## Exercício 1:

Diga qual o método que usaria para resolver os problemas numéricos. Podem ser aplicados mais que um método. Indique apenas um e dê uma justificação sucinta.

a) $\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad , 0 \leq x \leq 1 \, , y(0) = 0 \quad , y(1) = 1$

Método de Shooting → Método utilizado para resolver problemas de valor limite, reduzindo-o para a solução de um problema de valor inicial.

b) $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad , 0 \leq x \leq 2 \, , \, 0 \leq y \leq 1 \, , T(0,y) = 0 \, , T(2,y) = 20$ e

$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0, y=1} = 0$

Método de Jacobi → É um algoritmo utilizado para determinar a solução de um sistema de equações lineares com os maiores valores absolutos em cada linha e em cada coluna pelo elemento da sua diagonal.

c) $\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{i}{2K} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \quad , \, 0 \leq z \leq 10 \quad , \, E(x,0) = \exp\left[-\frac{(x-5)^2}{4}\right]$

Método de Crank-Nicholson → É um método das diferenças finitas usado para resolver numericamente a equação do calor e equações diferenciais parciais similares. É um método incondicionalmente estável.

d) $\frac{dy}{dt} = e^{y-t} \quad , \, 0 \leq t \leq 2 \, , \, y(0) = y_0$

Método de Euler-Cromer → É uma pequena variação do método de Euler, que é mais preciso no cálculo da posição. Este método possui vantagens sobre o método de Euler principalmente para problemas com sistemas oscilatórios.

Exercício 2:

Considere o seguinte problema de valor fronteira

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + (1 - 2F^2)F = 0 \quad , \quad -\log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \leq x \leq \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \quad , \quad F\left(\mp \log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) = \varepsilon$$

a) Aproxime-o por diferenças finitas. Explicite para os pontos vizinhos da fronteira. Será possível resolver o sistema de equações que obteve usando a rotina linsolve?

Por diferenças finitas centradas:

$$\frac{F(i+1) - 2F(i) + F(i-1)}{\Delta x^2} + (1 - F^2(i))\,F(i) = 0$$

$i = 2 \rightarrow$ para pontos vizinhos

$$\frac{F(2+1) - 2F(2) + F(2-1)}{\Delta x^2} + \left(1 - F^2(2)\right) F(2) = 0$$

→ Neste caso não se pode utilizar o linsolve, porque esta funcionalidade só é aplicável em problemas lineares. Este problema é não linear.

b) Que outro método poderia usar? Descreva-o sucintamente

Poderia ser utilizado o método de shooting que consiste em:

- arbitrar um conjunto de condições iniciais;
- integrar numericamente por um método para problemas de valor inicial;
- no final da integração, verificar o quanto o resultado se afasta das condições fronteira desejadas;
- ajustar as condições iniciais de maneira a aproximarmo-nos da solução pretendida;

Repetindo o processo tantas vezes quantas forem necessárias

c) Mantendo a mesma equação diferencial, invente outras condições que tornariam o problema num de valor inicial

$F(-\log(2/\varepsilon))$

$F'(-\log(2/\varepsilon))$ = valor aleatório

## Exercício 3:

As equações diferenciais às derivadas parciais elípticas podem resolver-se por métodos de relaxação.

a) Descreva sucintamente o método de Jacobi

→ Método de Relaxação de Jacobi

$$V_{n+1}(i,j) = \frac{1}{4}\left[V_n(i+1,j) + V_n(i-1,j) + V_n(i,j+1) + V_n(i,j-1) - \Delta^2 f(i,j)\right]$$

• Algoritmo:

1- Escolhem-se valores iniciais para $V_{old}(i,j)$

2- Para todos os pontos faz-se $V_{new}(i,j) = V_{old}(i,j)$

3- Para todos os pontos (que não pertencem às fronteiras), faz-se

$$V_{new}(i,j) = \frac{1}{4}\left[V_{old}(i+1,j) + V_{old}(i-1,j) + V_{old}(i,j+1) + V_{old}(i,j-1)\right]$$

4- Calcula-se $dif = \dfrac{\sum_{i,j} |V_{new}(i,j) - V_{old}(i,j)|}{\text{número de pontos}}$

5- Se dif > tolerância, faz-se, para todos os pontos, $V_{old} = V_{new}$ e volta-se ao ponto 2

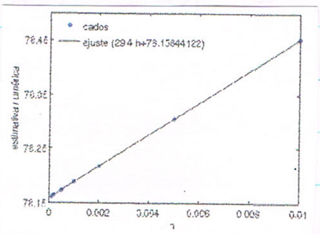
6- Convergiu. A solução numérica é $V_{new}(i,j)$

b) Quais as diferenças de algoritmo e as vantagens dos outros métodos de relaxação, ou seja, o método de Gauss-Seidel e de sobre-relaxação simultânea?

Tendo em conta o número de iterações utilizado e comparando os 2 métodos podemos concluir que o método de sobre-relaxação simultânea é muito mais rápido do que o método de Gauss-Seidel. Tem um K muito menor

## Exercício 6:

Considere o gráfico da estimativa numérica para a solução de uma dada equação diferencial versus passo h.




a) Diga, justificando, qual é a ordem do método.

A ordem do método corresponde à ordem da derivada. O método utilizado é o método de Euler-Cromer

b) Estime um valor para a solução exata

$$|y_1 - y(t)| = \text{constante} \cdot h^2$$

$N = m\,h + b$ $\qquad$ $b = \text{valor exato} = 78,16$

estimativa $\quad$ const$^{te}$ $\quad$ ↳ valor exato

c) Qual o valor de h que precisaria para atingir um erro de $10^{-5}$?

$$|y_N - y(t)| = \text{const.} \cdot h$$

$$10^{-5} = 29,4\ h \Leftrightarrow h = 3,40 \times 10^{-7}$$

d) Diga qual a diferença entre erro global e erro local. Qual a ordem dos 2 no método de Euler?

O erro local é um erro associado a cada passo do método enquanto que o erro global é o erro total de todos os passos do método.

erro global → ordem $h$

erro local → ordem $h^2$