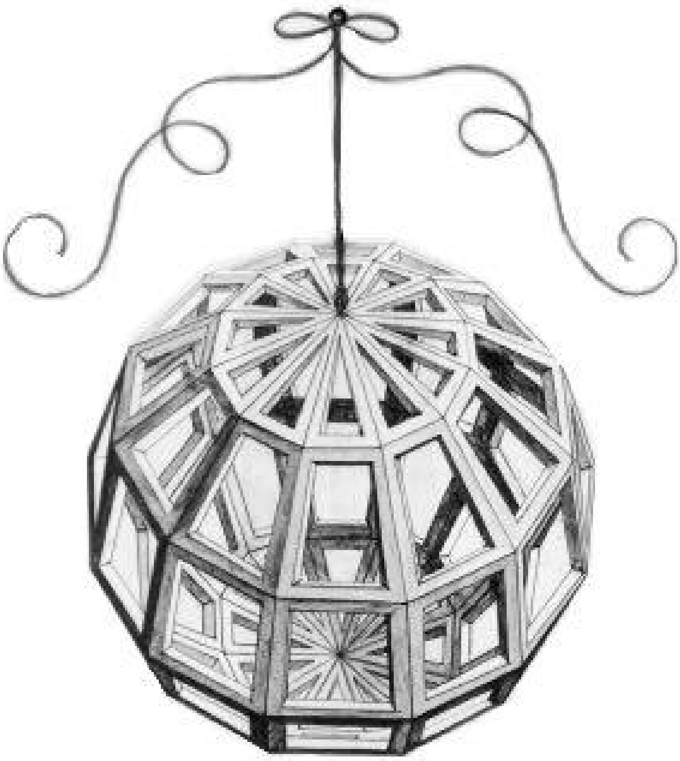


'La fisica è, tra tutte le scienze, la più fondamentale e completa, e ha avuto una profonda influenza. Studenti delle discipline più diverse si ritrovano a doverla studiare a causa dell'importanza che riveste in tutti i fenomeni.'
- Richard Feynman

'Causas rerum naturalium non plures admittiri debere, quam quo et vera sint et earum phænomeni explicandis sufficiant.'
- Isaac Newton

Formulario di Fisica

Davide Cossu, Stefano D'Agaro

Questo è un formulario con le formule di fisica fatte durante i cinque anni di un liceo scientifico con alcune spiegazioni teoriche, esercizi e suggerimenti.

Version 1.618033 2018-05-06
Copyright ©2017–2018 Cossu Davide

Indice

Durante tutto il formulario, si userà il sistema internazionale di notazione, ovvero . per separare interi da decimali e , per separare le migliaia se necessario.

Costanti

Qui verranno riportate le costanti usate nelle formule con relativo simbolo e unità di misura.

Simbolo	Nome	Valore	Unità di misura
π	Pi greco	3.14	/
g	Accelerazione gravitazionale	9.81	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
G	Costante di Gravitazione Universale	$6.67 \cdot 10^{-11}$	$\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$
m_{Terra}	Massa della Terra	$5.9 \cdot 10^{24}$	kg
r_{Terra}	Raggio della Terra	6378	km
p_{atm}	Pressione atmosferica	1 $1.01 \cdot 10^5$ 760 $1.01 \cdot 10^5$ 1	atm Pa mm Hg $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ bar
N_A	Numero di Avogadro	$6.02 \cdot 10^{23}$	/
z	Costante di Stefan-Boltzman	$5.67 \cdot 10^{-8}$	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K}^4}$
V_m	Volume occupato da Gas in STP	22.4	l
R	Costante universale dei Gas	0.0821 8.31	$\frac{\mathrm{l} \cdot \mathrm{atm}}{\mathrm{nK}}$ $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{nK}}$
c_{H_2O}	Calore specifico dell'acqua	$4.186 \cdot 10^3$ 1	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}$ $\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{g} \cdot \mathrm{K}}$
λ_f	Calore di fusione dell'acqua	$3.335 \cdot 10^5$	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Kg}}$
λ_v	Calore di vaporizzazione dell'acqua	$2.257 \cdot 10^6$	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Kg}}$

Simbolo	Nome	Valore	Unità di misura
k_B	Costante di Boltzman	$1.381 \cdot 10^{-23}$	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$
c	Velocità della luce	$3 \cdot 10^8$	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
I_0	Soglia di udibilità	$10 \cdot 10^{-12}$	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$
I_m	Soglia del dolore	1	$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$
v	Velocità del suono	343	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
ε_0	Costante dielettrica nel vuoto	$8.9 \cdot 10^{-12}$	$\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}$
k_0	Costante di Coulomb	$9 \cdot 10^9$	$\frac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$
e^-	Carica di un elettrone	$-1.60 \cdot 10^{-19}$	C
m_{e^-}	Massa di un elettrone	$9.11 \cdot 10^{-28}$	kg
u	Unità di massa atomica	$1.7 \cdot 10^{-7}$	kg
μ_0	Permeabilità magnetica nel vuoto	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$

Unità di misura

Grandezza	Nome	Simbolo	Definizione
Lunghezza	Metro	m	/
Massa	Kilogrammo	kg	/
Tempo	Secondo	s	/
Corrente elettrica	Ampére	A	/
Temperatura	Kelvin	K	/
Quantità di sostanza	Mole	mol	/
Area	Metro quadrato	m^2	/
Volume	Metro cubo	m^3	/
Velocità	Metro al secondo	m/s	/
Accelerazione	Metro al secondo quadrato	m/s^2	/
Frequenza	Hertz	Hz	s^{-1}
Angolo	Radiante	rad	/
Forza	Newton	N	$m{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}$
Potenza	Watt	W	J/s
Pressione	Pascal	Pa	N/m^2
Energia, Lavoro, Quantità di calore	Joule	J	N·m
Carica Elettrica	Coulomb	C	s·A
Potenziale Elettrico	Volt	V	W/A
Capacità	Farad	F	C/V
Campo Magnetico	Tesla	T	$N(A{\cdot}m)^{-1}$
Flusso	Weber	Wb	$T{\cdot}m^2$
Induttanza	Henry	H	Wb/A

Le unità in grassetto, sono le unità fondamentali.

Cinematica

La cinematica, definita anche *geometria del movimento*, si occupa dello studio dei moti. Un oggetto è in moto se la sua posizione cambia nel tempo. Esistono tanti modi di spostarsi: lungo una retta, in curva, oscillando avanti e indietro attorno ad un punto. In tutti i problemi verrà ignorato l'attrito con l'aria.
Per gli esercizi si vada a pagina 33.

Si noti e ricordi che

$$1\,\mathrm{m/s} = 3.6\,\mathrm{km/h}$$

Moto Rettilineo Uniforme

Un corpo si muove di moto rettilineo uniforme se la sua velocità è costante.

$$x = x_0 + vt$$

x: posizione finale dell'oggetto
x_0: posizione iniziale dell'oggetto
v: velocità
t: tempo

Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato

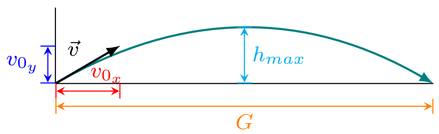
Un corpo si muove di moto rettilineo accelerato se la sua velocità varia nel tempo.

$$v = v_0 + at$$
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot \Delta x$$

v: velocità finale
v_0: velocità iniziale
a: accelerazione
t: tempo
x: posizione finale
x_0: posizione iniziale
Δx: $x - x_0$

Moto Parabolico

Il moto di tutti i corpi lanciati sulla Terra è di tipo parabolico.



Viene descritto dalle formule del *Moto Rettilineo* e *Moto rettilineo uniformemente accelerato*.
Il vettore velocità può essere scomposto nelle sue due componenti. v_x è costante per tutto il moto, v_y è 0 quando si trova nel punto di massima altezza.

Tempo

$$t = \frac{x}{v_{0_x}} = \frac{2v_{0_y}}{g}$$

g: $9.81\,\mathrm{m/s^2}$
x: posizione dell'oggetto sull'asse X
y: posizione dell'oggetto sull'asse Y
v_0: velocità iniziale (vettore)

Da queste si deriva che

$$y = v_{0_y} t - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_{0_x}}\right)^2$$
$$x = v_{0_x} t$$

Gittata

$$G = \frac{2v_{0_x} v_{0_y}}{g}$$

g: $9.81\,\mathrm{m/s^2}$: $9.81\,\mathrm{m/s^2}$
v_0: velocità iniziale (vettore)

Altezza massima

$$h_{max} = \frac{{v_0}_y{}^2}{2g}$$

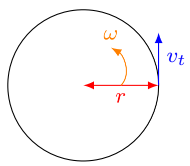
g: $9.81\,\mathrm{m/s^2}$
v_0: velocità iniziale (vettore)

Velocità in un punto

La velocità varia ogni istante direzione e intensità.

$$v = \sqrt{v_{0_x}^2 + v_{0_y}^2}$$

Moto Circolare Uniforme



Nel moto circolare, si distinguono due generi diversi di velocità: *tangenziale* e *angolare*.

La velocità tangenziale (v_t) è quella che cambia ad ogni istante direzione e che varia in base alla distanza dal centro.
La velocità angolare (ω) è costante per ogni punto della circonferenza e indica quanto veloce un corpo ruota.

Si noti anche che r indica la distanza dal centro di rotazione al corpo in oggetto.

Velocità tangenziale

$$v_t = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

r: raggio della circonferenza
T: periodo del moto, ovvero quanto impiega a compiere un giro completo
ω: velocità angolare

Velocità angolare

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T}$$

α: angolo percorso
t: tempo
T: periodo del moto

Accelerazione centripeta

Il vettore velocità cambia ogni istante quindi è presente un accelezione Questa è definita accelerazione centripeta che risulta perpendicolare al v_t e rivolta verso il centro della circonferenza.

$$a_c = \frac{\Delta v}{T} = \frac{2\pi\omega}{T} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} = \omega v$$

Δv: variazione di velocità
T: periodo del moto
ω: velocità angolare
r: raggio della circonferenza

Moto Armonico

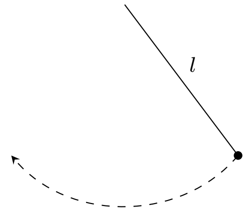
Il moto armonico è periodico, ovvero posizione, velocità e accelerazione si ripetono a intervalli regolari. Un esempio chiaro di moto armonico è il pendolo.
Molte delle formule del moto armonico sono ricavabili dal moto circolare.

$$x = r \sin \omega t$$
$$\vec{a} = -\omega^2 \vec{x}$$

r: raggio della circonferenza
ω: velocità angolare
x: posizione dell'oggetto
α: accelerazion angolare

Moto di un pendolo

Galileo scoprì che il periodo di un pendolo non dipende né dalla massa né dall'angolo da cui viene lasciato cadere.



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

l: lunghezza
g: $9.81\,\mathrm{m/s^2}$

Moto Circolare Uniformemente Accelerato

È un moto circolare avente accelerazione costante in modulo.

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$a_t = \alpha r$$

θ: posizione angolare
ω: velocità angolare
r: raggio della circonferenza
t: tempo
a_t: accelerazione tangenziale
α: accelerazione angolare

Dinamica

La dinamica è la branca della fisica che studia il moto dei corpi servendosi delle forze che ne sono responsabili. Isaac Newton ha enunciato i principi della dinamica e in suo onore la forza é misurata in Newton (N).
Per gli esercizi si vada a pagina 34.

Secondo Principio della Dinamica

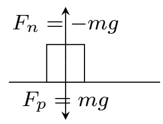
Una forza è una grandezza vettoriale che porta una modificazione alla velocità del corpo.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

F: forza applicata
m: massa del corpo
a: accelerazione

Se due corpi interagiscono tra loro, si sviluppano due forze, dette comunemente azione e reazione: sono uguali in modulo e direzione, ma opposte in verso.
Un corpo è in equilibrio quando la somma delle forze è 0, $\sum F_y = 0 \wedge \sum F_x = 0$.
Le forze si dividono in *conservative* e *dissipative*. Quando agisce una forza conservativa l'energia si mantiene, quando una dissipativa si perde energia.

Perché un corpo su un tavolo piano sta in equilibrio?



Perché è presente la forza normale che ha verso opposto alla forza premente ma direzione e modulo uguale.

Attrito

Ci sono vari tipi di attrito: *statico*, *dinamico* e *volvente* ma tutti si basano sullo stessa idea: moltiplicare il coefficiente di attrito tra le superfici per la forza premente. Il coefficiente di attrito rappresenta il termine di proporzionalità tra la forza di attrito e la forza normale con la quale una superficie agisce su un'altra superficie. Il coefficiente di attrito è una proprietà che caratterizza entrambe le superfici, non è una caratteristica di una singola superficie o di un singolo materiale.

$$F_s \leq \mu_s F_p \quad \text{(corpo fermo)}$$

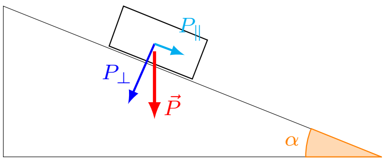
$$F_d = \mu_d F_p \quad \text{(corpo in movimento)}$$

$$F_v = \mu_v F_p \quad \text{(corpo rotante)}$$

F_p: forza premente

Piano Inclinato

In un piano inclinato la forza peso fa andare in basso il copo se $P_{\parallel} > \mu_s \cdot P_{\perp}$.



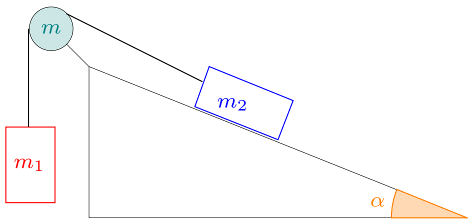
$$P_{\perp} = P \cos \alpha$$

$$P_{\parallel} = m \cdot a_x = P \sin \alpha$$

$$a_x = g \sin \alpha$$

g: $9.81\,\mathrm{m/s^2}$
m: massa del corpo
a_x: accelerazione sul piano inclinato
$\vec{P}$: vettore della forza peso. Si noti che P è il suo modulo
α: alzo del piano

Funi e carrucole



$$a = \frac{m_1 g - m_2 g \sin \alpha}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}$$

Si noti che questa formula è particolare per questo caso. Si noti anche che $\frac{m}{2}$ è da aggiungere solo se la massa della carrucola non è trascurabile.
Per una formula più generale si usi

$$a = \frac{\sum \vec{F}}{\sum m}$$

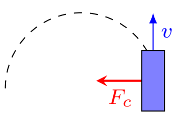
Per gli esercizi relativi a queste tre sottosezioni, si vada a pagina 34.

Forza centripeta e centrifuga

Una corpo che si muove di moto circolare uniforme ha un accelerazione centripeta a_c, la forza centripeta perciò è:

$$F_c = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

v: velocita del corpo
r: distanza tra il corpo e il centro della circonferenza



Una macchina dunque in curva non uscirà di strada se

$$m \cdot \frac{v^2}{r} \leq \mu_s \cdot F_p$$

μ_s: attrito statico
F_p: forza premente

La "forza centrifuga" è invece solo una forza apparente che sembra esistere nel sistema di riferimento non inerziale del corpo in movimento che ha modulo opposto alla forza centripeta.
I sistemi possono essere essere analizzati come sistemi inerziali in cui

$$\sum \text{Forze} = F_{\text{centripeta}}$$

o sistemi non-inerziali in cui

$$\sum \text{Forze} = 0$$

e in cui la $F_{\text{centrifuga}}$ è una delle forze.

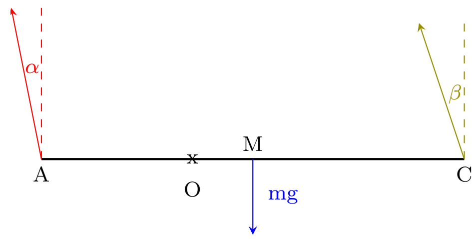
Momento

Un corpo rigido è in equilibrio se $\sum M_o = 0$.
Il momento(M_0) è l'efficacia di una forza nel far ruotare un corpo intorno ad un punto ed è definito come

$$M = Fd\cos(\alpha)$$

F: forza
d: distanza dal punto fulcro O

Una forza è definita negativa se fa ruotare in senso orario il corpo, positiva se lo fa ruotare in senso antiorario.
Prendiamo per esempio una leva



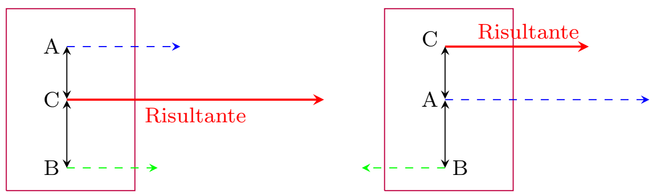
in cui per esserci equilibrio $\sum M_o = 0$ dunque

$$-F_A AO \cos \alpha - mgMO + F_C CO \cos \beta = 0$$

Va notato che spesso il peso della leva viene trascurato e la formula di conseguenza per l'equilibrio è

$$\vec{F_A} AO = \vec{F_C} CO$$

La risultante di due forze su un corpo ha intensità pari alla somma delle due forze e il verso della forza con intensità maggiore



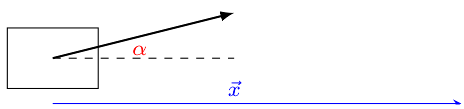
e si dimostra che

$$AC : CB = F_B : F_A$$

Lavoro, Energia e Potenza

Il *lavoro* è una grandezza scalare ed il prodotto della forza applicata sul corpo e lo spostamento del corpo.
L'unita di misura del *lavoro* è il Joule(J).

$$\vec{L} = \vec{F} \cdot \vec{x} = F \cdot x \cdot \cos \alpha$$



La *potenza* invece misura quanto rapidamente viene compiuto lavoro, ha come unita di misura il Watt(W).

$$P = \frac{L}{t}$$

t: tempo

La potenza di una forza F che agisce su un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme è

$$P = F \cdot v$$

v: velocità del corpo

L'*enegia cinetica* è l'energia di un corpo in movimento.

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

m: massa del corpo
v: velocità del corpo

Inoltre la differenza di Energia cinetica è :

$$\Delta E_{cinetica} = Lavoro$$

L'*Energia potenziale* è l'energia che un corpo (sulla terra) acquisisce allontanandosi dalla superficie. L'energia potenziale indica quanta energia un corpo (se fermo) al massimo può generare.

$$U = mgh$$

m: massa del corpo
h: distanza dalla superficie terrestre

Si può dimostrare che

$$-\Delta U = L$$

è dunque l'unita di misura dell'energia è il Joule.

L'energia meccanica E è definita come

$$E = E_{cinetica} + E_{potenziale}$$

è stato dimostrato sperimentalmente che l'energia meccanica si conserva (quando è assente l'attrito)

$$U_1 + E_{cinetica1} = U_2 + E_{cinetica2}$$

Negli esercizi sarà particolarmente utile in quanto permette di trovare la velocità o l'altezza di un corpo con calcoli semplici.

Legge di Hooke e energia elastica

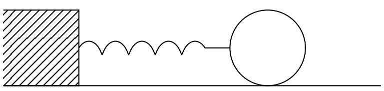
Una molla compressa o allungata esercita una forza elastica e possiede energia potenziale. È da notare che i due estremi di una molla esercitano forze uguali ma contrarie.

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

$$U_e = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

k: costante elastica della molla
$\vec{x}$: spostamento dalla direzione di riposo

Oscillatore armonico



Quando questa massa si muove di una distanza x_0 e poi viene rilasciata, tenderà a tornare alla posizione originale. Posto $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ si avrà che

$$x = x_0 \cos \omega t$$

dove k è la costante della molla.

Quantità di moto e teorema dell'impulso

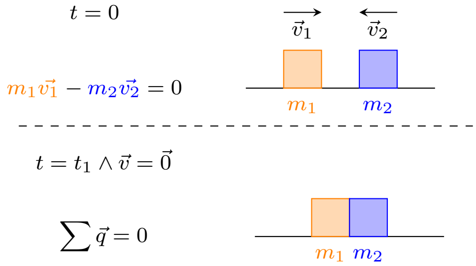
$$\vec{q} = m\vec{v}$$
$$\vec{I} = \Delta\vec{q} = \vec{F}\Delta t$$

m: massa del corpo
$\vec{v}$: velocità del corpo
$\vec{F}$: forza applicata sul corpo
t: tempo

La quantità di moto si conserva sempre nel tempo.Quando ad esempio un vaso cade e si rompe, la somma delle quantità di moto di tutti i frammenti deve essere pari a quella del vaso all'impatto; questo spiega perchè i frammenti più leggeri sono quelli che si allontanano di più.
La quantità di moto indica la forza necessaria a fermare un oggetto in movimento in un secondo.

Si ricordi che

$$\sum \vec{q} = \text{ costante nel tempo}$$



Per gli esercizi si vada a pagina 36.

Urti

Si distinguono 2 tipi di urti: *elastici* e *anaelastici*.

Negli urti *elastici* i due corpi collidono ma rimangono separati. Ad esempio due palle da biliardo.
Negli urti *anaelastici* i due corpi che collidono rimangono attaccati l'uno all'altro, come nel caso di un pesce che ne mangia un altro o di un proiettile che colpisce un sacco.
Per gli esercizi si vada a pagina 36.

Elastico

$$v_{1_f} = \frac{v_{1_i}(m_1 - m_2) + 2m_2 v_{2_i}}{m_1 + m_2}$$
$$v_{2_f} = \frac{2m_1 v_{1_i} + v_{2_i}(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}$$

$_1$: relativo al primo corpo
$_2$: relativo al secondo corpo

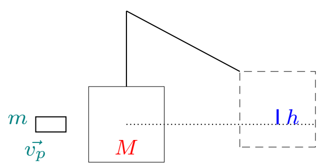
Anaelastico

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = v(m_1 + m_2)$$

$_1$: relativo al primo corpo
$_2$: relativo al secondo corpo
v: velocità finale

Proiettile contro un corpo

Se un proiettile colpisce un sacco e rimane bloccato, il baricentro del sacco si alzerà di un'altezza h.

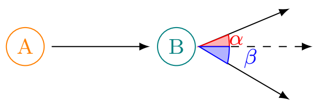


$$h = \frac{{v_p}^2 m^2}{2g\,(M + m)^2}$$

v_p: velocità del proiettile
h: altezza finale del sacco

Urti obliqui

Vi è un urto obliquo quando due corpi collidono e si muovono in direzioni diverse.



$$\vec{q}\begin{cases} m_A v_a \sin\alpha - m_B v_b \sin\beta = v_0 m \\ m_A v_a \cos -\alpha - m_B v_b \cos -\beta = 0 \end{cases}$$

v_0: velocità iniziale del corpo A
v_A: velocità finale del corpo A
v_B: velocità finale del corpo B

Centro di Massa

Il centro di massa è un punto in un corpo. In quel punto si potrebbe concentrare tutta la massa del corpo per renderlo puntiforme.
Le formule riportate possono valere per tutte le dimensioni, qui però verrà presa in considerazione solo una per semplicità.

$$x = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i} \quad \vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i \vec{v_i}}{\sum_{i=0}^{n} m_i} \quad \vec{a}_{CM} = \frac{\sum_{i=0}^{n} m_i \vec{a_i}}{\sum_{i=0}^{n} m_i}$$

Per gli esercizi si vada a pagina 36.

Momento Angolare e Momento d'Inerzia

Il momento angolare ($\vec{L}$) è la quantità di moto per le rotazioni.
Al concetto di *momento angolare* si accompagna anche quello di **momento di inerzia**. L'inerzia (I) indica quanto un corpo si oppone alla rotazione.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{q}$$

Da qui si nota la relazione stretta con la Quantità di moto.

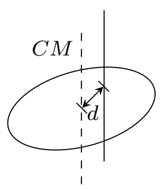
$$L = mr^2\omega = I\omega$$

$$I = mr^2 = \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2$$

m: massa del corpo
ω: velocità angolare
q: quantità di moto

Se un corpo ruota rispetto ad un asse parallelo a quello passante per il centro di massa e la distanza tra i due assi è d e la massa totale m, è

$$I = I_{CM} + md^2$$



In aggiunta al momento angolare e al momento di inerzia, c'è la **forza angolare** ($\vec{M}$). Molto semplicemente è definita

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}$$

$$\Delta L = M\Delta t$$

α identifica l'accelerazione angolare.

Teorema di König

Il teorema di König descrive l'energia cinetica in un moto roto-traslato. Ad esempio una ruota che si muove sull'asfalto (ruota sul suo asse e trasla sull'asfalto).

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2$$

I: inerzia
ω: velocità angolare
v_{CM}: velocità del centro di massa

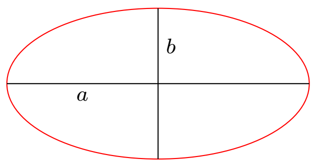
Per gli esercizi si vada a pagina 37.

Tabella riassuntiva e di confronto

Traslatorio	Rotatorio
$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$
$F = ma$	$M = I\alpha$
$q = mv$	$L = I\omega$
$\Delta q = F\Delta t$	$\Delta L = M\Delta t$
$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	$E_c = \frac{1}{2}I\omega^2$

Gravitazione

La gravitazione si occupa di studiare le forze che intercorrono tra corpi celesti.
Tutti i pianeti del sistema solare si muovo su orbite ellittiche (come dice la prima legge di Keplero) a e b sono i semiassi rispettivamente maggiore e minore.



Un pianeta rimane in orbita se la foza di gravita (che attrae verso l'altro corpo/pianeta) ha la stessa intensità della forza centrifuga.
Per gli esercizi si vada a pagina 37.

Seconda legge di Keplero

Il raggio vettore tra la Terra e il Sole spazia aree uguali in tempi uguali.

Terza legge di Keplero

$$\frac{a^3}{T^2} = k \left(k = \frac{GM}{4\pi^2}\right)$$

T: periodo di rivoluzione
a: lunghezza del semiasse maggiore
M: massa del pianeta
G: $6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

Legge di Gravitazione Universale

La forza è attrattiva ed è diretta lungo la retta che congiunge i centri delle due corpi.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G: $6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$
m: massa di un pianeta/corpo
r: distanza tra i corpi

Accelerazione Gravitazionale su un pianeta

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

G: $6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$
M: massa del pianeta
R: raggio del pianeta

Energia potenziale gravitazionale

Si ricordi che $-\Delta U = L$.

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

G: $6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$
m: massa dei pianeti
r: distanza dei pianeti

Velocità di un satellite

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

G: $6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$
M: massa del pianeta
R: $r + h$: raggio del pianeta più distanza dalla superficie

Velocità di fuga

La velocità di fuga è la velocità che un corpo deve avere per poter uscire dall'orbita del pianeta.

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

G: $6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$
M: massa del pianeta
R: raggio del pianeta

Fluidostatica

L'idrostatica studia i fluidi in stato di equilibrio. Studia anche le pressioni.

Legge di Stevino

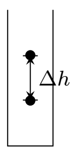
La legge di Stevino permette di trovare la pressione ad una data profondità.

$$p = \delta g h$$

δ: densità del liquido
g: $9.81\,\mathrm{m/s^2}$
h: profondità

Se si trova la pressione tra due punti

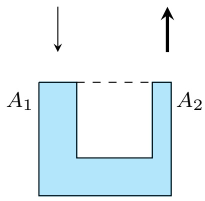
$$p_2 = p_1 + \delta g \Delta h$$



δ: densità del liquido
g: $9.81\,\mathrm{m/s^2}$
h: profondità

Si ricordi che $\text{Densità} = \dfrac{\text{Massa}}{\text{Volume}}$.

Torchio idraulico

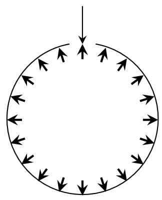


Il torchio idraulico permette partendo da una forza applicata su un pistone (di area A_1) di ottenere una forza più grande su un altro pistone (di area A_2).

$$p = \frac{F}{A} \qquad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

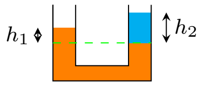
Principio di Pascal

Il principio di Pascal afferma che in un liquido una pressione che venga esercitata in un punto viene trasmessa a ogni suo altro punto e in ogni sua direzione.



Manometro ad U

Se un tubo viene riempito con due liquidi di densità diversa, l'altezza misurata a destra e sinistra sarà diversa.



$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

Si presti attenzione alla densità corretta e all'h corretto.

Principio di Archimede

Il principio di Archimede permette di trovare la forza di galleggiamento.
Il principio di Archimede stabilisce che un corpo immerso in un liquido o in un gas (come l'aria) riceve una spinta dal basso verso l'alto.

$$F_g = \delta_f V g$$

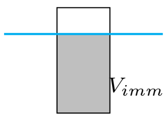
Al principio di Archimede è collegata la condizione di equilibrio di un corpo in un fluido:

'Un corpo è in equilibrio in un fluido se la sua forza peso compensa la spinta di Archimede, cioè se il suo peso è uguale al peso del fluido spostato.'

Volume della parte immersa

$$V_{imm} = V_{tot}\frac{\delta_s}{\delta_f}$$

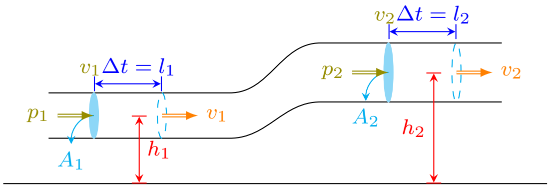
δ_s: densità del corpo
δ_f: densità del fluido
V_{tot}: volume del corpo



 "Fatti non foste a viver come bruti ma per seguir virtute e canoscenza" - Dante Alighieri, "Inferno"

Fluidodinamica

L'idrodinamica studia i movimenti dei liquidi e la loro relazione con il contenitore.
Il seguete disegno verrà utilizzato per definire le formule e far capire il significato delle lettere.
Per gli esercizi, si vada a pagina 38.



Equazione di Bernoulli

Quest'equazione descrive un qualsiasi moto tra due punti di un qualsiasi fluido.

$$p_1 + \delta g h_1 + \frac{1}{2}\delta {v_1}^2 = p_2 + \delta g h_2 + \frac{1}{2}\delta {v_2}^2$$

g: $9.81\,\mathrm{m/s^2}$
δ: densità del fluido

Attrito nei fluidi

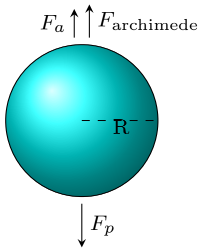
Un corpo che si muove in un fluido è rallentato da una forza di attrito. In particolare per una sfera è pari a

$$F_a = \eta 6\pi r v$$

η: viscosità
r: raggio
v: velocità

Tutti i corpi sferici che cadono hanno una velocità limite (in cui l'accelerazione è 0) che si può ricavare risolvendo

$$\eta 6\pi r v_{\text{lim}} + \delta_{\text{fluido}} V_{\text{corpo}} g - mg = 0$$



Portata

La portata descrive quanto fluido attraversa una sezione nel tempo.

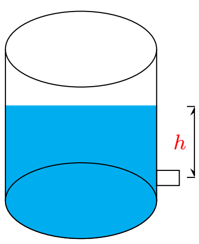
$$\text{Portata} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

A: area della sezione
v: velocità del fluido
V: volume

Equazione di Torricelli

Si usi questa formula quando si deve trovare a che velocità esce un liquido da un contenitore.



$$v = \sqrt{2gh}$$

g: $9.81\,\mathrm{m/s^2}$
h: altezza della colonna di fluido premente sul punto d'uscita

Termodinamica

La termodinamica si occupa di studiare come un sistema si modifica e interagisce con gli altri alla variazione di *temperatura*, *pressione* e *volume*.
Si tenga conto che t rappresenta la temperatura in ℃ e T in K. Si ricordi che

$$C = K + 273.15$$

Per gli esercizi si vada a pagina 39.

Dilatazione

I solidi, a parte rarissime eccezioni, quando riscaldati si dilatano, quando raffreddati si contraggono.
Ci sono 3 tipi di dilatazione: lineare (che studia la dilatazione su una dimensione), superficiale (due dimensioni) e volumetrica (tre dimensioni).

Lineare

$$l = l_0\,(1 + \lambda\Delta t)$$

$$\Delta l = l_0 \lambda \Delta t$$

λ: coefficiente di dilatazione lineare
l_0: lunghezza iniziale
Δl: variazione di lunghezza

Superficiale

$$S = S_0\,(1 + \beta\Delta t)$$

$$\Delta S = S_0 \beta \Delta t$$

β: 2λ, coefficiente di dilatazione superficiale
S_0: superficie iniziale
ΔS: variazione di superficie

Volumetrica

$$V = V_0\,(1 + \alpha\Delta t)$$

$$\Delta V = V_0 \alpha \Delta t$$

α: 3λ, coefficiente di dilatazione volumetrica
V_0: volume iniziale
ΔV: variazione di volume

Equazione di stato dei gas perfetti

Questa è l'equazione più generale dei gas.

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Questa proprietà è indispensabile in alcuni esercizi in quanto mette in relazione due situazioni e permette di trovare tutte le caratteristiche.

Prima legge di Gay-Lussac

Quando $p =$ costante, vi è una trasformazione isobara.

$$V = \frac{V_0}{T_0} T$$

Seconda legge di Gay-Lussac

Quando $V =$ costante, vi è una trasformazione isocora.

$$p = \frac{p_0}{T_0} T$$

Legge di Boyle-Mariotte

Quando $T =$ costante, vi è una trasformazione isoterma.

$$pV = \text{costante}$$

Moli e gas perfetti

Equazione di stato dei gas perfetti

Attraverso lo studio sperimentale, Amedeo Avogadro notò una relazione tra pressione, temperatura e volume assieme al numero di moli che riassunse in

$$pV = nRT$$

R: $0.0821\,\mathrm{l \cdot atm/n \cdot K}$, $8.31\,\mathrm{J/K \cdot mol}$
n: numero di moli

1 mol a 273 K, a pressione ambiente di ogni gas occupa 22.4 L.

Numero di molecole

$$N = n \cdot N_A$$

n: numero di moli
N_A: $6.02 \cdot 10^{23}$

Massa molare

$$M = \frac{m}{n}$$

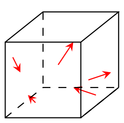
m: massa
n: numero di moli

Teoria Cinetico-Molecolare

La teoria cinetico-molecolare descrive i movimenti delle molecole all'interno di un gas.
Si trova molto spesso in questa sottosezione e nelle successive l, ovvero il grado di libertà del corpo, ovvero la libertà di movimento di una molecola

l	Tipo di Gas
3	Monoatomico
5	Biatomico

Queste formule mettono in relazione il macroscopico (forza e pressione) e microscopico (forza e pressione di un dato numero di molecole) in un contenitore di gas perfetto.



Forza su una parete

$$F_{\text{parete}} = \frac{N}{3}\frac{m}{l}\langle v\rangle^2$$

N: numero di molecole
$\langle v\rangle$: velocità media

Pressione su una parete

La pressione misurata è dovuta dalla spinta delle molecole

$$p_{\text{parete}} = \frac{N}{3}\frac{m}{V}\langle v\rangle^2 = \frac{2}{3}\frac{NE_c}{V}$$

N: numero di molecole
V: volume
$\langle v\rangle$: velocità media
E_c: energia cinetica

Energia cinetica di una molecola

$$E_c = \frac{l}{2}\frac{R}{N}T = \frac{l}{2}k_B T$$

R: $0.0821\,\mathrm{l \cdot atm/n \cdot K}$ $8.31\,\mathrm{J/K \cdot mol}$
k_B: $1.318 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
T: temperatura in Kelvin

Si può quindi capire che più un corpo è caldo, maggiore è la quantità di energia cinetica che possiede, ovvero possiede molecole ad una velocità media sempre più alta.

Energia interna

In gas perfetti, l'energia potenziale tra le molecole è 0.

$$U = \sum_{i=0}^{N} E_{c_i} + \sum_{i=0}^{N} U_{g_i} = N \cdot E_c = \frac{l}{2}nRT$$

U_g: energia potenziale gravitazionale, se è un gas perfetto vale 0
R: $0.0821\,\mathrm{l \cdot atm/n \cdot K}$ $8.31\,\mathrm{J/K \cdot mol}$
n: nummero di moli
N: numero di molecole

Calorimetria

Il calore è una forma di energia (quindi ha come unità di misura il Joule). Più precisamente è la somma dell'energia potenziale e cinetica di ogni molecola.

Capacità termica

Indica quanto un corpo assorbe calore.

$$C = \frac{Q}{\Delta T}$$

Q: quantità di calore assorbito dal corpo
ΔT: variazione di temperatura

Calore specifico

Un corpo con un calore specifico alto ha bisogno di una grande quantità di calore per avere un piccolo cambiamento di temperatura. Si pensi all'acqua ($c = 4180\,\mathrm{J/Kg \cdot K}$) e l'aria ($c = 1000\,\mathrm{J/Kg \cdot K}$).

$$c = \frac{C}{m}$$

C: capacità termica
m: masa del corpo

Si scopre inoltre che il calore specifico nei gas in una trasformazione isocora vale

$$c_V = \frac{l}{2}R$$

e in un'isobara invece

$$c_p = \frac{l+2}{2}R$$

Equazione di Meyer

$$c_p - c_V = R$$

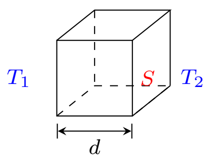
c: calore specifico

Quantità di calore

$$Q = C\Delta t = mc\Delta T$$

C: capacità termica

Conduzione termica



Se un corpo presenta una differenza di temperatura tra le sue pareti ci sarà uno scambio di calore Q

$$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{\mu S}{d \Delta T}$$

μ: conducibilità termica
S: superficie
d: spessore del corpo
ΔT: variazione di temperatura

Irraggiamento

L'irraggiamento è uno dei modi in cui il calore si propaga, dopo la conduzione e la convezione. L'irraggiamento consiste nell'emissione di onde elettomagnetiche.

$$\frac{Q}{t} = P = ezST^4$$

z: $5.67 \cdot 10^{-8} \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$
e: emittanza
S: superficie
T: temperatura

Il corpo nero è quello che ha $e = 1$.

Temperatura di equilibrio

Due sistemi sono in equilibrio termico quando hanno la stessa temperatura
La temperatura di equilibrio è la temperatura finale che raggiungono due sistemi a contatto fra di loro. Quando non sono in equilibrio, ci sarà uno scambio di calore.

$$t_e = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_2 + m_2 c_2}$$

$_1$: relativo al primo corpo
$_2$: relativo al secondo corpo

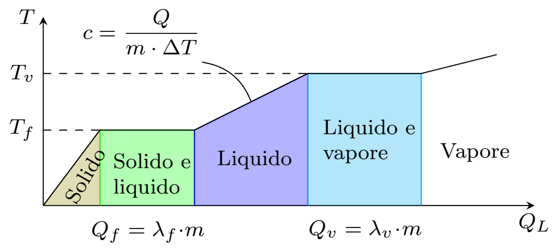
Calore latente

Il calore latente è la quantità di calore scambiata nel passaggio di fase di un corpo. Ogni passaggio necessita di energia diversa e quindi di coefficienti diversi.

$$Q_L = c_L m$$

c_L: calore latente, diverso dal *calore specifico*

Passaggi di stato



Questo grafico rappresenta indicantivamente i passaggi di stato. Si può leggere sia da sinistra che da destra, ovvero che dal grafico si può capire che in modulo, l'energia necessaria per fare solidificare il corpo, è pari a quella necessaria per farlo liquefare.

Conversione da J a cal

Essendo entrambi unità di misura dell'energia, è possibile convertire una dall'altra.

$$1\,\mathrm{cal} = 4.184\,\mathrm{J}$$

Termodinamica (Lavoro)

$$Q = L + \Delta U$$

Q: quantità di calore
L: lavoro
ΔU: variazione di energia interna

Tabella per i segni di Q e L

La seguente tabella riassume in breve i segni che la quantità di calore e il lavoro devono avere.

Segno	Q	L
Positivo	Il sistema acquista energia dall'esterno mediante uno scambio di calore	Il sistema compie un lavoro positivo (durante un'espansione) e cede energia
Negativo	Il sistema cede energia all'esterno mediante uno scambio di calore	Il sistema compie un lavoro negativo (durante una compressione) e acquista energia

Trasformazione isobara

Un'isobara è una trasforamazione che mantiene costante la pressione.

$$L = p \Delta V$$

$$Q = c_p n R \Delta T = \frac{2 + l}{2} n R \Delta T$$

$$\Delta U = \frac{l}{2} n R \Delta T$$

R: $0.0821\,\mathrm{l \cdot atm/n \cdot K}$ $8.31\,\mathrm{J/K \cdot mol}$
c_p: è il calore specifico di un corpo sottoposto a una trasformazione isobara

Trasformazione isoterma

Un'isoterma è una trasformazione che mantiene costante la temperatura.

$$\Delta U = 0$$
$$L = Q = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

R: $0.0821\,\mathrm{l \cdot atm/n \cdot K}$ $8.31\,\mathrm{J/K \cdot mol}$

Trasformazione isocora

Un'isocora è una trasformazione che mantiene costante il volume.

$$L = 0$$

$$Q = \Delta U = c_V n R \Delta T = \frac{l}{2} n R \Delta T$$

R: $0.0821\,\mathrm{l \cdot atm/n \cdot K}$ $8.31\,\mathrm{J/K \cdot mol}$
c_V: è il calore specifico di un corpo sottoposto a una trasformazione isocora

Trasformazione adiabatica

Un'adiabatica è una trasformazione che non cede calore all'esterno quindi $Q = 0$ e

$$L = -\Delta U$$

Queste seguenti, sono definite **Equazioni di Poisson**

$$pV^{\gamma} = \text{costante}$$

$$V_1^{\gamma-1}T_1 = V_2^{\gamma-1}T_2$$

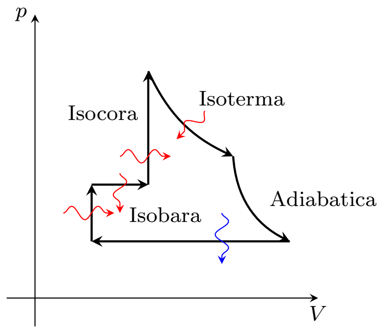
$$p_1^{1-\gamma}T_1^{\gamma} = p_2^{1-\gamma}T_2^{\gamma}$$

γ: rapporto tra c_p e c_V

La seguente tabella riassume i valori di γ e calore specifico a pressione e volume costante:

Tipo di gas	c_p	c_V	$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$
Monoatomico	$\frac{5}{2}R$	$\frac{3}{2}R$	$1.\bar{6}$
Biatomico	$\frac{7}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	1.4

Lavoro di un ciclo



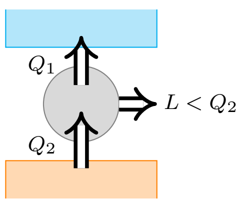
In rosso è se $Q > 0$, in blu se $Q < 0$.

$$L = \sum_{i=0}^{n} Q_i$$

Il lavoro è anche pari all'area occpuata dal ciclo ($\mathrm{N/m^2 m^3}$).
Si noti anche che in generale se il ciclo "va" in senso orario, il lavoro sarà positivo, negativo altrimenti.

Macchina di Carnot

Una macchina termica è un dispositivo che efettua trasformazioni cicliche (ad esempio un motore di un'automobile).
La macchina di Carnot è la più efficiente di tutte che lavora tra le temperature T_1 e T_2.



$$\eta = 1 - \frac{|Q_1|}{|Q_2|} = |\frac{L}{Q_2}|$$

$$\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

T_1: sorgente fredda
T_2: sorgente calda

La prima formula definisce il rendimento (η) di una qualsiasi macchina termica, la seconda solo per una macchina di Carnot. Q_1 è il calore ceduto dalla sorgente fredda, Q_2 è quello fornito dalla sorgente calda
La macchina di Carnot dimostra che non può esserci una macchina con efficienza 1 in quanto non si può avere $T_1 = 0\,\mathrm{K}$.

La potenza in una macchina di Carnot è

$$P = \frac{Q_2\eta}{t}$$

P: potenza
η: rendimento

Entropia

Per definire l'entropia, definiamo la **disuguaglianza di Clausius** che ci aiuterà a capire la definizione di entropia.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i} \leq 0$$

se il ciclo è reversibile si ha questa forma

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i}\right)_{\text{rev}} = 0$$

L'**entropia** è in definitiva una formulazione più generale del secondo principio della termodinamica che sia appropriato per ogni trasformazione. L'entropia è una funzione di stato.
Per uno stato C e uno stato di riferimento R per cui $S(R) = 0\,\mathrm{J/K}$, l'entropia è così definita:

$$S(C) = S(C) - S(R) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i}\right)_{\substack{R\to C \\ \text{rev}}}$$

Per gli esercizi, si vada a pagina 40.

Proprietà dell'entropia

L'entropia è una grandezza estensiva, ovvero che preso un sistema Ω che sia l'unione di due sottositemi indipendenti Ω_1 e Ω_2 ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$), la sua entropia è pari a

$$S(C) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i}\right)_{\substack{R\to C \\ \text{rev}}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i}\right)^{\Omega_1}_{\substack{R\to C \\ \text{rev}}} + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta Q_i}{T_i}\right)^{\Omega_2}_{\substack{R\to C \\ \text{rev}}}$$

Entropia di un sistema isolato

In un sistema isolato l'entropia ha una variazione pari a **zero** solo se la trasformazione è *reversibile*, **maggiore di zero** altrimenti.

Entropia dell'universo

L'entropia dell'universo è sempre in crescita in quanto avvengono trasformazioni irreversibili senza fine (come ad esempio un'esplosione).

Entropia di un sistema non isolato

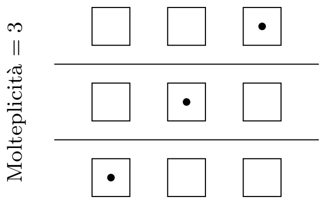
Se una trasformazione reale provoca in un un sistema una diminuzione di entropia pari a $|\Delta S|$, nel resto dell'universo è maggiore di $|\Delta S|$.

Macrostati e microstati

Un *microstato* è una precisa combinazione di elementi microscopici, un *macrostato* è descritto dalle variabili macroscopiche che ne descrivono le proprietà.
Ad esempio: un macrostato per un sistema termodinamico è descritto da almeno due delle tipiche variabili (pressione, volume e temperatura). Un microstato invece è lo stato di ogni molecola di gas nel sistema.
Un microstato corrisponde ad un solo macrostato, un macrostato può essere descritto da più macrostati. Si noti anche che più un macrostato è disordinato, più è probabile che si realizzi spontaneamente.

Molteplicità di un macrostato

Sia A un macrostato. Si definisce $W(A)$ come **molteplicità**, ovvero il numero di microstati distinti che corrispondono ad A.



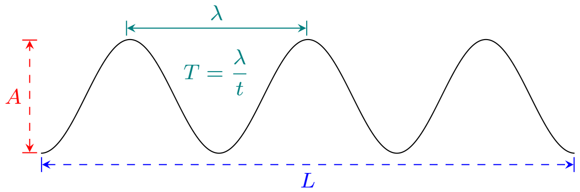
Equazione di Boltzman

$$S(A) = k_B \ln W(A)$$

k_B: $1.318 \cdot 10^{-23}$ J/K

Onde

Questa sezione si dedica alle formule ed esperimenti relativi allo studio del moto ondoso dei corpi. Luci e suoni sono esempi di onde e oscillazioni, uno dei fenomeni più diffusi in natura. Le onde si propagano nello spazio e permettono di trasportare anche enormi quantità di energia, ma non massa.



Il grafico qua sopra è il grafico della funzione $\cos x$ che rappresenta un possibile moto di un' onda. Sono anche rappresentate le 3 caratteristiche principali: l'*ampiezza* (A), la *lunghezza* (L) e la *lunghezza d'onda* (λ).

Per gli esercizi, si vada a pagina 41.

Velocità di propagazione

Di seguito vengono riportate formule sperimentali da usare ad esempio con una corda che oscilla.

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{m}{L}$$

T: tensione della corda
μ: densità lineare della corda
m: massa della corda
L: lunghezza della corda

Relazione fondamentale

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Questa formula mette in relazione la velocità, il periodo, la lunghezza d'onda e la frequenza di oscillazione.

Equazioni dell'onda

Esistono più equazioni dell'onda, dalla più generale alle due particolari.

Equazione con x fissato

Questa formula definisce l'equazione dell'onda in un punto fisso.

$$f(\bar{x}, t) = A \cos \frac{2\pi}{T} t$$

Equazione con t fissato

Questa formula definisce l'equazione dell'onda ad un particolare istante.

$$f(x, \bar{t}) = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x$$

Equazione generale del'onda

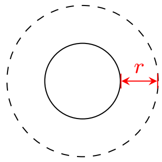
Queste sono le formule più generali dell'equazione dell'onda.

$$f(x,t) = A \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \mp vt)\right] = A \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right)$$

La cosa più importante da notare è il segno. Se l'onda si propaga a *destra* si usi $-$, se verso *sinistra* si usi $+$.

Equazione di Huygens

L'equazione di Huygens definisce il rapporto tra il raggio di propagazione di un onda e il tempo. La seguente figura farà capire meglio.



$$r = \Delta t \cdot v$$

v: velocità di propagazione

Luce

La luce è un'onda (precisamente è un'onda elettromagnetica). La luce trasporta energia e per determinare l'intensità di una luce ad una certa distanza si definisce l'irradiamento

$$I = \frac{E}{\Delta t S} = \frac{P}{S}$$

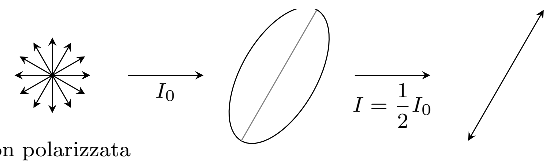
E: energia della sorgente
S: superficie investita dalla luce ($4\pi r^2$)
P: potenza

Polarizzazione

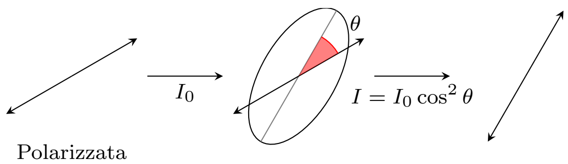
Polarizzare un'onda significa "selezionare" una parte e bloccarne un'altra.

Legge di Malus

I polaroid sono dei filtri polarizzatori, caratterizzati da un'asse di trasmissione.
La legge di Malus definisce l'intensità dell'onda dopo il polaroid a seconda se la sorgente è polarizzata o meno.



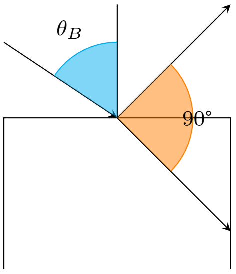
Queta vale se la sorgente di luce non è polarizzata, quindi una lampadina ad esempio.



θ: angolo tra l'asse di trasmissione e quello della luce polarizzata

Angolo di Brewster

Ogni raggio riflesso e rifratto è parzialmente polarizzato. L'angolo di Brewster è quel particolare angolo in cui la polarizzazione è massima ed è rappresentato dal seguente disegno.



Dato che gli indici di rifrazione sono diversi, possiamo scrivere per la relazione di Snell

$$n_1 \sin\theta_B = n_2 \sin\hat{r}$$

e vedendo che $\hat{r} = 90 - \theta_B$ e quindi

$$n_1 \sin\theta_B = n_2 \sin(90 - \theta_B) = \cos\theta_B$$

E quindi

$$\theta_B = \arctan\frac{n_2}{n_1}$$

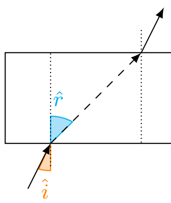
Rifrazione

Questa sezione si occuperà della luce rifratta/riflessa.
Per gli esercizi si vada a pagina 41.

In questa sezione è fondamentale l'*indice di rifrazione*.
Per calcolarlo si usi:

$$n_{2,1} = \frac{\sin\hat{i}}{\sin\hat{r}} = \frac{n_2}{n_1}$$

Qui introduciamo anche due simboli: $\hat{i}$ e $\hat{r}$. Il primo ($\hat{i}$) indica l'angolo di *incidenza* con il secondo mezzo e $\hat{r}$ l'angolo di rifrazione. Per capire meglio, si faccia riferimento alla seguente figura:

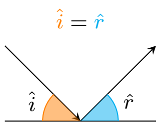


Si tenga cont che questa immagine si riferisce al fenomeno della *rifrazione* che ha queste caratteristiche:

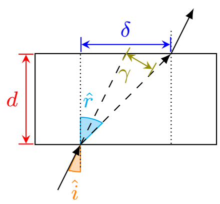
$$\frac{\sin\hat{i}}{\sin\hat{r}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c}{v_2}$$

Da notare che $\frac{c}{v_2}$ vale solo se la luce dal vuoto passa in un altro mezzo.

Riflessione



Scostamento del raggio



$$\delta = \frac{d\sin(\hat{i} - \hat{r})}{\cos\hat{r}}$$

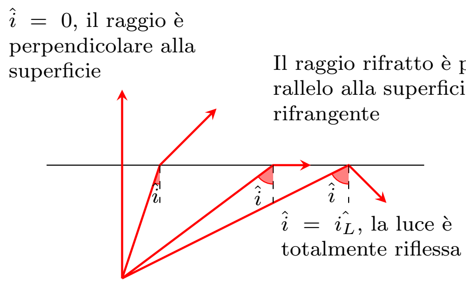
$$\gamma = d\tan\hat{r}$$

Angolo limite

L'angolo limite è quell'angolo che segna il passaggio da un fenomeno di rifrazione a uno di riflessione o viceversa.

$$\hat{a}_l = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$$

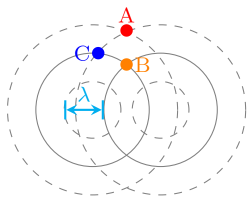
Immagine riassuntiva



Questa rappresentazione non è valida per gli specchi, in cui i raggi sono completamente riflessi.

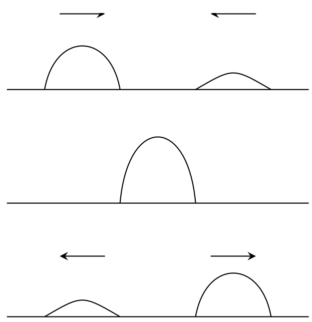
Interferenza

Il fenomeno dell'interferenza avviene quando due fonti distinte emettono onde e queste impattano fra loro. Il seguente disegno aiuterà a spiegare il fenomeno.
Per gli esercizi si vada a pagina 41.



In questa immagine sono stati segnati 3 punti. Nel punto A e nel punto B si ha un'interferenza **costruttiva** in quando due ampiezze uguali si incontrano.
Nel punto C si ha un'interferenza **distruttiva** in quando due ampiezze diverse si incontrano.

Principio di Sovrapposizione



$$y_{Tot} = y_1 + y_2$$

Interferenza Costruttiva

$$\left|\overline{PS}_1 - \overline{PS}_2\right| = k\lambda$$

$\overline{PS}$: distanza tra l'origine dell'onda e il punto P
k: $k \in \mathbb{Z}$ indica il numero dell'interferenza che interessa, ovvero il numero dell'onda

Interferenza Distruttiva

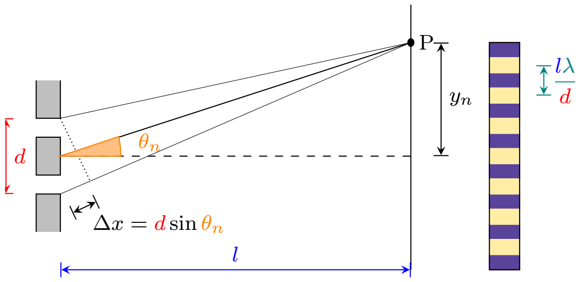
$$|\overline{PS}_1 - \overline{PS}_2| = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$\overline{PS}$: distanza tra l'origine dell'onda e il punto P
k: $k \in \mathbb{Z}$ indica il numero dell'interferenza che interessa, ovvero il numero dell'onda

Nei punti di interferenza distruttiva, sommandosi ampiezza massima e minima vi sarà assenza di turbolenza.

Esperienza di Young

Young studiava la luce. Il suo esperimento dimostra la natura ondulatoria della luce. Di seguito viene riportato un diagramma che rappresenta semplicemente la sua struttura.



Distruttiva

Costruttiva

La barra a destra fa vedere l'alternarsi di zone chiare e scure. Ciascuna di quelle zone è definita *frangia*.
Per gli esercizi si vada a pagina 42.

Secondo il principio di Huygens, ogni punto di un'onda è a sua volta sorgente di una. Ecco perché dai fori, si sprigiona un'onda perfettamente circolare.

Altezza dell'n-esima frangia

La seguente formula trova l'altezza di una qualsiasi frangia.

$$y_n = l \tan\theta_n$$

Le prossime due invece trovano l'n-esima frangia costruttiva ($_C$) o distruttiva ($_D$).

$$y_{n_C} = \frac{l \cdot n \cdot \lambda}{d}$$

$$y_{n_D} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{l\lambda}{d}$$

Angolo dell'n-esima frangia

Se la frangia è costruttiva

$$\sin\theta_n = n\frac{\lambda}{d}$$

Se è distruttiva

$$\sin\theta_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}$$

Differenza di percorso tra i due fori

$$\Delta x = d \sin\theta_n$$

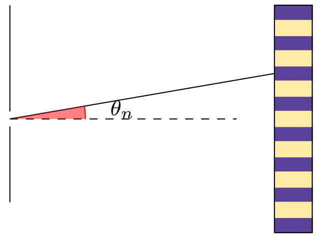
Se l'angolo è riferito ad una frangia costruttiva è

$$\Delta x = n\lambda$$

Se l'angolo è riferito ad una frangia distruttiva è

$$\Delta x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Diffrazione



Se al posto di due fori ce ne fosse solo uno la prima frangia scura si troverebbe a θ gradi dalla retta perpendicolare alle pareti

$$\theta = \arcsin\frac{n\lambda}{d}$$

λ: lunghezza d'onda
d: larghezza fenditura

Reticolo di diffrazione

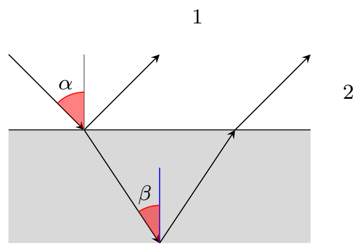
Se invece ci fossero molti fori distanziati in maniera regolare, gli angoli per cui si riscontrano frange chiare sono

$$\theta = \arcsin\frac{n\lambda}{d}$$

n: numero intero appartenente a $\mathbb{N}$
λ: lunghezza d'onda
d: distanza tra i fori

Interferenza su lamine sottili

La luce che incide su lamine sottili è in parte rifratta e in parte riflessa



I raggi 1 e 2 interagendo daranno luogo ad interferenza costruttiva se

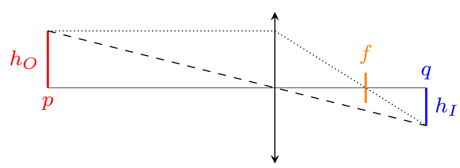
$$D = \frac{\lambda}{2n}\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

D: spessore
λ: lunghezza d'onda nel vuoto n: indice di rifrazione m: numero intero appartenente a $\mathbb{N}$

Lenti e Specchi

L'obiettivo fondamentale dell'ottica è mettere a fuoco degli oggetti. Generalmente si riscontrano due problemi di vista: *miopia* (difficoltà a mettere a fuoco lunghe distanze) e *ipermetropia* (o presbiopia che è la difficoltà ad identificare oggetti vicini).
Per gli esercizi si vada a pagina 43.

Il disegno sotto aiuterà a capire i fondamenti dell'ottica



Per comprendere chiaramente il funzionamento di una lente è utile disegnare:

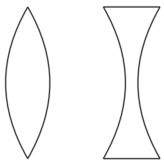
- Una linea perpendicolare alla lente che viene deviata in modo da passare per il fuoco;
- Una linea passante per il centro della lente che continuerà il suo percorso senza deviazioni;

Se queste due linee non si incontrano o l'immagine è virtuale o non c'è immagine.

Equazione generale

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

ConvergenteDivergente



Per lenti sottili, si considera la convenzione che la distanza focale $f > 0$ per lenti convergenti e $f < 0$ per lenti divergenti. La distanza dell'oggetto p è sempre positiva e la distanza dell' immagine è positiva quando q è dall'altro lato della lente.
Un'immagine virtuale ha $q < 0$. L'ingrandimento è positivo per un'immagine dritta e negativo per una rovesciata.

Ingrandimento

$$G = \frac{h_I}{h_O} = -\frac{q}{p}$$

Diottria

Nell'ottica, per trovare la distanza focale della lente da usare negli occhiali, si usi

$$\text{Miopia: } \frac{1}{f} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d_{max}}$$
$$\text{Ipermetropia: } \frac{1}{f} = \frac{1}{d} - \frac{1}{d_{min}}$$

dove d è la distanza da ottenere. d_{max}: massima distanza a cui si vede chiaramente
d_{min}: minima distanza a cui si vede chiaramente

Lenti attaccate

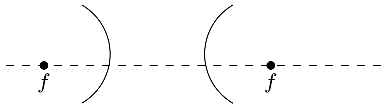
Se due lenti di distanza focale f_1 e f_2 sono attaccate, possono essere sostituite da una sola di distanza focale f.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Specchi

Per gli specchi valgono le stesse leggi delle lenti.
Si definisce *concavo* se $f > 0$ e *convesso* altrimenti.

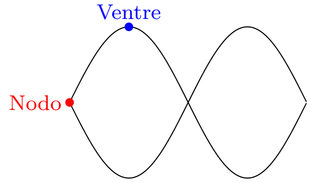
Concavo Convesso



$$f = \frac{R}{2}$$

Onde Stazionarie

Si possono riscontrare onde stazionarie quando due onde siano sincrone ma con versi opposti. Il risultato è il seguente

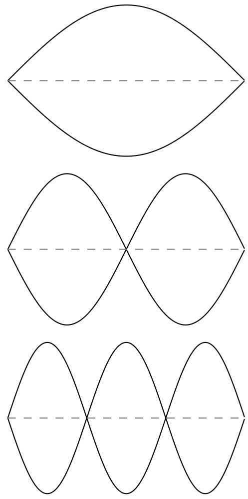


Per le onde stazionarie, vengono definiti *nodi* i punti in cui l'ampiezza è 0, *ventri* quelli in cui l'ampiezza è massima. Si definisce n il numero di ventri che esistono nell'onda.
Per trovare la posizione di un nodo o di un ventre si usi

$$\text{Nodo: } x = \frac{\lambda}{4} + (k+1)\frac{\lambda}{2}$$

$$\text{Ventre: } x = (k+1)\frac{\lambda}{2}$$

dove k identifica il numero del ventre o nodo desiderato.



Equazione dell'onda stazionaria

$$y = A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Lunghezza dell'onda

La lunghezza dell'onda è determinata da n e dalla lunghezza d'onda.

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}$$

Dove λ_n è definita come

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Frequenza del ventre

$$f_n = \frac{n}{2L}v$$

v: velocità (che può essere espressa come $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$)

Suono

Il suono è un'onda meccanica, quindi rientra in questa sezione. Il suono si propaga in forma sferica da un punto.

Per gli esercizi, si vada a pagina 42.

Intensità

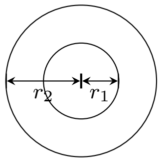
L'intensità indica quanto forte è un suono.
Dato che il suono si propaga in forma sferica, $S = 4\pi r^2$ dove r indica la distanza dell'uditore dalla sorgente.

$$I = \frac{E}{St} = \frac{P}{S}$$

E: energia
P: potenza, solitamente espressa in W

Se ne deriva che

$$I_1 r_1^2 = I_2 r_2^2$$



Livello sonoro

Il livello sonoro indica quanto forte un suono appare all'udito umano. La sua unità di misura è il *decibel* (dB).

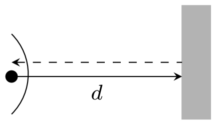
$$L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$$

I_0: $10^{-12}\,\mathrm{W/m^2}$

Eco

Il suono, essendo un onda, si riflette se incontra un ostacolo. Il tempo necessario tra due picchi perché si senta l'eco è

$$t = \frac{2d}{v}$$



d: distanza dalla superficie
v: 343 m/s

Effetto Doppler

L'effetto Doppler è un effetto che tutti quanti conoscono (un'ambulanza che emette un suono diverso in base alla sua velocità relativa rispetto all'uditore) e che mette in relazione la frequenza del suono e la velocità dei due corpi (uditore e sorgente).
La cosa più complicata dell'effetto Doppler sono i segni. Questa è la formula più generale

$$f_O = f_S \frac{v \pm v_U}{v \mp v_S}$$

v: 343 m/s
U: uditore
S: sorgente
Come si nota, al numeratore e al denominatore si invertono i segni. Questa tabella aiuterà a far capire come scegliere.

Uditore	Avvicina	$+$
	Allontana	$-$
Sorgente	Avvicina	$-$
	Allontana	$+$

La formula vale anche quando entrambi i corpi sono in movimento. Se l'uditore o la sorgente sono fermi rispettivamente v_U e v_S sono pari a 0.

Battimenti

I battimenti sono un fenomeno che si verifica quando due sorgenti vibrano a frequenze molto simili, quindi $f_1 \approx f_2$. Se questa condizione non è presente, non è un battimento.
Un tipico esempio è un diapason che comincia a vibrare quando si canta alla giusta tonalità.

$$f_B = |f_1 - f_2|$$

Elettrostatica

L'Elettrostatica studia le cariche elettriche nei corpi e come reagiscono fra di loro.
Un concetto fondamentale è quello di **carica**. La carica (identificata con Q) è determinata dalla somma di tutte le cariche degli elettroni all'interno di ogni corpo. La sua unità di misura è il *Coulomb* (C).

Si noti che nelle seguenti formule, ε è definito come $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ dove ε_0 è la costante dielettrica nel vuoto e ε_r è la costante dielettrica nel mezzo. Si considererà inoltre $k = \frac{k_0}{\varepsilon_r}$ con k_0 come costante di Coulomb.
Per gli esercizi si vada a pagina 43.

Legge di Coulomb

Attraverso la legge di Coulomb (da non essere confusa con il teorema di Coulomb) si trova la forza che intercorre tra due corpi carichi. Si noti che questa formula può essere usata solo se i corpi sono puntiformi e fermi.

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Campo elettrico

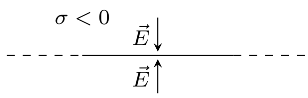
Il campo elettrico è generato da una carica. Esso è un campo vettoriale, ciò significa che ad ogni suo punto si associa un vettore.
Verranno ora riportate tutte le formule che permettono di trovare o il modulo o il vettore di un campo elettrico.

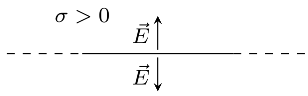
$$E = k \frac{Q}{r^2} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Q: carica generatrice del campo
q: carica che si trova all'interno del campo generato da Q

Campo di una superficie piana infinita

Un campo elettrico uniforme associa un vettore uguale a tutti i punti.
σ rappresenta la densità di carica $\left(\frac{Q}{A}\right)$ dove Q è la carica e A l'area del piano.

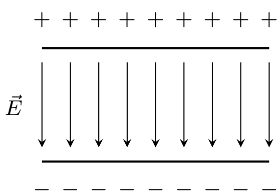




$$E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$$

Campo elettrico all'interno di un condensatore

Il campo elettrico è costante in ogni punto all'interno del condensatore. All'esterno è 0.



$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

σ: densità di carica $\left(\frac{Q}{A}\right)$

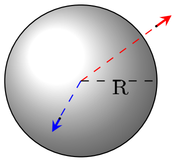
Campo elettrico generato da un filo carico

Un filo infinitamente lungo genera un campo E uscente se carico positivamente ed entrante se negativamente.

$$E = \frac{2k\lambda}{r}$$

λ: densità lineare di carica
r: distanza dal filo

Campo elettrico generato da una sfera



Una sfera uniformente carica genera un campo E
all'esterno pari a:

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

Q: carica dellla sfera
r: distanza dal centro della sfera

all'interno invece

$$E = k\frac{Q}{R^3}r$$

Q: carica dellla sfera
R: raggio della sfera
r: distanza dal centro della sfera

Nel caso si trattasse di una sfera cava all'esterno la formula è invariata, all'interno E è sempre 0.

Energia del campo elettrico

$$U_E = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Q: carica delle pareti
V: differenza di potenziale
C: capacità del condensatore

La densità invece è pari a

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Teorema di Coulomb

Il teorema di Coulomb permette di definire l'intensità di E in prossimità della superficie di un corpo, conoscendo la densità di carica.

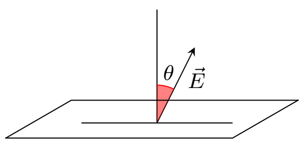
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Flusso

Il flusso (Φ) è la quantità di campo elettrico ($\vec{E}$), che attraversa una superficie ($\vec{S}$).
Verranno ora riportate le formule per calcolare il flusso.

$$\Phi_S\left(\vec{E}\right) = \sum_{i=0}^{n} \vec{E}_i \cdot \vec{S}_i$$

$$\Phi_S\left(\vec{E}\right) = E \cdot S \cos\theta \quad \text{Se } S \text{ è piana e } E \text{ uniforme}$$



Teorema di Gauss

Il teorema di Gauss definisce il flusso di una superficie *chiusa*.

$$\Phi_{S_{CH}}\left(\vec{E}\right) = \frac{\sum_{i=0}^{n} Q_i}{\varepsilon}$$

Lavoro di un campo elettrico

L'energia potenziale elettrica (U) e il potenziale elettrico (V) sono definiti:

$$U = k_0\frac{Q_1Q_2}{r} \qquad V = k_0\frac{Q}{r}$$

$$\Delta V = E\Delta x$$

k_0: $9.11 \cdot 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}$
Q: carica
r: distanza
Δx: direzione di coordinate tra V_i e V_f lungo la direzione del campo

Le superfici equipotenziali sono superfici in cui V è costante per ogni punto.

Quanto lavoro deve fare un campo elettrico per spostare una carica?

$$L = q\left[V_i - V_f\right]$$

q: carica spostata
V_i: potenziale iniziale
V_f: potenziale finale

Capacità elettrica

La capacità elettrica indica quanta carica può immagazzinare un conduttore. Verranno ora riportate le formule per calcolarla.

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$C = \frac{S\varepsilon}{d} \qquad \text{Specificamente in un condensatore piano}$$

$$C = kr \qquad \text{In un condensatore sferico di raggio } r$$

Q: carica immagazzinata
V: differenza di potenziale
d: distanza tra le armature
S: superficie del condensatore

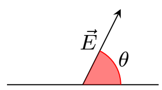
Un condensatore può essere di qualunque forma o dimensione si voglia

Circuitazione

La circuitazione di un campo elettrico lungo il percorso da noi scelto è la somma dei prodotti scalari tra i vettori del campo $\vec{E}$ e lo spostamento Δx.

$$C_\Gamma\left(\vec{E}\right) = \sum_{i=0}^{n} \vec{E}_i \cdot \vec{l}_i = \sum_{i=0}^{n} E_i \cdot l_i \cos\theta$$

l: differenza di spostamento
Si noti che *theta* è rispetto alla tangente, non alla normale come nel Flusso.



Un campo è conservativo se la circuitazione lungo una linea chiusa è pari a 0. Questo è il caso del campo elettrico.

Dielettrico all'interno di un condensatore

Come cambia il campo elettrico all'interno di un condensatore se si inserisce un dielettrico?

$$E_{RIS} = \frac{\sigma - \sigma_p}{\varepsilon}$$

σ: densità di carica del conduttore
σ_p: densità di carica del dielettrico

Velocità di deriva in un conduttore metallico

È la velocità media degli elettroni nel conduttore metallico.

$$v_d = \frac{i}{n \cdot A \cdot e}$$

e^-:$-1.60 \cdot 10^{-19}$ C
n: numero di elettroni di conduzione
A: sezione del conduttore
i: carica massima

Circuiti elettrici

Questa sezione è strettamente legata alla precedente ma, vista l'importanza ne merita una sua.
I circuiti elettrici sono usati ovunque nel mondo d'oggi e hanno una simbologia tutta loro. Di seguito verranno riportati i principali elementi circuitali e il loro funzionamento con le relative formule.

Elementi circuitali

Generatori

Ci sono due tipi di correnti e di conseguenza due tipi di generatori. Nelle successive parti, si divideranno i circuiti principali in base al tipo di corrente presente.
I generatori producono tutti una certa **Differenza di potenziale** o d.d.p. nel circuito. Questa d.d.p. è regolata dalla legge di Ohm (vedi pagina 21). In genere la lettera che denota un generatore di differenza di potenziale è o V (dall'unità di misura, Volt), o $\mathscr{E}$. Vi è grande differenza soltanto tra generatori **reali** in cui è presente una resistenza interna e generatori **ideali** in cui questa resistenza è nulla , quindi si ha che

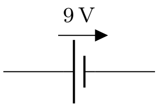
$$\mathscr{E} = \overbrace{Ri}^{V} + ri$$

R: resistenza totale degli elementi circuitali
r: resistenza interna

Generalmente la $\mathscr{E}$ viene anche definita **forza elettromotrice**.
Il suo valore può anche essere definito in funzione del lavoro (L) che il generatore deve fare per spostare una carica (q) da un polo all'altro

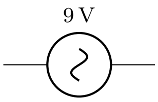
$$\mathscr{E} = \frac{L}{q}$$

Continua La corrente generata da questi generatori è corrente **continua**, ovvero che mantiene il verso nel tempo. Il simbolo utilizzato piu frequentemente è



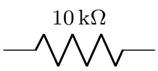
Il polo positivo è quello più grande e la corrente va da + a −.

Alternata La corrente generata da questi generatori è corrente **alternata**, ovvero non ha un verso e cambia intensità istante per istante in modo sinusoidale. Il simbolo più usato è



Resistenze

Le resistenze sono uno degli elementi fondamentali dei circuiti elettrici. Esse oppongono resistenza alla corrente che le attraversa, permettendo quindi una tensione minore per un specifico elemento. La loro unità di misura è l'Ohm (Ω).
Il loro simbolo è



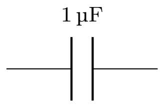
Leggi di Ohm Le leggi di Ohm mettono in definiscono la differenza di potenziale e le caratteristiche fisiche di una resistenza.

$$R = \frac{\Delta V}{i} \qquad R = \rho \frac{l}{S}$$

La prima mette in relazione la ddp e la corrente con la resistenza.
La seconda mette in relazione la resistività (ρ), la lunghezza del corpo (l) e la sezione (S) con la resistenza.

Condensatori

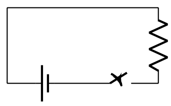
Un condensatore è composto da due *armature* che hanno cariche di segno opposto, una positiva e l'altra negativa. Il compito di un condensatore all'interno di un circuito è di immagazzinare carica e rilasciarla. Viene usato ad esempio nei flash delle macchine fotografiche dove viene rilasciata in un attimo la carica immagazzinata in un certo tempo.
La loro unità di misura è il Farad (F).
Il loro simbolo è



La capacità di un condensatore è regolata dalle formule descritte a pagina 20.

Induttanza

L'induttanza è strettamente collegata al fenomeno dell'auto induzione, che è strettamente legato alla Legge di Faraday-Neuman-Lenz.
Per capirla, prendiamo come esempio il seguente circuito



Per la legge di Biot-Savart, si genererà un campo magnetico quando si chiude il circuito e scorrerà della corrente. Per la Legge di Faraday-Neuman-Lenz (pag. 27) la variazione di campo magnetico produrrà una corrente indotta all'interno di questo circuito che si oppone alla corrente nel momento della carica e la favorisce nella scarica. Questo ci porta all' introduzione di un nuovo elemento circuitale: l'induttanza

Il flusso del cicuito è proporzionale alla corrente per la legge di Faraday-Neuman-Lenz. Quindi possiamo scrivere

$$\Phi(\vec{B}) = L \cdot i$$

dove L è la nostra induttanza che dipenda da circuito a circuito.
Se ora usiamo la nuova definizione di flusso possiamo scrivere

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(Li)}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

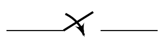
Cosa ci dice questo? Che se $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \neq 0$ allora $\mathscr{E}_{ind} \neq 0$, se invece $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, allora $i(t) =$ costante.
Essendo l'elemento dell'induttanza un solenoide, possiamo isolare L e scrivere

$$L = \frac{\Phi(\vec{B})}{i} = \frac{N\mu\frac{Ni}{l}S}{i} = \mu\frac{N^2 S}{l}$$

dove μ è la permeabilità magnetica che può essere assoluta (μ_0) o relativa ($\mu_r\mu_0$), N il numero di spire, S la superficie e l la lunghezza del solenoide. L'unità di misura è l'*Henry* (H).

Interruttore

L'interruttore permette di interrompere il flusso di carica, ovvero di aprire o chiudere il circuito. Il suo simbolo è



Corrente elettrica

La corrente elettrica è frutto di una d.d.p. applicata in un circuito. Essa, per definizione è

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t}$$

Collegamenti

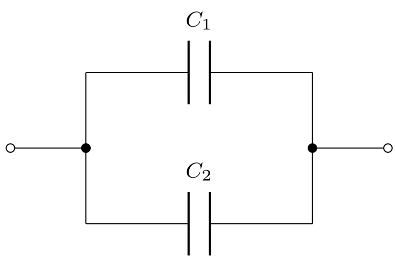
Ci sono 2 tipi di collegamenti: **in serie** ed **in parallelo**.
Se due componenti sono in serie, la stessa corrente i li attraversa e sono posti uno dietro l'altro. Se sono in parallelo invece la corrente si divide, mantenendo costante la d.d.p.

Capacità equivalente di condensatori in *serie*

Questo "circuito" può essere ridotto ad un solo condensatore la cui capacità deve essere

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Capacità equivalente di condensatori in *parallelo*



Questo "circuito" può essere ridotto ad un solo condensatore la cui capacità deve essere

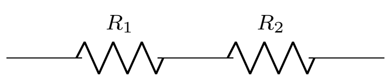
$$C_e = C_1 + C_2$$

Proprietà di condensatori in serie ed in parallelo

Una caratteristca di questi due collegamenti è quello che rimane costante tra i condensatori.

Due condensatori **in serie** mantengono la stessa Q.
Due condensatori **in parallelo** mantengono la stessa ddp (ΔV).

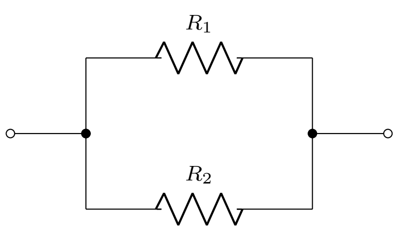
Resistenza equivalente di resistenze in *serie*



Questo "circuito" può essere ridotto ad un solo resistenza la cui resistenza deve essere

$$R_e = R_1 + R_2$$

Resistenza equivalente di resistenze in *parallelo*



Questo "circuito" può essere ridotto ad una sola resistenza la cui resistenza deve essere

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Vige anche questa proprietà:

$$R_1 i_1 = R_2 i_2$$

Proprietà di resistenze in serie ed in parallelo

Una caratteristca di questi due collegamenti è quello che rimane costante tra le resistenze.

Due resistenze **in serie** mantengono la stessa i.
Due resistenze **in parallelo** mantengono la stessa ddp (ΔV).

Tabella riassuntiva delle formule

	Serie	Parallelo
Condensatori	$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$	$C_e = C_1 + C_2$
Resistenze	$R_e = R_1 + R_2$	$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Potenza elettrica

Un componenete percorso da corrente, dissipa una certa potenza.

Continua

$$P = Vi$$

che per una resistenza si può scrivere come

$$P = Ri^2 = \frac{V^2}{R}$$

R: resistenza
i: corrente
V: d.d.p.

Alternata

In corrente alternata la potenza varia ogni istante. Il valore medio è

$$\overline{P} = \mathscr{E}_{eff} i_{eff} \cos\phi$$

I casi particolari sono quando il circuito è puramente resistivo e puramente induttivo. Nel primo caso si avrà

$$\overline{P} = \mathscr{E}_{eff} i_{eff}$$

nel secondo invece

$$\overline{P} = 0$$

La potenza istantanea è invece

$$P(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{Z}\sin(\omega t - \phi)\mathscr{E}_0 \sin(\omega t)$$

ϕ: angolo di sfasamento

Effetto Joule

L'effetto Joule è uno dei tre effetti causati da una corrente che attraversa un conduttore. In questo caso determina il fatto che una corrente che attraversa un conduttore, genera calore.

$$Q = Ri^2 t$$

Q: quantità di calore in Joule
t: tempo

Spesso viene usato il *kilowattora* che equivale a $3.6 \cdot 10^6$ J.

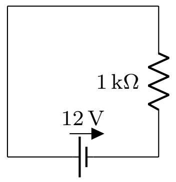
Circuiti principali

Verranno ora riportati i pincipali circuiti che si incontreranno, sia in corrente continua che in alternata.

Puramente resistivi

I circuiti puramente resistivi sono composti solo da un generatore e una resistenza. Sono i più semplici circuiti che possano esistere

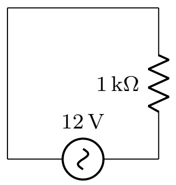
Continua



Qui le leggi di Ohm si mantengono valide e quindi il cicruito può essere risolto molto semplicemente applicando

$$\mathscr{E} = Ri$$

Alternata



Essendo in corrente alternata, l'unica incognita possibile è la corrente

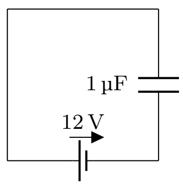
$$i(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{R} \sin \omega t$$

Corrente e forza elettromotrice sono **in fase**, ovvero che assumono i loro valori massimi nello stesso istante.

Puramente capacitivi

I circuiti puramente capacitivi sono costituiti da un generatore e un condensatore. Il condensatore ha diversi comportamenti a seconda del tipo di corrente che lo attraversa.

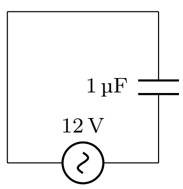
Continua



L'incognita caratteristica di questo circuito è la carica sulle armature del condensatore. Essendo in continua, la formula che la regola è quella della capacità elettrica (pagina 20).

$$C = \frac{Q}{V}$$

Alternata



In questa situazione, il condensatore non ha più lo scopo di immagazzinare carica e poi rilasciarla ma sfasa la corrente.
Per la definizione di corrente

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Per definizione inoltre

$$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[C\mathscr{E}(t)]}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[C\mathscr{E}_0 \sin \omega t]}{\mathrm{d}t}$$

Derivando ora

$$i(t) = C\mathscr{E}_0 \frac{\mathrm{d}[\sin \omega t]}{\mathrm{d}t} = C\mathscr{E}_0 \omega \cos \omega t$$

Per definizione poniamo $i_0 = C\mathscr{E}_0\omega$ e trasformiamo in seno per poter confrontare

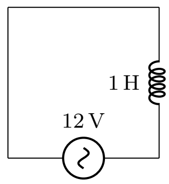
$$i(t) = i_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Questo significa che la corrente è in **anticipo** rispetto alla forza elettromotrice.
Quindi il condensatore oppone una specie di resistenza, questa prende il nome di **reattanza capacitiva** il cui valore è

$$x_C = \frac{1}{\omega C}$$

Puramente induttivi

I circuiti puramente induttivi non hanno ragion d'essere in corrente continua in quanto lo scopo dell'induttanza è quello di fare variare il flusso magnetico che si genera. Se la corrente non cambia, non è possibile ottenere questo effetto.



L'induttanza quindi oppone una specie di resistenza creando una corrente contraria per la legge di Faraday-Neuman-Lenz. Quindi

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathscr{E}_0}{L} \sin \omega t$$

per la legge di Kirchhoff. Quindi isolando

$$i(t) = -\frac{\mathscr{E}_0}{\omega L} \cos \omega t$$

trasformando in seno e ponendo $i_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\omega L}$

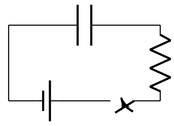
$$i(t) = i_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Anche l'induttanza crea una specie di resistenza, essa prende il nome di **reattanza induttiva** e ha come valore

$$x_L = \omega L$$

Circuiti RC

I circuiti RC sono così denominati perché contengono una resistenza e un condensatore.



Carica Questo circuito non ha alcuna funzione se non quella di caricare il condensatore fino a capacità massima (anche se, come vedremo, non accadrà mai). Dato che il processo di carica non è istantaneo, dipende dal tempo. Si vuole studiare il variare della carica ($q(t)$), corrente ($i(t)$) e della differenza di potenziale ($V(t)$) del condensatore.
Esse si ottengono dalla risoluzione dell'equazione differenziale

$$\mathscr{E} = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C}$$

Rispettivamente sono

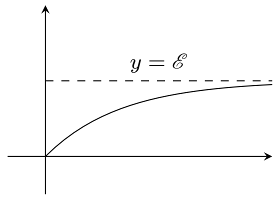
$$q(t) = C\mathscr{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$i(t) = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V(t) = \mathscr{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Dove $\tau = RC$ è la *costante di tempo* che varia da circuito a circuito.

Perché il condensatore non si caricherà mai? Ora andiamo a disegnare il grafico della carica



Come notiamo, il grafico tende a raggiungere il valore massimo però senza mai raggiungerlo, infatti

$$\lim_{t \to +\infty} q(t) = \mathscr{E}$$

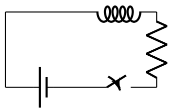
In ogni caso il condensatore raggiunge una carica quasi totale dopo 4τ o 5τ.

Scarica La scarica di un condensatore avviene in maniera molto simile alla carica.

$$q(t) = C\mathscr{E}e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$i(t) = -\frac{\mathscr{E}}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$V(t) = \mathscr{E}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Circuiti RL

I circuiti RL sono circuiti composti da una resistenza e un induttore



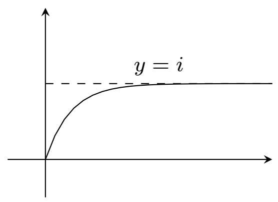
In una situazione come questa abbiamo come unica incognita variabile è $i(t)$. Per ricavarla possiamo risolvere l'equazione differenziale

$$\mathscr{E} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri$$

Se nel circuito RC l'incognita caratteristica è $q(t)$, in questo è $i(t)$. Se la carica aveva come massimo $C\mathscr{E}$, la corrente ha come massimo, secondo la legge di Ohm, $\frac{\mathscr{E}}{R}$. Si dimostra che

$$i(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

dove $\tau = \frac{L}{R}$ rappresenta la costante di tempo del circuito.
Anche in questo caso il grafico della corrente è

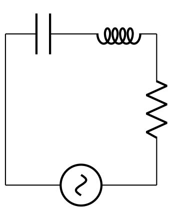


capiamo che in teoria la corrente non raggiungerebbe mai il valore di regime, però generalmente dopo 4τ o 5τ la variazione è talmente minima che gli strumenti non la misurano più.
La formula per la scarica invece è la seguente

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Circuit RLC in serie

I circuiti RLC sono i più semplici circuiti completi che si studiano in corrente alternata. Essi infatti sono come il seguente

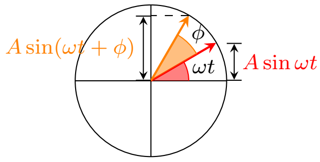


Per trovare le formule, dobbiamo introdurre un nuovo concetto, il **fasore**.

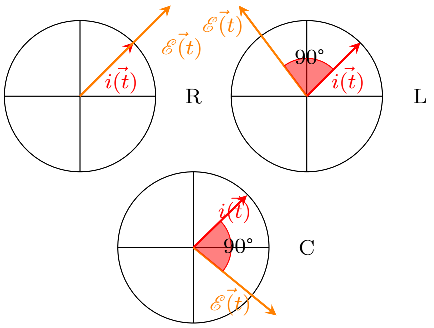
Fasori Permettono la trasformazione da funzione sinusoidale a vettore, così da visualizzare lo sfasamento e i moduli di tutti. La formula generale

$$y = A\sin(\omega t + \phi)$$

può essere visualizzata come il seguente vettore

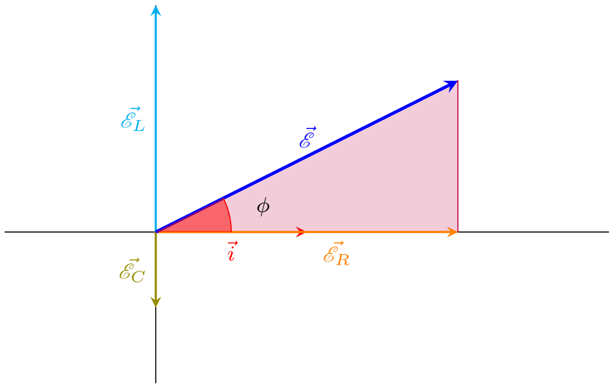


Possiamo quindi, per chiarire meglio, rappresentare i circuiti elementari in alternata. Così è più chiaro vedere i vettori che rappresentano corrente e la forza elettromotrice.



Possiamo vedere quindi il rapporto tra corrente e forza elettromotrice.

Possiamo usare quindi questa tecnica per vedere come definire la corrente in un circuito LRC. Per comodità, poniamo la corrente sull'asse delle x così che venga più facile il disegno.



Per andare a spiegare questo disegno, andiamo a definire alcune delle lettere usate. Essendo in alternata, sia il condensatore, sia l'induttanza creeranno delle reattanze. Quindi la d.d.p. ai capi dei componenti diventa

$$\mathscr{E}_L = x_L \cdot i_0 \quad \mathscr{E}_C = x_C \cdot i_0 \quad \mathscr{E}_R = R \cdot i_0$$

L'unica incognita che possiamo avere è la corrente i_0, quindi dobbiamo trovare il modo per ricavarla.
Secondo la legge di Kirchohoff delle maglie, possiamo dire che

$$\vec{\mathscr{E}} = \vec{\mathscr{E}}_R + \vec{\mathscr{E}}_L + \vec{\mathscr{E}}_{\mathscr{C}}$$

Essendo questi dei vettori, possiamo semplicemente fare la somma vettoriale e quindi andare a calcolare l'ipotenusa del triangolo evidenziato.

$$\mathscr{E}^2 = R^2 i_0^2 + (x_L - x_C)^2 i_0^2$$
$$\mathscr{E}^2 = i_0^2[R^2 + (x_L - x_C)^2]$$
$$i_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}}$$

Questo porta alla definizione della legge per la corrente Viene definita **impedenza**

$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$$

$$i(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{Z}\sin(\omega t - \phi)$$

L'unica cosa che manca da trovare è ϕ, lo sfasamento. Nel disegno è già evidenziato ed è evidente che non è altro se non un angolo tra due vettori, quindi si deduce che

$$\phi = \arctan\left(\frac{x_L - x_C}{R}\right)$$

Quale deve essere la frequenza del generatore perché la reattanza capacitiva e quella induttiva si equivalgano? In altri termini, quando possiamo semplificare il circuito in modo che abbia solo la resistenza? Nella **condizione di risonanza** la frequenza è pari a

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Leggi di Kirchhoff

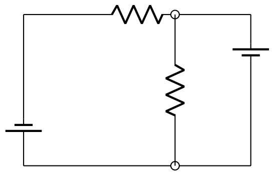
Per capire queste leggi, è necessario aver chiaro tre termini

Nodo Un punto in cui convergono almeno 3 conduttori

Ramo Una parte di circuito tra 2 nodi

Maglia Una parte di circuito attraversata solo una volta per tornare al nodo di origine

Per spiegarli, prendiamo il seguente circuito



Vediamo due nodi (già evidenziati dai cerchi). Sono presenti 3 rami (tutti i modi per arrivare da un nodo all'altro) e 3 maglie (la maglia sinistra con 2 resistenze e una batteria, quella destra con una sola resistenza e una batteria e quella che comprende i rami esterni).
Una caratteristica da ricordare è che *ci sono tante correnti quanti rami*. Risolvere questi circuiti quindi significa trovare intensità e verso di queste correnti.

Legge di Kirchhoff dei nodi

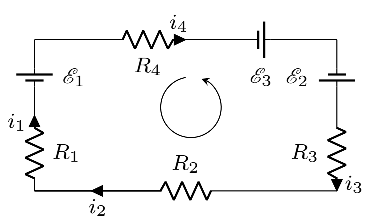
La corrente entrante in un nodo è pari a quella uscente.

$$\sum_k i_k = 0$$

Questo è anche definito come **Principio di conservazione di carica**.

Legge di Kirchhoff delle maglie

Per arrivare alla formula, prendiamo come esempio il seguente circuito



Kirchhoff descrive che

$$\sum_k \mathscr{E}_k = \sum_j R_j i_j$$

Ovvero scegliendo un verso (orario o antiorario) se la corrente ha stesso verso le si da il valore $+$, altrimenti $-$. Stessa cosa per la forza elettromotrice. Proseguendo da un nodo qualsiasi secondo il verso scelto e tornando sullo stesso nodo (attraversando una maglia), sommiamo algebricamente le forze o le resistenze che si incontrano. Si ottiene quindi la formula descritta.

Utilizzo delle leggi di Kirchhoff

Negli esercizi non possiamo usare direttamente queste leggi. Il modo generale di approcciarsi è

1. Individuare le incognite (le correnti) e scegliere un verso di percorrenza in modo arbitrario
2. Creare un sistema a n-equazioni dove n è il numero di incognite (in generale 3)
3. Come prima equazione, usare la Legge di Kirchhoff dei Nodi scegliendo arbitrariamente i versi delle correnti nel nodo
4. Come seconda e terza equazione, descrivere le maglie seguendo il verso scelto
5. Risolvere il sistema lineare. Nel caso in cui una corrente sia negativa, il suo risultato è $|i|$.

Mutua induzione

La mutua induzione è il fenomeno dell'induzione che avviente tra due o più circuiti diversi. Ad esempio se un circuito 1 agisce su di un circuito 2,

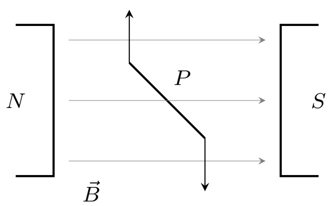
$$\Phi_2(\vec{B}) = Mi_2$$

dove M è un valore che varia da circuito a circuito.
Si noti che di conseguenza, per la legge di Faraday-Neuman-Lenz, si genererà una forza elettromotrice da un circuito all'altro. Quindi possiamo scrivere

$$\mathscr{E}^{1\to 2} = -M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Corrente Alternata

Se fin'ora si è lavorato con corrente continua fornita da una forza elettromotrice, quasi tutta la corrente che si utilizza quotidianamente è alternata. Per generare corrente alternata, si pongano due magneti con polarità opposte uno di fronte all'altro. Tra i due si ponga una serie di spire che ruotano. Questa rotazione genererà una corrente. Il disegno dunque è molto simile a quello del motore elettrico



Facendo girare le spire, il flusso varierà. Infatti si avrà

$$\Phi(\vec{B}) = BS\cos\theta = BS\cos\omega t$$

quindi applicando la legge di Faraday-Neuman-Lenz

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[BS\cos\omega t] =$$
$$-BS\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos\omega t] = \omega BS\sin\omega t = \mathscr{E}_0\sin\omega t$$

Notiamo quindi che la forza elettromotrice che viene scaturita ha intensità sinusoidale, quindi lo è anche la corrente. Infatti si definisce una funzione $i(t)$ che varia a seconda del tempo

$$i(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\sin\omega t = i_0\sin\omega t$$

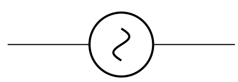
dove i_0 è il valore di picco. Si definisce anche una corrente efficace i_{eff} che è la corrente che dissipa la stessa potenza in corrente continua. Il suo valore è

$$i_{eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}$$

Quindi in generale

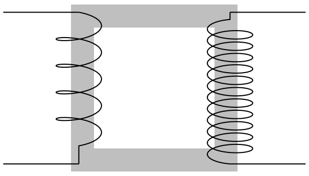
$$\mathscr{E} = R\cdot i(t) \quad \mathscr{E}_0 = R\cdot i_0 \quad \mathscr{E}_{eff} = R\cdot i_{eff} = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{2}}$$

Si introduce anche un nuovo elemento circuitale il generatore di corrente alternata



Trasformatore

Il trasformatore è uno dei dispositivi più usati al mondo. Il suo scopo è quello di *trasformare* un voltaggio in uno maggiore o minore, quasi senza perdita di energia. Di seguito verrà schematizzato il trasformatore



Sia la spira di sinistra quella **primaria** e sia quella di destra la **secondaria**. Perché un trasformatore abbia senso di esistere deve avere un numero diverso di spire a destra e a sinistra. Il blocco di ferro-metallo al centro serve ad incanalare tutte le linee di forza, così che non si sprechino. Si trovano le seguenti formule

$$\frac{\mathscr{E}_p}{\mathscr{E}_s} = \frac{n_p}{n_s} = \frac{i_s}{i_p}$$

Si presti attenzione alla sequenza di scrittura. Si noti anche che $\dfrac{n_s}{n_p}$ è definito *rapporto di trasformazione*.

Magnetismo

Il magnetismo si occupa del campo magnetico e dei suoi effetti. Ogni magnete genera un campo magnetico ($\vec{B}$). La sua direzione è sempre dal polo NORD a quello SUD. Ogni magnete ha sempre due poli e anche se lo si divide si otterranno magneti bipolari.
L'unità di misura di $\vec{B}$ è il *Tesla* ($T = \dfrac{N}{Am}$)
Si noti che $\mu = \mu_0\mu_r$ e μ_0: $4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2.
Per gli esercizi si vada a pagina 46.

Forza in un campo magnetico

Un filo in cui scorre una corrente, immerso in un campo magnetico B, è sottoposto ad una forza pari a

$$\vec{F} = l \cdot (\vec{i} \times \vec{B})$$

Questo è un prodotto vettoriale. Si usi la regola della mano.
l rappresenta la lunghezza del cavo che attraversa il campo magnetico
$\vec{i}$: è la corrente che attraversa il cavo. Il verso può essere positivo o negativo in base al sistema di riferimento scelto.

Legge di Biot-Savart

La legge di Biot-Savant mostra la stretta relazione tra campo elettrico e magnetico. Definisce un campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da una corrente.
La direzione è la tangente alla linea di campo generata dal filo, il verso è antiorario se la corrente esce, orario altrimenti. Un modo per ricordarselo più facilmente è il seguente: si prenda la mano destra e si usi il pollice per indicare il verso e la direzione della corrente. Si chiudano poi a pugno le altre dita. Il verso delle dita chiuse, è quello del campo magnetico.

$$B = \frac{\mu}{2\pi}\frac{i}{d}$$

i: corrente
d: distanza dal filo

In genere negli esercizi si trova disegnato o un cerchio con un punto o uno con una croce che vengono usati per indicare il verso del filo o del campo, come i seguenti

Uscente Entrante

Legge di Ampére

La legge di Ampére descrive la forza che intercorre tra due fili paralleli attraversati da una corrente.

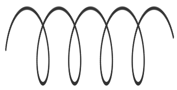
$$F = \frac{\mu}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{d} l$$

i: corrente
d: distanza tra i due fili
l: lunghezza del filo

La formula calcola il modulo del vettore. La forza è attrattiva se i versi delle correnti sono uguali, repulsiva altrimenti.

Solenoidi

I solenoidi (anche detti bobine) sono degli strumenti che, attraversati da corrente, generano un campo magnetico uniforme al loro interno mentre all'esterno è 0. Essi sono composti da spire, disposte in questo modo



$$B = \mu\frac{n}{l}i$$

n: numero di spire
l: lunghezza del solenoide
i: corrente

Energia di un campo magnetico

In modo analogo al campo elettrico, si può definire un'energia e una densità magnetici. Per fare ciò analizziamo un circuito RL in serie. Per Kirchhoff

$$\mathscr{E} + \mathscr{E}_{ind} = Ri$$

Dove $\mathscr{E}_{ind}$ è la forza elettromotrice indotta dal solenoide. Sostituendo

$$\mathscr{E} - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri$$

Moltiplicando ambo i membri per $i\,\mathrm{d}t$ per ottenere un'energia

$$\mathscr{E} = L\frac{\mathrm{d}i}{\cancel{\mathrm{d}t}} i\cancel{\mathrm{d}t} + Ri^2\,\mathrm{d}t$$

Il termine $Ri^2\,\mathrm{d}t$ è semplicemente l'effetto Joule. Invece il termine $Li\,\mathrm{d}i$ è proprio l'energia del campo magnetico generato dal solenoide. Quindi dato che a noi serve un valore complessivo, non istantaneo, integriamo

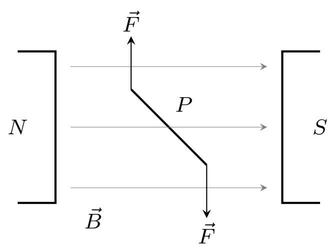
$$U_B = \int_0^i Li\,\mathrm{d}i = \left.\frac{Li^2}{2}\right|_0^i = \frac{1}{2}Li^2$$

La densità magnetica invece si ricava

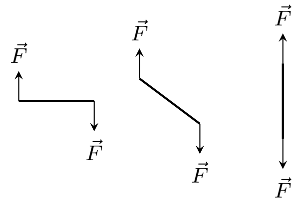
$$u_B = \frac{U_B}{Sl} = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Motore elettrico

Nonostante il nome possa far credere che funzioni solo attraverso l'elettricità, il motore elettrico svolge la sua funzione grazie ad una coesione di elettricità e magnetismo. Il disegno seguente cercherà di chiarire le idee.



Come funziona? Innanzitutto abbiamo un campo magnetico $N - S$ e una spira rettangolare P attraverso la quale passa corrente (solitamente è caratterizzata da un vasto numero di strati). Si fa passare corrente all'interno di questa spira in modo che una forza si generi. Questa forza metterà in rotazione la spira. Quando si raggiunge la situazione in cui il momento è 0 (ovvero quando è perpendicolare al campo) la corrente viene invertita così che la piastra continui il giro. Questa forza motrice è quella che si genera e verrà poi usata.
Per capire meglio il movimento si guardi il disegno qua sotto



$M =$ massimo $= Fb$ $\qquad$ $M = 0$

$$M = Fb' = Fb \sin\theta$$

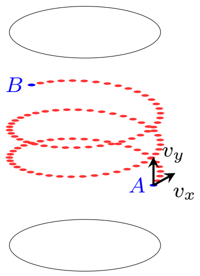
Forza di Lorenz

La forza di Lorenz è la forza che una carica in moto risente all'interno di un campo magnetico.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Si presti attenzione al verso di questa forza. Se la carica è *positiva* si usi la solita regola della mano, altrimenti si inverta semplicemente il verso.

Una particolarità è che una carica che entra in un campo magnetico viene deviata dal suo percorso. Il moto che ne deriva è *elicoidale*. Ovviamente questo nel caso più generale, il disegno di seguito aiuterà a capire in che modo l'elettrone viene spostato



Questa è una rappresentazione del moto di una carica all'interno del campo magnetico. Queste formule permettono di trovare il *raggio*, *periodo* e il *passo* dell'elica. Nelle seguenti formule, si utilizzeranno le due componenti distinte della velocità.

$$\frac{mv_x^2}{r} = qv_xB \qquad T = \frac{2\pi \cdot m}{q \cdot B}$$
$$\Delta S = v_y \cdot T \qquad r = \frac{mv_x}{qB}$$

Selettore di velocità

Il selettore di velocità è un particolare dispositivo che permette di "selezionare" alcune cariche che vanno solo ad una determinata velocità attraverso una fessura. Il loro utilizzo è molto ampio, specialmente in dispositivi come televisioni a tubo catodico.
Il loro funzionamento si basa su due campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ uniformi incrociati fra di loro.
Sulla carica deve agire una forza $\vec{F}$ pari a

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Una carica passa nel selettore se e solo se la sua velocità è pari a

$$v = \frac{E}{B}$$

Flusso

Il flusso (Φ) di un campo magnetico $\vec{B}$ è pari a

$$\Phi_S(\vec{B}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{B} \cdot \Delta\vec{S}_i$$

Si noti però che il flusso di qualsiasi superficie che insista sulla stessa linea chiusa, avrà sempre lo stesso valore.
Il flusso di un solenoide, si trova moltiplicando il numero di spire per il flusso generato da una spira.

Legge di Faraday-Neuman-Lenz

La legge descrive un fenomeno scoperto da Faraday per caso. Un circuito, immerso in un campo magnetico, al variare di questo genera una corrente indotta. Più precisamente, al variare del flusso del campo magnetico, viene generata una corrente indotta.
Faraday, Neuman e Lenz assieme arrivarono alla formulazione della seguente formula

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

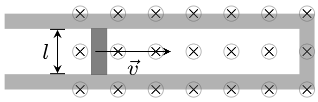
se considerata una media

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$$

se considerata istantanea.
In queste formule $\mathscr{E}$ è la forza elettromotrice indotta (dato che con una corrente generata, possiamo immaginare ci sia una forza elettromotrice che la genera), Φ è il flusso e t il tempo.
Si noti anche che modificando la formula della forza elettromotrice possiamo dire che

$$\mathscr{E} = vBl$$

dove v è la velocità di spostamento del conduttore/circuito in questione, B il campo magnetico e l la lunghezza del conduttore.



Per fare muovere questa asta di velocità costante, c'è una forza che si contrappone alla forza tirante che è pari a

$$\vec{F} = l\vec{i} \times \vec{B}$$

Circuitazione

La circuitazione (C) di un campo magnetico $\vec{B}$ è molto simile alla circuitazione di un campo elettrico

$$C_\Gamma(\vec{B}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \cdot \Delta l_i$$

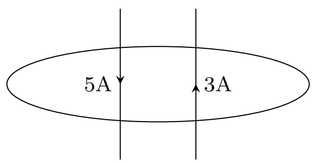
Δl: spostamento

Teorema di Ampére

Il teorema di Ampére dice che

$$C_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} i_c$$

dove i_c è una corrente concatenata. Una corrente i si definisce concatenata con una linea chiusa Γ se attraversa una superficie che ha come linea chiusa Γ.



Preso per esempio il disegno qui sopra, la circuitazione sarebbe

$$C_\Gamma(\vec{B}) = \mu_0(5 - 3) = 2\mu_0$$

Elettromagnetismo

Il padre di questa branca della fisica è Maxwell e con le sue quattro equazioni descrive il campo elettro-magnetico e riassume le precedenti teorie.

Le equazioni di Maxwell

$$\Phi_{S_{ch}}(\vec{E},t) = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} \qquad \Phi_{S_{ch}}(\vec{B},t) = 0$$

$$C_\Gamma(\vec{E},t) = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} \qquad C_\Gamma(\vec{B},t) = \mu_0\left[i + \varepsilon_0\frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t}\right]$$

Queste sono le equazioni viste come funzione, anche se più spesso vengono definite attraverso integrali

$$\int_{S_{ch}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} \qquad \int_{S_{ch}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} \qquad \oint_\Gamma \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\left[i + \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{E})}{\mathrm{d}t}\right]$$

Le prime due leggi erano già presenti nei campi statici.

La Terza legge di Maxwell

La terza legge di Maxwell deriva dalla forza elettromotrice indotta. Se Faraday ha trovato una forza elettromotrice indotta che produce la corrente, Maxwell va ancora più indietro e l'unica cosa che può genera una forza elettromotrice è un **campo elettrico**.
Per andare a ricavare il campo elettrico, bisogna andare a ridefinire la forza elettromotrice. Essa è il lavoro necessario a portare l'unità di carica da un polo all'altro, diviso la carica. Quindi

$$\mathscr{E} = \frac{L_{+\to-}}{q}$$

Il lavoro però è definito come

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}\cdot\Delta\vec{l_i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta q\vec{E_i}\cdot\vec{l_i} = \Delta q\sum_{i=1}^{n}\vec{E_i}\cdot\vec{l_i}$$

Quindi ora possiamo riscrivere

$$\mathscr{E} = \frac{\cancel{\Delta q}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{E_i}\cdot\vec{l_i}}{\cancel{\Delta q}} = C_\Gamma(\vec{E})$$

Ma se ora torniamo indietro, riscriviamo che

$$C_\Gamma(\vec{E}) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$$

Nella definizione abbiamo utilizzato una somma. In realtà sarebbe il limite di una somma che quindi definisce un integrale definito. Si riscrive generalmente

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t}$$

Ed ecco la terza legge di Maxwell. Cosa ci dice però? Ci dice che se è presente una variazione di flusso, si genera un campo elettrico perpendicolare a quello magnetico. Immaginando una spira in un campo magnetico uniforme d'intensità variabile, immobile, la forza che agisce su di essa è

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

ma essendo $\vec{v} = \vec{0}$ e quindi $q\vec{v}\times\vec{B} = 0$, dunque la forza che fa muovere le cariche è pari a $q\cdot E_{ind}$. Se l'intensità di $\vec{B}$ varia, le linee di forza di $\vec{E}$ sono orientate in modo definito dalla legge di Lenz.

La Quarta legge di Maxwell

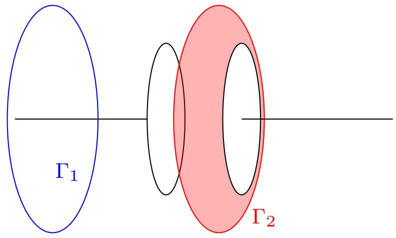
La quarta legge parte dall studio di un circuito RC in continua. Maxwell è andato a guardare la circuitazione tra le armature del condensatore. La circuitazione calcolata prima dell'armatura è pari a

$$C_{\Gamma_1}(\vec{B}) = \mu_0\cdot i$$

dove Γ_1 è una linea chiusa attorno al filo conduttore. Se ora invece si prende una linea Γ_2 che passi attraverso le armature, la circuitazione sarà

$$C_{\Gamma_2}(\vec{B}) = 0$$

in quanto non c'è corrente all'interno.



Come si può capire però le due circuitazioni devono essere uguali. Maxwell per spiegare questo fenomeno, calcola il flusso del campo elettrico su di una superficie S circolare che ha come contorno la linea Γ_2 possiamo calcolare semplicemente il flusso

$$\Delta\Phi(\vec{E}) = S\left[\vec{E}(t+\Delta t) - \vec{E}(t)\right]$$

Sapendo che in un condensatore

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}$$

All'istante t, abbiamo una carica $q(t)$. All'istante $t+\Delta t$ invece abbiamo carica $q(t+\Delta t)$. Ma come possiamo riscriverla? Sapendo che

$$\Delta q = i\Delta t$$

e quindi

$$q(t+\Delta t) = q(t) + i\Delta t$$

Avendo queste informazioni possiamo sostituirle nella formula del flusso di prima

$$\Delta\Phi(\vec{E}) = \left[\frac{q+i\Delta t}{\varepsilon_0 S} - \frac{q}{\varepsilon_0 S}\right]$$

Semplificando otteniamo

$$\Delta\Phi(\vec{E}) = \frac{i\Delta t}{\varepsilon_0}$$

Abbiamo così trovato il termine mancante, una corrente mai rilevata prima.

$$i_s = \varepsilon_0\frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t}$$

Questa è definita **corrente di spostamento**.
Tornando al problema originale, la circuitazione diventa quindi

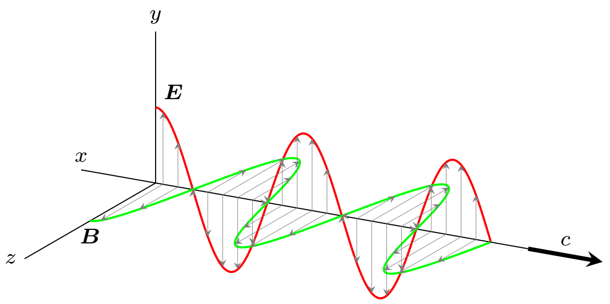
$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\left(i + \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{E})}{\mathrm{d}t}\right)$$

Onde elettromagnetiche

La grande scoperta di Maxwell è stata quella delle onde elettromagnetiche. Esse sono composte in uguale parte da un campo elettrico e uno magnetico. I due campi hanno forma sinusoidale e sono perpendicolari fra di loro, nonché in fase.
La **velocità** di un'onda è pari a

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$$

c: $3\cdot 10^8$ m/s
Il fatto che abbiano la velocità della luce, induce Maxwell a pensare che anche l'ottica sia un caso particolare di onda elettromagnetica.
Sono onde **trasversali** ciò significa che si propagano in un piano perpendicolare a quello di propagazione



In questo disegno possiamo vedere le due onde essere perpendicolari fra di loro ed in fase. Esse inoltre si propagano su un piano perpendicolare a quello di propagazione.
Vige anche una proprietà che relaziona i due campi

$$c = \frac{E}{B}$$

Intensità dell'onda

L'intensità dell'onda (spesso definita anche irradiamento o irraggiamento) è la quantità di energia che può trasportare l'onda.
L'intensità è definita come

$$I = \frac{P}{S} = \frac{U}{St}$$

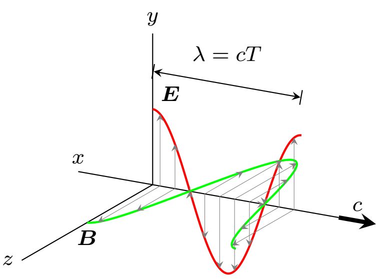
U: energia potenziale
S: superficie
t: tempo

Ma essendo

$$U = u \cdot \text{Vol}$$

u: densità di energia

Quale volume considerare? Possiamo prendere quello che è presente in un periodo



e quindi il nostro volume diventerebbe, considerando S la superficie su cui stanno i vettori,

$$\text{Vol} = ScT$$

e quindi tornando a sostituire

$$I = \frac{uScT}{ST} = \bar{u}c$$

Quanto vale u visto che ci sono due campi che variano istante per istante?

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

u_E: densità di energia del campo elettrico
u_B: densità di energia del campo magnetico

Maxwell aveva anche notato una cosa però

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 (cB)^2 = \frac{1}{2}c^2 B^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = u_B$$

e questo indica che il campo elettrico e il campo magnetico contribuiscono in egual misura all'intensità dell'onda.
Sapendo questo, prima di adattare la formula precedente, dobbiamo trovare un valore medio di E e di conseguenza uno medio di B.

$$\bar{E^2} = \frac{1}{T}\int_0^T E_0^2 \sin^2\alpha \, d\alpha = \frac{E_0^2}{2}$$

E quindi si definisce

$$E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \qquad B_{eff} = \frac{B_0}{\sqrt{2}}$$

Quindi

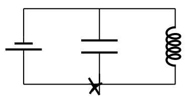
$$\bar{u} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{E_0^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0}\frac{B_0^2}{2} = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{4\mu_0}B_0^2$$

Sostituendo infine

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 c = \frac{1}{2\mu_0}B_0^2 c = \varepsilon_0 E_{eff}^2 c = \frac{1}{\mu_0}B_{eff}^2 c$$

Circuiti oscillanti

I circuiti oscillanti sono dei particolari circuiti LC che generano delle onde elettromagnetiche.



Quando il condensatore si carica, l'interruttore non fa arrivare corrente all'induttanza. Alla chiusura dell'interruttore, il condensatore si scarica attraverso l'induttanza e questo genera nel condensatore un certo campo elettrico che, per le equazioni di Maxwell, genera un campo magnetico che propaga l'onda elettromagnetica.
Quest'onda avrà una frequenza pari a

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Ovviamente perché l'onda venga ricevuta è necessaria un'antenna e un altro circuito oscillante. Per ricevere l'onda originale è anche necessario che la frequenza del circuito ricevente sia uguale a quella del mittente.

Equazioni di Maxwell nel mezzo

Cosa accade alle onde elettromagnetiche che venendo dal vuoto incontrano un mezzo? Definendo

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

Possiamo riscrivere la definizione della velocità

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\varepsilon_r\mu_r} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

In genere però se un'onda si scontra con un mezzo e quindi viene rifratto. Possiamo quindi riprendere le formule dell'ottica

$$n = \frac{c}{v}$$

da cui

$$v = \frac{c}{n}$$

e quindi

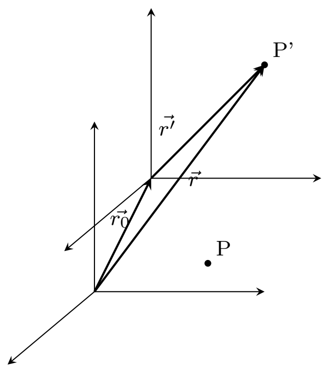
$$n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

Relatività

La relatività rivoluziona il significato della Fisica moderna. Grazie ad Einstein ma non solo, si è aperto un nuovo capitolo.

Trasformazioni Galileiane

Per comprendere la relatività, bisogna sapere che sistemi di riferimento si usavano in precedenza. Essi erano ancora quelli di Galileo, del 1600. Si distinugono due tipi di sistemi di riferimento: **inerziali** che soddisfano il principio di inerzia di Newton e **non inerziali** che invece non lo soddisfano. Di sistemi inerziali assoluti, nella realtà, non ce ne sono.
Un sistema che si muove di Moto Rettilineo Uniforme rispetto ad un sistema inerziale. Questo sistema è anch'esso inerziale. Andiamo a disegnare un sistema con un punto e il sistema che si è mosso.



Con il calcolo vettoriale, possiamo sapere che $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{r'}$. In $t = 0$, si ha che $S \equiv S'$.
All'istante t_1 ($t_1 \neq 0$) si ha che

$$\vec{r_1} = \vec{r'_1} + \vec{v}t_1$$

All'istante t_2 ($t_2 \neq 0$) si ha che

$$\vec{r_2} = \vec{r'_2} + \vec{v}t_2$$

Trovando la differenza

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r'} + \vec{v}\Delta t$$

Dividendo per t

$$\frac{\Delta\vec{r}}{t} = \frac{\Delta\vec{r'}}{t} + \vec{v}$$

Che, considerando il rapporto spazio/tempo, si riscrive come

$$\vec{u} = \vec{u'} + \vec{v}$$

E questa è chiamata la **legge di composizione delle velocità**. Si ricordi che tutto ciò che ha un apice (come u') è relativo al sistema di riferimento S'.

Imposto che S' si muova di moto rettilineo uniforme sull'asse delle x di S, le trasformazioni galileiane sono così descritte

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

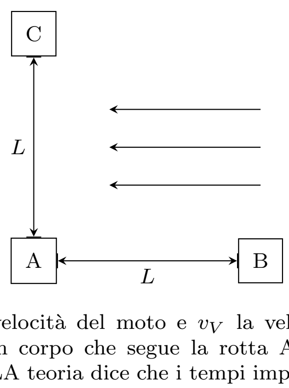
L'ultima equazione è la più importante in questo caso. Essa infatti ci dice che **il tempo è assoluto e non dipende dal sistema di riferimento**.

Esperimento di Michelson-Morley

Nell'arco di venti e più anni, i due scienziati Michelson e Morley dimostrarono che la velocità della luce non variava e che quindi il vento dell'etere, precedentemente teorizzato, non esisteva.

Il vento dell'etere

L'esperimento del vento dell'etere può essere riassunto così



Definendo v_M la velocità del moto e v_V la velocità del vento, si può immaginare un corpo che segue la rotta A-B e un altro che segue quella A-C. LA teoria dice che i tempi impiegati dai due moti devono essere diversi se il vento dell'etere esistesse. Infatti si ha che

$$t_\perp < t_\parallel$$

Considerato che la velocità d'andata e di ritorno sono diverse, si devono sommare, si hanno che la somma è pari a $\dfrac{L}{v_M - v_V} + \dfrac{L}{v_M + v_V}$

$$\begin{aligned} \frac{2L}{\sqrt{v_M^2 - v_V^2}} &< \frac{2v_M^2}{v_M^2 - v_V^2} \\ \frac{1}{v_M^2 - v_V^2} &< \frac{v_M^2}{(v_M - v_V)^2} \\ 1 &< \frac{v_M^2(v_M^2 - v_V^2)}{(v_M^2 - v_V^2)} \\ 1 &< \frac{v_M^2}{v_M^2 - v_V^2} \\ v_M^2 - v_V^2 &< v_M^2 \end{aligned}$$

e questo verifica la tesi.

Essendo l'etere solidale al sole, le due velocità perpendicolari e parallele dovevano essere diverse. Ma, attraverso un interferometro che hanno continuato a migliorare, hanno dimostrato che c è sempre costante, non è mai cambiata. Infatti la Terra ruotando doveva intercettare l'etere in maniere diverse. Questo avrebbe dovuto causare nell'interferometro diverse configurazioni di interferenza ma questo non si è mai visto.

Principi fondamentali della relatività ristretta

La prima forumulazione della relatività, è quella ristretta. Essa si fonda su due principi cardine:

1. **Tutte le formule devono avere la stessa forma per ogni tipo di sistema inerziale**
2. **La luce nel vuoto ha la stessa velocità per ogni sistema**

Questi due principi mettono in crisi la fisica classica. Infatti le recenti Equazioni di Maxwell non erano invarianti secondo le trasformazioni galileiane.

Simultaneità

Einstein propone un esperimento mentale per illustrare che due eventi non sono simultanei se si tiene conto dei principi della relatività. Infatti si immaginino due osservatori, O su di una banchina e O' su di un treno in moto rettilineo uniforme rispetto a O di velocità $\vec{v}$. Se $\vec{v} = \vec{0}$ ovviamente due qualsiasi eventi E_1, E_2 sarebbero simultanei per i due osservatori in quanto essi sarebbero nello stesso identico luogo.
Nel caso in cui però $\vec{v} \neq \vec{0}$, i due eventi non lo sono più. Infatti se esattamente quando $O \equiv O'$ si fanno partire due raggi luminosi a distanza uguale a destra e sinistra di O, O li vedrà arrivare nello stesso momento in quanto ha la stessa distanza da entrambi. O' invece, muovendosi, nel tempo che la luce impiega per raggiungerlo, avrà fatto un certo percorso e quindi vedrà i raggi in momenti diversi. E_1 ed E_2 non sono più simultanei per lui. Lo sarebbero se $c = \infty$ ma è stato dimostrato che non è così.
Questo porta a due conseguenze

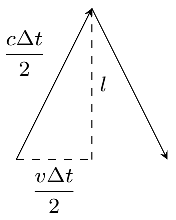
1. **La dilatazione del tempo**
2. **La contrazione della misura nella direzione del moto**

Dilatazione del tempo

Un orologio luminoso è composto da una sorgente luminosa posta ad un'estremità di una scatola di lunghezza l e da uno specchio nell'altra. L'unità di tempo diventa quindi il tempo necessario alla luce ad andare e tornare.
Si prendano due osservatori, O su di una banchina e O' su di un treno che si muove di velocità $\vec{v}$ rispetto a O. Entrambi hanno un orologio luminoso. Si definisca $\Delta t'$ il tempo misurato dall'orologio di O. Esso sarà pari a

$$\Delta t' = \frac{2l}{c}$$

Il tempo Δt invece sarà diverso in quanto nel periodo in cui la luce raggiunge lo specchio, il treno con l'ossevatore O' si sarà spostato. Quindi si ha una situazione del genere



Andando quindi a risolvere per Δt abbiamo che

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = l^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$
$$\frac{c^2}{4}(\Delta t)^2 = l^2 + \frac{v^2(\Delta t)^2}{4}$$
$$(c^2 - v^2)(\Delta t)^2 = (2l)^2$$
$$(c^2 - v^{)}(\Delta t)^2 = c^2(\Delta t')^2$$
$$(\Delta t)^2 = \frac{c^2(\Delta t')^2}{c^2 - v^2}$$
$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Quindi abbiamo che $\Delta t \neq \Delta t'$. Anzi, per $v \ll c$ si ha che $\Delta t \to \Delta t'$. $\Delta t'$ viene definito **tempo proprio**. Il termine

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

tornerà spesso fuori anche nelle trasformazioni di Lorentz, non è un caso si ritrovi anche lì.

La velocità limite della luce

Se si prende il fattore γ e lo si studia, si capirà subito che non può esserci una velocità maggiore c. Andando a fare un semplice studio di funzione si vede che

$$\mathscr{D}_\gamma =]-c, c[$$

ma poiché in fisica le velocità sono in genere positive, su può considerare solo $0 < v < c$. Vediamo inoltre che $\gamma(-v) = \gamma(v)$. Andando a calcolare la derivata prima si trova

$$\frac{\mathrm{d}\gamma(v)}{\mathrm{d}v} = \frac{v\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Andando a studiare il segno vediamo che in $v = 0$ ha un minimo. Andando a calcolare $\gamma(0) = 1$. Infine andando a fare il limite

$$\lim_{v \to c^-} \gamma = +\infty$$

si vede che $v = c$ è asintoto verticale e che quindi non è possibile superare la velocità della luce.
Questo, assieme al fatto che

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \gamma > 1$$

produce il fatto che $\Delta t > \Delta t'$ e che quindi si verifica una **dilatazione temporale**.

Trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz hanno la caratteristica di rendere invarianti le equazioni di Maxwell. Presi due sistemi inerziali S e S' che si muovono sull'asse delle x di moto rettilineo uniforme, le trasformazioni di Lorentz si scrivono come

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{cases}$$

La grande ed enorme novità sta proprio nell'ultima equazione, quella relativa al tempo. Sono due tempi diversi che dipendono dalla posizione e dalla velocità.
Presi due istanti t'_1, t'_2 si ha che

$$\Delta t = t'_2\gamma - \cancel{\frac{vx}{c^2}}\gamma - t'_1\gamma + \cancel{\frac{vx}{c^2}}\gamma = \gamma\Delta t'$$

Che è esattamente lo stesso risultato ottenuto da Einstein nei suoi esperimenti mentali.

Contrazione delle lunghezze

Presi due sistemi di riferimento S, S' che si muovono di moto rettilineo uniforme e un corpo di lunghezza L solidale a S', i ue sistemi misureranno L per S e L' per S'. Si ha

$$L' = x'_B - x'_A \quad L = x_B - x_A$$

Si ha inoltre che $x' = \gamma(x - vt)$. Calcolando allora

$$L' = x'_B - x'_A = \gamma(x_B - vt) - \gamma(x_A - vt) = \gamma(x_B - x_A) = \gamma L$$

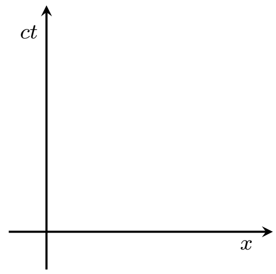
Si ha quindi che

$$L = \frac{L'}{\gamma}$$

e che quindi le due lunghezze non sono misurate uguali dai due sistemi di riferimento.

Piano di Minkowsky

Minkowsky ha preso le trasformazioni di Lorentz e le ha guardate da un punto di vista puramente matematico. Il suo piano è un piano simile

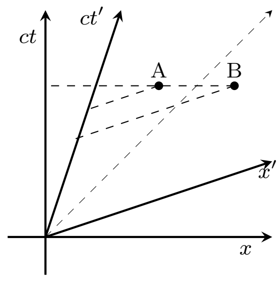


Come mai ct nell'asse delle y? Se un punto P è definito da 4 variabili $P(x, y, z, t)$, non si può avere tre unità di misura di lunghezza e una di tempo. Per uniformarle, si è moltiplicato il tempo per una velocità (sempre costante), ottenendo una lunghezza.
Ma se un punto ha 4 coordinate, come può chiamarsi "piano"? Sempre perché definiamo $y' = y$ e $z' = z$. Quindi otteniamo che da $\mathbb{R}^4$ arriviamo a $\mathbb{R}^2$. Notiamo inoltre che il piano, rispetto alla fisica classica, ha invertiti tempo e posizione.

Andando a scrivere le equazioni di Lorentz con un termina $\beta = \dfrac{v}{c}$

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta ct) \\ t' = \gamma\left(t - \beta\dfrac{x}{c}\right) \end{cases}$$

Per trovare l'asse verticale, poniamo $ct' = 0$, $t' = 0$ e che quindi $ct = \beta x$. Questo è il nuovo asse del piano di Minkowsky. Ponendo $x' = 0$ si ha che $ct = \dfrac{x}{\beta}$ e che quindi abbiamo che la perpendicolare al primo-terzo quadrante è la retta che divide il piano. Praticamente il piano ora diventa così



Da questo vediamo una cosa che è fondamentale. $t_A = t_B$ ma $t'_A \neq t'_B$.

Invariante spazio-temporale

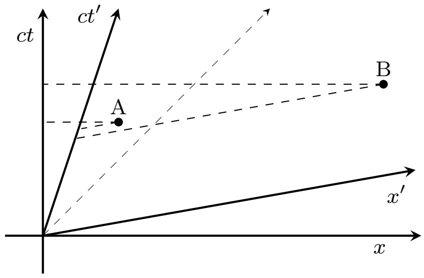
Minkowsky aveva trovato un'invariante nelle equazioni di Lorentz. Essa era σ. Infatti è definita come

$$(\Delta\sigma)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta S)^2$$

Dove ΔS è la differenza della variazione di tutte le coordinate. Si ha quindi che

Causalità

Come si può definire la causalità di due eventi se due osservatori li vedono in rapporti diversi?



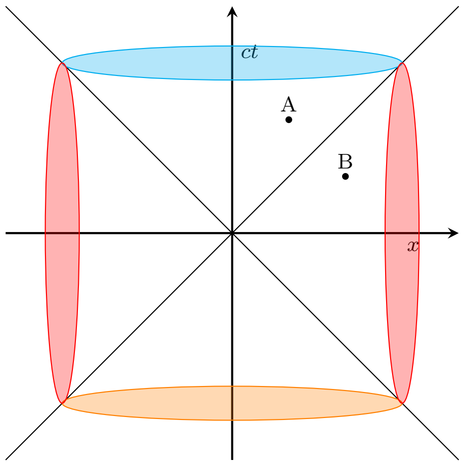
Come possiamo vedere dall'esempio, secondo l'osservatore S, l'evento A viene prima di B, secondo S' invece è il contrario. Quindi come può essere A causa di B in modo assoluto? Prese le due coordinate $A(x_A, ct_A)$ e $B(x_B, ct_B)$, si ha che se

$$|x_B - x_A| \leq c|t_B - t_A|$$

allora i due eventi si dicono **causalmente connessi**. In questo caso infatti si ha che

$$(\Delta\sigma)^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \geq 0$$

Da questa caratteristica si possono dedurre alcune cose, tra le quali, i coni del presente, passato e futuro.



In questo grafico, A e B non sono causalmente connessi in quanto la considione precedente non è più verificata.
I coni le cui basi sono rosse sono denominati **coni del presente**. In questi coni, gli eventi non possono essere causalmente connessi con eventi futuri.Questo perché B ad esempio dovrebbe muoversi ad una velocità maggiore di c per poter rientrare nel cono del futuro.
Il cono con la base azzurra è definito **cono del futuro**, quello con la base arancione **cono del passato**. In questi coni, gli eventi possono essere causalmente connessi fra di loro per tutti gli osservatori, cosa che non accadeva negli altri.

Dinamica relativistica

La dinamica relativistica parte dalla nuova definizione di quantità di moto. Essa infatti da $\vec{q} = m\vec{v}$ diventa

$$\vec{q} = m\gamma\vec{v}$$

In questo modo si mantiene il principio di conservazione della quantità di moto anche in ambito relativistico.

Lavoro

Si prenda una particella di massa m con $v_0 = 0$ su cui è applicata una forza $\vec{F}$ per farla accelerare a velocità v. Se si definisce 1 l'istante iniziale e 2 quello finale, nella meccanica classica il lavoro è pari a

$$L = \int_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

Nella dinamica relativistica invece la faccenda è più complicata.

$$L = mc^2\gamma - mc^2$$

Notiamo quindi che l'energia cinetica di una particella ha due componenti. Viene definita $E_0 = mc^2$ l'energia a riposo. Si ha quindi che

$$E_0 = mc^2 \quad E_c = (\gamma - 1)mc^2 \quad E_{\text{tot}} = E_c + E_0 = m\gamma c^2$$

Rapporto quantità di moto-energia

Si sa che $q = \gamma mv$ e $E = \gamma mc^2$. Se si sottraggono e si fanno successive operazioni

$$\begin{aligned} q &= \gamma mv \\ cq &= \gamma mvc \\ c^2q^2 &= \gamma^2 m^2 v^2 c^2 \quad E^2 = \gamma^2 m^2 c^4 \\ E^2 - cq^2 &= m^2\gamma^2 c^2 (c^2 - v^2) \\ E^2 - cq^2 &= m\frac{c^2}{c^2 - v^2}c^2(c^2 - v^2) \\ E^2 - c^2q^2 &= m^2c^4 \end{aligned}$$

Questo torna particolarmente utile nel caso in cui la particella in questione sia un fotone con $m = 0$. Si ha in tal caso

$$q = \frac{E}{c}$$

Esercizi

Questa sezione è dedicata ad alcuni esercizi con relativa risoluzione e spiegazione. Il suo scopo è quello di chiarire i concetti teorici con esempi pratici.

Consigli

Ecco alcuni consigli che saranno utili nello svolgimento degli esercizi:

1. **Leggere più volte il problema**;
2. **Partire dalle formule generali.** Questo aiuterà a imparare le formule e ad applicarle. Leformule particolari sono generalmente derivate e alcune volte anche in casi particolari (alcune variabili pari a zero, masse uguali, ...);
3. **Guardare corpo per corpo le forze che interagiscono.** Andare per ordine e con calma è una garanzia per evitare di fare errori di calcolo o di teoria. Una volta presa questa abitudine, si riduce il numero di errori di distrazione;
4. **Avere un sistema unico di risoluzione.** Abituarsi al proprio sistema, seguendo o meno questi consigli, aiuterà ad essere costanti e ad evitare errori di distrazione;
5. **Mettere tutti i dati in una "tabella".** Aiuta a visualizzare ciò che si ha e capire come ottenere ciò che serve;
6. **Scrivere le formule utilizzabili.** Assieme al punto precedente, aiuta ad avere un quadro generale di ciò che si va ad affrontare;
7. **Ricontrollare i conti a fine di ogni riga.** Nessuno è infallibile, è facile scambiare un segno o fare stupidi errori, ricontrollare scongiura la loro propagazione;

Cinematica

Moto Rettilineo Uniforme

Esercizio 1 Un poliziotto sta inseguendo un fuggitivo su una strada rettilinea. La velocità del fuggitivo è costante a $v_f = 120\,\mathrm{km/h}$ e il poliziotto è a distanza $d = 500\,\mathrm{m}$ e ha velocità pari a $v_p = 180\,\mathrm{km/h}$. Qual è la **velocità relativa** del poliziotto rispetto al fuggitivo? Quanto **tempo** ci vuole perché lo raggiunga?

La velocità relativa è molto semplicemente la differenza tra le velocità.

$$v_r = v_p - v_f \rightarrow v_r = 180 - 120 = \boxed{60\,\mathrm{km/h}}$$

Per trovare quando i due individui si incontrano basta mettere a sistema le loro due equazioni della posizione

$$\begin{cases} x = x_0 + v_f t \\ x = v_p t \end{cases} \rightarrow 180t = 120t + 500 \rightarrow t = \frac{50}{6} = \boxed{8.3\,\mathrm{s}}$$

Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato

Esercizio 1 Un corpo cade liberamente fino a terra che si trova ad una distanza h. Sapendo che nell'ultimo secondo di volo percorre una distanza pari a $\frac{h}{2}$, **quanto vale** h?

Dalla formula del MRUA $v^2 = v_0^2 + 2ay$, possiamo sostituire le informazioni che abbiamo per per trovare la velocità quando il corpo si trova a $\frac{h}{2}$

$$v^2 = v_0^2 + 2ay \rightarrow v = \sqrt{gh}$$

Inserendo ora la velocità nell'equazione oraria possiamo ricavare h

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow y = \sqrt{gh} + \frac{1}{2}gt^2$$

e ora non resta che sostituire i dati

$$\frac{h}{2} = \sqrt{9.81 \cdot h} + 9.81 \rightarrow h = 2\sqrt{9.81 \cdot h} + 9.81$$
$$(h - 9.81)^2 = 39.24h \rightarrow h^2 - 58.86h + 96.2361 = 0 \rightarrow$$
$$\begin{cases} h_1 \approx 57\,\mathrm{m} \\ h_2 \approx 1.7\,\mathrm{m} \end{cases}$$

Avendo due soluzioni, come scegliamo quella corretta? Sappiamo che il corpo vola per più di un secondo, quindi vediamo quanta distanza potrebbe percorrere quel corpo in un secondo

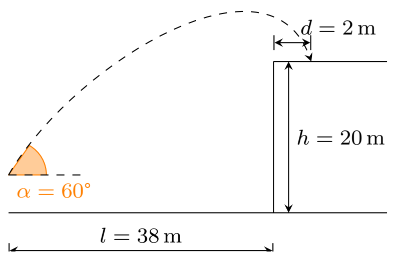
$$h = \frac{gt^2}{2} = 4.9\,\mathrm{m}$$

Da questo è evidente che $1.7\,\mathrm{m}$ non può essere la nostra altezza in quanto è evidentemente inferiore alla distanza percorsa in un secondo. Di conseguenza

$$\boxed{h = 57\,\mathrm{m}}$$

Moto Parabolico

Esercizio 1 Una pallina è lanciata a $\alpha = 60°$ rispetto l'orizzntale. Atterra ad una distanza $d = 2\,\mathrm{m}$ dal bordo di un tetto piatto che si trova ad una altezza $h = 20\,\mathrm{m}$. La parete del tetto si trova ad una distanza $l = 38\,\mathrm{m}$ dal lanciatore. A che **velocità** è stata lanciata la pallina?



La distanza totale che la pallina percorre è $x = l + d = 40\,\mathrm{m}$. Quindi il tempo passato prima dell'atterraggio è pari a

$$t = \frac{x}{v_{0_x}} \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} = \frac{2x}{v_0}$$

Avendo poi a mente l'equazione oraria

$$y = v_{0_y} t - \frac{1}{2}gt^2$$

possiamo sostituire le informazioni conosciute

$$20 = \sin 60 v_0 \frac{2x}{v_0} - \frac{1}{2}g\frac{2x}{v_0}^2 \rightarrow v_0 = \frac{\sqrt{31,360}}{49.3} = \boxed{25.2\,\mathrm{m/s}}$$

Esercizio 2 Una pallina è lanciata verticalmente con una velocità $v_y = 10\,\mathrm{m/s}$ da un tetto ad altezza $h = 20\,\mathrm{m}$. **Quanto tempo** passa prima che tocchi il terreno? **A quale velocità** lo colipirà?

Quanto tempo è facilmente individuabile. Prendiamo la formula oraria

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \rightarrow y = \cancel{y_0} + \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2}at^2$$

Abbiamo tagliato le variabili che sono pari a 0 nel nostro caso. Isoliamo t e abbiamo

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Stiamo però attenti. Questa formula presuppone che $v_{0_y} = 0$ e nel nostro caso non è così. Però $v_{0_y} = 0$ quando la pallina ha raggiunto l'altezza massima dopo il lancio e torna a scendere. Infatti anche y non è solo 20 perché quando la pallina comincia a cadere ha già raggiunto una certa altezza. Troviamola

$$h_{max} = \frac{v_{0_y}^2}{2g} \rightarrow h_{max} = \frac{100}{2 \cdot 9.81} = 5\,\mathrm{m}$$

Possiamo ora sostituire nella formula precedente per trovare il tempo

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \to t = \sqrt{\frac{2 \cdot (20+5)}{9.81}} \approx \boxed{2\,\mathrm{s}}$$

La velocità è ricavabile dalla formula

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x \to v = \sqrt{2gh} \to$$
$$v = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 25} \approx \boxed{22.41\,\mathrm{m/s}}$$

Dinamica

Funi, carrucole, piani inclinati e attrito

Esercizio 1 Un corpo di massa 2 kg scivola lungo un piano inclinato liscio (senza attrito). Determina l'**accelerazione** con la quale si muove e il **tempo** che impiega a percorrere tutto il piano, sapendo che la lunghezza del piano è 1 m e la sua altezza è 0.5 m.

L'accelerazione è veramente semplice trovarla in quanto basta ricordarsi una formula:

$$a = g \sin\alpha \to a = 9.81 \cdot \sin 30° = 9.81 \cdot 0.5 = \boxed{4.905\,\mathrm{m/s^2}}$$

Come sapevamo l'angolo? Essendo il piano inclinato l'ipotenusa, la trigonometria dice che perché l'altezza sia di 0.5 l'angolo deve essere di 30°.

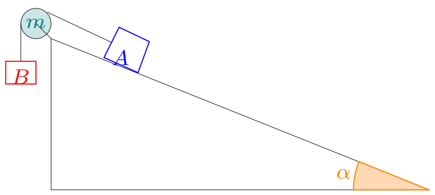
E ora, avendo l'accelerazione è un semplice esercizio di cinematica. Per prima cosa si trova la velocità finale usando una delle formule più utili di sempre

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot \Delta x \to v^2 = 0^2 + 2 \cdot 4.905 \cdot 1 = 9.81 \to$$
$$v = \sqrt{v^2} = \sqrt{9.81} \approx \underline{3.31\,\mathrm{m/s}}$$

e ora si trova il tempo

$$v = v_0 + at \to t = \frac{v - v_0}{a} \to t = \frac{3.13}{4.905} \approx \boxed{0.64\,\mathrm{s}}$$

Esercizio 2 Un blocco A di massa $M = 0.6$ kg si muove senza attrito su un piano inclinato di 30°. Mediante una fune priva di massa, il blocco A è connesso ad un blocco B di 22.0 kg come mostrato in figura. La carrucola ha massa trascurabile e si muove senza attrito. Determina l'**accelerazione** di ciascun blocco e la **tensione** della corda.



Si trova l'accelerazione molto rapidamente mediante l'uso di una singola formula:

$$a = \frac{m_B g - m_A \sin\alpha}{m_A + m_B} \to a = \frac{22 \cdot 9.81 - 8 \cdot 9.81 \cdot \sin 30°}{22+8} \to$$
$$a = \frac{215.82 - 39.24}{31} \to \frac{176.58}{31} \approx \boxed{5.69\,\mathrm{m/s^2}}$$

Per la tensione la questione è un po' più particolare. La tensione rappresenta la risultante tra la forza che tira da ciascuna parte. Quindi, per prima cosa troviamole

$$F_A = m_A \sin\alpha \to F_A = 8 \cdot 9.81 \sin 30° = \underline{39.24\,\mathrm{N}}$$

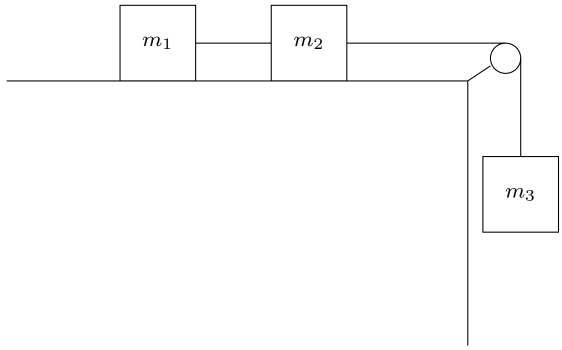
$$F_B = m_B g \to F_B = 22 \cdot 9.81 = \underline{215.82\ N}$$

Ora per trovare la tensione vediamo che il blocco che "tira" è il blocco B. Quindi

$$T = \frac{F_B - F_A}{2} \to T = \frac{215.82 - 39.24}{2} = \boxed{88.29\,\mathrm{N}}$$

Da notare che si divide per due in quanto la tensione che troviamo è da entrambe le parti, a noi interessa solo una.

Esercizio 3 Considera il sistema di blocchi $m_1 = 80.0$ kg, $m_2 = 90$ kg tirati da una massa $m_3 = 60$ kg. Se il coefficiente di attrito dinamico tra le superfici dei blocchi e il binario orizzontale vale $\mu_d = 0.3$, determina **l'accelerazione** del sistema e le **tensioni** dei fili.



Per risolvere questo tipo di esercizi, bisogna essere metodici. Per prima cosa troviamo la forza peso di m_3 che è anche l'unica forza che agisce direttamente.

$$P = m \cdot g \to P = 60 \cdot 9.81 = \underline{588.6\,\mathrm{N}}$$

Ora noi utilizzeremo la definizione di forza per calcolare l'accelerazione. Quindi dobbiamo vedere la forza che agisce direttamente sul sitema. Per ora abbiamo calcolato P, però in contrasto ci sono anche le forze di attrito. Calcoliamole.

$$F_{a_1} = P_1 \cdot \mu_d \to F_{a_1} = 80 \cdot 9.81 \cdot 0.3 = \underline{235.44\,\mathrm{N}}$$

$$F_{a_2} = P_2 \cdot \mu_d \to F_{a_2} = 90 \cdot 9.81 \cdot 0.3 = \underline{264.87\ N}$$

E ora possiamo trovarci la forza che agisce sul sistema. Dato che le forze di attrito contrastano la forza peso, si tolgono da quest'ultima.

$$F = \sum F \to F = P - F_{a_1} - F_{a_2} \to$$
$$F = 588.6 - 235.44 - 264.87 = \underline{88.29\,\mathrm{N}}$$

E infine sfruttando la definizione di forza, possiamo ricavare l'accelerazione.

$$F = ma \to a = \frac{F}{m} \to a = \frac{88.29}{80+90+60} \approx \boxed{0.38\,\mathrm{m/s^2}}$$

Per le tensioni possiamo immediatamente trovare T_1 in quanto è l'unica che agisce su m_1 che è isolato.

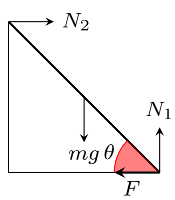
$$T_1 = a \cdot m_1 \to T_1 = 0.38 \cdot 80 = \boxed{30.4\,\mathrm{N}}$$

E quesat è la prima, la seconda invece richiede un attimo di attenzione. Su m_2 agiscono sia T_1 che T_2. Dato che sappiamo che il sistema non è in equilibrio (è presente un'accelerazione), sappiamo anche che le $T_2 - T_1 = m_2 \cdot a$ in quanto sul corpo m_2 è presente l'accelerazione e agiscono le due tensioni.

$$T_2 - T_1 = m_2 \cdot a \to T_2 = T_1 + m_2 \cdot a \to$$
$$T_2 = 30.4 + 90 \cdot 0.38 = \boxed{64.6\,\mathrm{N}}$$

Esercizio 4 Una scala uniforme è appoggiata al muro, formando un angolo θ con il pavimento. Il coefficiente di attrito tra la scala e il pavimento è μ. **Trova in funzione di μ l'angolo minimo θ_m in cui la scala non scivola.**

Disegnando la situazione con anche le forze in gioco risulta



Quindi siano N_1 e N_2 le forze di reazione contro la scala e F la forza di attrito che tiene su la scala. Diciamo che la scala è lunga L e ha massa m. Allora la condizione di equlibrio è data da

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

quindi

$$\begin{cases} N_2 - F = 0 \\ N_1 - mg = 0 \end{cases}$$

Scegliamo ora un punto di riferimento: il punto di contatto tra la scala e il pavimento. Decidiamo poi che se una forza si allontana dal muro è negativa. Quindi le forze che agiuscono in quel punto devono essere zero (per la condizione di equilibrio). Quindi

$$-LN_2 \sin\theta + \overbrace{\frac{L}{2}}^{\text{Questo perché la massa si trova nel baricentro (o centro di massa)}} mg\cos\theta = 0$$

che semplificato diventa

$$N_2 \tan\theta = \frac{1}{2}mg$$

Utilizzando la prima equazione del sistema, possiamo quindi dire che

$$\frac{1}{2}mg\tan\theta = F$$

L'equilibrio è possibile fintanto che $F \leq N_1\mu$. Usando la seconda equazione viene che

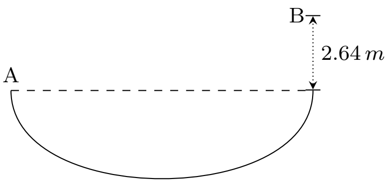
$$N_1\mu = mg\mu$$

quindi l'equilibrio necessita che $\tan\theta \leq \frac{1}{2}\mu$ e quindi

$$\boxed{\theta_m = \arctan\frac{1}{2}\mu}$$

Lavoro, Energia e Potenza

Esercizio 1 Un ragazzo su uno skateboard parte nel punto A rappresentato in figura, e sale fino ad un'altezza di $2.64\,m$ al di sopra dell'estremità della rampa nel punto B. Qual era il modulo della **velocità** iniziale del ragazzo nel punto A?



Siamo in un caso di sistema conservativo e quindi possiamo sfruttare la formula $U_1 + E_{c_1} = U_2 + E_{c_2}$. Sfruttando questa caratteristica possiamo semplicemente risolvere.

$$U_1 + E_{c_1} = U_2 + E_{c_2} \to mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Ora però, prima di passare ai calcoli, possiamo subito semplificare la formula in quanto sappiamo che nel secondo momento il ragazzo si ferma quando raggiunge i $2.64\,m$. Quindi semplifichiamola.

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \to$$
$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \cancel{\frac{1}{2}mv_2^2} \to$$
$$\cancel{m}gh_1 + \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 = \cancel{m}gh_2 \to gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = gh_2$$

Abbiamo anche cancellato la m in quanto è costante a tutti gli elementi.
Ora possiamo sostituire a h_2 il suo valore effettivo, ovvero $h_1 + 2.64$. Questo perché non sappiamo a che altezza parte ma sappiamo che la supera di $2.64\,m$.

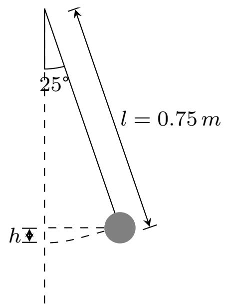
$$gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = gh_2 \to gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = g\,(h_1 + .64)$$
$$gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = gh_1 + g\cdot 2.64$$

E ora non ci resta che isolare v.

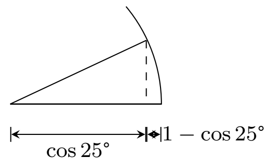
$$gh_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = gh_1 + g\cdot 2.64 \to \frac{1}{2}v_1^2 = \cancel{gh_1} + g\cdot 2.64 - \cancel{gh_1} \to$$
$$v_1^2 = 9.81\cdot 2.64\cdot 2 \to$$
$$v_1 = \sqrt{9.81\cdot 2.64\cdot 2} = \sqrt{51.8} \approx \boxed{7.2\,\mathrm{m/s}}$$

Esercizio 2 Un pendolo semplice ha la lunghezza di .75 m e una pallina con una massa d 0.15 kg. La pallina viene lasciata andare quando il filo forma un angolo di 25° rispetto alla verticale.

- **Dimostra** che l'altezza da cui la pallina del pendolo viene lasciata andare è $h = l\cdot(1-\cos 25°)$
- Qual è l'**energia cinetica** del pendolo quando, durante l'oscillazione, il filo forma un angolo di 9.0°?
- Qual è la **velocità** del pendolo nel punto più basso della sua oscillazione?



Dimostrare il primo punto è estremamente semplice e richiede solo nozioni di trigonometria. Il successivo disegno aiuterà a chiarire:



Come si può vedere, la lunghezza $1-\cos 25°$ è il nostro h. Quindi perché moltiplicarla per l? Perché la lunghezza della corda non è quella della circonferenza goniometrica $(0.75 \neq 1)$.
Avendo quindi chiarito il primo punto, possiamo concentrarci sul secondo.

Per prima cosa, ricordando la formula per l'energia cinetica ($E_c = \frac{1}{2}mv^2$) notiamo che ci manca solo la velocità. Come trovarla? Utilizzando la solita formula $U_1 + E_{c_1} = U_2 + E_{c_2}$.

$$U_1 + E_{c_1} = U_2 + E_{c_2} \to mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

Prima di proseguire i calcoli, possiamo subito eliminare due dei quattro elementi.

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \to$$
$$mgh_1 + \cancel{\frac{1}{2}mv_1^2} = \cancel{mgh_2} + \frac{1}{2}mv_2^2 \to$$
$$\cancel{m}gh_1 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2$$

Possiamo ora trovarci la velocità. Non serve neanche facciamo la radice quadrata in quanto dopo comunque lo ri-eleveremmo al quadrato.

$$gh_1 = \frac{1}{2}v_2^2 \to$$
$$v_2^2 = 2\cdot 9.81\cdot(1-\cos 25°)\cdot 0.75 = \underline{13.3416\,\mathrm{m/s}}$$

E ora troviamo l'energia cinetica

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \to \frac{1}{2}\cdot 0.15\cdot 13.3416 = \boxed{1\,\mathrm{J}}$$

Ora manca solo l'ultimo punto. La teoria è molto simile alla prima parte, in definitiva cambia solo l'altezza.

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow$$
$$mgh_1 + \cancel{\frac{1}{2}mv_1^2} = \cancel{mgh_2} + \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow$$
$$\cancel{m}gh_1 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2 \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.75} \approx \boxed{3.83\text{m/s}}$$

Esercizio 3 Una gru solleva un peso di massa $m = 500\,\text{kg}$ verticalmente a velocità costante $v = 2\,\text{m/s}$. Trova la **potenza spesa dal motore della gru**. Qual è il **lavoro** fatto dalla gru se solleva il peso di $h = 20\,\text{m}$?
Una seconda gru è capace di sollevare la stessa massa al doppio della velocità. Trova la potenza e il lavoro fatti dalla seconda gru alzando il peso della stessa altezza.

Il lavoro è definito come $L = F \cdot S \cdot \cos\alpha$ e quindi sostituendo ciò che abbiamo

$$L = F \cdot S \cdot \cos\alpha \rightarrow L = 500 \cdot 9.81 \cdot 20 \cdot \cos 90 = \boxed{98100\,\text{N} \cdot \text{m}}$$

Per trovare la potenza abbiamo bisogno anche del tempo. Troviamolo

$$x = x_0 + vt \rightarrow 20 = 0 + 2t \rightarrow t = 10\,\text{s}$$

La potenza può essere trovata facilmente usando l'altra formula per il lavoro

$$P = \frac{L}{t} \rightarrow P = \frac{98100}{10} = \boxed{9800\,\text{W}}$$

Per l'ultimo punto, dato che abbiamo una forza costante che agisce, possiamo usare la seguente formula

$$P = Fv \rightarrow P = mav \rightarrow 500 \cdot 9.81 \cdot 4 = \boxed{19620\,\text{W}}$$

La formula si ricava da $\dfrac{F \cdot S}{t} \rightarrow Fv$.
Il lavoro lo si trova esattamente come prima

$$L = F \cdot S \cdot \cos\alpha \rightarrow L = 500 \cdot 9.81 \cdot 20 \cdot \cos 90 = \boxed{98100\,\text{N} \cdot \text{m}}$$

Notiamo allora che il lavoro rimane costante mentre la potenza raddoppia.

Impulso

Esercizio 1 Una barca e i suoi occupanti di massa $M = 200\,\text{kg}$ contiene 10 sacchi di carbone ciascuno di 5 kg. La barca è stazionaria nella sua posizione. Gli occupanti cercano di raggiungere la riva lanciando fuori i sacchi di carbone ad una velocità orizzontale relativa v_r. Assumendo l'attrito nullo, **qual è la velocità dopo il primo sacco**? **E dopo il secondo?** Scrivi i risultati in termini di v_r.

Innanzitutto sappiamo che il sistema è conservativo in quanto non ci sono forze esterne. Detto questo, sappiamo anche che quindi $q_1 = q_2$.
Prima di cominciare, sappiamo che il sistema ha massa $200 + 5 \cdot 10$
Nel primo caso vediamo che la barca è ferma quindi sappiamo già che $q_1 = 0$. Quindi possiamo scrivere

$$0 = 245v - 5v_r \rightarrow v = \frac{5v_r}{245} = \boxed{\frac{1}{43}v_r}$$

245 perché nella situazione finale è che la barca ha perso una sacca ed essa sta volando. Sappiamo quindi la velocità nel primo caso.
Nel secondo caso, la barca ha già una sua velocità quindi scriviamo

$$\frac{1}{43}v_r = 240v + 5\left(-v_r + \frac{1}{43}v_r\right)$$

Isoliamo v e otteniamo

$$\boxed{v \approx 4 \cdot 10^{-2}\,\text{m/s}}$$

Abbiamo risolto il problema ma perché abbiamo scritto $-v_r + \dfrac{1}{43}v_r$?
Nella seconda situazione la barca ha già una velocità propria che è opposta a quella che ottiene il sacco lanciato. La situazione è simile a quella di un treno in corsa da cui si spara un proiettile in verso opposto. Ci stiamo spostando ad una velocità pari a $\dfrac{1}{43}v_r$ e la sacca ha velocità in verso opposto pari a v_r.

Urti

Esercizio 1 Una mitragliatrice di massa 30 kg (comprendente quella dei proiettili) è installata a bordo di un carrello di massa 100 kg e spara verso sinistra una sventagliata di 10 proiettili ciascuno di massa $30\,g$ con la velocità di 60 m/s. Quale **velocità** verso destra acquisterà il carrello?

Qui siamo in un caso in di urto elastico, quindi vige il principio di conservazione del moto. Di conseguenza la soluzione di quest'esercizio è estremamente semplice.

$$m_1v_1 = m_2v_2 \rightarrow 60 \cdot 0.30 = 129.7 \cdot v_2$$

Perché 129.7? Perché sappiamo che la mitragliatrice e il carrello pesano insieme $100 + 30 = 130\,Kg$ ma sono stati sparati 10 colpi da $0.03\,Kg$ l'uno, quindi il peso finale sarà $130 - 10 \cdot 0.03 = 129.7\,Kg$.
Ora non resta che risolvere semplicemente.

$$v_2 = \frac{60 \cdot 0.30}{129.7} \approx \boxed{0.139\,\text{m/s}}$$

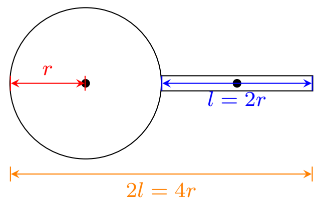
Esercizio 2 Una pallottola di massa $m = 10\,g$ colpisce alla velocità $v_p = 280\,m/s$ un pendolo balistico di massa $M = 2.0\,Kg$, restando incorporata nel pendolo. Calcola l'**altezza** h di cui s'innalza il pendolo.

Questo esercizio è estremamente semplice in quanto siamo in una situazione di un proiettile contro un corpo e abbiamo tutti i dati necessari.

$$v_p = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh} \rightarrow h = \frac{v_p^2 m^2}{2g\,(M+m)^2} \rightarrow$$
$$h = \frac{280^2 \cdot 0.01^2}{2 \cdot 9.81 \cdot (2 + 0.01)^2} \rightarrow h = \frac{7.84}{86.5242} = \boxed{0.09\,\text{m}}$$

Centro di Massa

Esercizio 1 Una racchetta da tennis può essere schematizzata in un cerchio di raggio r e massa m_1 a cui è attaccato un bastone uniforme di lunghezza l e massa m_1. Ponendo $r = l/2$ e $m_1 = m_2$, trova il **centro di massa** della racchetta. Viene poi aggiunta una massa $m_3 = m_2/2$ nel punto più lontano dal bastone. Trova il **nuovo centro di massa**.



Sappiamo che in un corpo uniforme il centro di massa si trova nel baricentro. Nel caso del cerchio è nel centro stesso e nel caso del rettangolo è a a metà della sua lunghezza. Dato che abbiamo due possibilità, scegliamo di scrivere tutto in funzione di r. È generalmente meglio scegliere la
variabile più "piccola" perché dona più flessibilità. Decidiamo anche di porre l'origine al manico della racchetta.
A questo punto procediamo con i calcoli. Dal disegno vediamo già tutte le distanze

$$x = \frac{\sum xm}{\sum m} \rightarrow x = \frac{m \cdot r + m \cdot 3r}{2m} \rightarrow x = \frac{4rm}{2m} = \boxed{2r}$$

Il centro di massa si trova quindi all'attaccatura del manico.
Aggiunta la nuova massa, aggiorniamo i calcoli

$$x = \frac{\sum xm}{\sum m} \rightarrow x = \frac{\frac{m}{2}4r + m \cdot r + m \cdot 3r}{2m + \frac{m}{2}} \rightarrow$$
$$x = \frac{7mr}{\frac{5}{2}m} \rightarrow x = \boxed{\frac{14}{5}r}$$

Momento Angolare ed Inerzia

Esercizio 1 Una penna di lunghezza 12 cm viene appoggiata in posizione verticale su un piano con attrito. Essa inizialmente ferma, cade ruotando attorno al punto di contatto con il piano. Calcola **la velocità lineare** della testa della penna e l'**accelerazione angolare** nell'istante dell'impatto con il piano.

Essendo un problema di dinamica in cui il sistema è conservativo, possiamo scrivere subito

$$U_1 + E_{c_1} = U_2 + E_{c_2}$$

In questo modo possiamo anche subito eliminare due elementi. Sappiamo che parte da ferma e arriva ad essere ferma. Questo significa che all'inizio c'è solo energia potenziale, alla fine solo cinetica.

$$U_1 + E_{c_1} = U_2 + E_{c_2} \to U_1 + \cancel{E_{c_1}} = \cancel{U_2} + E_{c_2}$$

Quindi ora abbiamo un'equazione in cui possiamo cominciare a sostituire

$$U_1 = E_{c_2} \to mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Come mai $\frac{l}{2}$ e non l? Questo perché l'energia si concentra nel centro di massa che si trova a metà distanza tra la punta e la testa della penna. Ora possiamo sostituire a I l'inerzia di una barra che è equivalente a $\frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4}$

$$\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2 + m\frac{l^2}{4}\right)\omega^2 \to$$
$$\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{m}gl = \cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\cancel{m}l^2\right)\omega^2 \to$$
$$g\cancel{l} = \frac{1}{3}l^{\cancel{2}}\omega^2 \to \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} \to$$
$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot 9.81}{0.12}} \approx \underline{15.6\,\text{rad/s}}$$

E ora non resta che trovare la velocità tangenziale avendo quella angolare

$$v = \omega r \to v = 15.6 \cdot 0.12 = \boxed{1.8\,\text{m/s}}$$

E ora è da trovare solo l'accelerazione angolare. Anche qui sfruttiamo la conservitività del sistema.

$$\frac{1}{2}\cancel{m}g\cancel{l} = \frac{1}{3}\cancel{m}l^{\cancel{2}}\alpha \to \alpha = \frac{3g}{2l} \to \alpha = \frac{3 \cdot 9.81}{2 \cdot 0.12} = \boxed{122.6\,\text{rad/s}^2}$$

Esercizio 2 Una ruota è costituita da un anello di spessore trascurabile di massa $M = 20$ kg, sostenuto da raggi di massa trascurabile e di lunghezza $R = 0.5$ m. Essa sta ruotando attorno al proprio asse alla frequenza di 5 Hz. Alla sua periferia viene accostata una piastra con la quale essa sviluppa una forza di 50 N tangente alla ruota. Determinare **quanti giri** deve compiere la ruota prima di fermarsi.

Per prima cosa identifichiamo che abbiamo un corpo che ruota e una forza che generano un momento. Quindi troviamoci quanto vale la decelerazione causata da questa forza tangenziale

$$M = I\alpha \to -F_a\cancel{r} = mr^{\cancel{2}}\alpha \to \alpha = \frac{-F_a}{mr} \to$$
$$\alpha - \frac{50}{20 \cdot 0.5} = \underline{-5\,\text{rad/s}^2}$$

Ora possiamo facilmente trovarci la velocità angolare così poi da poter usare la legge oraria

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \to \omega = \frac{2\pi}{\frac{1}{f}} \to \omega = 2\pi f \to \omega = \underline{10\pi}$$

Per comodità per ora non approssimiamo. Ora se vogliamo usare la seguente legge oraria

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

dobbiamo trovare il tempo t.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \to t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \to t = \frac{0 - 10\pi}{-5} = \underline{2\pi\,\text{s}}$$

E ora abbiamo tutto ciò che ci serve.

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \to$$
$$\theta = \cancel{\theta_0} + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Perché abbiamo cancellato quell'elemento? Beh, noi vogliamo sapere quanti giri, quindi partiamo da una posizione $theta_0 = 0$. Continuiamo la risoluzione

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \to \theta = 10\pi \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \cdot -5 \cdot 4\pi^2$$
$$\theta = 20\pi^2 - 5 \cdot 2\pi^2 \to \theta = 20\pi^2 - 10\pi^2 = 10\pi^2 \to$$
$$\theta = 10 \cdot 3.14^2 = \boxed{98.69\,\text{rad}}$$

Dato che ci vengono chiesti i giri, semplicemente dividiamo per 2π

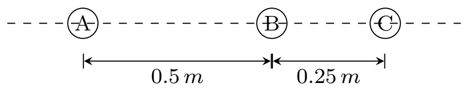
$$\text{giri} = \frac{98.69}{2\pi} = \boxed{15.7\,\text{giri}}$$

Gravitazione

Esercizio 1 La figura mostra tre corpi allineati che sono molto lontani da qualsiasi altro corpo. Le loro masse sono:

- $m_A = 363$ kg
- $m_B = 517$ kg
- $m_C = 154$ kg

Determina **modulo**, **direzione** e **verso** della forza gravitazionale totale che agisce su ciascuno di essi.



Ricordando la formula della forza gravitazionale, possiamo semplicemente sommare i vettori forza fra di loro.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \to$$
$$\begin{cases} F_{AB} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{363 \cdot 517}{0.5^2} \\ F_{AC} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{363 \cdot 154}{0.75^2} \end{cases} \to$$
$$\begin{cases} F_{AB} = 5 \cdot 10^{-5} \\ F_{AC} = 6.62 \cdot 10^{-6} \end{cases} \to$$
$$F = 5 \cdot 10^{-5} + 6.62 \cdot 10^{-6} =$$
$$\boxed{5.62 \cdot 10^{-5}\,\text{N}}$$

Questo era per il corpo A. Il procedimento è identico per il corpo C, cambia leggermente per il corpo B.

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \to$$
$$\begin{cases} F_{BA} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{517 \cdot 363}{0.5^2} \\ F_{BC} = 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{517 \cdot 154}{0.25^2} \end{cases} \to$$
$$\begin{cases} F_{BA} = 5 \cdot 10^{-5} \\ F_{BC} = 8.5 \cdot 10^{-5} \end{cases} \to$$
$$F = -5 \cdot 10^{-5} + 8.5 \cdot 10^{-5} =$$
$$\boxed{3.5 \cdot 10^{-5}\,\text{N}}$$

La differenza principale sta in quel − nell'ultimo passaggio. Questo perché la forza gravitazionale del corpo A attira verso sè B rendendo quindi il vettore negativo.

Esercizio 2 L'orbita della cometa Halley, che passa intorno al sole ogni 76 anni, ha forma ellittica. Quando è nel suo punto più vicino al Sole (perielio) è ad una distanza di $8.823 \cdot 10^{10}$ m e si muove ad una velocità di modulo 54.6 km/s. Il punto di maggiore distanza tra la cometa Halley e il Sole (afelio) è $6.152 \cdot 10^{12}$ m.
Il modulo della **velocità** della cometa Halley è maggiore o minore di 54.5 km/s quando è all'afelio? Giustifica la risposta e calcola il modulo della sua velocità all'afelio.

La risposta sta tutta nella seconda legge di Keplero.
"*Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.*".
Sapendo questo sappiamo con certezza che quando il pianeta si trova più lontano dal sole, avrà una velocità minore. Ora ci rimane solo da trovare la velocità. Da quella frase, possiamo sapere che il rapporto velocità/spazio è costante, quindi

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \rightarrow 54600 \cdot 8.823 \cdot 10^{10} = x \cdot 3.152 \cdot 10^{12}$$

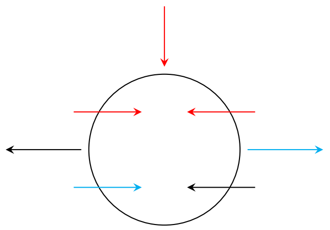
E non ci resta che isolare la x

$$x = \frac{54600 \cdot 8.823 \cdot 10^{10}}{3.152 \cdot 10^{12}} \approx \boxed{783\,\mathrm{m/s}}$$

783 m/s è sicuramente minore di 54.6 km/s. Si noti che nella prima formula, abbiamo convertito i Km/s in m/s per convenzione.

Esercizio 3 Un pianeta che non ruota ha raggio R e ha un'orbita circolare di raggio a attorno al sole di massa M. Dimostra che sul pianeta l'effettiva attrazione gravitazionale g_{eff} è minima ai punti più vicini e lontani dal sole e massima nei punti equidistanti da questi due.

Per chiarire l'esercizio, disegnamo la situazione mettendo in luce le forze in gioco



Le forze rosse sono dell'attrazione tra un corpo sul pianeta e il pianeta stesso. Quelle di color ciano sono dell'attrazione tra il corpo e il sole e le restanti sono della forza centrifuga che si genera dal movimento orbitale.

Distinguiamo 3 situazioni:

1. Punto più vicino
2. Punto più lontano
3. Punto intermedio

Scriviamo quindi le forze che il corpo più vicino subisce

$$\cancel{m} \cdot a = \overbrace{-G\frac{\cancel{m} \cdot M}{(a-R)^2}}^{\text{Attrazione corpo-sole}} + \underbrace{G\frac{\cancel{m} \cdot M_C}{R^2}}_{\text{Attrazione corpo-pianeta}} + \overbrace{\cancel{m}\omega^2(a-R)}^{\text{Forza centrifuga}}$$

Quelle del corpo più lontano

$$\cancel{m} \cdot a = \overbrace{G\frac{\cancel{m} \cdot M}{(a+R)^2}}^{\text{Attrazione corpo-sole}} + \underbrace{G\frac{\cancel{m} \cdot M_C}{R^2}}_{\text{Attrazione corpo-pianeta}} - \overbrace{\cancel{m}\omega^2(a+R)}^{\text{Forza centrifuga}}$$

Quelle del corpo intermedio

$$\cancel{m} \cdot a = \overbrace{G\frac{\cancel{m} \cdot M_C}{R^2}}^{\text{Attrazione corpo-pianeta}}$$

Notiamo che in tutte e tre c'è una costante, ovvero quella dell'attrazione corpo-pianeta. C'era da aspettarselo visto che la forza gravitazionale non cambia se non con la distanza.

Noi dobbiamo dimostrare che

$$\cancel{m}\omega^2(a-R) < G\frac{M}{(a-R)^2} \quad \text{e} \quad \cancel{m}\omega^2(a+R) > G\frac{M}{(a+R)^2}$$

perché la a che risulta, è minore nei punti vicini e lontani rispetto a quello intermedio.
Semplifichiamo la prima

$$\omega^2(a-R) < G\frac{M}{(a-R)^2} \rightarrow \omega^2(a-R)^3 < GM$$

E la seconda, per analogia

$$\omega^2(a+R) > G\frac{M}{(a+R)^2} \rightarrow GM < \omega^2(a-R)^3$$

Ora potremmo essere a posto così però abbiamo una variabile in più, ω. Per eliminarla ed esprimere tutto quanto in base ai dati che abbiamo, possiamo usare la definizione di ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Come trovare T^2? Usando la seconda legge di Keplero possiamo ricavarlo in termini di M

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$

e ora lo inseriamo nella definizione

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \rightarrow \omega = \frac{\cancel{4\pi^2}GM}{\cancel{4\pi^2}a^3}$$

Tornando ora a sostituire nelle nostre disequazioni originali abbiamo

$$\frac{GM}{a^3}(a-R)^3 < GM \quad \text{e} \quad GM < \frac{GM}{a^3}(a+R)^3$$

Che messe assieme formano

$$\frac{GM}{a^3}(a-R)^3 < GM < \frac{GM}{a^3}(a+R)^3 \rightarrow$$
$$\frac{(a-R)^3}{a^3} < 1 < \frac{(a+R)^3}{a^3}$$

Questa disequazione è sempre vera, quindi è stato dimostrato che per qualunque valore si inserisca di a o R, i punti esterni hanno attrazione gravitazionale minore dei punti intermedi.

Idrodinamica

Esercizio 1 Un condotto orizzontale di sezione costante $A_1 = 200\,\mathrm{cm}^2$ si strozza raggiungendo una sezione $A_2 = 40\,\mathrm{cm}^2$. Se la velocità e la pressione dell'acqua nella sezione larga sono $v_1 = 1\,\mathrm{m/s}$ e $p_1 = 1\,\mathrm{atm}$ rispettivamente, calcolare la **velocità** v_2 e la **pressione** p_2 nella strozzatura.

Dato che sappiamo che il tubo è orizzontale, possiamo sfruttare questa formula $A_1 v_1 = A_2 v_2$ per trovare la velocità.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow 200 \cdot 1 = 40 \cdot v_2 \rightarrow v_2 = \frac{200 \cdot 1}{40} = \boxed{5\,\mathrm{m/s}}$$

E ora non resta che usare Bernoulli per calcolare la pressione.

$$p_1 + \cancel{\delta g h_1} + \frac{1}{2}\delta v_1^2 = p_2 + \cancel{\delta g h_2} + \frac{1}{2}\delta v_2^2 \rightarrow$$
$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\delta v_1^2 - \frac{1}{2}\delta v_2^2 \rightarrow$$
$$p_2 = 1 \cdot 10^5 + \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 5^2 =$$
$$\boxed{0.89 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}$$

Si è eliminato l'elemento δgh in quanto i due pezzi di tubo si trovano alla stessa altezza e quindi non c'è variazione di altezza.

Esercizio 2 Un recipiente largo è pieno di acqua fino ad una profondità H. Si fa un piccolo foro ad una distanza h dal livello dell'acqua e un flusso di acqua esce. A che distanza arriva il flusso?

Questo esercizio offre la possibilità di dimostrare l'equazione di Torricelli. Usandi il teorema di Bernoulli, nella nostra situazione scriviamo

$$p_1 + \delta g h_1 + 0 = p_2 + 0 + \frac{1}{2}v^2$$

perché nella prima posizione l'acqua è ferma o quasi (il contenitore è largo), nella seconda è ad altezza 0. Quindi isolando per v otteniamo

$$v = \sqrt{2gh}$$

Dimostrato ciò, possiamo trattare il flusso di acqua come un proiettile che cade. Quindi usare la legge oraria per trovare il tempo

$$x = x_0 + \frac{1}{2}at^2 \to t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

Per trovare la distanza avendo velocità e tempo, li moltiplichiamo quindi abbiamo

$$\boxed{x = vt = 2\sqrt{h(H-h)}}$$

Inserendo i valori dati, possiamo quindi ottenere in una sola formula la distanza del getto di liquido .

Termodinamica

Esercizio 1 Un calorimetro contiene 400 g di acqua alla temperatura di 20 °C e una massa complementare (detto anche equivalente in acqua del calorimetro) di 40 °C. In esso viene immerso un pezzo di ghiaccio di massa 50 g alla temperatura di 0 °C. Sapendo che il calore latente di fusione del ghiaccio è 80 cal/g, calcolare **la temperatura finale di equilibrio** dell'acqua.

Dato che dobbiamo trovare la temperatura di equilibrio, possiamo dire che la quantità di calore iniziale e finale sono uguali ma opposte in quanto la quantità di calore finale è 0. Questo implica che $Q_1 + Q_2 = 0$. Però abbiamo anche un passaggio di stato, quindi dobbiamo tenere conto anche del calore latente. Quindi la nostra equazione diventa $Q_1 + Q_2 + Q_L = 0$.

Ora dobbiamo trasformare. Per prima cosa calcoliamo il calore latente

$$Q_L = c \cdot m \to Q_L = 328 \cdot 50 = \underline{16500\,\text{J}}$$

Da dove viene fuori il 328? Dato che tutte le quantità di calore sono in Joule, possiamo convertire da cal/g a J sapendo che 1 cal = 4.1 J.

Ora possiamo cominciare a sostituire (si presti attenzione che il calore latente è negativo in quanto è energia in più richiesta per la trasformazione)

$$-Q_L + Q_1 + Q_2 = 0 \to 16500 + m_1 c_1 \Delta T + m_2 c_2 \Delta T = 0$$

Quanto valgono le masse? Immediatamente verrebbe da dire 400 e 50. Però se si nota nel testo è presente l'equivalente in acqua del calorimetro. Non possiamo dimenticarcene quindi otteniamo

$$-Q_L + Q_1 + Q_2 = 0 \to$$
$$16500 + 440 \cdot 4.1 \cdot (20 - T_e) + 50 \cdot 4.1 \cdot (-T_e) = 0$$

E ora non resta che isolare e risolvere per T_e.

$$-16500 + 440 \cdot 4.1 \cdot (20 - T_e) + 50 \cdot 4.1 \cdot (-T_e) = 0 \to$$
$$-16500 + 1804 \cdot (20 - T_e) + 205 \cdot (-T_e) = 0 \to$$
$$-16500 + 36080 - 1804T_e - 205T_e = 0 \to$$
$$-16500 + 36080 = 205T_e + 1804T_e \to$$
$$19580 = 2054T_e \to$$
$$T_e = \boxed{9.5\,°\text{C}}$$

Esercizio 2 Una massa m_1 di ossigeno (O_2) occupa, alla temperatura di 7 °C, un recipiente che ha un volume pari a 20 dm^3, alla pressione di $2 \cdot 10^5$ N/m^2. Una massa m_2 di idrogeno (H_2) occupa, alla temperatura di 27 °C, un recipiente di volume pari a 50 dm^3, alla pressione di 1 atm. Calcola la **pressione** che eserciterebbe il miscuglio dei due gas in un recipiente di volume pari a 70 l alla temperatura di 0 °C.

Utilizzando l'equazione universale dei gas, possiamo ricavare il numero di moli di ciascun elemento

$$pV = nRT \to n = \frac{pV}{RT}$$

Quindi

$$n_{O_2} = \frac{pV}{RT} \to n_{O_2} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{8.31 \cdot 280.15} = 1.718\,\text{mol}$$
$$n_{H_2} = \frac{pV}{RT} \to n_{H_2} = \frac{101325 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{8.31 \cdot 300.15} = 2.031\,\text{mol}$$

Conoscendo la quantità di moli che ci sono, possiamo calcolare la pressione di ciascun elemento all'interno del nuovo recipiente. Considerato che è un miscuglio, dobbiamo poi sommare le due pressioni per ottenere quella totale

$$p = \frac{nRT}{V} \to p = \frac{1.718 \cdot 8.31 \cdot 263.15}{7 \cdot 10^{-2}} + \frac{2.031 \cdot 8.31 \cdot 273.15}{7 \cdot 10^{-2}} =$$
$$55790 + 65858 = \boxed{121567\,\text{Pa}}$$

Esercizio 3 Un gas perfetto caratterizzato da $\gamma = 1.67$ esegue un ciclo formato dall'isoterma AB, dall'isocora BC, dall'isobara CD e dall'adiabatica DA che chiude il ciclo delle quattro trasformazioni reversibili. Sapendo che:

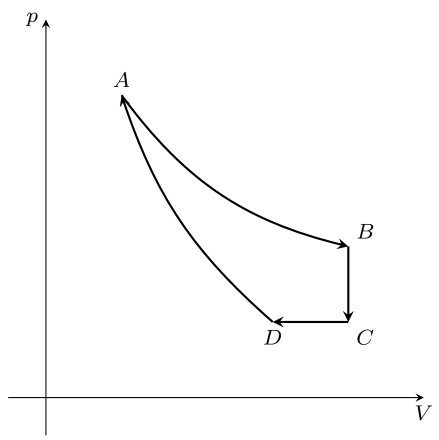
- $V_A = 5\,\text{l}$
- $V_B = 25\,\text{l}$
- $p_A = 20\,\text{atm}$
- $T_A = 300\,\text{K}$
- $p_C = 2\,\text{atm}$

a) Rappresenta graficamente il ciclo;

b) Gli altri parametri termodinamici degli stati A, B, C, D;

c) La quantità di calore scambiato in ognuna delle quattro trasformazioni;

Il piano su cui si disegnano le trasformazioni termodinamiche si descrivono sul piano VOp con V sull'asse delle ascisse e p su quello delle ordinate. Le trasformazioni isoterme seguono una parabola tra i due punti. Quelle adiabatiche seguono un ramo di iperbole equilatera.



Per risolvere questo tipo di esercizi dobbiamo andare con molta calma e prestare attenzione ai dettagli.
Cominciamo a trovare i parametri mancanti del punto B. Sappiamo che la trasformazione AB è una isoterma quindi la temperatura sarà esattamente come T_A quindi $T_B = 300\,\text{K}$. La pressione la possiamo trovare usando

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$$

Questo ci porta a

$$\frac{5 \cdot 20}{300} = \frac{x \cdot 25}{300} \to x = \frac{100}{25} = \boxed{4\,\text{atm}}$$

Della trasformazione BC ci manca la temperatura in C in quanto il volume è uguale a V_B perché la trasformazione è isocora. Potremmo usare anche qui una legge di Gay-Loussac (la seconda) ma continuiamo ad usare la formula generale

$$\frac{4 \cdot 25}{300} = \frac{2 \cdot 25}{x} \rightarrow x = \boxed{150\,\text{K}}$$

Nella trasformazione seguente, non possiamo usare quella formula in quanto abbiamo due incognite sia il volume che la temperatura. Dato che conosciamo che il gas è perfetto e monoatomico ($\gamma = 1.65$), possiamo usare le equazioni di Poisson. Specificamente

$$p_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma} = p_2^{1-\gamma} T_2^{\gamma}$$

Però se noi usassimo la trasformazione CD non verrebbe un risultato sensato in quanto i due punti hanno la stessa pressione e la trasformazione non è adiabatica. La trasformazione DA lo è però. Quindi

$$p_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma} = p_2^{1-\gamma} T_2^{\gamma} \rightarrow T_2 = \sqrt[\gamma]{\frac{p_1^{1-\gamma} T_1^{\gamma}}{p_2^{1-\gamma}}}$$

Inserendo i dati

$$T_2 = \sqrt[1.67]{\frac{20^{-0.67} \cdot 300^1.67}{2^{-0.67}}} \approx \boxed{120\,\text{K}}$$

Per trovare il volume applichiamo lo stesso principio, questa volta però con una formula diversa

$$V_1^{\gamma-1} T_1 = V_2^{\gamma-1} T_2 \rightarrow V_2 = \sqrt[\gamma-1]{\frac{V_1^{\gamma-1} T_1}{T_2}}$$

Inserendo i dati

$$V_2 = \sqrt[0.67]{\frac{5^{0.67} \cdot 300}{120}} \approx \boxed{19.6\,\text{l}}$$

Quindi ciò che abbiamo è

$$\begin{array}{lll}
A: V: 5\,\text{l} & p: 20\,\text{atm} & T: 300\,\text{K} \\
B: V: 25\,\text{l} & p: 3\,\text{atm} & T: 300\,\text{K} \\
C: V: 25\,\text{l} & p: 2\,\text{atm} & T: 150\,\text{K} \\
D: V: 19.6\,\text{l} & p: 2\,\text{atm} & T: 120\,\text{K}
\end{array}$$

La quantità di calore scambiata nelle varie trasformazioni, si può calcolare con le apposite formule. Prima di andare a calcolare i lavori e le quantità di calore, ci serve il numero di moli di gas coinvolto. Dato che nelle traformazioni il gas non si perde, le moli rimangono costanti quindi basta calcolarle per una sola situazione

$$pv = nRT \rightarrow n = \frac{pV}{RT} \rightarrow n = \frac{20 \cdot 5}{0.0821 \cdot 300} \approx \underline{4.06\,\text{mol}}$$

La trasformazione AB è un'isoterma, il lavoro è pari a

$$L = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \rightarrow L = 4.06 \cdot 0.0821 \ln \frac{25}{5} = \underline{0.536\,\text{J}}$$

La trasformazione BC è un'isocora quindi

$$Q = \frac{l}{2} nR\Delta T \rightarrow Q = \frac{3}{2} \cdot 4.06 \cdot 0.0821 \cdot 150 = \underline{74.99\,\text{J}}$$

La trasformazione CD è un'isobara

$$Q = \frac{2+l}{2} nR\Delta T \rightarrow Q = \frac{5}{2} \cdot 4.06 \cdot 0.0821 \cdot 30 = \underline{24.99\,\text{J}}$$

Infine la trasormazione DA è un'adiabatica

$$Q = 0$$

Sommando tutto viene

$$Q_{Tot} = 0.536 + 74.99 + 24.99 + 0 = \boxed{100.516\,\text{J}}$$

Il lavoro invece ha formule diverse.
Per la trasformazione AB

$$L = Q = \underline{0.536\,\text{J}}$$

Per la trasformazione BC

$$L = 0$$

Per la trasformazione CD

$$L = p\Delta V \rightarrow L = 2 \cdot (25 - 19.6) = \underline{10.8\,\text{J}}$$

Per la trasformazione DA

$$L = -\Delta U = -\frac{1}{2} nR(T_2 - T_1) \rightarrow L = -\frac{1}{2} 4.06 \cdot 0.0821 \cdot (300 - 120) = \boxed{-29.99\,\text{J}}$$

Il lavoro totale quindi risulta

$$L_{Tot} = 0.132 + 18.47 + 6.15 - 29.99 = \boxed{-5.238\,\text{J}}$$

Esercizio 4 Una macchina di Carnot lavora tra due sorgenti alle temperature $T_1 = 390\,\text{K}$ e $T_2 = 273\,\text{K}$ compiendo ad ogni ciclo un lavoro $L = 10^5\,\text{J}$. La sorgente alla temperatura più bassa è costituita da una massa di ghiaccio $M = 10^4\,\text{kg}$ (calore latente di fusione $80\,\text{cal/g}$). Si chiede di determinare dopo **quanti cicli** il ghiaccio è totalmente sciolto.

Innanzitutto calcoliamo la quantità di calore necesaria totale

$$Q = \lambda_f \cdot m \rightarrow Q = 3.3 \cdot 10^5 \cdot 10^4 = \underline{330 \cdot 10^7\,\text{J}}$$

Viene scritto $3.3 \cdot 10^5$ perché il testo dà $80\,\text{cal/g}$ che quindi trasformati in Joule vengono $80 \cdot 4186 = 3.3 \cdot 10^5$.
Ora troviamo il rendimento della macchina termica

$$\mu = 1 - \frac{T_1}{T_2} \rightarrow \mu = 1 - \frac{273}{390} = \underline{0.3}$$

Sfruttando la formula

$$1 - \frac{Q_1}{Q_2} = \mu$$

possiamo recuperare Q_1 che in definitiva è la nostra incognita se abbiamo Q_2.
Sfruttando questo, possiamo ricavare la quantità di calore che viene sprigionata invertendo la seguente formula

$$\mu = \frac{L}{Q_2} \rightarrow 0.3 = \frac{10^5}{Q_2} \rightarrow Q_2 = \underline{3.3 \cdot 10^5\,\text{J}}$$

Ora possiamo scrivere

$$1 - \frac{Q_1}{Q_2} = \mu \rightarrow 1 - \frac{Q_1}{3.3 \cdot 10^5} = 0.3 \rightarrow Q_1 = \underline{231000\,\text{J}}$$

Quindi avendo noi calcolato la quantità di calore totale necessaria perché il ghiaccio si sciolga e quanta ne viene sprigionata da un ciclo della macchina, possiamo scrivere

$$Q_{tot} = nQ_1$$

dove n è il numero di cicli necessari ad ottenere tutto il calore necessario. Quindi

$$n = \frac{Q_{tot}}{Q_1} \rightarrow n = \frac{331 \cdot 10^7}{231000} = \boxed{14285}$$

Entropia

Un blocco d ghiaccio che ha una massa $m = 450\,\text{g}$ e che si trova alla temperatura di $0\,°\text{C}$ fonde completamente.

- **Quanto vale la variazione di entropia dovuta alla fusione del ghiaccio?** In seguito l'entropia del sistema diminuisce e diventa la metà
- **Quanto ghiaccio si crea?**

Calore latente $c_L = 3.34 \cdot 10^5\,\text{J/Kg}$

Innanzitutto troviamo la quantità di calore necessaria a sciogliere tutto il ghiaccio

$$Q_L = c_L m \rightarrow Q_L = 3.34 \cdot 10^5 \cdot 0.45 = \underline{1.5 \cdot 10^5\,\text{J}}$$

Poi sapendo che c'è solo una sorgente di calore (non è specificato altrimenti), possiamo calcolare molto facilmente la differenza di entropia

$$\Delta S = \frac{Q_L}{T} \rightarrow \Delta S = \frac{1.5 \cdot 10^5}{273} = \underline{549\,\text{J/K}}$$

Sappiamo però che l'entropia del sistema dimezza

$$\Delta S = -\Delta S \cdot 0.5 \rightarrow \Delta S = -549 \cdot 0.5 = \underline{-275\,\mathrm{J/K}}$$

La differenza è negativa in quanto l'entropia diminuisce.
E ora non ci resta che calcolare la nuova quantità di calore e trovare la massa

$$Q = \Delta ST \rightarrow Q = -275 \cdot 273 = \underline{-7.51 \cdot 10^4\,\mathrm{J}}$$

Viene negativa in quanto è quantità di calore che è stata persa.

$$m = \frac{Q_L}{c_L} \rightarrow m = \frac{7.51 \cdot 10^4}{3.34 \cdot 10^5} = \boxed{0.225\,\mathrm{kg}}$$

Esercizio 2 Due moli di O_2 a pressione atmosferica e a temperatura ambiente (300 K) si trovano all' interno di un recipiente adiabatico. Quando viene aperto il rubinetto che separa il primo recipiente dal secondo, in cui era stato fatto il vuoto, il gas si espande andando a occupare tutto il volume, pari a $82.5\,\mathrm{dm}^3$.
Calcola: **la variazione di entropia del sistema**, **la variazione di entropia dell'universo** e **quanto sarebbe dovuto essere il volume finale per avere una variazione di entropia doppia**.

Innanzitutto sappiamo che questa trasformazione è irreversibile, quindi ci aspettiamo che l'entropia aumenti. Non avendo la temperatura, non possiamo usare direttamente la formula. Ricordandoci che in una espansione isoterma (come in questo caso) la quantità di calore è pari a $Q = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$. Inserndolo nella formula dell'entropia otteniamo

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{nR\cancel{T} \ln \frac{V_f}{V_i}}{\cancel{T}} = nR \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Da questo notiamo che ci manca solo V_i per poter risolvere.

$$p_i V_i = nRT \rightarrow V_i = \frac{nRT}{p_i} \rightarrow V = \frac{2 \cdot 8.315 \cdot 300}{1.01 \cdot 10^5} = \underline{0.0494\,\mathrm{m}^3}$$

E ora

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i} \rightarrow \Delta S = 2 \cdot 8.315 \cdot \ln \frac{0.0835}{0.0494} = \boxed{8.7\,\mathrm{J/K}}$$

Quanto vale l'entropia nell'universo? Essendo adiabatica, la trasformazione non scambia con l'esterno, quindi l'entropia è pari all'entropia del sistema.
Per trovare il volume finale per avere una differenza doppia, invertiamo la formula e isoliamo il volume

$$\Delta S' = nR \ln \frac{V_f'}{V_i} \rightarrow \frac{\Delta S'}{nR} = \ln \frac{V_f'}{V_i} \rightarrow V_f' = V_i e^{\frac{\Delta S'}{nR}} \rightarrow$$
$$V_f' = V_i e^{\frac{2\Delta S}{nR}}$$

E ora non resta che risolvere

$$V_f' = V_i e^{\frac{2\Delta S}{nR}} \rightarrow V_f' = 0.0494 \cdot e^{\frac{2 \cdot 8.73}{2 \cdot 8.315}} = \boxed{0.14\,\mathrm{m}^3}$$

Onde

Formule generali

Esercizio 1 Una corda ha densità lineare $8.5 \cdot 10^{-1}\,kg/m$ è sottoposta ad una tensione di $280\,N$. La corda è lunga $1.8\,m$, è fissata agli estremi.
Determina **velocità**, **lunghezza d'onda** e **frequenza** delle onde che formano l'onda stazionaria.

Come sappiamo da queste formule, la velocità la possiamo trovare facilmente:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \rightarrow \sqrt{\frac{280}{8.5 \cdot 10^{-3}}} \approx \boxed{181.50\,\mathrm{m/s}}$$

Trovata la velocità, possiamo trovarci la lunghezza d'onda facendo $\lambda = vT$.

$$\lambda = vT \rightarrow 181.50 \cdot 8.5 \cdot 10^{-3} \approx \boxed{1.5\,\mathrm{m}}$$

Infine troviamo la frequenza sfruttando un'altra formula: $v = \lambda f$.

$$f = \frac{v}{\lambda} \rightarrow f = \frac{181.50}{1.5} \approx \boxed{121\,\mathrm{Hz}}$$

Questo esercizio era anche risolvibile usando le formule delle onde stazionarie, dato che sapevamo la lunghezza della corda. Come sempre, ci sono varie strade che portano a risultati simili.

Esercizio 2 Una formula sperimentale per individuare la velocità del suono nell'aria è $v_s = 331 + 0.6 \cdot t_c$ dove t_c è la temperatura in °C. Mediante uno strumento a corda, viene prodotta una nota musicale di frequenza 440 Hz. La temperatura dell'aria è di 20 °C.
All'incirca, **quante vibrazioni** effettua la corda prima che il suono da essa prodotto raggiunga una persona distante 30 metri?

Il testo chiede "quante vibrazioni" che non significa altro che quanti ventri ci sono in quell'onda. Prima di tutto però, troviamo la velocità del suono:

$$v_s = 331 + 0.6 \cdot t_c \rightarrow v_s = 331 + 0.6 \cdot 20 = \underline{343\,\mathrm{m/s}}$$

A noi chiede quanti ventri, quindi possiamo calcolare n semplicemente come $\frac{L}{\lambda}$ dato che il suono si comporta come un'onda stazionaria.

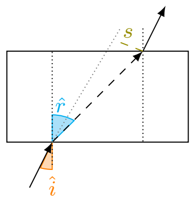
$$v = f\lambda \rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \rightarrow \lambda = \frac{343}{440} \approx \underline{0.78\,\mathrm{m}}$$

$$n = \frac{L}{\lambda} \rightarrow n = \frac{30}{0.78} \approx \boxed{38}$$

Questo esercizio sfrutta il principio che un'emettitore sonoro, emette sempre alla stessa frequenza, quindi le onde generate sono considerabili stazionarie.

Rifrazione

Esercizio 1 Un vetro di spessore $d = 1.5\,\mathrm{cm}$ ha un'indice di rifrazione rispetto all'aria di 1.62. **Trova lo scostamento** s, rispetto alla traiettoria originaria, che subisce un raggio luminoso incidente sulla superficie di vetro con un angolo di 54° e uscente nuovamente in aria.



Conoscendo l'angolo di incidenza e l'indice di rifrazione, possiamo usare la relazione di Snell per trovare l'angolo di rifrazione

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \hat{i}}{\sin \hat{r}} \rightarrow \hat{r} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \hat{i}\right) \rightarrow$$
$$\hat{r} = \arcsin\left(\frac{1}{1.62} \sin 54\right) \rightarrow \hat{r} \approx \underline{30°}$$

Una volta fatto questo, possiamo trovarci la lunghezza distanza che il raggio percorre all'interno del vetro

$$\Delta d = \frac{d}{\cos \hat{r}} \approx \underline{1.73\,cm}$$

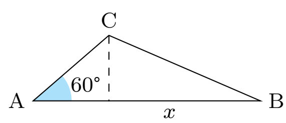
Infine troviamo s

$$s = \sin(\hat{i} - \hat{r}) \cdot \Delta d \rightarrow \sin 24 \cdot \Delta d \approx \boxed{0.7\,\mathrm{cm}}$$

In questo esercizio, così come in molti altri del suo genere, si usa estensivamente trigonometria in quanto si possono facilmente individuare triangoli rettangoli all'interno di vetri.

Interferenza

Esercizio 1 Due altoparlanti A e B, che vibrano in fase alla frequenza di 85 Hz, sono posizionati come in figura. Una ragazza è ferma nel punto C a 1.0 m di distanza dall'altoparlante A. Assumendo che il suono si propaghi nell'aria a 340 m/s, determina qual è la **distanza minima** fra i due altoparlanti tale da far sì che la ragazza dalla sua postazione non oda nulla.



La prima cosa da notare è il tipo di interferenza richiesto. Dato che viene chiesto quando un ascoltatore non sente più alcun suono, l'interferenza è distruttiva.
Per prima cosa però, è trovare la distanza $\overline{CB}$. Per fare ciò, poniamo x la distanza da B all'altezza.

$$\overline{CB} = \sqrt{\sin(60)^2 + x^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + x^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + x^2}$$

Il perché di questo è che $\sin(60)$ è l'altezza del triangolo e abbiamo posto x come uno dei cateti del triangolo rettangolo a destra.
Ora possiamo impostare la formula dell'interferenza distruttiva

$$|\overline{PS}_1 - \overline{PS}_2| = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow$$
$$\sqrt{\frac{3}{4} + x^2} - 1 = \left(\frac{1}{2} + k\right) \cdot 85$$

Ora non resta che risolvere. Alla fine si dovrebbe arrivare ad un'equazione di questo genere

$$x = \sqrt{18k^2 + 40k + 8.25}$$

Questa è un'equazione parametrica, nel parametro k. In questo caso assegnamo $k = 0$ in quanto il testo chiede la **distanza minima** perché ci sia interferenza distruttiva. La prima frangia distruttiva ha come k il valore 0. Terminando quindi

$$x = \sqrt{18k^2 + 40k + 8.25} \rightarrow$$
$$x = \sqrt{\cancel{18k^2} + \cancel{40k} + 8.25} \approx \underline{2.87\,\text{m}}$$

Non è questo però il risultato finale. Il motivo è che x non rappresenta completamente la distanza tra A e B. Bisogna ancora aggiungere quella da A all'altezza. Quindi

$$\overline{AB} = x + \cos(60) = 2.87 + 0.5 = \boxed{3.37\,\text{m}}$$

Esperienza di Young

Esercizio 1 Nell'interferenza tra due fenditure poste a distanza $d = 25\,\text{cm}$ tra loro, si forma su uno schermo di distanza $l = 1\,\text{m}$ una figura il cui secondo massimo di intensità si trova ad $x = 20\,\text{cm}$ dal massimo centrale. Calcola la **lunghezza d'onda dell'onda incidente**.

Abbiamo come sempre varie strade per risolvere questo problema. La più facile è quella di invertire la formula per trovare l'altezza di una frangia costruttiva. È costruttiva perché ci dice che è *il [...] secondo massimo di intensità* che stiamo cercando. Quindi, invertiamo la formula

$$y_n = \frac{l \cdot n \cdot \lambda}{d} \rightarrow \lambda = \frac{y_n \cdot d}{l \cdot n}$$

e semplicemente sostituiamo

$$\lambda = \frac{y_n \cdot d}{l \cdot n} \rightarrow \lambda = \frac{0.2 \cdot 0.25}{1 \cdot 2} \rightarrow \lambda = \boxed{0.025\,m} = \boxed{2.5\,\text{cm}}$$

Si noti che è stato posto $n = 2$ in quanto chiede il secondo massimo.

Esercizio 2 Nell'esperimento della doppia fenditura di Young, la prima frangia scura sopra la frangia centrale chiara appare ad un angolo di 0.29°.
Calcola il **rapporto** tra la separazione delle fenditure $\boldsymbol{d}$ e la lunghezza d'onda della luce $\boldsymbol{\lambda}$.

Per prima cosa, individuiamo la formula da usare. Abbiamo l'angolo e ci chiede $\frac{d}{\lambda}$. Osservando che è una frangia scura, notiamo questa formula:

$$\sin\theta_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}$$

Notiamo che abbiamo tutto quello che ci serve per isolare $\frac{\lambda}{d}$ e poi farne il reciproco per ottenere quello che ci serve. Isolando quindi il risultato desiderato otteniamo

$$\sin\theta_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d} \rightarrow \frac{\sin\theta_n}{n - \frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{d} \rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{n - \frac{1}{2}}{\sin\theta_n}$$

E ora non ci resta che inserire i valori

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{n - \frac{1}{2}}{\sin\theta_n} \rightarrow \frac{d}{\lambda} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\sin(0.29)} \rightarrow \frac{d}{\lambda} \approx \frac{\frac{1}{2}}{0.005} \rightarrow \frac{d}{\lambda} = \boxed{100}$$

Ovviamente con migliori approssimazioni si ottengono risultati più simili a 99 ma un errore di 1/100 è accettabile.

Suono

Esercizio 1 Due altoparlanti sono montati su una giostra di raggio 9.01 m. Quando la giostra è ferma, i due altoparlanti producono lo stesso suono alla frequenza di 100.0 Hz. Sono messi in posizione diametralmente opposta. La velocità del suono è 343.00 m/s e la giostra fa un giro di 20.0 s. Qual è il **battimento** rilevato da un ascoltatore quando la giostra è posta in modo da avere gli altoparlanti paralleli all'ascoltatore?

Come ricordiamo, la formula per i battimenti richiede due frequenze. Essendo che stiamo lavorando con il suono e la sorgente si muove, si usa Doppler.
Per prima cosa, troviamoci la velocità a cui ruota la giostra.

$$v_t = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow \frac{2\pi \cdot 9.01}{20} \approx \underline{2.83\,\text{m/s}}$$

Trovata la velocità, possiamo usare Doppler per trovare la frequenza percepita. Raddoppiamo il processo in quanto gli altoparlanti prima si avvicinano e poi si allontanano. Noi dobbiamo trovare i battimenti prodotti da questo movimento.

$$f = \frac{v + v_o}{v + v_s} \cdot f_s \rightarrow f = \frac{343 + 0}{343 + 2.83} \cdot 100 \approx \underline{99.19\,\text{Hz}}$$

$$f = \frac{v + v_o}{v - v_s} \cdot f_s \rightarrow f = \frac{343 + 0}{343 - 2.83} \cdot 100 \approx \underline{100.83\,\text{Hz}}$$

In fine, usiamo i battimenti

$$f_b = |f_o - f_s| \rightarrow f_b = |100.83 - 99.19| \approx \boxed{1.64\,\text{Hz}}$$

Esercizio 2 Una persona che si trova a $4.0\,m$ da una parte lancia un grido tale che il suono coplisce la parete con un'intensità di $2.5 \cdot 10^{-4}\,\text{W/m}^2$. Supponendo che la parete assorba il 20% dell'energia sonora incidente e che rifletta il resto, qual è **il livello di intensità sonora** immediatamente prima e dopo che il suono è stato riflesso?

Per prima cosa ci troviamo la superficie in cui il suono si diffonde. Dato che sappiamo il suono si espande in forma sferica

$$S = 4\pi r^2 \rightarrow S = 4 \cdot 16\pi \approx \underline{201.06\,\text{m}^2}$$

Avendo l'intensità e la superficie, possiamo trovarci l'energia semplicemente invertendo la formula

$$I = \frac{E}{S} \rightarrow E = IS \rightarrow 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot 201.06 \approx \underline{5.026 \cdot 10^{-2}\,\text{J}}$$

Questa è l'energia prima colpisca la parete, per trovare quella dopo

$$20\% \cdot 5.026 \cdot 10^{-3} \approx 1 \cdot 10^{-3}\,\text{J}$$

e quindi l'80% equivale semplicemente a

$$5.026 \cdot 10^{-4} - 1 \cdot 10^{-3} = \underline{4.026 \cdot 10^{-3}\,\text{J}}$$

Ci manca solo l'intensità nel secondo momento

$$I = \frac{E}{S} \rightarrow I = \frac{4.026 \cdot 10^{-3}}{201.06} \approx \underline{2 \cdot 10^{-5}\,\text{W/m}^2}$$

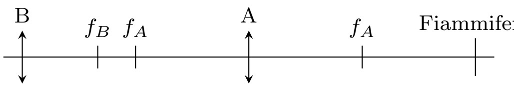
Ora abbiamo tutto quello che ci serve per finire l'esercizio. Ci troviamo dunque i livelli sonori

$$L = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} \rightarrow L_1 = 10\log_{10}\frac{2.5 \cdot 10^{-3}}{10^{-12}} \approx \boxed{83.9\,\text{dB}}$$

$$L = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} \rightarrow L_2 = 10\log_{10}\frac{2 \cdot 10^{-5}}{10^{-12}} \approx \boxed{83\,\text{dB}}$$

Lenti

Esercizio 1 Due lenti sono disposte come in figura. Un fiammifero di altezza 2 cm si trova a 5 cm alla destra di una lente A che ha distanza focale $\overline{Af_A}$ pari a 3 cm. La seconda lente B, con una distanza focale $\overline{Bf_B}$ di 5 cm, deve essere posta a sinitra rispetto all'immaigne reale generata dalla prima, in maniera tale che essa formi un'immagine virtuale tre volte maggiore nei confronti dell'altezza del fiammifero vero e proprio. **Quale distanza separa le due lenti?**



Quest'esercizio non è facile e non è breve ma una volta risolto, si dovrebbe capire chiaramente come risolvere altri esercizi sulle lenti. Per prima cosa, si trovi la posizione dell'immagine nella prima riflessione

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \rightarrow$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{q} = \frac{2}{15} \rightarrow q = \underline{7.5\,\text{cm}}$$

A questo punto, sapendo che deve essere ingrandita di tre volte ($G = 3$), possiamo usare la formula dell'ingrandimento ed invertendola isolare p per sapere la posizione dell'immagine e quindi sapere la distanza tra le due lenti perché si ingrandisca tre volte. Possiamo farlo dato che la posizione dell'immagine della prima lente coincide con quella dell'oggetto della seconda lente.

$$G = -\frac{q}{p} \rightarrow p = -\frac{q}{G} \rightarrow p = -\frac{q}{3}$$

La lasciamo in forma parametrica con il parametro q in quanto è la nostra incognita.
Dato che ora stiamo lavorando con un'altra lente, riapplichiamo la prima formula

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{-\frac{q}{3}} + \frac{1}{q} \rightarrow$$
$$\frac{1}{5} = -\frac{3}{q} + \frac{1}{q} \rightarrow \frac{1}{5} = -\frac{2}{q} \rightarrow$$
$$\frac{q}{5} = -2 \rightarrow q = \boxed{-10\,\text{cm}}$$

Il risultato è negativo in quanto si trova dietro la prima lente, nostro punto di riferimento per questo esercizio.

Elettrostatica

Esercizio 1 Le armature di un condensatore piano hanno una superficie $S = 1\,m^2$ e distano 1 cm. Tra di loro c'è il vuoto. La differenza di potenziale applicata ai capi delle armature è $V = 10^4$ V. Calcolare la **capacità** del condesatore, la **carica** su ogni armatura, la **densità** di carica superficiale, l'**intensità** del campo elettrico.
Tra le armature del condensatore viene inserita una lamina di dielettrico di spessore 1 cm e di costante elettrica relativa $\varepsilon_r = 5$. Calcolare la **densità** di carica superficiale, l'**intensità** del campo elettrico, la **d.d.p.** ai capi delle armature e la **capacità**.

Questo esercizio è un esercizio direi riassuntivo di tutte le formule riguardanti i condensatori. Per prima cosa possiamo immediatamente trovare la capacità del condensatore applicando una sola formula.

$$C = \frac{S\varepsilon}{d} \rightarrow C = \frac{S\varepsilon_0}{d} \rightarrow C = \frac{1 \cdot 8.8 \cdot 10^{-12}}{0.01} = \boxed{8.8 \cdot 10^{-10}\,\text{F}}$$

E immediata viene anche la carica, invertendo la formula $C = \frac{Q}{V}$

$$C = \frac{Q}{V} \rightarrow Q = C \cdot V \rightarrow Q = 8.8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^4 = \boxed{8.8 \cdot \mu\text{C}}$$

La densità di carica ora viene immediata anch'essa

$$\sigma = \frac{Q}{S} \rightarrow \sigma = \frac{8.8 \cdot 10{-}6}{1} = \boxed{8.8 \cdot 10^{-6}\,\text{C/m}^2}$$

E ora manca solo il campo elettrico, abbiamo due modi per trovarlo, questo è uno

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x} \rightarrow \frac{10^4}{0.01} = \boxed{10^6\,\text{V/m}}$$

E questo era metà esercizio. Ora abbiamo lo stesso condensatore con un dielelettrico al suo interno.
La prima richiesta è la densità di carica. Risulta essere uguale a

$$\sigma = \boxed{8.8 \cdot 10^{-6}\,\text{C/m}^2}$$

Ma è identica a prima? Come mai? Pensando un attimo, vediamo che il condensatore è isolato, quindi non ci sono modi per cui le cariche si spostino. Essendo poi le due armature isolate fra di loro, la carica non può spostarsi da una all'altra quindi la densità non varia.
Avendo chiarito questo punto, possiamo trovare l'intensità del campo elettrico

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{10^6}{5} = \boxed{0.2 \cdot 10^{-6}\,\text{V/m}}$$

Qui abbiamo semplicemente scomposto la formula del campo elettrico:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon_r} \rightarrow E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

E ora si trova la d.d.p.

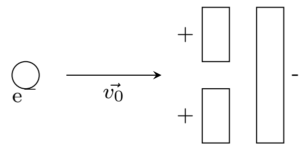
$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x} \rightarrow \Delta V = E\Delta x \rightarrow \Delta V = 0.2 \cdot 10^6 \cdot 0.01 = \boxed{0.2 \cdot 10^4\,\text{V}}$$

Infine manca la capacità

$$C = \frac{\varepsilon S}{d} \rightarrow C = \frac{\varepsilon_0}{d}\varepsilon_r \rightarrow$$
$$C = C_0\varepsilon_r \rightarrow C = 8.8 \cdot 10^{-10} \cdot 5 = \boxed{4.4 \cdot 10^{-9}\,\text{F}}$$

Esercizio 2 L'elettrone rappresentato in figura **è destinato a raggiungere l'armatura** del consdensatore caricata negativamente se questa dista 5 mm dall'armatura positivamente? Se sì, determina con quale velocità, se no, determina quale avrebbe dovuto essere la velocità iniziale minima in grado di consentirgli di raggiungere l'armatura.

- $v_0 = 750$ m/s
- E $= 3.5 \cdot 10^{-4}$ N/C



Allora, per prima cosa vediamo da che parte il campo elettrico va: dato che le cariche positive sono a sinistra, il campo segue questo verso ed è in linea con la velocità. Poi però notiamo che appena l'elettrone entra nel condensatore subirà una forza contraria in quanto ha carica negativa così come l'armatura di destra.

Chiariti questi punti, come possiamo sapere se arriverà alla seconda armatura? Una formula molto comoda del modo rettilineo uniformemente accelerato torna utile:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2aS$$

Con questa possiamo sapere quanta distanza percorre il nostro elettrone. Se è inferiore alla distanza tra le armature, allora la velocità non è sufficiente. Ora il problema è: come troviamo l'accelerazione? Ci tocca invertire la formula fondamentale della dinamica

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

ma il problema è: qual è la forza? Ovviamente è quella repulsiva che l'elettrone sente a causa dell'armatura caricata negativamente. Come trovarla? Semplice

$$\vec{F} = q\vec{E} \rightarrow F = qE = -1.60 \cdot 10^{-19} \cdot 3.5 \cdot 10^{-4} = \underline{-5.6 \cdot 10^{-23}\,\text{N}}$$

E ora possiamo trovare l'accelerazione

$$a = \frac{F}{m} \rightarrow a = \frac{-5.6 \cdot 10^{-23}}{9.11 \cdot 10^{-28}} = \underline{-6.1 \cdot 10^4}$$

Ora completiamo l'equazione precedente

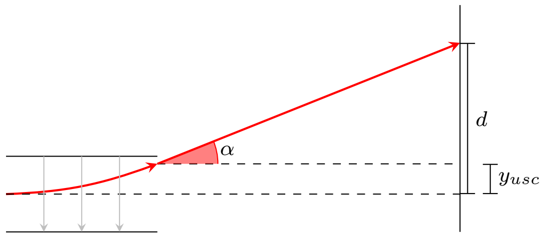
$$v_f^2 - v_i^2 = 2aS \to S = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a} \to S = \frac{0^2 - 750^2}{2 \cdot 6.1 \cdot 10^4} = \boxed{4.5\,\text{mm}}$$

Essendo questa distanza inferiore a $5\,\text{mm}$, l'elettrone non raggiungerà l'altra armatura.
Seguendo lo stesso ragionamento invertiamo questa formula per trovare v_i sapendo la distanza.

$$v_f^2 - v_i^2 = 2aS \to v_i = \sqrt{2aS + v_f^2} \to$$
$$v_i = \sqrt{2 \cdot 6.1 \cdot 10^4 \cdot 5} \approx \boxed{784\,\text{m/s}}$$

Esercizio 3 Un elettrone di massa m e carica e viene lanciato ad una velocità $v_0 = 2 \cdot 10^8\,\text{m/s}$ lungo l'asse delle pareti di un condensatore a facce piane e parallele di lunghezza $l = 1\,\text{m}$, andando a colpire uno schermo fluorescente posto ad una distanza $d = 2\,\text{m}$ dagli etremi delle pareti del condensatore. Supponendo che l'eltrone appena uscito dal condensatore non risenta più dell'effetto del campo elettrico e che il campo elettrico $\vec{E}$, di modulo $10^4\,\text{N/C}$, sia diretto verso il basso, **calcola a quale distanza dall'asse del condensatore, l'elettrone colpisce lo schermo.** Si tenga presente che $\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11}\,\text{C/kg}$

Quest'esercizio è piuttosto complicato ed è molto articolato. Andrà a toccare elementi di cinematica nonché di elettrostatica. Per avere un'idea più chiara della situazione, andiamo a vedere il disegno



In rosso vediamo il moto dell'elettrone. Perché tende verso l'alto? L'elettrone ha carica negativa, il campo elettrico va da + a -, quindi l'elettrone si muove in verso opposto a quello del campo. Sono stati evidenziati anche i due diversi moti, con due diverse frecce. Il primo è moto parabolico in quanto abbiamo una certa forza che agisce sull'elettrone, il secondo è moto rettilineo uniforme in quanto non ci sono più forze in gioco.

Per risolvere questo genere di esercizi molto articolati, bisogna procedere con calma e metodo. Noi dobbiamo trovare d. d è composta da y_{usc} e dalla y del moto rettilineo. Troviamo intanto y_{usc}. Secondo la legge oraria del moto parabolico

$$y_{usc} = \frac{1}{2}at^2 \to y_{usc} = \frac{1}{2}a\left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

Abbiamo tutto quello che ci serve tranne a. A che accelerazione è sottoposto l'elettrone? A quella generata dalla forza di un campo magnetico su una carica. Utilizzando quindi la definizione di campo elettrico e la seconda legge della dinamica scriviamo

$$eE = ma \to a = \frac{e}{m}E$$

Quindi sostituendo con i dati già forniti e risolvendo otteniamo

$$a \approx \underline{1.76 \cdot 10^{15}\,\text{m/s}^2}$$

Inserendo ora tutti i dati nella prima formula

$$y_{usc} = \frac{1}{2} \cdot 1.76 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 10^8}\right)^2 \approx \underline{2.2 \cdot 10^{-2}\,\text{m}}$$

E questa era la parte facile. Ora se osserviamo meglio il disegno, vediamo che $y = 2\tan\alpha$ questo perché 2 è il cateto maggiore e α l'angolo opposto al cateto che ci interessa. Quindi dobbiamo in qualche modo trovare α. Possiamo vedere quell'angolo come angolo compreso tra due vettori, specificamente la componente x e y della velocità d'uscita. Abbiamo già la componente x in quanto nel moto parabolico si mantiene costante. Quella y è facilmente trovabile con le nostre conoscenze di cinematica dove

$$v = v_0 + at$$

dove $v_0 = 0$ in quanto l'elettrone parte da fermo sull'asse y. L'accelerazione e il tempo li abbiamo già individuati! Quindi scriviamo

$$v = at \to v = 1.76 \cdot 10^{15} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^8} \approx \underline{8.8 \cdot 10^6\,\text{m/s}}$$

L'angolo compreso tra due vettori è pari all'arcotangente del quoziente tra le componenti y e x. Quindi

$$\alpha = \arctan\frac{y}{x} \to \alpha = \arctan\frac{8.8 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^8} \approx \underline{2.5°}$$

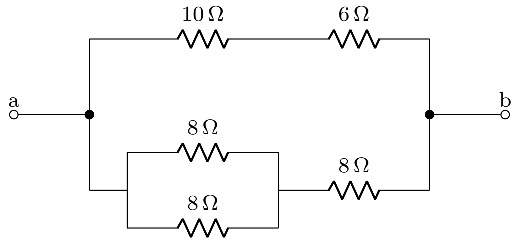
Ora risolviamo e concludiamo

$$d = y + y_{usc} = 2\tan\alpha + y_{usc} = 2\tan 2.5 + 0.022 =$$
$$2 \cdot 0.044 + 0.022 = \boxed{0.11\,\text{m}}$$

Circuiti Elettrici

Esercizio 1 Se la corrente nel resistore di $6\,\Omega$ della figura è di $2\,A$:

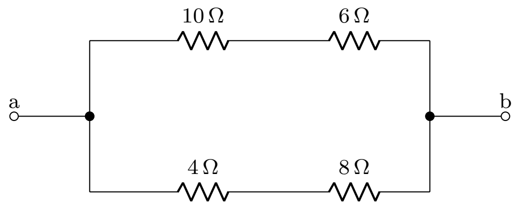
- La caduta di potenziale tra a e b;
- La corrente totale del circuito;



Per prima cosa, si semplifichino le resistenze da $8\,\Omega$ che sono in parallelo fra di loro

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \to \frac{1}{R_e} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \to R_e = \underline{4\,\Omega}$$

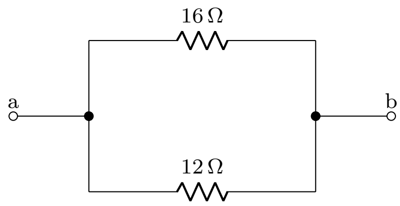
Quindi ora il circuito è come questo



Semplifichiamolo ulterirormente riducendo le resistenze in serie

$$R_{e_1} = 10 + 6 = \underline{16\,\Omega}$$
$$R_{e_2} = 4 + 8 = \underline{12\,\Omega}$$

E il circuito ora rimane molto semplicemente



Sapevamo che nella resistenza da $6\,\Omega$ del primo circuito passvano $2\,A$. Dato che si trova in serie con una da $10\,\Omega$, anche in questa passeranno $2\,A$.
Sfruttando la formula

$$V = Ri$$

possiamo trovarci la caduta di potenziale tra a e b.

$$V = Ri \to V = 16 \cdot 2 = \boxed{32\,\text{V}}$$

Sapendo ora la d.d.p. e sapendo che le resistenze sono in parallelo, possiamo trovarci la corrente che passa nella resistenza di $12\,\Omega$ invertendo quella formula

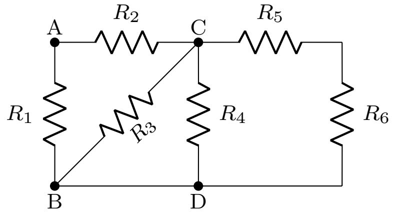
$$V = Ri \to i = \frac{V}{R} \to i = \frac{32}{12} \approx \underline{2.66\,\text{V}}$$

Infine, la sommiamo alla corrente del ramo "superiore" del circuito e otteniamo la corrente totale

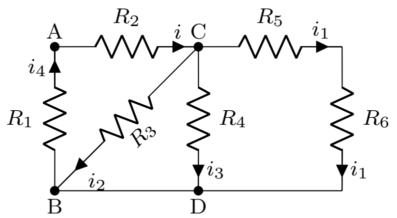
$$i_t = i_1 + i + 2 = 2 + 2.66 = \boxed{4.66\,\text{A}}$$

Esercizio 2 Calcolare la resistenza R_{eq} vista ai morsetti **A-B**

- $R_1 = R_3 = 0.2\,\Omega$
- $R_2 = 0.4\,\Omega$
- $R_4 = R_5 = 1\,\Omega$
- $R_6 = 3\,\Omega$



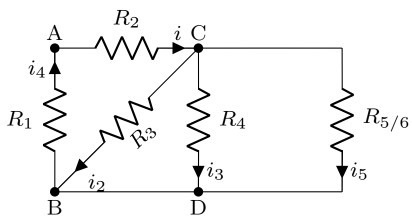
Quest'esercizio, per quanto apparentemente intimidatorio, non è così complicato. La prima cosa da fare è trovare in che relazione sono le resistenze fra di loro. È immediato vedere che R_5 e R_6 sono in serie fra di loro in quanto non hanno collegamenti nel mezzo.
E ora come scoprire i collegamenti di quell'aggroviglio di resistenze? Bisogna andare con molta calma e osservare come si diffonde la corrente. Sappiamo che A e B sono i poli della batteria quindi ipotizziamo che in A si trovi il polo positivo (metterlo in B non cambierebbe nulla). Il seguente schema chiarisce i versi delle correnti.



Come possiamo notare in C la corrente si divide in 3: i_1, i_2 e i_3. Questo cosa ci dice? Che i tre collegamenti sono fra di loro in parallelo! Una proprietà dei collegamenti in serie è che la corrente si mantiene costante tra le resistenze, dato che in questo caso non avviene il collegamento è in parallelo.
Abbiamo quindi definito che R_5 ed R_6 sono in serie fra di loro; la loro equivalente, R_4 ed R_3 sono in parallelo fra di loro. Manca solo R_1 ed R_2. R_2 è immediatamente visibile che sarà in serie con la risultante di R_5, R_6, R_4 ed R_3. Quando rimarranno solo due resistenze, R_1 e l'altra saranno in parallelo.

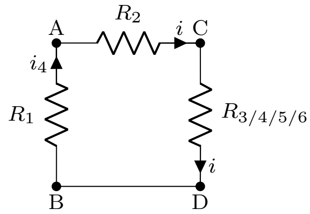
Per rendere tutto più chiaro, cominciamo a fare i calcoli e semplificare il circuito.

$$R_{5/6} = R_5 + R_6 \to R_{5/6} = 1 + 3 = \underline{4\,\Omega}$$



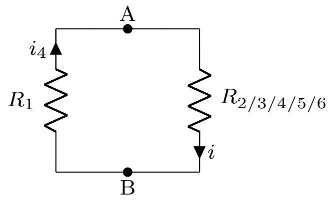
Avendo già stabilito il verso di percorrenza della corrente e i tipi di collegamento, semplifichiamo $R_{5/6}$, R_4 e R_3.

$$R_{3/4/5/6} = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{5/6}}\right)^{-1} \to$$
$$\left(\frac{1}{0.2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}\right)^{-1} = \underline{0.16\,\Omega}$$



Ora semplifichiamo le due resistenze in serie (R_2 e l'ultima calcolata)

$$R_{2/3/4/5/6} = R_2 + R_{3/4/5/6} \to$$
$$R_{2/3/4/5/6} = 0.4 + 0.16 = \underline{0.56\,\Omega}$$



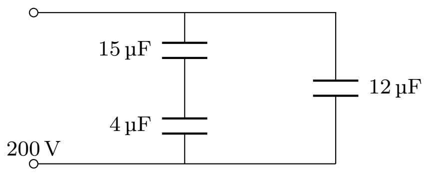
E ora possiamo vedere che le due resistenze sono in parallelo fra di loro e quindi possiamo semplificarle con facilità

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{2/3/4/5/6}}\right)^{-1} \to$$
$$R_{eq} = \left(\frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.56}\right)^{-1} = \boxed{0.147\,\Omega}$$

Ed ecco il nostro risultato. Il modo migliore per risolvere questi esercizi è cercare di capire in che verso va la corrente e vedere i collegamenti. Andando con calma si riuscirà senza problemi a risolvere qualsiasi esercizio proposto.

Esercizio 3 Per la disposizione mostrata in figura si trovino:

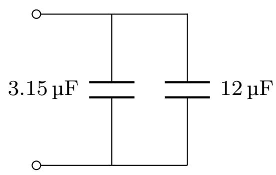
- La capacità equivalente tra i terminali
- La carica immagazzinata in ciascun condensatore
- L'energia accumulata nei condensatori



È evidente che i due condesatori da 15 e 4 sono in serie fra di loro. Il condesatore da 12 invece è in parallelo con questi due. Per risolvere il primo punto calcoliamoci l'equivalente dei due condensatori in serie.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \to C_{eq} = \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{4}\right)^{-1} \approx \underline{3.15\,\text{pF}}$$

Ora il circuito è come questo



Ora basta solo trovare l'equivalente di questi due in parallelo.

$$C_{eq} = C_1 + C_2 \to 3.15 + 12 = \boxed{15.15\,\text{pF}}$$

Per il secondo punto possiamo sfruttare la formula per la capacità elettrica $C = \dfrac{Q}{V}$. Dato che i due condensatori dell'ultimo circuito sono in parallelo fra di loro, la d.d.p. rimane uguale. Quindi possiamo invertire la formula e trovare immediatamente la carica nel condesatore da 12.

$$C = \frac{Q}{V} \to Q = C \cdot V \to Q = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = \boxed{2400\,\mu\text{C}}$$

E possiamo fare lo stesso con la resistenza equivalente. Una volta fatto otterremo anche la carica su ciascuno dei due condensatori in quanto sono in serie e due condensatori in serie hanno la stessa carica.

$$C = \frac{Q}{V} \to Q = C \cdot V \to Q = 3.15 \cdot 200 = \boxed{630\,\mu\text{C}}$$

Esercizio 4 Un sottile filo conduttore di resistenza $R = 50\Omega$, collegato ad un generatore di tensione ideale che mantiene una differenza di potenziale ΔV_0, viene utilizzato per portare 10L di acqua dalla temperatura di 10°a quella di 50°. La corrente erogata dal generatore è pari a 5A. Considera il calore specifico dell'acqua pari a 4186 J/kg·K e il rendimento del sistema pari a $\mu = 0.8$

In questo esercizio combiniamo le nostre conoscenze di Calorimetria e di elettrostatica. Abbiamo una resistenza che è attraversata da una corrente. Questo ci dice, secondo l'effetto Joule che si scalderà. Scaldandosi emetterà calore anche ai corpi adiacenti, in questo caso l'acqua.
Sapendo che per Joule

$$Q = Ri^2 t$$

e che la quantità di calore è pari a

$$Q = C\Delta t = mc\Delta T$$

unendole otteniamo

$$Ri^2 t \cdot = C = mc\Delta T\mu$$

Abbiamo aggiunto μ in quanto la macchina termica non è perfetta e ha un rendimento diverso da 1. Dato che a noi interessa solo il tempo, lo isoliamo per ottenere

$$t = \frac{mc\Delta T}{Ri^2}$$

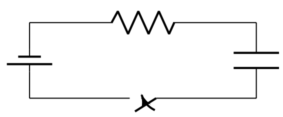
Ora non resta che sostituire

$$t = \frac{mc\Delta T\mu}{Ri^2} \to t = \frac{10 \cdot 4186 \cdot (50 - 10) \cdot 0.8}{50 \cdot 5^2} = \boxed{1.7 \cdot 10^3\,\text{s}}$$

Esercizio 5 Un generatore di forza elettromotrice pari a $\mathscr{E} = 30\,\text{V}$ è connesso in serie ad una resistenza $R = 5\,\text{k}\Omega$ e ad un condensatore di capacità pari a $8\,\mu\text{F}$. Un interruttore chiude il circuito all'istante $t = 0\,\text{s}$. Calcola quante **costanti di tempo siano necessarie perché l'energia immagazzinata sia $\frac{1}{3}$ dell'energia finale.**
L'energia immagazzinata in un condensatore in funzione del tempo è

$$L_c(t) = \frac{q(t)^2}{2C}$$

Partiamo dal disegno del circuito



Ora, osservando la formula che ci viene data, possiamo riscriverla

$$L_c(t) = \frac{q(t^2)}{2C} = \frac{1}{2} q(t) V(t)$$

che ulteriormente espansa e semplificata viene

$$L_c(t) = \underbrace{\frac{1}{2} C\mathscr{E}^2}_{\text{max}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2$$

Dato che noi dobbiamo ottenere $\frac{1}{3}$ della capacità massima, possiamo scrivere la seguente equazione

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3} C\mathscr{E}^2 = \frac{1}{2} C\mathscr{E}^2 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2 \to$$

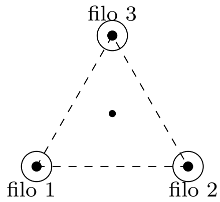
$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2} \to$$

$$0.42 = e^{-\frac{t}{\tau}} \to \ln 0.42 = -\frac{t}{\tau} \to$$

$$t \approx \boxed{0.86\tau}$$

Magnetismo

Esercizio 1 Tre fili rettilinei paralleli sono posti sui vertici di un triangolo equilatero di lato $d = 35\,\text{cm}$, come mostrato in figura e sono attraversati dalle correnti i_1, i_2, i_3. Le correnti hanno tutte intensità pari a $2\,\text{A}$. **Determina modulo, direzione e verso della forza per unità di lunghezza che agisce su un punto al centro del triangolo nel caso in cui tutte le correnti siano uscenti dal foglio. E se uno fosse entrante?**



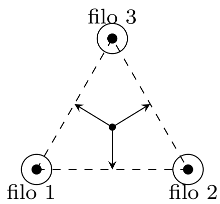
Questo è il nostro disegno e il punto al centro è quello su cui noi dobbiamo trovare la forza risultante. Scriviamo la formula per la forza che intercorre tra due fili paralleli (legge di Ampére)

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d} l$$

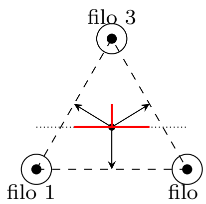
sappiamo però che tutte le correnti sono uguali quindi semplifichiamo in

$$F = \frac{4l\mu_0}{2d\pi}$$

Abbiamo d che rappresenta la distanza tra i due punti e l che è un parametro variabile. Usando la regola della mano troviamo la direzione e il verso dei vettori.



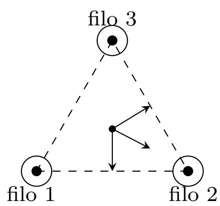
Quello che capiamo da questo disegno è decisivo: le tre forze si annullano se hanno lo stesso modulo. Come mai? Ipotiziamo di proiettare su x e y le componenti



Notiamo che la coponente x si annulla e quella y perché bisogna sommare le due componenti dei vettori. Di conseguenza

$$\vec{F} = \vec{0}$$

E se uno fosse entrante? Ipotiziamo che quello entrante sia il filo 1. Il disegno dei vettori ora diventa



Sappiamo che i vettori che non si sono mossi, hanno un angolo pari a 120° fra di loro. Questo perché il triangolo è equilatero. Il vettore che invece si è spostato, ha semplicemente invertito verso. Se prima si trovava anch'esso a 120° gradi dagli altri, adesso ne è diventato la bisettrice dividendo quindi ora in due angoli da 60°. La risultante dei due vettori che non sono stati modificati è pari al nuovo vettore in quanto precedentemente lo annullavano. Di conseguenza la forza che si applica non è altro che

$$\boxed{\vec{F_e} = 2\vec{F}} \to \|\vec{F_u}\| = \frac{4l\mu_0}{d\pi}$$

d quanto vale però? d è la distanza tra il filo e il punto centrale. Esso si trova a $\frac{2}{3}$ dell'altezza di distanza (questo perché baricentro e incentro in un triangolo equilatero coincidono e il baricentro divide il segmento in 2 parti, una il doppio dell'altra). Quindi mettendo assieme queste informazioni

$$d = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{\sqrt{3}}{3}l$$

e sostituendo l con il dato

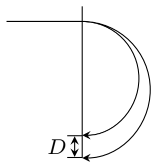
$$d = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0.35 \approx \underline{0.2\,\mathrm{m}}$$

Ora non resta che risolvere!

$$\|\vec{F_u}\| = \frac{4l\mu_0}{d\pi} \to F = \frac{4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot l}{0.2\pi} \approx \boxed{8 \cdot 10^{-6} l\,\mathrm{N}}$$

dove l è la nostra unità di lunghezza, il parametro.

Esercizio 2 In uno spettrometro di massa entra un fascio di ioni di carica $q = e$, velocità $5000\,\mathrm{m/s}$ e massa $m_1 = 20\,\mathrm{u}$ per alcuni e $m_2 = 22\,\mathrm{u}$ per altri (con u come unità di massa atomica). Il fascio viene ora deviato di 180° da un campo magnetico $B = 0.09\,\mathrm{T}$ (vedi figura). **Qual è la distanza D tra i due punti?**



Poiché le velocità sono perpendicolari al campo magnetico le traiettorie sono archi di circonferenza e la distanza D non è altro che la differenza dei diametri. $D = 2(r_2 - r_1)$.
Sugli ioni agisce la forza di Lorenz in quanto sono cariche in un campo magnetico. Dalla seconda legge della dinamica possiamo dire che

$$qvB = m\frac{v^2}{r}$$

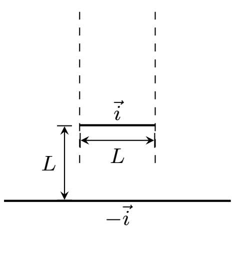
Essendo la parte sinistra la forza di lorenz e quella destra nel caso in cui sia perpendicolare. Da questa si deriva che

$$r = \frac{mv}{qB}$$

La distanza è quindi pari a

$$D = \frac{2v}{eB}(m_2 - m_1) \approx \boxed{2.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

Esercizio 3 Una barra conduttrice orizzontale di lunghezza L e massa m può scivolare su una guida verticale (si guardi la figura) ed è in equilibrio ad un'altezza L da un lungo cavo conduttore quando sia la barra che il cavo hanno una corrente I ma in versi opposti. **Trova I in funzione di L e m. Qual è l'accelerazione iniziale della barra se la corrente del cavo venga improvvisamente raddopiata?**



Abbiamo due fili paralleli attraversati da una corrente. Questo ci porta ad usare la legge di Ampére.

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{d}l$$

Sostituendo i nostri dati otteniamo

$$mg = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{-I^2}{\cancel{L}}\cancel{L}$$

Ora non resta che isolare I

$$m = I^2\frac{\mu_0}{2\pi} \to \frac{2\pi m}{\mu_0} = I^2 \to \boxed{I = \sqrt{\frac{2\pi mg}{\mu_0}}}$$

Nel caso in cui la corrente si raddoppi, la forza raddoppia quindi diventa

$$F = -I^2\frac{\mu_0}{\pi} = 2mg$$

Usando la seconda legge di Newton ci dice

$$F - mg = ma \to 2mg - mg = ma \to mg = ma$$

Questo ci dice che quindi $\boxed{a = g}$, verso l'alto.

Esercizio 4 Un fascio di protoni con varie velocità è diretto nel verso positivo dell'asse x. Il fascio entra in una regione in cui è presente un capo magnetico uniforme d'intensità $0.52\,\mathrm{T}$; il campo è diretto nel verso negativo dell'asse z, come indicato in figura.
Si vuole utilizzare un campo elettrico uniforme (in aggiunta al campo magnetico) per selezionare solo quei protoni che hanno velocità pari a $1.42 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}$; in altre parole si vuole che questi protoni siano gli unici a non essere deflessi dai due campi.

1. Determinare **l'intensità**, **la direzione** e **il verso** del campo elettrico che permette di selezionare le particelle
2. Supponendo che il campo elettrico sia generato da un condensatore le cui amature distano $2.5\,\mathrm{cm}$, calcolare la d.d.p. necessaria da essere applicata agli estremi di esso
3. Quale delle due armature deve essere caricata positivamente?

Abbiamo un campo magnetico e uno elettrico incrociati, questo è il tipico selettore di velocità. La formula ci dice

$$v = \frac{E}{B}$$

e noi abbiamo v e B. Il nostro compito quindi è ottenere E.

$$v = \frac{E}{B} \to E = vB = 1.42 \cdot 10^5 \cdot 0.52 = \boxed{7.3 \cdot 10^4\,\mathrm{C/m^2}}$$

In che direzione deve andare? Se osserviamo il campo magnetico generato, notiamo che tende a spingere i protoni verso l'alto (usando la regola della mano questo risulta evidente). Di conseguenza, se si vuole mantenere stabile il protone, il campo elettrico deve andare verso il basso, perpendicolarmente al condensatore.

Un campo elettrico generato da un condensatore è pari a

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

Noi abbiamo la distanza e il campo con la richieta della differenza di potenziale. Isoliamo e calcoliamo

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x} \to \Delta V = E\Delta x = 7.3 \cdot 10^4 \cdot 0.025 = \boxed{1846\,\mathrm{V}}$$

Quale piastra deve essere caricata positivamente? Sapendo che il campo va da + a - e sapendo che deve essere orientato verso il basso, la piastra positiva deve essere quella superiore.

Esercizio 5 Un solenoide è lungo $20\,\mathrm{cm}$ e ha un diametro di $50\,\mathrm{mm}$. Il filo di rame utilizzato per formare le spire dell'avvolgimento ha una sezione di diametro $0.5\,\mathrm{mm}$. Le spire sono affiancate. Ai capi del solenoide è applicata una differenza di potenziale in modo che il campo magnetico generato all'interno abbia un'intensità pari a $1.26 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$. La resistività del rame vale $1.7 \cdot 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}$. **Calcola il valore della differenza di potenziale.**

Scriviamo la formula che ci trova il campo magnetico in un solenoide

$$B = \mu_0 \frac{n}{l} i$$

La corrente è definita come

$$i = \frac{V}{R}$$

A noi manca anche la resistenza che però possiamo trovare facilmente usando la seconda legge di Ohm

$$R = \rho \frac{L}{S} \rightarrow R = 1.7 \cdot 10^{-8} \frac{L}{\pi \cdot (2.5 \cdot 10^{-4})^2} = \underline{0.085L}$$

Quindi ora, scrivendo tutto quanto in un'unica equazione

$$1.26 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot \pi \frac{n}{0.2} \frac{V}{0.085L}$$

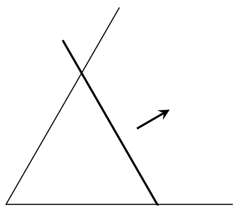
dato che $L = 2n \cdot r \cdot \pi$ dato che il filo è arrotolato n volte

$$1.26 \cdot 10^{-3} = 4 \cdot \pi \frac{n}{0.2} \frac{V}{0.085 \cdot n \cdot 0.15}$$

risolvendo per V otteniamo

$$V = \boxed{2.67\,\mathrm{V}}$$

Esercizio 6 Un lungo filo metallico conduttore è piegato di 60° e si appoggia su un piano perpendicolare ad un campo magnetico uniforme $B_0 = 1\,\mathrm{T}$. Un secondo filo metallico molto lungo è tirato con una velocità $v = 2\,\mathrm{m/s}$ mentre si appoggia sul cavo piegato in modo da formare un triangolo equilatero con i punti di contatto (si veda la figura). All' istante $t = 0$, il triangolo ha lato $l_0 = 0.5\,\mathrm{m}$. Entrambi i cavi hanno una resistenza lineare unfirme di $\rho = 0.1\,\Omega/\mathrm{m}$. Supponendo perfetto contatto tra i due cavi, si esprima la forza elettromotrice indotta in funzione del tempo in termini di B_0, v, l_0 e t. **Qual è il valore di questa forza dopo** $5\,\mathrm{s}$**? Trova la corrente in questo istante**.



Ad un istante t, l'asta ha velocità vt rispetto al piano della parte curva. Quindi la lunghezza del cavo che fa contatto è pari a

$$l = l_0 + 2vt \tan 30° = l_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} vt$$

Man mano che si muove, il flusso continuerà a cambiare di intensità, quindi la forza elettromotrice continuerà a variare. Infatti

$$\mathscr{E} = B_0 v l = B_0 v \left(l_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} vt \right)$$

A $t = 5$, basta soltanto sostituire per ottenere

$$\mathscr{E} = B_0 v \left(l_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} vt \right) \rightarrow 1 \cdot 2 \left[0.5 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \cdot 2 \cdot 5 \right] = \boxed{24.1\,\mathrm{V}}$$

La resistenza del filo è costante ed è pari a $R = 3l\rho$ perché consideriamo tutto il circuito chiuso. Vediamo che la resistenza è dipendente dal tempo (per la presenza del fattore l). Di conseguenza la corrente non è altro che

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{B_0 v \cancel{l}}{3 \cancel{l} \rho} \rightarrow i = \boxed{6.67\,\mathrm{A}}$$

Appendice

Questo formulario dá per scontate alcune nozioni matematiche. Di seguito sono riportate le più basilari e importanti.

Proporzionalità

Per esprimere la proporzionalità si utilizza il simbolo $\propto$.
Si dicono **direttamente proporzionali** due variabili x, y se

$$y = kx\,(y \propto x)$$

Ovvero se all'aumentare di x aumenta anche y.

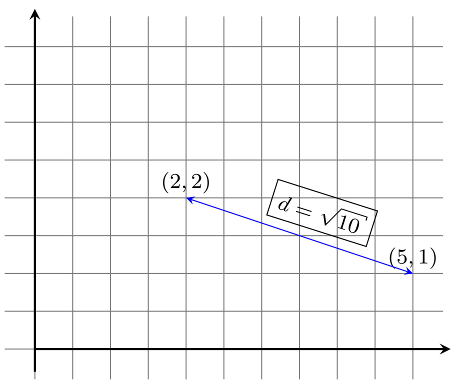
Si dicono **inversamente proporzionali** due variabili x, y se

$$xy = k\left(y \propto \frac{1}{x}\right)$$

Distanza

La distanza tra due punti è un concetto fondamentale e si calcola

$$d = \sqrt{(x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2}$$



Notazione scientifica

I valori ottenuti in fisica possono presentare a volte molti zeri, per ovviare alla difficoltà di lettura di questi numeri si utilizza la notazione scientifica che consiste nello scrivere qualunque numero come

$$\text{Numero} = x \cdot 10^y$$

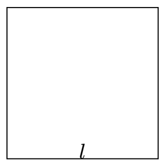
con x tra 0 e 10 e con ultima cifra diversa da 0
Dunque $107,000 = 1,07 \cdot 10^5$ e $0.0000098 = 9,8 \cdot 10^{-8}$
Frequentemente 10^y viene ancora semplificato con alcuni prefissi:

	Prefisso	Nome prefisso
10^{18}	E	esa
10^{15}	P	peta
10^{12}	T	tera
10^{9}	G	giga
10^{6}	M	mega
10^{3}	k	kilo
10^{2}	h	etto
10^{-1}	d	deci
10^{-2}	c	centi
10^{-3}	m	milli
10^{-6}	μ	micro
10^{-9}	n	nano
10^{-12}	p	pico
10^{-15}	f	femto
10^{-18}	a	atto

Quadrato

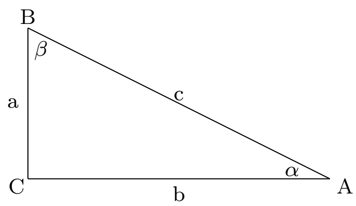
Il quadrato è una figura regolare con 4 lati.
Definendo l =lunghezza del lato si calcola

$$\text{Area} = l^2 \quad \text{Diagonale} = l\sqrt{2}$$



Triangolo

Il triangolo è una figura con tre lati. Esistono svariati tipi di traingoli ma quelli piu comuni in fisica sono i trangoli rettangoli (ovvero quei triangoli che hanno un angolo di 90 gradi).



Si definisce c (il lato più lungo) ipotenusa, b (lato di media lunghezza) cateto maggiore e a (lato più corto)
Alla base di tutte le formule sul triangolo rettangolo sta il Teorema di Pitagora:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Oltre a questa formula sono fondamentali anche:

$$b = c\cos\alpha \quad \text{e} \quad a = c\sin\alpha$$
$$a = c\cos\beta \quad \text{e} \quad b = c\sin\beta$$

Al seno e al coseno va aggiunta la tangente che si definisce:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Attraverso la tangente:

$$a = b\tan\alpha \qquad b = a\tan\beta$$

Un altra formula importante è

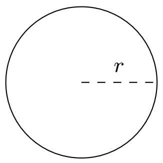
$$\cos x^2 + \sin x^2 = 1$$

che si usa per ottenere il il seno quando si ha il coseno e viceversa.

Cerchio

Il cerchio è una figura fondamentale, si dimostra che:

$$\text{Circonferenza} = 2\pi r$$
$$\text{Area} = \pi r^2$$



π è un numero irrazionale definito appunto come rapporto la lunghezza della circonferenza e il diametro, il suo valore approssimato è $3,14159$.
Facendo ruotare un cerchio di 180 gradi si ottiene una sfera. Il volume di una sfera è pari a

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

La superficie invece

$$S = 4\pi r^2$$

Equazioni

Esistono svariati tipi di equazioni, tra le più comuni vi sono quelle di secondo grado. Per risolvere le equazioni $ax^2 + bx + c = 0$ si usa la seguente formula:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Per risolvere sistemi di equazioni come questo

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f, \end{cases}$$

si può usare il teorema di Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{ce - bf}{ae - bd} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

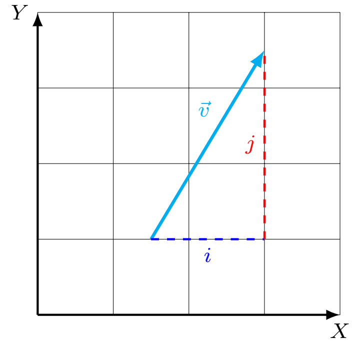
Con questa logica si possono risolvere sistemi con anche più equazioni.

Vettori

Questa sezione è dedicata ad uno dei concetti più comuni in fisica: il *vettore*.
Un vettore può essere rappresentato in molti modi, tra cui:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{bmatrix} = (a, b, \dots)$$

Un vettore è composto di un numero definito di *componenti*, solitamente una per ciascuna dimensione in cui si lavora. Quindi è decisamente più comune trovare vettori *bidimensionali* che non con un numero maggiore di componenti.



In questa immagine è possibile vedere un vettore $\vec{v}(i, j)$ e le sue componenti.

D'ora in poi sarà dato per scontato che i vettori siano bi-dimensionali.

Operazioni tra vettori

Le operazioni come addizione e sottrazione funzionano molto semplicemente sommando algebricamente le componenti tra di loro:

$$\vec{v_1}\,(a_1, b_1) \pm \vec{v_2}\,(a_2, b_2) = \vec{v}\,(a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$$

La moltiplicazione tra vettori può avere come risultato o un *vettore* o uno *scalare*.

Prodotto scalare

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Come si può notare il prodotto scalare tra due vettori torna uno scalare (ovvero un numero). In fisica però è molto più comune trovare questa definizione di prodotto scalare:

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \|\vec{v_1}\| \cdot \|\vec{v_2}\| \cos\theta$$

$\|\vec{v}\|$ è il modulo del vettore $\vec{v}$, ovvero la sua lunghezza. θ è l'angolo formato dai due vettori.

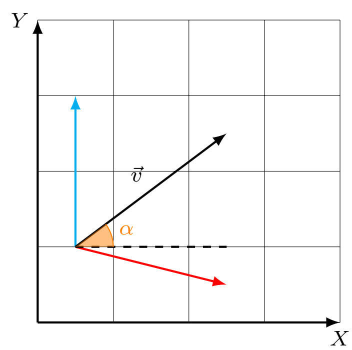
Prodotto vettoriale

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = n\|\vec{v_1}\| \cdot \|\vec{v_2}\| \sin\theta$$

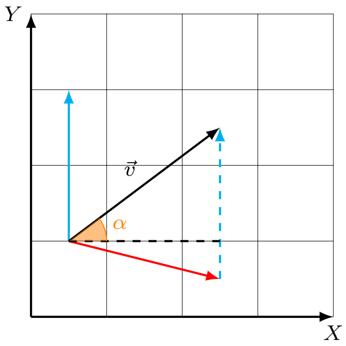
$\|\vec{v}\|$ è il modulo del vettore $\vec{v}$, ovvero la sua lunghezza. θ è l'angolo formato dai due vettori. n è la *normale* del piano su cui stanno i vettori. Una *normale* è un vettore perpendicolare ad un oggetto dato.
Per scoprire la direzione del nuovo vettore si può usare la così detta "regola della mano". Essa dice:

1. Usare il pollice della mano destra in direzione e verso del **primo** vettore
2. Usare l'indice o le altre dite in direzione e verso del **secondo** vettore
3. Il nuovo vettore avrà la direzione che attraversa il palmo perpendicolarmente e il vers o uscente dalla mano.

Angolo tra vettori



Sono qui rappresentati due vettori: uno in ciano e uno in rosso. La loro somma è il vettore risultante, in nero.
Per trovare l'angolo di un vettore ottenuto da una somma, vanno sommate tra loro le componenti orizzontali (x) dei due vettori e tra loro le componenti verticali (y) dei due vettori.



Otteniamo quindi che l'angolo è pari a

$$\alpha = \arctan \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$$

Percentuale

La percentuale serve per esprimere delle informazioni numeriche, si esprime col simbolo %.
N% ha il significato di $\frac{N}{100}$. N% di T è pari ad una parte di T (che va da 0 a T), per riassumere quindi

$$T \cdot \frac{N}{100} = R$$

La variazione percentuale, serve a definire quando una quantità x varia, è definita come:

$$\text{Variazione percentuale} = \frac{x_{\text{finale}} - x_{\text{iniziale}}}{x_{\text{iniziale}}} \cdot 100$$

Quindi se la velocità di un corpo passsa da 15 m/s
a 20 m/s, vi è stato un aumento percentuale del 33,3%.

Esponenziali e logaritmi

Esponenziali e logaritmi sono strettamente legati, come si può capire notando che:

$$\log_a b = x \qquad a^x = b$$

Molto spesso si utilizzerà questa caratteristica che deriva dalla definizione stessa di logaritmo:

$$a^{\log_a b} = b$$

Alcune proprietà delle espressioni esponenziali

$$a^b \cdot a^c = a^{bc}$$
$$(a+b)^c = a^c + b^c$$
$$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

Alcune propietà invece dei logaritmi sono

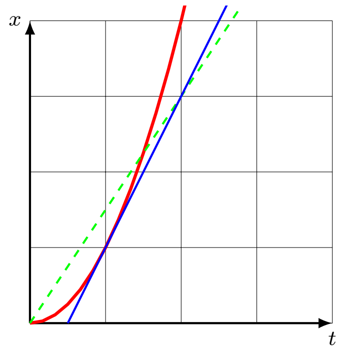
$$\log_a(b * c) = \log_a b + \log_a c$$
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$
$$\log_a(b^c) = c \log_a b$$

Derivate

Le derivate sono una delle basi della fisica, infatti sono utilizzate per calcolare il valore di una varibile in un determinato tempo. Vengono definite in molti modi

$$f'(t_0) \qquad \mathrm{D}f(t)_{t=t_0} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0} \qquad \dot{f}$$

ma quello più comune in fisica è il terzo.
Prendiamo un esempio per capire cosa la derivata ricerchi.



La funzione (che descrive il moto di un corpo) è in rosso, in verde è rappresentata la velocità media tra 0 e 2 secondi e in blu invece è rappresentata la velocità istantanea a 1,5 secondi. La velocità istantanea in un determinato tempo è ottenuta con le derivate.
Sono diverse le formule per derivare una funzione ma quelle più usate sono:

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}x} = \alpha x^{\alpha-1}$$
$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x \qquad \frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x$$
$$\frac{\mathrm{d}\log_a x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\log_a e \qquad \frac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x} = a^x \ln a$$

A queste formule vanno aggiunti alcuni teoremi

$$\frac{\mathrm{d}\,[k \cdot f(x)]}{\mathrm{d}x} = k\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}[f(x) \pm g(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{\mathrm{d}x} \pm \frac{g(x)}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}[f(x) \cdot g(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}g(x) + f(x)\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}g(x) - f(x)\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}}{[g(x)]^2}$$

Un esempio: un corpo partendo da fermo cade dunque la sua posizione è descritta da $x = 0.5 \cdot 9.81 \cdot t^2$. La derivata della funzione è $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0,5 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot t$. Quindi la sua velocità dopo 3 secondi è pari a $29,4\mathrm{m/s}(0,5 \cdot 9,81 \cdot 3)$.

Integrale

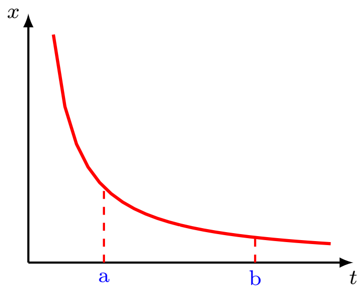
L'integrazione indefinita di $f(x)$ è un operazione che determina tutte le funzioni $F(x)+k$ tali che $\frac{d(F(x)+k)}{dx} = f(x)$ ovvero $\int f(x)dx = F(x)+k$.
Queste sono le formule più ricorrenti dell'integrale definito:

$$\int kf(x)\ \mathrm{d}x = k\int f(x)\ \mathrm{d}x + k$$
$$\int [a(x)+b(x)]\,\mathrm{d}x = \int a(x)\ \mathrm{d}x + \int b(x)\ \mathrm{d}x + k$$
$$\int x^\alpha\ \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$$
$$\int a^x\ \mathrm{d}x = a^x \log_a e + k$$
$$\int \sin(x)\ \mathrm{d}x = -\cos(x) + k$$
$$\int \cos(x)\ \mathrm{d}x = \sin(x) + k$$
$$\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln|x| + k$$

L'integrale definto invece è $\int_a^b = F(b) - F(a)$ dove a e b sono due punti finiti. L'area occupata da una funzione tra i punti a e b è

$$A = (b-a)V_{\text{medio}} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Si prenda ad esempio $y = \frac{1}{x}$ tra $a = 1$ e $b = 3$



L'integrale indefinito è $\int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \log x + k$, l'area è dunque

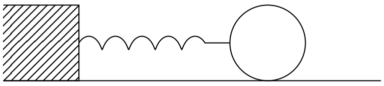
$$A = \int_1^3 \frac{1}{x} dx = log(3) - log(1) \approx 1,01$$

Dimostrazioni

Di seguito verrano inserite delle dimostrazioni di formule che si possono incontrare nel formulario. La sezione non è assolutamente necessaria, è semplicemente per i più curiosi.

Dinamica

Oscillatore armonico



Quando questa massa si muove di una distanza x_0 e poi viene rilasciata, tenderà a tornare alla posizione originale. La forza che agisce è pari a $F = -ka$. È una forza non costante, quindi può essere vista come derivata

$$F = mx'' \to -kx = mx''$$

Questa ora è iventata un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Qundi si risolve

$$m\lambda^2 + k = 0 \to \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

e quindi

$$x = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

Sapendo che $x(0) = 0$, si sostituisce e ottiene $x_0 = c_1$. Ora si deriva

$$x' = -c_1\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + c_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

Ora sapendo che $x'(0) = 0$, sostiuiamo e otteniamo che $c_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. A questo punto otteniamo la soluzione

$$x = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

Posto $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ si ottiene $x = x_0 \cos \omega t$.

Lavoro

Si prenda un corpo di massa m con $v_0 = 0$ su cui è applicata una forza $\vec{F}$ per farlo accelerare a velocità v. Se si definisce 1 l'istante iniziale e 2 quello finale, nella meccanica classica il lavoro è pari a

$$L = \int_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

Dato che

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{q}}{\mathrm{d}t}$$

si ha che

$$L = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}\vec{q}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_1^2 \mathrm{d}\vec{q}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \int_1^2 \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{q} = \int_1^2 mv\,\mathrm{d}\vec{v} =$$

$$= m\int_1^2 v\,\mathrm{d}v = m\frac{v^2}{2}\Big|_0^v = \frac{1}{2}mv^2$$

Relatvità

Invariante spazio-temporale

$$(\Delta\sigma)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta S)^2$$

Dove ΔS è la differenza della variazione di tutte le coordinate. Si ha quindi che

$$\begin{aligned}
\Delta x' &= \gamma(\Delta x - v\Delta t)\\
\Delta y' &= \Delta y\\
\Delta z' &= \Delta z\\
\Delta t' &= \gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)
\end{aligned}$$

Sostituendo

$$\begin{aligned}
(\Delta\sigma')^2 &= (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2\\
&= \left(c\left(\gamma\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right)\right)\right)^2 - (\gamma(\Delta x - v\Delta t))^2 -\\
&(\Delta y)^2 - (\Delta z)^2\\
&= c^2\gamma^2\left[(\Delta t)^2 + \frac{v^2}{c^2}(\Delta x)^2 - \frac{2v}{c^4}(\Delta x)^2 - \frac{2v}{c^2}\Delta x\Delta t\right] -\\
&\gamma^2((\Delta x)^2 + v^2(\Delta t)^2 - 2\Delta x\Delta t) - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2\\
&= \gamma^2\left[c^2(\Delta t)^2 + \frac{v^2}{c^4}(\Delta x)^2 - v(\Delta t)^2\right] - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2\\
&= \gamma^2\left[(c^2 - v^2)(\Delta t)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}(\Delta x)^2\right)(\Delta x)^2\right] -\\
&(\Delta y)^2 - (\Delta z)^2\\
&= \frac{c^2}{c^2v^2}\left[(c^2 - v^2)(\Delta t)^2 - \left(\frac{c^2 - v^2}{v^2}\right)(\Delta x)^2\right] -\\
&(\Delta y)^2 - (\Delta z)^2\\
&= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^{-}(\Delta z)^2\\
&= (\Delta\sigma)^2
\end{aligned}$$

Lavoro relativistico

Lavoro

Si prenda una particella di massa m con $v_0 = 0$ su cui è applicata una forza $\vec{F}$ per farla accelerare a velocità v. Se si definisce 1 l'istante iniziale e 2 quello finale, nella meccanica classica il lavoro è pari a

$$L = \int_1^2 \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}$$

Dato che

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{q}}{\mathrm{d}t}$$

si ha che

$$L = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}\vec{q}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_1^2 \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{q} = vq\Big|_0^q - \int_0^v q\,\mathrm{d}v =$$

$$= vq - \int_0^v m\gamma v\,\mathrm{d}v = vq - m\int_0^v \frac{v\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= vq - m\int_0^v \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}v = vq - \frac{mc^2}{2}\int_0^v -\frac{2v}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}v =$$

$$= vq + \frac{mc^2}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2\Big|_0^v = vq + \frac{mc^2}{2}\left[\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= vq + mc^2\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1\right) = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\cdot v + mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - mc^2 =$$

$$= \frac{mv^2 + mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2\gamma - mc^2$$

Note