Robotique industrielle
TD n°5 : Modélisation cinématique

Exercice 1. Modèle cinématique analytique d'un robot SCARA

Soit le robot série 4 axes RRPR décrit dans l'exercice 1 du TD n°2. Son modèle géométrique direct exprimé avec les angles nautiques est :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2\, c_{1+2} \ + \ l_1\, c_1 \\ l_2\, s_{1+2} \ + \ l_1\, s_1 \\ l_0 - l_3 - l_4 + q_3 \\ q_1 + q_2 + q_4 + \pi \end{bmatrix}$$

Les dimensions du robot sont : $l_0 = 1$ m, $l_1 = 0.5$ m, $l_2 = 0.5$ m, $l_3 = 0$ m, $l_4 = 0.3$ m.

1.a. Calculer la matrice jacobienne analytique ${}^0\mathbf{J}^a(\mathbf{q})$ du robot liant les vitesses opérationnelles $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{\alpha}$ du point P aux vitesses articulaires $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$, $\dot{q}_4$ et telle que :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = {}^0\mathbf{J}^a(\mathbf{q}). \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

1.b. Calculer les vitesses minimales et maximales du point P dans l'espace opérationnel pour la configuration $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 2\pi/3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ sachant que les vitesses maximales des axes dans les deux sens sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{q}_{1,max} = 2\pi \ \ rad/s \\ \dot{q}_{2,max} = 2\pi \ \ rad/s \\ \dot{q}_{3,max} = 0.5 \ \ m/s \\ \dot{q}_{4,max} = 4\pi \ \ rad/s \end{cases}$$

1.c. Calculer la manipulabilité en ce point.

1.d. Établir les différentes postures et configurations singulières du robot.

Exercice 2. Modèle cinématique en utilisant les torseurs

On rappelle les matrices de rotations entre deux repères calculées au TD n°2 :

$$ {}^0\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^1\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^2\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^3\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^4\mathbf{M}_P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} $$

On rappelle également :

$$ {}^0\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} c_{1+2} & -s_{1+2} & 0 \\ s_{1+2} & c_{1+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^0\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} c_{1+2} & -s_{1+2} & 0 \\ s_{1+2} & c_{1+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} c_{1+2+4} & -s_{1+2+4} & 0 \\ s_{1+2+4} & c_{1+2+4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^0\mathbf{M}_P = \begin{bmatrix} -c_{1+2+4} & -s_{1+2+4} & 0 \\ -s_{1+2+4} & c_{1+2+4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} $$

Enfin, pour gagner du temps, on a aussi calculé :

$$ \overrightarrow{O_4P}_{/R_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_4 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{O_3P}_{/R_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_3 - l_4 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{O_2P}_{/R_2} = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ q_3 - l_3 - l_4 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{O_1P}_{/R_1} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 c_2 \\ l_2 s_2 \\ q_3 - l_3 - l_4 \end{bmatrix} $$

2.a. Écrire les torseurs cinématiques ${}^{i-1}\mathcal{V}_{i/i-1}(P)$ de chaque articulation.

2.b. Calculer le torseur cinématique ${}^{0}\mathcal{V}_{P/0}(P)$ décrivant la vitesse de P dans R_0.

2.c. En déduire la matrice jacobienne cinématique. Que remarque-t'on quand on la compare à la matrice jacobienne analytique obtenue dans l'exercice 1 ?

On souhaite que le robot exerce une force de 50 N dans la direction de $\vec{x}_0$ et sachant que $q_1 = 0$ et $q_2 = \pi/2$.

2.d. Calculer les couples moteurs nécessaires pour exercer cet effort.