



‘La fisica è, tra tutte le scienze, la più fondamentale e completa, e ha avuto una profonda influenza. Studenti delle discipline più diverse si ritrovano a doverla studiare a causa dell’importanza che riveste in tutti i fenomeni’

- Richard Feynman

‘Causas rerum naturalium non plures admittiri debere, quam quo et vera sint et earum phænomeni explicandis sufficient.’

- Isaac Newton

Formulario di Fisica

Davide Cossu, Stefano D’Agaro

Questo è un formulario con le formule di fisica fatte durante tutti e cinque gli anni di un liceo scientifico con alcune spiegazioni teoriche ed esercizi.

Indice

Costanti	3	Forza su una parete	10
Unità di misura	4	Pressione su una parete	10
Cinematica	4	Energia cinetica	10
Moto Rettilineo Uniforme	4	Energia interna	11
Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato	5	Termodinamica (Lavoro)	11
Moto Parabolico	5	Primo principio della termodinamica	11
Tempo	5	Tabella per i segni di Q e L	11
Gittata	5	Lavoro di un'isobara	11
Altezza massima	5	Lavoro di un'isoterma	11
Velocità in un punto	5	Lavoro di un'isocora	11
Moto Circolare Uniforme	5	Lavoro di un ciclo	11
Forza centrifuga/centripeta	5	Lavoro di un'adiabatica	11
Moto Armonico	5	Equazione di Meyer	11
Moto Circolare Uniformemente Accelerato	6	Macchina di Carnot	11
Dinamica	6	Entropia	12
Secondo Principio della Dinamica	6	Proprietà dell'entropia	12
Attrito	6	Entropia di un sistema isolato	12
Piano Inclinato	6	Entropia dell'universo	12
Funi e carrucole	6	Entropia di un sistema non isolato	12
Lavoro, Energia e Potenza	6	Macrostat e microstat	12
Legge di Hooke e energia elastica	6	Molteplicità di un macrostat	12
Quantità di moto e teorema dell'impulso	7	Equazione di Boltzman	12
Urti	7	Onde	12
Elastico	7	Formule sperimentali	12
Anaelastico	7	Relazione fondamentale	12
Proiettile contro un corpo	7	Equazioni dell'onda	12
Urti obliqui	7	Equazione con x fissato	12
Centro di Massa	7	Equazione con t fissato	13
Momento Angolare e Inerzia	7	Equazione generale dell'onda	13
Teorema di König	8	Equazione di Huygens	13
Tabella riassuntiva e di confronto	8	Rifrazione	13
Gravitazione	8	Relazione di Snell	13
Seconda legge di Keplero	8	Distanza di Rifrazione	13
Terza legge di Keplero	8	Angolo limite	13
Legge di Gravitazione Universale	8	Immagine riassuntiva	13
Accelerazione Gravitazionale su un pianeta	8	Interferenza	13
Velocità di un satellite	8	Principio di Sovrapposizione	13
Velocità di fuga	8	Interferenza Costruttiva	14
Idrostatica	8	Interferenza Distruttiva	14
Legge di Stevino	8	Esperienza di Young	14
Torchio idraulico	8	Altezza dell' n -esima frangia	14
Principio di Pascal	8	Angolo dell' n -esima frangia	14
Legge dei vasi comunicanti	8	Differenza di percorso tra i due fori	14
Principio di Archimede	9	Lenti e Specchi	14
Volume della parte immersa	9	Equazione generale	14
Idrodinamica	9	Ingrandimento	14
Equazione di Bernoulli	9	Diottria	14
Se il tubo è orizzontale	9	Lenti attaccate	15
Equazione di Torricelli	9	Onde Stazionarie	15
Termodinamica	9	Equazione dell'onda stazionaria	15
Dilatazione	9	Lunghezza dell'onda	15
Lineare	9	Frequenza del ventre	15
Superficiale	9	Suono	15
Volumetrica	9	Intensità	15
Leggi di Gay-Lussac e Boyle-Mariotte	9	Livello sonoro	15
Prima legge di Gay-Lussac	9	Effetto Doppler	15
Seconda legge di Gay-Lussac	9	Battimenti	15
Legge di Boyle-Mariotte	9	Elettrostatica	16
Gas	9	Legge di Coulomb	16
Equazione di stato dei gas perfetti	9	Campo elettrico	16
Proprietà dei Gas	10	Campo di una superficie piana infinita	16
Numero di molecole	10	Campo elettrico all'interno di un condensatore	16
Massa molare	10	Teorema di Coulomb	16
Calorimetria	10	Flusso	16
Capacità termica	10	Teorema di Gauss	16
Calore specifico	10	Lavoro di un campo elettrico	16
Quantità di calore	10	Lavoro di una carica in un condensatore	16
Temperatura di equilibrio	10	Capacità elettrica	16
Calore latente	10	Circuitazione	17
Passaggi di stato	10	Dielettrico all'interno di un condensatore	17
Conversione da J a cal	10	Velocità di deriva in un conduttore metallico	17
Teoria Cinetico-Molecolare	10	Circuiti elettrici	17
		Corrente elettrica	17
		Collegamenti	17
		In serie	17
		In parallelo	17
		Condensatori	17
		Capacità equivalente di condensatori in <i>serie</i>	17

Capacità equivalente di condensatori in <i>parallelo</i> . . .	17
Proprietà di condensatori in serie ed in parallelo . . .	17
Resistenze	17
Leggi di Ohm	18
Resistenza quivalente di resistenze in <i>serie</i>	18
Resistenza quivalente di resistenze in <i>parallelo</i>	18
Proprietà di condensatori in serie ed in parallelo . . .	18
Tabella riassuntiva delle formule	18
Generatori	18
Forza elettromotrice	18
Potenza elettrica	18
Effetto Joule	18
Circuiti RC	18
Carica	18
Scarica	18
Leggi di Kirchhoff	19
Legge di Kirchhoff dei nodi	19
Legge di Kirchhoff delle maglie	19
Utilizzo delle leggi di Kirchhoff	19
Induttanza	19
Mutua induzione	19
Circuiti RL	19
Corrente Alternata	20
Trasformatore	20
Magnetismo	20
Forza in un campo magnetico	20
Legge di Biot-Savart	20
Legge di Ampère	20
Solenoidi	21
Motore elettrico	21
Forza di Lorentz	21
Selettore di velocità	21
Flusso	21
Circuitazione	21
Teorema di Ampère	21
Legge di Faraday-Neuman-Lenz	22
Esercizi	22
Appendice	38
Proporzionalità	38
Distanza	38
Notazione scientifica	38
Quadrato	38
Triangolo	38
Cerchio	39
Equazioni	39
Vettori	39
Operazioni tra vettori	39
Prodotto scalare	39
Prodotto vettoriale	39
Angolo tra vettori	39
Percentuale	40
Esponenziali e logaritmi	40

Durante tutto il formulario, si userà il sistema internazionale di notazione, ovvero . per separare interi da decimali e , per separare le migliaia se necessario.

Costanti

Qui verranno riportate le costanti usate nelle formule con relativo simbolo e unità di misura.

Simbolo	Nome	Valore	Unità di misura
π	Pi greco	3.14	/
g	Accelerazione gravitazionale	9.81	$\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
G	Costante di Gravitazione Universale	$6.67 \cdot 10^{-11}$	$\frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$
m_{Terra}	Massa della Terra	$5.9 \cdot 10^{24}$	kg
r_{Terra}	Raggio della Terra	6378	m
p_{atm}	Pressione atmosferica	1	atm
		$1.01 \cdot 10^5$	Pa
		760	mm Hg
		$1.01 \cdot 10^5$	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
N_A	Numero di Avogadro	1	bar
		$6.02 \cdot 10^{23}$	/
V_m	Volume occupato da Gas in STP	22.4	l
R	Costante universale dei Gas	0.0821	$\frac{\text{l} \cdot \text{atm}}{\text{nK}}$
		8.31	$\frac{\text{J}}{\text{nK}}$
c_{H_2O}	Calore specifico dell'acqua	$4.186 \cdot 10^3$	$\frac{\text{C}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$
		1	$\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{K}}$
λ_f	Calore di fusione dell'acqua	$3.335 \cdot 10^5$	$\frac{\text{J}}{\text{Kg}}$
λ_v	Calore di vaporizzazione dell'acqua	$2.257 \cdot 10^6$	$\frac{\text{J}}{\text{Kg}}$
k_B	Costante di Boltzman	$1.381 \cdot 10^{-23}$	$\frac{\text{J}}{\text{K}}$
c	Velocità della luce	$3 \cdot 10^8$	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
I_0	Soglia di udibilità	$10 \cdot 10^{-12}$	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

Simbolo	Nome	Valore	Unità di misura
I_m	Soglia del dolore	1	$\frac{W}{m^2}$
v	Velocità del suono	343	$\frac{m}{s}$
ε_0	Costante dielettrica nel vuoto	$8.9 \cdot 10^{-12}$	$\frac{C^2}{N \cdot m^2}$
k_0	Costante di Coulomb	$9 \cdot 10^9$	$\frac{N \cdot m^2}{C^2}$
e^-	Carica di un elettrone	$-1.60 \cdot 10^{-19}$	C
m_{e^-}	Massa di un elettrone	$9.11 \cdot 10^{-28}$	kg
u	Unità di massa atomica	$1.7 \cdot 10^{-7}$	kg
μ_0	Permeabilità magnetica nel vuoto	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{N}{A^2}$

Unità di misura

Grandezza	Nome	Simbolo	Definizione
Lunghezza	Metro	m	/
Massa	Kilogrammo	kg	/
Tempo	Secondo	s	/
Corrente elettrica	Ampère	A	/
Temperatura	Kelvin	K	/
Quantità di sostanza	Mole	mol	/
Area	Metro quadrato	m ²	/
Volume	Metro cubo	m ³	/
Velocità	Metro al secondo	m/s	/
Accelerazione	Metro al secondo quadrato	m/s ²	/
Frequenza	Hertz	Hz	s ⁻¹
Angolo	Radiante	rad	/
Forza	Newton	N	m·kg·s ⁻²
Pressione	Pascal	Pa	N/m ²
Energia, Lavoro, Quantità di calore	Joule	J	N·m
Carica Elettrica	Coulomb	C	s·A
Potenziale Elettrico	Volt	V	W/A
Capacità	Farad	F	C/V
Campo Magnetico	Tesla	T	N(A·m) ⁻¹
Flusso	Weber	Wb	T·m ²
Induttanza	Henry	H	Wb/A

Le unità in grassetto, sono le unità fondamentali.

Cinematica

La cinematica si occupa dello studio dei moti dei corpi. Infatti viene anche definita come *geometria del movimento*. In tutti i problemi verrà ignorato l'attrito con l'aria. Per gli esercizi si vada a pagina 22.

Si noti e ricordi che

$$1 \text{ m/s} = 3.6 \text{ km/h}$$

Moto Rettilineo Uniforme

$$x = x_0 + vt$$

x : posizione finale dell'oggetto

x_0 : posizione iniziale dell'oggetto
 v : velocità
 t : tempo

Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato

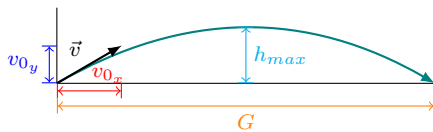
$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot \Delta x$$

v : velocità finale
 v_0 : velocità iniziale
 a : accelerazione
 t : tempo
 x : posizione finale
 x_0 : posizione iniziale
 Δx : $x - x_0$

Moto Parabolico



Ovviamente valgono sempre le formule del *Moto Rettilineo* e *Moto rettilineo uniformemente accelerato*.
 v_x è costante per tutto il moto, v_y è 0 quando si trova nel punto di massima altezza.

Tempo

$$t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{2v_{0y}}{g}$$

g : 9.81 m/s^2
 x : posizione dell'oggetto sull'asse X
 y : posizione dell'oggetto sull'asse Y
 v_0 : velocità iniziale (vettore)

Da queste si deriva che

$$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0x}} \right)^2$$

Gittata

$$G = \frac{2v_{0x} v_{0y}}{g}$$

g : 9.81 m/s^2 ; 9.81 m/s^2
 v_0 : velocità iniziale (vettore)

Altezza massima

$$h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

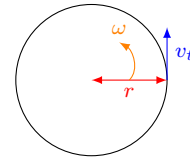
g : 9.81 m/s^2
 v_0 : velocità iniziale (vettore)

Velocità in un punto

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$$

g : 9.81 m/s^2

Moto Circolare Uniforme



Nel moto circolare, si distinguono due generi diversi di velocità: *tangenziale* e *angolare*.

La velocità tangenziale (v_t) è quella che cambia ad ogni istante direzione e che porterebbe il corpo a lasciare la traiettoria.
 La velocità angolare (ω) è costante per ogni punto della circonferenza e indica quanto veloce un corpo ruota.

Si noti anche che r indica la distanza dal centro di rotazione al corpo in oggetto.

Velocità tangenziale

$$v_t = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

r : raggio della circonferenza
 T : periodo del moto, ovvero quanto impiega a compiere un giro completo
 ω : velocità angolare

Velocità angolare

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

α : angolo a cui si trova il corpo
 t : tempo
 T : periodo del moto

Accelerazione centrifuga

$$a_c = \frac{\Delta v}{T} = \frac{2\pi\omega}{T} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} = \omega v$$

Δv : variazione di velocità
 T : periodo del moto
 ω : velocità angolare
 r : raggio della circonferenza

Forza centrifuga/centripeta

Nonostante siano forze (e quindi argomento di dinamica) sono strettamente collegate al MCU. Le due forze sono quelle che spingono verso l'interno o l'esterno un corpo entrato in rotazione.

$$F_c = m \cdot a_c$$

a_c : accelerazione centrifuga

Se nel caso di un'auto in curva, la forza centrifuga è pari a

$$F_c = \mu \cdot F_p = F_{\text{attrito}}$$

Moto Armonico

Molte delle formule del moto armonico sono ricavabili dal moto circolare.

$$x = r \sin \omega t$$

$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{x}$$

r : raggio della circonferenza
 ω : velocità angolare
 x : posizione dell'oggetto
 α : accelerazione angolare

Moto Circolare Uniformemente Accelerato

Le formule sono praticamente le stesse del moto rettilineo, solo che invece di x si ha θ , invece di v si ha ω e invece di a si ha α .

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_0 + \omega t \\ \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ a_t &= \alpha r\end{aligned}$$

θ : posizione angolare
 ω : velocità angolare
 r : raggio della circonferenza
 t : tempo
 a_t : accelerazione tangenziale
 α : accelerazione angolare

Dinamica

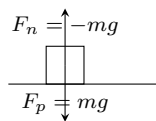
La dinamica è la branca della fisica che studia il moto dei corpi servendosi delle forze che ne sono responsabili
Per gli esercizi si vada a pagina 23.

Secondo Principio della Dinamica

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Se due corpi interagiscono tra loro, si sviluppano due forze, dette comunemente azione e reazione: sono uguali in modulo e direzione, ma opposte in verso.
Un corpo è in equilibrio quando la somma delle forze è 0, $F_y = 0 \wedge F_x = 0$.
Le forze si dividono in *conservative* e *dissipative*. Quando agisce una forza conservativa l'energia si mantiene, quando una dissipativa si perde energia. Si noti che

$$\begin{aligned}\text{Energia dissipata} &= \\ \text{Energia meccanica finale} &- \text{Energia meccanica iniziale}\end{aligned}$$



La forza normale ha verso opposto alla forza peso ma direzione e modulo uguale.

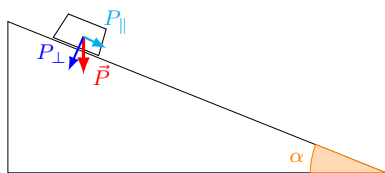
Attrito

Ci sono vari tipi di attrito: *statico*, *dinamico* e *volvente* ma tutti si basano sulla stessa idea: moltiplicare il coefficiente di attrito tra le superfici per la forza premente.

$$\begin{aligned}F_d &= \mu_d F_p \\ F_s &= \mu_s F_p \\ F_v &= \mu_v F_p\end{aligned}$$

F_p : forza premente

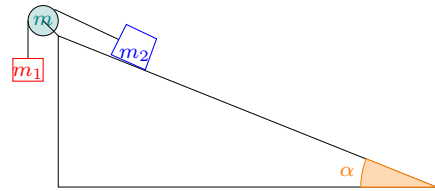
Piano Inclinato



$$\begin{aligned}P_{\perp} &= P \cos \alpha \\ P_{\parallel} &= m \cdot a_x = P \sin \alpha \\ a_x &= g \sin \alpha\end{aligned}$$

g : 9.81 m/s²
 m : massa del corpo
 a_x : accelerazione sul piano inclinato
 \vec{P} : vettore della forza peso. Si noti che P è il suo modulo
 α : alzo del piano

Funi e carrucole



$$a = \frac{m_1 g - m_2 g \sin \alpha}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}$$

Si noti che questa formula è particolare per questo caso. Si noti anche che $\frac{m}{2}$ è da aggiungere solo se si ha la massa della carrucola e quindi il suo peso non è trascurabile.
Per una formula più generale si usi

$$a = \frac{\sum \vec{F}}{\sum m}$$

Per gli esercizi relativi a queste tre sottosezioni, si vada a pagina 23.

Lavoro, Energia e Potenza

$$\vec{L} = \vec{F} \cdot \vec{S} = \Delta E$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$P = \frac{L}{t}$$

$$U = mgh$$

$$U_1 + E_1 = U_2 + E_2$$

g : 9.81 m/s²
 L : lavoro
 F : forza
 S : spostamento
 E_c : energia cinetica
 P : potenza
 U : energia potenziale
 m : massa del corpo
 v : velocità del corpo

Il *Lavoro* è un vettore che si compone della forza applicata sul corpo e del suo spostamento.

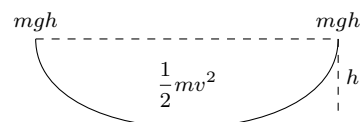
L'*Energia cinetica* è l'energia di un corpo in movimento.

La *Potenza* indica la quantità di energia scambiata nel tempo.

L'*Energia potenziale* è quanto energia potrebbe generare quel corpo. Dipende dall'altezza.

Queste sono formule generali, che danno le definizioni. Negli esercizi verrà particolarmente utile $U_1 + E_1 = U_2 + E_2$ in quanto permette di trovare la velocità o la massa o l'altezza di un corpo in due diverse situazioni.

Per gli esercizi si vada a pagina 24.



Se agisce una forza dissipativa (come quella di attrito), il corpo non arriverà a h .

Si usi mgh solo per altezze relativamente piccole. Se si comincia ad usare una grande distanza, si usino le formule della gravitazione.

Vediamo ora alcune formule particolari:

Legge di Hooke e energia elastica

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

$$U_e = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

k : costante elastica della molla
 $\vec{x} \approx \Delta x$: variazione di posizione

Queste formule sono relative a molle.

Quantità di moto e teorema dell'impulso

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

$$\vec{I} = \Delta\vec{q} = \vec{F}\Delta t$$

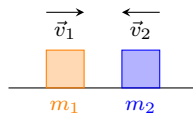
m : massa del corpo
 \vec{v} : velocità del corpo
 \vec{F} : forza applicata sul corpo
 t : tempo

La quantità di moto indica la forza necessaria a fermare un oggetto in movimento in un dato lasso di tempo.

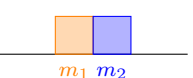
Si ricordi che

$$\sum \vec{q} = \text{costante nel tempo}$$

$$t = 0$$

$$m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2 = 0$$


$$t = t_1 \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

$$\sum \vec{q} = 0$$


Per gli esercizi si vada a pagina 25.

Urti

Si distinguono 2 tipi di urti: *elastici* e *anaelastici*.

Negli urti *elastici* i due corpi collidono ma rimangono separati. Ad esempio due palle da biliardo.

Negli urti *anaelastici* i due corpi che collidono rimangono attaccati l'uno all'altro, come nel caso di un pesce che ne mangia un altro o di un proiettile che colpisce un sacco.

Per gli esercizi si vada a pagina 25.

Elastico

$$v_{1f} = \frac{v_{1i}(m_1 - m_2) + 2m_2v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1v_{1i} + v_{2i}(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

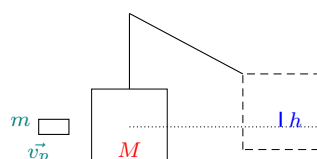
1: relativo al primo corpo
 2: relativo al secondo corpo

Anaelastico

$$m_1v_1 + m_2v_2 = v(m_1 + m_2)$$

1: relativo al primo corpo
 2: relativo al secondo corpo
 v : velocità finale

Proiettile contro un corpo



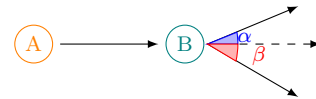
$$v_p = \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh}$$

$$h = \frac{v_p^2 m^2}{2g(M + m)^2}$$

g : 9.81 m/s²

Urti obliqui

Un urto obliquo è come nel seguente caso, ovvero quando due corpi collidono e partono in direzioni diverse.



$$\vec{q} \begin{cases} m_A v_a \sin \alpha - m_B v_b \sin \beta = v_0 m \\ m_A v_a \cos \alpha - m_B v_b \cos \beta = 0 \end{cases}$$

Centro di Massa

Il centro di massa è un punto in un corpo. In quel punto si potrebbe concentrare tutta la massa del corpo per renderlo puntiforme.

Le formule riportate possono valere per tutte le dimensioni, qui però verrà presa in considerazione solo una per semplicità.

$$x = \frac{\sum_{i=0}^n m_i x_i}{\sum_{i=0}^n m_i} \quad \vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=0}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=0}^n m_i} \quad \vec{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=0}^n m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=0}^n m_i}$$

Per gli esercizi si vada a pagina 25.

Momento Angolare e Inerzia

Il momento angolare (\vec{L}) è la quantità di moto per le rotazioni.

Al concetto di *momento angolare* si accompagna anche quello di **momento di inerzia**. L'inerzia (I) indica quanto un corpo si oppone alla rotazione.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{q}$$

Da qui si nota la relazione stretta con la [Quantità di moto e teorema dell'impulso](#).

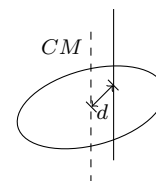
$$L = r q \sin \alpha = r \cdot v \cdot m \cdot q \sin \alpha = m r^2 \omega \sin \alpha = I \omega \sin \alpha$$

$$I = m r^2 = \sum_{i=0}^n m_i r_i^2$$

m : massa del corpo
 ω : velocità angolare
 v : velocità tangenziale
 α : angolo di rotazione
 q : quantità di moto

Se un corpo ruota rispetto ad un asse parallelo a quello passante per il centro di massa e la distanza tra i due assi è d e la massa totale m ,

$$I = I_{CM} + m d^2$$



In aggiunta al momento angolare e al momento di inerzia, c'è la **forza angolare** (\vec{M}). Molto semplicemente è definita

$$\vec{M} = I \vec{\alpha}$$

$$\Delta L = M \Delta t$$

che è una forma molto simile a $\vec{F} = m \vec{a}$. Infatti α identifica l'**accelerazione angolare**.

Studiando la statica di un corpo rigido, si dimostra che

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Teorema di König

Il teorema di König descrive un moto roto-traslato. Ad esempio una ruota che si muove sull'asfalto (ruota sul suo asse e trasla sull'asfalto).

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2$$

I : inerzia

ω : velocità angolare

v_{CM} : velocità del centro di massa

Per gli esercizi si vada a pagina 26.

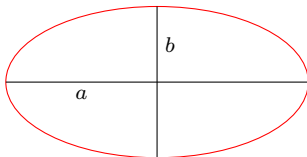
Tabella riassuntiva e di confronto

Traslatorio	Rotatorio
$x = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$	$\theta = \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
$F = ma$	$I\alpha$
$q = mv$	$L = I\omega$
$\Delta q = F\Delta t$	$L = M\Delta t$
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$

Gravitazione

La gravitazione si occupa di studiare le forze che intercorrono tra corpi celesti.

Essendo le orbite ellittiche (come dice la prima legge di Keplero), a e b si riferiscono ai semiasse rispettivamente maggiore e minore.



Per gli esercizi si vada a pagina 26.

Seconda legge di Keplero

Il raggio vettore tra la Terra e il Sole spazia aree uguali in tempi uguali.

Terza legge di Keplero

$$\frac{a^3}{T^2} = k \left(k = \frac{GM}{4\pi^2} \right)$$

T : periodo di rivoluzione

Legge di Gravitazione Universale

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G : $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

m : massa di un pianeta/corpo

r : raggio/distanza tra i corpi

Accelerazione Gravitazionale su un pianeta

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

G : $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

M : massa del pianeta

R : raggio del pianeta

Velocità di un satellite

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

G : $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

M : massa del pianeta

R : $r + h$: raggio del pianeta più distanza dalla superficie

Velocità di fuga

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

G : $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

M : massa del pianeta

R : raggio del pianeta

La velocità di fuga è la velocità che un corpo deve avere per poter entrare in orbita del pianeta.

Idrostatica

L'idrostatica studia i fluidi in stato di equilibrio. Studia anche le pressioni.

Legge di Stevino

La legge di Stevino trova la pressione ad una data profondità.

$$p = p_{atm} + \delta gh$$

δ : densità del liquido

p_{atm} : $1 \text{ atm} = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mm Hg} = 1.01 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ bar}$

g : 9.81 m/s^2

h : profondità

Se vista in un modo più generale si trova la pressione tra due punti

$$p_2 = p_1 + \delta g \Delta h$$

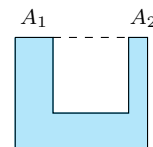
δ : densità del liquido

g : 9.81 m/s^2

h : profondità

Si ricordi che Densità = $\frac{\text{Massa}}{\text{Volume}}$.

Torchio idraulico



Il torchio idraulico permette partendo da una forza applicata su un pistone (di area A_1) di ottenere una forza più grande su un altro pistone (di area A_2).

$$p = \frac{F}{A} \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Principio di Pascal

Il principio di Pascal afferma che in un liquido una pressione che venga esercitata in un punto viene trasmessa a ogni suo altro punto e in ogni sua direzione.

Legge dei vasi comunicanti

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

I livelli di liquidi sono inversamente proporzionali alla densità dei liquidi. Si presti attenzione alla densità corretta.

Principio di Archimede

Il principio di Archimede permette di trovare la forza di galleggiamento.

$$F_g = \delta_f V g$$

Al principio di Archimede è collegata la condizione di equilibrio di un corpo in un fluido:

‘Un corpo è in equilibrio in un fluido se la sua forza peso compensa la spinta di Archimede, cioè se il suo peso è uguale al peso del fluido spostato.’

Volume della parte immersa

$$V_{imm} = V_s \frac{\delta_s}{\delta_f}$$

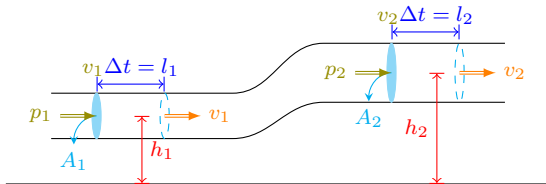
s : relativo al solido
 f : relativo al fluido

Idrodinamica

L'idrodinamica studia i movimenti dei liquidi e la loro relazione con il contenitore.

Il seguente disegno verrà utilizzato per definire le formule e far capire il significato delle lettere.

Per gli esercizi, si vada a pagina 28.



Nelle seguenti formule, S (la superficie trasversale del tubo) è definito come $A \cdot l$.

Equazione di Bernoulli

Quest'equazione descrive un qualsiasi moto tra due punti di un qualsiasi fluido.

$$p_1 + \delta g h_1 + \frac{1}{2} \delta v_1^2 = p_2 + \delta g h_2 + \frac{1}{2} \delta v_2^2$$

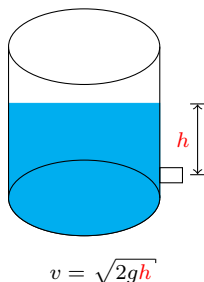
g : 9.81 m/s²
 δ : densità del fluido

Se il tubo è orizzontale

$$\text{Portata} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$
$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

Equazione di Torricelli

Si usi questa formula quando si deve trovare a che velocità esce un liquido da un contenitore.



g : 9.81 m/s²
 h : altezza della colonna di fluido premente sul punto d'uscita

Termodinamica

La termodinamica si occupa di studiare come un corpo si modifica e interagisce con gli altri alla variazione di *temperatura*, *pressione* e *volume*.

Si tenga conto che t rappresenta la temperatura in °C e T in K. Si ricordi che

$$C = K + 273.15$$

Per gli esercizi si vada a pagina 28.

Dilatazione

Ci sono 3 tipi di dilatazione: lineare (che studia la dilatazione su una dimensione), superficiale (due dimensioni) e volumetrica (tre dimensioni).

Lineare

$$l = l_0 (1 + \lambda \Delta t)$$
$$\Delta l = l_0 \lambda \Delta t$$

λ : coefficiente di dilatazione lineare

Superficiale

$$S = S_0 (1 + \beta \Delta t)$$
$$\Delta S = S_0 \beta \Delta t$$

β : 2λ , coefficiente di dilatazione superficiale

Volumetrica

$$V = V_0 (1 + \alpha \Delta t)$$
$$\Delta V = V_0 \alpha \Delta t$$

α : 3λ , coefficiente di dilatazione volumetrica

Leggi di Gay-Lussac e Boyle-Mariotte

Queste 3 leggi definiscono la base della termodinamica e vengono usate in casi particolari.

Prima legge di Gay-Lussac

Da usarsi quando p = costante, trova il nuovo volume al variare della temperatura.

$$V = \frac{V_0}{T_0} T$$

Seconda legge di Gay-Lussac

Da usarsi quando V = costante, trova la nuova pressione al variare della temperatura.

$$p = \frac{p_0}{T_0} T$$

Legge di Boyle-Mariotte

Da usarsi quando T = costante, definisce un prodotto costante tra volume e pressione.

$$pV = \text{costante}$$

Questa formula diventa specialmente utile quando si hanno 2 situazioni e si può mettere a sistema.

Gas

Questa sottosezione si dedicherà agli studi effettuati sui gas.

Equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT$$

R : 0.08211 · atm/n · K 8.31 J/K · mol
 n : numero di moli

Proprietà dei Gas

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Questa proprietà è indispensabile in alcuni esercizi in quanto mette in relazione due situazioni e permette di trovare tutte le caratteristiche.

Numero di molecole

$$N = n \cdot N_A$$

n : numero di moli

N_A : $6.02 \cdot 10^{23}$

Massa molare

$$M = \frac{m}{n}$$

m : massa

n : numero di moli

Calorimetria

Questa sottosezione è dedicata a descrivere le formule relative alla quantità di calore e capacità termica.

Capacità termica

Indica quanto velocemente un corpo assorbe calore.

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

Q : quantità di calore assorbito dal corpo

ΔT : variazione di temperatura

Calore specifico

Un corpo con un calore specifico alto ha bisogno di una grande quantità di calore per avere un piccolo cambiamento di temperatura. Si pensi all'acqua ($c = 4180 \text{ J/Kg} \cdot \text{K}$) e l'aria ($c = 1000 \text{ J/Kg} \cdot \text{K}$).

$$c = \frac{C}{m} = \frac{Q}{m \Delta T}$$

C : capacità termica

Quantità di calore

$$Q = C \Delta t = mc \Delta T$$

C : capacità termica

Temperatura di equilibrio

La temperatura di equilibrio è la temperatura che raggiungono due corpi a contatto fra di loro.

$$t_e = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

1 : relativo al primo corpo

2 : relativo al secondo corpo

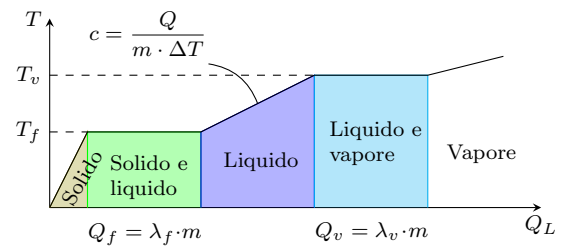
Calore latente

Il calore latente è la quantità di calore scambiata nel passaggio di fase di un corpo.

$$Q_L = c_L m$$

c_L : calore specifico latente, diverso dal *calore specifico*

Passaggi di stato



Questo grafico rappresenta indicativamente i passaggi di stato. Si può leggere sia da sinistra che da destra, ovvero che dal grafico si può capire che in modulo, l'energia necessaria per fare solidificare il corpo, è pari a quella necessaria per farlo liquefare.

Conversione da J a cal

Essendo entrambi unità di misura dell'energia, è possibile convertire una dall'altra.

$$1 \text{ cal} = 4.184 \text{ J}$$

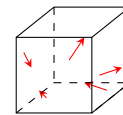
Teoria Cinetico-Molecolare

La teoria cinetico-molecolare descrive i movimenti delle molecole all'interno di un gas.

Una lettera che si trova molto spesso in questa sottosezione e nelle successive è la l , ovvero il grado di libertà del corpo.

l	Tipo di Gas
3	Monoatomico
5	Biatomico

Queste formule mettono in relazione il macroscopico (forza e pressione) e microscopico (forza e pressione di un dato numero di molecole) in un contenitore di gas perfetto.



Forza su una parete

$$F_{\text{parete}} = \frac{N m}{3 l} \langle v \rangle^2$$

N : numero di molecole

$\langle v \rangle$: velocità media

Pressione su una parete

$$p_{\text{parete}} = \frac{N m}{3 V} \langle v \rangle^2 = \frac{2 N E_c}{3 V}$$

N : numero di molecole

V : volume

$\langle v \rangle$: velocità media

E_c : energia cinetica

Energia cinetica

$$E_c = \frac{l}{2} \frac{R}{N} T = \frac{l}{2} k_B T$$

R : $0.08211 \cdot \text{atm/n} \cdot \text{K}$ $8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$

k_B : $1.318 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

T : temperatura in Kelvin

Si può quindi capire che più un corpo è caldo, maggiore è la quantità di energia cinetica che possiede, ovvero possiede molecole ad una velocità media sempre più alta.

Energia interna

$$U = \sum_{i=0}^n E_{c_i} + \sum_{i=0}^n U_{g_i} = \frac{1}{2} nRT$$

U_g : potenziale gravitazionale, se è un gas perfetto vale 0

R : $0.08211 \cdot \text{atm/n} \cdot \text{K}$ $8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$

Termodinamica (Lavoro)

Primo principio della termodinamica

$$Q = L + \Delta U$$

Q : quantità di calore

L : lavoro

ΔU : variazione di energia interna

Tabella per i segni di Q e L

La seguente tabella riassume in breve i segni che la quantità di calore e il lavoro devono avere.

Segno di Q e L		
Positivo	Il sistema acquista energia dall'esterno mediante uno scambio di calore	Il sistema compie un lavoro positivo (durante un'espansione) e cede energia
Negativo	Il sistema cede energia all'esterno mediante uno scambio di calore	Il sistema compie un lavoro negativo (durante una compressione) e acquista energia

Lavoro di un'isobara

Un'isobara è una trasformazione che mantiene costante la pressione.

$$L = p\Delta V$$

$$Q = \frac{2+l}{2} nR\Delta T$$

$$c_p = \frac{l+2}{2} R$$

R : $0.08211 \cdot \text{atm/n} \cdot \text{K}$ $8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$

c_p : è il calore specifico di un corpo sottoposto a una trasformazione isobara

Lavoro di un'isoterma

Un'isoterma è una trasformazione che mantiene costante la temperatura.

$$L = Q = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

R : $0.08211 \cdot \text{atm/n} \cdot \text{K}$ $8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$

Lavoro di un'isocora

Un'isocora è una trasformazione che mantiene costante il volume.

$$L = 0$$

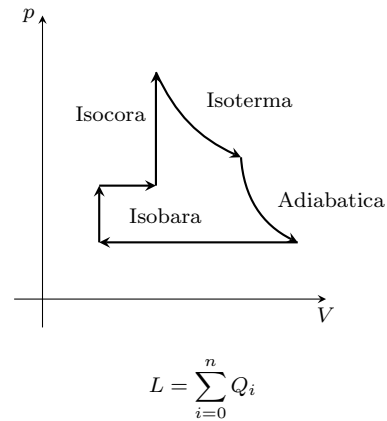
$$Q = \Delta U = \frac{l}{2} nR\Delta T$$

$$c_V = \frac{l}{2} R$$

R : $0.08211 \cdot \text{atm/n} \cdot \text{K}$ $8.31 \text{ J/K} \cdot \text{mol}$

c_V : è il calore specifico di un corpo sottoposto a una trasformazione isocora

Lavoro di un ciclo



Lavoro di un'adiabatica

Un'adiabatica è una trasformazione che non cede calore all'esterno.

$$L = -\Delta U$$

Queste seguenti, sono definite **Equazioni di Poisson**

$$pV^\gamma = \text{costante}$$

$$V_1^{\gamma-1} T_1 = V_2^{\gamma-1} T_2$$

$$p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$$

γ : rapporto tra c_p e c_V , si veda la seguente tabella:

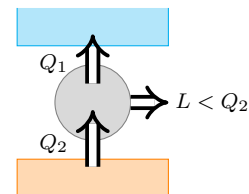
Tipo di gas	c_p	c_V	$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$
Monoatomico	$\frac{5}{2} R$	$\frac{3}{2} R$	1.6
Biatomico	$\frac{7}{2} R$	$\frac{5}{2} R$	1.4

Equazione di Meyer

$$c_p - c_V = R$$

c : calore specifico molare

Macchina di Carnot



$$\mu = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{L}{Q_2}$$

$$\mu_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

La prima formula definisce il rendimento (μ) di una qualsiasi macchina termica, la seconda solo per una macchina di Carnot. Q_1 è il calore ceduto dalla sorgente fredda, Q_2 è quello fornito dalla sorgente calda

Si noti che una macchina reale $\mu < 1$, in una macchina di Carnot $\mu = 1$.

$$P = Q_2 \mu t$$

P : potenza

μ : rendimento

Entropia

Per definire l'entropia, definiamo la **disuguaglianza di Clausius** che ci aiuterà a capire la definizione di entropia.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0$$

se il ciclo è reversibile si ha questa forma

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q_i}{T_i} \right)_{\text{rev}} = 0$$

L'**entropia** è in definitiva una formulazione più generale del secondo principio della termodinamica che sia appropriato per ogni trasformazione. L'entropia è una funzione di stato. Per uno stato C e uno stato di riferimento R per cui $S(R) = 0 \text{ J/K}$, l'entropia è così definita:

$$S(C) = S(C) - S(R) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q_i}{T_i} \right)_{R \rightarrow C, \text{rev}}$$

Per gli esercizi, si vada a pagina 30.

Proprietà dell'entropia

L'entropia è una grandezza estensiva, ovvero che preso un sistema Ω che sia l'unione di due sottosistemi indipendenti Ω_1 e Ω_2 ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$), la sua entropia è pari a

$$S(C) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q_i}{T_i} \right)_{R \rightarrow C, \text{rev}} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q_i}{T_i} \right)_{R \rightarrow C, \text{rev}}^{\Omega_1} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\Delta Q_i}{T_i} \right)_{R \rightarrow C, \text{rev}}^{\Omega_2}$$

Entropia di un sistema isolato

In un sistema isolato l'entropia ha una variazione pari a **zero** solo se la trasformazione è *reversibile*, **maggiore di zero** altrimenti.

Entropia dell'universo

L'entropia dell'universo è sempre in crescita in quanto avvengono trasformazioni irreversibili senza fine (come ad esempio un'esplosione).

Entropia di un sistema non isolato

Se una trasformazione reale provoca in un sistema una diminuzione di entropia pari a $|\Delta S|$, nel resto dell'universo è maggiore di $|\Delta S|$.

Macrostatì e microstatì

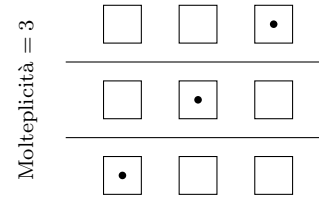
Un *microstato* è una precisa combinazione di elementi microscopici, un *macrostato* è descritto dalle variabili macroscopiche che ne descrivono le proprietà.

Ad esempio: un macrostato per un sistema termodinamico è descritto da almeno due delle tipiche variabili (pressione, volume e temperatura). Un microstato invece è lo stato di ogni molecola di gas nel sistema.

Un microstato corrisponde ad un solo macrostato, un macrostato può essere descritto da più macrostatì. Si noti anche che più un macrostato è disordinato, più è probabile che si realizzi spontaneamente.

Molteplicità di un macrostato

Sia A un macrostato. Si definisce $W(A)$ come **molteplicità**, ovvero il numero di microstatì distinti che corrispondono ad A .



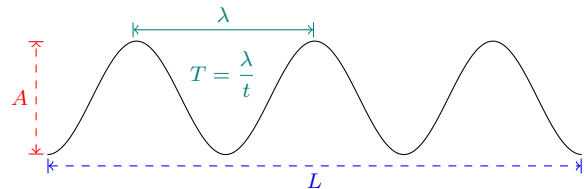
Equazione di Boltzman

$$S(A) = k_B \ln W(A)$$

$$k_B: 1.318 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Onde

Questa sezione si dedica alle formule ed esperimenti relativi allo studio del moto ondoso dei corpi. Luci, suoni e rumori sono esempi di onde e oscillazioni, uno dei fenomeni più diffusi in natura. Le onde si propagano nello spazio e permettono di trasportare anche enormi quantità di energia, ma non massa.



Il grafico qua sopra è il grafico della funzione $\cos x$ che rappresenta un possibile moto di un'onda. Sono anche rappresentate le 3 caratteristiche principali: l'*ampiezza* (A), la *lunghezza* (L) e la *lunghezza d'onda* (λ).

Per gli esercizi, si vada a pagina 30.

Formule sperimentali

Di seguito vengono riportate formule sperimentali che quindi dipendono da caratteristiche fisiche.

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$
$$\mu = \frac{m}{L}$$

T : tensione della corda

μ : densità lineare della corda

m : massa della corda

L : lunghezza della corda

Relazione fondamentale

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Questa formula mette in relazione la velocità, il periodo, la lunghezza d'onda e la frequenza di oscillazione.

Equazioni dell'onda

Esistono più equazioni dell'onda, dalla più generale alle due particolari.

Equazione con x fissato

Questa formula definisce l'equazione dell'onda in un punto fisso.

$$f(\bar{x}, t) = A \cos \frac{2\pi}{T} t$$

Equazione con t fissato

Questa formula definisce l'equazione dell'onda ad un particolare istante.

$$f(x, t) = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$$

Equazione generale dell'onda

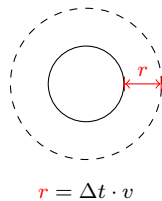
Queste sono le formule più generali dell'equazione dell'onda.

$$f(x, t) = A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (x \mp vt) \right] = A \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T} \right)$$

La cosa più importante da notare è il segno. Se l'onda si propaga a *destra* si usi $-$, se verso *sinistra* si usi $+$.

Equazione di Huygens

L'equazione di Huygens definisce il rapporto tra il raggio di propagazione di un'onda e il tempo. La seguente figura farà capire meglio.



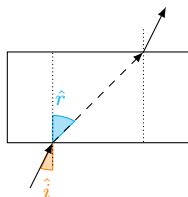
Rifrazione

Questa sezione si occuperà della luce che attraversa due mezzi e si rifratta/riflette. Per gli esercizi si vada a pagina 30.

Un concetto unico a questa sezione è quello dell'*indice di rifrazione*. Ce ne sono di 2 tipi: *assoluto* relativo solo alle onde elettromagnetiche e *relativo*. Per calcolare quello relativo si usi:

$$n_{2,1} = \frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Qui introduciamo anche due simboli: \hat{i} e \hat{r} . Il primo (\hat{i}) indica l'angolo di *incidenza* con il secondo mezzo e \hat{r} l'angolo di *rifrazione*. Per capire meglio, si faccia riferimento alla seguente figura:

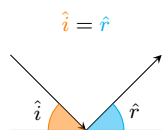


Si tenga conto che questa immagine si riferisce al fenomeno della *rifrazione* che ha queste caratteristiche:

$$\frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c}{v_2}$$

Da notare che $\frac{c}{v_2}$ vale solo se la luce arriva dal vuoto.

Se invece ci troviamo in un caso di *riflessione* ha questa proprietà:

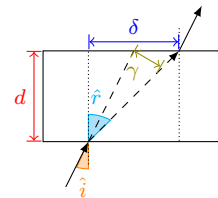


Relazione di Snell

La relazione di Snell mette appunto in relazione gli indici di rifrazione con gli angoli \hat{i} e \hat{r} .

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}}$$

Distanza di Rifrazione



$$\delta = \frac{d \sin(\hat{i} - \hat{r})}{\cos \hat{r}}$$
$$\gamma = d \tan \hat{r}$$

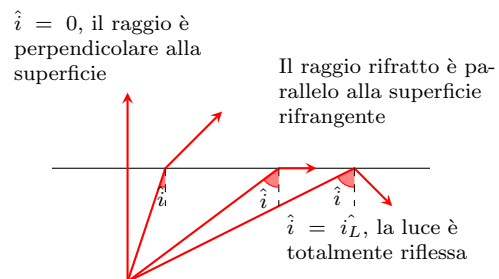
Angolo limite

L'angolo limite è quell'angolo che segna se si tratta di un fenomeno di rifrazione o di riflessione.

$$\hat{a}_l = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

Se viene superato l'angolo limite avviene il fenomeno di *rifrazione assoluta*.

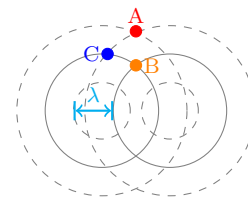
Immagine riassuntiva



Interferenza

Il fenomeno dell'interferenza avviene quando due fonti distinte emettono onde e queste impattano fra loro. Il seguente disegno aiuterà a spiegare il fenomeno.

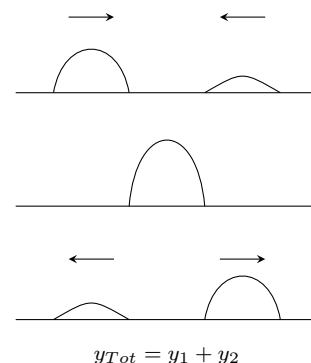
Per gli esercizi si vada a pagina 31.



In questa immagine sono stati segnati 3 punti. Nel punto **A** e nel punto **B** si ha un'interferenza **costruttiva** in quando due ampiezze uguali si incontrano.

Nel punto **C** si ha un'interferenza **distruttiva** in quando due ampiezze diverse si incontrano.

Principio di Sovrapposizione



Interferenza Costruttiva

$$|\overline{PS}_1 - \overline{PS}_2| = k\lambda$$

\overline{PS} : distanza tra l'origine dell'onda e il punto P

k : $k \in \mathbb{Z}$ indica il numero dell'interferenza che interessa, ovvero il numero dell'onda

Interferenza Distruttiva

$$|\overline{PS}_1 - \overline{PS}_2| = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

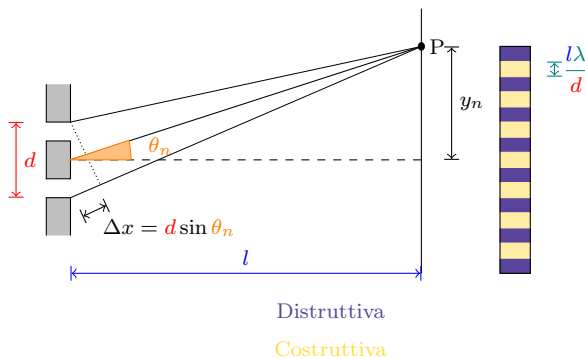
\overline{PS} : distanza tra l'origine dell'onda e il punto P

k : $k \in \mathbb{Z}$ indica il numero dell'interferenza che interessa, ovvero il numero dell'onda

Nei punti di interferenza distruttiva, sommandosi ampiezza massima e minima vi sarà assenza di turbolenza.

Esperienza di Young

Young studiava la luce. Il suo esperimento dimostra la natura ondulatoria della luce. Di seguito viene riportato un diagramma che rappresenta semplicemente la sua struttura.



La barra a destra fa vedere l'alternarsi di zone chiare e scure. Ciascuna di quelle zone è definita *frangia*. Per gli esercizi si vada a pagina 31.

Secondo il principio di Huygens, ogni punto di un'onda è a sua volta sorgente di una. Ecco perché dai fori, si sprigiona un'onda perfettamente circolare.

Altezza dell' n -esima frangia

La seguente formula trova l'altezza di una qualsiasi frangia.

$$y_n = l \tan \theta_n$$

Le prossime due invece trovano l' n -esima frangia costruttiva (C) o distruttiva (D).

$$y_{nC} = \frac{l \cdot n \cdot \lambda}{d}$$

$$y_{nD} = \frac{l \cdot (2n + 1) \cdot \lambda}{2d}$$

Angolo dell' n -esima frangia

Se la frangia è costruttiva

$$\sin \theta_n = n \frac{\lambda}{d}$$

Se è distruttiva

$$\sin \theta_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}$$

Differenza di percorso tra i due fori

Nel grafico identificata come Δx

$$\Delta x = d \sin \theta_n$$

Se l'angolo è riferito ad una frangia costruttiva è anche

$$\Delta x = n\lambda$$

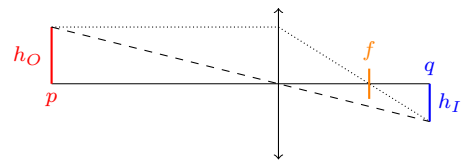
Se l'angolo è riferito ad una frangia distruttiva è anche

$$\Delta x = (2n + 1)\lambda$$

Lenti e Specchi

L'obiettivo fondamentale dell'ottica è mettere a fuoco degli oggetti. Generalmente si riscontrano due problemi di vista: *miopia* (difficoltà a mettere a fuoco lunghe distanze) e *ipermetropia* (o presbiopia che è la difficoltà ad identificare oggetti vicini).

Nonostante le lenti abbiano in definitiva 3 formule totali, meritano una sottosezione a sé in quanto può non essere sempre immediato identificare oggetti ed immagini. Il disegno sotto aiuterà a capire.



Da quest'immagine possiamo capire due caratteristiche fondamentali:

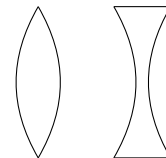
- Una linea perpendicolare alla lente viene deviata in modo che passerà per il fuoco;
- Una linea passante per il centro della lente continuerà il suo percorso senza deviazioni;

Questo ci porta alle formule fondamentali.

Per gli esercizi si vada a pagina 32.

Gli specchi funzionano nello stesso modo delle lenti, quindi si possono accorpate in questa sottosezione.

Convergente Divergente



Per lenti sottili, si considera la convenzione che la distanza focale $f > 0$ per lenti convergenti e $f < 0$ per lenti divergenti. La distanza dell'oggetto p è sempre positiva e la distanza dell'immagine è positiva quando q è dall'altro lato della lente. Un'immagine virtuale ha $q < 0$. L'ingrandimento è positivo per un'immagine dritta e negativo per una rovesciata.

Equazione generale

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Ingrandimento

$$G = \frac{h_I}{h_O} = -\frac{q}{p}$$

Diottria

$$D = \frac{1}{f}$$

Nell'ottica, per trovare la distanza focale della lente da usare negli occhiali, si usi

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d}$$

dove d è la distanza da ottenere. Altrimenti si usi

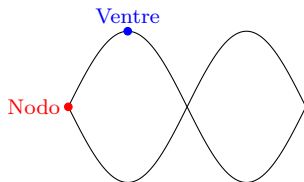
$$\begin{aligned} \text{Miopia: } & -\frac{1}{d_{\min}} \\ \text{Ipermetropia: } & -\frac{1}{d_{\max}} \end{aligned}$$

Lenti attaccate

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Onde Stazionarie

Si possono riscontrare onde stazionarie quando due onde siano sincrone ma con versi opposti. Il risultato è il seguente



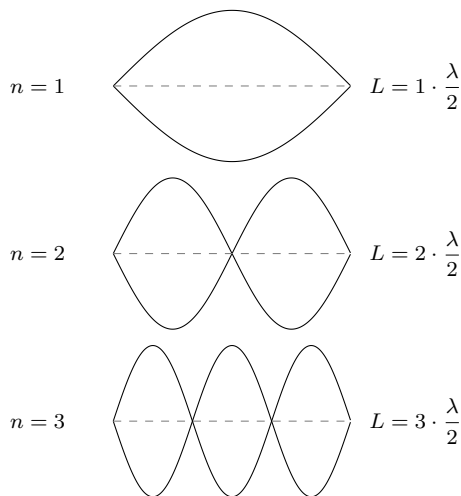
Per le onde stazionarie, vengono definiti *nodi* i punti in cui l'ampiezza è 0, *ventri* quelli in cui l'ampiezza è massima. Si definisce n il numero di ventri che esistono nell'onda.

Per trovare la posizione di un nodo o di un ventre si usi

$$\text{Nodo: } x = \frac{\lambda}{4} + (k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{Ventre: } x = (k+1)\frac{\lambda}{2}$$

dove k identifica il numero del ventre o nodo desiderato.



Equazione dell'onda stazionaria

$$y = A \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Lunghezza dell'onda

La lunghezza dell'onda è determinata da n e dalla lunghezza d'onda.

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

Dove λ_n è definita come

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Frequenza del ventre

$$f_n = \frac{n}{2L}v$$

v : velocità (che può essere espressa come $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$)

Suono

Il suono è un'onda meccanica, quindi rientra in questa sezione. Il suono si propaga in forma sferica da un punto.

Per gli esercizi, si vada a pagina 31.

Intensità

L'intensità indica quanto forte è un suono.

Dato che il suono si propaga in forma sferica, $S = 4\pi r^2$ dove r indica la distanza dell'uditore dalla sorgente.

$$I = \frac{E}{St} = \frac{P}{S}$$

E : energia

P : potenza, solitamente espressa in W

Il prodotto dell'intensità per il raggio al quadrato rimane costante nel tempo:

$$I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2$$

Livello sonoro

Il livello sonoro indica quanto forte un suono appare all'udito umano. La sua unità di misura è il *decibel* (dB).

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

I_0 : $10^{-12} W/m^2$

Effetto Doppler

L'effetto Doppler è un effetto che tutti quanti conoscono (un'ambulanza che emette un suono diverso in base alla sua velocità relativa rispetto all'uditore) e che mette in relazione la frequenza del suono e la velocità dei due corpi (uditore e sorgente).

La cosa più complicata dell'effetto Doppler sono i segni. Questa è la formula più generale

$$f_O = f_S \frac{v \pm v_U}{v \mp v_S}$$

v : 343 m/s

U : uditore

S : sorgente

Come si nota, al numeratore e al denominatore si invertono i segni. Questa tabella aiuterà a far capire come scegliere.

Uditore	Avvicina	+
	Allontana	-
Sorgente	Avvicina	-
	Allontana	+

La formula vale anche quando entrambi i corpi sono in movimento. Se l'uditore o la sorgente sono fermi rispettivamente v_U e v_S sono pari a 0.

Battimenti

I battimenti sono un fenomeno che si verifica quando due sorgenti vibrano a frequenze molto simili, quindi $f_1 \approx f_2$. Se questa condizione non è presente, non è un battimento.

Un tipico esempio è un diapason che comincia a vibrare quando si canta alla giusta tonalità.

$$f_B = |f_1 - f_2|$$

Elettrostatica

L'Elettrostatica studia le cariche elettriche nei corpi e come reagiscono fra di loro.

Un concetto fondamentale è quello di **carica**. La carica (identificata con Q) è determinata dalla somma di tutte le cariche degli elettroni all'interno di ogni corpo. La sua unità di misura è il *Coulomb* (C).

Si noti che nelle seguenti formule, ε è definito come $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ dove ε_0 è la **costante dielettrica nel vuoto** e ε_r è la costante dielettrica nel mezzo (nel vuoto è 0).

Per gli esercizi si vada a pagina 32.

Legge di Coulomb

Attraverso la legge di Coulomb (da non essere confusa con il teorema di Coulomb) si trova la forza che intercorre tra due corpi carichi. Si noti che questa formula può essere usata solo se i corpi sono puntiformi e fermi.

$$F = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

k_0 : $9.11 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$

Campo elettrico

Il campo elettrico è generato da una carica. Esso è un campo vettoriale, ciò significa che ad ogni suo punto si associa un vettore. Il campo elettrico può essere uniforme, ovvero a tutti i punti si associa un vettore uguale.

Verranno ora riportate tutte le formule che permettono di trovare o il modulo o il vettore di un campo elettrico.

$$E = k_0 \frac{Q}{r^2} \quad \text{Solo se puntiforme}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad \vec{E} = \sum_{i=0}^n \vec{E}_i$$

$$E = -\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

k_0 : $9.11 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$

ΔV : d.d.p

Δx : distanza tra le superfici

Campo di una superficie piana infinita

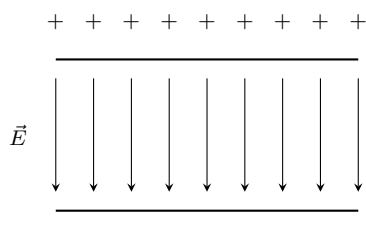
$$q < 0 \quad \begin{array}{c} \vec{E} \downarrow \\ \text{-----} \\ \vec{E} \uparrow \end{array}$$

$$q > 0 \quad \begin{array}{c} \vec{E} \uparrow \\ \text{-----} \\ \vec{E} \downarrow \end{array}$$

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0}$$

σ : densità di carica $\left(\frac{Q}{A}\right)$

Campo elettrico all'interno di un condensatore



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

σ : densità di carica $\left(\frac{Q}{A}\right)$

Teorema di Coulomb

Il teorema di Coulomb definisce il campo elettrico per una qualsiasi superficie.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Flusso

Il flusso (Φ) è la quantità di campo elettrico (\vec{E}), che attraversa una superficie (\vec{S}).

Verranno ora riportate le formule per calcolare il flusso di una superficie.

$$\Phi_i(\vec{E}) = \vec{E}_i \cdot \vec{S}_i$$

$$\Phi_S(\vec{E}) = \sum_{i=0}^n \vec{E}_i \cdot \vec{S}_i$$

$$\Phi_S(\vec{E}) = E \cdot S \cos \theta \quad \text{Se } S \text{ è piana e } E \text{ uniforme}$$

Teorema di Gauss

Il teorema di Gauss definisce il flusso di una superficie *chiusa*.

$$\Phi_{SCH}(\vec{E}) = \frac{\sum_{i=0}^n Q_i}{\varepsilon}$$

Lavoro di un campo elettrico

Quanto lavoro deve fare un campo elettrico per spostare una carica? Questa sottosezione è dedicata proprio a questo.

$$L = \Delta U \quad \text{Se riferito ad un campo elettrico}$$

$$L = -\Delta U \quad \text{Se riferito ad una carica}$$

$$L = q[V_A - V_B]$$

Al lavoro sono direttamente collegati l'**energia potenziale elettrica** (U) e il **potenziale elettrico** (V). Vengono ora riportate le formule per calcolarle.

$$U = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r} \quad V = k_0 \frac{Q}{r}$$

k_0 : $9.11 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$

Lavoro di una carica in un condensatore

Il lavoro di una carica è equivalente all'energia interna.

$$L = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

Capacità elettrica

La capacità elettrica indica quanta carica può immagazzinare un conduttore isolato. Verranno ora riportate le formule per calcolarla.

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$C = 4\pi\varepsilon \quad \text{Specificamente in una sfera isolata}$$

$$C = \frac{S\varepsilon}{d} \quad \text{Specificamente in un condensatore piano}$$

Nell'ultima formula, d indica la distanza tra le due armature di un condensatore.

Circuitazione

La circuitazione (C) indica quanta carica passa per una linea chiusa (Γ).

$$C_{\Gamma}(\vec{E}) = \sum_{i=0}^n \vec{E}_i \cdot \vec{l}_i = \sum_{i=0}^n E_i \cdot l_i \cos \theta$$

l : differenza di spostamento

Si noti che θ è rispetto alla tangente, non alla normale come nel [Flusso](#).

Dielettrico all'interno di un condensatore

Come cambia il campo elettrico all'interno di un condensatore se si inserisce un dielettrico?

$$E_{RIS} = \frac{\sigma \cdot \sigma_p}{\epsilon}$$

Velocità di deriva in un conduttore metallico

È la velocità media degli elettroni nel conduttore metallico.

$$v_d = \frac{i}{n \cdot A \cdot e}$$

e

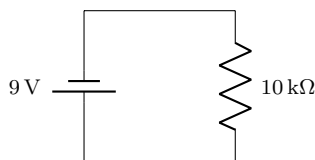
n : numero di elettroni di conduzione

A : sezione del conduttore i : carica massima

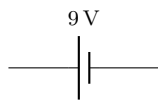
Circuiti elettrici

Questa sezione è strettamente legata alla precedente ma, vista l'importanza ne merita una sua.

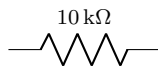
I circuiti elettrici sono usati ovunque nel mondo d'oggi e hanno una simbologia tutta loro. Di seguito viene riportato un circuito elementare.



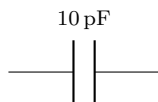
Questo circuito non ha una funzione in quanto è composto solo da una batteria



ed una resistenza



L'ultimo simbolo che verrà frequentemente usato è quello del condensatore



Ogni tanto si può anche trovare un interruttore che può interrompere il flusso di carica



Per gli esercizi, si vada a pagina [33](#).

Corrente elettrica

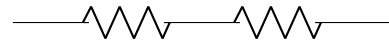
Indica quante cariche (di solito elettroni) si muovono all'interno di un corpo conduttore durante un tempo determinato.

Collegamenti

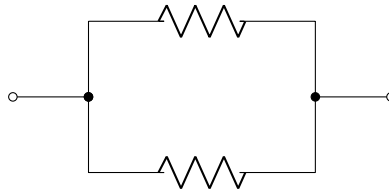
Ci sono 2 tipi di collegamenti: **in serie** ed **in parallelo**.

Se due componenti sono in serie, la stessa corrente i li attraversa e sono posti uno dietro l'altro. Se sono in parallelo invece la corrente si divide.

In serie



In parallelo



Condensatori

Un condensatore è composto da due *armature* che hanno cariche di segno opposto, una positiva e l'altra negativa. Il compito di un condensatore all'interno di un circuito è di immagazzinare carica e rilasciarla. Viene usato ad esempio nei flash delle macchine fotografiche dove viene rilasciata in un attimo la carica immagazzinata in un certo tempo.

La loro unità di misura è il Farad (F).

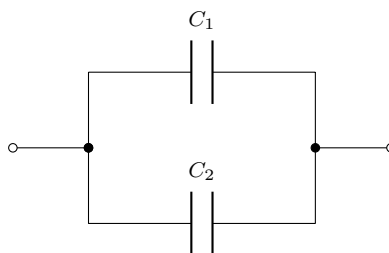
Capacità equivalente di condensatori in serie



Questo "circuito" può essere ridotto ad un solo condensatore la cui capacità deve essere

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Capacità equivalente di condensatori in parallelo



Questo "circuito" può essere ridotto ad un solo condensatore la cui capacità deve essere

$$C_e = C_1 + C_2$$

Proprietà di condensatori in serie ed in parallelo

Una caratteristica di questi due collegamenti è quello che rimane costante tra i condensatori.

Due condensatori **in serie** mantengono la stessa Q .

Due condensatori **in parallelo** mantengono la stessa ddp (ΔV).

Resistenze

Le resistenze servono appunto a opporre resistenza alla corrente elettrica. Permettono di collegare componenti con una tensione di rendimento bassa a circuiti che ne forniscono una alta.

La loro unità di misura è l'Ohm (Ω).

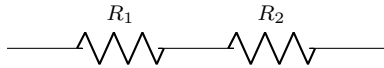
Leggi di Ohm

Le leggi di Ohm mettono in relazione ddp e resistenza, e le caratteristiche fisiche di una resistenza.

$$R = \frac{\Delta V}{i} \quad R = \rho \frac{l}{S}$$

La prima mette in relazione la ddp e la corrente con la resistenza. La seconda mette in relazione la resistività (ρ), la lunghezza del corpo (l) e la sezione (S) con la resistenza.

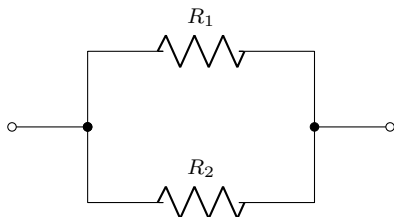
Resistenza equivalente di resistenze in serie



Questo "circuito" può essere ridotto ad un solo condensatore la cui capacità deve essere

$$R_e = R_1 + R_2$$

Resistenza equivalente di resistenze in parallelo



Questo "circuito" può essere ridotto ad una sola resistenza la cui capacità deve essere

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Vige anche questa proprietà:

$$R_1 i_1 = R_2 i_2$$

Proprietà di condensatori in serie ed in parallelo

Una caratteristica di questi due collegamenti è quello che rimane costante tra le resistenze.

Due resistenze **in serie** mantengono la stessa i .
Due resistenze **in parallelo** mantengono la stessa ddp (ΔV).

Tabella riassuntiva delle formule

	Serie	Parallelo
Condensatori	$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$	$C_e = C_1 + C_2$
Resistenze	$R_e = R_1 + R_2$	$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Generatori

I generatori generano, abbastanza logicamente, corrente elettrica. Ce ne sono di due tipi: *Ideali* e *Reali*. L'unica differenza è che i generatori reali hanno resistenza interna.

Forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = \overbrace{iR}^{\Delta V} + \underbrace{ir}_{\text{caduta di tensione}}$$
$$\mathcal{E} = \frac{L}{q}$$

R : resistenza

L : lavoro del generatore per portare la carica da un polo all'altro

q : carica

Si noti che $\mathcal{E} - iR$ è l'effettiva d.d.p. che si può trovare ai capi di una batteria che sta alimentando un circuito con $R > 0$.

Potenza elettrica

$$P = Vi$$

Se per conduttori ohmici

$$P = iR^2 = \frac{V^2}{R}$$

Effetto Joule

L'effetto Joule è uno dei tre effetti causati da una corrente che attraversa un conduttore. In questo caso determina il fatto che ogni conduttore attraversato da una corrente genera calore.

$$Q = Ri^2 t$$

Q : quantità di calore in Joule

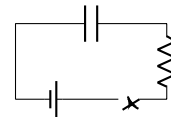
t : tempo

Spesso viene usato il *kilowattora* che equivale a $3.6 \cdot 10^6$ J.

Circuiti RC

Carica

I circuiti RC sono così denominati perché contengono una resistenza e un condensatore.



Questo circuito non ha alcuna funzione se non quella di caricare il condensatore fino a capacità massima (anche se, come vedremo, non accadrà mai). Dato che il processo di carica non è istantaneo, dipende dal tempo. Infatti si vuole studiare il variare della carica ($q(t)$), corrente ($i(t)$) e della differenza di potenziale ($V(t)$) del condensatore.

Rispettivamente sono

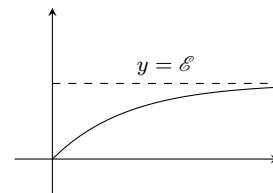
$$q(t) = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V(t) = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Dove $\tau = RC$ è la *costante di tempo* che varia da circuito a circuito.

Perché il condensatore non si caricherà mai? Ora andiamo a disegnare il grafico della carica otteniamo



Come notiamo, il grafico tende sempre a raggiungere il valore massimo però senza mai raggiungerlo, infatti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \mathcal{E}$$

In ogni caso il condensatore raggiunge una carica quasi totale dopo 4τ o 5τ .

Scarica

La scarica di un condensatore avviene in maniera molto simile alla carica.

$$q(t) = C\mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(t) = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V(t) = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Leggi di Kirchhoff

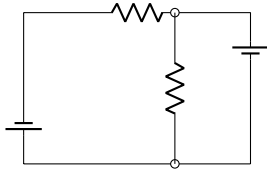
Per capire queste leggi, è necessario aver chiaro tre termini

Nodo Un punto in cui convergono almeno 3 conduttori

Ramo Una parte di circuito tra 2 nodi

Maglia Una parte di circuito attraversata solo una volta per tornare al nodo di origine

Per spiegarli, prendiamo il seguente circuito



Vediamo due nodi (già evidenziati dai cerchi). Sono presenti 3 rami (tutti i modi per arrivare da un nodo all'altro) e 3 maglie (la maglia sinistra con 2 resistenze e una batteria, quella di destra con una sola resistenza e una batteria e quella che comprende i rami esterni). Una caratteristica da ricordare è che *ci sono tante correnti quanti rami*. Risolvere questi circuiti quindi significa trovare intensità e verso di queste correnti.

Legge di Kirchhoff dei nodi

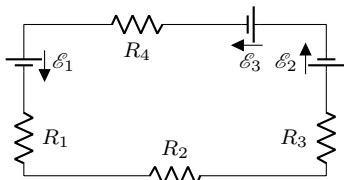
La corrente entrante in un nodo è pari a quella uscente.

$$\sum_k i_k = 0$$

Questo è anche definito come **Principio di conservazione di carica**.

Legge di Kirchhoff delle maglie

Per arrivare alla formula, prendiamo come esempio il seguente circuito



Kirchhoff descrive che

$$\sum_k \mathcal{E}_k = \sum_j R_j i_j$$

Ovvero scegliendo un verso (orario o antiorario) se la corrente ha stesso verso le si dà il valore +, altrimenti -. Stessa cosa per la forza elettromotrice. Proseguendo da un nodo qualsiasi secondo il verso scelto e tornando sullo stesso nodo (attraversando una maglia), sommiamo algebricamente le forze o le resistenze che si incontrano. Si ottiene quindi la formula descritta.

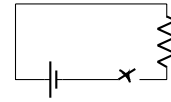
Utilizzo delle leggi di Kirchhoff

Negli esercizi non possiamo usare direttamente queste leggi. Il modo generale di approcciarci è

1. Individuare le incognite (le correnti) e scegliere un verso di percorrenza in modo arbitrario
2. Creare un sistema a n -equazioni dove n è il numero di incognite (in generale 3)
3. Come prima equazione, usare la LKN (Legge di Kirchhoff dei Nodi) scegliendo arbitrariamente i versi delle correnti nel nodo
4. Come seconda e terza equazione, descrivere le maglie seguendo il verso scelto
5. Risolvere il sistema lineare

Induttanza

L'induttanza è strettamente collegata al fenomeno dell'auto induzione, che è strettamente legato alla [Legge di Faraday-Neuman-Lenz](#). Per capirla, prendiamo come esempio il seguente circuito



Per la legge di Biot-Savart, si genererà un campo magnetico quando si chiude il circuito e scorrerà della corrente. Per la Legge di Faraday-Neuman-Lenz (pag. 22) la variazione di campo magnetico produrrà una corrente indotta all'interno di questo circuito che si oppone alla corrente nel momento della carica e la favorisce nella scarica. Questo ci porta all'introduzione di un nuovo elemento circuitale: l'induttanza



Il flusso del circuito è proporzionale alla corrente per la legge di Faraday-Neuman-Lenz. Quindi possiamo scrivere

$$\Phi(\vec{B}) = L \cdot i$$

dove L è la nostra induttanza che dipende da circuito a circuito. Se ora usiamo la nuova definizione di flusso possiamo scrivere

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

Cosa ci dice questo? Che se $\frac{di}{dt} \neq 0$ allora $\mathcal{E}_{ind} \neq 0$, se invece $\frac{di}{dt} = 0$, allora $i(t) = \text{costante}$.

Essendo l'elemento dell'induttanza un solenoide, possiamo isolare L e scrivere

$$L = \frac{\Phi(\vec{B})}{i} = \frac{N\mu \frac{Ni}{l} S}{i} = \mu \frac{N^2 S}{l}$$

dove μ è la permeabilità magnetica che può essere assoluta (μ_0) o relativa ($\mu_r \mu_0$), N il numero di spire, S la superficie e l la lunghezza del solenoide. L'unità di misura è l'*Henry* (H).

Mutua induzione

La mutua induzione è il fenomeno dell'induzione che avviene tra due o più circuiti diversi. Ad esempio se un circuito 1 agisce su di un circuito 2,

$$\Phi_2(\vec{B}) = M i_1$$

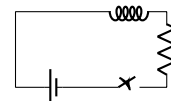
dove M è un valore che varia da circuito a circuito.

Si noti che di conseguenza, per la legge di Faraday-Neuman-Lenz, si genererà una forza elettromotrice da un circuito all'altro. Quindi possiamo scrivere

$$\mathcal{E}^{1 \rightarrow 2} = -M \frac{di_1}{dt}$$

Circuiti RL

I circuiti RL sono circuiti composti da una resistenza e un induttore



In una situazione come questa abbiamo come unica incognita variabile è $i(t)$. Per ricavarla possiamo risolvere l'equazione differenziale

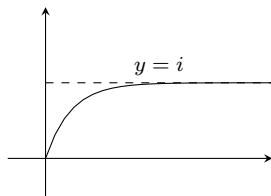
$$\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + Ri$$

e risolvendo per i , o andare per induzione. Se nel circuito RC l'incognita caratteristica è $q(t)$, in questo è $i(t)$. Se la carica aveva come massimo $C\mathcal{E}$, la corrente ha come massimo, secondo la legge di Ohm, $\frac{\mathcal{E}}{R}$. Quindi

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

dove $\tau = \frac{L}{R}$ e rappresenta la costante di tempo del circuito.

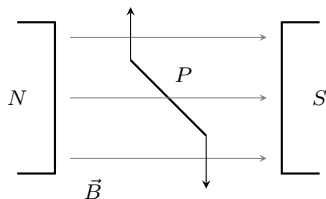
Anche in questo caso il grafico della carica è



e capiamo che in teoria la corrente non raggiungerebbe mai il valore di regime, però generalmente dopo 4τ o 5τ la variazione è talmente minima che gli strumenti non la misurano più.

Corrente Alternata

Se fin'ora si è lavorato con corrente continua fornita da una forza elettromotrice, quasi tutta la corrente che si utilizza quotidianamente è alternata. Per generare corrente alternata, si pongano due magneti con polarità opposte uno di fronte all'altro. Tra i due si ponga una serie di spire che ruotano. Questa rotazione genererà una corrente. Il disegno dunque è molto simile a quello del motore elettrico



Facendo girare le spire, il flusso varierà. Infatti si avrà

$$\Phi(\vec{B}) = BS \cos \theta = BS \cos \omega t$$

quindi applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}[BS \cos \omega t] = \\ &= -BA \frac{d}{dt}[\cos \omega t] = \omega BS \sin \omega t = \mathcal{E} \sin \omega t \end{aligned}$$

Notiamo quindi che la forza elettromotrice che viene scaturita ha intensità sinusoidale, quindi lo è anche la corrente. Infatti si definisce una funzione $i(t)$ che varia a seconda del tempo

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \sin \omega t = i_0 \sin \omega t$$

dove i_0 è il valore di picco. Si definisce anche una corrente efficace i_{eff} che è la corrente che dissipa la stessa potenza in corrente continua. Il suo valore è

$$i_{eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

Quindi in generale

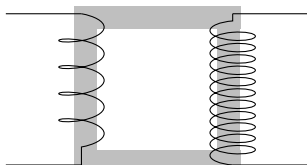
$$\mathcal{E} = R \cdot i(t) \quad \mathcal{E}_0 = R \cdot i_0 \quad \mathcal{E}_{eff} = R \cdot i_{eff} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$$

Si introduce anche un nuovo elemento circuitale il generatore di corrente alternata



Trasformatore

Il trasformatore è uno dei dispositivi più usati al mondo. Il suo scopo è quello di *trasformare* un voltaggio in uno maggiore o minore, quasi senza perdita di energia. Di seguito verrà schematizzato il trasformatore



Sia la spira di sinistra quella **primaria** e sia quella di destra la **secondaria**. Perché un trasformatore abbia senso di esistere deve avere un numero diverso di spire a destra e a sinistra. Il blocco di ferro-metallo al centro serve ad incanalare tutte le linee di forza, così che non si sprechino. Si trovano le seguenti formule

$$\frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_p} = \frac{n_s}{n_p} = \frac{i_s}{i_p}$$

Si presti attenzione alla sequenza di scrittura in quanto la corrente inviere primario e secondario. Si noti anche che $\frac{n_s}{n_p}$ è definito *rapporto di trasformazione*.

Magnetismo

Il magnetismo si occupa di come i magneti interagiscano fra di loro. Ogni magnete genera un campo magnetico (\vec{B}). La sua direzione è sempre dal polo NORD a quello SUD. Ogni magnete ha sempre due poli e anche se lo si divide si otterranno magneti bipolari.

La sua unità di misura è il *Tesla* ($T = \frac{N}{Am}$)

Per gli esercizi si vada a pagina 35.

Forza in un campo magnetico

$$\vec{F} = l \cdot (\vec{i} \times \vec{B})$$

Si ricordi che questo è un **prodotto vettoriale**.

l rappresenta la lunghezza del cavo che attraversa il campo magnetico \vec{i} : è la corrente che attraversa il cavo. Il verso determinerà se da considerarsi positiva o negativa nel sistema di riferimento scelto.

Legge di Biot-Savart

La legge di Biot-Savart definisce un campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da una corrente.

La direzione è la tangente alla linea di forza generata dal filo, il verso è antiorario se la corrente esce, orario altrimenti. Un modo per ricordarselo più facilmente è il seguente: si prenda la mano destra e si usi il pollice per indicare il verso e la direzione della corrente. Si chiudano poi a pugno le altre dita. Il verso delle dita chiuse, è quello del campo magnetico.

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$$

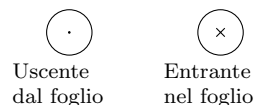
μ_0 : $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$

π : 3.14

i : corrente

d : distanza dal filo

In genere negli esercizi si trova disegnato o un cerchio con un punto o uno con una croce che vengono usati per indicare il verso del filo o del campo, come i seguenti



Legge di Ampère

La legge di Ampère descrive la forza che intercorre tra due fili paralleli attraversati da una corrente.

$$F = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} l$$

μ_0 : $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$

π : 3.14

i : corrente

d : distanza tra i due fili

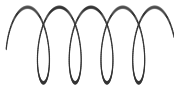
Molto spesso si vuole definire la forza su di una certa dimensione del filo, quindi si ottiene la formula in questa forma:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}$$

La formula calcola il modulo del vettore. La forza è attrattiva se i versi delle correnti sono uguali, repulsiva altrimenti.

Solenoidi

I solenoidi (anche detti bobine) sono degli strumenti che, attraversati da corrente, generano un campo magnetico uniforme al loro interno mentre all'esterno è 0. Essi sono composti da spire, disposte in questo modo



$$B = \mu_0 \frac{n}{l} i$$

μ_0 : $4\pi \cdot 10^{-7}$

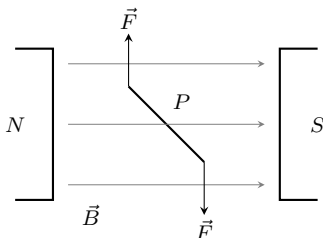
n : numero di spire

l : lunghezza del solenoide

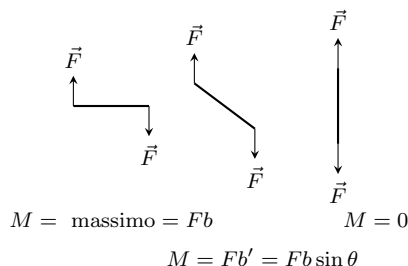
i : corrente

Motore elettrico

Nonostante il nome possa far credere che funziona solo attraverso l'elettricità, il motore elettrico svolge la sua funzione grazie ad una coesione di elettricità e magnetismo. Il disegno seguente cercherà di chiarire le idee.



Come funziona? Innanzitutto abbiamo un campo magnetico $N - S$ e una spira rettangolare P attraverso la quale passa corrente (solitamente è caratterizzata da un vasto numero di strati). Si fa passare corrente all'interno di questa spira in modo che una forza si generi. Questa forza metterà in rotazione la spira. Quando si raggiunge la situazione in cui il momento è 0 (ovvero quando è perpendicolare al campo) la corrente viene invertita così che la piastra continui il giro. Questa forza motrice è quella che si genera e verrà poi usata. Per capire meglio il movimento si guardi il disegno qua sotto



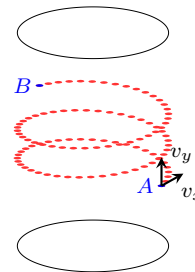
Forza di Lorentz

La forza di Lorentz è la forza che una carica in moto risente all'interno di un campo magnetico.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Si presti attenzione al verso di questa forza. Se la carica è *positiva* si usi la solita regola della mano, altrimenti si inverta semplicemente il verso.

Una particolarità è che una carica che entra in un campo magnetico viene deviata dal suo percorso. Il moto che ne deriva è *elicoidale*. Ovviamente questo nel caso più generale, il disegno di seguito aiuterà a capire in che modo l'elettrone viene spostato



Questa è una rappresentazione del moto di una carica all'interno del campo magnetico. Queste formule permettono di trovare il *raggio*, il *periodo* e il *passo* dell'elica. Nelle seguenti formule, si utilizzeranno le due componenti distinte della velocità.

$$\frac{mv_x^2}{r} = qv_x B \quad T = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B}$$

$$\Delta S = v_y \cdot T \quad r = \frac{mv_x}{qB}$$

Selettore di velocità

Il selettore di velocità è un particolare dispositivo che permette di "selezionare" alcune cariche che vanno solo ad una determinata velocità attraverso una fessura. Il loro utilizzo è molto ampio, specialmente in dispositivi come televisioni a tubo catodico. Il loro funzionamento si basa su due campi \vec{E} e \vec{B} uniformi incrociati fra di loro.

Sulla carica deve agire una forza \vec{F} pari a

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Una carica passa nel selettore se e solo se la sua velocità è pari a

$$v = \frac{E}{B}$$

Flusso

Il flusso (Φ) di un campo magnetico \vec{B} è molto simile al flusso di un campo elettrico

$$\Phi_S(\vec{B}) = \sum_{i=1}^n \vec{B} \cdot \Delta \vec{S}_i$$

Si noti però che il flusso di qualsiasi superficie che insista sulla stessa linea chiusa, avrà sempre lo stesso valore.

Il flusso di un solenoide, si trova moltiplicando il numero di spire per il flusso generato da una spira.

Circuitazione

La circuitazione (C) di un campo magnetico \vec{B} è molto simile alla circuitazione di un campo elettrico

$$C_\Gamma(\vec{B}) = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i \cdot \Delta l_i$$

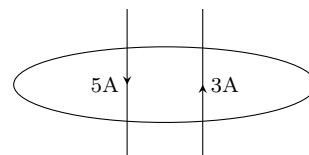
Δl : spostamento

Teorema di Ampère

Il teorema di Ampère dice che

$$C_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \sum_{i=1}^n i_c$$

dove i_c è una corrente concatenata. Una corrente i si definisce concatenata con una linea chiusa Γ se attraversa una superficie che ha come linea chiusa Γ .



Preso per esempio il disegno qui sopra, la circuitazione sarebbe

$$C_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0(5 - 3) = 2\mu_0$$

Legge di Faraday-Neuman-Lenz

La legge descrive un fenomeno scoperto da Faraday per caso. Un circuito, immerso in un campo magnetico, al variare di questo genera una corrente indotta. Più precisamente, al variare del flusso del campo magnetico, viene generata una corrente indotta. Faraday, Neuman e Lenz assieme arrivarono alla formulazione della seguente formula

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta \Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

se considerata una media

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

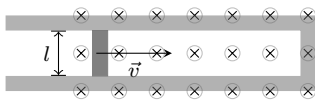
se considerata istantanea.

In queste formule \mathcal{E} è la forza elettromotrice indotta (dato che con una corrente generata, possiamo immaginare ci sia una forza elettromotrice che la genera), Φ è il flusso e t il tempo.

Si noti anche che modificando la formula della forza elettromotrice possiamo dire che

$$\mathcal{E} = vBl$$

dove v è la velocità di spostamento del conduttore/circuito in questione, B il campo magnetico e l la lunghezza del conduttore.



Esercizi

Questa sezione è dedicata ad alcuni esercizi con relativa risoluzione e spiegazione. Il suo scopo è quello di chiarire i concetti teorici con esempi pratici.

Consigli

Ecco alcuni consigli che saranno utili nello svolgimento degli esercizi:

1. **Leggere più volte il problema;**
2. **Partire dalle formule generali.** Questo aiuterà a imparare le formule e ad applicarle. Le formule particolari sono generalmente derivate e alcune volte anche in casi particolari (alcune variabili pari a zero, masse uguali, ...);
3. **Guardare corpo per corpo le forze che interagiscono.** Andare per ordine e con calma è una garanzia per evitare di fare errori di calcolo o di teoria. Personalmente, una volta presa questa abitudine, ho di gran lunga ridotto il numero di errori di distrazione;
4. **Avere un sistema unico di risoluzione.** Abituarsi al proprio sistema, seguendo o meno questi consigli, aiuterà ad essere costanti e ad evitare errori di distrazione;
5. **Mettere tutti i dati in una "tabella".** Aiuta a visualizzare ciò che si ha e capire come ottenere ciò che serve;
6. **Scrivere le formule utilizzabili.** Assieme al punto precedente, aiuta ad avere un quadro generale di ciò che si va ad affrontare;
7. **Ricontrollare i conti a fine di ogni riga.** Nessuno è infallibile, è facile scambiare un segno o fare stupidi errori, ricontrollare scongiura la loro propagazione;

Cinematica

Moto Rettilineo Uniforme

Esercizio 1 Un poliziotto sta inseguendo un fuggitivo su una strada rettilinea. La velocità del fuggitivo è costante a $v_f = 120$ km/h e il poliziotto è a distanza $d = 500$ m e ha velocità pari a $v_p = 180$ km/h. Qual è la **velocità relativa** del poliziotto rispetto al fuggitivo? Quanto **tempo** ci vuole perché lo raggiunga?

La velocità relativa è molto semplicemente la differenza tra le velocità.

$$v_r = v_p - v_f \rightarrow v_r = 180 - 120 = \boxed{60 \text{ km/h}}$$

Per trovare quando i due individui si incontrano basta mettere a sistema le loro due equazioni della posizione

$$\begin{cases} x = x_0 + v_f t \\ x = v_p t \end{cases} \rightarrow 180t = 120t + 500 \rightarrow t = \frac{50}{6} = \boxed{8.3 \text{ s}}$$

Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato

Esercizio 1 Un corpo cade liberamente fino a terra che si trova ad una distanza h . Sapendo che nell'ultimo secondo di volo percorre una distanza pari a $\frac{h}{2}$, **quanto vale h ?**

Dalla formula del MRUA $v^2 = v_0^2 + 2ay$, possiamo sostituire le informazioni che abbiamo per trovare la velocità quando il corpo si trova a $\frac{h}{2}$

$$v^2 = v_0^2 + 2ay \rightarrow v = \sqrt{gh}$$

Inserendo ora la velocità nell'equazione oraria possiamo ricavare h

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow y = \sqrt{gh} + \frac{1}{2}gt^2$$

e ora non resta che sostituire i dati

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} &= \sqrt{9.81 \cdot h} + 9.81 \rightarrow h = 2\sqrt{9.81 \cdot h} + 9.81 \\ (h - 9.81)^2 &= 39.24h \rightarrow h^2 - 58.86h + 96.2361 = 0 \rightarrow \\ &\begin{cases} h_1 \approx 57 \text{ m} \\ h_2 \approx 1.7 \text{ m} \end{cases} \end{aligned}$$

Avendo due soluzioni, come scegliamo quella corretta? Sappiamo che il corpo vola per più di un secondo, quindi vediamo quanta distanza potrebbe percorrere quel corpo in un secondo

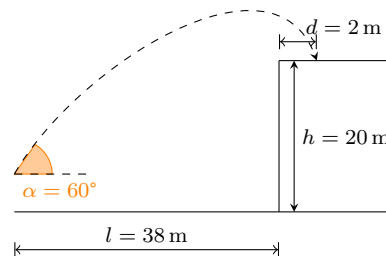
$$h = \frac{gt^2}{2} = 4.9 \text{ m}$$

Da questo è evidente che 1.7 m non può essere la nostra altezza in quanto è evidentemente inferiore alla distanza percorsa in un secondo. Di conseguenza

$$\boxed{h = 57 \text{ m}}$$

Moto Parabolico

Esercizio 1 Una pallina è lanciata a $\alpha = 60^\circ$ rispetto l'orizzontale. Atterra ad una distanza $d = 2$ m dal bordo di un tetto piatto che si trova ad una altezza $h = 20$ m. La parete del tetto si trova ad una distanza $l = 38$ m dal lanciatore. A che **velocità** è stata lanciata la pallina?



La distanza totale che la pallina percorre è $x = l + d = 40$ m. Quindi il tempo passato prima dell'atterraggio è pari a

$$t = \frac{x}{v_{0x}} \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} = \frac{2x}{v_0}$$

Avendo poi a mente l'equazione oraria

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

possiamo sostituire le informazioni conosciute

$$20 = \sin 60 v_0 \frac{2x}{v_0} - \frac{1}{2}g \frac{2x^2}{v_0^2} \rightarrow v_0 = \frac{\sqrt{31,360}}{49.3} = \boxed{25.2 \text{ m/s}}$$

Esercizio 2 Una pallina è lanciata verticalmente con una velocità $v_y = 10 \text{ m/s}$ da un tetto ad altezza $h = 20 \text{ m}$. **Quanto tempo** passa prima che tocchi il terreno? **A quale velocità** lo colpirà?

Quanto tempo è facilmente individuabile. Prendiamo la formula oraria

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Abbiamo tagliato le variabili che sono pari a 0 nel nostro caso. Isoliamo t e abbiamo

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Stiamo però attenti. Questa formula presuppone che $v_{0y} = 0$ e nel nostro caso non è così. Però $v_{0y} = 0$ quando la pallina ha raggiunto l'altezza massima dopo il lancio e torna a scendere. Infatti anche y non è solo 20 perché quando la pallina comincia a cadere ha già raggiunto una certa altezza. Troviamola

$$h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} \rightarrow h_{max} = \frac{100}{2 \cdot 9.81} = 5 \text{ m}$$

Possiamo ora sostituire nella formula precedente per trovare il tempo

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot (20 + 5)}{9.81}} \approx \boxed{2 \text{ s}}$$

La velocità è ricavabile dalla formula

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \rightarrow v = \sqrt{2gh} \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 25} \approx \boxed{22.41 \text{ m/s}}$$

Dinamica

Funi, carrucole, piani inclinati e attrito

Esercizio 1 Un corpo di massa 2 kg scivola lungo un piano inclinato liscio (senza attrito). Determina l'**accelerazione** con la quale si muove e il **tempo** che impiega a percorrere tutto il piano, sapendo che la lunghezza del piano è 1 m e la sua altezza è 0.5 m .

L'accelerazione è veramente semplice trovarla in quanto basta ricordarsi una formula:

$$a = g \sin \alpha \rightarrow a = 9.81 \cdot \sin 30^\circ = 9.81 \cdot 0.5 = \boxed{4.905 \text{ m/s}^2}$$

Come sapevamo l'angolo? Essendo il piano inclinato l'ipotenusa, la trigonometria dice che perché l'altezza sia di 0.5 l'angolo deve essere di 30° .

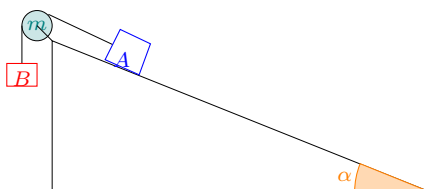
E ora, avendo l'accelerazione è un semplice esercizio di cinematica. Per prima cosa si trova la velocità finale usando una delle formule più utili di sempre

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot \Delta x \rightarrow v^2 = 0^2 + 2 \cdot 4.905 \cdot 1 = 9.81 \rightarrow v = \sqrt{v^2} = \sqrt{9.81} \approx \boxed{3.13 \text{ m/s}}$$

e ora si trova il tempo

$$v = v_0 + at \rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \rightarrow t = \frac{3.13}{4.905} \approx \boxed{0.64 \text{ s}}$$

Esercizio 2 Un blocco A di massa $M = 0.6 \text{ kg}$ si muove senza attrito su un piano inclinato di 30° . Mediante una fune priva di massa, il blocco A è connesso ad un blocco B di 22.0 kg come mostrato in figura. La carrucola ha massa trascurabile e si muove senza attrito. Determina l'**accelerazione** di ciascun blocco e la **tensione** della corda.



Si trova l'accelerazione molto rapidamente mediante l'uso di una singola formula:

$$a = \frac{m_B g - m_A \sin \alpha}{m_A + m_B} \rightarrow a = \frac{22 \cdot 9.81 - 0.6 \cdot 9.81 \cdot \sin 30^\circ}{22 + 0.6} \rightarrow a = \frac{215.82 - 39.24}{31} \rightarrow \frac{176.58}{31} \approx \boxed{5.69 \text{ m/s}^2}$$

Per la tensione la questione è un po' più particolare. La tensione rappresenta la risultante tra la forza che tira da ciascuna parte. Quindi, per prima cosa troviamole

$$F_A = m_A \sin \alpha \rightarrow F_A = 0.6 \cdot 9.81 \sin 30^\circ = \boxed{39.24 \text{ N}}$$

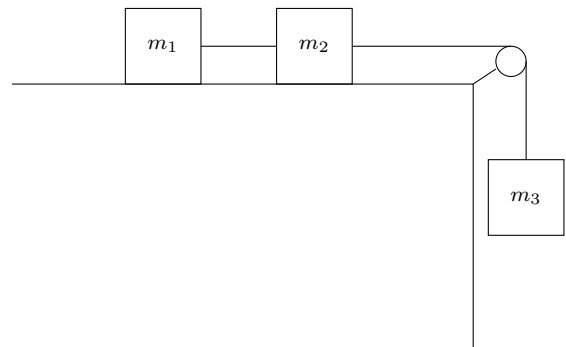
$$F_B = m_B g \rightarrow F_B = 22 \cdot 9.81 = \boxed{215.82 \text{ N}}$$

Ora per trovare la tensione vediamo che il blocco che "tira" è il blocco B. Quindi

$$T = \frac{F_B - F_A}{2} \rightarrow T = \frac{215.82 - 39.24}{2} = \boxed{88.29 \text{ N}}$$

Da notare che si divide per due in quanto la tensione che troviamo è da entrambe le parti, a noi interessa solo una.

Esercizio 3 Considera il sistema di blocchi $m_1 = 80.0 \text{ kg}$, $m_2 = 90 \text{ kg}$ tirati da una massa $m_3 = 60 \text{ kg}$. Se il coefficiente di attrito dinamico tra le superfici dei blocchi e il binario orizzontale vale $\mu_d = 0.3$, determina l'**accelerazione** del sistema e le **tensioni** dei fili.



Per risolvere questo tipo di esercizi, bisogna essere metodici. Per prima cosa troviamo la forza peso di m_3 che è anche l'unica forza che agisce direttamente.

$$P = m \cdot g \rightarrow P = 60 \cdot 9.81 = \boxed{588.6 \text{ N}}$$

Ora noi utilizzeremo la definizione di forza per calcolare l'accelerazione. Quindi dobbiamo vedere la forza che agisce direttamente sul sistema. Per ora abbiamo calcolato P , però in contrasto ci sono anche le forze di attrito. Calcoliamole.

$$F_{a1} = P_1 \cdot \mu_d \rightarrow F_{a1} = 80 \cdot 9.81 \cdot 0.3 = \boxed{235.44 \text{ N}}$$

$$F_{a2} = P_2 \cdot \mu_d \rightarrow F_{a2} = 90 \cdot 9.81 \cdot 0.3 = \boxed{264.87 \text{ N}}$$

E ora possiamo trovarci la forza che agisce sul sistema. Dato che le forze di attrito contrastano la forza peso, si tolgono da quest'ultima.

$$F = \sum F \rightarrow F = P - F_{a1} - F_{a2} \rightarrow$$

$$F = 588.6 - 235.44 - 264.87 = \boxed{88.29 \text{ N}}$$

E infine sfruttando la definizione di forza, possiamo ricavare l'accelerazione.

$$F = ma \rightarrow a = \frac{F}{m} \rightarrow a = \frac{88.29}{80 + 90 + 60} \approx \boxed{0.38 \text{ m/s}^2}$$

Per le tensioni possiamo immediatamente trovare T_1 in quanto è l'unica che agisce su m_1 che è isolato.

$$T_1 = a \cdot m_1 \rightarrow T_1 = 0.38 \cdot 80 = \boxed{30.4 \text{ N}}$$

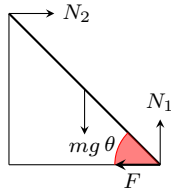
E questa è la prima, la seconda invece richiede un attimo di attenzione. Su m_2 agiscono sia T_1 che T_2 . Dato che sappiamo che il sistema non è in equilibrio (è presente un'accelerazione), sappiamo anche che le $T_2 - T_1 = m_2 \cdot a$ in quanto sul corpo m_2 è presente l'accelerazione e agiscono le due tensioni.

$$T_2 - T_1 = m_2 \cdot a \rightarrow T_2 = T_1 + m_2 \cdot a \rightarrow$$

$$T_2 = 30.4 + 90 \cdot 0.38 = \boxed{64.6 \text{ N}}$$

Esercizio 4 Una scala uniforme è appoggiata al muro, formando un angolo θ con il pavimento. Il coefficiente di attrito tra la scala e il pavimento è μ . **Trova in funzione di μ l'angolo minimo θ_m in cui la scala non scivola.**

Disegnando la situazione con anche le forze in gioco risulta



Quindi siano N_1 e N_2 le forze di reazione contro la scala e F la forza di attrito che tiene su la scala. Diciamo che la scala è lunga L e ha massa m . Allora la condizione di equilibrio è data da

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

quindi

$$\begin{cases} N_2 - F = 0 \\ N_1 - mg = 0 \end{cases}$$

Scegliamo ora un punto di riferimento: il punto di contatto tra la scala e il pavimento. Decidiamo poi che se una forza si allontana dal muro è negativa. Quindi le forze che agiscono in quel punto devono essere zero (per la condizione di equilibrio). Quindi

Questo perché la massa si trova nel baricentro (o centro di massa)

$$-LN_2 \sin \theta + \frac{L}{2} mg \cos \theta = 0$$

che semplificato diventa

$$N_2 \tan \theta = \frac{1}{2} mg$$

Utilizzando la prima equazione del sistema, possiamo quindi dire che

$$\frac{1}{2} mg \tan \theta = F$$

L'equilibrio è possibile fintanto che $F \leq N_1 \mu$. Usando la seconda equazione viene che

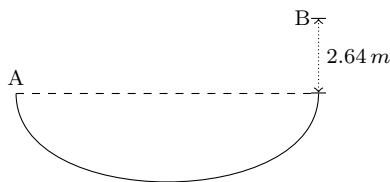
$$N_1 \mu = mg \mu$$

quindi l'equilibrio necessita che $\tan \theta \leq \frac{1}{2} \mu$ e quindi

$$\theta_m = \arctan \frac{1}{2} \mu$$

Lavoro, Energia e Potenza

Esercizio 1 Un ragazzo su uno skateboard parte nel punto A rappresentato in figura, e sale fino ad un'altezza di 2.64 m al di sopra dell'estremità della rampa nel punto B. Qual era il modulo della velocità iniziale del ragazzo nel punto A?



Siamo in un caso di sistema conservativo e quindi possiamo sfruttare la formula $U_1 + E_{c1} = U_2 + E_{c2}$. Sfruttando questa caratteristica possiamo semplicemente risolvere.

$$U_1 + E_{c1} = U_2 + E_{c2} \rightarrow mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Ora però, prima di passare ai calcoli, possiamo subito semplificare la formula in quanto sappiamo che nel secondo momento il ragazzo si ferma quando raggiunge i 2.64 m . Quindi semplifichiamola.

$$\begin{aligned} mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 &= mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow \\ mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 &= mgh_2 + \frac{1}{2}m \cancel{v_2^2} \rightarrow \\ \cancel{m}gh_1 + \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 &= \cancel{m}gh_2 \rightarrow gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = gh_2 \end{aligned}$$

Abbiamo anche cancellato la m in quanto è costante a tutti gli elementi.

Ora possiamo sostituire a h_2 il suo valore effettivo, ovvero $h_1 + 2.64$. Questo perché non sappiamo a che altezza parte ma sappiamo che la supera di 2.64 m .

$$gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = gh_2 \rightarrow gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = g(h_1 + .64)$$

$$gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = gh_1 + g \cdot 2.64$$

E ora non ci resta che isolare v .

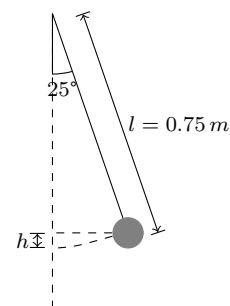
$$gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = gh_1 + g \cdot 2.64 \rightarrow \frac{1}{2}v_1^2 = \cancel{gh_1} + g \cdot 2.64 - \cancel{gh_1} \rightarrow$$

$$v_1^2 = 9.81 \cdot 2.64 \cdot 2 \rightarrow$$

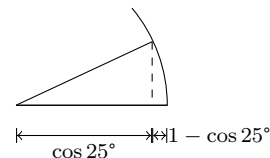
$$v_1 = \sqrt{9.81 \cdot 2.64 \cdot 2} = \sqrt{51.8} \approx \boxed{7.2 \text{ m/s}}$$

Esercizio 2 Un pendolo semplice ha la lunghezza di $.75 \text{ m}$ e una pallina con una massa di 0.15 kg . La pallina viene lasciata andare quando il filo forma un angolo di 25° rispetto alla verticale.

- **Dimostra** che l'altezza da cui la pallina del pendolo viene lasciata andare è $h = l \cdot (1 - \cos 25^\circ)$
- Qual è l'**energia cinetica** del pendolo quando, durante l'oscillazione, il filo forma un angolo di 9.0° ?
- Qual è la **velocità** del pendolo nel punto più basso della sua oscillazione?



Dimostrare il primo punto è estremamente semplice e richiede solo nozioni di trigonometria. Il successivo disegno aiuterà a chiarire:



Come si può vedere, la lunghezza $1 - \cos 25^\circ$ è il nostro h . Quindi perché moltiplicarla per l ? Perché la lunghezza della corda non è quella della circonferenza goniometrica ($0.75 \neq 1$).

Avendo quindi chiarito il primo punto, possiamo concentrarci sul secondo.

Per prima cosa, ricordando la formula per l'energia cinetica ($E_c = \frac{1}{2}mv^2$) notiamo che ci manca solo la velocità. Come trovarla? Utilizzando la solita formula $U_1 + E_{c1} = U_2 + E_{c2}$.

$$U_1 + E_{c1} = U_2 + E_{c2} \rightarrow mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Prima di proseguire i calcoli, possiamo subito eliminare due dei quattro elementi.

$$\begin{aligned} mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 &= mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow \\ mgh_1 + \frac{1}{2}\cancel{mv_1^2} &= \cancel{mgh_2} + \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow \\ \cancel{mgh_1} &= \frac{1}{2}\cancel{mv_2^2} \end{aligned}$$

Possiamo ora trovarci la velocità. Non serve neanche facciamo la radice quadrata in quanto dopo comunque lo ri-eleveremo al quadrato.

$$\begin{aligned} gh_1 &= \frac{1}{2}v_2^2 \rightarrow \\ v_2^2 &= 2 \cdot 9.81 \cdot (1 - \cos 25^\circ) \cdot 0.75 = 13.3416 \text{ m/s} \end{aligned}$$

E ora troviamo l'energia cinetica

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0.15 \cdot 13.3416 = \boxed{1 \text{ J}}$$

Ora manca solo l'ultimo punto. La teoria è molto simile alla prima parte, in definitiva cambia solo l'altezza.

$$\begin{aligned} mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 &= mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow \\ mgh_1 + \frac{1}{2}\cancel{mv_1^2} &= \cancel{mgh_2} + \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow \\ \cancel{mgh_1} &= \frac{1}{2}\cancel{mv_2^2} \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.75} \approx \boxed{3.83 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Esercizio 3 Una gru solleva un peso di massa $m = 500 \text{ kg}$ verticalmente a velocità costante $v = 2 \text{ m/s}$. Trova la **potenza spesa dal motore della gru**. Qual è il **lavoro** fatto dalla gru se solleva il peso di $h = 20 \text{ m}$?

Una seconda gru è capace di sollevare la stessa massa al doppio della velocità. Trova la potenza e il lavoro fatti dalla seconda gru alzando il peso della stessa altezza.

Il lavoro è definito come $L = F \cdot S \cdot \cos \alpha$ e quindi sostituendo ciò che abbiamo

$$L = F \cdot S \cdot \cos \alpha \rightarrow L = 500 \cdot 9.81 \cdot 20 \cdot \cos 90 = \boxed{98100 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

Per trovare la potenza abbiamo bisogno anche del tempo. Troviamolo

$$x = x_0 + vt \rightarrow 20 = 0 + 2t \rightarrow t = 10 \text{ s}$$

La potenza può essere trovata facilmente usando l'altra formula per il lavoro

$$P = \frac{L}{t} \rightarrow P = \frac{98100}{10} = \boxed{9800 \text{ W}}$$

Per l'ultimo punto, dato che abbiamo una forza costante che agisce, possiamo usare la seguente formula

$$P = Fv \rightarrow P = mav \rightarrow 500 \cdot 9.81 \cdot 4 = \boxed{19620 \text{ W}}$$

La formula si ricava da $\frac{F \cdot S}{t} \rightarrow Fv$.

Il lavoro lo si trova esattamente come prima

$$L = F \cdot S \cdot \cos \alpha \rightarrow L = 500 \cdot 9.81 \cdot 20 \cdot \cos 90 = \boxed{98100 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

Notiamo allora che il lavoro rimane costante mentre la potenza raddoppia.

Impulso

Esercizio 1 Una barca e i suoi occupanti di massa $M = 200 \text{ kg}$ contiene 10 sacchi di carbone ciascuno di 5 kg . La barca è stazionaria nella sua posizione. Gli occupanti cercano di raggiungere la riva lanciando fuori i sacchi di carbone ad una velocità orizzontale relativa v_r . Assumendo l'attrito nullo, **qual è la velocità dopo il primo sacco? E dopo il secondo?** Scrivi i risultati in termini di v_r .

Innanzitutto sappiamo che il sistema è conservativo in quanto non ci sono forze esterne. Detto questo, sappiamo anche che quindi $q_1 = q_2$. Prima di cominciare, sappiamo che il sistema ha massa $200 + 5 \cdot 10$

Nel primo caso vediamo che la barca è ferma quindi sappiamo già che $q_1 = 0$. Quindi possiamo scrivere

$$0 = 245v - 5v_r \rightarrow v = \frac{5v_r}{245} = \boxed{\frac{1}{43}v_r}$$

245 perché nella situazione finale è che la barca ha perso una sacca ed essa sta volando. Sappiamo quindi la velocità nel primo caso. Nel secondo caso, la barca ha già una sua velocità quindi scriviamo

$$\frac{1}{43}v_r = 240v + 5 \left(-v_r + \frac{1}{43}v_r \right)$$

Isoliamo v e otteniamo

$$v \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

Abbiamo risolto il problema ma perché abbiamo scritto $-v_r + \frac{1}{43}v_r$? Nella seconda situazione la barca ha già una velocità propria che è opposta a quella che ottiene il sacco lanciato. La situazione è simile a quella di un treno in corsa da cui si spara un proiettile in verso opposto. Ci stiamo spostando ad una velocità pari a $\frac{1}{43}v_r$ e la sacca ha velocità in verso opposto pari a v_r .

Urti

Esercizio 1 Una mitragliatrice di massa 30 kg (comprendente quella dei proiettili) è installata a bordo di un carrello di massa 100 kg e spara verso sinistra una sventagliata di 10 proiettili ciascuno di massa 30 g con la velocità di 60 m/s . Quale **velocità** verso destra acquirerà il carrello?

Qui siamo in un caso in di urto elastico, quindi vige il principio di conservazione del moto. Di conseguenza la soluzione di quest'esercizio è estremamente semplice.

$$m_1v_1 = m_2v_2 \rightarrow 60 \cdot 0.30 = 129.7 \cdot v_2$$

Perché 129.7? Perché sappiamo che la mitragliatrice e il carrello pesano insieme $100 + 30 = 130 \text{ Kg}$ ma sono stati sparati 10 colpi da 0.03 Kg l'uno, quindi il peso finale sarà $130 - 10 \cdot 0.03 = 129.7 \text{ Kg}$. Ora non resta che risolvere semplicemente.

$$v_2 = \frac{60 \cdot 0.30}{129.7} \approx \boxed{0.139 \text{ m/s}}$$

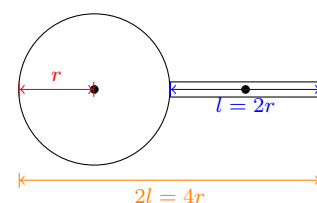
Esercizio 2 Una pallottola di massa $m = 10 \text{ g}$ colpisce alla velocità $v_p = 280 \text{ m/s}$ un pendolo balistico di massa $M = 2.0 \text{ Kg}$, restando incorporata nel pendolo. Calcola l'**altezza** h di cui s'innalza il pendolo.

Questo esercizio è estremamente semplice in quanto siamo in una situazione di un proiettile contro un corpo e abbiamo tutti i dati necessari.

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{M + m}{m} \sqrt{2gh} \rightarrow h = \frac{v_p^2 m^2}{2g(M + m)^2} \rightarrow \\ h &= \frac{280^2 \cdot 0.01^2}{2 \cdot 9.81 \cdot (2 + 0.01)^2} \rightarrow h = \frac{7.84}{86.5242} = \boxed{0.09 \text{ m}} \end{aligned}$$

Centro di Massa

Esercizio 1 Una racchetta da tennis può essere schematizzata in un cerchio di raggio r e massa m_1 a cui è attaccato un bastone uniforme di lunghezza l e massa m_1 . Ponendo $r = l/2$ e $m_1 = m_2$, trova il **centro di massa** della racchetta. Viene poi aggiunta una massa $m_3 = m_2/2$ nel punto più lontano dal bastone. Trova il **nuovo centro di massa**.



Sappiamo che in un corpo uniforme il centro di massa si trova nel baricentro. Nel caso del cerchio è nel centro stesso e nel caso del rettangolo è a metà della sua lunghezza. Dato che abbiamo due possibilità, scegliamo di scrivere tutto in funzione di r . È generalmente meglio scegliere la variabile più "piccola" perché dona più flessibilità. Decidiamo anche di porre l'origine al manico della racchetta. A questo punto procediamo con i calcoli. Dal disegno vediamo già tutte le distanze

$$x = \frac{\sum xm}{\sum m} \rightarrow x = \frac{m \cdot r + m \cdot 3r}{2m} \rightarrow x = \frac{4rm}{2m} = \boxed{2r}$$

Il centro di massa si trova quindi all'attaccatura del manico. Aggiunta la nuova massa, aggiorniamo i calcoli

$$x = \frac{\sum xm}{\sum m} \rightarrow x = \frac{\frac{m}{2}4r + m \cdot r + m \cdot 3r}{2m + \frac{m}{2}} \rightarrow$$

$$x = \frac{7mr}{\frac{5}{2}m} \rightarrow x = \boxed{\frac{14}{5}r}$$

Momento Angolare ed Inerzia

Esercizio 1 Una penna di lunghezza 12 cm viene appoggiata in posizione verticale su un piano con attrito. Essa inizialmente ferma, cade ruotando attorno al punto di contatto con il piano. Calcola la **velocità lineare** della testa della penna e l'**accelerazione angolare** nell'istante dell'impatto con il piano.

Essendo un problema di dinamica in cui il sistema è conservativo, possiamo scrivere subito

$$U_1 + E_{c1} = U_2 + E_{c2}$$

In questo modo possiamo anche subito eliminare due elementi. Sappiamo che parte da ferma e arriva ad essere ferma. Questo significa che all'inizio c'è solo energia potenziale, alla fine solo cinetica.

$$U_1 + E_{c1} = U_2 + E_{c2} \rightarrow U_1 + \cancel{E_{c1}} = \cancel{U_2} + E_{c2}$$

Quindi ora abbiamo un'equazione in cui possiamo cominciare a sostituire

$$U_1 = E_{c2} \rightarrow mg \frac{l}{2} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Come mai $\frac{l}{2}$ e non l ? Questo perché l'energia si concentra nel centro di massa che si trova a metà distanza tra la punta e la testa della penna. Ora possiamo sostituire a I l'inerzia di una barra che è equivalente a $\frac{1}{12}ml^2 + m \frac{l^2}{4}$

$$\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12}ml^2 + m \frac{l^2}{4} \right) \omega^2 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}ml^2 \right) \omega^2 \rightarrow$$

$$gl = \frac{1}{3}l\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} \rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot 9.81}{0.12}} \approx \underline{15.6 \text{ rad/s}}$$

E ora non resta che trovare la velocità tangenziale avendo quella angolare

$$v = \omega r \rightarrow v = 15.6 \cdot 0.12 = \boxed{1.8 \text{ m/s}}$$

E ora è da trovare solo l'accelerazione angolare. Anche qui sfruttiamo la conservatività del sistema.

$$\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}ml^2\alpha \rightarrow \alpha = \frac{3g}{2l} \rightarrow \alpha = \frac{3 \cdot 9.81}{2 \cdot 0.12} = \boxed{122.6 \text{ rad/s}^2}$$

Esercizio 2 Una ruota è costituita da un anello di spessore trascurabile di massa $M = 20 \text{ kg}$, sostenuto da raggi di massa trascurabile e di lunghezza $R = 0.5 \text{ m}$. Essa sta ruotando attorno al proprio asse alla frequenza di 5 Hz. Alla sua periferia viene accostata una piastra con la quale essa sviluppa una forza di 50 N tangente alla ruota. Determinare **quanti giri** deve compiere la ruota prima di fermarsi.

Per prima cosa identifichiamo che abbiamo un corpo che ruota e una forza che generano un momento. Quindi troviamoci quanto vale la decelerazione causata da questa forza tangenziale

$$M = I\alpha \rightarrow -F_a r = mr^2\alpha \rightarrow \alpha = \frac{-F_a}{mr}$$

$$\alpha = \frac{50}{20 \cdot 0.5} = \underline{-5 \text{ rad/s}^2}$$

Ora possiamo facilmente trovarci la velocità angolare così poi da poter usare la legge oraria

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{f} \rightarrow \omega = 2\pi f \rightarrow \omega = \underline{10\pi}$$

Per comodità per ora non approssimiamo. Ora se vogliamo usare la seguente legge oraria

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

dobbiamo trovare il tempo t .

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \rightarrow t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \rightarrow t = \frac{0 - 10\pi}{-5} = \underline{2\pi \text{ s}}$$

E ora abbiamo tutto ciò che ci serve.

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow$$

$$\theta = \cancel{\theta_0} + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Perché abbiamo cancellato quell'elemento? Beh, noi vogliamo sapere quanti giri, quindi partiamo da una posizione $\theta_{\theta_0} = 0$. Continuiamo la risoluzione

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow \theta = 10\pi \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \cdot -5 \cdot 4\pi^2$$

$$\theta = 20\pi^2 - 5 \cdot 2\pi^2 \rightarrow \theta = 20\pi^2 - 10\pi^2 = 10\pi^2 \rightarrow$$

$$\theta = 10 \cdot 3.14^2 = \boxed{98.69 \text{ rad}}$$

Dato che ci vengono chiesti i giri, semplicemente dividiamo per 2π

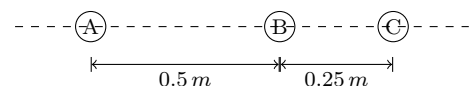
$$\text{giri} = \frac{98.69}{2\pi} = \boxed{15.7 \text{ giri}}$$

Gravitazione

Esercizio 1 La figura mostra tre corpi allineati che sono molto lontani da qualsiasi altro corpo. Le loro masse sono:

- $m_A = 363 \text{ kg}$
- $m_B = 517 \text{ kg}$
- $m_C = 154 \text{ kg}$

Determina **modulo**, **direzione** e **verso** della forza gravitazionale totale che agisce su ciascuno di essi.



Ricordando la formula della forza gravitazionale, possiamo semplicemente sommare i vettori forza fra di loro.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow$$

$$\begin{cases} F_{AB} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{363 \cdot 517}{0.5^2} \\ F_{AC} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{363 \cdot 154}{0.75^2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} F_{AB} = 5 \cdot 10^{-5} \\ F_{AC} = 6.62 \cdot 10^{-6} \end{cases} \rightarrow$$

$$F = 5 \cdot 10^{-5} + 6.62 \cdot 10^{-6} =$$

$$\boxed{5.62 \cdot 10^{-5} \text{ N}}$$

Questo era per il corpo A. Il procedimento è identico per il corpo C, cambia leggermente per il corpo B.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow$$

$$\begin{cases} F_{BA} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{517 \cdot 363}{0.5^2} \\ F_{BC} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{517 \cdot 154}{0.25^2} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} F_{BA} = 5 \cdot 10^{-5} \\ F_{BC} = 8.5 \cdot 10^{-5} \end{cases} \rightarrow$$

$$F = -5 \cdot 10^{-5} + 8.5 \cdot 10^{-5} =$$

$$\boxed{3.5 \cdot 10^{-5} \text{ N}}$$

La differenza principale sta in quel $-$ nell'ultimo passaggio. Questo perché la forza gravitazionale del corpo A attira verso sè B rendendo quindi il vettore negativo.

Esercizio 2 L'orbita della cometa Halley, che passa intorno al sole ogni 76 anni, ha forma ellittica. Quando è nel suo punto più vicino al Sole (perielio) è ad una distanza di $8.823 \cdot 10^{10}$ m e si muove ad una velocità di modulo 54.6 km/s. Il punto di maggiore distanza tra la cometa Halley e il Sole (afelio) è $6.152 \cdot 10^{12}$ m. Il modulo della **velocità** della cometa Halley è maggiore o minore di 54.5 km/s quando è all'afelio? Giustifica la risposta e calcola il modulo della sua velocità all'afelio.

La risposta sta tutta nella seconda legge di Keplero.
"Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali."
 Sapendo questo sappiamo con certezza che quando il pianeta si trova più lontano dal sole, avrà una velocità minore. Ora ci rimane solo da trovare la velocità. Da quella frase, possiamo sapere che il rapporto velocità/spazio è costante, quindi

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \rightarrow 54600 \cdot 8.823 \cdot 10^{10} = x \cdot 3.152 \cdot 10^{12}$$

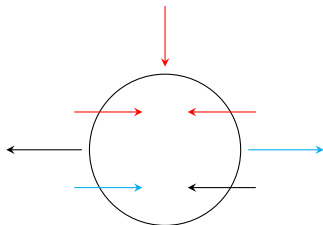
E non ci resta che isolare la x

$$x = \frac{54600 \cdot 8.823 \cdot 10^{10}}{3.152 \cdot 10^{12}} \approx \boxed{783 \text{ m/s}}$$

783 m/s è sicuramente minore di 54.6 km/s. Si noti che nella prima formula, abbiamo convertito i Km/s in m/s per convenzione.

Esercizio 3 Un pianeta che non ruota ha raggio R e ha un'orbita circolare di raggio a attorno al sole di massa M . Dimostra che sul pianeta l'effettiva attrazione gravitazionale g_{eff} è minima ai punti più vicini e lontani dal sole e massima nei punti equidistanti da questi due.

Per chiarire l'esercizio, disegniamo la situazione mettendo in luce le forze in gioco



Le forze rosse sono dell'attrazione tra un corpo sul pianeta e il pianeta stesso. Quelle di color ciano sono dell'attrazione tra il corpo e il sole e le restanti sono della forza centrifuga che si genera dal movimento orbitale.

Distinguiamo 3 situazioni:

1. Punto più vicino
2. Punto più lontano
3. Punto intermedio

Scriviamo quindi le forze che il corpo più vicino subisce

$$\mathcal{M} \cdot a = \underbrace{-G \frac{\mathcal{M} \cdot M}{(a-R)^2}}_{\text{Attrazione corpo-sole}} + \underbrace{G \frac{\mathcal{M} \cdot M_C}{R^2}}_{\text{Attrazione corpo-pianeta}} + \underbrace{\mathcal{M} \omega^2 (a-R)}_{\text{Forza centrifuga}}$$

Quelle del corpo più lontano

$$\mathcal{M} \cdot a = \underbrace{G \frac{\mathcal{M} \cdot M}{(a+R)^2}}_{\text{Attrazione corpo-sole}} + \underbrace{G \frac{\mathcal{M} \cdot M_C}{R^2}}_{\text{Attrazione corpo-pianeta}} - \underbrace{\mathcal{M} \omega^2 (a+R)}_{\text{Forza centrifuga}}$$

Quelle del corpo intermedio

$$\mathcal{M} \cdot a = \underbrace{G \frac{\mathcal{M} \cdot M_C}{R^2}}_{\text{Attrazione corpo-pianeta}}$$

Notiamo che in tutte e tre c'è una costante, ovvero quella dell'attrazione corpo-pianeta. C'era da aspettarselo visto che la forza gravitazionale non cambia se non con la distanza. Noi dobbiamo dimostrare che

$$\mathcal{M} \omega^2 (a-R) < G \frac{M}{(a-R)^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{M} \omega^2 (a+R) > G \frac{M}{(a+R)^2}$$

perché la a che risulta, è minore nei punti vicini e lontani rispetto a quello intermedio.

Semplifichiamo la prima

$$\omega^2 (a-R) < G \frac{M}{(a-R)^2} \rightarrow \omega^2 (a-R)^3 < GM$$

E la seconda, per analogia

$$\omega^2 (a+R) > G \frac{M}{(a+R)^2} \rightarrow GM < \omega^2 (a+R)^3$$

Ora potremmo essere a posto così però abbiamo una variabile in più, ω . Per eliminarla ed esprimere tutto quanto in base ai dati che abbiamo, possiamo usare la definizione di ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Come trovare T^2 ? Usando la seconda legge di Keplero possiamo ricavarlo in termini di M

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

e ora lo inseriamo nella definizione

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \rightarrow \omega = \frac{\sqrt{4\pi^2 GM}}{4\pi^2 a^3}$$

Tornando ora a sostituire nelle nostre disequazioni originali abbiamo

$$\frac{GM}{a^3} (a-R)^3 < GM \quad \text{e} \quad GM < \frac{GM}{a^3} (a+R)^3$$

Che messe assieme formano

$$\frac{GM}{a^3} (a-R)^3 < GM < \frac{GM}{a^3} (a+R)^3 \rightarrow$$

$$\frac{(a-R)^3}{a^3} < 1 < \frac{(a+R)^3}{a^3}$$

Questa disequazione è sempre vera, quindi è stato dimostrato che per qualunque valore si inserisca di a o R , i punti esterni hanno attrazione gravitazionale minore dei punti intermedi.

Idrodinamica

Esercizio 1 Un condotto orizzontale di sezione costante $A_1 = 200 \text{ cm}^2$ si strozza raggiungendo una sezione $A_2 = 40 \text{ cm}^2$. Se la velocità e la pressione dell'acqua nella sezione larga sono $v_1 = 1 \text{ m/s}$ e $p_1 = 1 \text{ atm}$ rispettivamente, calcolare la **velocità** v_2 e la **pressione** p_2 nella strozzatura.

Dato che sappiamo che il tubo è orizzontale, possiamo sfruttare questa formula $A_1 v_1 = A_2 v_2$ per trovare la velocità.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow 200 \cdot 1 = 40 \cdot v_2 \rightarrow v_2 = \frac{200 \cdot 1}{40} = \boxed{5 \text{ m/s}}$$

E ora non resta che usare Bernoulli per calcolare la pressione.

$$\begin{aligned} p_1 + \cancel{\delta gh_1} + \frac{1}{2} \delta v_1^2 &= p_2 + \cancel{\delta gh_2} + \frac{1}{2} \delta v_2^2 \rightarrow \\ p_2 &= p_1 + \frac{1}{2} \delta v_1^2 - \frac{1}{2} \delta v_2^2 \rightarrow \\ p_2 &= 1 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 5^2 = \\ &\boxed{0.89 \cdot 10^5 \text{ Pa}} \end{aligned}$$

Si è eliminato l'elemento δgh in quanto i due pezzi di tubo si trovano alla stessa altezza e quindi non c'è variazione di altezza.

Esercizio 2 Un recipiente largo è pieno di acqua fino ad una profondità H . Si fa un piccolo foro ad una distanza h dal livello dell'acqua e un flusso di acqua esce. A che distanza arriva il flusso?

Questo esercizio offre la possibilità di dimostrare l'equazione di Torricelli. Usando il teorema di Bernoulli, nella nostra situazione scriviamo

$$p_1 + \delta gh_1 + 0 = p_2 + 0 + \frac{1}{2} v^2$$

perché nella prima posizione l'acqua è ferma o quasi (il contenitore è largo), nella seconda è ad altezza 0. Quindi isolando per v otteniamo

$$v = \sqrt{2gh}$$

Dimostrato ciò, possiamo trattare il flusso di acqua come un proiettile che cade. Quindi usare la legge oraria per trovare il tempo

$$x = x_0 + \frac{1}{2} at^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

Per trovare la distanza avendo velocità e tempo, li moltiplichiamo quindi abbiamo

$$\boxed{x = vt = 2\sqrt{h(H-h)}}$$

Inserendo i valori dati, possiamo quindi ottenere in una sola formula la distanza del getto di liquido.

Termodinamica

Esercizio 1 Un calorimetro contiene 400 g di acqua alla temperatura di 20°C e una massa complementare (detto anche equivalente in acqua del calorimetro) di 40°C . In esso viene immerso un pezzo di ghiaccio di massa 50 g alla temperatura di 0°C . Sapendo che il calore latente di fusione del ghiaccio è 80 cal/g , calcolare la **temperatura finale di equilibrio** dell'acqua.

Dato che dobbiamo trovare la temperatura di equilibrio, possiamo dire che la quantità di calore iniziale e finale sono uguali ma opposte in quanto la quantità di calore finale è 0. Questo implica che $Q_1 + Q_2 = 0$. Però abbiamo anche un passaggio di stato, quindi dobbiamo tenere conto anche del calore latente. Quindi la nostra equazione diventa $Q_1 + Q_2 + Q_L = 0$.

Ora dobbiamo trasformare. Per prima cosa calcoliamo il calore latente

$$Q_L = c \cdot m \rightarrow Q_L = 328 \cdot 50 = \underline{16500 \text{ J}}$$

Da dove viene fuori il 328? Dato che tutte le quantità di calore sono in Joule, possiamo convertire da cal/g a J sapendo che $1 \text{ cal} = 4.1 \text{ J}$.

Ora possiamo cominciare a sostituire (si presti attenzione che il calore latente è negativo in quanto è energia in più richiesta per la trasformazione)

$$-Q_L + Q_1 + Q_2 = 0 \rightarrow 16500 + m_1 c_1 \Delta T + m_2 c_2 \Delta T = 0$$

Quanto valgono le masse? Immediatamente verrebbe da dire 400 e 50. Però se si nota nel testo è presente l'equivalente in acqua del calorimetro. Non possiamo dimenticarci quindi otteniamo

$$\begin{aligned} -Q_L + Q_1 + Q_2 &= 0 \rightarrow \\ 16500 + 440 \cdot 4.1 \cdot (20 - T_e) + 50 \cdot 4.1 \cdot (-T_e) &= 0 \end{aligned}$$

E ora non resta che isolare e risolvere per T_e .

$$\begin{aligned} -16500 + 440 \cdot 4.1 \cdot (20 - T_e) + 50 \cdot 4.1 \cdot (-T_e) &= 0 \rightarrow \\ -16500 + 1804 \cdot (20 - T_e) + 205 \cdot (-T_e) &= 0 \rightarrow \\ -16500 + 36080 - 1804 T_e - 205 T_e &= 0 \rightarrow \\ -16500 + 36080 = 205 T_e + 1804 T_e &\rightarrow \\ 19580 = 2054 T_e &\rightarrow \\ T_e &= \boxed{9.5^\circ\text{C}} \end{aligned}$$

Esercizio 2 Una massa m_1 di ossigeno (O_2) occupa, alla temperatura di 7°C , un recipiente che ha un volume pari a 20 dm^3 , alla pressione di $2 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$. Una massa m_2 di idrogeno (H_2) occupa, alla temperatura di 27°C , un recipiente di volume pari a 50 dm^3 , alla pressione di 1 atm . Calcola la **pressione** che eserciterebbe il miscuglio dei due gas in un recipiente di volume pari a 70 l alla temperatura di 0°C .

Utilizzando l'equazione universale dei gas, possiamo ricavare il numero di moli di ciascun elemento

$$pV = nRT \rightarrow n = \frac{pV}{RT}$$

Quindi

$$n_{O_2} = \frac{pV}{RT} \rightarrow n_{O_2} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{8.31 \cdot 280.15} = 1.718 \text{ mol}$$

$$n_{H_2} = \frac{pV}{RT} \rightarrow n_{H_2} = \frac{101325 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{8.31 \cdot 300.15} = 2.031 \text{ mol}$$

Conoscendo la quantità di moli che ci sono, possiamo calcolare la pressione di ciascun elemento all'interno del nuovo recipiente. Considerato che è un miscuglio, dobbiamo poi sommare le due pressioni per ottenere quella totale

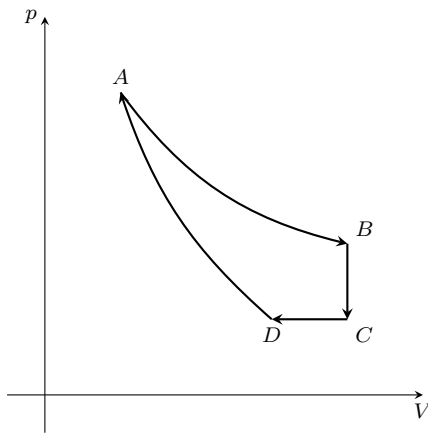
$$\begin{aligned} p &= \frac{nRT}{V} \rightarrow p = \frac{1.718 \cdot 8.31 \cdot 263.15}{7 \cdot 10^{-2}} + \frac{2.031 \cdot 8.31 \cdot 273.15}{7 \cdot 10^{-2}} = \\ 55790 + 65858 &= \boxed{121567 \text{ Pa}} \end{aligned}$$

Esercizio 3 Un gas perfetto caratterizzato da $\gamma = 1.67$ esegue un ciclo formato dall'isoterma AB, dall'isocora BC, dall'isobara CD e dall'adiabatica DA che chiude il ciclo delle quattro trasformazioni reversibili. Sapendo che:

- $V_A = 5 \text{ l}$
- $V_B = 25 \text{ l}$
- $p_A = 20 \text{ atm}$
- $p_C = 2 \text{ atm}$
- $T_A = 300 \text{ K}$

- a) Rappresenta graficamente il ciclo;
- b) Gli altri parametri termodinamici degli stati A, B, C, D;
- c) La quantità di calore scambiato in ognuna delle quattro trasformazioni;

Il piano su cui si disegnano le trasformazioni termodinamiche si descrivono sul piano VOp con V sull'asse delle ascisse e p su quello delle ordinate. Le trasformazioni isoterme seguono una parabola tra i due punti. Quelle adiabatiche seguono un ramo di iperbole equilatera.



Per risolvere questo tipo di esercizi dobbiamo andare con molta calma e prestare attenzione ai dettagli.

Cominciamo a trovare i parametri mancanti del punto B. Sappiamo che la trasformazione AB è una isoterma quindi la temperatura sarà esattamente come T_A quindi $T_B = 300$ K. La pressione la possiamo trovare usando

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Questo ci porta a

$$\frac{5 \cdot 20}{300} = \frac{x \cdot 25}{300} \rightarrow x = \frac{100}{25} = \boxed{4 \text{ atm}}$$

Della trasformazione BC ci manca la temperatura in C in quanto il volume è uguale a V_B perché la trasformazione è isocora. Potremmo usare anche qui una legge di Gay-Loussac (la seconda) ma continuiamo ad usare la formula generale

$$\frac{4 \cdot 25}{300} = \frac{2 \cdot 25}{x} \rightarrow x = \boxed{150 \text{ K}}$$

Nella trasformazione seguente, non possiamo usare quella formula in quanto abbiamo due incognite sia il volume che la temperatura. Dato che conosciamo che il gas è perfetto e monoatomico ($\gamma = 1.65$), possiamo usare le equazioni di Poisson. Specificamente

$$p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$$

Però se noi usassimo la trasformazione CD non verrebbe un risultato sensato in quanto i due punti hanno la stessa pressione e la trasformazione non è adiabatica. La trasformazione DA lo è però. Quindi

$$p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \rightarrow T_2 = \sqrt[\gamma]{\frac{p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma}{p_2^{1-\gamma}}}$$

Inserendo i dati

$$T_2 = \sqrt[1.67]{\frac{20^{-0.67} \cdot 300^{1.67}}{2^{-0.67}}} \approx \boxed{120 \text{ K}}$$

Per trovare il volume applichiamo lo stesso principio, questa volta però con una formula diversa

$$V_1^{\gamma-1} T_1 = V_2^{\gamma-1} T_2 \rightarrow V_2 = \sqrt[\gamma-1]{\frac{V_1^{\gamma-1} T_1}{T_2}}$$

Inserendo i dati

$$V_2 = \sqrt[0.67]{\frac{5^{0.67} \cdot 300}{120}} \approx \boxed{19.61}$$

Quindi ciò che abbiamo è

$$\begin{aligned} A : V : 51 \quad p : 20 \text{ atm} \quad T : 300 \text{ K} \\ B : V : 251 \quad p : 3 \text{ atm} \quad T : 300 \text{ K} \\ C : V : 251 \quad p : 2 \text{ atm} \quad T : 150 \text{ K} \\ D : V : 19.61 \quad p : 2 \text{ atm} \quad T : 120 \text{ K} \end{aligned}$$

La quantità di calore scambiata nelle varie trasformazioni, si può calcolare con le apposite formule. Prima di andare a calcolare i lavori e le quantità di calore, ci serve il numero di moli di gas coinvolto.

Dato che nelle trasformazioni il gas non si perde, le moli rimangono costanti quindi basta calcolarle per una sola situazione

$$pV = nRT \rightarrow n = \frac{pV}{RT} \rightarrow n = \frac{20 \cdot 5}{0.0821 \cdot 300} \approx \underline{4.06 \text{ mol}}$$

La trasformazione AB è un'isoterma, il lavoro è pari a

$$L = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \rightarrow L = 4.06 \cdot 0.0821 \ln \frac{25}{5} = \underline{0.536 \text{ J}}$$

La trasformazione BC è un'isocora quindi

$$Q = \frac{l}{2} nR\Delta T \rightarrow Q = \frac{3}{2} \cdot 4.06 \cdot 0.0821 \cdot 150 = \underline{74.99 \text{ J}}$$

La trasformazione CD è un'isobara

$$Q = \frac{2+l}{2} nR\Delta T \rightarrow Q = \frac{5}{2} \cdot 4.06 \cdot 0.0821 \cdot 30 = \underline{24.99 \text{ J}}$$

Infine la trasformazione DA è un'adiabatica

$$Q = 0$$

Sommando tutto viene

$$Q_{Tot} = 0.536 + 74.99 + 24.99 + 0 = \boxed{100.516 \text{ J}}$$

Il lavoro invece ha formule diverse.

Per la trasformazione AB

$$L = Q = \underline{0.536 \text{ J}}$$

Per la trasformazione BC

$$L = 0$$

Per la trasformazione CD

$$L = p\Delta V \rightarrow L = 2 \cdot (25 - 19.6) = \underline{10.8 \text{ J}}$$

Per la trasformazione DA

$$L = -\Delta U = -\frac{1}{2} nR(T_2 - T_1) \rightarrow L = -\frac{1}{2} \cdot 4.06 \cdot 0.0821 \cdot (300 - 120) = \underline{-29.99 \text{ J}}$$

Il lavoro totale quindi risulta

$$L_{Tot} = 0.132 + 18.47 + 6.15 - 29.99 = \boxed{-5.238 \text{ J}}$$

Esercizio 4 Una macchina di Carnot lavora tra due sorgenti alle temperature $T_1 = 390$ K e $T_2 = 273$ K compiendo ad ogni ciclo un lavoro $L = 10^5$ J. La sorgente alla temperatura più bassa è costituita da una massa di ghiaccio $M = 10^4$ kg (calore latente di fusione 80 cal/g). Si chiede di determinare dopo **quanti cicli** il ghiaccio è totalmente sciolto.

Innanzitutto calcoliamo la quantità di calore necessaria totale

$$Q = \lambda_f \cdot m \rightarrow Q = 3.3 \cdot 10^5 \cdot 10^4 = \underline{330 \cdot 10^7 \text{ J}}$$

Viene scritto $3.3 \cdot 10^5$ perché il testo dà 80 cal/g che quindi trasformati in Joule vengono $80 \cdot 4186 = 3.3 \cdot 10^5$.

Ora troviamo il rendimento della macchina termica

$$\mu = 1 - \frac{T_1}{T_2} \rightarrow \mu = 1 - \frac{273}{390} = \underline{0.3}$$

Sfruttando la formula

$$1 - \frac{Q_1}{Q_2} = \mu$$

possiamo recuperare Q_1 che in definitiva è la nostra incognita se abbiamo Q_2 .

Sfruttando questo, possiamo ricavare la quantità di calore che viene sprigionata invertendo la seguente formula

$$\mu = \frac{L}{Q_2} \rightarrow 0.3 = \frac{10^5}{Q_2} \rightarrow Q_2 = \underline{3.3 \cdot 10^5 \text{ J}}$$

Ora possiamo scrivere

$$1 - \frac{Q_1}{Q_2} = \mu \rightarrow 1 - \frac{Q_1}{3.3 \cdot 10^5} = 0.3 \rightarrow Q_1 = \underline{231000 \text{ J}}$$

Quindi avendo noi calcolato la quantità di calore totale necessaria perché il ghiaccio si sciolga e quanta ne viene sprigionata da un ciclo della macchina, possiamo scrivere

$$Q_{tot} = nQ_1$$

dove n è il numero di cicli necessari ad ottenere tutto il calore necessario. Quindi

$$n = \frac{Q_{tot}}{Q_1} \rightarrow n = \frac{331 \cdot 10^7}{231000} = \boxed{14285}$$

Entropia

Un blocco di ghiaccio che ha una massa $m = 450 \text{ g}$ e che si trova alla temperatura di 0°C fonde completamente.

- Quanto vale la variazione di entropia dovuta alla fusione del ghiaccio? In seguito l'entropia del sistema diminuisce e diventa la metà
- Quanto ghiaccio si crea?

$$\text{Calore latente } c_L = 3.34 \cdot 10^5 \text{ J/Kg}$$

Innanzitutto troviamo la quantità di calore necessaria a sciogliere tutto il ghiaccio

$$Q_L = c_L m \rightarrow Q_L = 3.34 \cdot 10^5 \cdot 0.45 = 1.5 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Poi sapendo che c'è solo una sorgente di calore (non è specificato altrimenti), possiamo calcolare molto facilmente la differenza di entropia

$$\Delta S = \frac{Q_L}{T} \rightarrow \Delta S = \frac{1.5 \cdot 10^5}{273} = 549 \text{ J/K}$$

Sappiamo però che l'entropia del sistema dimezza

$$\Delta S = -\Delta S \cdot 0.5 \rightarrow \Delta S = -549 \cdot 0.5 = -275 \text{ J/K}$$

La differenza è negativa in quanto l'entropia diminuisce.

E ora non ci resta che calcolare la nuova quantità di calore e trovare la massa

$$Q = \Delta S T \rightarrow Q = -275 \cdot 273 = -7.51 \cdot 10^4 \text{ J}$$

Viene negativa in quanto è quantità di calore che è stata persa.

$$m = \frac{Q_L}{c_L} \rightarrow m = \frac{7.51 \cdot 10^4}{3.34 \cdot 10^5} = 0.225 \text{ kg}$$

Esercizio 2 Due moli di O_2 a pressione atmosferica e a temperatura ambiente (300 K) si trovano all'interno di un recipiente adiabatico. Quando viene aperto il rubinetto che separa il primo recipiente dal secondo, in cui era stato fatto il vuoto, il gas si espande andando a occupare tutto il volume, pari a 82.5 dm^3 . Calcola: la variazione di entropia del sistema, la variazione di entropia dell'universo e quanto sarebbe dovuto essere il volume finale per avere una variazione di entropia doppia.

Innanzitutto sappiamo che questa trasformazione è irreversibile, quindi ci aspettiamo che l'entropia aumenti. Non avendo la temperatura, non possiamo usare direttamente la formula. Ricordandoci che in una espansione isoterma (come in questo caso) la quantità di calore è pari a $Q = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$. Inserendolo nella formula dell'entropia otteniamo

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{nR \cancel{T} \ln \frac{V_f}{V_i}}{\cancel{T}} = nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Da questo notiamo che ci manca solo V_i per poter risolvere.

$$p_i V_i = nRT \rightarrow V_i = \frac{nRT}{p_i} \rightarrow V = \frac{2 \cdot 8.315 \cdot 300}{1.01 \cdot 10^5} = 0.0494 \text{ m}^3$$

E ora

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i} \rightarrow \Delta S = 2 \cdot 8.315 \cdot \ln \frac{0.0835}{0.0494} = 8.7 \text{ J/K}$$

Quanto vale l'entropia nell'universo? Essendo adiabatica, la trasformazione non scambia con l'esterno, quindi l'entropia è pari all'entropia del sistema.

Per trovare il volume finale per avere una differenza doppia, invertiamo la formula e isoliamo il volume

$$\Delta S' = nR \ln \frac{V_f'}{V_i} \rightarrow \frac{\Delta S'}{nR} = \ln \frac{V_f'}{V_i} \rightarrow V_f' = V_i e^{\frac{\Delta S'}{nR}} \rightarrow V_f' = V_i e^{\frac{2\Delta S}{nR}}$$

E ora non resta che risolvere

$$V_f' = V_i e^{\frac{2\Delta S}{nR}} \rightarrow V_f' = 0.0494 \cdot e^{\frac{2 \cdot 8.7}{2 \cdot 8.315}} = 0.14 \text{ m}^3$$

Onde

Formule generali

Esercizio 1 Una corda ha densità lineare $8.5 \cdot 10^{-1} \text{ kg/m}$ è sottoposta ad una tensione di 280 N . La corda è lunga 1.8 m , è fissata agli estremi.

Determina velocità, lunghezza d'onda e frequenza delle onde che formano l'onda stazionaria.

Come sappiamo da queste formule, la velocità la possiamo trovare facilmente:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \rightarrow \sqrt{\frac{280}{8.5 \cdot 10^{-3}}} \approx 181.50 \text{ m/s}$$

Trovata la velocità, possiamo trovarci la lunghezza d'onda facendo $\lambda = vT$.

$$\lambda = vT \rightarrow 181.50 \cdot 8.5 \cdot 10^{-3} \approx 1.5 \text{ m}$$

Infine troviamo la frequenza sfruttando un'altra formula: $v = \lambda f$.

$$f = \frac{v}{\lambda} \rightarrow f = \frac{181.50}{1.5} \approx 121 \text{ Hz}$$

Questo esercizio era anche risolvibile usando le formule delle onde stazionarie, dato che sapevamo la lunghezza della corda. Come sempre, ci sono varie strade che portano a risultati simili.

Esercizio 2 Una formula sperimentale per individuare la velocità del suono nell'aria è $v_s = 331 + 0.6 \cdot t_c$ dove t_c è la temperatura in $^\circ\text{C}$. Mediante uno strumento a corda, viene prodotta una nota musicale di frequenza 440 Hz . La temperatura dell'aria è di 20°C . All'incirca, quante vibrazioni effettua la corda prima che il suono da essa prodotto raggiunga una persona distante 30 metri ?

Il testo chiede "quante vibrazioni" che non significa altro che quanti ventri ci sono in quell'onda. Prima di tutto però, troviamo la velocità del suono:

$$v_s = 331 + 0.6 \cdot t_c \rightarrow v_s = 331 + 0.6 \cdot 20 = 343 \text{ m/s}$$

A noi chiede quanti ventri, quindi possiamo calcolare n semplicemente come $\frac{L}{\lambda}$ dato che il suono si comporta come un'onda stazionaria.

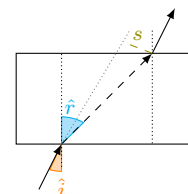
$$v = f\lambda \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \rightarrow \lambda = \frac{343}{440} \approx 0.78 \text{ m}$$

$$n = \frac{L}{\lambda} \rightarrow n = \frac{30}{0.78} \approx 38$$

Questo esercizio sfrutta il principio che un'emettitore sonoro, emette sempre alla stessa frequenza, quindi le onde generate sono considerabili stazionarie.

Rifrazione

Esercizio 1 Un vetro di spessore $d = 1.5 \text{ cm}$ ha un'indice di rifrazione rispetto all'aria di 1.62 . Trova lo scostamento s , rispetto alla traiettoria originaria, che subisce un raggio luminoso incidente sulla superficie di vetro con un angolo di 54° e uscente nuovamente in aria.



Conoscendo l'angolo di incidenza e l'indice di rifrazione, possiamo usare la relazione di Snell per trovare l'angolo di rifrazione

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} \rightarrow \hat{r} = \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \hat{i} \right) \rightarrow \hat{r} = \arcsin \left(\frac{1}{1.62} \sin 54^\circ \right) \rightarrow \hat{r} \approx 30^\circ$$

Una volta fatto questo, possiamo trovarci la lunghezza distanza che il raggio percorre all'interno del vetro

$$\Delta d = \frac{d}{\cos \hat{r}} \approx \underline{1.73 \text{ cm}}$$

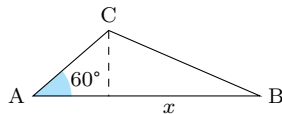
Infine troviamo s

$$s = \sin(\hat{i} - \hat{r}) \cdot \Delta d \rightarrow \sin 24 \cdot \Delta d \approx \underline{0.7 \text{ cm}}$$

In questo esercizio, così come in molti altri del suo genere, si usa estensivamente trigonometria in quanto si possono facilmente individuare triangoli rettangoli all'interno di vetri.

Interferenza

Esercizio 1 Due altoparlanti A e B, che vibrano in fase alla frequenza di 85 Hz, sono posizionati come in figura. Una ragazza è ferma nel punto C a 1.0 m di distanza dall'altoparlante A. Assumendo che il suono si propaghi nell'aria a 340 m/s, determina qual è la **distanza minima** fra i due altoparlanti tale da far sì che la ragazza dalla sua postazione non ode nulla.



La prima cosa da notare è il tipo di interferenza richiesto. Dato che viene chiesto quando un ascoltatore non sente più alcun suono, l'interferenza è distruttiva.

Per prima cosa però, è trovare la distanza \overline{CB} . Per fare ciò, poniamo x la distanza da B all'altezza.

$$\overline{CB} = \sqrt{\sin(60)^2 + x^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + x^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + x^2}$$

Il perché di questo è che $\sin(60)$ è l'altezza del triangolo e abbiamo posto x come uno dei cateti del triangolo rettangolo a destra. Ora possiamo impostare la formula dell'interferenza distruttiva

$$|\overline{PS}_1 - \overline{PS}_2| = (2k+1) \frac{\lambda}{2} \rightarrow \sqrt{\frac{3}{4} + x^2} - 1 = \left(\frac{1}{2} + k\right) \cdot 85$$

Ora non resta che risolvere. Alla fine si dovrebbe arrivare ad un'equazione di questo genere

$$x = \sqrt{18k^2 + 40k + 8.25}$$

Questa è un'equazione parametrica, nel parametro k . In questo caso assegniamo $k = 0$ in quanto il testo chiede la **distanza minima** perché ci sia interferenza distruttiva. La prima frangia distruttiva ha come k il valore 0. Terminando quindi

$$x = \sqrt{18k^2 + 40k + 8.25} \rightarrow x = \sqrt{18 \cdot 0^2 + 40 \cdot 0 + 8.25} \approx \underline{2.87 \text{ m}}$$

Non è questo però il risultato finale. Il motivo è che x non rappresenta completamente la distanza tra A e B. Bisogna ancora aggiungere quella da A all'altezza. Quindi

$$\overline{AB} = x + \cos(60) = 2.87 + 0.5 = \underline{3.37 \text{ m}}$$

Esperienza di Young

Esercizio 1 Nell'interferenza tra due fenditure poste a distanza $d = 25 \text{ cm}$ tra loro, si forma su uno schermo di distanza $l = 1 \text{ m}$ una figura il cui secondo massimo di intensità si trova ad $x = 20 \text{ cm}$ dal massimo centrale. Calcola la **lunghezza d'onda dell'onda incidente**.

Abbiamo come sempre varie strade per risolvere questo problema. La più facile è quella di invertire la formula per trovare l'altezza di una frangia costruttiva. È costruttiva perché ci dice che è il [...] secondo

massimo di intensità che stiamo cercando. Quindi, invertiamo la formula

$$y_n = \frac{l \cdot n \cdot \lambda}{d} \rightarrow \lambda = \frac{y_n \cdot d}{l \cdot n}$$

e semplicemente sostituiamo

$$\lambda = \frac{y_n \cdot d}{l \cdot n} \rightarrow \lambda = \frac{0.2 \cdot 0.25}{1 \cdot 2} \rightarrow \lambda = \underline{0.025 \text{ m}} = \underline{2.5 \text{ cm}}$$

Si noti che è stato posto $n = 2$ in quanto chiede il secondo massimo.

Esercizio 2 Nell'esperimento della doppia fenditura di Young, la prima frangia scura sopra la frangia centrale chiara appare ad un angolo di 0.29° .

Calcola il **rapporto** tra la separazione delle fenditure d e la lunghezza d'onda della luce λ .

Per prima cosa, individuamo la formula da usare. Abbiamo l'angolo e ci chiede $\frac{d}{\lambda}$. Osservando che è una frangia scura, notiamo questa formula:

$$\sin \theta_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}$$

Notiamo che abbiamo tutto quello che ci serve per isolare $\frac{\lambda}{d}$ e poi farne il reciproco per ottenere quello che ci serve. Isolando quindi il risultato desiderato otteniamo

$$\sin \theta_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d} \rightarrow \frac{\sin \theta_n}{n - \frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{d} \rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{n - \frac{1}{2}}{\sin \theta_n}$$

E ora non ci resta che inserire i valori

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{n - \frac{1}{2}}{\sin \theta_n} \rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\sin(0.29)} \rightarrow \frac{d}{\lambda} \approx \frac{\frac{1}{2}}{0.005} \rightarrow \frac{d}{\lambda} = \underline{100}$$

Ovviamente con migliori approssimazioni si ottengono risultati più simili a 99 ma un errore di 1/100 è accettabile.

Suono

Esercizio 1 Due altoparlanti sono montati su una giostra di raggio 9.01 m. Quando la giostra è ferma, i due altoparlanti producono lo stesso suono alla frequenza di 100.0 Hz. Sono messi in posizione diametralmente opposta. La velocità del suono è 343.00 m/s e la giostra fa un giro di 20.0 s. Qual è il **battimento** rilevato da un ascoltatore quando la giostra è posta in modo da avere gli altoparlanti paralleli all'ascoltatore?

Come ricordiamo, la formula per i battimenti richiede due frequenze. Essendo che stiamo lavorando con il suono e la sorgente si muove, si usa Doppler.

Per prima cosa, troviamoci la velocità a cui ruota la giostra.

$$v_t = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow \frac{2\pi \cdot 9.01}{20} \approx \underline{2.83 \text{ m/s}}$$

Trovata la velocità, possiamo usare Doppler per trovare la frequenza percepita. Raddoppiamo il processo in quanto gli altoparlanti prima si avvicinano e poi si allontanano. Noi dobbiamo trovare i battimenti prodotti da questo movimento.

$$f = \frac{v + v_o}{v + v_s} \cdot f_s \rightarrow f = \frac{343 + 0}{343 + 2.83} \cdot 100 \approx \underline{99.19 \text{ Hz}}$$

$$f = \frac{v + v_o}{v - v_s} \cdot f_s \rightarrow f = \frac{343 + 0}{343 - 2.83} \cdot 100 \approx \underline{100.83 \text{ Hz}}$$

In fine, usiamo i battimenti

$$f_b = |f_o - f_s| \rightarrow f_b = |100.83 - 99.19| \approx \underline{1.64 \text{ Hz}}$$

Esercizio 2 Una persona che si trova a 4.0 m da una parte lancia un grido tale che il suono colpisce la parete con un'intensità di $2.5 \cdot 10^{-4}\text{ W/m}^2$. Supponendo che la parete assorba il 20% dell'energia sonora incidente e che rifletta il resto, qual è il **livello di intensità sonora** immediatamente prima e dopo che il suono è stato riflesso?

Per prima cosa ci troviamo la superficie in cui il suono si diffonde. Dato che sappiamo il suono si espande in forma sferica

$$S = 4\pi r^2 \rightarrow S = 4 \cdot 16\pi \approx 201.06\text{ m}^2$$

Avendo l'intensità e la superficie, possiamo trovarci l'energia semplicemente invertendo la formula

$$I = \frac{E}{S} \rightarrow E = IS \rightarrow 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot 201.06 \approx 5.026 \cdot 10^{-2}\text{ J}$$

Questa è l'energia prima colpisca la parete, per trovare quella dopo

$$20\% \cdot 5.026 \cdot 10^{-3} \approx 1 \cdot 10^{-3}\text{ J}$$

e quindi l'80% equivale semplicemente a

$$5.026 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-3} = 4.026 \cdot 10^{-3}\text{ J}$$

Ci manca solo l'intensità nel secondo momento

$$I = \frac{E}{S} \rightarrow I = \frac{4.026 \cdot 10^{-3}}{201.06} \approx 2 \cdot 10^{-5}\text{ W/m}^2$$

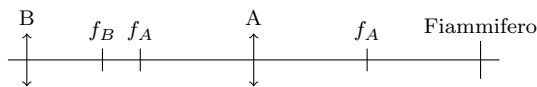
Ora abbiamo tutto quello che ci serve per finire l'esercizio. Ci troviamo dunque i livelli sonori

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \rightarrow L_1 = 10 \log_{10} \frac{2.5 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} \approx 83.9\text{ dB}$$

$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0} \rightarrow L_2 = 10 \log_{10} \frac{2 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}} \approx 83\text{ dB}$$

Lenti

Esercizio 1 Due lenti sono disposte come in figura. Un fiammifero di altezza 2 cm si trova a 5 cm alla destra di una lente A che ha distanza focale f_A pari a 3 cm . La seconda lente B, con una distanza focale f_B di 5 cm , deve essere posta a sinistra rispetto all'immagine reale generata dalla prima, in maniera tale che essa formi un'immagine virtuale tre volte maggiore nei confronti dell'altezza del fiammifero vero e proprio. **Quale distanza separa le due lenti?**



Quest'esercizio non è facile e non è breve ma una volta risolto, si dovrebbe capire chiaramente come risolvere altri esercizi sulle lenti. Per prima cosa, si trovi la posizione dell'immagine nella prima riflessione

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{q} = \frac{2}{15} \rightarrow q = 7.5\text{ cm}$$

A questo punto, sapendo che deve essere ingrandita di tre volte ($G = 3$), possiamo usare la formula dell'ingrandimento ed invertendola isolare p per sapere la posizione dell'immagine e quindi sapere la distanza tra le due lenti perché si ingrandisca tre volte. Possiamo farlo dato che la posizione dell'immagine della prima lente coincide con quella dell'oggetto della seconda lente.

$$G = -\frac{q}{p} \rightarrow p = -\frac{q}{G} \rightarrow p = -\frac{q}{3}$$

La lasciamo in forma parametrica con il parametro q in quanto è la nostra incognita.

Dato che ora stiamo lavorando con un'altra lente, riappliciamo la prima formula

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{-\frac{q}{3}} + \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{5} = -\frac{3}{q} + \frac{1}{q} \rightarrow \frac{1}{5} = -\frac{2}{q} \rightarrow \frac{q}{5} = -2 \rightarrow q = -10\text{ cm}$$

Il risultato è negativo in quanto si trova dietro la prima lente, nostro punto di riferimento per questo esercizio.

Elettrostatica

Esercizio 1 Le armature di un condensatore piano hanno una superficie $S = 1\text{ m}^2$ e distano 1 cm . Tra di loro c'è il vuoto. La differenza di potenziale applicata ai capi delle armature è $V = 10^4\text{ V}$. Calcolare la **capacità** del condensatore, la **carica** su ogni armatura, la **densità** di carica superficiale, l'**intensità** del campo elettrico. Tra le armature del condensatore viene inserita una lamina di dielettrico di spessore 1 cm e di costante elettrica relativa $\epsilon_r = 5$. Calcolare la **densità** di carica superficiale, l'**intensità** del campo elettrico, la **d.d.p.** ai capi delle armature e la **capacità**.

Questo esercizio è un esercizio direi riassuntivo di tutte le formule riguardanti i condensatori. Per prima cosa possiamo immediatamente trovare la capacità del condensatore applicando una sola formula.

$$C = \frac{S\epsilon}{d} \rightarrow C = \frac{S\epsilon_0}{d} \rightarrow C = \frac{1 \cdot 8.8 \cdot 10^{-12}}{0.01} = 8.8 \cdot 10^{-10}\text{ F}$$

E immediata viene anche la carica, invertendo la formula $C = \frac{Q}{V}$

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow Q = C \cdot V \rightarrow Q = 8.8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^4 = 8.8 \cdot \mu\text{C}$$

La densità di carica ora viene immediata anch'essa

$$\sigma = \frac{Q}{S} \rightarrow \sigma = \frac{8.8 \cdot 10^{-6}}{1} = 8.8 \cdot 10^{-6}\text{ C/m}^2$$

E ora manca solo il campo elettrico, abbiamo due modi per trovarlo, questo è uno

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x} \rightarrow \frac{10^4}{0.01} = 10^6\text{ V/m}$$

E questo era metà esercizio. Ora abbiamo lo stesso condensatore con un dielettrico al suo interno.

La prima richiesta è la densità di carica. Risulta essere uguale a

$$\sigma = 8.8 \cdot 10^{-6}\text{ C/m}^2$$

Ma è identica a prima? Come mai? Pensando un attimo, vediamo che il condensatore è isolato, quindi non ci sono modi per cui le cariche si spostino. Essendo poi le due armature isolate fra di loro, la carica non può spostarsi da una all'altra quindi la densità non varia.

Avendo chiarito questo punto, possiamo trovare l'intensità del campo elettrico

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \rightarrow E = \frac{E_0}{\epsilon_r} = \frac{10^6}{5} = 0.2 \cdot 10^{-6}\text{ V/m}$$

Qui abbiamo semplicemente scomposto la formula del campo elettrico:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot \frac{1}{\epsilon_r} \rightarrow E = \frac{E_0}{\epsilon_r}$$

E ora si trova la d.d.p.

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x} \rightarrow \Delta V = E \Delta x \rightarrow \Delta V = 0.2 \cdot 10^6 \cdot 0.01 = 0.2 \cdot 10^4\text{ V}$$

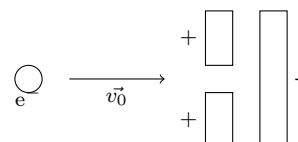
Infine manca la capacità

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \rightarrow C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

$$C = C_0 \epsilon_r \rightarrow C = 8.8 \cdot 10^{-10} \cdot 5 = 4.4 \cdot 10^{-9}\text{ F}$$

Esercizio 2 L'elettrone rappresentato in figura è destinato a raggiungere l'armatura del condensatore caricata negativamente se questa dista 5 mm dall'armatura positivamente? Se sì, determina con quale velocità, se no, determina quale avrebbe dovuto essere la velocità iniziale minima in grado di consentirgli di raggiungere l'armatura.

- $v_0 = 750\text{ m/s}$
- $E = 3.5 \cdot 10^{-4}\text{ N/C}$



Allora, per prima cosa vediamo da che parte il campo elettrico va: dato che le cariche positive sono a sinistra, il campo segue questo verso ed è in linea con la velocità. Poi però notiamo che appena l'elettrone entra nel condensatore subirà una forza contraria in quanto ha carica negativa così come l'armatura di destra.

Chiariti questi punti, come possiamo sapere se arriverà alla seconda armatura? Una formula molto comoda del moto rettilineo uniformemente accelerato torna utile:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2aS$$

Con questa possiamo sapere quanta distanza percorre il nostro elettrone. Se è inferiore alla distanza tra le armature, allora la velocità non è sufficiente. Ora il problema è: come troviamo l'accelerazione? Ci tocca invertire la formula fondamentale della dinamica

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

ma il problema è: qual è la forza? Ovviamente è quella repulsiva che l'elettrone sente a causa dell'armatura caricata negativamente. Come trovarla? Semplice

$$\vec{F} = q\vec{E} \rightarrow F = qE = -1.60 \cdot 10^{-19} \cdot 3.5 \cdot 10^{-4} = \underline{-5.6 \cdot 10^{-23} \text{ N}}$$

E ora possiamo trovare l'accelerazione

$$a = \frac{F}{m} \rightarrow a = \frac{-5.6 \cdot 10^{-23}}{9.11 \cdot 10^{-31}} = \underline{-6.1 \cdot 10^4}$$

Ora completiamo l'equazione precedente

$$v_f^2 - v_i^2 = 2aS \rightarrow S = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} \rightarrow S = \frac{0^2 - 750^2}{2 \cdot 6.1 \cdot 10^4} = \underline{4.5 \text{ mm}}$$

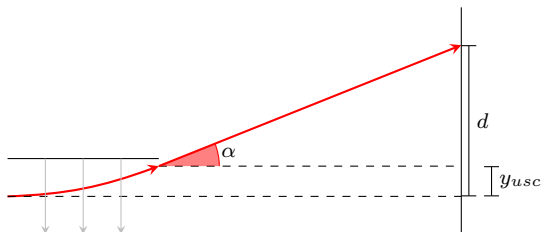
Essendo questa distanza inferiore a 5 mm, l'elettrone non raggiungerà l'altra armatura.

Seguendo lo stesso ragionamento invertiamo questa formula per trovare v_i sapendo la distanza.

$$v_f^2 - v_i^2 = 2aS \rightarrow v_i = \sqrt{2aS + v_f^2} \rightarrow v_i = \sqrt{2 \cdot 6.1 \cdot 10^4 \cdot 5} \approx \underline{784 \text{ m/s}}$$

Esercizio 3 Un elettrone di massa m e carica e viene lanciato ad una velocità $v_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ lungo l'asse delle pareti di un condensatore a facce piane e parallele di lunghezza $l = 1 \text{ m}$, andando a colpire uno schermo fluorescente posto ad una distanza $d = 2 \text{ m}$ dagli estremi delle pareti del condensatore. Supponendo che l'elettrone appena uscito dal condensatore non risenta più dell'effetto del campo elettrico e che il campo elettrico \vec{E} , di modulo 10^4 N/C , sia diretto verso il basso, **calcola a quale distanza dall'asse del condensatore, l'elettrone colpisce lo schermo.** Si tenga presente che $\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$

Quest'esercizio è piuttosto complicato ed è molto articolato. Andrà a toccare elementi di cinematica nonché di elettrostatica. Per avere un'idea più chiara della situazione, andiamo a vedere il disegno



In rosso vediamo il moto dell'elettrone. Perché tende verso l'alto? L'elettrone ha carica negativa, il campo elettrico va da + a -, quindi l'elettrone si muove in verso opposto a quello del campo. Sono stati evidenziati anche i due diversi moti, con due diverse frecce. Il primo è moto parabolico in quanto abbiamo una certa forza che agisce sull'elettrone, il secondo è moto rettilineo uniforme in quanto non ci sono più forze in gioco.

Per risolvere questo genere di esercizi molto articolati, bisogna procedere con calma e metodo. Noi dobbiamo trovare d . d è composta da

y_{usc} e dalla y del moto rettilineo. Troviamo intanto y_{usc} . Secondo la legge oraria del moto parabolico

$$y_{usc} = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow y_{usc} = \frac{1}{2}a\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

Abbiamo tutto quello che ci serve tranne a . A che accelerazione è sottoposto l'elettrone? A quella generata dalla forza di un campo magnetico su una carica. Utilizzando quindi la definizione di campo elettrico e la seconda legge della dinamica scriviamo

$$eE = ma \rightarrow a = \frac{e}{m}E$$

Quindi sostituendo con i dati già forniti e risolvendo otteniamo

$$a \approx \underline{1.76 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2}$$

Inserendo ora tutti i dati nella prima formula

$$y_{usc} = \frac{1}{2} \cdot 1.76 \cdot 10^{15} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 10^8}\right)^2 \approx \underline{2.2 \cdot 10^{-2} \text{ m}}$$

E questa era la parte facile. Ora se osserviamo meglio il disegno, vediamo che $y = 2 \tan \alpha$ questo perché 2 è il cateto maggiore e α l'angolo opposto al cateto che ci interessa. Quindi dobbiamo in qualche modo trovare α . Possiamo vedere quell'angolo come angolo compreso tra due vettori, specificamente la componente x e y della velocità d'uscita. Abbiamo già la componente x in quanto nel moto parabolico si mantiene costante. Quella y è facilmente trovabile con le nostre conoscenze di cinematica dove

$$v = v_0 + at$$

dove $v_0 = 0$ in quanto l'elettrone parte da fermo sull'asse y . L'accelerazione e il tempo li abbiamo già individuati! Quindi scriviamo

$$v = at \rightarrow v = 1.76 \cdot 10^{15} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^8} \approx \underline{8.8 \cdot 10^6 \text{ m/s}}$$

L'angolo compreso tra due vettori è pari all'arcotangente del quoziente tra le componenti y e x . Quindi

$$\alpha = \arctan \frac{y}{x} \rightarrow \alpha = \arctan \frac{8.8 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^8} \approx \underline{2.5^\circ}$$

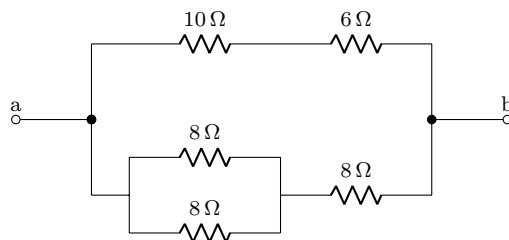
Ora risolviamo e concludiamo

$$d = y + y_{usc} = 2 \tan \alpha + y_{usc} = 2 \tan 2.5 + 0.022 = 2 \cdot 0.044 + 0.022 = \underline{0.11 \text{ m}}$$

Circuiti Elettrici

Esercizio 1 Se la corrente nel resistore di 6Ω della figura è di 2 A :

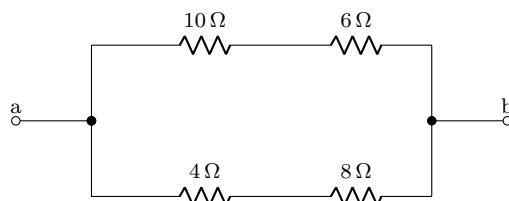
- La caduta di potenziale tra a e b;
- La corrente totale del circuito;



Per prima cosa, si semplifichino le resistenze da 8Ω che sono in parallelo fra di loro

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \rightarrow \frac{1}{R_e} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \rightarrow R_e = \underline{4 \Omega}$$

Quindi ora il circuito è come questo

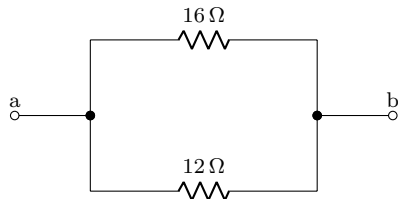


Semplifichiamolo ulteriormente riducendo le resistenze in serie

$$R_{e1} = 10 + 6 = \underline{16\ \Omega}$$

$$R_{e2} = 4 + 8 = \underline{12\ \Omega}$$

E il circuito ora rimane molto semplicemente



Sapevamo che nella resistenza da 6 Ω del primo circuito passavano 2 A. Dato che si trova in serie con una da 10 Ω, anche in questa passeranno 2 A.

Sfruttando la formula

$$V = Ri$$

possiamo trovarci la caduta di potenziale tra a e b.

$$V = Ri \rightarrow V = 16 \cdot 2 = \underline{32\ V}$$

Sapendo ora la d.d.p. e sapendo che le resistenze sono in parallelo, possiamo trovarci la corrente che passa nella resistenza di 12 Ω invertendo quella formula

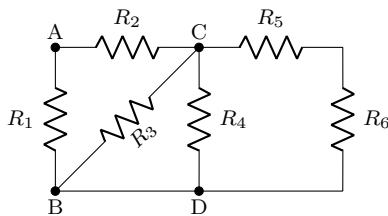
$$V = Ri \rightarrow i = \frac{V}{R} \rightarrow i = \frac{32}{12} \approx \underline{2.66\ V}$$

Infine, la sommiamo alla corrente del ramo "superiore" del circuito e otteniamo la corrente totale

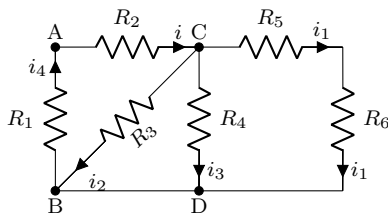
$$i_t = i_1 + i + 2 = 2 + 2.66 = \underline{4.66\ A}$$

Esercizio 2 Calcolare la resistenza R_{eq} vista ai morsetti **A-B**

- $R_1 = R_3 = 0.2\ \Omega$
- $R_4 = R_5 = 1\ \Omega$
- $R_2 = 0.4\ \Omega$
- $R_6 = 3\ \Omega$



Quest'esercizio, per quanto apparentemente intimidatorio, non è così complicato. La prima cosa da fare è trovare in che relazione sono le resistenze fra di loro. È immediato vedere che R_5 e R_6 sono in serie fra di loro in quanto non hanno collegamenti nel mezzo. E ora come scoprire i collegamenti di quell'agroviglio di resistenze? Bisogna andare con molta calma e osservare come si diffonde la corrente. Sappiamo che A e B sono i poli della batteria quindi ipotizziamo che in A si trovi il polo positivo (metterlo in B non cambierebbe nulla). Il seguente schema chiarisce i versi delle correnti.

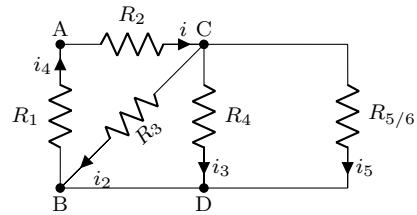


Come possiamo notare in C la corrente si divide in 3: i_1 , i_2 e i_3 . Questo cosa ci dice? Che i tre collegamenti sono fra di loro in parallelo! Una proprietà dei collegamenti in serie è che la corrente si mantiene costante tra le resistenze, dato che in questo caso non avviene il collegamento in parallelo. Abbiamo quindi definito che R_5 ed R_6 sono in serie fra di loro; la loro equivalente, R_4 ed R_3 sono in parallelo fra di loro. Manca solo R_1 ed R_2 . R_2 è immediatamente visibile che sarà in serie con la risultante

di R_5 , R_6 , R_4 ed R_3 . Quando rimarranno solo due resistenze, R_1 e l'altra saranno in parallelo.

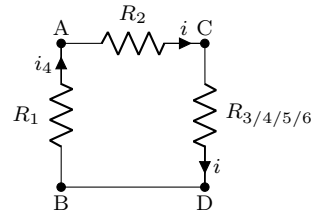
Per rendere tutto più chiaro, cominciamo a fare i calcoli e semplificare il circuito.

$$R_{5/6} = R_5 + R_6 \rightarrow R_{5/6} = 1 + 3 = \underline{4\ \Omega}$$



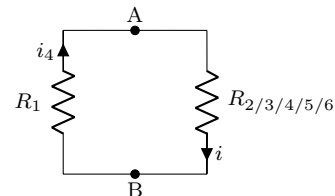
Avendo già stabilito il verso di percorrenza della corrente e i tipi di collegamento, semplifichiamo $R_{5/6}$, R_4 e R_3 .

$$R_{3/4/5/6} = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{5/6}} \right)^{-1} \rightarrow \left(\frac{1}{0.2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \right)^{-1} = \underline{0.16\ \Omega}$$



Ora semplifichiamo le due resistenze in serie (R_2 e l'ultima calcolata)

$$R_{2/3/4/5/6} = R_2 + R_{3/4/5/6} \rightarrow R_{2/3/4/5/6} = 0.4 + 0.16 = \underline{0.56\ \Omega}$$



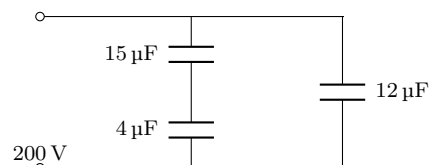
E ora possiamo vedere che le due resistenze sono in parallelo fra di loro e quindi possiamo semplificarle con facilità

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{2/3/4/5/6}} \right)^{-1} \rightarrow R_{eq} = \left(\frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.56} \right)^{-1} = \underline{0.147\ \Omega}$$

Ed ecco il nostro risultato. Il modo migliore per risolvere questi esercizi è cercare di capire in che verso va la corrente e vedere i collegamenti. Andando con calma si riuscirà senza problemi a risolvere qualsiasi esercizio proposto.

Esercizio 3 Per la disposizione mostrata in figura si trovino:

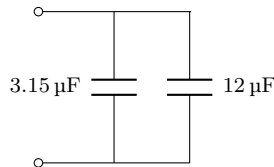
- La capacità equivalente tra i terminali
- La carica immagazzinata in ciascun condensatore
- L'energia accumulata nei condensatori



È evidente che i due condensatori da 15 e 4 sono in serie fra di loro. Il condensatore da 12 invece è in parallelo con questi due. Per risolvere il primo punto calcoliamoci l'equivalente dei due condensatori in serie.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow C_{eq} = \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{4} \right)^{-1} \approx \underline{3.15 \text{ pF}}$$

Ora il circuito è come questo



Ora basta solo trovare l'equivalente di questi due in parallelo.

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \rightarrow 3.15 + 12 = \underline{15.15 \text{ pF}}$$

Per il secondo punto possiamo sfruttare la formula per la capacità elettrica $C = \frac{Q}{V}$. Dato che i due condensatori dell'ultimo circuito sono in parallelo fra di loro, la d.d.p. rimane uguale. Quindi possiamo invertire la formula e trovare immediatamente la carica nel condensatore da 12.

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow Q = C \cdot V \rightarrow Q = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = \underline{2400 \mu\text{C}}$$

E possiamo fare lo stesso con la resistenza equivalente. Una volta fatto otterremo anche la carica su ciascuno dei due condensatori in quanto sono in serie e due condensatori in serie hanno la stessa carica.

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow Q = C \cdot V \rightarrow Q = 3.15 \cdot 200 = \underline{630 \mu\text{C}}$$

Esercizio 4 Un sottile filo conduttore di resistenza $R = 50 \Omega$, collegato ad un generatore di tensione ideale che mantiene una differenza di potenziale ΔV_0 , viene utilizzato per portare 10L di acqua dalla temperatura di 10°a quella di 50° . La corrente erogata dal generatore è pari a 5A. Considera il calore specifico dell'acqua pari a $4186 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ e il rendimento del sistema pari a $\mu = 0.8$

In questo esercizio combiniamo le nostre conoscenze di Calorimetria e di elettrostatica. Abbiamo una resistenza che è attraversata da una corrente. Questo ci dice, secondo l'effetto Joule che si scalderebbe. Scaldandosi emetterà calore anche ai corpi adiacenti, in questo caso l'acqua.

Sapendo che per Joule

$$Q = Ri^2t$$

e che la quantità di calore è pari a

$$Q = C\Delta t = mc\Delta T$$

unendole otteniamo

$$Ri^2t = C = mc\Delta T\mu$$

Abbiamo aggiunto μ in quanto la macchina termica non è perfetta e ha un rendimento diverso da 1. Dato che a noi interessa solo il tempo, lo isoliamo per ottenere

$$t = \frac{mc\Delta T}{Ri^2}$$

Ora non resta che sostituire

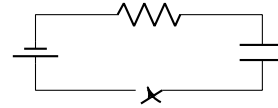
$$t = \frac{mc\Delta T\mu}{Ri^2} \rightarrow t = \frac{10 \cdot 4186 \cdot (50 - 10) \cdot 0.8}{50 \cdot 5^2} = \underline{1.7 \cdot 10^3 \text{ s}}$$

Esercizio 5 Un generatore di forza elettromotrice pari a $\mathcal{E} = 30 \text{ V}$ è connesso in serie ad una resistenza $R = 5 \text{ k}\Omega$ e ad un condensatore di capacità pari a $8 \mu\text{F}$. Un interruttore chiude il circuito all'istante $t = 0 \text{ s}$. Calcola quante **costanti di tempo siano necessarie perché l'energia immagazzinata sia $\frac{1}{3}$ dell'energia finale**.

L'energia immagazzinata in un condensatore in funzione del tempo è

$$L_c(t) = \frac{q(t)^2}{2C}$$

Partiamo dal disegno del circuito



Ora, osservando la formula che ci viene data, possiamo riscriverla

$$L_c(t) = \frac{q(t)^2}{2C} = \frac{1}{2}q(t)V(t)$$

che ulteriormente espansa e semplificata viene

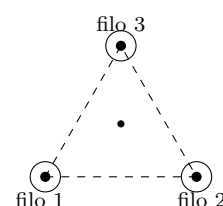
$$L_c(t) = \underbrace{\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2}_{\text{max}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$$

Dato che noi dobbiamo ottenere $\frac{1}{3}$ della capacità massima, possiamo scrivere la seguente equazione

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{3} C \mathcal{E}^2 &= \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 \rightarrow \\ \sqrt{\frac{1}{3}} &= \sqrt{\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2} \rightarrow \\ 0.42 &= e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow \ln 0.42 = -\frac{t}{\tau} \rightarrow \\ t &\approx \underline{0.86\tau} \end{aligned}$$

Magnetismo

Esercizio 1 Tre fili rettilinei paralleli sono posti sui vertici di un triangolo equilatero di lato $d = 35 \text{ cm}$, come mostrato in figura e sono attraversati dalle correnti i_1 , i_2 , i_3 . Le correnti hanno tutte intensità pari a 2 A. **Determina modulo, direzione e verso della forza per unità di lunghezza che agisce su un punto al centro del triangolo nel caso in cui tutte le correnti siano uscenti dal foglio. E se uno fosse entrante?**



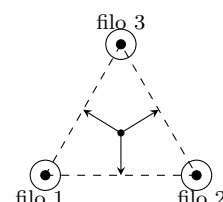
Questo è il nostro disegno e il punto al centro è quello su cui noi dobbiamo trovare la forza risultante. Scriviamo la formula per la forza che intercorre tra due fili paralleli (legge di Ampère)

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d} l$$

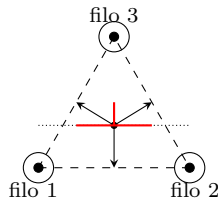
sappiamo però che tutte le correnti sono uguali quindi semplifichiamo in

$$F = \frac{4\mu_0}{2d\pi}$$

Abbiamo d che rappresenta la distanza tra i due punti e l che è un parametro variabile. Usando la **regola della mano** troviamo la direzione e il verso dei vettori.



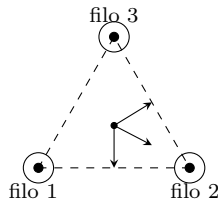
Quello che capiamo da questo disegno è decisivo: le tre forze si annullano se hanno lo stesso modulo. Come mai? Ipotizziamo di proiettare su x e y le componenti



Notiamo che la componente x si annulla e quella y perché bisogna sommare le due componenti dei vettori. Di conseguenza

$$\vec{F} = \vec{0}$$

E se uno fosse entrante? Ipotizziamo che quello entrante sia il filo 1. Il disegno dei vettori ora diventa



Sappiamo che i vettori che non si sono mossi, hanno un angolo pari a 120° fra di loro. Questo perché il triangolo è equilatero. Il vettore che invece si è spostato, ha semplicemente invertito verso. Se prima si trovava anch'esso a 120° gradi dagli altri, adesso ne è diventato la bisettrice dividendo quindi ora in due angoli da 60° . La risultante dei due vettori che non sono stati modificati è pari al nuovo vettore in quanto precedentemente lo annullavano. Di conseguenza la forza che si applica non è altro che

$$\vec{F}_e = 2\vec{F} \rightarrow \|\vec{F}_u\| = \frac{4l\mu_0}{d\pi}$$

d quanto vale però? d è la distanza tra il filo e il punto centrale. Esso si trova a $\frac{2}{3}$ dell'altezza di distanza (questo perché baricentro e incentro in un triangolo equilatero coincidono e il baricentro divide il segmento in 2 parti, una il doppio dell'altra). Quindi mettendo assieme queste informazioni

$$d = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{3}l$$

e sostituendo l con il dato

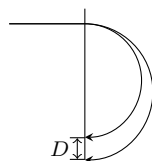
$$d = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0.35 \approx \underline{0.2\text{ m}}$$

Ora non resta che risolvere!

$$\|\vec{F}_u\| = \frac{4l\mu_0}{d\pi} \rightarrow F = \frac{4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot l}{0.2\pi} \approx \underline{8 \cdot 10^{-6} \text{ N}}$$

dove l è la nostra unità di lunghezza, il parametro.

Esercizio 2 In uno spettrometro di massa entra un fascio di ioni di carica $q = e$, velocità 5000 m/s e massa $m_1 = 20 \text{ u}$ per alcuni e $m_2 = 22 \text{ u}$ per altri (con u come unità di massa atomica). Il fascio viene ora deviato di 180° da un campo magnetico $B = 0.09 \text{ T}$ (vedi figura). Qual è la distanza D tra i due punti?



Poiché le velocità sono perpendicolari al campo magnetico le traiettorie sono archi di circonferenza e la distanza D non è altro che la differenza dei diametri. $D = 2(r_2 - r_1)$. Sugli ioni agisce la forza di Lorentz in quanto sono cariche in un campo magnetico. Dalla seconda legge della dinamica possiamo dire che

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

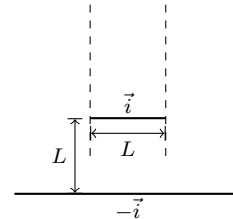
Essendo la parte sinistra la forza di Lorentz e quella destra nel caso in cui sia perpendicolare. Da questa si deriva che

$$r = \frac{mv}{qB}$$

La distanza è quindi pari a

$$D = \frac{2v}{eB}(m_2 - m_1) \approx \underline{2.3 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

Esercizio 3 Una barra conduttrice orizzontale di lunghezza L e massa m può scivolare su una guida verticale (si guardi la figura) ed è in equilibrio ad un'altezza L da un lungo cavo conduttore quando sia la barra che il cavo hanno una corrente I ma in versi opposti. Trova I in funzione di L e m . Qual è l'accelerazione iniziale della barra se la corrente del cavo venga improvvisamente raddoppiata?



Abbiamo due fili paralleli attraversati da una corrente. Questo ci porta ad usare la legge di Ampère.

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d} l$$

Sostituendo i nostri dati otteniamo

$$mg = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{-I^2}{L} l$$

Ora non resta che isolare I

$$m = I^2 \frac{\mu_0}{2\pi} \rightarrow \frac{2\pi m}{\mu_0} = I^2 \rightarrow I = \sqrt{\frac{2\pi mg}{\mu_0}}$$

Nel caso in cui la corrente si raddoppi, la forza raddoppia quindi diventa

$$F = -I^2 \frac{\mu_0}{\pi} = 2mg$$

Usando la seconda legge di Newton ci dice

$$F - mg = ma \rightarrow 2mg - mg = ma \rightarrow mg = ma$$

Questo ci dice che quindi $a = g$, verso l'alto.

Esercizio 4 Un fascio di protoni con varie velocità è diretto nel verso positivo dell'asse x . Il fascio entra in una regione in cui è presente un capo magnetico uniforme d'intensità 0.52 T ; il campo è diretto nel verso negativo dell'asse z , come indicato in figura. Si vuole utilizzare un campo elettrico uniforme (in aggiunta al campo magnetico) per selezionare solo quei protoni che hanno velocità pari a $1.42 \cdot 10^5 \text{ m/s}$; in altre parole si vuole che questi protoni siano gli unici a non essere deflessi dai due campi.

1. Determinare l'intensità, la direzione e il verso del campo elettrico che permette di selezionare le particelle
2. Supponendo che il campo elettrico sia generato da un condensatore le cui armature distano 2.5 cm , calcolare la d.d.p. necessaria da essere applicata agli estremi di esso
3. Quale delle due armature deve essere caricata positivamente?



Abbiamo un campo magnetico e uno elettrico incrociati, questo è il tipico selettore di velocità. La formula ci dice

$$v = \frac{E}{B}$$

e noi abbiamo v e B . Il nostro compito quindi è ottenere E .

$$v = \frac{E}{B} \rightarrow E = vB = 1.42 \cdot 10^5 \cdot 0.52 = \boxed{7.3 \cdot 10^4 \text{ C/m}^2}$$

In che direzione deve andare? Se osserviamo il campo magnetico generato, notiamo che tende a spingere i protoni verso l'alto (usando la regola della mano questo risulta evidente). Di conseguenza, se si vuole mantenere stabile il protone, il campo elettrico deve andare verso il basso, perpendicolarmente al condensatore.

Un campo elettrico generato da un condensatore è pari a

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

Noi abbiamo la distanza e il campo con la richiesta della differenza di potenziale. Isoliamo e calcoliamo

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x} \rightarrow \Delta V = E\Delta x = 7.3 \cdot 10^4 \cdot 0.025 = \boxed{1846 \text{ V}}$$

Quale piastra deve essere caricata positivamente? Sapendo che il campo va da + a - e sapendo che deve essere orientato verso il basso, la piastra positiva deve essere quella superiore.

Esercizio 5 Un solenoide è lungo 20 cm e ha un diametro di 50 mm. Il filo di rame utilizzato per formare le spire dell'avvolgimento ha una sezione di diametro 0.5 mm. Le spire sono affiancate. Ai capi del solenoide è applicata una differenza di potenziale in modo che il campo magnetico generato all'interno abbia un'intensità pari a $1.26 \cdot 10^{-3} \text{ T}$. La resistività del rame vale $1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. **Calcola il valore della differenza di potenziale.**

Scriviamo la formula che ci trova il campo magnetico in un solenoide

$$B = \mu_0 \frac{n}{l} i$$

La corrente è definita come

$$i = \frac{V}{R}$$

A noi manca anche la resistenza che però possiamo trovare facilmente usando la seconda legge di Ohm

$$R = \rho \frac{L}{S} \rightarrow R = 1.7 \cdot 10^{-8} \frac{L}{\pi \cdot (2.5 \cdot 10^{-4})^2} = \underline{0.085L}$$

Quindi ora, scrivendo tutto quanto in un'unica equazione

$$1.26 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot \pi \frac{n}{0.2} \frac{V}{0.085L}$$

dato che $L = 2n \cdot r \cdot \pi$ dato che il filo è arrotolato n volte

$$1.26 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot \pi \frac{n}{0.2} \frac{V}{0.085 \cdot n \cdot 0.15}$$

risolvendo per V otteniamo

$$V = \boxed{2.67 \text{ V}}$$

Appendice

Questo formulario dá per scontate alcune nozioni matematiche. Di seguito sono riportate le più basilari e importanti.

Proporzionalità

Per esprimere la proporzionalità si utilizza il simbolo \propto . Si dicono **direttamente proporzionali** due variabili x, y se

$$y = kx \ (y \propto x)$$

Ovvero se all'aumentare di x aumenta anche y .

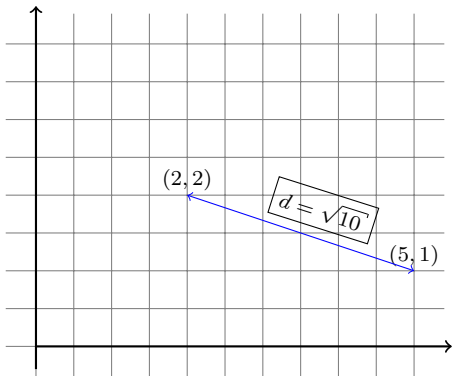
Si dicono **inversamente proporzionali** due variabili x, y se

$$xy = k \ \left(y \propto \frac{1}{x}\right)$$

Distanza

La distanza tra due punti è un concetto fondamentale e si calcola

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Notazione scientifica

I valori ottenuti in fisica possono presentare a volte molti zeri, per ovviare alla difficoltà di lettura di questi numeri si utilizza la notazione scientifica che consiste nello scrivere qualunque numero come

$$\text{Numero} = x \cdot 10^y$$

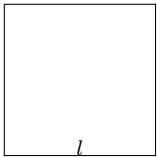
con x tra 0 e 10 e con ultima cifra diversa da 0
Dunque $107,000 = 1,07 \cdot 10^5$ e $0.0000098 = 9,8 \cdot 10^{-8}$
Frequentemente 10^y viene ancora semplificato con alcuni prefissi:

	Prefisso	Nome prefisso
10^{18}	E	esa
10^{15}	P	peta
10^{12}	T	tera
10^9	G	giga
10^6	M	mega
10^3	k	kilo
10^2	h	etto
10^{-1}	d	deci
10^{-2}	c	centi
10^{-3}	m	milli
10^{-6}	μ	micro
10^{-9}	n	nano
10^{-12}	p	pico
10^{-15}	f	femto
10^{-18}	a	atto

Quadrato

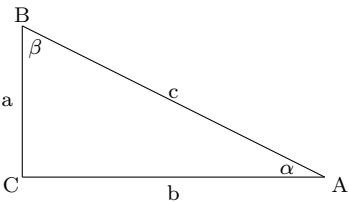
Il quadrato è una figura regolare con 4 lati. Definendo l =lunghezza del lato si calcola

$$\text{Area} = l^2 \quad \text{Diagonale} = l\sqrt{2}$$



Triangolo

Il triangolo è una figura con tre lati. Esistono svariati tipi di triangoli ma quelli più comuni in fisica sono i triangoli rettangoli (ovvero quei triangoli che hanno un angolo di 90 gradi).



Si definisce c (il lato più lungo) ipotenusa, b (lato di media lunghezza) cateto maggiore e a (lato più corto) cateto minore. Alla base di tutte le formule sul triangolo rettangolo sta il Teorema di Pitagora:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Oltre a questa formula sono fondamentali anche:

$$b = c \cos \alpha \quad e \quad a = c \sin \alpha$$
$$a = c \cos \beta \quad e \quad b = c \sin \beta$$

Al seno e al coseno va aggiunta la tangente che si definisce:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Attraverso la tangente:

$$a = b \tan \alpha \quad b = a \tan \beta$$

Un'altra formula importante è

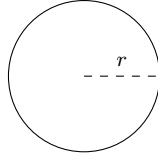
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

che si usa per ottenere il seno quando si ha il coseno e viceversa.

Cerchio

Il cerchio è una figura fondamentale, si dimostra che:

$$\begin{aligned}\text{Circonferenza} &= 2\pi r \\ \text{Area} &= \pi r^2\end{aligned}$$



π è un numero irrazionale definito appunto come rapporto la lunghezza della circonferenza e il diametro, il suo valore approssimato è 3,14159.

Facendo ruotare un cerchio di 180 gradi si ottiene una sfera. Il volume di una sfera è pari a

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Equazioni

Esistono svariati tipi di equazioni, tra le più comuni vi sono quelle di secondo grado. Per risolvere le equazioni $ax^2 + bx + c = 0$ si usa la seguente formula:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Per risolvere sistemi di equazioni come questo

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f, \end{cases}$$

si può usare il teorema di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{ce - bf}{ae - bd} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Con questa logica si possono risolvere sistemi con anche più equazioni.

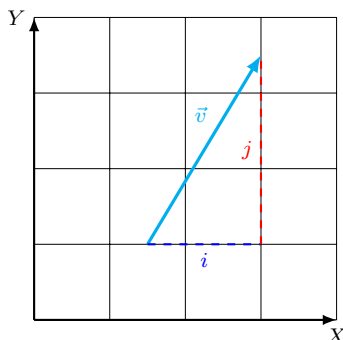
Vettori

Questa sezione è dedicata ad uno dei concetti più comuni in fisica: il *vettore*.

Un vettore può essere rappresentato in molti modi, tra cui:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{bmatrix} = (a, b, \dots)$$

Un vettore è composto di un numero definito di *componenti*, solitamente una per ciascuna dimensione in cui si lavora. Quindi è decisamente più comune trovare vettori *bidimensionali* che non con un numero maggiore di componenti.



In questa immagine è possibile vedere un vettore $\vec{v}(i, j)$ e le sue componenti.

D'ora in poi sarà dato per scontato che i vettori siano bi-dimensionali.

Operazioni tra vettori

Le operazioni come addizione e sottrazione funzionano molto semplicemente sommando algebricamente le componenti tra di loro:

$$\vec{v}_1(a_1, b_1) \pm \vec{v}_2(a_2, b_2) = \vec{v}(a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$$

La moltiplicazione tra vettori può avere come risultato o un *vettore* o uno *scalare*.

Prodotto scalare

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Come si può notare il prodotto scalare tra due vettori torna uno scalare (ovvero un numero). In fisica però è molto più comune trovare questa definizione di prodotto scalare:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cos \theta$$

$\|\vec{v}\|$ è il modulo del vettore \vec{v} , ovvero la sua lunghezza. θ è l'angolo formato dai due vettori.

Prodotto vettoriale

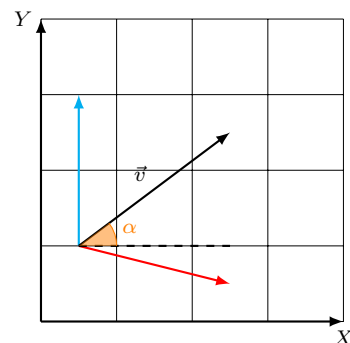
$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = n \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \sin \theta$$

$\|\vec{v}\|$ è il modulo del vettore \vec{v} , ovvero la sua lunghezza. θ è l'angolo formato dai due vettori. n è la *normale* del piano su cui stanno i vettori. Una *normale* è un vettore perpendicolare ad un oggetto dato.

Per scoprire la direzione del nuovo vettore si può usare la così detta "regola della mano". Essa dice:

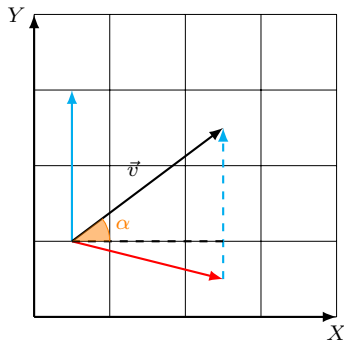
1. Usare il pollice della mano destra in direzione e verso del **primo** vettore
2. Usare l'indice o le altre dita in direzione e verso del **secondo** vettore
3. Il nuovo vettore avrà la direzione che attraversa il palmo perpendicolarmente e il verso uscente dalla mano.

Angolo tra vettori



Sono qui rappresentati due vettori: uno in ciano e uno in rosso. La loro somma è il vettore risultante, in nero.

Per trovare l'angolo di un vettore ottenuto da una somma, vanno sommate tra loro le componenti orizzontali (x) dei due vettori e tra loro le componenti verticali (y) dei due vettori.



Otteniamo quindi che l'angolo è pari a

$$\alpha = \arctan \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$$

Percentuale

La percentuale serve per esprimere delle informazioni numeriche, si esprime col simbolo %.

N% ha il significato di $\frac{N}{100}$. N% di T è pari ad una parte di T (che va da 0 a T), per riassumere quindi

$$T \cdot \frac{N}{100} = R$$

La variazione percentuale, serve a definire quando una quantità x varia, è definita come:

$$\text{Variazione percentuale} = \frac{x_{\text{finale}} - x_{\text{iniziale}}}{x_{\text{iniziale}}} \cdot 100$$

Quindi se la velocità di un corpo passa da 15 m/s a 20 m/s, vi è stato un aumento percentuale del 33,3%.

Esponenziali e logaritmi

Esponenziali e logaritmi sono strettamente legati, come si può capire notando che:

$$\log_a b = x \quad a^x = b$$

Molto spesso si utilizzerà questa caratteristica che deriva dalla definizione stessa di logaritmo:

$$a^{\log_a b} = b$$

Alcune proprietà delle espressioni esponenziali

$$\begin{aligned} a^b \cdot a^c &= a^{bc} \\ (a + b)^c &= a^c + b^c \\ a^{-b} &= \frac{1}{a^b} \end{aligned}$$

Alcune proprietà invece dei logaritmi sono

$$\begin{aligned} \log_a (b * c) &= \log_a b + \log_a c \\ \log_a \frac{b}{c} &= \log_a b - \log_a c \\ \log_a (b^c) &= c \log_a b \end{aligned}$$

Note