Lineárna algebra 1
(texty k prednáškam)

Gejza Jenča

Verzia 1

1 Množiny

Definícia 1.1 (Množina)**.** *Množina* je súbor objektov, nazývaných *prvkami množiny.* Fakt, že objekt x je prvkom množiny A značíme takto:

$$x \in A$$

Ak objekt x nepatrí do množiny A, značíme to takto:

$$x \notin A$$

Množiny môžu byť konečné alebo nekonečné. Konečnú množinu môžeme špecifikovať prostým vymenovaním jej prvkov takto:

$$A = \{1, \text{slon}, \{2\}\}$$

Platí $1 \in A$, slon $\in A$. Zrejme $4 \notin A$ mačka $\notin A$.

Otázka. Platí $2 \in A$? Odpoveď: nie.

Ale ak si niekto myslí, že áno, musí si myslieť, že objekt 2 je rovný niektorému z objektov, ktoré patria do množiny A. Pravdepodobne si myslí, že

$$2 = \{2\}$$

To však nie je pravda: 2 nie je množina a $\{2\}$ je množina a teda tieto dva objekty nemôžu byť rovné, pretože rovnaké objekty majú rovnaké vlastnosti. Príkladom nekonečnej množiny je množina všetkých prirodzených čísel

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Všimnime si, že $0 \in \mathbb{N}$; je možné, že na iných prednáškach to bude konvencia $0 \notin \mathbb{N}$. Ďalšie množiny čísel, ktoré poznáte zo strednej školy, sú:

- množina všetkých celých čísiel $\mathbb{Z}$

- množina všetkých racionálnych čísel $\mathbb{Q}$
- množina všetkých reálnych čísel $\mathbb{R}$.

Definícia 1.2 (Prázdna množina)**.** *Prázdna množina* je množina, ktorá neobsahuje žiadny objekt. Prázdnu množinu značíme $\emptyset$.

Definícia 1.3 (Podmnožina)**.** Hovoríme, že množina B je *podmnožinou* množiny A, ak pre každý prvok x množiny B platí, že $x \in A$. Fakt, že B je podmnožinou A značíme

$$B \subseteq A$$

Ak B nie je podmnožinou A, značíme $B \not\subseteq A$. Vzťah $B \subseteq A$ sa volá *inklúzia.*

Príklady:

- $A = \{1, \text{slon}, \{2\}\}$, potom
- $\{1, \text{slon}\} \subseteq A$
- $\{1, \{2\}\} \subseteq A$
- $\{1, 3\} \not\subseteq A$, lebo $3 \in \{1, 3\}$ a zároveň $3 \notin A$
- $\{2\} \not\subseteq A$, lebo $2 \in \{2\}$ a zároveň $2 \notin A$

V jazyku formálnej logiky $B \subseteq A$ zapisujeme takto:

$$\underbrace{\overbrace{(\forall x)}^{\text{všeobecný kvantifikátor}}}_{\text{pre všetky x platí, že}} \quad \overbrace{\underbrace{x \in B}_{\text{ak x patrí do B}} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{\text{potom x patrí do A.}}}^{\text{implikácia}}$$

Iný spôsob čítania tej istej formuly je tento:

$$\underbrace{(\forall x)}_{\text{Pre všetky } x \text{ platí, že}} \quad \underbrace{x \in B \Rightarrow x \in A}_{\text{z } x \text{ patrí do } B \text{ vyplýva, že } x \text{ patrí do } A}$$

Iný spôsob zápisu $B \subseteq A$ je tento

$$\underbrace{(\forall x \in B)}_{\text{Pre všetky } x \text{ z množiny } B \text{ platí,}} \quad \underbrace{x \in A}_{\text{že } x \text{ patrí do } A.}$$

Tieto symbolické zápisy sú logicky ekvivalentné, teda vyjadrujú rovnaký vzťah medzi množinami B a A. V tejto chvíli je dobré uvedomiť si, že prázdna množina je podmnožinou každej množiny. Naozaj, ak by pre nejakú množinu A platilo $\emptyset \not\subseteq A$, musel by existovať prvok x množiny $\emptyset$ taký, že x nepatrí do A. Inak povedané, malo by platiť $x \in \emptyset$ a zároveň $x \notin A$; to však nie je možné, pretože $x \in \emptyset$ neplatí pre žiadny objekt x. Pri úvahách o vzťahu "byť podmnožinou"sme vlastne používali toto tvrdenie:

Veta 1.4. *Nech A, B sú množiny. Potom $B \not\subseteq A$ práve vtedy, keď existuje $x \in B$ také, že $x \notin A$.*

V jazyku formálnej logiky:

$$\underbrace{(\exists x)}_{\text{Existuje také } x,} \; \underbrace{x \in B \quad \wedge \quad x \notin A}_{\text{že } x \text{ patrí do } B \text{ a zároveň } x \text{ nepatrí do } A.}$$

Kedy sú dve množiny rovné? Keďže množina je súbor objektov do nej patriacich, dve množiny sú rovné, ak obsahujú rovnaké prvky:

$A = B$ práve vtedy, keď pre všetky objekty x platí, že $x \in A$ práve vtedy, keď $x \in B$.

Táto vlastnosť množín sa volá extenzionalita. Z toho vyplýva nasledujúce tvrdenie:

Veta 1.5. *Nech A, B sú množiny. Potom $A = B$ práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$.*

Jeden zo spôsobov ako môžeme špecifikovať množinu je vydelenie z nejakej množiny pomocou výroku o prvkoch:

$$\{x \in A \mid \text{výrok o } x\}$$

Príklady:

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\} = \langle 2, \infty)$

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\} = (3, \infty)$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \text{ a zároveň } x < 100\} = \langle 4, 100)$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ a zároveň } x < 2\} = \emptyset$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2\} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
- $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 2\} = \emptyset$
- $\{n \in \mathbb{N} \mid (n+1) \text{ je prvočíslo}\} = \{1, 2, 4, 6, ...\}$

Podobný (ale významovo odlišný) zápis je

$$\{\text{výraz závislý od } x \mid x \in A\}$$

Príklady:

- $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$
- $\{\sin(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \langle -1, 1\rangle$

1.1 Kardinalita množiny

Počet prvkov konečnej množiny A sa volá kardinalita A a označujeme $|A|$.
Príklady:

- $|\{1, 7, 8\}| = 3$
- $|\emptyset| = 0$
- $|\{\{4'4, 2, 3\}\}| = 1$
- $|\{\emptyset\}| = 1$

1.2 Operácie na množinách

Ak A, B sú množiny môžeme z nich vytvoriť inú množinu pomocou množinových operácií.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ alebo } x \in B\} \quad \text{(zjednotenie množín A, B)}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ a zároveň } x \in B\} \quad \text{(prienik množín A, B)}$$
$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\} \quad \text{(rozdiel množín)}$$

Príklady:

- $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$

- $\langle 2,4\rangle \cap \langle 3,5\rangle = \langle 3,4\rangle$
- $\langle 2,3) \cap \langle 3,5\rangle = \emptyset$
- $\langle 2,4\rangle \cup \langle 3,5\rangle = \langle 2,5\rangle$
- $A \cap A = A \cup A = A$, pre všetky množiny A
- $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$
- $\langle 2,4\rangle \setminus \langle 3,5\rangle = \langle 2,3)$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} =$ iracionálne čísla
- $A \setminus A = \emptyset$, pre všetky množiny A

1.3 Kartézsky/Priamy súčin množín

Ak a, b sú nejaké objekty, môžeme z nich vytvoriť objekt zvaný usporiadaná dvojica (a,b). Dôležité je, že $(a,b) \neq (b,a)$, ak $a \neq b$. V dvojici (a,b), a je prvá zložka a b je druhá zložka.

Definícia 1.6 (Kartézsky súčin)**.** Nech A, B sú množiny. *Kartézsky súčin* $A \times B$ je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a,b), kde $a \in A$ a $b \in B$. Symbolicky: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Príklady:

- $\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$
- $\{1\} \times \{\square, \oplus\} = \{(1,\square),(1,\oplus)\}$
- $\{3,4\} \times \{1,2\} = \{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$

Vidíme, že vo všeobecnosti nie je pravda, že $A \times B = B \times A$.

Otázka. Čo je $A \times \emptyset$?

$$A \times \emptyset = \{(a,b) \mid a \in A, b \in \emptyset\}$$

Taký objekt b neexistuje! Teda $A \times \emptyset = \emptyset$ pre každú množinu A. Nič nám nebráni vytvoriť kartézsky súčin $A \times A$: ak $A = \{1,2\}$, potom

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

Toto sa označuje aj A^2 – druhá kartézska mocnina. Analogicky ako pojem usporiadanej dvojice môžeme vytvoriť pojem usporiadanej trojice, štvorice, n-tice, $n \in \mathbb{N}$.

$$(a,b,c) \quad (a,b,c,d) \quad (a_1,\ldots,a_n)$$

Neformálne budeme na prednáškach používať neexistujúce slovenské slovo „tica" ak budem chcieť vyjadriť, že niečo je dvojica, trojica, ..., ale pritom mi je jedno koľko zložiek má. Toto je pokusom anglického slova *tuple*. Pojem kartézskeho súčinu dvoch množín môžeme rozšíriť analogicky na viac množín:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}$$
$$A \times B \times C \times D = \{(a, b, c, d) \mid a \in A, b \in B, c \in C, d \in D\}$$

Na tomto predmete nás budú najmä zaujímať tieto množiny:

- $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-krát}}$ (všetky usporiadané n-tice reálnych čísel)

Pr. $(1, \sqrt{2}, -\pi, 17) \in \mathbb{R}^4$.

2 Zobrazenia

Zobrazenia sa často nazývajú funkcie. Obe slová znamenajú to isté, obvykle však funkcia zobrazuje do čísel ($\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \ldots$). Ktoré slovo sa použije je otázkou konvencie v danej časti matematiky.

Definícia 2.1 (zobrazenie)**.** Nech A, B sú množiny. *Zobrazenie* f z A do B je predpis, ktorý každému prvku A priradí nejaký prvok B. Zapisujeme

$$f \colon A \to B.$$

A je *definičný obor*, B je *koobor*.

To znamená, že ak chceme špecifikovať nejaké zobrazenie f, musíme špecifikovať tri veci:

1. Z ktorej množiny sa zobrazuje (definičný obor).
2. Do ktorej množiny sa zobrazuje (koobor).
3. Predpis, ktorý nám určí, pre každý prvok definičného oboru ktorý prvok sa mu má zobraziť.

Predpis môže byť daný rôzne. Napríklad ak $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ môžeme predpis niekedy poznamenať pomocou vzorca, napr.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Ale A, B vôbec nemusia byť množiny čísel, a predpis nemusí byť vzorec!

Príklad 2.2. Niekedy A nemá číselnú povahu, B áno.

- $A =$ všetky adresy v meste
- $B = \mathbb{R}$

Zobrazenie $d\colon A \to B$ môže byť

$d(x) =$ najkratšia vzdialenosť pri ceste peši medzi adresou x a SvF STU, v minútach.

Napríklad: $d(\text{moje bydlisko}) = 80$, $d(\text{Bernolákova 1}) = 8$.

Príklad 2.3. $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $g(n) = n^2 + 1$. Toto nám hovorí, že g zobrazuje z množiny všetkých prirodzených čísel do množiny všetkých prirodzených čísel. Predpis je teda v tomto prípade daný vzorcom, ktorý nám umožňuje počítať hodnoty zobrazenia pre konkrétne prvky definičného oboru g (t.j. prirodzené čísla) dosadením a výpočtom.

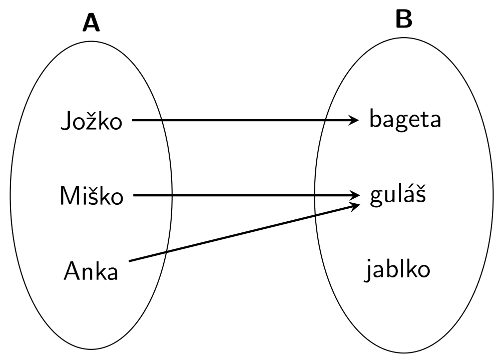
$$g(2) = 2^2 + 1 = 5$$
$$g(7) = 7^2 + 1 = 50$$

$g(-1) =?$ Toto neexistuje, pretože $-1 \notin \mathbb{N}$ a nie je to teda prvok definičného oboru g.

Príklad 2.4. Nech $A = \{\text{Jožko, Miško}\}$ a $B = \{\text{bageta, guláš, jablko}\}$. Nech $j\colon A \to B$ je zobrazenie "najobľúbenejšie jedlo". V tomto prípade je definičný konečná množina. Preto nám stačí napísať hodnotu zobrazenia j v každom prvku množiny A:

- $f(\text{Jožko}) = \text{bageta}$
- $f(\text{Miško}) = \text{guláš}$
- $f(\text{Janka}) = \text{guláš}$

Zobrazenie j môžeme aj nakresliť:



Iný spôsob špecifikácie predpisu zobrazenia je napríklad tabuľkou:

x	Jožko	Miško	Anka
$j(x)$	bageta	guláš	guláš

Tu sa, samozrejme, nesmú prvky v hornom riadku opakovať.

Príklad 2.5. Nech H je množina všetkých ľudí (aj z minulosti). $\sigma\colon H \to H$ je zobrazenie dané predpisom $\sigma(x) =$ otec človeka x.

Príklad 2.6. S - množina všetkých občanov SR. $\eta\colon S \to \mathbb{N}$ dané predpisom $\eta(x) =$ rodné číslo.

Príklad 2.7. $B = \{\text{bageta, guláš, jablko}\}$. Nech $k\colon B \to \mathbb{R}$ je zobrazenie "koľko kalórií". Keďže B je konečná, stačí nám napísať: $k(\text{guláš}) = 677$, $k(\text{bageta}) = 1148$, $k(\text{jablko}) = 301.4$.

Príklad 2.8. Poznáme nejaký príklad zobrazenia typu $A \times A \to A$, kde A je nejaká množina? Samozrejme, už od prvého ročníka základnej školy. Vezmime $A = \mathbb{N}$; sformulovať nejaký predpis pre zobrazenie $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ znamená povedať, ako vyrobiť z usporiadanej dvojice prirodzených čísel prirodzené číslo. Napríklad môžeme definovať zobrazenie $+\colon A \times A \to A$ predpisom

$$+(x, y) = \text{súčet čísel } x, y$$

máme teda $+(1, 3) = 4$, $+(4, 4) = 8$. Samozrejme, zaužívaný spôsob zapisovania hodnoty zobrazenia $+$ v nejakej dvojici $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je iný, nepíšeme obvykle $+(a, b)$, ale znak zobrazenia dáme medzi prvú a druhú zložku usporiadanej dvojice, $a + b$. To je však detail, ktorý nič nemení na dôležitom náhľade, že sčítanie je zobrazením z nejakej množiny do inej množiny.

Predošlý príklad je poučný v tom, že ukazuje ako jazyk postavený na pojmoch „množina" a „zobrazenie" umožňuje popisovať matematické pojmy. Tento jazyk sa začal účinne používať na popis existujúcej a objavovanie novej matematiky v 20. storočí a dnes si už matematiku bez množín ani nevieme predstaviť.

Voči Definícii 2.1 by bolo možné vzniesť (z istého hľadiska oprávnene) námietku o nepresnosti; používa nejasné slová ako "priradí", "predpis". Námietku je možné vyriešiť takto:

Definícia 2.9 (formálna definícia zobrazenia)**.** Nech A, B sú množiny. *Zobrazenie* f z A do B je množina $F \subseteq A \times B$ taká, že pre každé $a \in A$ existuje práve jedno $b \in B$ také, že $(a, b) \in F$.

$(a, b) \in f$ v zmysle Definície 2.9 potom znamená $f(a) = b$ v zmysle Definície 2.1. Aj keď je Definícia 2.9 presnejšia, v skutočnosti ju bežne nikto nepoužíva, ani nikto bežne nerozmýšľa o zobrazeniach ako o množinách usporiadaných dvojíc. Niekedy však takéto presné uvažovanie nutne potrebujeme, a preto je dobré vedieť o existencii tohto pohľadu na pojem zobrazenia.

Definícia 2.10 (Obor hodnôt)**.** Nech $f\colon A \to B$ je zobrazenie. *Obor hodnôt* je množina

$$\mathcal{H}(f) = \{f(a)|a \in A\}$$

Čiže máme $b \in \mathcal{H}(f)$ práve vtedy, keď existuje $a \in A$ také, že $f(a) = b$. Je dôležité si uvedomiť rozdiel medzi oborom hodnôt a kooborom. Ak napíšeme napríklad $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané predpisom $f(x) = x^2 - x + 1$. Koobor je $\mathbb{R}$, ale $\mathcal{H}(f) = \langle \frac{3}{4}, \infty \rangle$. Určiť obor hodnôt zobrazenia môže byť teda ťažké a pre prácu so zobrazením to nemusí byť nutné. Čo potrebujeme o zobrazení nutne vedieť je koobor, nie obor hodnôt. Našťastie, keď sa pred našim duševným zrakom zjaví nejaké zobrazenie, vždy je vybavené kooborom. Trochu mätúce môže byť, že koobor sa často neuvádza explicitne a funkcia sa stotožňuje s predpisom, toto sa bežne bude diať na predmete *Matematická analýza*. V tomto (a iných) smere sa konvencie v matematických oblastiach líšia. Pre profesionálneho matematika však spravidla nie je problém sa odlišným konvenciám v prípade potreby prispôsobiť, ak potrebuje pracovať s matematickou literatúrou a podobne.

Definícia 2.11 (identické zobrazenie)**.** Nech A je množina. *Identické zobrazenie* (na A) je zobrazenie $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ dané predpisom $\mathrm{id}_A(a) = a$, pre každý prvok $a \in A$.

Definícia 2.12 (rovnosť zobrazení)**.** Nech A, B, C, D sú množiny, nech $f\colon A \to B$ a $g\colon C \to D$. Hovoríme, že f je *rovné* g, ak $A = C$, $B = D$ a pre všetky $x \in A = C$ platí, že $f(x) = g(x)$.

Na lineárnej algebre budeme ohľadom pojmu rovnosti zobrazení trochu striktnejší ako na iných predmetoch, budeme aplikovať definíciu 2.12 veľmi presne. Ilustruje to nasledujúci príklad.

Príklad 2.13.

A) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $f(k) = \sqrt{k^2}$
$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $g(k) = |k|$
Platí $f = g$.

B) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $f(k) = \sqrt{k^2}$
$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané predpisom $g(k) = |k|$
Platí $f = g$.

C) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dané $f(x) = |x|$
$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dané $g(x) = x$
Platí $f \neq g$ (pretože pre $x = -1$ je $f(-1) = 1$, ale $g(-1) = -1$).

D) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dané $f(x) = x + 1$
$g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dané $g(x) = x + 1$
Platí $f \neq g$ (pretože majú rôzne koobory).

2.1 Skladanie zobrazení

Najdôležitejšou vecou na zobrazeniach je to, že sa dajú skladať.

Definícia 2.14. Nech A, B, C sú množiny. Nech $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$. Potom *zložené zobrazenie* $g \circ f$ je zobrazenie $g \circ f\colon A \to C$ dané predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \tag{1}$$

Vidíme, že nemôžeme ľubovoľné zobrazenie zložiť s ľubovoľným iným. Aby sme mohli vytvoriť zobrazenie $g \circ f$, musí platiť, že <u>koobor f je rovnaká množina ako definičný obor g</u>. Ďalšia pasca je v tom, že hodnota zobrazenia $g \circ f$ vzniká tak, že najskôr aplikujeme f a potom aplikujeme g. Keďže píšeme a čítame zľava doprava, vnímame v zápise $g \circ f$ písmeno g ako prvé a f ako druhé. Autor tohto textu používa pre zapamätanie si pravidla o skladaní fakt, že predpis (1) má písmená f, g v rovnakom poradí na oboch stranách rovnosti.

Príklad 2.15. Zobrazenie "koľko kalórií má najobľúbenejšie jedlo": Nech $j\colon A \to B$ je zobrazenie "najobľúbenejšie jedlo" a $k\colon B \to \mathbb{R}$ je zobrazenie "koľko kalórií". Potom $k \circ j\colon A \to \mathbb{R}$ je zobrazenie "koľko kalórií má najobľúbenejšie jedlo". Napríklad: $(k \circ j)(\text{Miško}) = k(j(\text{Miško})) = k(\text{guláš}) = 677$.

Príklad 2.16. Nech $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dané $g(x) = x^2 + 1$ a $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je dané $h(x) = 2x$.

- $g \circ h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(2x) = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1$
- $h \circ g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) = 2x^2 + 2$

Vidíme, že $g \circ h \neq h \circ g$, lebo napríklad $(g \circ h)(1) = 5$, ale $(h \circ g)(1) = 4$.

Príklad 2.17. Čo je zobrazenie $\sigma \circ \sigma\colon H \to H$, ak $\sigma(x)$ je otec človeka x? Odpoveď: $\sigma(\sigma(x))$ je otcov otec, t.j. starý otec z otcovej strany.

Zavedieme teraz označenie, ktoré v základných kurzoch matematiky nie je príliš časté, ale autor tohto textu ho považuje za užitočné. Pre dve množiny A, B budeme ako $\mathbf{Set}(A, B)$ označovať množinu všetkých zobrazení z množiny A do množiny B. Okrem už zavedených množinových operácií tým dostávame nový spôsob, ako z dvoch množín vyrobiť novú množinu. Na skladanie zobrazení sa môžeme pozerať ako na zobrazenie: pomocou skladania vytvárame z usporiadanej dvojice zobrazení (g, f), kde $g \in \mathbf{Set}(B, C)$ a $f \in \mathbf{Set}(A, B)$ zobrazenie $g \circ f \in \mathbf{Set}(A, C)$, alebo inak povedané, pre každú trojicu množín A, B, C máme zobrazenie typu

$$\circ\colon \mathbf{Set}(B, C) \times \mathbf{Set}(A, B) \to \mathbf{Set}(A, C)$$

Identické zobrazenia sa vo vzťahu na skladanie správajú špeciálne.

Veta 2.18 (neutralita id vzhľadom na skladanie). *Nech A, B sú množiny, nech $f\colon A \to B$ je zobrazenie. Potom platí $f \circ \mathrm{id}_A = f$ a $\mathrm{id}_B \circ f = f$.*

Dôkaz. Máme dokázať, že dve zobrazenia sa rovnajú. Čo je rovnosť dvoch zobrazení, o tom hovorí Definícia 1.9. Pre $f \circ \mathrm{id}_A = f$: Zobrazenie id_A je typu $A \to A$, zobrazenie f je typu $A \to B$. Teda $f \circ \mathrm{id}_A$ existuje a je typu $A \to B$. Majú rovnaký definičný obor aj koobor. Pre všetky $x \in A$ platí:

$$(f \circ \mathrm{id}_A)(x) = f(\mathrm{id}_A(x)) = f(x)$$

Teda $f \circ \mathrm{id}_A = f$ v zmysle Definície 1.9. Dôkaz rovnosti $\mathrm{id}_B \circ f = f$ prenechávame čitateľovi ako cvičenie. □

Veta 2.19 (Asociativita skladania zobrazeni). *Nech A, B, C, D sú množiny, nech $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$ sú zobrazenia. Potom $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

Dôkaz. Obe zobrazenia, $h \circ (g \circ f)$ aj $(h \circ g) \circ f$, majú definičný obor A a koobor D. Pre všetky $x \in A$:

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))\\ ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))\end{aligned}$$

Keďže obe zobrazenia majú rovnaký definičný obor, koobor a vo všetkých bodoch nadobúdajú rovnakú hodnotu, rovnajú sa. □

Veta 2.19 znamená, že vo výrazoch typu $h \circ g \circ f$ nemusíme písať zátvorky, aby sme určili ktoré skladanie treba urobiť prvé.

3 Injekcie, surjekcie a bijekcie

V tejto časti si zavedieme dôležité vlastnosti zobrazení. Skladanie zobrazení môžeme chápať ako nejaký typ binárnej operácie, pre ktoré sa identické zobrazenie chová neutrálne, viď vety 2.19 a 2.18. Z dostatočného odstupu a zanedbávajúc isté rozdiely môžeme $g \circ f$ vidieť ako analógiu súčinu reálnych čísel a id ako analógiu [1] jednotky:

$$\begin{array}{r|c} a.b & g \circ f \\ a.1 = a & g \circ \mathrm{id} = g \\ 1.b = b & \mathrm{id} \circ f = f \end{array}$$

Pre násobenie čísel vieme ku každému číslu $a \neq 0$ nájsť nejaké číslo a^{-1} také, že $a.a^{-1} = a^{-1}.a = 1$, voláme ho prevrátená hodnota a. Prirodzene vzniká

[1] Táto analógia sa dá spresniť, takže z istého abstraktného hľadiska sa dajú súčin a skladanie naozaj pochopiť ako dve inštancie jediného abstraktného pojmu.

otázka, či a kedy vieme nájsť k nejakému zobrazeniu f analógiu prevrátenej hodnoty čísla, to znamená zobrazenie g z vlastnosťou $g \circ f = \mathrm{id}$ alebo $f \circ g = \mathrm{id}$. Skúmanie tohto problému vedie k pojmom injekcie, surjekcie a bijekcie. Situácia je však trochu komplikovanejšia ako v prípade čísel, pretože zobrazenia sú trochu zložitejšie veci ako čísla.

Definícia 3.1 (injekcia)**.** Nech A, B sú množiny. Zobrazeniu $f\colon A \to B$ hovoríme, *injekcia/injektívne* ak pre každé dva prvky $a_1, a_2 \in A$ také, že $a_1 \neq a_2$ platí, že $f(a_1) \neq f(a_2)$.

V jazyku formálnej logiky

$$(\forall a_1, a_2 \in A) \quad a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \tag{2}$$

Príklad 3.2. Zobrazenie $j\colon A \to B$ v príklade 2.4 nie je injektívne. Platí totiž

$$\text{Miško} \neq \text{Janka} \qquad j(\text{Miško}) = j(\text{Janka})$$

Dokázali sme teda negáciu formuly (2) (pre $f = j$, samozrejme), to znamená

$$(\exists a_1, a_2 \in A) \quad a_1 \neq a_2 \wedge j(a_1) = j(a_2)$$

Všimnite si, že neinjektívnosť j je vidno z obrázku.

Logicky ekvivalentná forma (2) je

$$(\forall a_1, a_2 \in A) \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2 \tag{3}$$

ktorá vznikne transpozíciou implikácie:

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \quad \text{je to isté ako} \quad f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

Definícia 3.3 (surjekcia)**.** Nech A, B sú množiny. Zobrazeniu $f\colon A \to B$ hovoríme, *surjekcia/surjektívne* ak pre každý prvok $b \in B$ existuje nejaký prvok $a \in A$ taký, že $f(a) = b$.

Príklad 3.4. Zobrazenie $j\colon A \to B$ z príkladu 2.4 nie je surjektívne. Na prvok jablko kooboru B zobrazenia j sa žiadny prvok definičného oboru A zobrazenia j nezobrazí. Inými slovami, pre všetky prvky $a \in A$ platí, že $j(a) \neq \text{jablko}$.

V tejto chvíli je užitočné uvedomiť si, že zobrazenie $f\colon A \to B$ je surjektívne práve vtedy, keď koobor B je rovný oboru hodnôt f, $B = \mathcal{H}(f)$. To znamená, že z každého zobrazenia vieme spraviť surjektívne zobrazenie, ak zúžime jeho koobor: tieto dve zobrazenia

$$\begin{aligned} f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & f_1(x) = x^2 + 1 \\ f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & \langle 1, \infty) \end{aligned}$$

majú rovnaký definičný obor a predpis (ale nie koobor, teda sú to rôzne funkcie). Pritom f_1 nie je surjektívne, ale f_2 je surjekcia.

Definícia 3.5 (bijekcia)**.** Nech A, B sú množiny. Zobrazeniu $f\colon A \to B$ hovoríme, *bijekcia/bijektívne* ak pre každý prvok $b \in B$ existuje nejaký prvok $a \in A$ taký, že $f(a) = b$.

3.1 Ľavé a pravé inverzné zobrazenie

Definície injekcie a surjekcie vyzerajú veľmi odlišne. V tejto časti textu sa naučíme, že sú prepojené istou skrytou symetriou, ktorá sa týka toho, ako sa správajú vzhľadom na skladanie (operácia $\circ$) a identické zobrazenia.

Definícia 3.6 (zľava/sprava inverzné zobrazenie)**.** Nech A, B sú množiny, nech $f\colon A \to B$. Hovoríme, že zobrazenie $g\colon B \to A$ je

- *zľava inverzné k zobrazeniu* f ak platí, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$
- *sprava inverzné k zobrazeniu* f ak platí, že $f \circ g = \mathrm{id}_B$

Veta 3.7. *Nech A, B sú množiny, nech $f\colon A \to B$. Potom*

(a) f je injekcia práve vtedy, ak existuje aspoň jedno zľava inverzné zobrazenie k f.

(b) f je surjekcia práve vtedy, ak existuje aspoň jedno sprava inverzné zobrazenie k f.

Dôkaz.

(a) Nech f je injekcia. Chceme nájsť nejaké zobrazenie $g\colon B \to A$, pričom g má byť také, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$, teda pre všetky $a \in A$ má platiť $(g \circ f)(a) = \mathrm{id}_A(a)$, to znamená $g(f(a)) = a$. Keďže f je injekcia, pre $b \in \mathcal{H}(f)$ existuje práve jedno $a \in A$ také, že $f(a) = b$. Naozaj, ak by sme mali nejaké $a_1, a_2 \in A$ také, že $a_1 \neq a_2$ a zároveň $f(a_1) = f(a_2)$, f by nebola injekcia. Pre $b \in B$, zvoľme $g(b)$ tak, že pre $b \in \mathcal{H}(f)$ máme $g(b) = a$, kde $f(a) = b$ a pre $b \in B \setminus \mathcal{H}(f)$ zvolíme $g(b)$ ľubovoľne. Máme potom $g(f(a)) = a$, pre každé $a \in A$.

Predpokladajme teraz, že existuje $g\colon B \to A$ také, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Použijeme charakterizáciu injekcie (3). Nech $a_1, a_2 \in A$ sú také, že $f(a_1) = f(a_2)$. Z tohto predpokladu máme dokázať, že $a_1 = a_2$. Podľa predpokladu zrejme $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$, čo znamená

$$(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2) \tag{*}$$

Ale my sme predpokladali, že $g \circ f = \mathrm{id}_A$, teda (*) znamená, že $\mathrm{id}_A(a_1) = \mathrm{id}_A(a_2)$ a z toho máme ihneď $a_1 = a_2$

(b) Dôkaz vynechávame.

$\square$

3.2 Inverzné zobrazenie

Definícia 3.8 (inverzné zobrazenie)**.** Nech A, B sú množiny, nech $f\colon A \to B$. Hovoríme, že zobrazenie $g\colon B \to A$ je *inverzné* k zobrazeniu f ak je zľava inverzné k f a zároveň sprava inverzné k f.

Veta 3.9. *Nech A, B sú množiny. Potom $f\colon A \to B$ má inverzné zobrazenie práve vtedy, keď f je bijekcia.*

Dôkaz. Z definície bijekcie, inverzného zobrazenia a vety 3.7 ihneď vidno, že ak má nejaké zobrazenie f inverzné zobrazenie, potom f je bijekcia.

Naopak, nech f je bijekcia. Podľa vety 3.7 má potom nejaké ľavé inverzné zobrazenie $g_L\colon B \to A$ a aj nejaké pravé inverzné zobrazenie $g_R\colon B \to A$. Ak dokážeme z týchto predpokladov že $g_L = g_R$, potom to je už inverzné zobrazenie k f. Použijeme elegantný trik: vezmeme výraz $g_L \circ f \circ g_R$ a zjednodušíme ho dvoma rôznymi spôsobmi:

$$
\begin{aligned}
g_L \circ f \circ g_R &= (g_L \circ f) \circ g_R = \mathrm{id}_A \circ g_R = g_R \\
g_L \circ f \circ g_R &= g_L \circ (f \circ g_R) = g_L \circ \mathrm{id}_B = g_L.
\end{aligned}
$$

Ale z toho zrejme vyplýva, že $g_L = g_R$. □

Všimnime si, že v dôkaze predošlej vety sme ukázali aj čosi navyše: pokiaľ f je bijekcia, nielenže má nejaké inverzné zobrazenie, ale toto inverzné zobrazenie je dokonca presne jedno. Z toho vyplýva, že má zmysel zaviesť operáciu „invertuj zobrazenie”

$$f \mapsto f^{-1}$$

ktorá bude definovaná iba ak f je bijekcia.