学习笔记

正则化

下午6:21 4月2日周四 64%

算法笔记

物理 草稿 算法笔记

常见的向量范数：

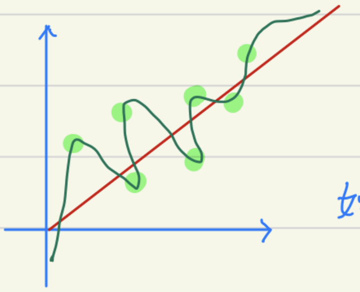
L_0 范数：$\|x\|_0$ 表示向量x中非零元素的个数

L_1 范数：$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ 表示非零元素的绝对值之和

L_2 范数：$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x^2}$

L_p 范数：$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} x^p}$

过拟合：



红：拟合，$y = w_0 + w_1x_1$

绿：过拟合，$y = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots$

如何令 $y = w_0 + w_1x_1 \to y = w_0 + w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots$ 呢？

减少向量 w 的个数 or 令某些参数减小 → 正则化

推理：损失函数 $J(w,x,y)$

减小某些 w 的值，但又不知道该减少哪一个 w，因此可以设 限制条件

① $\begin{cases} |w_1|+|w_2|+|w_3|+\cdots+|w_n| = \|w\|_1 \le C \\ \arg\min J(w,x,y) \end{cases}$

② $\begin{cases} \sqrt{w_1^2+w_2^2+w_3^2+\cdots+w_n^2} = \|w\|_2 \le C \\ \arg\min J(w,x,y) \end{cases}$

先研究①：引入拉格朗日函数，可得

$$L(w) = \underbrace{J(w,x,y)}_{\min} + \lambda(\|w\|_1 - C)$$

要令 $L(w)$ 最小，则令 $\frac{\partial L(w)}{\partial \lambda} = 0$，设其解为 λ^*

则 $\min L(w,\lambda) = \min J(w,x,y) + \lambda^*(\|w\|_1 + C)$

$= \min J(w,x,y) + \lambda^*\|w\|_1 + \lambda^* C$

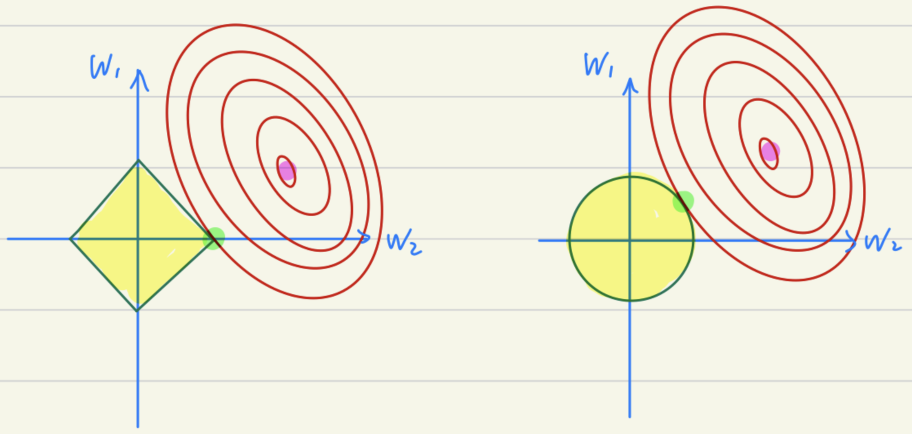
$\propto \underbrace{\min J(w,x,y) + \lambda^*\|w\|_1}_{L_1\text{正则化}}$

$\therefore$ 损失函数: $J(w,x,y) + \lambda\|w\|_1$

$= J(w,x,y) + \lambda\sum_{i=1}^{n}|w_i|$

L_2 正则化同理

几何解释:

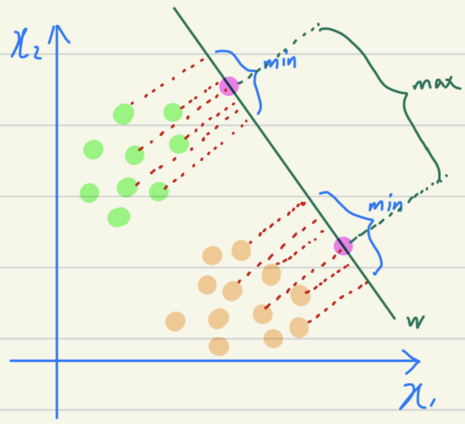


●: w_1 与 w_2 的取值范围　●: 损失函数最小的点

●: w_1 与 w_2 取值范围内与 ● 最近的点，也是 w_1 与 w_2 取值点.

线性判别分析

线性判别分析:



思想：如图所示，要找出一条线，使样本点映射后易于区分(类内小，类间大)

$$X=\begin{bmatrix}x_1^T\\x_2^T\\\vdots\\x_n^T\end{bmatrix}_{n\times p}\quad (x_i\text{均为列向量})\qquad Y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}_{n\times 1}$$

推导：映射后的值：$z_i=w^Tx_i$，均值：$\bar z=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}z_i=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}w^Tx_i$

映射后的方差：$S=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i-\bar z)^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i-\bar z)(z_i-\bar z)^T$

则 类1：$\begin{cases}\bar z_1=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}w^Tx_i\\ S_1=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i-\bar z)(z_i-\bar z)^T\end{cases}$，类2：$\begin{cases}\bar z_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}w^Tx_i\\ S_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(z_i-\bar z)(z_i-\bar z)^T\end{cases}$

类间：$(\bar z_1-\bar z_2)^2$，类内：S_1+S_2，目标：类内小，类间大 ⟶ loss函数

loss函数：$J(w)=\frac{(\bar z_1-\bar z_2)^2}{S_1+S_2}$，目标：$\operatorname{argmax}(J(w))$

$J(w)$：分子 $=\left(\frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}w^Tx_i-\frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_2}w^Tx_i\right)^2=\left[w^T\left(\frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}x_i-\frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_2}x_i\right)\right]^2=\left[w^T(\bar x_{c_1}-\bar x_{c_2})\right]^2$

分母以S_1为例：$S_1=\frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}\left(w^Tx_i-\frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}w^Tx_j\right)\left(w^Tx_i-\frac{1}{N_1}\sum_{j=1}^{N_1}w^Tx_j\right)^T$　把w^T提出来

$=\frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}w^T(x_i-\bar x_{c_1})(x_i-\bar x_{c_1})^Tw=w^T\left[\frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1}(x_i-\bar x_{c_1})(x_i-\bar x_{c_1})^T\right]w=w^TS_{c_1}w$

$\therefore$ 分母 $=w^TS_{c_1}w+w^TS_{c_2}w=w^T(S_{c_1}+S_{c_2})w$

$$\therefore J(w)=\frac{w^T(\bar x_{c_1}-\bar x_{c_2})(\bar x_{c_1}-\bar x_{c_2})^Tw}{w^T(S_{c_1}+S_{c_2})w}$$

下午6:15 4月2日周四 66%

算法笔记

物理 草稿 算法笔记

$$\therefore J(w)=\frac{w^T(\bar{x}_{c_1}-\bar{x}_{c_2})(\bar{x}_{c_1}-\bar{x}_{c_2})^T w}{w^T(S_{c_1}+S_{c_2})w}$$

，令 $S_b=(\bar{x}_{c_1}-\bar{x}_{c_2})(\bar{x}_{c_1}-\bar{x}_{c_2})^T$ 类间方差

$S_w=(S_{c_1}+S_{c_2})$ 类内方差

则 $J(w)=w^TS_bw\cdot(w^TS_ww)^{-1}$

$$\frac{\partial J(w)}{\partial w}=2S_bw(w^TS_ww)^{-1}+w^TS_bw\cdot(-1)\cdot(w^TS_ww)^{-2}\cdot 2S_w\cdot w=0$$ ，可得

$$S_bw\cdot\underbrace{(w^TS_ww)}_{\in R}=\underbrace{w^TS_bw}_{\in R}S_w\cdot w$$

$S_w:(p\times p)$ $S_b:(p\times p)$ $w:(1\times p)$ $w^T:(p\times 1)$

求的是方向向量

$$S_ww=\frac{w^TS_ww}{w^TS_bw}S_bw\rightarrow w=\frac{w^TS_ww}{w^TS_bw}S_w^{-1}S_bw\propto S_w^{-1}S_bw$$

$$S_bw=(\bar{x}_{c_1}-\bar{x}_{c_2})\underbrace{(\bar{x}_{c_1}-\bar{x}_{c_2})^T}_{p\times 1}\cdot\underbrace{w}_{1\times p}\propto(\bar{x}_{c_1}-\bar{x}_{c_2})$$

$\therefore w\propto S_w^{-1}(\bar{x}_{c_1}-\bar{x}_{c_2})$ 经验：$b=-\frac{1}{2}w^T(\bar{x}_{c_1}-\bar{x}_{c_2})$

模型 $y=w^Tx+b$