Problemas de valor inicial com PDEs

Problemas de valor inicial

As PDEs estudadas nesta aula são **PDEs parabólicas**. Vamos estudá-las como generalizações dos problemas de valor inicial encontrados no estudo de ODEs.

- Equação de condução do calor:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

  conhecemos a temperatura em $t = 0$, ou seja, $T(x,0)$ e os valores da temperatura na fronteira de x para todos os tempos.

- Equação paraxial (já estudada na aula de transformadas de Fourier):

$$i\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

  conhecemos a forma do feixe em $z = 0$, ou seja, $\phi(x,0)$ e o seu comportamento na fronteira de x para todo o z.

Semi-discretização

Um dos métodos de resolução numérica deste tipo de PDEs consiste em usar diferenças finitas para as derivadas referentes a uma das variáveis independentes, o que converte a PDE num sistema de ODEs.

Seja a equação de condução de calor:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$$

com as seguintes condições inicial e de fronteira

$$T(x,0) = g(x), \quad T(0,t) = T(L,t) = 0.$$

Resolução pelo método de Euler

Aproximando a segunda derivada por diferenças finitas centradas, obtemos um conjunto de $(N_x - 2)$ ODEs:

$$\frac{\partial T(i,t)}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{T(i+1,t) - 2T(i,t) + T(i-1,t)}{(\Delta x)^2}$$

que poderão ser resolvidas por um dos métodos de resolução de ODEs, com os cuidados relativos à estabilidade dos mesmos.

Método de Euler

$$T(i,n+1) = T(i,n) + \frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \left[T(i+1,n) - 2T(i,n) + T(i-1,n)\right]$$

No entanto, o método de Euler aplicado à equação de condução de calor é apenas condicionalmente estável.

Estabilidade do método de Euler

Relembrando o estudo de estabilidade apresentado na aula 2.
Considerámos uma linearização da equação diferencial, no entanto, neste caso já temos um sistema de equações lineares, representado matricialmente da forma:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = AT$$

onde A é uma matriz $(N_x - 2) \times (N_x - 2)$ com 3 diagonais não nulas e constantes cujos valores próprios são

$$\lambda_i = \frac{k}{c\rho(\Delta x)^2}\left(-2 + 2\cos\frac{\pi i}{N_x - 1}\right), \quad i = 1, 2, \ldots N_x - 2.$$

Estabilidade do método de Euler

A matriz A é diagonalizável numa matriz D cujos elementos da diagonal são os valores próprios de A.

É possivel fazer uma tranformação de variável de T para Z tal que

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = DZ$$

que representa um conjunto de equações desacopladas cujas soluções são:

$$Z(i) = Z_0(i)\mathrm{e}^{\lambda_i t}$$

O que se aplica a Z também se aplica a T:

- Como os valores próprios são reais negativos, logo a solução Z e também T não divergem.
- A análise de estabilidade do método de Euler aplicado à equação de condução de calor pode seguir o raciocínio da aula 2, usando os valores próprios de A.

Estabilidade do método de Euler

Como os valores próprios são puramente reais, o método é condicionalmente estável, isto é, estável desde que Δt obedeça a:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\max|\lambda_i|}$$

O valor próprio de maior valor absoluto ocorre quando o argumento do co-seno está perto de π, ou seja, para $i = N_x - 2$. Neste caso

$$\lambda_{N_x-2} \approx -\frac{4k}{c\rho(\Delta x)^2}$$

de onde resulta

Critério de estabilidade

$$\frac{k\Delta t}{c\rho(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$

Método de Crank-Nicolson

Devido às exigências de passo para assegurar a estabilidade da solução numérica, opta-se muitas vezes pelo **método de Crank-Nicolson**.

$$T(i,n+1) = T(i,n) + \frac{k\Delta t}{2c\rho(\Delta x)^2}\Big[T(i+1,n+1) - 2T(i,n+1) + T(i-1,n+1)$$

$$+ T(i+1,n) - 2T(i,n) + T(i-1,n)\Big]$$

Método de Crank–Nicolson

Rearranjando, de forma a ter os termos que multiplicam por $T(\_, n+1)$ à esquerda e os termos que multiplicam por $T(\_, n)$ à direita, obtemos

Método de Crank–Nicolson

$$
\begin{aligned}
&- T(i+1, n+1) + \left(\frac{2}{\eta} + 2\right) T(i, n+1) - T(i-1, n+1) \\
&\qquad = T(i+1, n) + \left(\frac{2}{\eta} - 2\right) T(i, n) + T(i-1, n)
\end{aligned}
$$

$$
\eta = \frac{k \Delta t}{c \rho (\Delta x)^2}
$$

Método de Crank–Nicolson

Na forma matricial:

$$
\begin{bmatrix}
\left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 & & & \\
-1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & -1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right) & -1 \\
 & & & -1 & \left(\frac{2}{\eta}+2\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
T(2,n+1) \\ T(3,n+1) \\ \vdots \\ T(N_x-2,n+1) \\ T(N_x-1,n+1)
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
\color{red}{T(1,n+1)} + T(1,n) + \left(\frac{2}{\eta}-2\right) T(2,n) + T(3,n) \\
T(2,n) + \left(\frac{2}{\eta}-2\right) T(3,n) + T(4,n) \\
\vdots \\
T(N_x-3,n) + \left(\frac{2}{\eta}-2\right) T(N_x-2,n) + T(N_x-1,n) \\
T(N_x-2,n) + \left(\frac{2}{\eta}-2\right) T(N_x-1,n) + T(N_x,n) + \color{red}{T(N_x,n+1)}
\end{bmatrix}
$$

Método de Crank–Nicolson

- A matriz é tridiagonal.
- O método consiste em resolver um sistema de equações algébricas cuja matriz é tridiagonal.
- Sendo um método implícito, é **incondicionalmente estável**.