Transformadas de Fourier discretas
Códigos espetrais para PDE

Apresentação 6 — Aula Teórica 6 (T2) ou 7 (T1)

Física Computacional

Departamento de Física
Universidade de Aveiro

25 ou 26 de março de 2019

Transformadas de Fourier

Dada uma função $f(t)$, a sua transformada de Fourier[1] (TF) pode ser dada por:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt.$$

A função $f(t)$ pode ser recuperada pela transformada de Fourier inversa:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega.$$

[1] Note que há várias convenções para as transformadas de Fourier, aqui usamos a que está adaptada à transformada de Fourier discreta usada pelo MATLAB.

Transformada de Fourier discreta

Há necessidade de determinar a transformada de Fourier de forma numérica quando:

- Não se consegue calcular o integral de forma analítica.
- A função $f(t)$ não está definida por uma expressão analítica, mas por uma tabela de dados, como acontece em aplicações de processamento de sinal, onde a TF é uma ferramenta fundamental.

Transformada de Fourier discreta

O par de transformadas de Fourier discretas é tal que:

- A função $f(t)$ está definida de forma discreta $f(j) = f(t_j)$ em N pontos equidistantes $t_j = (j-1)\Delta t$ com $j = 1, 2 \ldots, N$.
- A transformada de Fourier discreta $F(k) = F(\omega_k)$ está definida em pontos equidistantes $\omega_k = (k-1)\Delta\omega$ com $k = 1, 2, \ldots N$.

Relação entre $\Delta\omega$ e o intervalo total $N\Delta t$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t}$$

Desta forma as frequências discretas são 0 e as que correspondem a $1, 2, \ldots (N-1)$ ciclos no intervalo total $N\Delta t$.

Note que

$$t_j \cdot \omega_k = [(j-1)\Delta t] \cdot \left[(k-1)\frac{2\pi}{N\Delta t}\right] = \frac{2\pi(j-1)(k-1)}{N}$$

Transformada de Fourier discreta

Definições de transformadas de Fourier discretas adotadas no MATLAB

$$F(k) = \sum_{j=1}^{N} f(j) \mathrm{e}^{-2\pi i (j-1)(k-1)/N}$$

$$f(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F(k) \mathrm{e}^{2\pi i (j-1)(k-1)/N}$$

Algumas propriedades da transformada discreta:

- A transformada discreta $F(k)$ é periódica, i.e., $F(k+N) = F(k)$.
- Assim como a transformada de Fourier contínua, a transformada discreta de uma função real é uma função complexa com parte real par e parte imaginária ímpar.
- Se a função for real e par, a transformada de Fourier é real e par.
- Embora em geral $F(k)$ seja complexa, usualmente estamos interessados na **densidade espetral** que é dada por $|F(k)|^2$.

Transformada de Fourier discreta no MATLAB

Antes de prosseguir, vamos olhar um pouco para a fórmula que o MATLAB usa para calcular a transformada de Fourier discreta:

$$F(k) = \sum_{j=1}^{N} f(j)\mathrm{e}^{-2\pi i(j-1)(k-1)/N}$$

Para ser uma aproximação ao integral

$$F(\omega) = \int_{0}^{t_{\max}} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t,$$

usando o método dos retângulos, seria necessário multiplicar por Δt. Assim, a maneira mais rigorosa de escrever a TF, a partir do resultado $F(k)$ fornecido pelo MATLAB, é $F(k)\Delta t$.

Transformada de Fourier discreta no MATLAB

A expressão do MATLAB para a transformada inversa é

$$f(j) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F(k)\mathrm{e}^{2\pi i(j-1)(k-1)/N}$$

O fator $1/N$ é necessário para garantir que a aplicação sucessiva de **`fft`** e **`ifft`** nos devolva a função original. O somatório na expressão acima será uma aproximação a

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} F(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega$$

se for multiplicado por $\Delta\omega/(2\pi)$. Por outro lado, também temos que multiplicar pelo termo Δt que está em falta na expressão de $F(k)$. Vimos anteriormente que

$$\frac{\Delta\omega\Delta t}{2\pi} = \frac{1}{N}$$

Apresentação da transformada de Fourier discreta

- A transformada discreta que temos estado a estudar assume N frequências discretas:

$$0, \Delta\omega, 2\Delta\omega, \dots (N-1)\Delta\omega.$$

- No entanto, especialmente para funções que têm frequências positivas e negativas, é conveniente mostrar a transformada entre as frequências[2]

$$-\frac{N}{2}\Delta\omega \quad \text{e} \quad \left(\frac{N}{2}-1\right)\Delta\omega.$$

[2] Estes limites são válidos para N par. Para N ímpar é necessário adicionar $\Delta\omega/2$ a ambos.

Apresentação da transformada de Fourier discreta

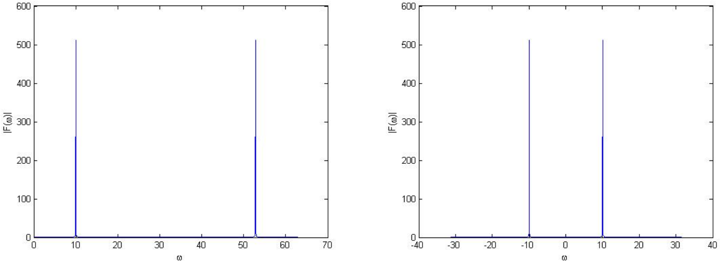

Figura: Duas representações da FFT de $\cos(10t)$.

Assim, as densidades espetrais das funções reais, que são pares, apresentam dois picos situados simetricamente, relativamente a $\omega = 0$, por cada frequência que contenham.

$$[\text{Note que } \cos(\omega t) = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2.]$$

Frequência de Nyquist

- À frequência $\omega_{\text{max}} = N\Delta\omega/2 = \pi/\Delta t$ ou $f_{\text{max}} = 1/(2\Delta t)$ dá-se o nome de **frequência de Nyquist** e é a maior frequência que se obtém com a amostragem de período Δt.
- Suponha que a função real $f(t)$ contém uma frequência ω_a superior a $\omega_{\text{max}} = \pi/\Delta t$. É possível provar que essa frequência irá aparecer erradamente na posição $2\omega_{\text{max}} - \omega_a$.

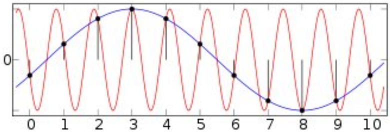

Figura: Duas sinusoides com frequências diferentes, 0.1 e 0.9, que se adequam à mesma amostragem com frequência igual a 1 (a frequência de Nyquist é igual a 0.5).

Note que a $1/\Delta t$ se dá o nome **frequência de amostragem**.

Aliasing

- Para que este efeito, designado **aliasing**, não aconteça, é necessário aumentar $\omega_{\max}$, o que se consegue diminuindo o Δt da amostragem da função $f(t)$.
- Aliás, é fácil entender que se a função for composta por frequências elevadas é necessário um período de amostragem Δt pequeno.

Teorema de amostragem

O período da amostragem deve ser inferior a metade do menor período presente na função, ou seja

$$\Delta t < \frac{1}{2 f_{\text{highest}}} = \frac{T_{\text{lowest}}}{2}$$

Na prática, devemos ter uma ideia da maior frequência presente na função e escolher um Δt adequado.

Transformada de Fourier da derivada

Se $F(\omega)$ é a TF de $f(t)$, qual a TF de $h(t) = f'(t)$?

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-i\omega t} dt$$

que por integração por partes, fica

$$f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-i\omega t} dt = i\omega F(\omega)$$

se $f(t)$ for tal que se anule em $\pm\infty$.

De igual forma poderíamos obter para as derivadas de ordem superior:

$$\mathrm{g}(t) = f^{(n)}(t)$$

$$G(\omega) = (i\omega)^n F(\omega)$$

Equação paraxial

Considere a equação paraxial numa forma adimensional:

$$i\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$$

que descreve a propagação paraxial de um feixe de luz com uma envolvente $q(z, x)$ num meio homogéneo, ao longo da direção z, com difração na direção x.

Esta equação é uma PDE de 2ª ordem parabólica:

- q é uma função de duas variáveis independentes.
- a equação contém derivadas relativamente às duas variáveis, x e z.

Esta equação é uma PDE que, no espaço de Fourier, se transforma numa equação diferencial ordinária.

Equação paraxial no espaço de Fourier

Aplicando a transformada de Fourier segundo a variável x a todos os termos da equação, obtém-se:

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial q}{\partial z} \mathrm{e}^{-ikx} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \mathrm{e}^{-ikx} dx = 0.$$

As frequências são, neste caso, frequências espaciais usualmente designadas pela letra k. Vamos usar a notação $\tilde{q}$ para representar a transformada de Fourier de q. Podemos escrever

$$i \frac{\mathrm{d}\tilde{q}}{\mathrm{d}z} - \frac{k^2}{2} \tilde{q} = 0, \qquad \tilde{q} = \mathrm{TF}(q),$$

que é uma ODE de variáveis separáveis, com solução

$$\tilde{q}(k, z) = \tilde{q}(k, 0) \exp\left(-\frac{i}{2} k^2 z\right).$$

Na aula prática verificaremos a evolução de alguns feixes com envolventes diferentes, resultando sempre em alargamento transversal devido à difração.

PDE não linear — Equação não linear de Schrödinger (NLS)

Se a propagação do feixe se der de novo num meio homogéneo, mas onde o índice de refração varia com a intensidade I do feixe, isto é, $n = n_1 + n_2 I$, a equação normalizada que descreve a propagação é:

$$i\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + |q|^2 q = 0$$

Não é possível aplicar o método do slide anterior a equações não lineares. No entanto, existem métodos designados por **pseudo-espetrais** para os quais se dará um exemplo nos slides seguintes.

Método pseudo-espetral

Escrevemos a NLS com a parte linear no membro esquerdo e a não linear no direito:

$$\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{i}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = V(q), \quad V(q) = i|q|^2 q$$

que no espaço de Fourier, fica

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{q}}{\mathrm{d}z} + \frac{ik^2}{2}\tilde{q} = \tilde{V}$$

Multiplicando ambos os membros por $\mathrm{e}^{ik^2z/2}$, obtém-se

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{q}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^{ik^2z/2} + \frac{ik^2}{2}\tilde{q}\mathrm{e}^{ik^2z/2} = \tilde{V}\mathrm{e}^{ik^2z/2}$$

que se pode transformar em

$$\frac{\mathrm{d}\left(\tilde{q}\mathrm{e}^{ik^2z/2}\right)}{\mathrm{d}z} = \tilde{V}\mathrm{e}^{ik^2z/2} \tag{1}$$

Método pseudo-espetral (continuação)

O método pseudo-espetral:

- Faz a transformada de Fourier de q e $V(q)$ em $z_i = 0$ e multiplica por $\mathrm{e}^{ik^2 z_i/2}$.
- Resolve a ODE (1) por um método de valor inicial, obtendo $\tilde{q}\mathrm{e}^{ik^2 z_f/2}$ em z_f.
- Volta ao espaço inicial multiplicando por $\mathrm{e}^{-ik^2 z_f/2}$ e fazendo uma transformada de Fourier inversa, obtendo q em $z = z_f$.

Note que em cada passo do algoritmo do método de valor inicial, é necessário o cálculo de $\tilde{V}\mathrm{e}^{ik^2 z/2}$, que por sua vez exige que se conheça $V(q)$. Assim, em cada passo do método, para calcular a derivada de $\tilde{q}\mathrm{e}^{ik^2 z/2}$ é necessário fazer a seguinte sequência de cálculos:

$$\tilde{q}\mathrm{e}^{ik^2 z/2} \longrightarrow \tilde{q} \longrightarrow q \longrightarrow V(q) \longrightarrow \tilde{V} \longrightarrow \tilde{V}\mathrm{e}^{ik^2 z/2}$$