bx_1, \ldots, bx_n) \\ &= a(b(x_1, \ldots, x_n)) = a(b.\vec{x})\end{aligned}$$

- Pre všetky $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $0\vec{x} = \vec{0}$, $1\vec{x} = \vec{x}$.

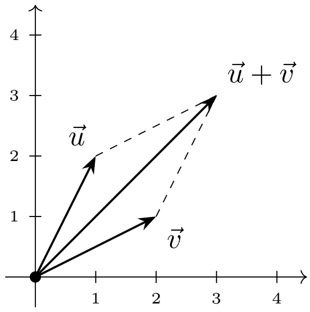
5.2.3 Sčítanie vektorov

Geometricky sa operácia sčítania vektorov zavádza rovnobežníkovým pravidlom:



Ak je jeden z vektorov $\vec{0}$, definujeme prirodzene $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

Na algebraickej strane tejto geometrickej operácii zodpovedá sčítanie po zložkách.



$\vec{u} = (1, 2), \vec{v} = (2, 1) \implies \vec{u} + \vec{v} = (1 + 2, 2 + 1) = (3, 3)$.
Opäť, ako v prípade násobenia skalárom, tento vzťah medzi geometrickou operáciou sčítania vektorov a algebraickou operáciou sčítania po zložkách nezávisí na voľbe osí.

Definícia 5.5 (Sčítanie vektorov v $\mathbb{R}^n$)**.** Nech $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

Príklad 5.6. $(1, -3, 2, 0) + (-1, 3, -1, 4) = (0, 0, 1, 4)$

5.2.4 Vlastnosti sčítania vektorov v $\mathbb{R}^n$

Pre všetky vektory $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ platia rovnosti:

- $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (asociativita)
- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (komutativita)
- $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- $\vec{x} + (-1)\vec{x} = \vec{0}$

Dôkaz sa robí priamočiaro, napr. komutativita vektorov:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) = \vec{y} + \vec{x}$$

pričom sme využili komutativitu sčítania reálnych čísel. Podobne pre ostatné rovnosti.

Násobenie skalárom a sčítanie vektorov sú navzájom prepojené pomocou distributivity.

- Pre všetky $a \in \mathbb{R}$ a $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí: $a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y}$

- Pre všetky $a, b \in \mathbb{R}$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ platí: $(a+b)\vec{x} = a\vec{x} + b\vec{x}$

Násobenie skalárom má prednosť pred sčítaním vektorov.
POZOR: Neexistuje nič také ako násobenie vektorov medzi sebou!

Nič nám nebráni zaviesť odčítanie vektorov $\vec{x} - \vec{y}$ definované ako $\vec{x} - \vec{y} := \vec{x} + (-1)\vec{y}$. Je to teda odvodená operácia zavedená pomocou sčítania a násobenia (-1). Samozrejme, ako ľahko vidieť, odčítanie vektorov prebieha tiež po zložkách:

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$$

5.3 Vektory z $\mathbb{R}^n$ ako stĺpce

Odteraz až do konca letného semestra budeme na tomto predmete stotožňovať usporiadané n-tice reálnych čísel so stĺpcovými vektormi (maticami typu $n \times 1$).

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Teda prvok množiny $\mathbb{R}^n$ môže byť zapísaný ako riadok s čiarkami, alebo ako stĺpec, oba zápisy označujú tú istú vec:

$$(1, -17, 0, \frac{8}{3}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ 0 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Budeme plynule prechádzať medzi týmito dvoma spôsobmi zápisu usporiadaných n-tíc.

5.4 Lineárne kombinácie

Definícia 5.7 (Lineárna kombinácia)**.** Nech $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n$ a $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Potom *lineárna kombinácia* vektorov $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ s koeficientami $a_1, \ldots, a_m$ je vektor

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_m\vec{v}_m$$

Príklad 5.8. $\vec{v}_1 = (1,3,4), \vec{v}_2 = (2,0,1)$ v $\mathbb{R}^3$. $a_1 = 3, a_2 = 2$. $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = 3(1,3,4) + 2(2,0,1) = (3,9,12) + (4,0,2) = (7,9,14)$.

Príklad 5.9. Zistite, či je $\vec{u} = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ lineárnou kombináciou vektorov $\vec{v}_1 = (1,-1)$ a $\vec{v}_2 = (2,5)$ a určite koeficienty tejto lineárnej kombinácie.

Hľadáme $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ také, že platí:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = \vec{u}$$

Zapíšeme problém pomocou stĺpcových vektorov:

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Podľa definície násobenia skalárom:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_2 \\ 5a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Podľa definície sčítania vektorov:

$$\begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 \\ -a_1 + 5a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dva vektory sa rovnajú, ak sa rovnajú po zložkách:

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= 1 \\ -a_1 + 5a_2 &= 2 \end{aligned}$$

Aha! Sústava lineárnych rovníc. Sčítaním oboch rovníc dostaneme:

$$7a_2 = 3 \implies a_2 = \frac{3}{7}$$

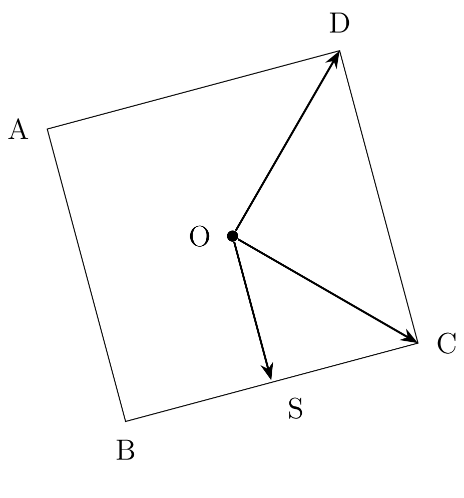
Dosadením do prvej rovnice:

$$a_1 + 2\left(\frac{3}{7}\right) = 1 \implies a_1 + \frac{6}{7} = 1 \implies a_1 = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

Koeficienty sú $a_1 = 1/7$ a $a_2 = 3/7$. Skúška:

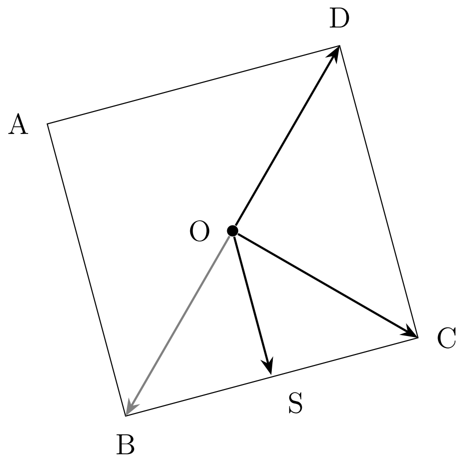
$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/7 \\ 15/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/7 \\ 14/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Príklad 5.10. Uvažujme vektory v rovine s počiatkom v bode O. Nech $ABCD$ je štvorec so stredom O.

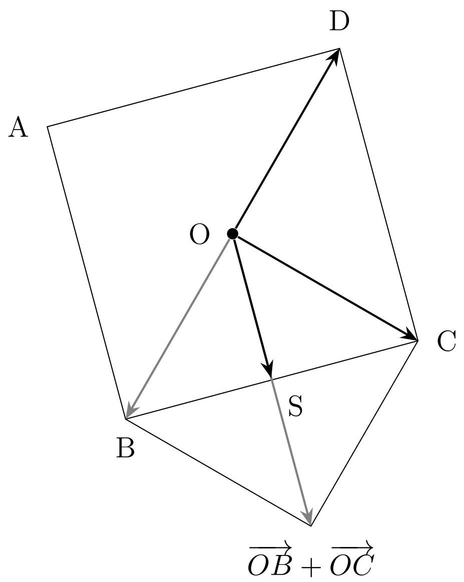


Nech S je stred strany BC. Vyjadrime vektor $\overrightarrow{OS}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$.

Najskôr si uvedomme, že $\overrightarrow{OB} = (-1).\overrightarrow{OD}$.



Vektory $\overrightarrow{OC}$ a $\overrightarrow{OB}$ sú kolmé a majú rovnakú dĺžku. Preto koncové vrcholy vektorov $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ spolu s bodom O tvoria štvorec.



Pritom bod S je stredom tohto štvorca, teda

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

a môžeme použiť pravidlá o počítaní s vektormi

$$\frac{1}{2}.(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}.\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}.((-1).\overrightarrow{OD})+\frac{1}{2}.\overrightarrow{OC} =$$
$$(\frac{1}{2}.(-1)).\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}.\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

Teda

$$\overrightarrow{OS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}, \tag{6}$$

čo je hľadaná lineárna kombinácia.

Skúste si teraz rozmyslieť, aká je poloha vektorov $-\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ v rovine. Keďže platí (6), spolu s bodmi O a S by mali ich koncové body tvoriť rovnobežník. Je to pravda?

6 Základy maticového počtu

Pripomenutie: matica A typu $m \times n$ je obdĺžniková tabuľka s m riadkami a n stĺpcami; inak povedané: šírka je n a výška je m:

$$\begin{array}{cc} & n \text{ stĺpcov} \\ & \longleftarrow \cdots \longrightarrow \\ \begin{array}{c}\uparrow \\ m \text{ riadkov} \\ \downarrow\end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Pozície v matici typu $m \times n$ sú usporiadané dvojice kladných prirodzených čísel (i, j), kde $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Inými slovami, pozície v matici sú $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$.

Číslo v matici na pozícii (i, j) referencujeme pomocou dvojitého indexu, napr. a_{ij}, b_{ij}.

Množina všetkých (reálnych) matíc typu $m \times n$ sa značí $\mathbb{R}^{m\times n}$. Podľa pravidla, "vektory sú stĺpce"stotožňujeme $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$. ... je to isté ako ...

6.1 Zápis matice pomocou predpisu

Zápis matice pomocou predpisu je tvaru

$$A_{m\times n} = (\underbrace{\quad\cdots\quad}_{\substack{\text{predpis pre prvok} \\ \text{na pozícii } i,j}})\underbrace{m \times n}_{\substack{\text{dve} \\ \text{prirodzené} \\ \text{čísla}}}$$

Predpis je obvykle výraz závislý na i, j.

Príklad 6.1. $(i+j)_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Príklad 6.2. $(i\cdot j)_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Tento zápis budeme používať mnoho razy na vyjadrenie maticových operácií.

6.2 Riadky a stĺpce matice

Nech

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

Týmto zápisom špecifikujeme typ matice A ako $m \times n$ ale aj to, že jej prvky označujeme a_{ij}.

i-ty riadok matice A je

$$r_i(A) = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

j-ty stĺpec matice A je

$$s_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

6.3 Pár druhov matíc

6.3.1 Štvorcové matice

sú matice typu $n \times n$. Ak $A = (a_{ij})_{n\times n}$ je štvorcová matica, potom (hlavná) diagonála matice je tvorená prvkami $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6.3.2 Diagonálna matica

je štvorcová matica, ktorá má všetky prvky okrem diagonálnych rovné 0.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

6.3.3 Nulová matica

je matica, ktorá má všetky prvky rovné 0. Značíme ju 0. Nemusí byť nutne štvorcová.

6.3.4 Jednotková matica

je diagonálna matica, ktorá má na diagonále všade 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Jednotkovú maticu typu $n \times n$ značíme I_n. Ak n je nešpecifikované, značíme I.

6.4 Operácie s maticami

S maticami môžeme robiť to isté ako s vektormi: môžeme ich sčítať a násobiť skalárom. Avšak na rozdiel od vektorov môžeme matice medzi sebou násobiť.

6.4.1 Súčet matíc

Nech $A = (a_{ij})_{m\times n}$ $B = (b_{ij})_{m\times n}$ sú dve matice rovnakého typu $m \times n$. Potom súčet matíc A, B je matica

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Príklad 6.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \sqrt{2} \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Sčítať môžeme iba dvojice matíc rovnakého typu.

6.4.2 Násobenie matice skalárom

Nech $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$cA = (c \cdot a_{ij})_{m\times n} \quad \text{(bodka sa nepíše vždy)}$$

Príklad 6.4.

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & -2 & 14 \end{pmatrix}$$

6.5 Vlastnosti súčtu matíc a násobenia matice skalárom

Zrejme doteraz zavedené operácie na maticiach manipulujú s maticami ako s vektormi $\mathbb{R}^{m \cdot n}$. V tomto zmysle nie sú pre nás ničím novým. Samozrejme, platia pre sčítanie a násobenie skalárom rovnaké pravidlá ako pre vektory.

Pre každú trojicu matíc A, B, C rovnakého typu a každú dvojicu $a, b \in \mathbb{R}$ platí

- $A + B = B + A$ (komutativita $+$)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (asociativita $+$)
- $A + O = O + A = A$ (nulová matica, jej typ je nutne rovnaký ako typ A; O je neutrálna vzhľadom na $+$)
- $1A = A$
- $(ab)A = a(bA)$
- $(a + b)A = aA + bA$
- $a(A + B) = aA + aB$

6.5.1 Transpozícia matice

Nech $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Potom A transponovaná (alebo transpozícia A) je matica

$$A^T = (a_{ji})_{n \times m}$$

Príklad 6.5.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Pre každú dvojicu matíc A, B rovnakého typu a $c \in \mathbb{R}$ platí

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = c(A^T)$

Symetrická matica je taká matica, že

$$A = A^T$$

Každá symetrická matica je štvorcová (prečo?).

Príklad 6.6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je symetrická matica . Je zrejmé, že každá diagonálna matica je symetrická.

6.6 Súčin matíc

Teraz ideme definovať súčin matíc; najskôr to urobíme pre špeciálny prípad matíc $1 \times n$ a $n \times 1$. To nám umožní definovať všeobecný súčin matíc.

6.6.1 Súčin riadku a stĺpca

Uvažujme teraz dve matice, jedna typu $1 \times n$ (riadok) a druhá typu $n \times 1$ (stĺpec). Ich súčin je skalár daný

$$\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i$$

Príklad 6.7.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 3 = 2 - 4 + 0 = -2$$

6.6.2 Súčin matíc (všeobecne)

Nech A je typu $m \times n$, B je typu $n \times k$. (počet stĺpcov A = počet riadkov B) Potom súčin matíc A a B je matica C typu $m \times k$ (počet riadkov A, počet stĺpcov B)
Prvok C_{ij} matice C na pozícii (i, j) je daný ako súčin i-teho riadku A a j-teho stĺpca B:

$$C_{ij} = r_i(A) \cdot s_j(B)$$

Príklad 6.8.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 & 8 \\ 1 & 7 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -11 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{(\dots)}_{\text{typ } 3\times 2} \underbrace{(\dots)}_{\text{typ } 2\times 4} = \underbrace{(\dots)}_{\text{typ } 3\times 4}$$

Prechádzame postupne cez všetky usporiadané dvojice (riadok ľavej, stĺpec pravej). Pre každú dvojicu vyrobíme ich súčin a umiestnime to číslo do výslednej matice na pozíciu (i, j).

Vlastnosti násobenia matíc

- $A(BC) = (AB)C$ (asociativita)
  Dôkaz nie je zrejmý, ale priamy dôkaz je prácny a neposkytne generický vhľad do veci, preto ho neurobíme.
- $A(B + C) = AB + AC$ (distributivita zľava)
- $(A + B)C = AC + BC$ (sprava)
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $a(AB) = (aA)B = A(aB)$ (kompatibilita násobenia matice skalárom a násobenia matíc)
- Ak A je matica typu $m \times n$ potom
  $$I_m A = A \quad AI_n = A$$
  kde I_m, I_n sú jednotkové matice typu $m \times m$ resp. $n \times n$
- Čo sa týka násobenia nulovou maticou,
  $$0A = 0 \quad A0 = 0$$
  kde 0 označuje nulové matice správneho typu.

POZOR! Operácia násobenia matíc **nie je komutatívna!**
Vôbec nie je pravda, že pre matice platí $AB = BA$. V prvom rade, ak existuje AB, musí byť počet stĺpcov A rovný počtu riadkov B.

A je typu $m \times n$, B je typu $n \times k$. Aby súčin BA vôbec existoval, musí byť $k = m$, ale to nie je vo všeobecnosti pravda.

Ale čo ak sú A, B štvorcové matice rovnakého typu? Potom AB aj BA existujú a majú aj rovnaký typ. Skúsme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Teda vidíme, že $AB \neq BA$ Nič menej, pre niektoré dvojice matíc platí $AB = BA$, napríklad $AO = OA = O$. Prirodzená otázka, pre ktoré dvojice štvorcových matíc rovnakého typu platí $AB = BA$ je dôležitá, ale nemá jednoduchú odpoveď.

7 Matice ako zobrazenia vektorov

Uvažujme maticu $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$; sprava ju môžeme vynásobiť vektorom (t.j. stĺpcom) typu $n \times 1$; výsledok je opäť stĺpec typu $m \times 1$ (t.j. vektor).

Príkl.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Týmto spôsobom máme s každou maticou A typu $m \times n$ asociované zobrazenie

$$[[A]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

dané predpisom $[[A]](\vec{x}) = A\vec{x}$ alebo (slovne) vynásob vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ maticou A zľava. Máme teda nejaký typ matematického objektu (zobrazenie z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$) reprezentovaný iným objektom (matica typu $m \times n$).

Cieľom tohto textu je preskúmať väzbu medzi maticami a zobrazeniami, ktoré reprezentujú. Teraz uvedieme niekoľko matíc a popíšeme zobrazenia, ktoré reprezentujú. Ak to budeme vedieť, sformulujeme aj význam toho zobrazenia - geometrický alebo iný.

Príklad 7.1 (Nulové matice)**.** Uvažujme nulovú maticu typu $m \times n$. Aké zobrazenie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ táto matica reprezentuje? Počítajme:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^{m\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^m}$$

$\in \mathbb{R}^{m\times n}$ $\quad \in \mathbb{R}^n$ $\quad \in \mathbb{R}^m$

Vidíme teda, že nulová matica reprezentuje zobrazenie z $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ktoré zobrazí každý vektor z $\mathbb{R}^n$ na prvok $\vec{0} = (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$, t.j. konštantné zobrazenie s hodnotou $\vec{0}$. Asi nikoho neprekvapí, že toto zobrazenie sa značí O.

Príklad 7.2 (Jednotkové matice a ich skalárne násobky)**.** Spomeňme si, že jednotková matica I_n je diagonálna matica typu $n\times n$, ktorá má na diagonále samé 1. Preskúmajme, aké zobrazenie reprezentuje:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{I_n\in\mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^n}$$

Vidíme teda, že $I_n\vec{x} = \vec{x}$ pre všetky vektory $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ a teda I_n reprezentuje identické zobrazenie $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$:

$$[[I_n]] = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Príklad 7.3. Pozrime sa teraz na trochu všeobecnejší prípad; nech D_α je diagonálna matica typu $n \times n$, ktorá má na diagonále tú istú konštantu $\alpha \in \mathbb{R}$. Určme, aké zobrazenie takáto matica reprezentuje.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}}_{D_\alpha \in \mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n} = \alpha\vec{x}$$

(násobenie vektora sklárom)

Teda (symbolicky)

$$[[D_\alpha]](\vec{x}) = \alpha\vec{x},$$

pre všetky $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Všimnime si, že (keďže $D_0 = 0$ a $D_1 = I_n$) toto dostávame spätne ako špeciálne prípady $\alpha = 0, \alpha = 1$:

$$[[0]](\vec{x}) = [[D_0]](\vec{x}) = 0\vec{x} = \vec{0}$$

$$[[I_n]](\vec{x}) = [[D_1]](\vec{x}) = 1\vec{x} = \vec{x} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(\vec{x})$$

Príklad 7.4 (Súčty a priemery)**.** Každá matica $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ (riadok) reprezentuje zobrazenie $[[A]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$. ($\downarrow$ prvky $\mathbb{R}^1$ sú usporiadané 1-ice; $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$)

Uvažujme špeciálne maticu z $\mathbb{R}^{1\times n}$ obsahujúcu iba 1; máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Zobrazenie z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^1$ reprezentované touto maticou je teda dané jednoducho ako "súčet zložiek vektora".

Podobne $(\frac{1}{n} \dots \frac{1}{n})$ reprezentuje zobrazenie "priemer zložiek vektora".

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{x_1}{n} + \dots + \frac{x_n}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Príklad 7.5 (Pravouhlá projekcia na priamku)**.** Vezmime si teraz maticu

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Táto reprezentuje zobrazenie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Predpis tohto zobrazenia rozpísaný do zložiek nájdeme ľahko

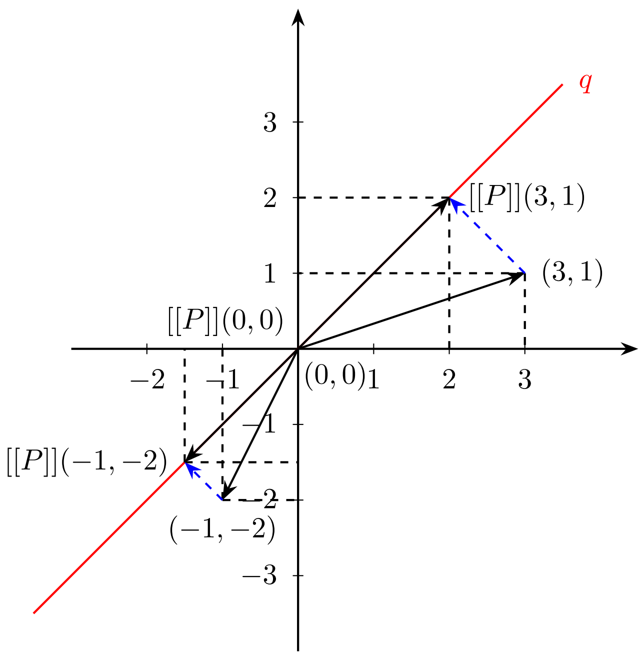
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix}$$

(obe zložky sú vždy rovnaké)

Pokúsme sa interpretovať toto zobrazenie geometricky; stotožníme vektory z $\mathbb{R}^2$ s vektormi v rovine prostredníctvom nejakých dvoch navzájom kolmých súradnicových osí a určíme polohu obrazov niekoľkých vektorov. Pre každý vektor $\vec{x}$ má $P\vec{x}$ obe zložky rovnaké. Geometricky toto znamená, že $P\vec{x}$ leží na priamke q prechádzajúcej počiatkom

$$q = \{(t, t) : t \in \mathbb{R}\} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} [[P]](3, 1) &= (2, 2) \\ [[P]](0, 0) &= (0, 0) \\ [[P]](-1, -2) &= \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$



Po vyskúšaní pár bodov dospejeme k hypotéze $[[P]](\vec{x})$ je priemet $\vec{x}$ na q v pravom uhle. Táto hypotéza je naozaj pravdivá. Je možné ju dokázať holými rukami, ale rozumnejšie je odložiť jej dôkaz na neskôr, do druhého semestra, keď budeme mať k dispozícii mocnejšie nástroje.

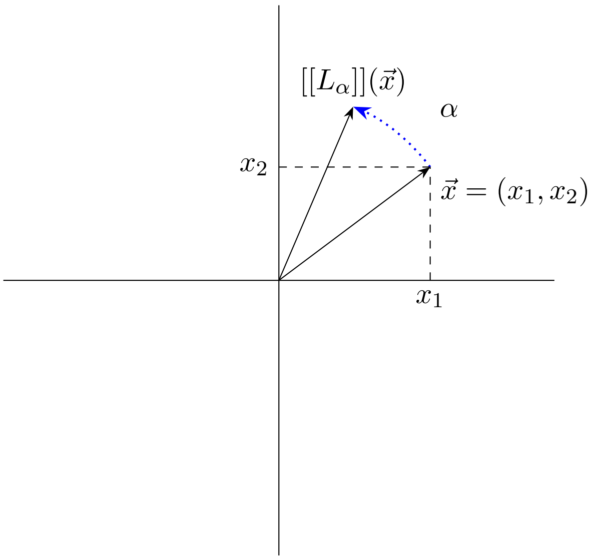
Príklad 7.6 (Rovinná rotácia)**.** Uvažujme, pre $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$ maticu

$$L_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Máme

$$[[L_\alpha]](x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Význam tohto zobrazenia je rotácia proti smeru hodinových ručičiek o uhol α vľavo okolo počiatku.

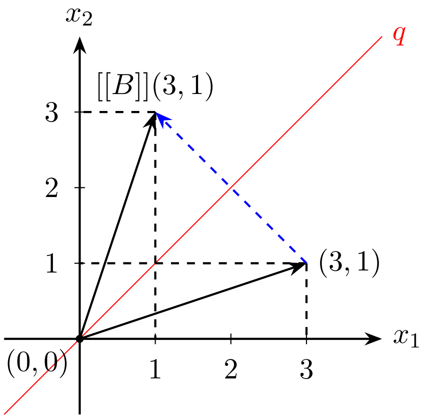


Toto nebudeme dokazovať teraz, ale dokážeme to neskôr.

Príklad 7.7 (Osová súmernosť podľa priamky)**.** Uvažujme maticu $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a počítajme pre $\vec{x} = (x_1, x_2)$ máme

$$[[B]](\vec{x}) = B\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Toto zobrazenie teda vymieňa zložky. Geometricky sa toto dá vyjadriť ako osová súmernosť podľa priamky q, ktorú už poznáme (7)



7.1 Ktoré zobrazenia sú reprezentovateľné maticami?

V tomto momente vzniká prirodzená otázka, ktoré zobrazenia $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sú reprezentovateľné maticami $R^{m\times n}$; väčšina toho, čo sa budeme učiť vo zvyšku tohto semestra sa bude týkať hľadania systematickej odpovede na túto otázku. Zatiaľ sa obmedzíme na konštatovanie, že nie všetky zobrazenia $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sú reprezentovateľné maticou. Napríklad iste platí, že $A\vec{0} = \vec{0}$ pre každú maticu A. Teda ľubovoľné zobrazenie, ktoré zobrazí vektor $\vec{0}$ na nenulový vektor iste reprezentovateľné maticou nebude.

7.2 Súčin matíc je reprezentácia zloženého zobrazenia

Veta 7.8. *Nech $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{k\times m}$. Uvažujme zobrazenia reprezentované maticami A, B.*

$$[[A]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$[[B]] : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$$

Potom zložené zobrazenie $[[B]]\circ[[A]]$ je práve zobrazenie asociované s maticou BA:

$$[[B]] \circ [[A]] = [[BA]]$$

Dôkaz. Máme dokázať, že $[[B]]\circ[[A]] = [[BA]]$. Obe tieto zobrazenia sú typu $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Nech $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
([[B]] \circ [[A]])(\vec{x}) &= [[B]]([[A]](\vec{x})) && \text{(definícia zloženého zobrazenia)}\\
&= [[B]](A\vec{x}) && \text{(predpis pre } [[A]])\\
&= B(A\vec{x}) && \text{(predpis pre } [[B]])\\
&= (BA)\vec{x} && \text{(asociativita násobenia matíc)}\\
&= [[BA]](\vec{x}) && \text{(predpis pre } [[BA]])
\end{aligned}$$

Zobrazenia $[[BA]]$ a $[[B]] \circ [[A]]$ majú rovnaký definičný obor aj koobor a každý vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ zobrazia na rovnaký vektor v $\mathbb{R}^k$. To znamená, že $[[B]] \circ [[A]] = [[BA]]$. □

Príklad 7.9. Uvažujme maticu rovinnej rotácie $[[L_{\frac{\pi}{2}}]]$:

$$[[L_{\frac{\pi}{2}}]] = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[[L_{\frac{\pi}{2}}]][[L_{\frac{\pi}{2}}]] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D_{-1}$$

Táto matica by mala reprezentovať zložené zobrazenie $L_{\frac{\pi}{2}} \circ L_{\frac{\pi}{2}}$, teda zobrazenie $L_{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} = L_\pi$. Matica D_{-1} reprezentuje zobrazenie násobenie skalárom -1. Ale vynásobiť rovinný vektor skalárom -1 je to isté ako otočiť ho o π vľavo (alebo vpravo), čiže teda $D_{-1} = L_\pi$.

Príklad 7.10. Ak vezmeme pravouhlú projekciu P na priamku q (viď vyššie), očakávame, že $[[P]][[P]] = [[P]]$, pretože $P \circ P = P$. Naozaj:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4+1/4 & 1/4+1/4 \\ 1/4+1/4 & 1/4+1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

7.3 Inverzná matica

Definícia 7.11. Nech A je štvorcová matica typu $n \times n$. Inverzná matica k A je taká matica A^{-1} typu $n \times n$, pre ktorú platí

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Pozor! Inverzná matica k štvorcovej matici nemusí existovať. Napríklad nulová matica iste nemá inverznú, prečo?

Definícia 7.12. Nech A je štvorcová matica. Ak A má inverznú, hovoríme, že A je regulárna. V opačnom prípade hovoríme, že A je singulárna.

Príklad 7.13. Ak

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

potom inverzná matica k A je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Príklad 7.14 (Inverzná rotácia)**.**

$$L_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

je inverzná matica k L_α.

Keďže A, A^{-1} sú štvorcové rovnakého typu, povedzme $A, A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, reprezentujú nejaké zobrazenia

$$[[A]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$[[A^{-1}]] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Definícia inverznej matice hovorí, že

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Keďže tieto sú matice, sú rovnaké aj nimi reprezentované zobrazenia sú rovnaké

$$[[AA^{-1}]] = [[A^{-1}A]] = [[I_n]]$$

Podľa Vety 7.8 ale

$$[[AA^{-1}]] = [[A]] \circ [[A^{-1}]]$$

$$[[A^{-1}A]] = [[A^{-1}]] \circ [[A]]$$

a vieme, že

$$[[I_n]] = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Z toho dostávame rovnosť zobrazení

$$[[A]] \circ [[A^{-1}]] = [[A^{-1}]] \circ [[A]] = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Ale to presne znamená, že $[[A^{-1}]]$ je zobrazenie inverzné k zobrazeniu $[[A]]$, viď Definícia 3.8.

Veta 7.15 (Inverzia matice je inverzia zobrazenia)**.** *Nech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulárna matica. Potom $[[A^{-1}]]$ je inverzné zobrazenie k zobrazeniu $[[A]]$. Kompaktne to môžeme zapísať ako*

$$[[A^{-1}]] = [[A]]^{-1}$$

7.4 Počítanie inverznej matice

Postup: napíšeme si vedľa seba maticu, ktorú chceme invertovať a jednotkovú maticu, oddelíme čiarou.

$$(A|I_n)$$

(typu $n\times 2n$) potom používame na obe matice (celé riadky) rovnaké elementárne riadkové operácie, ktorými sa snažíme upraviť maticu vľavo od čiary tak, aby sme tam dostali I_n. Ak sa nám to podarí, napravo od čiary máme A^{-1}.

$$(I_n|A^{-1})$$