Aula 4_Leitura

- **Sistemas Dinâmicos e Caos**
- **Classificação das Equações Diferenciais**

  Lineares v.s Não-Lineares

  Autónomas vs. Não-Autónomas
- **Pontos Críticos e respetivas Órbitas**

  Pontos sela, centros, pontos espirais, nodos.

  Órbitas homoclínicas e heteroclínicas
- **Sistemas Caóticos**

  Oscilador de van der Pol, equações de Lorenz, equações de Rössler

Sistemas Dinâmicos

- Um sistema dinâmico é um **modelo matemático** que nos permite saber como o **estado** de um sistema **evolui no tempo**.

- Um estado é inteiramente conhecido dados os valores de um certo número de grandezas a que chamamos variáveis de estado. O conjunto dessas variáveis define o espaço de estados. Essas variáveis definem o **espaço de estados**.

- Essas variáveis podem ser **contínuas** ou **discretas**. Se forem **contínuas**, fala-se de um **espaço de fases**.

- Se forem necessárias *n* variáveis contínuas para descrever cada estado, temos um **espaço de fases *n*-dimensional** e cada estado é descrito inteiramente pelas suas coordenadas no **espaço de fases.**

Sistemas Dinâmicos

O conceito de evolução temporal do sistema exige, obviamente, que seja definida uma quantidade única, a que chamamos tempo, que nos permite ordenar os estados. O tempo pode também ser discreto ou contínuo.

As regras de evolução do sistema com o tempo podem ser:

- **estocáticas** (ou *aleatórias*), se, dado um estado num certo instante, apenas conhecemos as probabilidades de encontrar o sistema noutros estados em momentos subsequentes;
- **determinísticos** se a evolução está determinada sem ambiguidade.

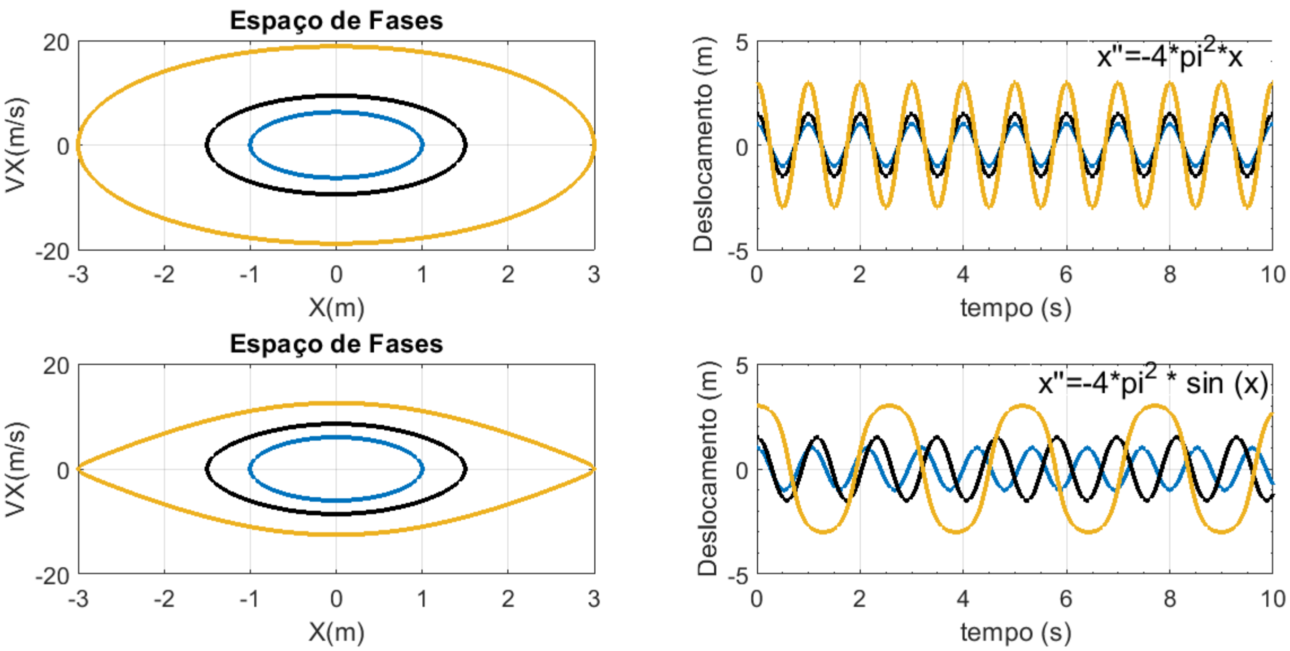
Vamos restringir-nos hoje ao estudo de sistemas dinâmicos com as seguintes características:

- O espaço de fases é contínuo.
- O tempo é contínuo.
- As regras de evolução são determinísticas.

Sistemas Dinâmicos-ESPAÇO de FASES

Os problemas de valor inicial que temos tratado desde o início do semestre são sistemas dinâmicos. As regras de evolução, neste caso, são equações diferenciais.

EXEMPLO: Espaços de fases de dois osciladores, sendo um Linear e outro Não-Linear



ESPAÇO de FASES

Recordando, o espaço de fases de um sistema dinâmico é um espaço com direções que representam cada uma das variáveis necessárias para especificar o estado instantâneo de um sistema.

Para o tipo de sistemas que estamos a estudar, a evolução do sistema é representada por uma linha contínua nesse diagrama do espaço de fases. A essa linha vamos chamar **trajetória** ou **órbita.**

CLASSIFICAÇÃO de Equações Diferenciais

É conveniente aprofundar a classificação das equações diferenciais ordinárias, para além da simples especificação da sua ordem.

Considere equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

CLASSIFICAÇÃO de Equaçoes Diferenciais

Este tipo de equações pode ser **linear** ou **não linear**.
Se for **linear**, a derivada tem que variar linearmente com a variável dependente:

$$\frac{dy}{dt} = C_1\,(t) * y + C_2\,(t)$$

Note que C_1 e C_2 podem ser funções de t bastante complexas, e a equação continua a ser linear.
Não é difícil arranjar exemplos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem **não-lineares:**

$$\frac{dy}{dt} = y^2 \qquad (A)$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos y - t \qquad (B)$$

CLASSIFICAÇÃO de Equaçoes Diferenciais

Na primeira equação, eq(A), a derivada da variável dependente, y, não depende explicitamente do tempo, apenas de si própria. Diz-se que a equação é **autónoma**. Num sistema de equações autónomas, trajetórias diferentes não se cruzam.
Na segunda equação, eq(B), a derivada depende explicitamente do tempo t. Trata-se de uma equação diferencial ordinária não –linear e **não autónoma**.

As classificações **linear vs. não-linear** e **autónoma vs. não autónoma** podem ser generalizadas a equações diferenciais de ordem superior.

Assim, uma equação diferencial autónoma de 2ª ordem, por ex., será do tipo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(y, \frac{dy}{dt}\right)$$

Uma equação diferencial **linear** de 2ª ordem é do tipo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = C_1(t) * \frac{dy}{dt} + C_2(t) * y + C_3(t)$$

Alguns exemplos de equações diferencias de 2ª ordem **não-lineares**:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y^2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \cos\left(\frac{dy}{dt}\right) - t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = y\frac{dy}{dt}$$

PONTOS CRÍTICOS

Um **ponto crítico** da equação $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ é uma raíz de $f(t,y) = 0$. Se y = C for um ponto crítico desta equação, então a equação diferencial tem uma solução constante y(t) = C. Uma solução constante designa-se frequentemente por **solução de equilíbrio**.

O comportamento qualitativo das soluções, de uma equação autónoma de 1ª ordem, pode ser descrito em função dos seus pontos críticos.

Como exemplo pode considerar-se as equações de Lotka-Volterra.

EXEMPLO: Equações de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 - x_1\, x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_1\, x_2 \end{cases}$$

- Sistema de equações não-linear e autónomo
- x_1 e x_2 são as variáveis representáveis num espaço de fases 2D

Um ponto crítico para este sistema de equações, é um ponto (x_1, x_2) para o qual as duas derivadas são nulas. Neste caso temos:

$$(0,0) \qquad e \qquad (1,1)$$

OBS: (x_1, x_2) pode ser igual a qualquer um destes pontos críticos para todos os instantes ($t \rightarrow \infty$). Neste sentido pode considerar-se um **estado de equilíbrio** do sistema descrito pelas equações de Lotka-Volterra.

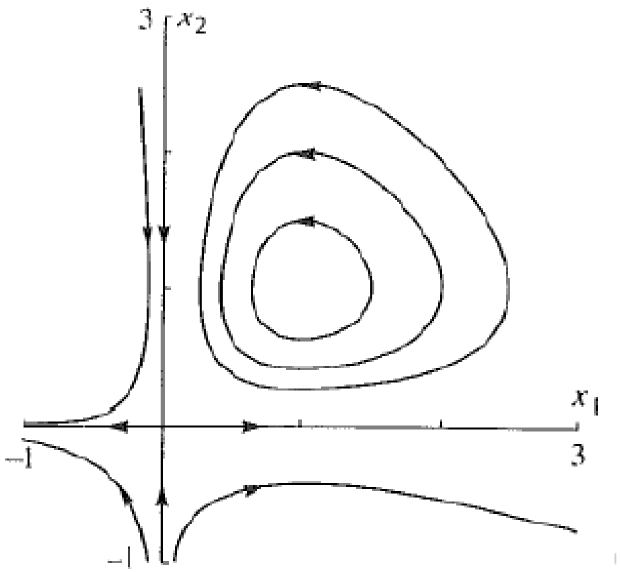
Os sistemas dinâmicos que foram considerados até ao presente, dados por problemas de valor inicial de ODEs, têm uma única solução. Assim, uma trajetória não pode passar por estes pontos de equilíbrio num determinado tempo t_0 finito (instante). No entanto, pode:

- aproximar-se destes pontos de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$ (sumidouros) (sinks)
- afastar-se destes pontos de equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$ (fontes) (sources)

Equações de Lotka-Volterra → Órbitas associadas aos pontos críticos

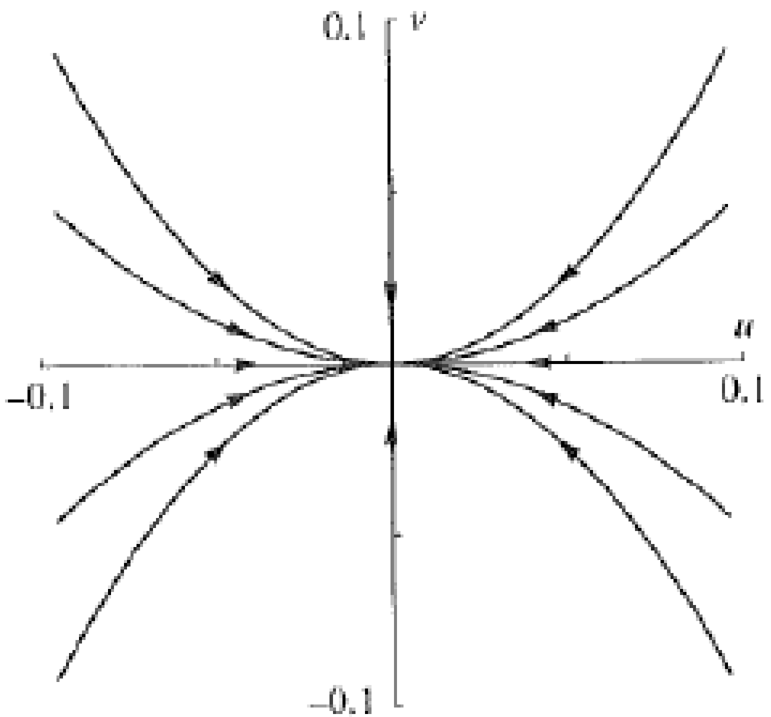
Ponto sela – o ponto (0,0) designa-se por ponto sela, pelo fato de haver trajetórias a terminar e outras a iniciar-se no mesmo.

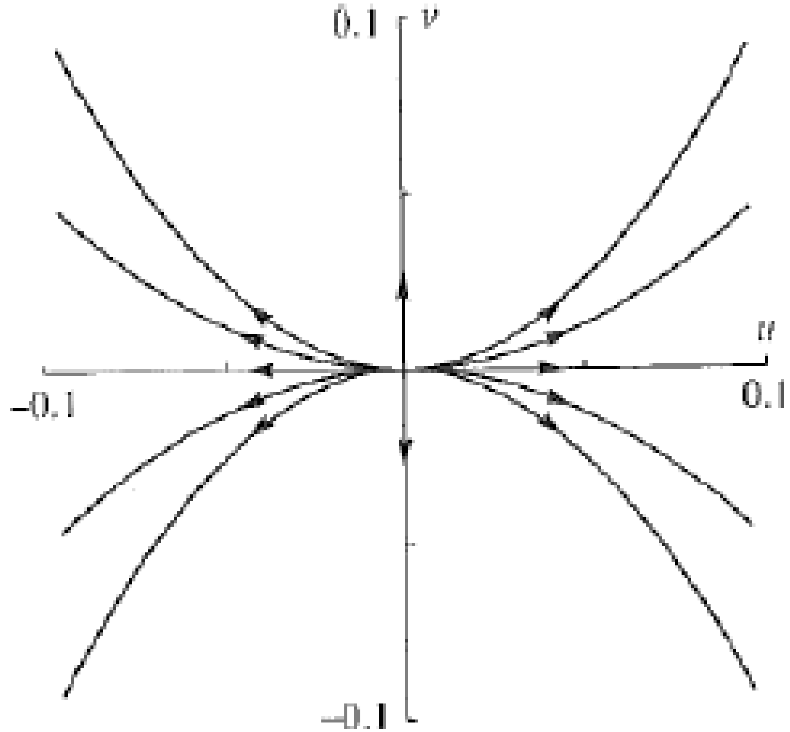
Centro - o ponto (1,1) designa-se por centro, devido ao fato das órbitas associadas ao mesmo serem fechadas, e como tal corresponderem a soluções oscilatórias.



Há outro tipo de pontos críticos:

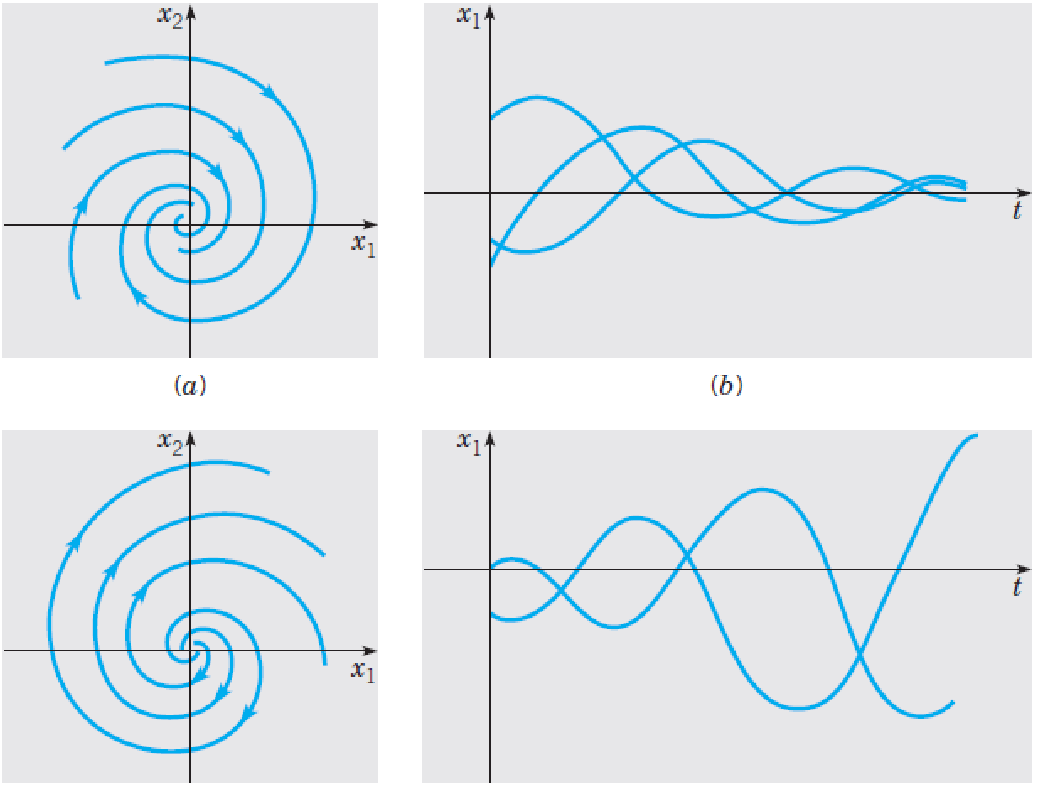
- **Nodos ou Nós** – que podem ser estáveis ou instáveis





(a) Nó estável **(b) Nó instável**

• **Pontos espirais** – aos quais estão associadas trajetórias espirais



(a) (b) (c) (d)

(a) **Ponto espiral estável**
(Sumidouro)

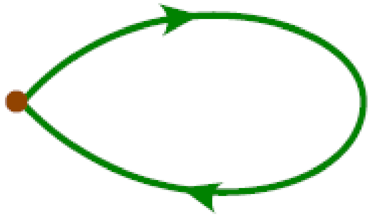
(b) Pode corresponder a oscilações amortecidas num dado sistema físico, por ex.

(c) Ponto espiral instável
(Fonte)

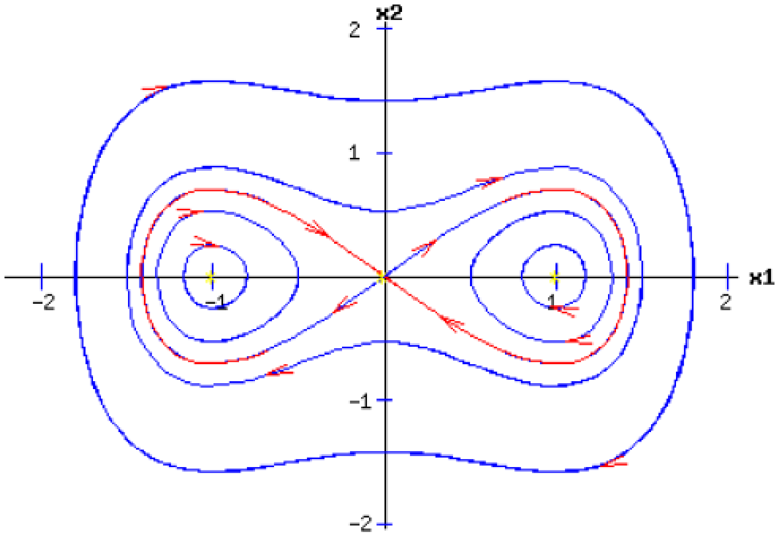
(d) Pode corresponder a oscilações amplificadas.

ÓRBITAS Homoclínicas e Heteroclínicas

Órbita homoclínica- Liga um ponto crítico a si próprio.

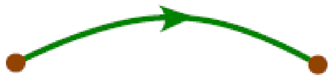


(a) Órbita homoclínica

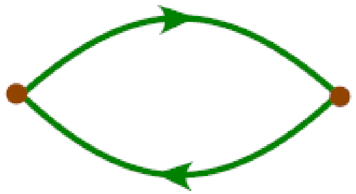


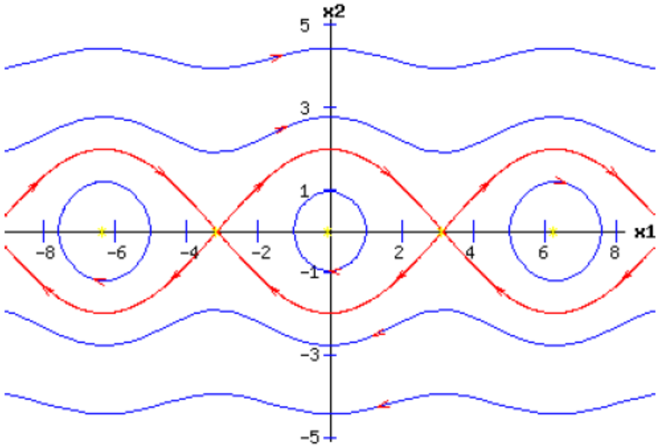
(b) Sistema com três pontos críticos:
(0,0) ponto sela, (-1,0) e (1,0) centros
Órbita homoclínica - liga a origem a si própria
Não corresponde a uma solução periódica

Órbita heteroclínica- Liga dois pontos críticos entre si.



(a) Órbita heteroclínica





(b) Ciclo heteroclínico

com duas órbitas heteroclínicas ligadas entre si

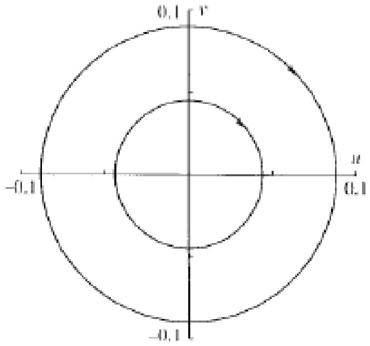
Soluções periódicas de um sistema autónomo 2D

As soluções periódicas de sistemas autónomos 2D são de dois tipos:

1) Família de soluções períodicas

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y(1 + r^2) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x(1 - r^2) \end{cases}$$

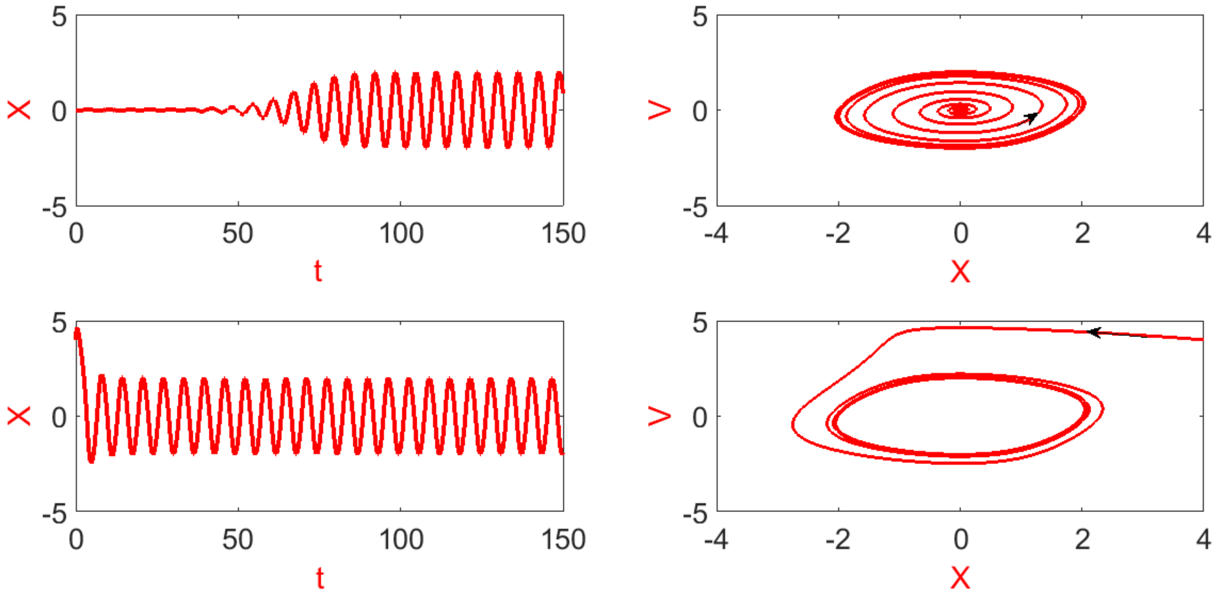
Onde $r^2 = x^2 + y^2$



2) Ciclo limite – solução periódica isolada

A figura mostra a evolução do sinal com o tempo, X(t), e a trajetória no plano XV, do oscilador de van der Pol (**ε = 0.2**) para duas condições iniciais distintas, (-0.001,-0.001) e (4,4).

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon(y^2 - 1)\frac{dy}{dt} + y = 0}$$



Ciclo limite – solução periódica isolada

Verifica-se que ambas as trajetórias, a que tem início num ponto interior (-0.001,-0.001), e a que tem início num ponto exterior (4,4), convergem para um **ciclo limite**, correspondente a uma oscilação. Um ciclo limite é um exemplo de um **atrator**.

O oscilador de van der Pol, cuja evolução é caraterizada pela equação:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon(y^2 - 1)\frac{dy}{dt} + y = 0$$

surgiu associado ao estudo de circuitos elétricos não-lineares, podendo também descrever, por exemplo, o comportamento dos batimentos cardíacos e o pulsar de algumas estrelas.

O termo de amortecimento é não linear e descreve um *amortecimento* para $y^2 > 1$ e uma *amplificação* para $y^2 < 1$.

Habitualmente estas oscilações designam-se por **auto-sustentáveis**, em que a energia dissipada num ciclo, balança a energia fornecida no mesmo. Para cada valor de $\varepsilon > 0$, a equação de van der Pol possui apenas um único ciclo estável.

Ciclo limite – solução periódica isolada

Como habitualmente, uma equação de 2ª ordem pode escrever-se como um sistema de duas equações de 1ªordem:

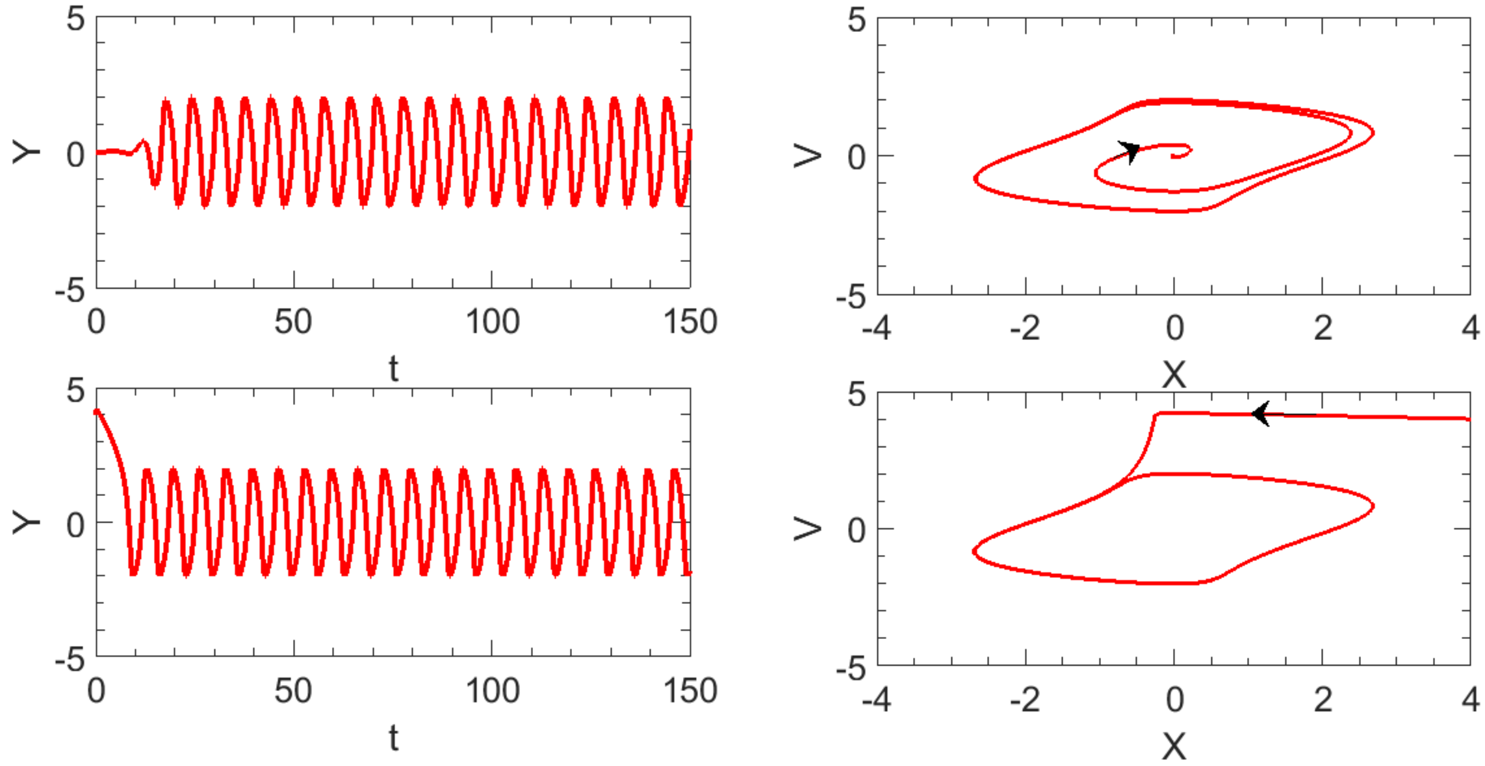
$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\ \varepsilon(y^2 - 1)v - y \\ \dfrac{dy}{dt} = v \end{cases}$$

Este sistema tem como único ponto crítico o ponto (0,0), que é:

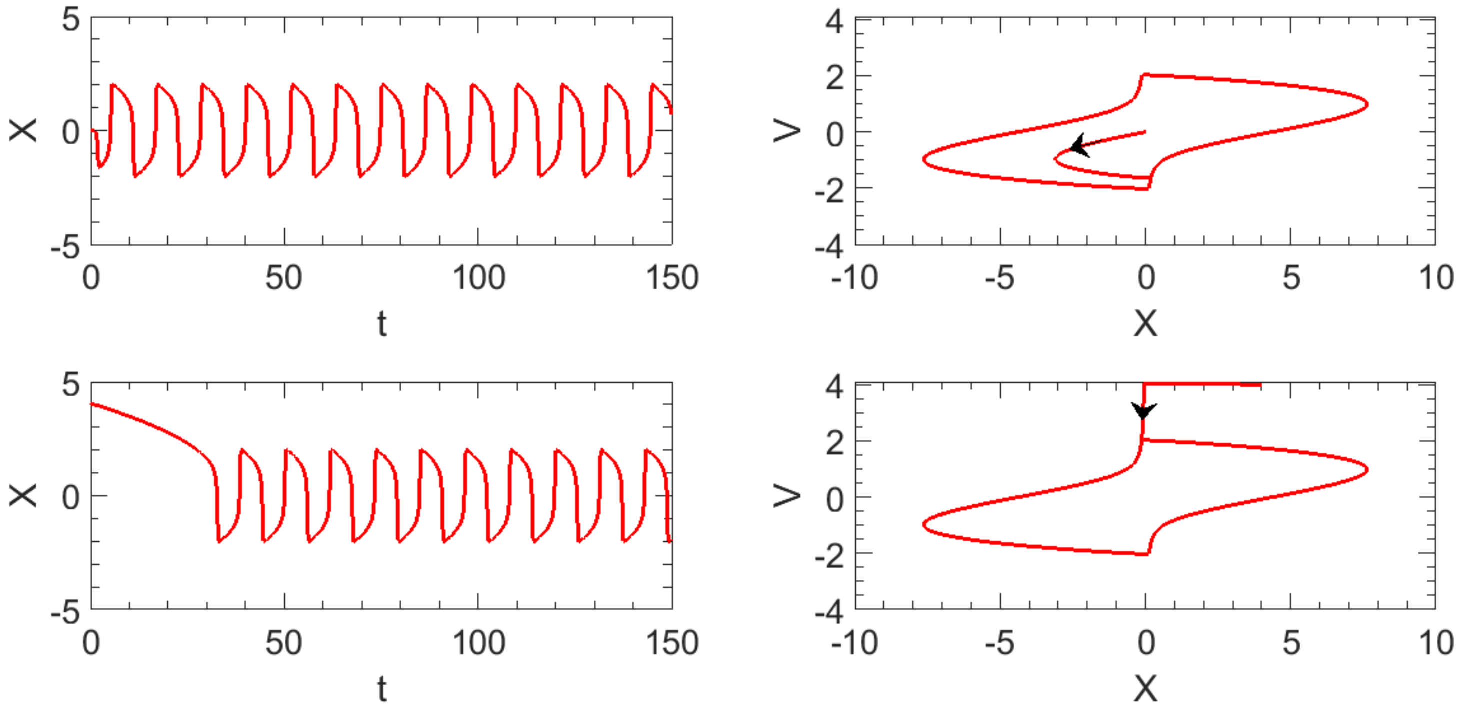
- um ponto espiral instável para $0 < \ \varepsilon < 2$
- um nodo instável para $\varepsilon \geq 2$

Nas figuras seguintes estão representas as soluções para ε = 1 e ε = 5.

$\boxed{\varepsilon = 1}$



$\boxed{\varepsilon = 5}$

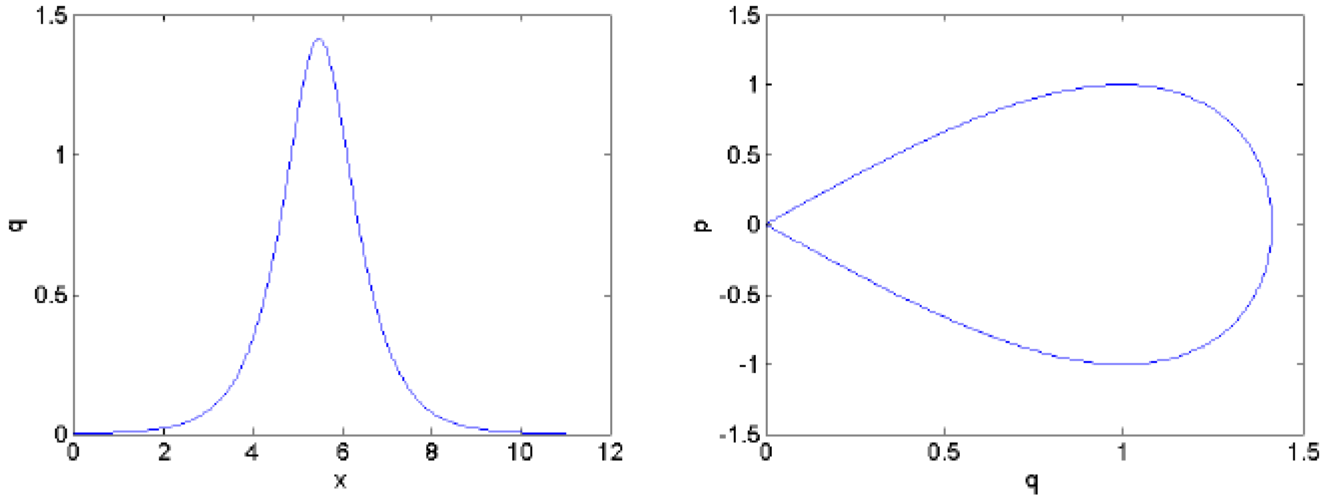


LEITURA_1- Órbitas homoclínicas

.

Exemplo: órbita homoclínica da equação

$$\frac{d^2q}{dx^2} - 2\beta q + 2q^2 = 0$$



LEITURA_1- Órbitas homoclínicas

A equação $\frac{d^2q}{dx^2} - 2\beta q + 2q^2 = 0$, descreve a distribuição transversal de feixes de luz que se propagam de forma paraxial num meio ótico com efeito de Kerr.

Tem soluções localizadas com a forma de uma ***secante hiperbólica***. Estas soluções são designadas por **solitões**, e correspondem a soluções com uma órbita homoclínica.

A equação de 2ª ordem corresponde ao seguinte sistema de equações de 1ª ordem:

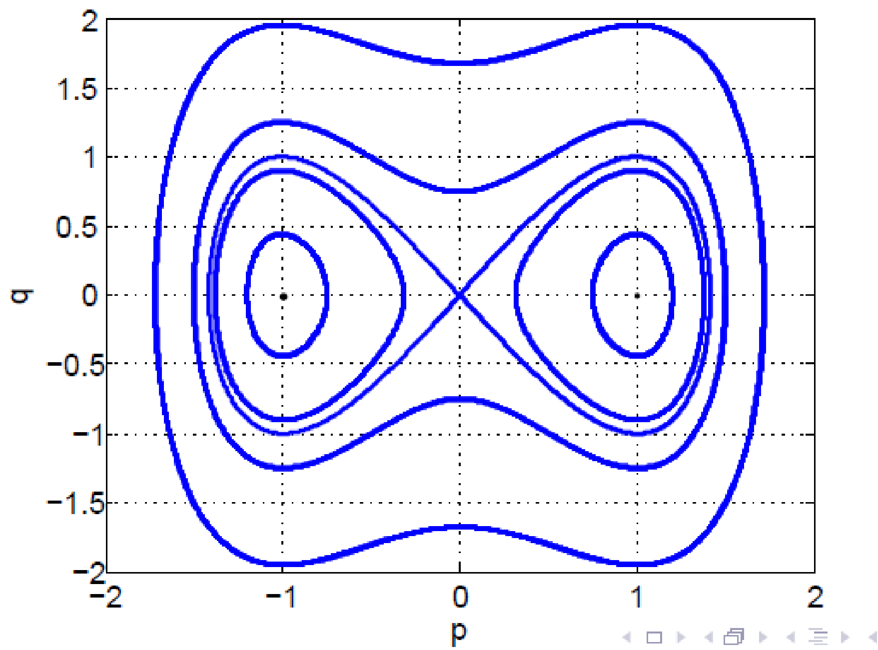
$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = 2\beta q - 2q^3 \\ \frac{dq}{dt} = p \end{cases}$$

Este sistema de equações tem 3 pontos críticos.

- (0,0) é um ponto sela;
- $\left(-\sqrt{\beta}, 0\right)$ e $\left(\sqrt{\beta}, 0\right)$ são centros.

LEITURA_1- Órbitas homoclínicas

Espaço de fases da equação $\frac{d^2q}{dx^2} - 2\beta q + 2q^2 = 0$, com três pontos críticos, um ponto sela e dois centros, e com *órbitas homoclínicas*.



SOLUÇÕES CAÓTICAS

Alguns sistemas dinâmicos apresentam soluções designadas **caóticas.**

- Estes sistemas são tais que uma pequena alteração das condições inicias pode levar a soluções muito diferentes entre si, diferença que cresce exponencialmente com o tempo.
- Para que se observe caos, é necessário que o sistema dinâmico seja **não-linear**.
- O teorema de Poincaré-Bendixon diz-nos que **3 é a dimensão mínima** do espaço de fases a partir da qual o caos pode acontecer.

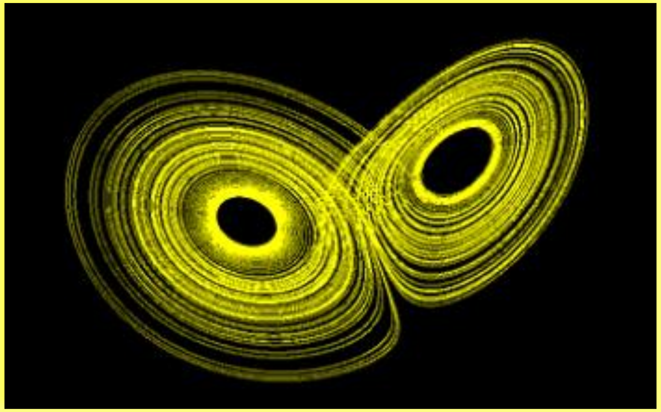
Equações de LORENZ – Caos

Lorenz obteve as conhecidas equações, que têm agora o seu nome, numa tentiva de obter uma simplificação grosseira das equações de Navier-Stokes aplicadas a um fluido num recipiente com o fundo e o topo a temperaturas diferentes. Sabe-se que à medida que esta diferença aumenta, se pode observar uma transição de um estado estacionário, para a convecção, e, finalmente para um movimento caótico.

Equações de LORENZ – Caos

As equações de Lorenz, um sistema de três equações acopladas, sendo duas não-lineares, são:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases}$$



13-04-2021

Equações de ROSSLER – Caos

As equações de Rossler constituem um sistema de três equações acopladas:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + ay \\ \dfrac{dz}{dt} = b + (x - c)z \end{cases}$$

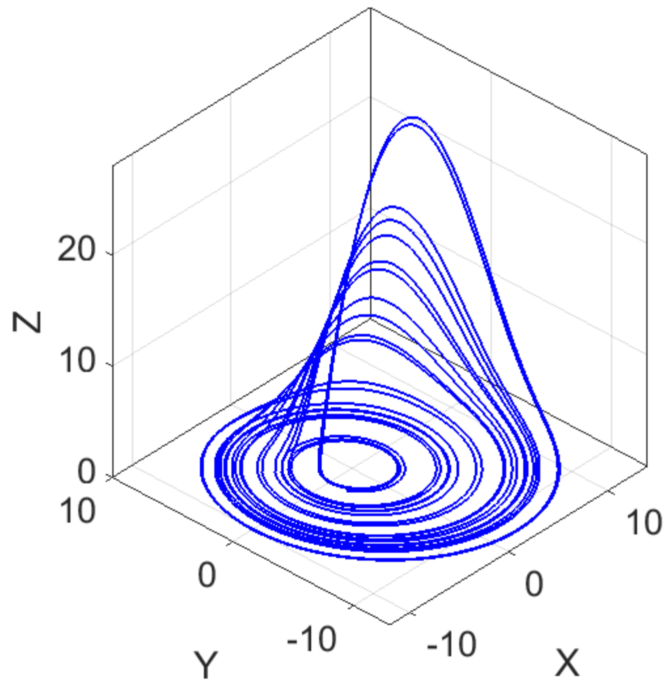
Rossler criou estas equações com o objetivo de obter um sistema com um comportamento com características semelhantes ao modelo de Lorenz, mas que fosse mais fácil de analisar qualitativamente. Rössler considerou originalmente os seguintes valores para os parâmetros: a = 0.2, b = 0.2, e c = 5.7.

Na figura seguinte está representada a evolução deste sistema ao longo do tempo, para a = 0.2, b = 0.2, e c = 6.3.

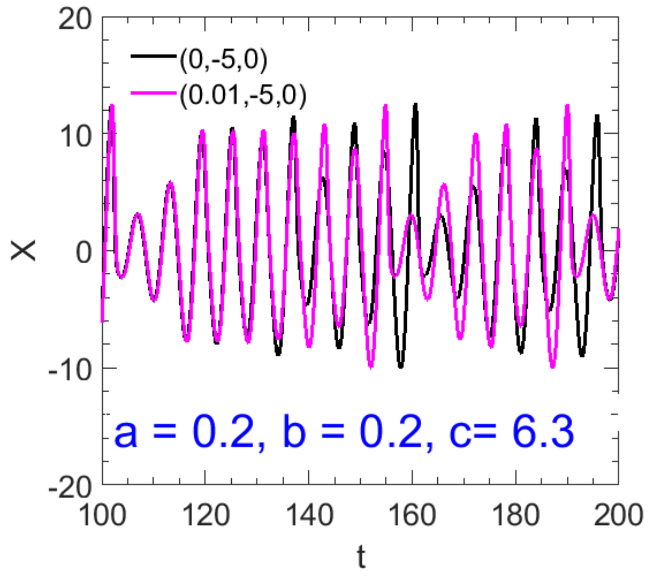
.

Pode verificar-se que, ao fim de um tempo suficientemente grande, a trajetória não se afasta de uma zona restrita do espaço de fases. A trajetória mantém-se próxima de uma estrutura fractal chamada **atrator estranho (a) (atrator caótico).** A sensibilidade às condições iniciais está ilustrada na figura **(b)**, tendo-se considerado dois pontos de partida ligeiramente distintos (0,-5,0) e (0.01, -5,0).

(a)

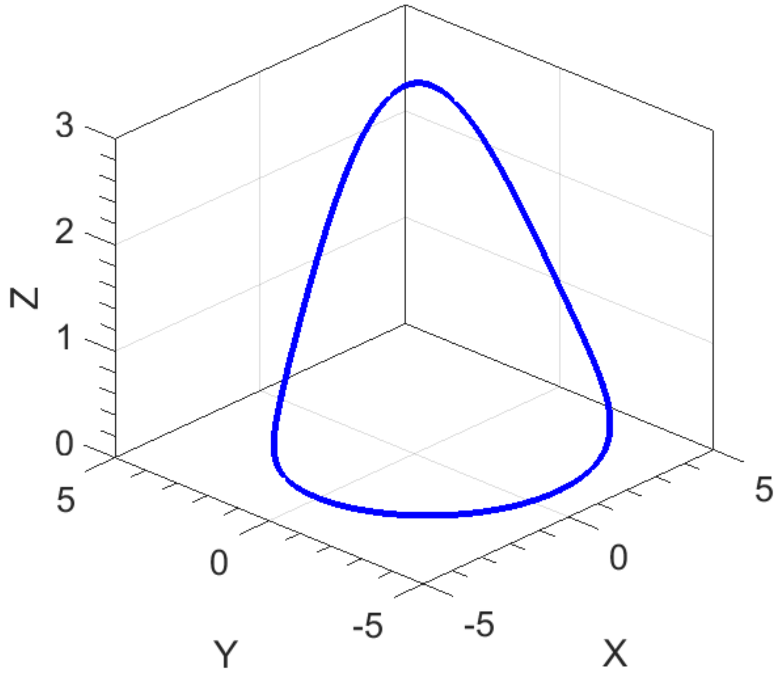


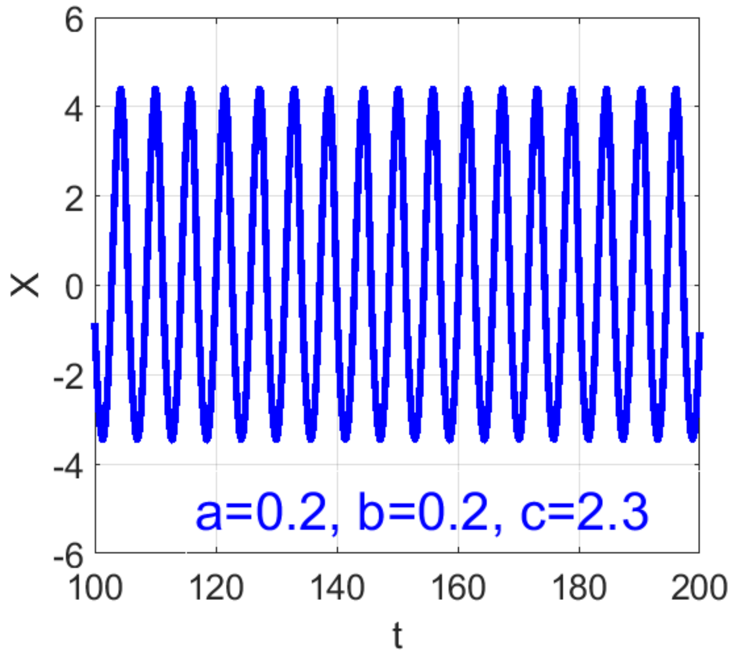
(b)



Não se pode concluir que as soluções são caóticas para todos os valores dos parâmetros. Nas figuras seguintes consideram-se os mesmos valores de a e b, e variou-se c.

Período 1- Ciclo limite (a) e a amplitude constante (b).

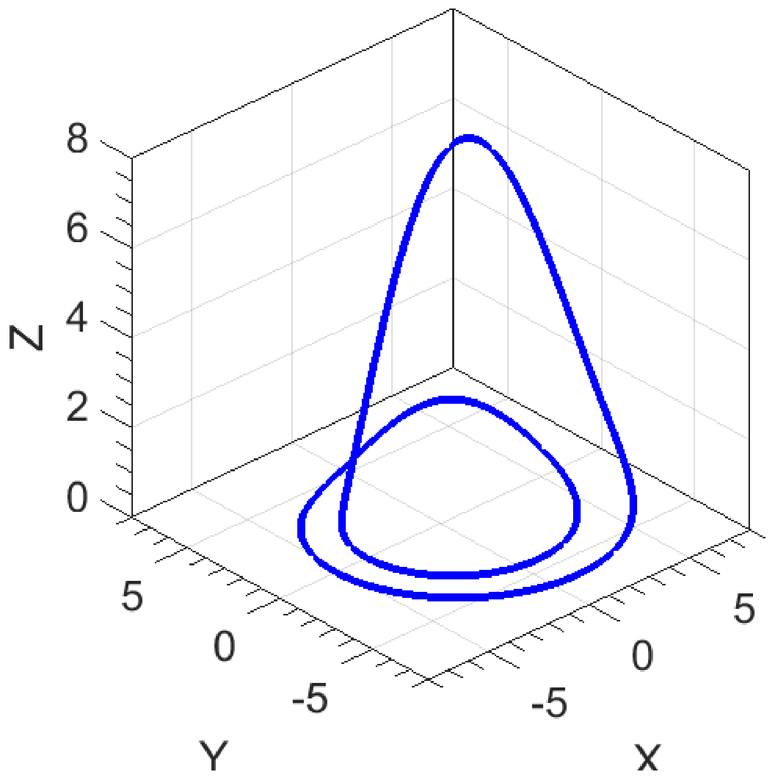




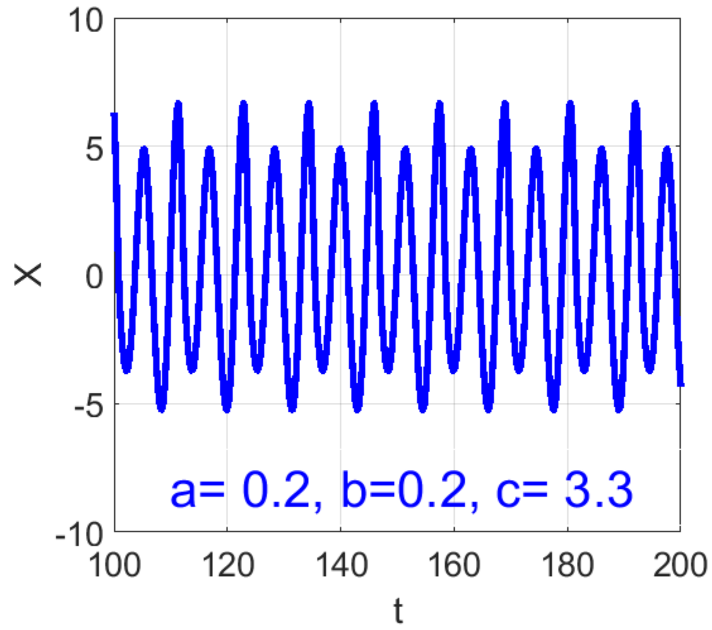
(a) Espaço de fases

(b) X em função de t

Período 2- Ciclo limite com duas voltas (a), e a amplitude apresenta dois valores distintos que se repetem periodicamente (b).

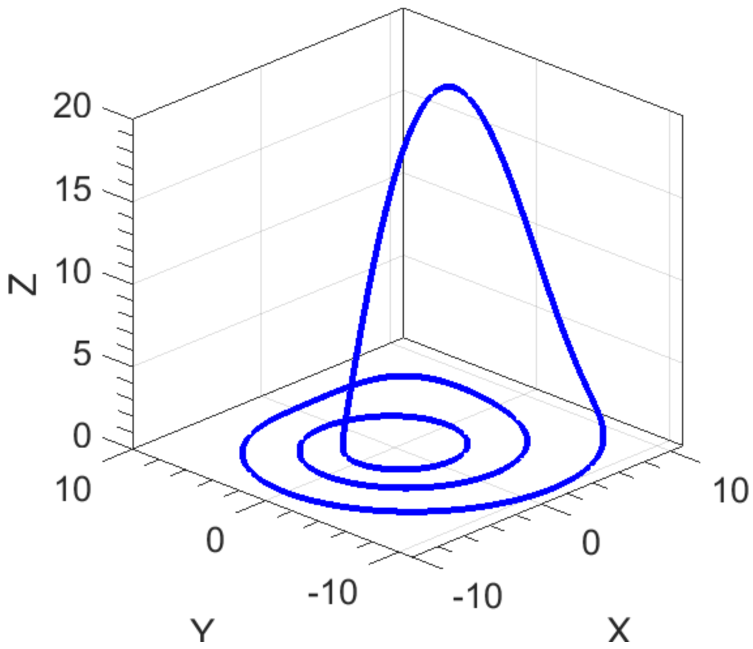


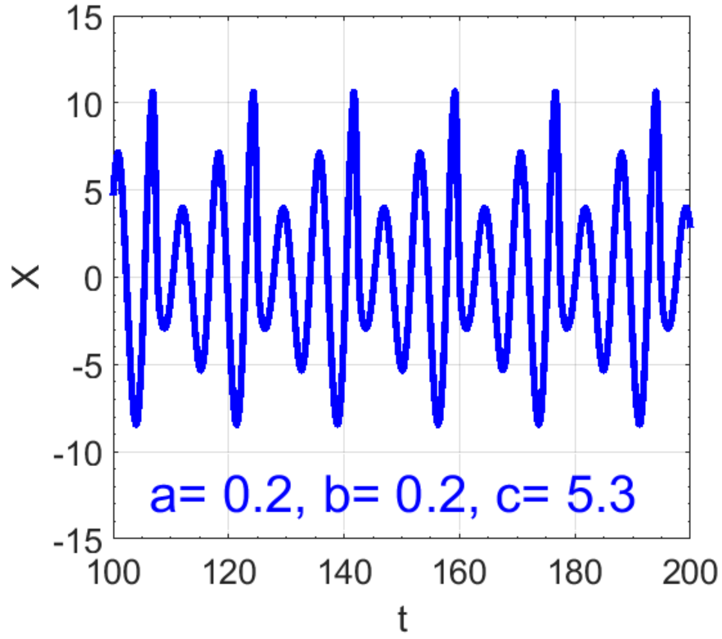
(a) Espaço de fases



(b) X em função de t

Período 3- Ciclo limite com três voltas (a), e a amplitude apresenta três valores distintos que se repetem periodicamente (b).

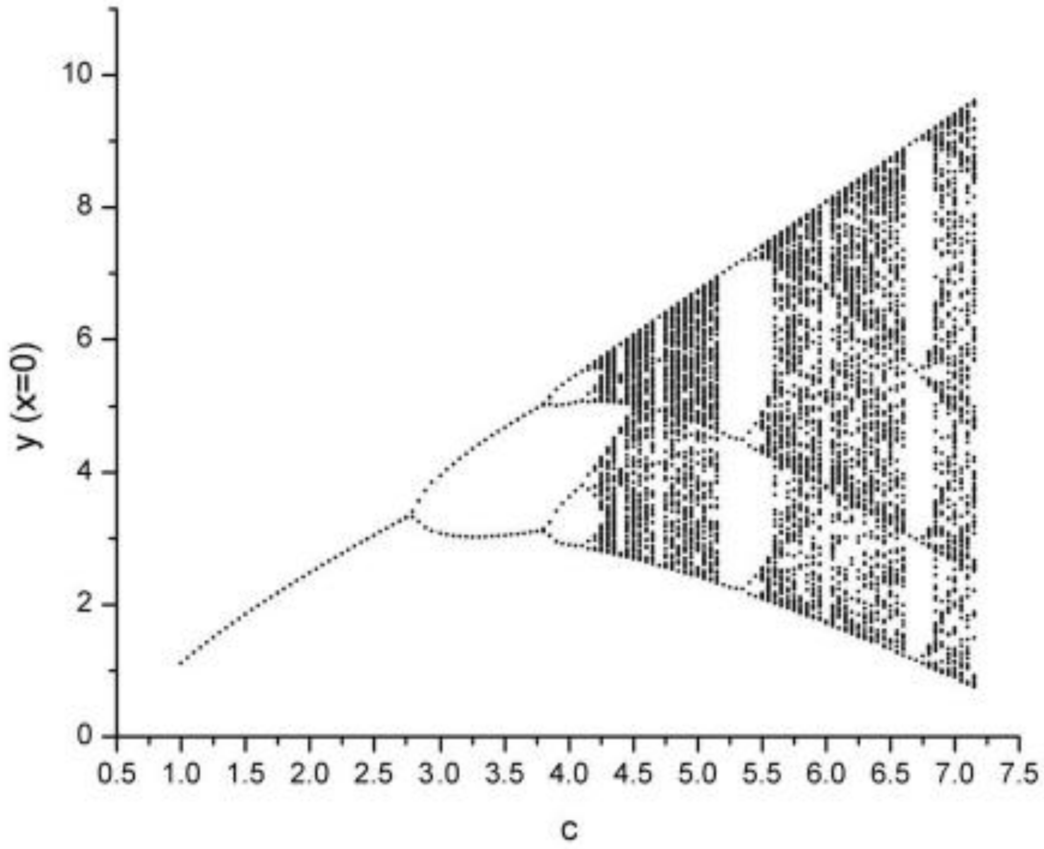




(a) Espaço de fases

(b) X em função de t

Equações de ROSSLER – Duplicação do período- Caminho para o Caos



Variando o parâmetro **c**, e para cada valor e para tempos suficientemente longos, se se calcular numericamente, por exemplo, todos os valores de y para x=0 (ou os máximos de y), podem representar-se os resultados um **diagrama de bifurcações.**
Esta representação dá algumas indicações sobre como se chega ao caos.

Características do Caos

● As soluções de um sistema caótico são extremamente sensíveis às condições iniciais.

● Caso tenha soluções periódicas, estas são densas. As trajetórias são cíclicas não exatamente iguais, ocupando uma região limitada do espaço de fases.

● Estas características tornam difícil a integração numérica das equações, uma vez que o erro numérico acumulado pode levar a que a solução numérica convirja para uma solução completamente diferente.

LEITURA_2- Expoentes de Lyapunov

Como já se referiu, condições iniciais ligeiramente diferentes resultam em soluções cuja diferença pode crescer exponencialmente com o tempo, ou seja, é da ordem de $e^{\lambda t}$. λ designa-se por ***expoente de Lyapunov***.

Para se calcular o **coeficiente de Lyapunov** pode:

- integrar-se o sistema desde a condição inicial $\mathbf{z}_0$ até um tempo longo t, obtendo $\mathbf{z}(t)$;
- voltar a integrar-se o sistema para condições iniciais ligeiramente diferentes $\mathbf{z}_0 + \mathbf{d}_i$ até ao mesmo instante final t, obtendo-se $\mathbf{z}_i(t)$;
- avaliar-se as diferenças nas soluções.

Mais concretamente, podem efetuar-se os seguintes cálculos:

$$\boxed{\lambda(\boldsymbol{z}_0) = \left\langle \frac{1}{t} \log\left(\frac{|\boldsymbol{z}_i(t) - \boldsymbol{z}(t)|}{|\boldsymbol{d}_i|}\right) \right\rangle}$$

Onde ⟨...⟩ designa a média sobre vários desvios $\mathbf{d}_i$.

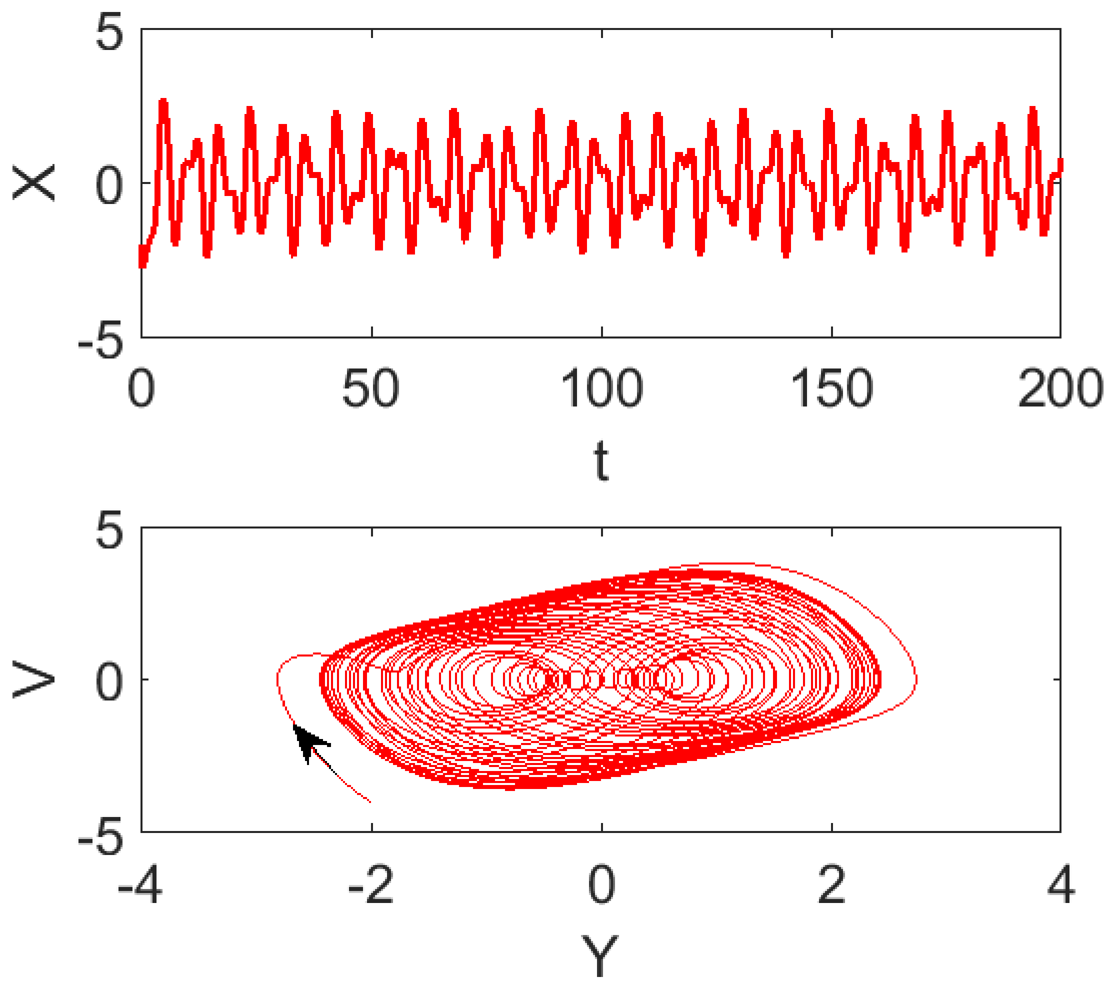
Oscilador de Van der POL forçado

Considere-se o oscilador de Van der Pol com forçamento:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon(y^2 - 1)\frac{dy}{dt} + y = 1.5\cos(1.7t)$$

O comportamento é caótico. E pode ser? Caos a 2D? Não estará em contradição com o teorema de Poincaré-Bendixon? De fato a equação não é autónoma, e, do mesmo modo, o sistema de equações equivalente de 1ª ordem, não é autónomo. Como consequência as trajetórias no plano (y,v) já se podem cruzar. Esta equação é equivalente a um sistema de três equações autónomas se se definir uma nova variável independente $\tau = t$.

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -\varepsilon(y^2 - 1)v - y + 1.5\cos(1.7\tau) \\ \dfrac{dy}{dt} = v \\ \dfrac{d\tau}{dt} = 1 \end{cases}$$


5
X 0
-5
0
50
100
150
200
t
5
V 0
-5
-4
-2
0
2
4
Y