Convergência do Método de Euler

Convergência de um método numérico para ODEs: - um método converge se **a diferença entre a solução numérica e a solução exata** em cada ponto **tende para zero quando** h **tende para zero**.

Considere a ODE

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y,t)$$

Pode provar-se que se $f(y,t)$ obedecer a determinadas condições (ser infinitamente diferenciável ou obedecer à condição de Lipschitz), o método de Euler é convergente.

O mesmo se aplica a sistemas de ODEs como é o caso dos problemas de movimento a 3 dimensões.

Erro local

Sabemos que existe um $t' \in (t_0, t_0 + h)$ tal que

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + y^{(1)}(t_0)h + \frac{1}{2}y^{(2)}(t')h^2$$

No método de Euler estimamos $y(t_0 + h)$ usando

$$y_1 = y(t_0) + y^{(1)}(t_0)h = y(t_0) + f(y_0, t_0)h$$

usando a expressão anterior, podemos concluir que o erro cometido no passo 1 é de ordem h^2, ou seja

$$\left| \underbrace{y_1}_{\text{estimativa}} - \underbrace{y(t_1)}_{\text{valor exato}} \right| = \text{const.}\, h^2$$

Ao erro cometido em cada passo dá-se o nome de **erro local**.

Erro global

Suponha que a equação diferencial acima é integrada numericamente desde t_0 a t_f com um passo h usando $N = (t_f - t_0)/h + 1$ pontos. O erro

$$\left|y_N - y(t_f)\right|$$

designa-se por **erro global** e deve-se aos erros acumulados ao longo de todos os passos.

Pode provar-se que no método de Euler o erro global é de ordem h, ou seja

$$\left|y_N - y(t_f)\right| = \text{const.}\, h$$

Podemos explicar qualitativamente este resultado notando:

- O erro local é da ordem de h^2.
- O número de pontos aumenta linearmente com h^{-1}.

O erro global aumenta com o número de pontos e com o erro introduzido em cada passo, sendo da ordem de h.

Erro global e número de passos

Dado que h é inversamente proporcional ao número de pontos

$$\left| y_N - y(t_f) \right| = \text{const.}\, N^{-1}$$

logo

$$y_N = \pm\text{const.}\, N^{-1} + y(t_f).$$

Um gráfico do valor numérico y_N em função de N^{-1} deve ter como ordenada na origem o valor exato $y(t_f)$

Estabilidade

O estudo de estabilidade que abordamos nestas aulas diz respeito a equação diferenciais

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y,t), \quad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

cuja solução $y(t)$ exata permanece **limitada** no intervalo de integração.

O que se endende por estabilidade?
Um método numérico de integração da equação (1) pode ser:

- **Estável** - se a solução numérica não diverge para nenhum h.
- **Condicionalmente estável** - se a solução numérica não diverge para determinadas escolhas de h.
- **Instável** - a solução numérica diverge (cresce continuamente) para todas as escolhas de h.

O método de Euler é convergente para uma classe grande de funções $f(y,t)$, no entanto, nem sempre é estável.

Estudo da estabilidade

Vamos fazer o estudo do caso mais simples em que

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) \equiv f(y) \qquad \text{a ODE diz-se autónoma.}$$

E ainda o caso mais simples

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y \qquad \text{ODE linear}$$

cuja solução é

$$y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$$

que não cresce com t se $\lambda \leq 0$.

Estudo da estabilidade

No caso de uma equação diferencial de ordem n, teríamos n equações de 1^a ordem e consequentemente n λ's, podendo estes ser complexos.

Assim, consideremos um caso geral em que λ é complexo

$$\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$$

e $\lambda_r \leq 0$ para que a solução da equação não cresça com t.

O método de Euler aplicado à equação diferencial com $f(y)$ é da forma

$$y_k = y_{k-1} + f(y_{k-1})h = y_{k-1} + \lambda y_{k-1}h = y_{k-1}(1+\lambda h) = y_0(1+\lambda h)^k$$

A solução numérica y_k não cresce se

$$|1+\lambda h| \leq 1 \quad \rightarrow \quad |1+\lambda h|^2 \leq 1 \quad \rightarrow \quad (1+\lambda_r h)^2 + \lambda_i^2 h^2 \leq 1.$$

Estudo da estabilidade

Analisemos 2 casos particulares:

- Se λ é puramente real, $\lambda \equiv \lambda_r \leq 0$, para

$$h \leq \frac{2}{|\lambda_r|}$$

  o método de Euler é estável. Neste caso o método de Euler é condicionalmente estável.
- Se λ é puramente imaginário, $\lambda \equiv \lambda_i$, o método de Euler é instável.

Caso a função $f(y)$ seja não linear é usual estudar-se a estabilidade da equação linearizada, i.e., aproximando a $f(y)$ pela expansão de Taylor de 1ª ordem.

Exemplo: oscilador harmónico

A equação para uma mola de constante K (oscilador harmónico)

$$F = -Ky \quad \rightarrow \quad m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -Ky$$

ou seja

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{K}{m}y = -\omega^2 y, \qquad \omega^2 = \frac{K}{m}$$

que escrita como um sistema de duas equações diferenciais de 1ª ordem fica

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 y$$

Exemplo: oscilador harmónico

Neste caso as funções f_y e f_v já são lineares, logo o sistema linear é idêntico ao original e pode ser escrito na forma matricial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$$

para o qual os λ's são os valores próprios da matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

que são

$$\lambda = \pm i\omega$$

Como os valores próprios são imaginários puros, o método de Euler é, neste caso, instável.

O mesmo se aplica a muitos outros movimentos oscilatórios.

Instabilidade do método de Euler aplicado ao O.H.

A instabilidade do método de Euler aplicado ao oscilador harmónico pode confirmar-se pela não conservação da energia mecânica estimada numericamente.

Método de Euler

$$\begin{cases} v_{k+1} = v_k + f(t_k, y_k, v_k) \cdot h \\ y_{k+1} = y_k + v_k \cdot h \end{cases}$$

Neste caso, fica

$$\begin{cases} v_{k+1} = v_k - \omega^2 y_k \cdot h \\ y_{k+1} = y_k + v_k \cdot h \end{cases}$$

A energia total no instante t_k é a soma da energia cinética com a energia potencial:

$$E_k = \frac{1}{2} K y_k^2 + \frac{1}{2} m v_k^2$$

Instabilidade do método de Euler aplicado ao O.H.

$$
\begin{aligned}
E_{k+1} &= \frac{1}{2}Ky_{k+1}^2 + \frac{1}{2}mv_{k+1}^2 \\
&= \frac{1}{2}K\left(y_k + v_k \cdot h\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(v_k - \frac{K}{m}y_k \cdot h\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}K\left(y_k^2 + v_k^2 \cdot h^2 + 2y_k v_k \cdot h\right) + \frac{1}{2}m\left(v_k^2 + \frac{K^2}{m^2}y_k^2 \cdot h^2 - 2v_k\frac{K}{m}y_k \cdot h\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}Ky_k^2 + \frac{1}{2}mv_k^2\right) + \frac{1}{2}Kh^2\left(v_k^2 + \frac{K}{m}y_k^2\right) \\
&= E_k + \frac{1}{2}Kh^2\left(v_k^2 + \frac{K}{m}y_k^2\right)
\end{aligned}
$$

$$E_{k+1} > E_k$$

A energia total, que se devia conservar, aumenta em todos os passos.

Métodos implícitos

Uma das possibilidades para conseguir a estabilidade é usar o **Euler implícito**

$$y_{k+1} = y_k + f(y_{k+1}, t_{k+1})h$$

ou o método dos trapézios (também conhecido por **Crank-Nicolson**)

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y,t)dt \approx y_k + \frac{h}{2}\left[f(y_{k+1}, t_{k+1}) + f(y_k, t_k)\right]$$

Nestes casos, y_{k+1} aparece nos dois membros da equação logo em cada passo temos que resolver uma equação que pode ser não linear se f for não linear. Estamos perante métodos **implícitos** que ganham em estabilidade mas perdem pelo aumento da complexidade de cada passo.

Método de Euler-Cromer

Uma modificação do método de Euler, usado especialmente para conseguir estabilidade em problemas de movimento oscilatório, é o método de **Euler-Cromer**, também conhecido como **Euler semi-implícito** ou **Euler semi-explícito**, que se descreve abaixo.

Método de Euler–Cromer

$$\begin{cases} v_{k+1} = v_k + f(t_k, y_k, v_k) \cdot h \\ y_{k+1} = y_k + v_{k+1} \cdot h \end{cases}$$

Neste caso, fica

$$\begin{cases} v_{k+1} = v_k - \omega^2 y_k \cdot h \\ y_{k+1} = y_k + v_{k+1} \cdot h \end{cases}$$

No método de Euler–Cromer, a energia varia durante cada ciclo de oscilação, mas conserva-se de ciclo para ciclo (não vamos fazer a demonstração formal).

Estabilidade do método de Euler implícito

Aplicando Euler implícito à equação anterior $dy/dt = \lambda y$

$$y_k = y_{k-1} + \lambda y_k h \quad \rightarrow \quad y_k = (1 - \lambda h)^{-1} y_{k-1} = y_0 (1 - \lambda h)^{-k}$$

A solução numérica não cresce se

$$\frac{1}{|1 - \lambda h|} \leq 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{(1 - \lambda_r h)^2 + \lambda_i^2 h^2} \leq 1$$

que é verdade sempre que $\lambda_r \leq 0$

O método é **incondicionalmente estável** para $\lambda_r \leq 0$.

Estabilidade do método de Crank-Nicolson

Aplicando o método de Crank-Nicolson à equação anterior $dy/dt = \lambda y$

$$y_k = \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} y_{k-1} \quad \rightarrow \quad y_k = y_0 \left(\frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right)^k$$

A solução não cresce se

$$\left| \frac{1 + \frac{\lambda h}{2}}{1 - \frac{\lambda h}{2}} \right| \leq 1$$

ou seja

$$\frac{\left(1 + \frac{\lambda_r h}{2}\right)^2 + \frac{\lambda_i^2 h^2}{4}}{\left(1 - \frac{\lambda_r h}{2}\right)^2 + \frac{\lambda_i^2 h^2}{4}} \leq 1$$

Sempre que $\lambda_r \leq 0$, o numerador é menor ou igual ao denominador e a condição acima é verdadeira.

O método é **incondiconalmente estável** para $\lambda_r \leq 0$.

Ordem dos métodos implícitos

Pode provar-se que o erro global de:

- O método de Euler implícito é de ordem h.
- O método de Crank-Nicolson é de ordem h^2.

Aplicação do método de Euler implícito ao O.H.

Aplicado ao oscilador harmónico

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + v_{k+1} \cdot h \\ v_{k+1} = v_k - \omega^2 y_{k+1} \cdot h \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} y_{k+1} = \dfrac{y_k + v_k \cdot h}{1 + \omega^2 h^2} \\ v_{k+1} = v_k - \omega^2 y_{k+1} \cdot h \end{cases}$$

Aplicação do método de Euler implícito ao O.H.

Escrito em notação matricial

$$A\mathbf{Z} = \mathbf{b}$$

onde A é uma matriz constante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ \omega^2 h & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{Z}$ é o vetor que queremos calcular e $\mathbf{b}$ um vetor de termos independentes que varia de passo para passo.

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

O sistema $A\mathbf{Z} = \mathbf{b}$ pode ser resolvido com a rotina `linsolve` do Matlab.

Aplicação do método de Crank-Nicolson ao O.H.

Aplicado ao oscilador harmónico

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + (v_{k+1} + v_k) \cdot \dfrac{h}{2} \\ v_{k+1} = v_k - \omega^2 (y_{k+1} + y_k) \cdot \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

Escrito em notação matricial

$$A\mathbf{Z} = \mathbf{b}$$

onde A é uma matriz constante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{h}{2} \\ \omega^2 \frac{h}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicação do método de Crank-Nicolson ao O.H.

$\mathbf{Z}$ é o vetor que queremos calcular e $\mathbf{b}$ um vetor de termos independentes que varia de passo para passo.

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_k + v_k \cdot \frac{h}{2} \\ v_k - \omega^2 y_k \cdot \frac{h}{2} \end{pmatrix}$$

O sistema $A\mathbf{Z} = \mathbf{b}$ pode ser resolvido com a rotina `linsolve` do Matlab.