Exame teórico - 25 Junho 2013

Exercício 1:

a) $\frac{dv}{dt} = -0{,}2v - 2\cos(2t)v^2, \quad v(0) = 1$

É uma ODE de valor inicial

Neste caso estamos perante o método de Euler. Este é um algoritmo simples que costuma ser utilizado para problemas de valor inicial que transforma a equação algébrica de diferenças finitas.

b) $\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1; \; T(0,t) = 0; \; T(1,t) = 0$ e $T(x,0) = f(x)$ (*)

O método de Crank-Nicolson está presente nesta equação. Este método consiste em usar diferenças finitas progressivas para a derivada em ordem ao tempo de 1ª ordem. Como é um método implícito é incondicionalmente estável.

(*) É uma equação de condução do calor - PDE c/ problema de valor inicial

c) $\frac{d^2\phi}{dx^2} + K_2 f(x)\phi = 0, \quad \phi(0) = \phi(1) = 0,$ onde K_2 é um parâmetro desconhecido $\rightarrow$ problema de valores próprios

Estamos perante o método de Shooting que consiste em arbitrar um conjunto de condições iniciais, serve para integrar numericamente por um método para problemas de valor inicial, no final da integração, é necessário verificar o quanto o resultado se afasta das condições fronteira desejadas, ajustando as condições iniciais de maneira a aproximar-nos da solução pretendida. Repetindo o nº de vezes que forem necessárias.

d) $\int_V \sqrt{6-x^2-y^2-z^2-w^2-v^2}\, dx\,dy\,dz\,dw\,dv$

O método de Monte Carlo aplica-se a todos os algoritmos que usam sequências de números aleatórios para obter soluções numéricas aproximadas de diversos tipos de problemas. Utilizando este método para calcular integrais definidos obtemos o valor esperado.

Exercicio 2:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

a) Transformada de Fourier de $g(t) = f''(t)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f''(t) e^{-i\omega t} dt = f'(t) e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)(-i\omega) e^{-i\omega t} dt$$

$$= - f(t)(-i\omega) e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-i\omega)^2 e^{-i\omega t} dt$$

$$= (-i\omega)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = (-i\omega)^2 F(\omega)$$

b) Propriedade da função $f(t)$ para que a) esteja correcta

se $f(t)$ tender para 0 então $t \to \pm\infty$

$f'(t) \to 0$ quando $t \to \pm\infty$

Uma das utilidades do Resultado da alínea a)

A transformada de Fourier, é útil na Resolução de PDE's. Pode ser utilizada na Resolução de equações no espaço de Fourier onde as derivadas Relativas à variável escolhida nas TF deixam de existir

Exercício 3:

Equação de condução de calor para um tubo cilíndrico

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 4K\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{4K}{R}\frac{\partial T}{\partial R}$$

R é coordenada Radial

a) Derivada em ordem ao tempo usando diferenças finitas progressivas.

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + O(h)$$

$$\Rightarrow T'(t) = \frac{T(t+h) - T(t)}{h} + O(h)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T(i, n+1) - T(i, n)}{\Delta t}$$

b) As duas derivadas em ordem a R usando diferenças finitas centradas.

$n \to t$

$i \to r$

$$\frac{\partial T^2}{\partial r^2} = \frac{T(i+1,n) - 2T(i,n) + T(i-1,n)}{\Delta r^2}$$

$$\frac{\partial T^2}{\partial r^2} = \frac{T(i+1,n) - T(i-1,n)}{2\Delta r}$$

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + O(h^2) \rightarrow 2^{a} \text{ derivada}$$

$$\Rightarrow T''(t) = \frac{T(t+h) - 2T(t) + T(t-h)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} = \frac{T(n,i+1) - 2T(n,i) + T(n,i-1)}{(\Delta R)^2}$$

c) Qual a ordem do erro associado a cada uma delas?

No caso da aproximação de diferenças progressivas para a 1ª derivada o erro é da ordem de h.

No caso da aproximação por diferenças finitas centradas o erro para a primeira derivada e para a segunda derivada, é da ordem de h^2.

d) Aproximar a equação de calor acima para aplicação do método de Crank-Nicolson.

Método de Crank-Nicolson =>

$$\frac{T(i,n+1) - T(i,n)}{\Delta t} = 4K\frac{1}{2}\left[\frac{T(i+1,n) - 2T(i,n) + T(i-1,n)}{\Delta r^2} + \frac{T(i+1,n+1) - 2T(i,n+1) + T(i-1,n+1)}{\Delta r^2}\right] -$$

$$- \frac{4K}{r}\frac{1}{2}\left[\frac{T(i+1,n) - T(i-1,n)}{2\Delta r} + \frac{T(i+1,n+1) - T(i-1,n+1)}{2\Delta r}\right]$$

ercicio 4:

Equação de calor genérica:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

a) Explique como se aproxima a equação para usar o método de Euler, que é um método usado para equações diferenciais ordinárias.

→ Usa-se diferenças finitas para $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(n,i+1) - 2T(n,i) + T(n,i-1)}{\Delta x^2}$$

e a equação passa a um sistema de ODE's

$$\frac{\partial T}{\partial t}(i) = \frac{T(i+1) - 2T(1) + T(i-1)}{\Delta x^2}$$

b) Esta equação não é uma equação diferencial ordinária. Que nome se dá a este tipo de equações

Equação diferencial às derivadas parciais - PDE

c) Poderíamos usar um método de Runge-Kutta em substituição do de Euler?

Sim, poderíamos. O método de Runge-Kutta é muito mais estável que o método de Euler. E se podemos utilizar o método de Euler então o método de Runge-Kutta funciona certamente

$R_1(i)$

$R_2(i)$, etc