Física Computacional

2020/2021

Universidade de Aveiro

Departamento de Física

Trabalho Prático 5

Problemas de valor fronteira — Valores próprios

Introdução aos Problemas 5.1 e 5.2.

Uma corda com densidade linear μ está sujeita a uma tensão T e encontra-se fixa nas duas extremidades, $x = 0$ e $x = L$. Sabemos que a corda vibra com modos normais que são soluções da equação:

$$\frac{T}{\mu}\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \omega^2 y(x) = 0$$

Resolvendo analiticamente a equação diferencial, conclui-se que os valores possíveis das frequências angulares dos modos normais de vibração são dados por,

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\ , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Estas frequências são os valores próprios deste problema.
Use $\mu = 10^{-3}$ kg/m, $L = 1$ m e $T = 10^3$ N.

Problema 5.1: Método de shooting — determinação da frequência do primeiro modo normal de vibração

Neste problema vamos encontrar a frequência do modo fundamental pelo método do shooting.

Este método integra o problema desde $x = 0$ a $x = L$ usando um dos métodos adequados a problemas de valor inicial. A equação diferencial é ordinária, de segunda ordem.
Há uma ligeira diferença em relação àquelas com que temos trabalhado: a variável independente não é o tempo, mas sim a coordenada x. Seguindo o procedimento habitual, podemos transformá-la em duas equações diferenciais de primeira ordem acopladas:

$$\begin{cases} \dfrac{dy'(x)}{dx} = -\dfrac{\omega^2\mu}{T} y(x) \\ \dfrac{dy(x)}{dx} = y'(x) \end{cases}$$

Use **o método de Euler-Cromer** que estudou anteriormente.
Para isso precisará de $y(0)$ e $y'(0)$. Embora nada seja dito sobre $y'(0)$, neste problema o valor da derivada de y em $x = 0$ é irrelevante. Se usar o dobro do valor escolhido pelo seu colega do lado, todos os seus valores y_k vão ser o dobro.
Para a implementação do método do shooting comece por,

i) integrar numericamente o sistema para a frequência do modo fundamental. Calcule ω_1, a partir da expressão para n= *1*.
Faça o plot de y(x). A partir do gráfico confirme que se trata do modo fundamental. Qual é o valor de y(L)?

ii) Repita os cáculos para ω = 2000 rad/s. Faça o plot de y(x). A partir do gráfico pode concluir se se trata de uma frequência fundamental? Porquê? Qual é o valor de y(L)?

Embora conheçamos o valor analítico da frequência do primeiro modo, vamos tomá-la como desconhecida.

● <u>O problema pode colocar-se deste modo:</u> Qual é o valor da frequência que torna y(L) igual ao do modo fundamental, ie., y(L) =0? (y(L) =0 é o nosso valor B). (consulte os slides 24 a 27 da Apresentação 5).

● Para aplicar o método tem que integrar numericamente o problema duas vezes para dois valores iniciais de ω, diferentes do valor analítico. Por exemplo 2000 e 3500 rad/s.

● Melhore o valor de omega usando o método da secante (consulte os slides 24 a 27 da Apresentação 5).

● Repita a integração e o método da secante até que o valor de $y(L)$ esteja tão perto de zero quanto o exigido por uma tolerância definida no programa.

Problema 5.2: Método das diferenças finitas — determinação da frequência de vários modos normais de vibração

Defina um conjunto de valores discretos igualmente espaçados da variável independente:

$$[x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_N] = [0, h, \dots, (k-1) \cdot h, \dots, L].$$

Substituindo a segunda derivada da equação diferencial pela sua aproximação por diferenças finitas, obtêm-se $N-2$ equações que podem ser expressas em notação matricial na forma:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = -\frac{\omega^2 \mu}{T} h^2 \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Esta é uma equação aos valores e vetores próprios da matriz $\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{y} .$$

Pode calcular os valores próprios da matriz aplicando a função do Matlab

```
eigs(A,3,'sm')
```

que terá como saída os três menores valores próprios da matriz $\boldsymbol{A}$. Determine também os vetores próprios numéricos $y(x)$, usando

```
[vec,val]=eigs(A,3,'sm').
```

Problema 5.3: **Método de diferenças finitas — perfil de temperaturas numa resistência elétrica cilíndrica**

A equação seguinte modela a distribuição de temperatura $T(r)$ numa resistência elétrica cilíndrica de raio R = 1mm quando a temperatura da superfície externa, $T(R)$, é igual à temperatura ambiente 20º C. A outra condição fronteira é $T'(0) = 0$.

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{Q}{\lambda} = 0$$

Considere que o calor produzido por unidade de tempo por unidade de volume é Q = 2.1 MW/m^3 e a condutividade térmica é λ = 0.1 WK^{-1}m^{-1}.

a) Escreva a expressão geral das $N - 2$ equações algébricas que aproximam a equação nos pontos interiores. Use diferenças finitas centradas para as derivadas.
b) Escreva as equações para as duas condições fronteira.
c) Coloque o problema na forma de uma matriz N por N.
d) Resolva o problema usando a rotina do Matlab `linsolve` e verifique qual é, e para que valor de r ocorre, a temperatura máxima.

Nota: Para resolver este exercício, consulte os slides 15 a 23 da Apresentação 5. Recomenda-se o uso da forma matricial do slide 23.