# Transformadas de Fourier discretas e códigos espetrais para PDEs

# Transformadas de Fourier

Dada uma função $f(t)$, a sua transformada de Fourier[1] (TF) pode ser dada por:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

A função $f(t)$ pode ser recuperada pela transformada de Fourier inversa:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

[1] Note que há várias definições para as transformadas de Fourier, aqui usamos a que está adaptada à transformada de Fourier discreta usada pelo Matlab.

Há necessidade de determinar a transformada de Fourier de forma numérica quando:

- O integral não se consegue calcular de forma analítica.
- Quando a função $f(t)$ não está definida por uma expressão analítica mas por uma tabela de dados, como acontece em aplicações de processamento de sinal onde a TF é uma ferramenta fundamental.

# Transformada de Fourier discreta

O par de transformadas de Fourier discretas é tal que:

- A função $f(t)$ está definida de forma discreta $f(j) = f(t_j)$ em $N$ pontos equidistantes $t_j = (j-1)\Delta t$ com $j = 1, 2 \ldots, N$.
- A transformada de Fourier discreta $F(k) = F(\omega_k)$ está definida em pontos equidistantes $\omega_k = (k-1)\Delta\omega$ com $k = 1, 2, \ldots N$.

## Relação entre $\Delta\omega$ e o intervalo total $N\Delta t$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t}$$

Desta forma as frequências discretas são 0 e as que correspondem a $1, 2, \ldots (N-1)$ ciclos no intervalo total $N\Delta t$.

# Frequências da transformada de Fourier Discreta

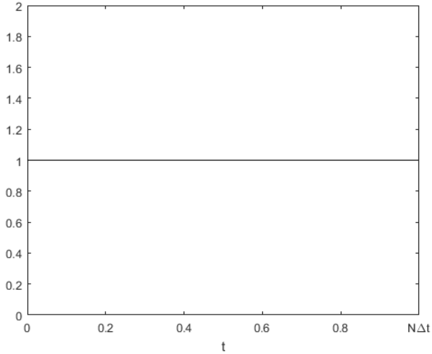


Figura: Frequência $\omega_1 = 0$

# Frequências da transformada de Fourier Discreta

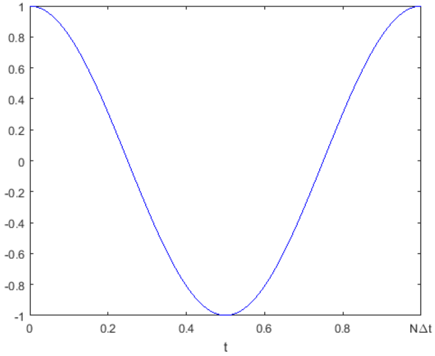


Figura: Frequência $\omega_2 = \frac{2\pi}{N\Delta t}$

# Frequências da transformada de Fourier Discreta

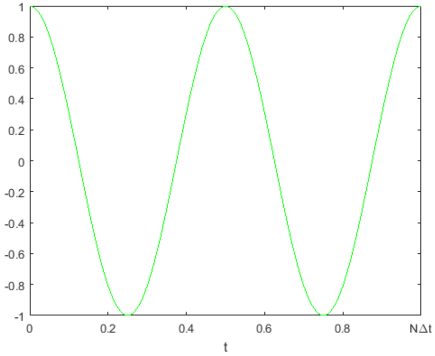


Figura: Frequência $\omega_3 = \frac{4\pi}{N\Delta t}$

# Frequências da transformada de Fourier Discreta

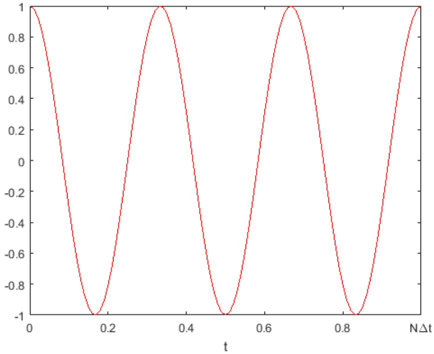


Figura: Frequência $\omega_4 = \frac{6\pi}{N\Delta t}$

# Frequências da transformada de Fourier Discreta

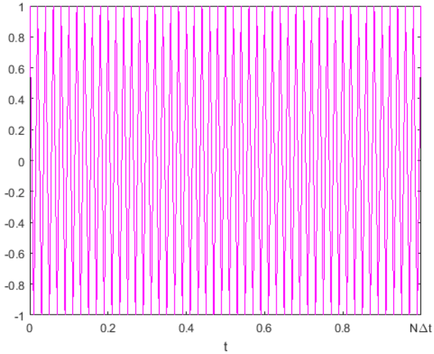


Figura: Frequência $\omega_{N/2} = \frac{\pi}{\Delta t}$

# Transformada de Fourier discreta

## Definições de transformadas de Fourier discretas adotadas no Matlab

$$F(k) = \sum_{j=1}^{N} f(j) e^{-2\pi i (j-1)(k-1)/N}$$

$$f(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} F(k) e^{2\pi i (j-1)(k-1)/N}$$

Algumas propriedades da transformada discreta:

- A transformada discreta $F(k)$ é periódica, i.e., $F(k+N) = F(k)$.
- Assim como a transformada de Fourier contínua, a transformada discreta de uma função real é uma função complexa com parte real par e parte imaginária ímpar.
- Se a função for real e par, a transformada de Fourier é real e par.
- Embora em geral $F(k)$ seja complexa, usualmente estamos interessados na **densidade espetral** que é dada por $|F(k)|^2$.

# Apresentação da transformada de Fourier discreta

- A transformada discreta do slide anterior assume $N$ frequências discretas:
$$0, \Delta\omega, 2\Delta\omega, \ldots (N-1)\Delta\omega.$$
- No entanto, especialmente para funções que têm frequências positivas e negativas, é conveniente mostrar a transformada entre as frequências
$$-\frac{N}{2}\Delta\omega \quad \text{e} \quad \left(\frac{N}{2}-1\right)\Delta\omega.$$

# Apresentação da transformada de Fourier discreta

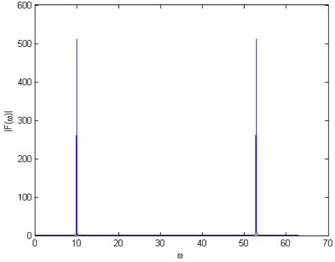


Figura: Duas representações da FFT de $\cos(10t)$.

Assim, as densidades espetrais das funções reais, que são pares, apresentam dois picos situados simetricamente, relativamente a $\omega = 0$, por cada frequência que contenham.

[Note que $\cos(\omega t) = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$.]

# Frequência de Nyquist

- À frequência $\omega_{\max} = N\Delta\omega/2 = \pi/\Delta t$ ou $f_{\max} = 1/(2\Delta t)$ dá-se o nome de **frequência de Nyquist** e é a maior frequência que se obtem com a amostragem de período $\Delta t$.
- Suponha que a função real $f(t)$ contem uma frequência $\omega_a$ superior a $\omega_{\max} = \pi/\Delta t$. É possível provar que essa frequência irá aparecer erradamente na posição $2\omega_{\max} - \omega_a$.

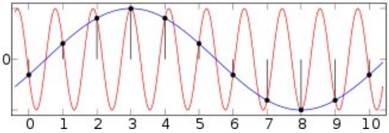


Figura: Duas sinusoides com frequências diferentes, 0.1 e 0.9, que se adequam à mesma amostragem com frequência igual a 1 (frequência de Nyquist igual a 0.5).

Note que a $1/\Delta t$ se dá o nome **frequência de amostragem**.

# Aliasing

- Para que este efeito, designado **aliasing**, não aconteça é necessário aumentar $\omega_{\text{max}}$, que se consegue diminuindo o $\Delta t$ da amostragem da função $f(t)$.
- Aliás, é fácil entender que se a função for composta por frequências elevadas é necessário um período de amostragem $\Delta t$ pequeno.

## Teorema de amostragem

O período da amostragem deve ser inferior a metade do menor período presente na função, ou seja

$$\Delta t < \frac{1}{2f_{\text{highest}}} = \frac{T_{\text{lowest}}}{2}$$

Na prática, devemos ter uma ideia da maior frequência presente na função e escolher $\Delta t$ adequado.

# Transformada de Fourier da derivada

Se $F(\omega)$ é a TF de $f(t)$, qual a TF de $h(t) = f'(t)$?

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt$$

que por integração por partes, fica

$$f(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = i\omega F(\omega)$$

se $f(t)$ for tal que se anule em $\pm\infty$.

De igual forma poderíamos obter para as derivadas de ordem superior:

$$g(t) = f^{(n)}(t)$$

$$G(\omega) = (i\omega)^n F(\omega)$$

# Classificação de PDEs de 2ª ordem de coeficientes constantes

Equações diferenciais às derivadas parciais, também conhecidas pela sigla PDE (partial differential equations) são equações diferenciais para uma função de várias variáveis.
As PDEs de segunda ordem (ordem da derivada de maior ordem presente na equação) de coeficientes constantes são do tipo

$$A\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+B\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}+C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}+D\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+E\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+Fu=g(x,y)$$

e podem classificar-se da forma:

1. Equações **hiperbólicas** se $B^2-4AC>0$.
2. Equações **parabólicas** se $B^2-4AC=0$.
3. Equações **elíticas** se $B^2-4AC<0$.

# Exemplos

Equações elíticas descrevem situações de equilíbrio e apenas têm condições fronteira.
As equações parabólicas e hiperbólicas descrevem processos que evoluem no tempo e têm condições inicias e de fronteira.

1. A equação de onda é uma equação hiperbólica

$$\nabla^2 q - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0$$

2. A equação de condução de calor é uma equação parabólica

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T$$

3. A equação de Laplace é uma equações elítica

$$\nabla^2 V = 0$$

# Equação paraxial

Considere a equação paraxial numa forma adimensional:

$$i\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$$

que descreve a propagação paraxial de um feixe de luz com uma envolvente $q(z, x)$ num meio homogéneo, ao longo da direção $z$ com difração na direção $x$.

Esta equação é uma PDE de 2ª ordem parabólica:

- $q$ é uma função de duas variáveis independentes.
- a equação contém derivadas relativamente às duas variáveis, $x$ e $z$.

Esta equação é uma PDE que, no espaço de Fourier, é uma equação diferencial ordinária.

# Equação paraxial no espaço de Fourier

Aplicando a transformada de Fourier segundo a variável $x$ a todos os termos da equação, obtem-se:

$$i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial q}{\partial z}\mathrm{e}^{-ikx}dx+\frac{1}{2}\int\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-ikx}dx=0$$

As frequências são, neste caso, frequências espaciais usualmente designadas pela letra $k$.

$$i\frac{\partial\tilde{q}}{\partial z}-\frac{k^2}{2}\tilde{q}=0,\qquad \tilde{q}=\mathrm{TF}(q)$$

que é uma equação diferencial ordinária de variáveis separáveis, cuja solução é

$$\tilde{q}(k,z)=\tilde{q}(k,0)\exp(-\tfrac{i}{2}k^2z).$$

Na aula prática verificaremos a evolução de alguns feixes com envolventes diferentes, resultando sempre em alargamento transversal devido à difração.

# PDE não linear - Equação não linear de Schrödinger (NLS)

Se a propagação do feixe se der de novo num meio homogéneo mas onde o índice de refração varia com a intensidade $I$ do feixe, isto é, $n = n_1 + n_2 I$, a equação normalizada que descreve a propagação é:

$$i\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + |q|^2 q = 0$$

Não é possível aplicar o método do slide anterior a equações não lineares. No entanto, existem métodos designados por **pseudo-espetrais** para os quais se dará um exemplo nos slides seguintes.

# Método pseudo-espetral

Escrevamos a NLS com a parte linear no membro esquerdo e a não linear no direito:

$$\frac{\partial q}{\partial z} - \frac{i}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = V(q), \quad V(q) = i|q|^2 q$$

que no espaço de Fourier, fica

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial z} + \frac{ik^2}{2}\tilde{q} = \tilde{V}$$

Multiplicando ambos os membros por $e^{ik^2 z/2}$, obtem-se

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial z}e^{ik^2 z/2} + \frac{ik^2}{2}\tilde{q}e^{ik^2 z/2} = \tilde{V}e^{ik^2 z/2}$$

que se pode transformar em

$$\frac{\partial \left(\tilde{q}e^{ik^2 z/2}\right)}{\partial z} = \tilde{V}e^{ik^2 z/2} \qquad (1)$$

# Método pseudo-espetral (continuação)

O método pseudo-espetral:

- Faz a transformada de fourier de $q$ e $V(q)$ em $z_i = 0$ e multiplica por $e^{ik^2 z_i/2}$.
- Resolve a ODE (1) por um método de valor inicial, obtendo $\tilde{q}e^{ik^2 z_f/2}$ em $z_f$.
- Volta ao espaço inicial multiplicando por $e^{-ik^2 z_f/2}$ e fazendo uma transformada de Fourier inversa, obtendo $q$ em $z = z_f$.

No entanto, no interior do algoritmo do método de valor inicial, o cálculo de $\tilde{V}e^{ik^2 z/2}$ tem que ser efetuado após a determinação de $V$ no espaço *real*.