FC - 2º teste teórico 2015/2016

1.

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial T}{\partial t} e^{-ikx} = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} e^{-ikx} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$

$\Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \alpha \left( i^2 k^2 \tilde{T} + \tilde{f} \right)$

$\Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = -\alpha k^2 \tilde{T} + \tilde{f}$

b)

```
TFf = fftshift(fft(f))
TFT(:,1) = fftshift[fft(T(:,1))];
for i = 1:Nt-1
    for j = 1:Nx
        TFT(j,i+1) = TFT(j,i) + [-αk(j)^2] TFT(j,i) + TFf(j)
    end
    T(:,i+1) = ifft(ifftshift(TFT(:,i+1)))
end
```

# FC - 1.º teste teórico 2016/2017

1.

a)
$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -k_1 a \\ \frac{db}{dt} = k_1 a - k_2 b \\ \frac{dc}{dt} = k_2 b \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = 0$$

$$\begin{vmatrix} -k_1-\lambda & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2-\lambda & 0 \\ 0 & k_2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-k_1-\lambda)(-k_2-\lambda)(-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow (k_1k_2 + k_1\lambda + k_2\lambda + \lambda^2)(-\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda = 0 \vee k_1k_2 + k_1\lambda + k_2\lambda + \lambda^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda^2 + (k_1+k_2)\lambda + (k_1 k_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = \frac{-k_1-k_2 \pm \sqrt{k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2 - 4(k_1 k_2)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = \frac{-k_1-k_2 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2 - 4k_1k_2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = \frac{-k_1-k_2 \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = \frac{-k_1-k_2 \pm \sqrt{(k_1-k_2)^2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = \frac{-k_1-k_2 \pm (k_1-k_2)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = \frac{-2k_2}{2} \vee \lambda = \frac{-2k_1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -k_2 \vee \lambda = -k_1$$

b) Os valores próprios são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -k_1$, $\lambda_3 = k_2$. Os pontos $\lambda h$ são:

- $\lambda_1 h: 0 \rightarrow P_1(0,0)$
- $\lambda_2 h: -k_1 h \rightarrow P(-k_1 h, 0)$
- $\lambda_3 h: -k_2 h \rightarrow P(-k_2 h, 0)$

Um dos pontos localiza-se na origem e os outros dois no semieixo negativo dos reais.

Tanto o método de Euler implícito como o método de Crank-Nicolson são estáveis para todos os pontos com componente real negativa e para a origem, logo os dois métodos são incondicionalmente estáveis para este problema.

O método de Euler é estável para
$$(\lambda_r+1)^2 + \lambda_i^2 \leq 1$$

$$\begin{cases} (0+1)^2 + 0^2 \leq 1 \\ (-k_1 h+1)^2 + 0^2 \leq 1 \\ (-k_2 h+1)^2 + 0^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq 1 \quad \text{P.V.} \\ k_1^2 h^2 - 2k_1 h + 1 \leq 1 \\ k_2^2 h^2 - 2k_2 h + 1 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1(k_1h^2-2h) \leq 0 \\ k_2(k_2h^2-2h) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 \geq 0 \wedge k_1h^2 - 2h \leq 0 \\ k_2 \geq 0 \wedge k_2h^2 - 2h \leq 0 \end{cases} \qquad k_1, k_2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(k_1h-2) \leq 0 \\ h(k_2h-2) \leq 0 \end{cases} \qquad h > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1h - 2 \leq 0 \\ k_2h - 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h \leq 2/k_1 \\ h \leq 2/k_2 \end{cases} \qquad k_1 > k_2 \text{, logo } \frac{2}{k_1} < \frac{2}{k_2}$$

$$h \leq \frac{2}{k_1}$$

O método de Euler é condicionalmente estável para este problema; a condição de estabilidade é $h \leq \frac{2}{k_1}$.

c) método de Euler implícito:

$$y_{k+1} = y_k + f(y_{k+1}, t_{k+1}) \cdot h$$

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k - (k_1 a_{k+1}) \cdot h \\ b_{k+1} = b_k + (k_1 a_{k+1} - k_2 b_{k+1}) \cdot h \\ c_{k+1} = c_k + (k_2 b_{k+1}) \cdot h \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_k = a_{k+1} + k_1 a_{k+1} h \\ b_k = b_{k+1} - (k_1 a_{k+1} - k_2 b_{k+1}) \cdot h \\ c_k = c_{k+1} - k_2 b_{k+1} h \end{cases}$$

$$A z = b$$

$$\begin{bmatrix} 1+k_1h & 0 & 0 \\ -k_1h & 1-k_2h & 0 \\ 0 & -k_2h & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{bmatrix}$$

O ciclo de Matlab é:

$$A = \begin{bmatrix} 1+k_1h & 0 & 0 \\ -k_1h & 1-k_2h & 0 \\ 0 & -k_2h & 1 \end{bmatrix}$$

```
for i = 1:n-1
    b = [a(i)
         b(i)
         c(i)]
    z = linsolve(A,b)
    a(i+1) = z(1)
    b(i+1) = z(2)
    c(i+1) = z(3)
end
```

2

a) O erro local é o erro cometido em cada passo; já o erro global deve-se aos erros acumulados ao longo de todos os passos.

erro local: const $\cdot h^{p+1}$

erro global: const $h^p$

ordem erro local: $l$, ordem erro global: $g$

$$g = l - 1$$

b) $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & \\ c_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array}$$

$(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) = 1$

$r_1 = f(t_k, y_k)$
$r_2 = f(t_k + hc_2,\ y_k + r_1 \cdot a_{21} \cdot h)$
$r_3 = f(t_k + hc_3,\ y_k + (r_1 \cdot a_{31} + r_2 \cdot a_{32}) \cdot h)$
$r_4 = f(t_k + hc_4,\ y_k + h(r_1 \cdot a_{41} + r_2 \cdot a_{42} + r_3 \cdot a_{43}))$
$y_{k+1} = y_k + h(b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3 + b_4 r_4)$

c) Num método Runge-Kutta de passo variável, a diferença $h$ entre valores consecutivos de variável independente não é mantida constante, ao contrário do método de passo fixo.

Em zonas do domínio da função com comportamentos instáveis usa-se um $h$ bastante pequeno, mas quando a variação da função é previsível pode-se usar um passo maior.

Quando a função tem um comportamento "estável", o método de passo adaptativo permite reduzir bastante o número de passos, tornando os algoritmos muito mais rápidos.

3.

a) $$\frac{y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h)}{h^4} = \omega^4\ y(x)$$

$$\Leftrightarrow y(x-2h) - 4y(x-h) + 6y(x) - 4y(x+h) + y(x+2h) = \omega^4 h^4\ y(x)$$

logo, $y_{k-2} - 4y_{k-1} + 6y_k - 4y_{k+1} + y_{k+2} = \lambda y_k$, com $\lambda = \omega^4 h^4$

b) Partimos das expansões de Taylor:

$$y(x+h) = y(x) + y^{(1)}(x)h + \frac{1}{2!} y^{(2)}(x) h^2 + \frac{1}{3!} y^{(3)}(x) h^3 + O(h^4)$$
$$y(x-h) = y(x) - y^{(1)}(x)h + \frac{1}{2!} y^{(2)}(x) h^2 - \frac{1}{3!} y^{(3)}(x) \cdot h^3 + O(h^4)$$

Somamos as duas expressões:

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + 0 + y^{(2)}(x)\ h^2 + 0 + O(h^4)$$
$$\Leftrightarrow y^{(2)}(x) h^2 = y(x+h) - 2y(x) + y(x-h) + O(h^4)$$
$$\Leftrightarrow y^{(2)}(x) = \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2} + \frac{O(h^4)}{h^2}$$
$$\Leftrightarrow y^{(2)}(x) = \frac{y(x-h) - 2y(x) + y(x+h)}{h^2} + O(h^2)$$

é uma aproximação de segunda ordem

$$y^{(2)}(a) = 0 \Rightarrow \frac{y(a-h) - 2y(a) + y(a+h)}{h^2} = 0$$
$$\Rightarrow y(a-h) - 2y(a) + y(a+h) = 0$$
$$\Leftrightarrow y(a-h) - 2 \cdot 0 = -y(a+h)$$
$$\Leftrightarrow y(a-h) = -y(a+h)$$

sendo $y(a) = y_1$, vem $y_0 = -y_2$, c.q.m

c) condições fronteira $x = a : b$

$y_0 = -y_2, \ y_1 = 0$

$x_1 \quad x_2$

$a, a+h, a+2h, \ldots \ b$

$$y_{k-2} - 4y_{k-1} + 6y_k - 4y_{k+1} + y_{k+2} = \lambda y_k$$

$N-2$ incógnitas: de $k=2$ a $k=N-1$

$k=2$: $\quad y_0 - 4\underbrace{y_1}_{0} + 6y_2 - 4y_3 + y_4 = \lambda y_2$

$\Leftrightarrow -y_2 - 4\cancel{y_1} + 6y_2 - 4y_3 + y_4 = \lambda y_2$

$\Leftrightarrow 5y_2 - 4y_3 + y_4 = \lambda y_2$

$k=3$: $\quad y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 = \lambda y_3$

$\Leftrightarrow 0 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 = \lambda y_3$

$\Leftrightarrow -4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 = \lambda y_3$

$k=4$: $\quad y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 = \lambda y_4$

$\Leftrightarrow$

$k=5$: $\quad y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7 = \lambda y_5$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & \cdots & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & \cdots & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdots & \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$$

FC - 2º teste teórico 2016/2017

1.

a) Ao contrário dos métodos tradicionais, o aumento do número de variáveis de integração não altera a forma da dependência do erro com N para os métodos de Monte Carlo.
Assim, os métodos de Monte Carlo tornam-se melhores que os métodos tradicionais para integrais multi-dimensionais.

b)
```
L = ...
n = ...
T = ...
M = zeros(1,L)
E = zeros(1,L)

for iconfig = 1:L
    S = 2 * randi(1,n,n) - 1
    M(iconfig) = sum(sum S)
    aux = 0
    for i = 1:n
        for j = 1:n
            aux = aux - S(i,j)[S(i-1,j) + S(i+1,j) + S(i,j+1), S(i,j-1)]
        end
    end
    E(iconfig) = aux/2
end
num = sum(M * exp(-E/T))
den = sum(exp(-E/T))
Mmedio = num/den
```

c) Usamos uma distribuição não uniforme de números aleatórios (amostragem por importância). Para isso, escolhemos uma distribuição de probabilidade que é maior para valores de x para os quais y(x) é maior.

clearyuhere

defaulte vedor + U = v

1

FC - Recurso 2016/2017

4.

a) A tabela contém os valores de $\phi(i,j)$, ou seja, os valores da variável dependente no domínio discretizado.

Todos os pontos da periferia são condições fronteira, que não vão mudar: só os valores de $\phi(2,2)$ e $\phi(3,2)$ se alteram.

No método de Jacobi o novo valor de $\phi(i,j)$ num ponto é a média aritmética dos valores antigos dos quatro pontos vizinhos: $\phi(i,j-1)$, $\phi(i,j+1)$, $\phi(i-1,j)$ e $\phi(i+1,j)$.

No método de Gauss-Seidel, se já houver valores novos de $\phi$ nos pontos vizinhos, eles são usados no cálculo de $\phi$ nesse ponto.

Suponhamos que usamos o Gauss-Seidel para a primeira iteração de $\phi(2,2)$. Ainda nenhum dos vizinhos pode ter um valor novo.

$$\phi^{GS}_{new}(2,2) = \frac{1}{4}\cdot(0{,}0+2{,}0+3{,}0+0{,}0) = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

A diferença entre o valor novo e o valor antigo é

$$d(2,2) = \phi^{GS}_{new}(2,2) - \phi_{old}(2,2) = 1{,}25 - 0{,}0 = 1{,}25$$

Contudo, o método usado teve como resultado

$\phi_{new}(2,2) - \phi_{old}(2,2) = 2-0 = 2{,}0$, o que é maior que a variação que resultaria da aplicação do método de Gauss-Seidel. Assim, o método usado é o de sobre-relaxação sucessiva.

$$\phi^{new}_{SRS}(2,2) = \phi^{old}(2,2) + \alpha\, d(2,2)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\phi_{SRS}(2,2) - \phi_{old}(2,2)}{d(2,2)} \leftarrow \text{do Gauss-Seidel}$$

$$= \frac{2{,}0-0{,}0}{5/4} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$

$$\phi^{new}_{SRS}(2,3) = \phi^{old}(2,3) + \alpha\, d^{GS}(2,3)$$
$$= \phi^{old}(2,3) + \alpha\left[\phi_{new}(2,3) - \phi_{old}(2,3)\right]$$

$$\phi^{GS}_{new}(2,3) = \frac{1}{4}\left[3{,}0+6{,}0+5{,}0+\overset{2{,}0}{\cancel{1{,}25}}\right] = 4{,}0$$

usa o $\phi^{new}_{SRS}(2,2)$

$\phi^{new}_{SRS}(2,3) = 0{,}0 + 1{,}6\cdot 4{,}0 = 6{,}4$, logo coincide com o obtido

b) Quando o método de Gauss-Seidel, aplicado a um dado problema, converge, o método de sobre-relaxação ($\alpha>1$) é usado para acelerar a convergência.

Para os casos em que o método de Gauss-Seidel não converge, pode-se tentar alcançar a convergência usando o método de sub-relaxação ($\alpha<1$).

Ver no ppt

FC - 1.º teste teórico 2017/2018

1.

a) $\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$,

com $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ a & -2 \end{bmatrix}$

Os valores próprios obtêm-se fazendo

$$|A - \lambda I| = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ a & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow -\lambda(-2-\lambda) + a = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda + a = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4a}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1-a}$$

b) i) $a = 2$: $\lambda = -1 \pm \sqrt{1-2}$
$\Rightarrow \lambda_1 = -1+i$ e $\lambda_2 = -1-i$

$(x+h)^2 + y^2 \leq 1$

$\lambda_1 h \rightarrow$ pontos $(-1 \cdot h, 1 \cdot h) \rightarrow (-h, h)$ $P_1$
$\lambda_2 h \rightarrow$ ponto $(-1 \cdot h, -1 \cdot h) \rightarrow (-h, -h)$ $P_2$

Para o método ser estável, $P_1$ e $P_2$ têm de estar na zona de estabilidade.

As zonas de estabilidade dos métodos Euler implícito e Crank-Nicolson contêm todos os pontos com abcissas negativas, logo são incondicionalmente estáveis para $a = 2$.
O método de Euler será condicionalmente estável.

$$(-h+1)^2 + h^2(\pm 1)^2 \leq 1$$
$$\Rightarrow (-h+1)^2 + h^2 \leq 1$$
$$\Leftrightarrow h^2 - 2h + 1 + h^2 \leq 1$$
$$\Leftrightarrow 2h^2 - 2h \leq 0$$
$$\Leftrightarrow h(h-1) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow h \leq 0 \lor h-1 \leq 0 \quad \text{(sabemos que } h>0\text{)}$$
$$\Leftrightarrow h \leq 1$$

O método de Euler é condicionalmente estável, com a condição $h \leq 1$.

ii) $a = \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}}$
$\Rightarrow \lambda = -1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$
$\Rightarrow \lambda_1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ $\quad P_1(-h/2, 0)$
$\lambda_2 = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ $\quad P_2(-3h/2, 0)$

Para cada um dos métodos ser estável, os pontos $P_1$ e $P_2$ têm de estar na zona de estabilidade.

As zonas de estabilidade do método de Euler implícito e do método de Crank-Nicolson contêm todos os pontos de abcissas negativas, logo são incondicionalmente estáveis para $a = 3/4$.

O método de Euler será condicionalmente estável.

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}h \geq -2 & \wedge \quad -\frac{1}{2}h \leq 0 \\ -\frac{3}{2}h \geq -2 & \wedge \quad -\frac{3}{2}h \leq 0 \end{cases}$$

sempre verdadeiro $(h>0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h \leq 4 \\ h \leq \frac{4}{3} \end{cases}$$

O método de Euler é condicionalmente estável para $a = -3/4$, com a condição $h \leq 4/3$.

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = \xi x^2 y \qquad y(a)=0, \quad y(b)=0$

a)

$$y(x+h) = y(x) + y^{(1)}(x)h + \frac{1}{2!}y^{(2)}(x)\cdot h^2 + \frac{1}{3!}y^{(3)}(x)\cdot h^3 + O(h^4)$$

$$y(x-h) = y(x) - y^{(1)}(x)\cdot h + \frac{1}{2!}y^{(2)}(x)\cdot h^2 - \frac{1}{3!}y^{(3)}(x)\cdot h^3 + O(h^4)$$

Somando as duas expressões:

$$y(x+h) + y(x-h) = 2y(x) + 0 + y^{(2)}(x)\cdot h^2 + 0 + O(h^4)$$

$$\Leftrightarrow y^{(2)}(x)h^2 = y(x+h) + y(x-h) - 2y(x) + O(h^4)$$

$$\Leftrightarrow y^{(2)}(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + \frac{O(h^4)}{h^2}$$

$$\Leftrightarrow y^{(2)}(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

b)

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + x_k y_k = \xi x_k^2 y_k$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2}y_{k-1} + \frac{-2 + h^2 x_k}{h^2}y_k + \frac{1}{h^2}y_{k+1} = \xi x_k^2 y_k$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{h^2 x_k^2}y_{k-1} + \frac{-2 + h^2 x_k}{h^2 x_k^2}y_k + \frac{1}{h^2 x_k^2}y_{k+1} = \xi y_k$$

Depois de escrita a matriz, os n primeiros valores próprios são calculados com o comando eigs(A,n,'sm')

Cada linha da matriz A tem N-2 elementos: o primeiro elemento multiplicado por y(2), o segundo por y(3), até ao último elemento que multiplica por y(N-1).

A primeira linha corresponde a k=2, a segunda a k=3, até à última que corresponde a k=N-1.

A linha correspondente a um k afastado dos extremos é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{h^2 x_k^2} & \frac{-2+h^2 x_k}{h^2 x_k^2} & \frac{1}{h^2 x_k^2} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $k=2 \qquad (y_1 = 0)$

$$\frac{1}{h^2 x_2^2}\cdot 0 + \frac{-2 + h^2\cdot x_2}{h^2 x_2^2}y_2 + \frac{1}{h^2 x_2^2}y_3 = \xi y_2$$

A primeira linha da matriz é

$$\begin{bmatrix} \frac{-2+h^2 x_2}{h^2 x_2^2} & \frac{1}{h^2 x_2^2} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $k=3$.

$$\frac{1}{h^2 x_3^2} y_2 + \frac{-2+h^2 x_3}{h^2 x_3^2} y_3 + \frac{1}{h^2 x_3^2} y_4 = \xi y_3$$

A segunda linha da matriz é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{h^2 x_3^2} & \frac{-2+h^2 x_3}{h^2 x_3^2} & \frac{1}{h^2 x_3^2} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $k=4$.

$$\frac{1}{h^2 x_4^2} y_3 + \frac{-2+h^2 x_4}{h^2 x_4^2} y_4 + \frac{1}{h^2 x_4^2} y_5 = \xi y_4$$

A terceira linha da matriz é:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{h^2 x_4^2} & \frac{-2+h^2 x_4}{h^2 x_4^2} & \frac{1}{h^2 x_4^2} & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para $k = N-2$ :

$$\frac{1}{h^2 x_{N-2}^2} y_{N-3} + \frac{-2+h^2 x_{N-2}}{h^2 x_{N-2}^2} y_{N-2} + \frac{1}{h^2 x_{N-2}^2} y_{N-1} = \xi y_{N-2}$$

A penúltima linha da matriz é.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{h^2 x_{N-2}^2} & \frac{-2+h^2 x_{N-2}}{h^2 x_{N-2}^2} & \frac{1}{h^2 x_{N-2}^2} \end{bmatrix}$$

Para $k=N-1$: $(y(N)=0)$

$$\frac{1}{h^2 x_{N-1}^2} y_{N-2} + \frac{-2+h^2 x_{N-1}}{h^2 x_{N-1}^2} y_{N-1} + \frac{1}{h^2 x_{N-1}^2} \cdot 0 = \xi y_{N-1}$$

A última linha da matriz fica:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{h^2 x_{N-1}^2} & \frac{-2+h^2 x_{N-1}}{h^2 x_{N-1}^2} \end{bmatrix}$$

c) escolhemos um h. a que corresponde um certo N
escrevemos o vetor x
escrevemos a matriz A
fazendo eigs(A,3,'sm') obtemos diretamente os 3 primeiros valores próprios de ~~y~~ ~~x~~ y

3.

a) Tanto o método de Runge-Kutta como o método de Euler permitem resolver problemas de valor inicial descritos por ODE, logo é sempre possível reescrever o programa usando um método de Runge-Kutta.
A região de estabilidade do método de Runge-Kutta inclui completamente a região de estabilidade do método de Euler, logo se o método de Euler é estável o de Runge-Kutta também o é.
Os métodos de Runge-Kutta são de maior ordem que os de Euler, logo, para o mesmo erro, necessitam de um menor número de passos.
O inconveniente da aplicação do método de Runge-Kutta é a complexidade acrescida do programa.

b) Num método de Runge-Kutta de passo variável, a diferença h entre valores consecutivos da variável independente não é mantida constante. Em zonas do domínio da função com comportamento "errático", usa-se um h bastante pequeno, mas quando a variação da função é previsível pode-se usar um passo maior.
Quando a função tem um comportamento "estável", o método de passo adaptativo permite reduzir bastante o número de passos, tornando o algoritmo muito mais rápido.

c) Uma forma de avaliar se o passo deve ser aumentado ou diminuído é estimar $y(t+h)$ de duas formas: usando um passo $h$ e usando um passo $h/2$. A diferença entre as duas estimativas permite avaliar o erro cometido e decidir aumentar ou diminuir o passo de acordo.

4.

a) No método de Jacobi, o valor de $\phi(i,j)$ em determinado ponto é obtido fazendo a média dos valores dos seus quatro vizinhos na iteração anterior.

$$\phi_{new}^{J}(2,2) = \frac{1}{4}(3{,}0+3{,}0+1{,}0+1{,}0) = 2{,}0$$
$$\phi_{new}(2,3) = \frac{1}{4}(3{,}0+1{,}0+1{,}0+1{,}0) = 1{,}5$$

b) No método de Gauss-Seidel, faz-se o procedimento do método de Jacobi, mas caso os novos valores dos vizinhos tenham sido calculados, usam-se no cálculo da média.

$$\phi_{new}^{GS}(2,2) = \phi_{new}^{J}(2,2) = 2{,}0$$

Assim,

$$\phi_{new}(2,3) = \frac{1}{4}\left(\phi_{old}(1,3) + \phi_{old}(2,4) + \phi_{old}(3,3) + \phi_{new}(2,2)\right)$$
$$= \frac{1}{4}(3{,}0+2{,}0+1{,}0+1{,}0) = 1{,}75$$

c) No método de sobre-relaxação:

$$\phi_{SRS}^{new} = \phi_{old} + \alpha(\phi_{GS} - \phi_{old})$$

$$y_{k+1} = y_k + y_k' \cdot h$$

$$\frac{dV}{dT} =$$

$$\phi_{SRS}(2,2) = 1{,}0 + \frac{3}{2}(2{,}0-1{,}0) = 2{,}5$$
$$\phi_{SRS}(2,3) = 1{,}0 + \frac{3}{2}(\phi_{GS}(2,3) - 1{,}0)$$

$$\phi_{GS}(2,3) = \frac{1}{4}(3{,}0+1{,}0+1{,}0+2{,}5) = \frac{7{,}5}{4} = \frac{15}{8}$$

$$\phi_{SRS}(2,3) = 1{,}0 + \frac{3}{2}\left(\frac{15}{8}-1\right)$$
$$= 1{,}0 + \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)$$

FC - 2º teste 2017/2018

1.

a) diferenças finitas centradas: $y''(x) = \frac{y(x+\Delta x) - 2y(x) + y(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} + O((\Delta x)^2)$

$$\frac{du}{dt} = D \frac{u(x+\Delta x,t) - 2u(x,t) + u(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}$$

método de Crank-Nicolson:

$$y_{n+1} = y_n + \left[f(y_{n+1}) + f(y_n)\right] \cdot \frac{h}{2}$$

Fica $u(i,n+1) = u(i,n) + \frac{D\Delta t}{2\,\Delta x^2} \Big[ u(i-1,n+1) - 2u(i,n+1) + u(i+1,n+1)$

$+ u(i-1,n) - 2u(i,n) + u(i+1,n) \Big]$

onde i é o índice do valor discretizado de x e n o índice do valor discretizado de t

b) $u(1,1) = 0$, $u(2,1) = 1$, $u(3,1) = 1$, $u(4,1) = 1$, $u(1,2) = 0$ e $u(4,1) = 0$

Aplicamos a equação obtida na alínea anterior, com $D=1$, $\Delta t = 1$ e $\Delta x = 1$.

$$u(2,2) = u(2,1) + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 1^2} \Big[ u(1,2) - 2u(2,2) + u(3,2) + u(1,1) - 2u(2,1) + u(3,1) \Big]$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( 0 - 2u(2,2) + u(3,2) + 0 - 2 \cdot 1 + 1 \right)$$
$$\Leftrightarrow u(2,2) = 1 + \frac{1}{2} \left( -2u(2,2) + u(3,2) - 1 \right)$$

Fazendo o mesmo para $u(3,2)$.

$$u(3,2) = u(3,1) + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 1^2} \Big[ u(2,2) - 2u(3,2) + u(4,2) + u(2,1) - 2u(3,1) + u(4,1) \Big]$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \left( u(2,2) - 2u(3,2) + 1 + 1 - 2 \cdot 1 + 1 \right)$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \left[ u(2,2) - 2u(3,2) + 1 \right)$$

$$\begin{cases} u(2,2) = 1 + \frac{1}{2} \left[ -2u(2,2) + u(3,2) - 1 \right] \\ u(3,2) = 1 + \frac{1}{2} \left[ u(2,2) - 2u(3,2) + 1 \right] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u(2,2) = 2 - 2u(2,2) + u(3,2) - 1 \\ 2u(3,2) = 2 + u(2,2) - 2u(3,2) + 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u(2,2) = 1 + u(3,2) \\ 4u(3,2) = 3 + u(2,2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(2,2) = \frac{1 + u(3,2)}{4} \\ 4u(3,2) = 3 + \frac{1 + u(3,2)}{4} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 15u(3,2) = 12 + 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} u(2,2) = \frac{1 + 13/15}{4} = 28/60 = 7/15 \\ u(3,2) = 13/15 \end{cases}$$

c) método de Euler: $y_{n+1} = y_n + f(y_n) \cdot h$

$$u(i,n+1) = u(i,n) + \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}\left[u(i-1,n) - 2u(i,n) + u(i+1,n)\right]$$

$$u(2,2) = u(2,1) + \frac{1.1}{1^2}\left[u(1,1) - 2u(2,1) + u(3,1)\right]$$
$$= 1 + 1.(0 - 2.1 + 1)$$
$$= 0$$

$$u(3,2) = u(3,1) + \frac{1.1}{1^2}\left[u(2,1) - 2u(3,1) + u(4,1)\right]$$
$$= 1.1(1 - 2.1 + 1) = 1$$

2. $$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial u}u^2 = 0$$

a) $$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx$$
$$g(x) = f^{(n)}(x)$$

para $n=1$: $$G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x)}{\partial x}e^{-ikx}\,dx$$

se $f(t)$ se anular em $\pm\infty$
$$= \left[f(x)\,e^{-ikx}\right]_{-\infty}^{+\infty} + ik\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-ikx}$$
$$= 0 + ikF(k)$$
$$= ikF(k)$$

Assim, se $f(t)$ se anular em $\pm\infty$, $G(k) = (ik)^n F(k)$

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-ikx} + TF\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) + TF\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} u\,e^{-ikx} + (ik)^3\,TF(u) + ik\,TF(u^2)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - ik^3\,\tilde{u} + ik\,TF(u^2) = 0$$

c) $$\tilde{U} = e^{-ik^3t}\,\tilde{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{U} = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-ik^3t}\tilde{u}\right)$$
$$= e^{-ik^3t}(-ik)\cdot TF(u^2) + ik^3\tilde{u}\,e^{-ik^3t}\tilde{u} - ik^3e^{-ik^3t}\,\tilde{u}$$
$$= -ik\,e^{-ik^3t}\,TF(u^2)$$

Lila é cabeçuda idiota