Universidade de Aveiro
Departamento de Física

Exame Prático de Recurso — Parte 1

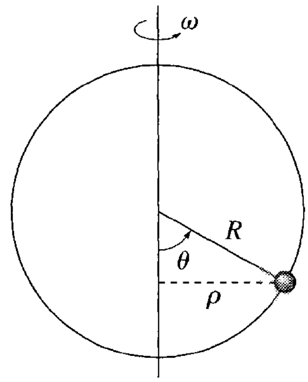
Física Computacional — 2018/2019

9 de julho de 2019

Duração: 2 horas

- Crie no *desktop* uma pasta com nome dado pelo seu número mecanográfico seguido da sua turma prática (98765P4, por exemplo). Guarde os seus *scripts* nessa pasta, **um por alínea**.
- Quando tiver terminado, chame o professor vigilante para recolher o teste. Em nenhum momento pode fazer login com outra conta. Não apague o seu teste do *desktop*, mesmo depois de o professor o ter recolhido.

1.[12.0 v.] Um arame circular fino de raio R é feito rodar com uma velocidade angular constante ω em torno do seu eixo vertical. Um conta de massa m pode deslizar sem atrito ao longo do arame. Note que $\omega \neq \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$.



A equação diferencial para a coordenada generalizada θ é

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \left(\omega^2 \cos\theta - \frac{g}{R}\right)\sin\theta.$$

Considere $R = 0.2\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

a)[5.0 v.] Use um método de Runge–Kutta de 4ª ordem para estimar e representar graficamente a evolução temporal de $\theta(t)$, quando

$$\omega = 5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}, \qquad \theta(0) = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}, \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0.$$

Descreva o movimento. Verifique se a oscilação de θ é periódica e, caso o seja, calcule o período (usando interpolação).

b)[1.5 v.] Estime e represente graficamente a evolução temporal de $\theta(t)$, usando as mesmas condições iniciais, mas com $\omega = 8\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ e com $\omega = 9\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Comente as diferenças do movimento.

c)[1.5 v.] Use agora

$$\omega = 9\,\mathrm{rad\,s^{-1}}, \qquad \theta(0) = \operatorname{acos}\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right), \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0.$$

Descreva o movimento.

d)[4.0 v.] Repita a alínea anterior usando um método de Runge–Kutta de passo adaptativo (`ode45`).

2.[8.0 v.] Considere a equação diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{(x-\lambda)y + 1.6\sin x\cos x(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)}{1 - 0.8\sin^2 x},$$

com $x(0) = 0$. Ao longo deste exercício pode usar sempre $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)_{x=0} = 1$.

a)[2.0 v.] Comece por considerar $\lambda = 2.2$ e use o método de Euler–Cromer para obter a solução numérica de $y(x)$ de $x = 0$ até $x = \pi$. Represente-a graficamente.

Considere a partir de agora que temos a condição fronteira $y(\pi) = 0$. Nestas condições, temos um problema de valores próprios de Sturm–Liouville. A teoria diz-nos que os valores próprios são reais e ordenados:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots .$$

Sabe-se ainda que o vetor próprio de ordem n cruza $n-1$ vezes o eixo dos x.

b)[4.5 v.] Use o método de *shooting* para determinar os valores próprios λ_1 e λ_2. Represente graficamente os vetores próprios associados.

c)[1.5 v.] Determine o valor próprio λ_n na proximidade de 40. Qual é o valor de n?