Sistemas dinâmicos

Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico é uma **modelo matemático** que nos permite saber como o estado de um sistema **evolui no tempo**.

Um estado é inteiramente conhecido dados os valores de um certo número de grandezas a que chamamos variáveis de estado. O conjunto dessas variáveis define o espaço de estados.

Essas variáveis podem ser contínuas ou discretas. Se forem contínuas, fala-se de um espaço de fases.

Se são necessárias n variáveis contínuas para descrever cada estado, temos um espaço de fases n–dimensional e cada estado é descrito inteiramente pelas suas coordenadas no **espaço de fases**.

Sistemas dinâmicos

O conceito de evolução temporal do sistema exige, obviamente, que seja definida uma quantidade única, a que chamamos tempo, que nos permite ordenar os estados. O tempo pode também ser discreto ou contínuo.

As regras de evolução do sistema com o tempo podem ser:

- **estocásticas** (ou aleatórias), se, dado um estado num certo instante, apenas conhecemos as probabilidades de encontrar o sistema noutros estados em momentos subsequentes;
- **determinísticas** se a evolução está determinada sem ambiguidade.

Sistemas dinâmicos

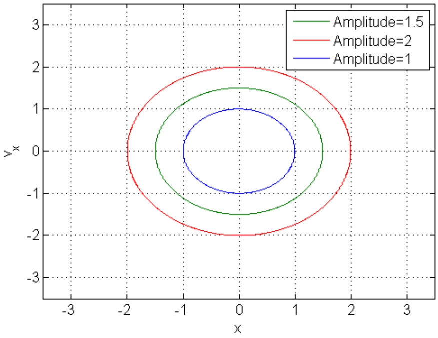
Vamos restringir-nos hoje ao estudo de sistemas dinâmicos com as seguintes características:

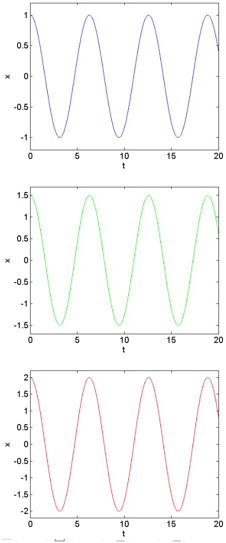
- O espaço de fases é contínuo.
- O tempo é contínuo.
- As regras de evolução são determinísticas.

É evidente que os problemas de valor inicial que temos tratado desde o início do semestre são sistemas dinâmicos. As regras de evolução, neste caso, são equações diferenciais.

 Sistemas dinâmicos

Espaço de fases do oscilador harmónico





Espaço de fases

Como já foi dito, o espaço de fases de um sistema dinâmico é um espaço com direções que representam cada uma das variáveis necessárias para especificar o estado instantâneo de um sistema.

Para o tipo de sistemas que estamos a estudar, a evolução do sistema é representada por uma linha contínua nesse diagrama do espaço de fases. A essa linha vamos chamar **trajetória** ou **órbita**.

Equações diferenciais

Vamos primeiro aprofundar a nossa classificação das equações diferenciais ordinárias, para além da simples especificação da sua ordem.

Vamos começar por nos restringir a equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y,t)$$

Este tipo de equações pode ser **linear** ou **não linear**. Se for linear, a derivada tem que variar linearmente com a variável dependente:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c_1(t)y + c_2(t)$$

Note-se que c_1 e c_2 podem ser funções complicadas de t e a equação continua a ser linear.

Equações diferenciais

Não é difícil arranjar exemplos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não lineares:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos y - t$$

Na primeira equação, a derivada da variável dependente y não depende explicitamente do tempo, apenas de si própria. Diz-se que a equação é **autónoma**.

Num sistema de equações autónomas, trajetórias diferentes não se cruzam.

Equações diferenciais

Na segunda equação,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos y - t$$

a derivada depende explicitamente do tempo: trata-se de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não linear e **não autónoma**.

As classificações linear vs. não linear e autónoma vs não autónoma podem, obviamente, ser generalizadas a equações diferenciais de ordem superior. Uma equação diferencial autónoma de segunda ordem, por exemplo, será do tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = f\left(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

Equações diferenciais

Uma equação diferencial linear de segunda ordem é do tipo

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = c_1(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + c_2(t)y + c_3(t)$$

Alguns exemplos de equações diferenciais de 2ª ordem não lineares:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \cos\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) - t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Exemplo: equações de Lotka-Volterra

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1 x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + x_1 x_2$$

- Sistema de equações não linear e autónomo
- x_1 e x_2 são as variáveis representáveis num espaço de fases 2D

Pontos críticos

Ponto crítico – ponto (x_1, x_2) para o qual as duas derivadas são nulas. No caso das equações Lotka-Volterra, são

$$(0, 0) \quad \text{e} \quad (1, 1)$$

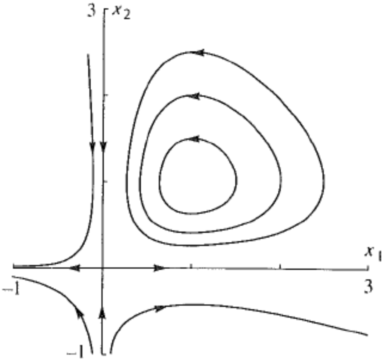
Note que (x_1, x_2) pode ser igual a qualquer um destes pontos críticos para todo o tempo $(-\infty < t < \infty)$ - neste sentido é um estado de **equilíbrio**.

Os sistemas dinâmicos que abordamos aqui, dados por problemas de valor inicial de ODEs, tem uma única solução. Assim, uma trajetória não pode passar por estes pontos de equilíbrio num determinado tempo t_0 finito. Pode, no entanto:

- aproximar-se destes pontos de equilíbrio quando $t \to \infty$ (*sinks*)
- afastar-se destes pontos de equilíbrio quando $t \to -\infty$ (*sources*)

Órbitas associadas a pontos críticos das equações Lotka-Volterra

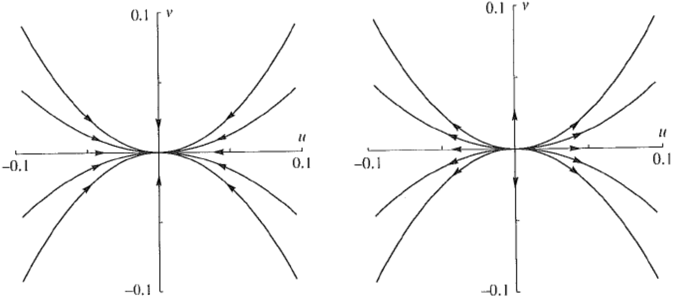
Ponto $(0,0)$ designa-se por **ponto sela** – há trajetórias a terminar e outras a iniciar-se neste ponto.
Ponto $(1,1)$ designa-se por **centro** – as órbitas associadas a este ponto são fechadas e correspondem a soluções oscilatórias.



Órbitas associadas a pontos críticos

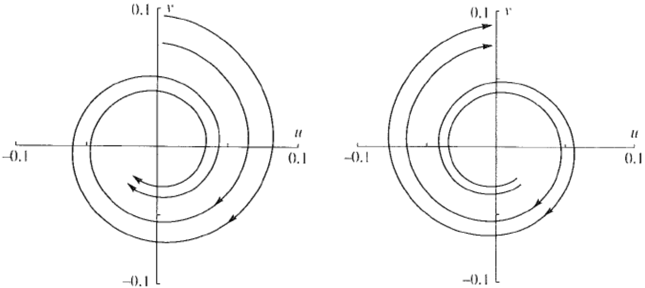
Outros pontos críticos:

- **Nodos** - estáveis ou instáveis.

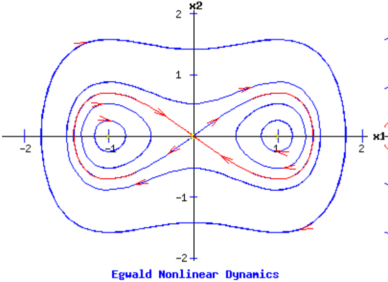


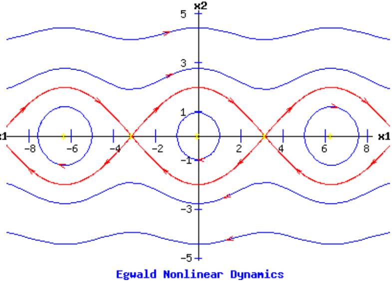
Órbitas associadas a pontos críticos

- **Pontos espirais** - aos quais estão associadas trajetórias espirais.



Órbitas homoclínicas e heteroclínicas





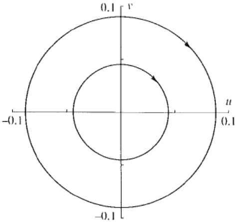
Soluções periódicas de um sistema autónomo 2D

As soluções periódicas de sistemas autónomos 2D são de dois tipos:

1. **Família de soluções periódicas**

$$\frac{dx}{dt} = y(1 + r^2)$$
$$\frac{dy}{dt} = -x(1 - r^2),$$

onde $r^2 = x^2 + y^2$

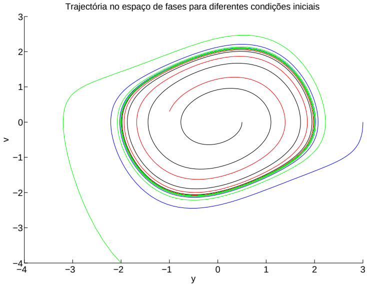


Soluções periódicas de um sistema autónomo 2D

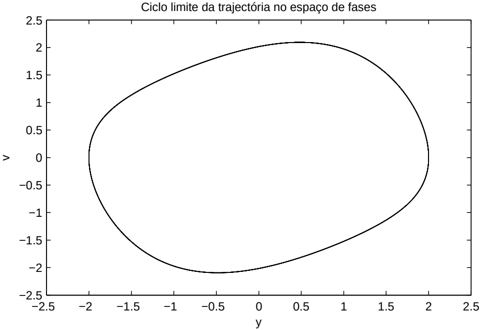
2. **Ciclo limite** – solução periódica isolada.

A figura mostra as trajetórias do oscilador de van der Pol ($\varepsilon = 0.3$) nos 10% finais do tempo para várias condições iniciais.

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \varepsilon\,(y^2 - 1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0$$



Oscilador de van der Pol



Observamos que a trajetória, para diferentes condições iniciais, se aproxima de um ciclo limite, correspondente a uma oscilação.

Um ciclo limite é uma das variedades daquilo a que se chama um **atrator**.

Oscilador de van der Pol

O oscilador de van der Pol:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon\left(y^2 - 1\right)\frac{dy}{dt} + y = 0$$

pode descrever o comportamento de um circuito elétrico não linear. O termo de amortecimento é não linear e descreve realmente um amortecimento para $y^2 > 1$ mas descreve uma amplificação para $y^2 < 1$.

Como é usual, escrevamos a equação de 2ª ordem como duas equações de 1ª ordem

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\varepsilon\left(y^2 - 1\right)v - y \\ \dfrac{dy}{dt} = v \end{cases}$$

Oscilador de van der Pol

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\varepsilon\,(y^2 - 1)\,v - y \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v \end{cases}$$

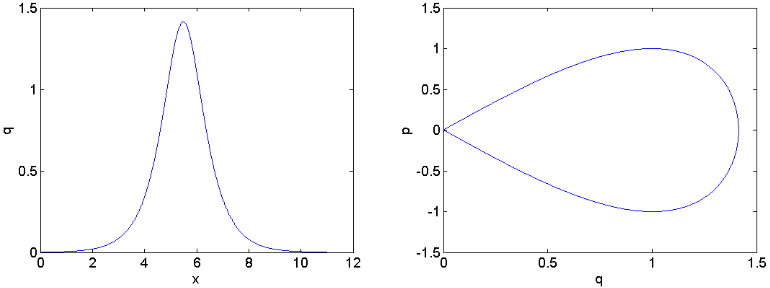
O único ponto crítico é o $(0,0)$ que é:

- Um ponto espiral instável para $0 < \varepsilon < 2$.
- Um nodo instável para $\varepsilon \geq 2$.

Órbitas homoclínicas

Uma órbita homoclínica é uma órbita que liga um ponto de sela a si próprio.
Exemplo: órbita homoclínica da equação

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}x^2} - 2\beta q + 2q^3 = 0 \quad \text{com} \quad \beta = 1.$$



Equação com órbita homoclínica

A equação

$$\frac{d^2q}{dx^2} - 2\beta q + 2q^3 = 0$$

descreve a distribuição transversal de feixes de luz que se propagam de forma paraxial num meio ótico com efeito de Kerr.

Tem soluções localizadas com a forma de uma **secante hiperbólica que são designadas por solitões** e que correspondem a uma órbita homoclínica.

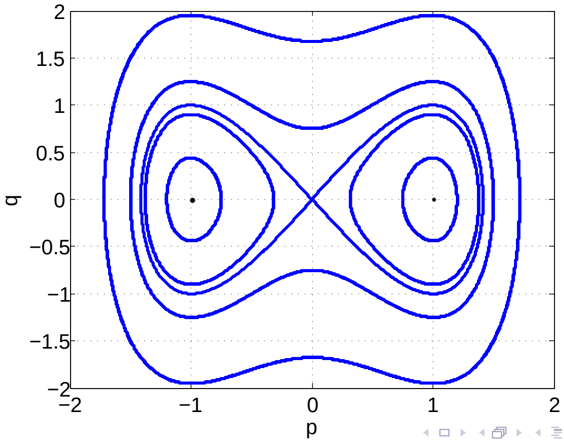
Escrita como duas equações de 1ª ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dx} = 2\beta q - 2q^3 \\[2ex] \dfrac{dq}{dx} = p \end{cases}$$

Espaço de fases com órbitas homoclínicas

O sistema de equações tem 3 pontos críticos:

- $(0,0)$ é um ponto de sela;
- $(-\sqrt{\beta},0)$ e $(\sqrt{\beta},0)$ são centros.



Soluções caóticas

Alguns sistemas dinâmicos apresentam soluções designadas caóticas.

- Estes sistemas são tais que uma pequena alteração das condições iniciais pode levar a soluções muito diferentes entre si, diferença que cresce exponencialmente com o tempo.
- Para que se observe caos, é necessário que o sistema dinâmico seja **não linear**.
- O Teorema de Poincaré–Bendixon diz-nos que **3 é a dimensão mínima** do espaço de fases a partir da qual o caos pode acontecer.

Equações de Lorenz — Caos

Lorenz obteve as conhecidas equações que têm agora o seu nome numa tentativa de obter uma simplificação grosseira das equações de Navier–Stokes aplicadas a um fluido num recipiente com o fundo e o topo a temperaturas diferentes. Sabe-se que à medida que esta diferença aumenta, se pode observar uma transição de um estado estacionário, para a convecção e, finalmente, para um movimento caótico. As equações acopladas, duas das quais não lineares, são:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma\,(y - x) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -xz + rx - y \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - bz \end{cases}$$

Equações de Rössler — Caos

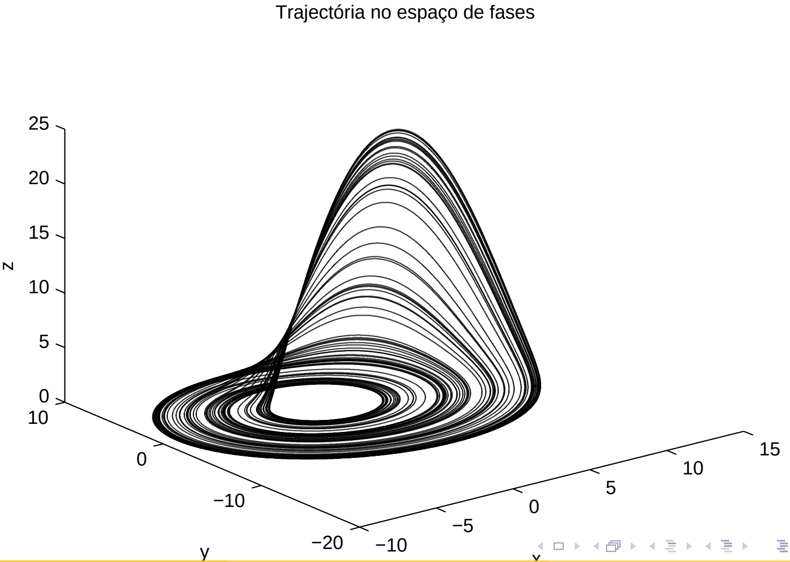
As equações de Rössler são:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y - z \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + ay \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = b + (x - c)z \end{cases}$$

Rössler criou estas equações com o objetivo de obter um sistema com um comportamento com características semelhantes ao modelo de Lorenz, mas que fosse mais fácil de analisar qualitativamente. Vamos usar os valores originais de Rössler: $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 5.7$.

Como vemos no slide seguinte, ao fim de um tempo suficientemente grande, a trajetória não tende para um ciclo limite, mas também não se afasta de uma zona restrita do espaço de fases. A trajetória mantém-se próxima de uma estrutura fractal chamada **atrator estranho**.

Equações de Rössler — $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 5.7$



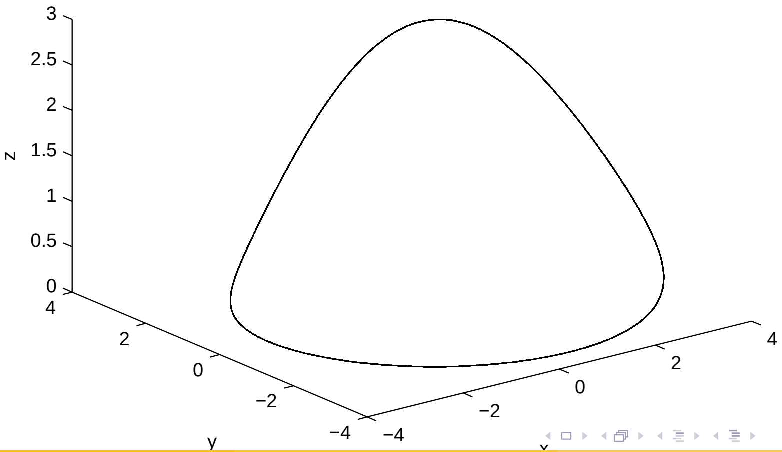
Duplicação do período — Caminho para o caos

Não podemos, no entanto, concluir que as soluções são caóticas para todos os valores dos parâmetros. Vamos manter a e b e alterar c. Começamos por $c = 2.0$ e depois experimentamos $c = 3.5$ e $c = 4.1$.

Como pode ver nos três slides seguintes, para todos estes valores de c a solução não é caótica. Se definirmos o período como o número inteiro de voltas em torno de uma zona central que o ciclo limite realiza antes de se fechar sobre si mesmo, concluímos que ocorre duas vezes uma duplicação do período.

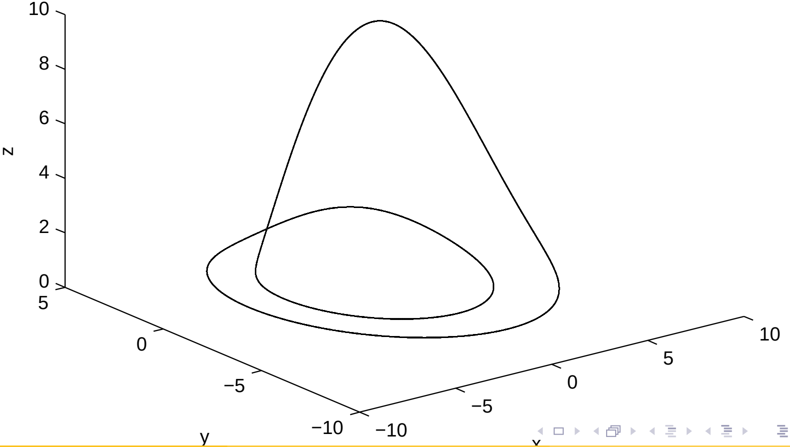
Equações de Rössler — $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 2.0$

Ciclo limite da trajectória no espaço de fases



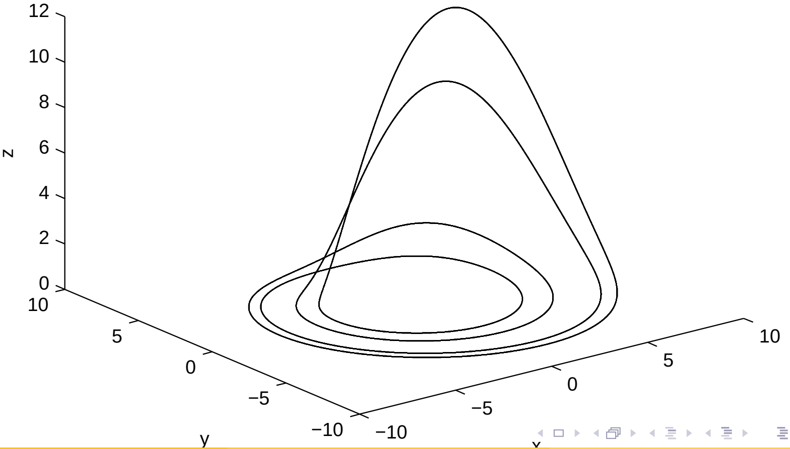
Equações de Rössler — $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 3.5$

Ciclo limite da trajectória no espaço de fases



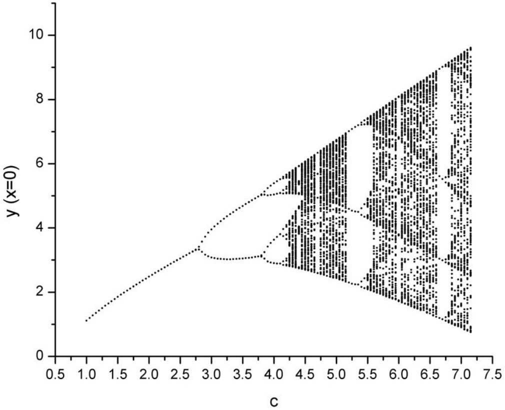
Equações de Rössler — $a = 0.2$, $b = 0.2$ e $c = 4.1$

Ciclo limite da trajectória no espaço de fases



Duplicação do período — Caminho para o caos

Se varrermos uma dada gama de valores de c, e, para cada valor e para tempos suficientemente grandes, calcularmos numericamente, por exemplo, todos os valores de y para $x = 0$ (ou os máximos de y), podemos representar um diagrama de bifurcações que nos dá algumas indicações sobre como se chega ao caos.



Características do caos

- Soluções são extremamente sensíveis às condições iniciais.
- Caso tenha soluções periódicas, estas são densas. As trajetórias são cíclicas não exatamente iguais mas ocupam uma região limitada do espaço de fases.
- Estas características tornam-nas difíceis de integrar numericamente, uma vez que o erro numérico acumulado pode levar a solução numérica para uma outra completamente diferente.

Expoentes de Lyapunov

Como já foi referido anteriormente, condições iniciais ligeiramente diferentes resultam em soluções cuja diferença cresce exponencialmente com o tempo, ou seja, da ordem de $\exp(\lambda t)$
À razão exponencial λ chama-se *expoente de Lyapunov*.

Para calcularmos este expoente de Lyapunov podemos:

- integrar o sistema desde a condição inicial $\mathbf{z}_0$ até um tempo longo t, obtendo $\mathbf{z}(t)$;
- voltar a integrar o sistema para condições iniciais ligeiramente diferentes $\mathbf{z_0} + \mathbf{d_i}$ até o mesmo tempo t, obtendo $\mathbf{z}_i(t)$;
- avaliar as diferenças nas soluções.

Mais concretamente, podemos efetuar os seguintes cálculos:

$$\lambda(\mathbf{z_0}) = \left\langle \frac{1}{t} \log\left(\frac{|\mathbf{z_i}(t) - \mathbf{z}(t)|}{|d_i|}\right)\right\rangle$$

onde $\langle ... \rangle$ designa a média sobre vários desvios $\mathbf{d_i}$.

Oscilador de van der Pol forçado

Vamos obter as soluções de um oscilador de van der Pol forçado:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon\,(y^2 - 1) \cdot \frac{dy}{dt} + y = 1.5\cos(1.7t)$$

O comportamento é caótico. Isso não contraria o teorema de Poincaré–Bendixon, porque como as duas equações de primeira ordem agora não são autónomas, as trajetórias no plano (y, v) já se podem cruzar. Podemos obter um sistema de 3 equações autónomas se acrescentarmos uma nova variável dependente $\tau = t$:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\varepsilon\,(y^2 - 1) \cdot v - y + 1.5\cos(1.7\tau) \\ \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dfrac{d\tau}{dt} = 1 \end{cases}$$

Oscilador de van der Pol forçado