Aula 6

- **Equações às derivadas parciais:**
  problemas de valor inicial

- **PDEs parabólicas**
- **A equação de condução do calor**
- **Método de Euler**
- **Método de Crank-Nicolson**

Departamento de Física
Universidade de Aveiro

Problemas de valor inicial

As PDE estudadas nesta aula são **PDE parabólicas.** Vão ser estudadas como generalizações dos problemas de valor inicial encontrados no estudo de ODE.

● Equação de condução do calor:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

A temperatura no instante inicial, t = 0, é conhecida , ie., T(x,0) é conhecida para todos os valores de x. Por outro lado, os valores de T(x,t) são conhecidos na fronteira de x, (x=min e x=xmax), para todos os instantes.

● Equação de paraxial (estudada na aula sobre Transformadas de Fourier):

$$i\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$$

É conhecida a forma do feixe em z = 0, ou seja, *q(x,0)* , e o seu comportamento na fronteira para todos os valores de z.

Problemas de valor inicial: *Semi-discretização*

Um dos métodos de resolução numérica deste tipo de PDE consiste em usar diferenças finitas para as derivadas referentes a uma das variáveis independentes, convertendo-se a PDE num sistema de ODEs.

Como exemplo, considere-se a equação do calor a uma dimensão:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

Com as seguintes condições inicial,

$$T(x,0) = g(x) \qquad \text{(CI)}$$

E fronteira, $T(0,t) = T(L,t) = 0.$ (CF)

Resolução pelo método de EULER

Aproximando a segunda derivada por diferenças finitas centradas, obtém-se um conjunto de (N_x-2) ODE:

$$\frac{\partial T(i,t)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{T(i-1,t) - 2T(i,t) + T(i+1,t)}{(\Delta x)^2}$$

que poderão ser resolvidas por um dos métodod de resolução de problemas de valor inicial para ODE, com cuidados relativos à estabilidade dos mesmos.

MÉTODO de EULER

$$T(i,n+1) = T(i,n) + \frac{k\,\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2}\left[T(i-1,n) - 2T(i,n) + T(i+1,n)\right]$$

Estabilidade do método de EULER

No entanto, o método de Euler aplicado à equação de condução de calor é apenas condicionalmente estável.

No estudo de estabilidade apresenatdo na aula 3, considerou-se uma linearização da equação diferencial. Neste caso tem-se um sistema de equações lineares, que pode ser representado na forma matricial do seguinte modo:

$$\frac{dT}{dt} = AT$$

Sendo A uma matriz $(N_x - 2)\times (N_x - 2)$ com 3 diagonais não nulas e constantes, cujos valores próprios são,

$$\lambda_l = \frac{2k}{c\rho(\Delta x)^2}\left(cos\frac{\pi l}{N_x - 1} - 1\right), \qquad l = 1, 2, \dots, N_x - 2.$$

Estabilidade do método de EULER

Todos estes valores próprios são reais negativos. Para que o método de Euler seja estável, todos os valores próprios λ_l, têm que satisfazer

$$\lambda_l \Delta t \geq -2$$

Se esta condição for satisfeita pelo menor dos valores próprios (o maior em termos absolutos), também será satisfeita por todos os outros.

Quanto mais pequeno for o valor do cosseno na expressão de λ_l, menor será o valor próprio. Quando l se aproxima de N_x -1 , o cosseno aproxima-se de -1. Então, o menor dos valores próprios é

$$\lambda_{N_x-2} = \frac{2k}{c\rho(\Delta x)^2}\left[cos\left(\frac{N_x-2}{N_x-1}\pi\right)-1\right]$$

$$\simeq -\frac{4k}{c\rho(\Delta x)^2}$$

Estabilidade do método de EULER

Substituindo no critério de estabilidade,

$$-\frac{4k}{c\rho(\Delta x)^2}\Delta t \geq -2$$

Para este problema, o método de Euler é condicionalmente estável,

Critério de Estabilidade

$$\frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

Resolução pelo método de CRANK-NICOLSON

Devido às exigências de passo para assegurar a estabilidade da solução numérica, opta-se muitas vezes pelo **método de Crank-Nicolson**.

$$T(i,n+1) = T(i,n) + \frac{k}{c\rho(\Delta x)^2}[T(i-1,n+1) - 2T(i,n+1) + T(i+1,n+1)$$

$$+T(i-1,n) - 2T(i,n) + T(i+1,n)]$$

Método de Crank-Nicolson

Fazendo um rearranjo de termos, de forma a que os termos em T(-, $n+1$) fiquem agrupados no 1º membro e os termos em T(-, n) fiquem agrupados no 2º membro, obtém-se,

MÉTODO de CRANK-NICOLSON

$$-T(i-1,n+1)+\left(\frac{2}{\eta}+2\right)T(i,n+1)-T(i+1,n+1)$$
$$=T(i-1,n)+\left(\frac{2}{\eta}-2\right)T(i,n)+T(i+1,n)$$

Com,

$$\eta=\frac{k}{c\rho(\Delta x)^2}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 & & & \\ -1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 \\ & & & -1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(2,n+1) \\ T(3,n+1) \\ \vdots \\ T(Nx-2,n+1) \\ T(Nx-1,n+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} {\color{red}T(1,n+1)} + T(1,n) + \left(\frac{2}{\eta}-2\right)T(2,n) + T(3,n) \\ T(2,n) + \left(\frac{2}{\eta}-2\right)T(3,n) + T(4,n) \\ \vdots \\ T(Nx-3,n) + \left(\frac{2}{\eta}-2\right)T(Nx-2,n) + T(Nx-1,n) \\ T(Nx-2,n) + \left(\frac{2}{\eta}-2\right)T(Nx-1,n) + T(Nx,n) + {\color{red}T(Nx,n+1)} \end{bmatrix}$$

Método de Crank-Nicolson

● Devido às condições fronteira, é preciso adicionar termos extra (a vermelho) ao primeiro e ao último elemento do vetor **b.**

● A matriz é tridiagonal.

● O método consiste em resolver um sistema de equações algébricas cuja matriz é tridiagonal. Este processo é repetido para cada iteração no tempo.

● O método de Crank-Nicolson, é **incondicionalmente estável** neste caso, pois os valores próprios são números reais negativos.