Física Computacional

Ano letivo 2015/16

Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Método de Euler

Equações diferenciais ordinárias (ODE - ordinary differential equations)

- Equações diferenciais são equações que relacionam variáveis independentes, variáveis dependentes e as suas derivadas.
- Equações diferenciais ordinárias são aquelas que envolvem uma única variável independente e uma dependente.
- Sistemas de equações diferenciais ordinárias podem envolver várias variáveis dependentes mas uma única variável independente.
- A ordem de uma ODE é a ordem máxima das derivadas presentes.

Os problemas com ODEs podem ser:

- **problema de valor inicial** - quando temos o valor de todas as variáveis dependentes definido num único valor da variável independente;
- **problema de condição fronteira** - quando temos o valor das variáveis dependentes definido em mais do que um valor da variável independente.

Exemplos de equações diferenciais

1. $$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - (x^2 - 4x + 2)e^{-x}, \quad 0 < x < L,$$
   $$T(x,0) = 0, \quad T(0,t) = 0, \quad T(L,t) = L^2 e^{-L}$$
2. $$\frac{d^2 y}{dx^2} - xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(100) = 0$$
3. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1.25 \exp(x + y/2), \quad a_x < x < b_x, \quad a_y < y < b_y$$
   $$u(a_x, y) = u(b_x, y) = u(x, a_y) = u(x, b_y) = 0$$
4. $$\frac{dC_1}{dt} = -k_1 C_1 + k_2 C_2 C_3$$
   $$\frac{dC_2}{dt} = k_1 C_1 - k_2 C_2 C_3 - 2k_3 C_2^2$$
   $$\frac{dC_3}{dt} = 2k_3 C_2^2$$

Exemplos de equações diferenciais

1. $$\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{1}{(1+\epsilon y)^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

2. $$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = g(x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$T(0,y) = T(1,y) = T_a, \quad T(x,0) = T_b, \quad \frac{\partial T}{\partial y}(x,1) = 0$$

3. $$\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha\frac{du}{dx} + \beta u = f(x), \quad u(0) = u_0, \quad u(L) = u_L$$

4. $$\frac{d^2F}{dz^2} + \left(az - \frac{F^2}{1+F^2}\right)F = 0, \quad F(\pm L) = 0,$$

Método de Euler

Método de Euler - algoritmo simples para problemas de valor inicial.

Consideremos a equação

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(t, y) \tag{1}$$

Vamos supor que queremos determinar $y(t)$ para valores de t entre t_0 e t_f e que conhecemos o valor inicial $y_0 = y(t_0)$.

Método de Euler

Define-se uma grelha de valores da variável independente igualmente espaçados no intervalo a estudar:

$$t_0, t_0 + h, t_0 + 2h, t_0 + 3h, \ldots, t_f$$

Para simplificar, o espaçamento h (ou Δt, ou δt) é escolhido de forma a que $t_f - t_0$ seja um seu múltiplo inteiro. É fácil de perceber que o número de pontos, neste caso, é dado por:

$$N = \frac{t_f - t_0}{h} + 1$$

Queremos determinar estimativas numéricas para $y(t)$ nos pontos t_n, que vamos designar por y_n.

Método de Euler

O método de Euler pode justificar-se usando a série de Taylor que, aplicada no ponto $t_0 + h$, é:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y^{(1)}(t_0) \cdot h + \frac{1}{2!} y^{(2)}(t_0) \cdot h^2 + \frac{1}{3!} y^{(3)}(t_0) \cdot h^3 + \ldots$$

A equação (1) permite-nos determinar o 2º termo na expansão, uma vez que

$$y^{(1)}(t_0) = \left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]_{t=t_0} = f\left[t_0, y(t_0)\right]$$

Estamos a usar $y^{(n)}(t)$ para representar a derivada de ordem n de $y(t)$.

Método de Euler

No método de Euler, usamos a expansão até ao termo de ordem h.

O valor y_1 obtido pelo método de Euler é uma estimativa numérica para $y(t_0 + h)$ e é dado por

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot h$$

Conhecidos t_1 e y_1, pode-se usar o mesmo procedimento para calcular y_2:

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1) \cdot h$$

Aplicando repetidamente o método, podemos determinar todos os valores y_k:

Método de Euler - ODE de 1ª ordem

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k) \cdot h \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N-2$$

Erro do método de Euler

Qual é o erro cometido?

Segundo a expressão do resto de Lagrange para a expansão de Taylor, existe um valor t' compreendido entre t_0 e $t_0 + h$ tal que se tem

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y^{(1)}(t_0) \cdot h + \frac{1}{2} y^{(2)}(t') \cdot h^2$$

Isto significa que o erro introduzido neste passo é da ordem de h^2.

Forma dinâmica para as ODE

Uma equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

pode ser expressa como 2 ODEs acopladas de primeira ordem. Considerando que as variáveis dependentes são:

$$y(t) \quad \text{e} \quad y^{(1)}(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

obtemos $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^{(1)} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}y^{(1)}}{\mathrm{d}t} = f(t, y, y^{(1)})$$

Método de Euler - ODE de 2ª ordem

$$\begin{cases} y^{(1)}_{k+1} = y^{(1)}_k + f(t_k, y_k, y^{(1)}_k) \cdot h \\ y_{k+1} = y_k + y^{(1)}_k \cdot h \end{cases}$$

Movimento retilíneo

Um dos exemplos de equação diferencial de segunda ordem é a 2ª lei de Newton aplicado a uma trajetória retilínea $y(t)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\sum F\left(t, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)}{m}$$

Neste caso:

$$y^{(1)}(t) = \frac{dy}{dt} = v(t) \quad \text{e} \quad f(t, y, v) = \sum F(t, y, v)/m$$

$$\begin{cases} v_{k+1} = v_k + f(t_k, y_k, v_k) \cdot h \\ y_{k+1} = y_k + v_k \cdot h \end{cases}$$

Movimento no espaço tridimensional

Generalizando para um caso em que a trajetória não é retilínea, mas dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{\mathbf{k}}$

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\sum \mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}\right)}{m}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = f_x(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \dfrac{\sum F_x}{m} \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = f_y(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \dfrac{\sum F_y}{m} \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = f_z(t, x, y, z, v_x, v_y, v_z) = \dfrac{\sum F_z}{m} \end{cases}$$

As funções f_x, f_y e f_z são as componentes da aceleração segundo os eixos cartesianos.

Movimento no espaço tridimensional

Método de Euler para a velocidade

$$\begin{cases} v_{x,k+1} = v_{x,k} + f_x(t_k, x_k, y_k, z_k, v_{x,k}, v_{y,k}, v_{z,k}) \cdot h \\ v_{y,k+1} = v_{y,k} + f_y(t_k, x_k, y_k, z_k, v_{x,k}, v_{y,k}, v_{z,k}) \cdot h \\ v_{z,k+1} = v_{z,k} + f_z(t_k, x_k, y_k, z_k, v_{x,k}, v_{y,k}, v_{z,k}) \cdot h \end{cases}$$

Método de Euler para a posição

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + v_{x,k} \cdot h \\ y_{k+1} = y_k + v_{y,k} \cdot h \\ z_{k+1} = z_k + v_{z,k} \cdot h \end{cases}$$

Aerodinâmica de um objeto esférico

No trabalho 1, estuda-se a trajetória de bolas (de ténis e de futebol) sujeitas:

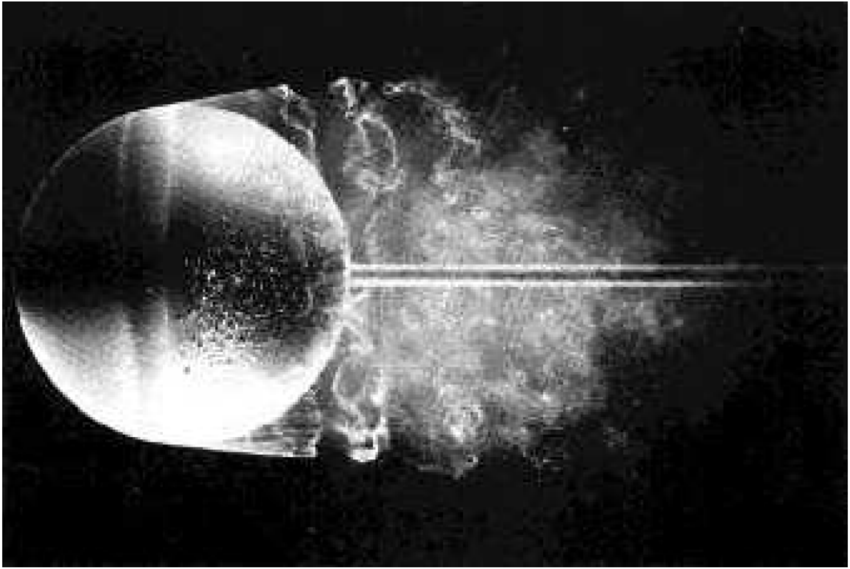
- ao **peso**;
- à **força de arrasto** (*drag force*) que se deve a dois fenómenos; o atrito e a diferença de pressões entre a parte da frente da bola (relativamente ao seu movimento) e a parte de trás da bola a baixa pressão, a que chamamos **esteira**;
- **efeito de Magnus** que ocorre quando a bola tem também um movimento de rotação.

Alguns conceitos de aerodinâmica

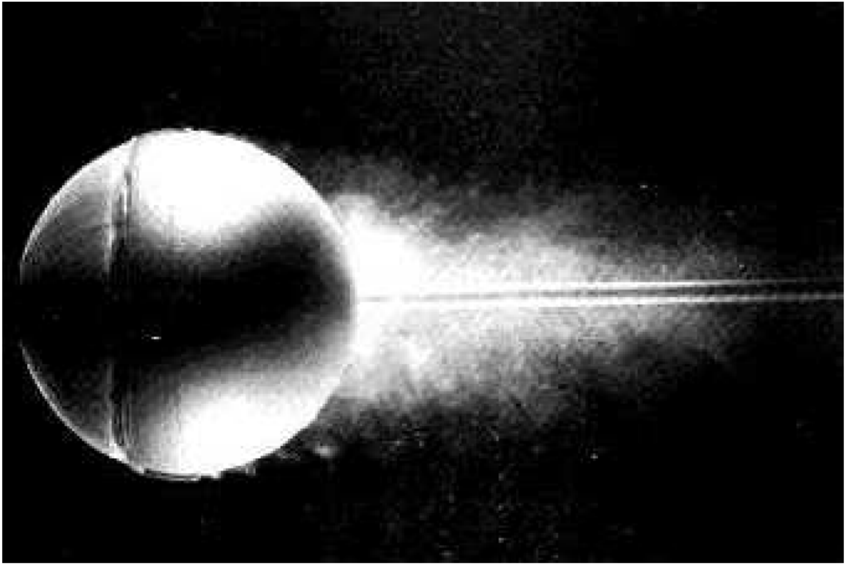
Camada limite - camada de ar que rodeia a esfera e que apresenta velocidades graduais, desde a velocidade do fluido nas posições mais distantes da esfera até à velocidade da esfera na superfície desta.
Esteira - região de pressão baixa que se forma atrás da bola, diferente da camada limite.

- O movimento do ar na camada limite pode ser laminar ou turbulento. A transição para regime turbulento ocorre para velocidades superiores.
- No regime turbulento, a esteira é menos extensa porque a camada limite separa-se da bola mais atrás.

Camada limite laminar



Camada limite turbulenta



Forma matemática da força de arrasto

A força de arrasto é dada por:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\mathrm{D}} &= -\frac{1}{2} C_{\mathrm{D}}\, \rho A v^2 \hat{\boldsymbol{v}} \\
&= -\frac{1}{2} C_{\mathrm{D}}\, \rho A v^2 \frac{v_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + v_z \hat{\boldsymbol{k}}}{v} \\
&= -\frac{1}{2} C_{\mathrm{D}}\, \rho A \left(v v_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + v v_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + v v_z \hat{\boldsymbol{k}} \right) ,
\end{aligned}$$

onde ρ é a massa volúmica do ar e $A = \pi R^2$ é a área da secção transversal da bola. O parâmetro adimensional C_{D} é o coeficiente de arrasto.

Número de Reynolds

O número de Reynolds é dado por:

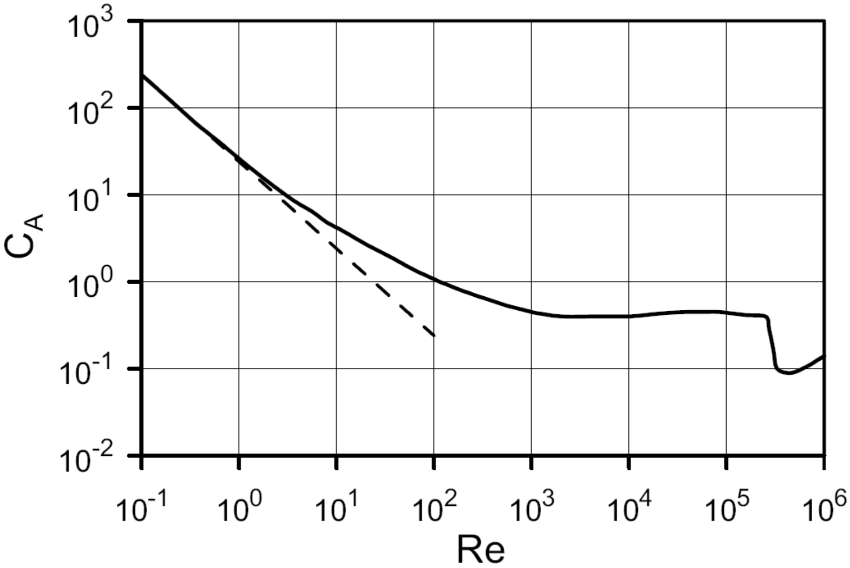
$$\text{Re} = \frac{2\rho R v}{\eta} \,,$$

onde η é a viscosidade do ar.

É um parâmetro adimensional que permite prever regimes de comportamento em mecânica de fluidos.

O coeficiente de arrasto assume valores e dependências diferentes consoante o número de Reynolds.

Coeficiente de arrasto de uma esfera lisa $C_A = C_D$



Coeficiente de arrasto de uma esfera lisa

- Para valores do número de Reynolds bastante pequenos, estamos no limite de Stokes: C_D é inversamente proporcional à velocidade e o módulo da força de arrasto é proporcional a v.
- C_D é aproximadamente constante numa gama intermédia de valores do número de Reynolds.
- Para valores de número de Reynolds mais elevados, o comportamento da camada limite é turbulento, a esteira é menos extensa e o coeficiente de arrasto diminui abruptamente.

Efeito de Magnus

Quando a bola é lançada com rotação, existe uma outra força que é conhecida por força de Magnus.

Esta força pode ser explicada por dois efeitos.

Consideremos o caso representado nos slides sequintes em que a bola segue para a esquerda, o eixo de rotação é perpendicular ao plano do slide e a rotação é no sentido horário.

Efeito de Magnus

Diferença de pressão

- O movimento de rotação é tal que faz com que o movimento da:
  - superfície superior da bola seja a favor do movimento do ar que rodeia a bola;
  - superfície inferior da bola seja contrário ao movimento do ar que rodeia a bola.
- As velocidades do fluido na camada limite superior são superiores às existentes na camada limite inferior.
- Pelo princípio de Bernoulli, maior velocidade corresponde a menor pressão, logo a camada de ar acima da bola apresenta uma menor pressão. Dá origem a uma força de sustentação para cima.

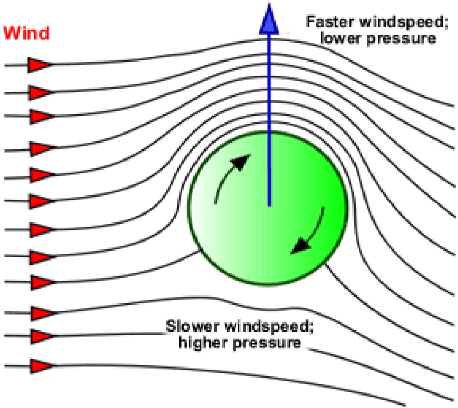
Efeito de Magnus

Diferenças entre camadas limites inferior e superior

- Devido às menores diferenças de velocidade entre o fluido e a bola na parte superior da bola, a camada limite superior é mais extensa que a inferior.
- Este efeito traduz-se por uma defleção do ar para baixo e um consequente movimento da bola para cima.

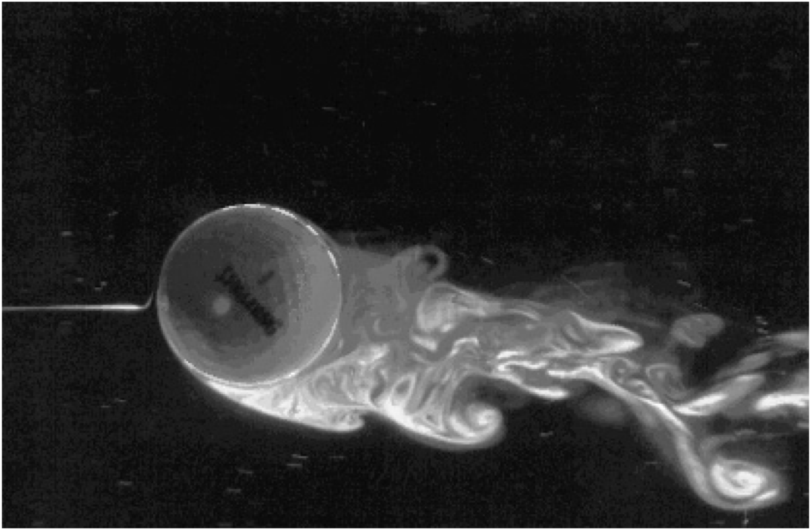
Efeito de Magnus

Translação para a esquerda, rotação no sentido horário.
No referencial que viaja com a velocidade de translação da bola.



Efeito de Magnus

Translação para a esquerda, rotação no sentido horário.



Forma matemática da força de Magnus

A força de Magnus é perpendicular à velocidade de translação e ao eixo de rotação e é dada por

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{L} = \frac{1}{2} C_\mathrm{L}\, \rho A v^2 \left(\hat{\omega} \times \hat{\boldsymbol{v}}\right)$$

O parâmetro C_L depende do número de Reynolds e do parâmetro de rotação (de spin)

$$S = \frac{R\omega}{v}$$

(e, em princípio, do ângulo entre o eixo de rotação e a velocidade de translação).

Efeito de Magnus

Também se pode escrever esta força em função de um outro parâmetro:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} C_{\mathrm{M}} \rho A R \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} \right)$$

É preciso ter em atenção que a rotação afeta o coeficiente de arrasto que passa a ser também função do parâmetro S, como no exemplo da bola de ténis do trabalho 1.