

고차적률의 Shrinkage 추정량을 이용한
포트폴리오 리밸런싱에 관한 연구

2018 년

서강대학교 경영전문대학원

Business Analytics 전공

정 예 숙

고차적률의 Shrinkage 추정량을 이용한
포트폴리오 리밸런싱에 관한 연구

지도교수 이 군 희

이 논문을 경영학박사 학위논문으로 제출함

2018 년

서강대학교 경영전문대학원

Business Analytics 전공

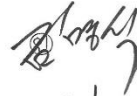
정 예 숙

논 문 인 준 서

정예숙의 경영학박사 학위논문을 인준함

2018년 6월

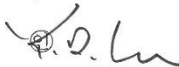
주심 김 명 석



부심 이 군 희



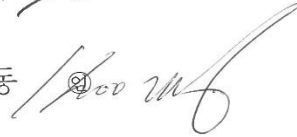
부심 이 윤 동



부심 김 범 수



부심 구 기 동



< 목 차 >

영문초록.....	v
국문초록.....	ix
제 I 장 서론.....	1
제 1 절 연구의 배경과 목적	1
제 2 절 연구의 방법 및 구성	6
제 II 장 이론적 배경.....	9
제 1 절 포트폴리오 최적화	9
제 2 절 리밸런싱	35
제 III 장 연구 모형.....	48
제 1 절 최적 자산배분	48
제 2 절 리밸런싱 모형	53
제 IV 장 실증분석.....	57
제 1 절 자료의 수집	57
제 2 절 분석 결과	63
제 V 장 결 론.....	87
제 1 절 연구결과 요약	87
제 2 절 연구의 시사점	91
제 3 절 연구의 한계 및 향후 연구방향	93
참고문헌.....	97
<부록 1> 모수적 방법에 따른 구조적 변화 시점 결과.....	108
<부록 2> 비모수적 방에 따른 구조적 변화 시점 결과.....	109

<표 목차>

<표 1> 분석 자료 : 글로벌 ETF	58
<표 2> ETF 일별 로그수익률의 기초통계량	59
<표 3> 각 전략에 따른 최적자산배분 성과	63
<표 4> 주성분분석에 따른 요인별 누적기여율	69
<표 5> 주기적 리밸런싱 결과	73
<표 6> $m=15$ 조건 및 벌점강도 변화에 따른 구조변화 시점 추정 결과	75
<표 7> $m=30$ 조건 및 벌점강도 변화에 따른 구조변화 시점 추정 결과	76
<표 8> E-divisive 방법으로 추정된 구조변화 시점에서 리밸런싱 결과	77
<표 9> cp3o 방법으로 추정된 구조변화 시점에서 리밸런싱 결과	77
<표 10> 모수적 및 비모수적 방법을 이용하여 추정된 구조변화 시점	79
<표 11> 연도별 주요 금융 이벤트	80
<표 12> 추정된 구조변화 시점에서의 리밸런싱 결과	82

<그림 목차>

[그림 1] 자산배분 전략 흐름도	9
[그림 2] 자산배분 이론 변천	10
[그림 3] 위험자산의 효율적 포트폴리오	16
[그림 4] 포트폴리오 손실분포의 VaR 과 ES	23
[그림 5] 왜도 및 첨도	28
[그림 6] 변화점 및 세그먼트	39
[그림 7] ETF 일별 로그수익률의 수익과 리스크 분포	61
[그림 8] ETF 일별 로그수익률의 상관관계	62
[그림 9] 분산(표준편차)를 최소화하는 전략의 투자비중	66
[그림 10] ES 를 최소화하는 전략의 투자비중	67
[그림 11] mES 를 최소화하는 전략의 투자비중	67
[그림 12] 축소추정치를 이용한 mES 전략의 투자비중	71
[그림 13] 각 전략의 누적수익률 그래프	72
[그림 14] 각 주기 리밸런싱에 따른 누적수익률 그래프	74
[그림 15] 추정된 구조변화 시점과 주요 금융 이벤트	81
[그림 16] 리밸런싱 전략에 따른 누적수익률 그래프	83
[그림 17] 모수적 리밸런싱에 따른 투자 비중 변화	85
[그림 18] 비모수적 리밸런싱에 따른 투자 비중 변화	85

Abstract

The study on the Portfolio Rebalancing using Shrinkage Estimators on Higher Moments

Jung, Ye Suk

Sogang Business School, Sogang University

The purpose of asset allocation is to compose an efficient portfolio by distributing assets which have different risk level. The asset allocation focuses on risk management to provide return which reflect investor's risk level rather than simply maximizing profits for an investor. Moreover, the asset allocation should be conducted in integrated manner from allocation stage to rebalancing stage to increase the efficiency of asset management. The purpose of this study is to measure the performance of the optimal asset allocation strategy, which is to minimize the downside risk and test new rebalancing strategies at structural change points in the portfolio return rate using 10 global ETFs' daily log return rate data.

First, in the stage of the asset allocation, the study reflects acceptable risk level of each investor, and optimizes the allocation based on PMPT which is reflected by tendency of loss aversion. The main purpose of investment decision under the PMPT is to minimize the downside risk. The typical downside risk parameters are VaR and ES, and the study used

the coherent risk measure, ES. This study minimizes the mES with higher moment to consider asymmetry of financial asset return distribution. However, estimation error likely to occur, if we use estimation of kurtosis, skewness and variance by using historical data. Moreover, the error will be maximized when higher moment with estimation error used in asset allocation. Therefore, shrinkage estimators on higher moment are applied using factor model to avoid the estimation error problem. The study makes comparisons for results of mES minimizing strategy: the strategy with shrinkage estimators with higher moment, to other strategies such as mean-variance model, minimize VaR, minimize ES and minimize mES. To have the mES minimizing strategy, the average drawdown, drawdown deviation, Sortino ratio and information ratio are used as a performance measure. As the result of the empirical analysis, the mES minimizing strategy has the lowest average drawdown and drawdown deviation as 0.1% and 0.4%. It also has Sortino ratio with 1.165 and annualized return as 5.0% which are higher than other strategies. The reasons of having improved return are because the extreme values are already reflected from skewness and kurtosis and minimize the estimate errors by using shrinkage estimators. Consequently, it leads to defend downside risks such as average drawdown, drawdown deviation and etc.

Second, in the rebalancing stage, the study estimates the time of structural change of portfolio return, and then rebalance the portfolio at the time of structural instead of taking periodical rebalancing. To find the structural change points in portfolio return, parametric and non-parametric methodologies are used. The parametric method is a PELT (Prune Exact Linear Time) method which improves the computational complexity to find the

optimal change points that minimize the cost function and the penalty function for over-fitting and under-fitting issues. The non-parametric methods are E-divisive and cp3o (Change points via Probabilistically Pruning Objective). The E-divisive finds the change points hierarchically by calculating the divisive measure, which is the energy statistic and doing permutation test. The cp3o is to search multiple change points using dynamic programming and pruning by doing the goodness-of-fit test and energy statistic is used for that. As a result, the parametric and non-parametric methods estimates the time before and after events such as the global financial crisis in 2008, European fiscal crisis in 2011 and Russian economic crisis in 2015, and the parametric methods are more sensitive to detect the change points than the non-parametric methods. For the time of estimation for portfolio rebalancing, the annualized return on rebalancing at the times estimated by the parametric method is 1.2% higher than non-parametric method at 5.6%. Since the parametric method detected more sensitively change points, the performance from the rebalancing at those times outperformed with lower average drawdown (0.9%). However, non-parametric method noticed the change point conservatively. As a result, the performance from the rebalancing at the dates by non-parametric method did not outperform much even though they gave similar average drawdown and drawdown deviation level. There is no optimal solution for the rebalancing timing. However, this study verified that the rebalancing at the structural change points in the portfolio return leads to improve the annualized return with detecting the downside risk.

The implication of the study is like the following. First, the study expects that asset allocation with PMPT may contribute elaboration of robo-advisor engine. Because the PMPT reflects investment behaviors of investors, it has comparative advantages over existing theories used in robo-advisor such as mean-variance theory or Black-Litterman. Second, the study attempts to rebalance at the time of estimating the structural change point of the portfolio return by the parametric and non-parametric methods. Aforementioned attempts confirm that it is effective in defending the downside risk and increasing the rate of return. The study also confirms that managing asset allocation and rebalancing should be managed in integrated manner to manage stable portfolio performance for a long-term perspective. The performance of robo-advisor depends on the refinement of the underlying algorithm. We present an integrated asset management algorithm from asset allocation to rebalancing for stable portfolio performance management in the long term.

국문 초록

자산배분은 투자자금을 리스크 수준이 다른 자산들에 배분하여 효율적인 포트폴리오를 구성하는 것이다. 단순히 수익을 최대화하는 것이 아니라 투자자의 리스크 수준 등을 반영한 리스크에 상응하는 수익을 제공할 수 있는 리스크 관리에 더 초점을 둔 과정이다. 또한 자산배분에서 리밸런싱까지 전반적으로 자산운용의 효율성을 높일 수 있도록 통합적으로 이루어져야 한다. 본 연구에서는 고차적률에 축소추정치를 적용한 하방리스크를 최소화하는 최적의 자산배분 전략과 포트폴리오 수익률의 구조적 변화시점에서 리밸런싱하는 전략을 2004 년부터 2017 년까지 10 개의 글로벌 ETF 일별 로그수익률 자료를 활용하여 실증분석을 하였다.

첫번째 자산배분 단계에서는 투자자마다 다른 리스크 허용수준 및 투자자들의 손실회피 성향을 반영한 PMPT 기반의 최적의 자산배분을 하였다. PMPT 에서 투자자의 결정은 하방리스크를 최소화하는 것이다. 대표적인 하방리스크 측정치인 VaR 와 ES 중 일관된 리스크 측정치인 ES 을 이용하였다. 또한, 금융자산의 수익률 분포의 비대칭성을 고려하기 위해 왜도, 첨도의 고차적률을 적용한 mES 를 최소화하였다. 하지만 과거 데이터를 이용하여 추정된 샘플 분산, 왜도 그리고 첨도는 추정오차 문제를 야기하고 이러한 추정오차를 가진 고차적률 추정치로 자산배분 최적화를 하게 되면 오차를

극대화하는 결과가 나타난다. 따라서 이러한 추정오차 문제를 해결하기 위하여 요인모형을 적용하여 고차적률에 대한 축소추정치를 적용하였다. 평균 드로우다운, 드로우다운 편차, 소티노비율, 정보비율 등을 기준으로 고차적률에 축소추정치를 적용한 mES 최소화 전략의 성과를 다른 전략들(평균-분산 모형, VaR 최소화, ES 최소화, mES 최소화)과 비교하였다. 분석 결과, 5 요인 축소추정치를 고차적률에 적용한 mES 최소화 전략의 평균 드로우다운(1.0%) 및 드로우다운 편차(0.4%)가 가장 작게 나왔으며 소티노비율(1.165)도 높으면서 연율화 수익률도 5.0%로 다른 전략들에 비해 아웃퍼폼하는 것으로 나타났다. 왜도와 첨도를 통해 극단값의 영향이 반영되고 축소추정치를 이용하면서 추정오차를 줄여 평균 드로우다운, 드로우다운 편차 등의 하방리스크를 방어하면서 수익률을 개선한 것으로 판단한다.

두번째 리밸런싱 단계에서는 주기적 리밸런싱이 아닌 포트폴리오 수익률의 구조적 변화시점을 추정하여 그 시점들에서 리밸런싱을 하는 전략을 실증 분석하였다. 구조적 변화시점은 모수적 및 비모수적 방법을 이용하여 추정하였다. 모수적 방법은 다중의 구조변화 시점을 잡는 것에 대한 비용함수와 과소적합 및 과적합에 대한 벌점함수를 결합하여 이를 최소로 만드는 최적의 변화시점을 찾는 데 계산의 복잡도를 개선한 PELT 방법을 적용하였다. 비모수적 방법은 분포에 대한 가정없이 사용할 수 있는 방법으로

유클리디언 거리를 측정하여 계층적으로 변화시점을 찾는 E-Divisive 방법과 에너지 통계량을 이용하여 적합도검정을 통해 세그먼트를 찾는 cp3o(change points via Probabilistically Pruning Objective)방법을 적용하였다. 추정 결과 모수적 및 비모수적 방법은 2008 글로벌 금융위기, 2011 년 유럽 재정위기, 2015 년 러시아 경제위기 등의 이벤트 전후 시점들을 추정하였고 모수적 방법이 비모수적 방법보다 변화에 더 민감하게 적절한 시점에서 구조적 변화 들을 제시하였다. 이렇게 추정된 시점에서 포트폴리오 리밸런싱을 시행한 결과, 모수적 방법으로 추정된 구조변화 시점에서 리밸런싱을 한 전략의 연율화 수익률이 6.8%로 비모수적 방법으로 추정된 시점에서 리밸런싱을 한 전략보다 1.2% 높게 나왔다. 모수적 방법이 민감하게 구조변화 시점을 찾았기 때문에 하방리스크 지표인 평균 드로우다운을 0.9%로 낮추었고 수익률뿐만 아니라 소티노 비율, 샤프비율 측면에서도 우수한 성과를 보였다. 반면 비모수적 방법은 구조변화 시점을 보수적으로 인지함에 따라 비슷한 수준으로 하방리스크를 방어하였지만 성과는 크게 개선되지 않았다. 시장의 상황, 자산의 특성, 투자자의 리스크 성향 등이 시간에 따라 달라지기 때문에 최적의 리밸런싱 타이밍에 대한 정답은 없다. 하지만 주기적 리밸런싱보다 포트폴리오 수익률 자체의 변동성으로부터 구조변화 시점을 추정하여 그 시점에서 리밸런싱 하는 것이 하방리스크를 최소화하면서 자산배분 성과를 제고시키는 데 효과가 있음을 확인하였다.

본 연구의 시사점은 다음과 같다. 첫째, 기존의 로보어드바이저에서 사용하는 평균-분산이론 또는 블랙리터만 이론 등이 아닌 PMPT 하에서 고차적률에 축소추정치를 이용한 하방리스크 최소화 전략을 적용하여 로보어드바이저 엔진의 정교화에 기여할 수 있을 것으로 기대한다. 둘째, 포트폴리오 수익률의 구조적 변화시점을 모수적 및 비모수적 방법으로 추정하여 이 시점들에서 리밸런싱을 하는 새로운 시도를 하였다. 시행 결과 하방리스크 방어 및 수익률 제고에도 효과가 있음을 확인하였다. 마지막으로 자산배분과 리밸런싱을 별도의 과정이 아닌 통합적으로 관리하는 것이 장기적인 관점에서 안정적인 포트폴리오 성과를 관리하기 위한 과정임을 확인하였다. 로보어드바이저의 성과는 내재되어 있는 알고리즘 정교화에 달려있다. 본 연구는 장기적으로 안정적인 포트폴리오 성과 관리를 위하여 자산배분부터 리밸런싱까지 통합적인 자산관리 알고리즘을 제시하여 성과가 우수함을 확인하였고 기존보다 더 정교하고 효율적인 로보어드바이저 알고리즘을 구현에 기여했다는 의의가 있다.

제 I 장 서 론

제 1 절 연구의 배경과 목적

자산관리 시장에서 로보어드바이저는 Robot+Advisor 의 합성어로 자동화된 알고리즘을 이용하여 저렴하고 비대면채널을 통해 제공되기 때문에 고객접근성이 높아 새로운 서비스를 제공한다. 로보어드바이저는 인공지능을 활용하여 투자자의 위험 성향, 시장상황 등을 반영하면서 고도화된 알고리즘과 기술의 발전에 따른 컴퓨팅 파워의 결합으로 로보어드바이저가 기존의 투자 자문, 자산관리를 대체하고 있다.

전통적인 투자자문업에서 제공하는 서비스와 유사하지만 고액 자산가, 기관투자가 등 일부 고객층에서 받아오던 서비스를 일반 투자자들도 받을 수 있을 뿐만 아니라 채권, 주식 등의 전통적인 자산 및 부동산, 상품, 글로벌 주식 등의 대체 투자자산으로 투자대상을 확대할 수 있다. 로보어드바이저는 전용 프로그램으로 투자자의 위험 성향을 파악하고 최적 자산배분 전략, 자동 리밸런싱, 주기적 리포팅, 간단한 자문 등의 서비스를 제공한다고

하였다(김지은 외(2015)¹). 대부분이 설문지 형식으로 투자자 위험 성향과 목표 수익률을 확인하고, 이에 따라 포트폴리오나 투자자산군을 제시한다. 그러나 자산 운용 성과는 기대만큼 기존의 투자전략보다 더 높은 초과 수익률을 달성하지 못하는 경우도 많다. 로보어드바이저는 투자를 위한 시간과 비용을 줄였으나 수익률의 불확실성과 알고리즘의 차이로 수익률의 편차가 기간별로 크다(IBK 경제연구소, 2016²). 박재연 외(2016)³은 로보어드바이저가 기본적으로 평균-분산이론에 근거하기 때문에 2008 년 글로벌 금융위기와 같은 갑작스러운 이벤트에 대응하지 못할 수 있다고 했다. 로보어드바이저가 인공지능으로 스스로 학습하고 제시하는 것이 아니라 인간이 만든 규칙에 의해 작동되는 자동화된 알고리즘이므로 로보어드바이저의 승률은 알고리즘이 결정한다.

D'Acunto et al. (2017)⁴는 로보어드바이저 서비스를 이용하면 처분효과, 순위효과, 추세추종 등과 같은 행태적 편향을 줄일 수 있다고 하였다. 대부분 로보어드바이저는 시장이 효율적이어서 평균으로 회귀한다는 가정하에서 포트폴리오 이론을 적용하여 자산배분을 한다. 따라서, 자산배분 알고리즘을 정교화 하는 과정이 로보어드바이저의 단점을 극복하는 방법이다.

¹ 김지은, 이용재, 배금일, 최제욱, 이동열, 김우창(2015), “‘로보 어드바이저’의 현황과 한국시장 도입 가능성에 대한 연구”, 대한산업공학회 추계학술대회 논문집, 2242-2247.

² IBK 경제연구소(2016), “로보어드바이저에 관한 오해와 진실”

³ 박재연, 유재필, 신현준(2016), “로보어드바이저를 이용한 포트폴리오 관리”, 「정보기술아키텍처연구」, 13(3), 467-476.

⁴ D'Acunto, F., Prabhala, N., & Rossi, A. (2017). “The Promises and Pitfalls of Robo-advising”

자산배분은 장기적인 투자목적을 달성하기 위하여 개별 자산의 리스크를 고려하여 투자금액을 배분하고 관리하는 과정이다. Ibboston and Kaplan(2000)⁵은 자산배분에 따라서 수익률의 90%가 변동할 수 있으므로 자산배분이 중요하다고 하였다. 이윤구와 이가연(2007)⁶은 Ibboston and Kaplan 의 방법을 활용하여 국내 펀드시장을 검증하였고, 자산배분전략에 따라서 성과가 매우 상이한 것을 검정하였다. Davis et al. (2007)⁷은 적극적인 자산배분으로 투자성과를 개선할 수 있지만 이에 수반되는 비용도 자산배분의 성과에 상당히 영향을 미친다고 하였다. 그렇지만 Wallick et al.(2015)⁸는 수반되는 비용에도 불구하고 적극적인 투자관리의 필요성을 옹호하였다. 자산배분은 단순히 위험을 분산하는 과정이 아니라 자산배분에서 리밸런싱까지 전반적으로 자산운용의 효율성을 높이는 수단이다.

기존의 자산배분은 투자자의 상방의 이익(upside potential)과 하방의 손실(downside loss)에 대한 선호도를 동일하게 인식하였다. 이는 리스크 대응치 선정과 수익률 분포의 가정에 영향을 미친다. MPT(Modern Portfolio Theory)는 수익률 분포가 대칭이라 가정하고 리스크 대응치로 분산을 사용하여 최적의

⁵ Ibbotson, R. G., & Kaplan, P. D. (2000), "Does asset allocation policy explain 40, 90, or 100 percent of performance?", *Financial Analysts Journal*, 56(1), 26-33.

⁶ 이윤구, 이가연(2007), "한국 펀드시장에서 자산배분효과에 대한 실증분석", 「대한경영학회지」, 20(4), 1977-1999.

⁷ Davis, J. H., Kinniry Jr, F. M., & Sheay, G. (2007), "The asset allocation debate: Provocative questions, enduring realities", *Vanguard Investment Counseling and Research*.

⁸ Wallick, D. W., Wimmer, B. R., & Balsamo, J. (2015), "Keys to improving the odds of active management success".

투자비중을 제시하지만 실제 자산의 수익률 분포는 비대칭이고 투자자들은 손실회피 경향이 있기 때문에 하방움직임에 더 민감하게 반응한다. 또한, 과거 수익률로부터 계산된 분산은 추정오차 문제를 발생시킨다. 따라서 투자자마다 다른 투자목적과 위험에 대해 감내할 수 있는 수준을 반영하는 리스크 대응치를 설정하고 이를 최소화하는 자산배분과 추정오차를 최소화하는 추정치를 사용할 필요가 있다.

리밸런싱은 자산가격 변동에 따라 원래 비중에서 벗어나 있는 자산들의 비중을 원래대로 되돌리는 과정으로 주기적 또는 구간별로 시행한다. 일정 주기로 리밸런싱 시점을 정한다면 안정적인 시장 상황 하에서 불필요한 리밸런싱을 하게 될 것이고, 해당 자산 비중에 작위적인 밴드를 주어 그 밴드를 벗어나는 자산에 대하여 그 시점에 리밸런싱을 한다면 전체 포트폴리오 자산가격 변동과 밴드를 벗어나는 자산간의 관계도 파악하지 못한 채 일부 자산에 대한 비중 조절을 하게 된다. 자산가격이 여러 요인에 의해 움직이기 때문에 이러한 자산가격 움직임의 구조적인 변화 시점을 찾아서 이 시점에 리밸런싱을 하는 것이 당연할 것이다.

본 연구는 이러한 필요성을 바탕으로 효율적인 투자관리를 위하여 다음의 네 가지를 고려하여 실증 분석한다. 첫째, 평균-분산의 MPT 기준이 아닌 왜도와 첨도의 고차적률을 고려하여 자산배분을 실시한다. 둘째, PMPT(Post-Modern Portfolio Theory)하에서 자산배분의 목표는 투자자 개별의 최소

허용수준을 반영한 하방리스크를 최소화하는 것이기 때문에 이를 반영할 수 있는 하방리스크 지표 설정이 필요하다. 대표적인 하방리스크 측정치 중 일관된 리스크 측정치 공리를 만족하는 ES(Expected Shortfall)를 최소화하는 것을 목적으로 한다. 셋째, 포트폴리오 이론에 추정치를 적용할 때 과거 데이터로부터의 표본 사용에 따른 추정오차와 차원의 저주 문제를 해결하기 위해 축소 추정치를 적용한다. 넷째, 기간별 또는 구간별로 리밸런싱하는 방법이 아니라 포트폴리오의 수익률 변동이 구조적으로 변화되는 시점을 포착하여 다이내믹 리밸런싱을 한다. 따라서 본 연구에서는 투자자마다 다른 투자목적과 위험을 감내할 수 있는 최소 허용수준을 반영하여 하방리스크를 최소화하는 것이 자산배분의 목적이고 가능한 추정오차를 줄이기 위해 고차적률에 축소추정치를 적용한 최적의 자산배분을 시행하고 포트폴리오 수익률의 구조적 변화시점에서 시행하는 다이내믹 리밸런싱 전략을 제시하고자 한다. 본 연구에서 제시한 자산배분 및 리밸런싱 전략이 정교하고 효율적인 로보어드바이저의 알고리즘을 구현하는데 기여할 것으로 기대한다.

제 2 절 연구의 방법 및 구성

1. 연구의 방법

본 연구는 2004 년부터 2017 년 동안 10 개의 글로벌 상장지수펀드(ETF)⁹의 일별 로그 수익률 자료를 이용하여 고차적률 기반의 축소추정치를 이용한 mES(modified ES)를 최소화하는 최적의 포트폴리오를 구성한다. 또한 포트폴리오 수익률이 구조적으로 변화되는 시점을 모수적, 비모수적 기법을 통해 추정하여 이 시점에서 리밸런싱한 결과의 성과를 비교한다. PMPT 는 기존의 평균과 분산의 상충관계를 조절해서 자산의 비중을 결정하는 MPT 와는 달리 투자자들이 하방리스크를 더욱 고려하고 있음을 인지하고 이를 최소화하는 자산배분 전략이다. 하방리스크 측정치는 VaR(Value at Risk)과 ES 가 있는데 VaR 의 한계점때문에 ES 를 하방리스크 측정의 대용치로 사용한다. 또한, 수익률 분포의 비대칭성을 반영하기 위해 왜도와 첨도의 고차적률을 적용한 mES 를 사용한다. 이를 실행하기 위해서 분산, 왜도 및 첨도의 추정치가 필요하며 대부분 과거 자료로 추정한다. 하지만, 표본에서 얻은 추정치는 추정오차를 일으키고 투자자산이 많아지면서 자원의 저주 및

⁹ ETF 는 선정한 인덱스 전체 또는 대표 주식에 투자하여 그 지수의 수익률을 추적하면서 거래소에 상장된 인덱스펀드이다.

더 심각한 추정오차 문제가 발생한다. 이러한 추정오차 문제를 해결하기 위해 축소추정치론을 적용한다. 대부분 주기적으로 정해진 시기에만 리밸런싱 하는 것은 불필요한 비용을 수반할 수 있다. 따라서 시장상황 변화로 달라진 투자자산의 비중은 시장가격의 변동을 고려한 자산비중 조절이 필요하다. 본 연구에서 최적의 리밸런싱 시점을 찾기 위해 모수적 및 비모수적 방법을 이용하여 포트폴리오 수익률의 구조적인 변화시점을 찾고 그 시점에서 자산배분을 다시 하여 주기적 리밸런싱의 경우와 성과 비교를 한다.

2. 연구의 구성

본 연구의 구성은 다음과 같다. 제 I 장에서는 연구의 배경과 목적, 그리고 연구의 방법에 대해 기술하였다. 제 II 장에서는 먼저 포트폴리오 최적화를 위해 현대포트폴리오 이론, 포스트-현대 포트폴리오 이론 및 하방리스크 측정치인 VaR 와 ES 에 대해 살펴보고, 추정오차를 줄이기 위한 축소추정치론에 대한 기존 연구를 검토하였다. 다음으로 포트폴리오 리밸런싱 연구를 진행하는데 필요한 모수적, 비모수적 방법에 대한 선행연구를 통해 이론적 배경을 살펴보았다. 제 III 장에서는 선행연구를 바탕으로 연구모형의 설계 및 방법을 기술하는데 먼저 고차적률에 대한 축소추정치를 이용한 mES 를 최소화하는 모형을 제시하고 모수적, 비모수적 방법을 이용한 포트폴리오

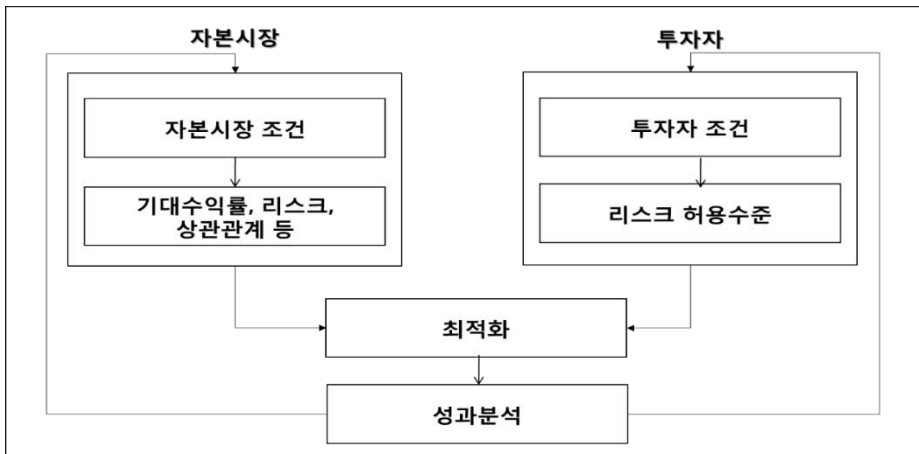
리밸런싱 방법을 제시했다. 제 IV 장 실증분석에서는 이러한 모형들을 가지고 10 개의 글로벌 ETF 자료를 이용하여 자산배분과 리밸런싱을 수행하였고 그에 따른 성과를 측정하였다. 마지막으로 제 V 장에서는 본 연구의 결론으로 연구결과의 요약, 연구의 시사점과 한계점을 기술하였다.

제 II 장 이론적 배경

제 1 절 포트폴리오 최적화

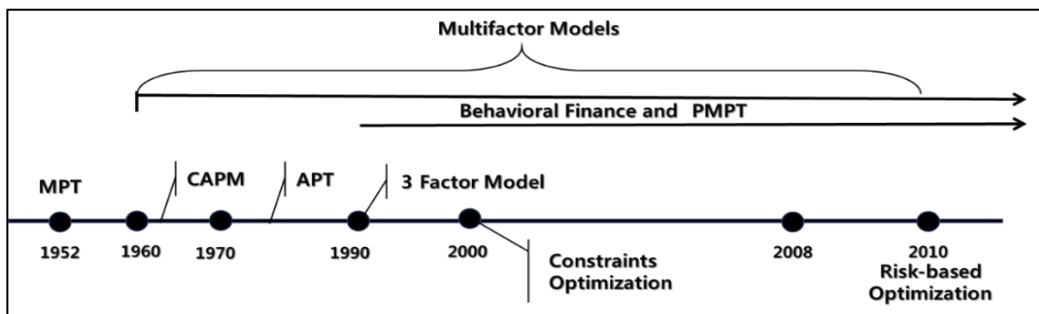
자산배분은 투자자금을 리스크 수준이 다른 자산들에 배분하여 효율적인 포트폴리오를 구성하는 것이다. 단순히 수익을 최대화하는 것이 아니라 투자자들의 투자 선호도, 리스크 허용 수준, 투자 목표 등을 고려한 리스크 대응치에 상응하는 수익을 제공할 수 있는 리스크 관리에 더 초점이 맞추어진 과정이다.

[그림 1] 자산배분 전략 흐름도



통합된 자산배분 과정은 [그림 1]¹⁰과 같이 자본시장 조건들을 파악하고 투자자의 목표 및 리스크 허용수준들을 결합하여 최적화를 하고 이에 대한 성과를 평가하는 것이 반복되는 과정이다. 자본시장 조건은 시간의 흐름에 따라 변한다. 50 년대에는 투자가능 자산이 국내의 채권, 주식 등이 대부분이었고 현재는 해외 자산뿐만 아니라 부동산, 옵션, 선물, 구조화 채권, 상품, 금 등 다양한 대체자산에 투자할 수 있어 자본시장의 속성이 변화하고 있다. 수익률, 리스크, 그리고 상관관계 등으로 이러한 자산들의 속성들을 정량화하고 투자자들이 추구하는 다양한 조건들을 고려하여 최적의 자산배분을 한다. 자산배분 이론은 이렇게 자본시장의 변화에 따라 발전해왔고 그림으로 나타내면 [그림 2]와 같다.

[그림 2] 자산배분 이론 변천



¹⁰ Maginn, J. L., Tuttle, D. L., McLeavey, D. W., & Pinto, J. E. (Eds.) (2007), Managing investment portfolios: a dynamic process (Vol. 3), (John Wiley & Sons), pp.255.

자산배분의 처음은 마코위치(1952)¹¹의 평균-분산모형이다. 위험자산으로 구성된 수많은 포트폴리오 중 기대수익률을 평균으로, 리스크를 분산(표준편차)으로 하여 주어진 리스크 수준에서 기대수익률을 최대로 하는 최적의 포트폴리오를 선택하는 것이다. 평균-분산모형은 Sharpe(1964)¹², Linter(1965)¹³, Mossin(1965)¹⁴에 의해 CAPM으로 발전하였다. CAPM은 무위험자산을 포함하여 효율적 분산투자를 할 때 자본시장의 균형 하에서 자산들의 기대수익률이 어떻게 결정되는지를 설명하는 모형이다. 1960년대 후반에 인덱스상품이 등장하면서 기존 이론에 대한 실증분석이 이루어지면서 CAPM의 기대수익률과 리스크의 관계를 설명할 수 없었다. 개별 주식의 체계적 위험에 공통적으로 영향을 주는 인플레이션, 이자율 등의 여러 요인으로 설명할 수 있는 다중요인 모형이 등장하였고, 1976년에는 자산의 수익률을 단일요인이 아닌 다중요인으로 설명하는 APT(Ross(1976)¹⁵) 모형으로 발전하였다. APT는 여러 공통요인의 영향을 받아서 더 이상 차익거래를 실행할 수 없는 균형상태일때 개별자산의 기대수익률을 설명하는

¹¹ Markowitz, H. (1952), "Portfolio selection", *The journal of finance*, 7(1), 77-91.

¹² Sharpe, W. F. (1964), "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk", *The journal of finance*, 19(3), 425-442.

¹³ Lintner, J. (1965), "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Assets in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics*, 47(1), 13-37.

¹⁴ Mossin, J. (1966), "Equilibrium in a capital asset market", *Econometrica: Journal of the econometric society*, 768-783.

¹⁵ Ross, S. (1976), "The arbitrage theory of capital asset pricing", *Journal of Economic Theory*, 13(3), 341-360.

과정으로(구기동 외(2016)¹⁶) 자산수익률이 개별자산의 체계적 위험(β)의 단일요인이 아닌 다양한 경제변수들에 의해 자산가격이 결정된다는 이론이다.

1972 년 세계 최초로 파생상품이 CME(Chicago Mercantile Exchange)에 상장되면서 파생상품 시장이 활성화되었고 주식옵션의 가격결정 모형인 블랙-숄츠모형(1973)¹⁷ 이 등장한 이후 옵션 등 파생상품을 활용한 헤지가 자산배분에 포함되었다. Fama-French(1992)¹⁸는 장기간의 포트폴리오 수익률은 규모, 가치 그리고 시장요인의 3 요인으로 설명된다고 하였고 거시적 요인, 업종 요인, 스타일 요인(growth, value) 등의 다양한 요인으로 확장되어 현재까지 많이 사용되는 자산배분 전략 모델이다. 또한, 1990 년 중반에는 효율적 시장가설과 실제 금융시장의 괴리와 투자자의 비합리적 의사결정을 연구하는 행동재무학¹⁹ 이 태동하였고, 개인마다 다른 최소허용수준을 기준으로 이를 달성하지 못하는 것을 리스크로 정의하는 포스트-현대 포트폴리오 이론²⁰이 등장하였다. 2008 년 글로벌 금융위기를 경험하면서 그 동안 자산배분에 주식 비중이 늘어나면서 리스크가 증가하였고, 글로벌

¹⁶ 구기동, 신용인, 조철희(2016), 금융자산관리론, (청람), pp. 180~183.

¹⁷ Black, F., & Scholes, M. (1973)., "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of political economy*, 81(3), 637-654.

¹⁸ Fama, E. F., & French, K. R.(1992), "The cross-section of expected stock returns", *the Journal of Finance*, 47(2), 427-465.

¹⁹ 행동재무학은 효율적 시장가설로 설명할 수 없는 이례현상을 인간의 심리적인 요인으로 연구하는 학문임

²⁰ Rom, B. M., & Ferguson, K. W. (1994), "Post-modern portfolio theory comes of age", *Journal of Investing*, 3(3), 11-17.

금융시장의 동조화 현상으로 자산간 상관관계가 증가하여 분산효과가 감소하였음을 경험하였다. 리스크 관리 측면이 강조되면서 2010 년대는 리스크 기반의 자산배분 이론이 주류를 이루고 있다. 대표적으로 전체 포트폴리오에 동일하게 리스크가 기여되도록 하는 리스크 패리티 모형이 있다.

자산배분 이론의 자본시장이 변화하면서 그 변화를 반영하기 위해 발전해왔다면, 자산배분 최적화 모형은 평균-분산 모형의 입력변수(평균과 분산)에 대한 비현실적인 가정을 보완하는 방향으로 발전해왔다. 자산배분 최적화는 자산운용의 목적에 따라 달라진다. 리스크 최소화가 목적이라면 변동성, tail risk(VaR, ES) 등을 최소화하고, 만약 수익의 최대화가 목적이라면 포트폴리오 수익을 최대화한다. 효율적 투자선과 만나는 기대효용 함수를 최대로 하는 포트폴리오는 효용함수인 CARA, CRRA 를 최대화하는 것이다. 그 밖에도 리스크 기여도를 동일하게 하는 등 다양한 목적함수에 따라 효율적 자산배분도 달라진다.

이렇게 다양한 모형의 입력변수에 강건한 변수 추정치를 적용하는 것이 오류를 최소화하면서 최적의 자산배분을 할 수 있는 기본 조건이 된다. 평균-분산모형은 모수 추정에 대한 민감도가 크고 기대수익률이 높고 변동성이

낮은 자산에 과도한 가중치가 부여되어 일부 자산에 투자비중이 편중될 수 있다(황승규 외(2009)²¹, 구기동 외(2016)²²).

평균-분산모형은 이러한 단점들을 극복하기 위해 크게 기대수익률 측면과 리스크 대응치 선정측면으로 구분되어 연구되어 왔다(오세경과 이정우(2015))²³. 첫째로 기대수익률 추정은 과거 데이터로부터의 평균수익률이 아니라 전문가 집단의 시장전망 의견을 반영하거나 리샘플링 기법(Michaud(1989)²⁴, Jorion(1992)²⁵, Scherer(2002)²⁶)을 활용하는 등의 연구로 이어졌다. 대표적으로 전문가 집단의 의견을 반영한 블랙-리터만(1992)²⁷ 모델은 포트폴리오의 균형 수익률과 시장전망을 결합하여 추정한 기대수익률을 이용하였다. 두번째는 분산(표준편차)가 아닌 수익률 분포의 특성을 잘 반영할 수 있는 다른 리스크 대응치 사용에 대해 연구되었다. 수익률의 분포의 비대칭성과 두꺼운 꼬리를 고려하고 특정 목표 수준 이하의 리스크를 측정할 수 있는 측정치가 연구되었는데 대표적으로 반분산(Semi-

²¹ 황승규, 임형준, 유시용(2009), “논문(論文): 기대수익률의 추정에 의한 최적자산배분에 관한 연구-평균-분산 모형과 평균-VAR 모형을 중심으로”, 「재정정책논집」, 11(1), 27-57.

²² 구기동, 신용인, 조철희(2016), *op.cit*, pp. 156.

²³ 오세경, 이정우(2015), “국민연금의 전략적 자산배분시 Shortfall Risk의 적합성에 관한 연구”, 「한국증권학회지」, 44(2), 445-483.

²⁴ Michaud, R. O. (1989), “The Markowitz optimization enigma: Is ‘optimized’ optimal?”, *Financial Analysts Journal*, 45(1), 31-42.

²⁵ Jorion, P. (1992), “Portfolio optimization in practice”, *Financial Analysts Journal*, 48(1), 68-74.

²⁶ Scherer, B. (2002), “Portfolio resampling: Review and critique”, *Financial Analysts Journal*, 58(6), 98-109.

²⁷ Black, F., & Litterman, R. (1992), “Global portfolio optimization”, *Financial analysts journal*, 48(5), 28-43.

Variance; Markowitz et al.(1993)²⁸, Estrada(2007)²⁹, VaR(Mausser and Rosen(1998)³⁰, Campbell et al.(2001)³¹), ES(Rockafellar and Uryasev(2000)³²)등을 분산 대신 사용하여 자산배분을 최적화하였다.

2000 년대에 들어 자본시장의 저성장과 고변동성 현상이 지속됨에 따라 수익률 분포의 비대칭성, 표본으로부터의 추정에 따른 오차 문제 그리고 투자자의 비합리적 의사결정 등을 반영하는 시장의 변화에 적응하는 새로운 자산배분 전략에 따른 자산배분 최적화 모델이 다양하게 시도되고 있다.

²⁸ Markowitz, H., Todd, P., Xu, G., & Yamane, Y. (1993), "Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm", *Annals of Operations Research*, 45(1), 307-317.

²⁹ Estrada, J. (2007), "Mean-semivariance optimization: A heuristic approach".

³⁰ Mausser, H., & Rosen, D. (1999), "Beyond VaR: From measuring risk to managing risk". In *Computational Intelligence for Financial Engineering, 1999.(CIFEr) Proceedings of the IEEE/LAFE 1999 Conference on* (pp. 163-178). IEEE.

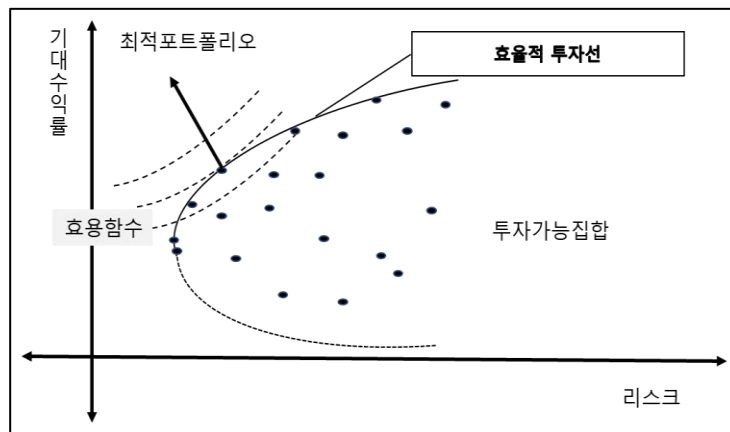
³¹ Campbell, R., Huisman, R., & Koedijk, K. (2001), "Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework", *Journal of Banking & Finance*, 25(9), 1789-1804.

³² Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000), "Optimization of conditional value-at-risk", *Journal of risk*, 2, 21-42.

1. 현대포트폴리오 이론

전통적인 자산배분 전략은 마코위치의 포트폴리오 선택이론에서 시작한 평균-분산 모형에 기반한다. 수익을 최대화하고 리스크를 최소화하도록 포트폴리오를 구성한다. 리스크 대용치로 분산을 사용하여 평균과 분산의 상충관계를 조절하고 효율적 투자선에서 투자자의 리스크 선호도를 반영하여 최적의 자산 비중을 산출한다.

[그림 3] 위험자산의 효율적 포트폴리오



MPT의 기본 가정은 1) 기대수익률과 분산을 기준으로 의사 결정하고, 2) 투자자는 위험회피성향을 가지고 있으며, 3) 동일한 리스크에서 가장 높은 기대수익률을 추구한다(지배원리)는 것이다. 따라서 이러한 가정하에 동일한

리스크이면 지배원리에 의해 높은 기대수익률을 가진 자산들로 조합하게 되면 효율적 투자선상에서 분산투자를 하게 된다. n 개의 금융자산에 $w = (w_1, \dots, w_n)'$ 의 비중으로 투자하는 포트폴리오가 있다고 하면 n 개 자산의 수익률 $r = (r_1, \dots, r_n)'$ 이 있고 평균(μ), 분산-공분산 행렬(Σ)에 대해 포트폴리오 수익률 r_p 는 $r_p = w'\mu$ 이 되고 포트폴리오 분산은 $\sigma_p = w'\Sigma w$ 이다. 목적함수는 식(1)과 같이 표현된다

$$\text{목적함수 : minimize } \sigma_p^2 = \frac{1}{2} w' \Sigma w \quad (1)$$

$$\text{제약조건 : } w'\mu = r_p \text{ and } w'1 = 1$$

하지만 실제 투자환경에서 이러한 가정들이 충족되지 못하는 현상을 겪는다. 분산투자에서 소수의 일부자산에 투자되는 경우가 발생하고, 분산은 상방과 하방리스크를 동일하게 취급한다. 하지만 실제 투자자들은 상방움직임보다 하방움직임에 더 민감하게 반응한다.

2. 포스트-현대포트폴리오 이론

MPT의 기본 가정은 투자자들은 이성적으로 판단하고 위험회피성향을 가지고 있다는 것이다. 같은 이익이 있다면 리스크가 작은 것을 택한다는

것이고, 리스크가 크다면 그에 따른 고수익을 추구한다는 의미이다. Chen(2016)³³에 따르면 MPT 는 금융시장에서 리스크와 보상(수익)의 분포를 설명하지 못한다. 이는 인간의 비이성적인 행동으로 금융시장이 비정형적인 형태로 변동하기 때문이다. Tversky and Kahneman(1992)³⁴의 누적전망이론은 투자자들이 이익으로 얻는 기쁨보다 손실에 따른 고통이 2 배 이상이라고 하였다. 이익에 대한 가치함수는 이익이 한 단위 추가될 때 느끼는 한계가치가 이익이 증가함에 따라 감소하는 반면, 손실에 대한 가치함수는 손실이 한 단위 추가될 때 느끼는 한계고통이 손실이 증가함에 따라 감소하기 때문이다(민재형(2014)³⁵). 투자자들은 비이성적이며 개인별 투자성향도 다르고, MPT 하의 투자자들과 달리 위험회피자가 아닌 손실회피성향을 가지는 투자자이다. 구기동(2009)³⁶는 행동재무학적인 투자의사결정은 평균과 분산의 단순한 요소가 아닌 기대수익, 수익의 안정성과 확실성, 욕구수준 등의 다양한 결정요인이 있고 투자 목표는 손실을 회피하는 것이라고 하였다. 또한, Mitton

³³ Chen, J. M. (2016), "Postmodern Portfolio Theory", In *Postmodern Portfolio Theory* (pp. 27-38). Palgrave Macmillan, New York.

³⁴ Tversky, A., & Kahneman, D. (1992), "Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty", *Journal of Risk and uncertainty*, 5(4), 297-323.

³⁵ 민재형(2014), 생각을 경영하라, (청림출판),

³⁶ 구기동(2009), "확정기여형 퇴직연금의 투자의사결정에 관한 연구", 서강대학교 경영대학원 박사학위 논문.

and Vorkink(2007)³⁷는 투자자들이 평균-분산 포트폴리오를 희생해서라도 양의 왜도를 가지는 포트폴리오를 선호한다는 것을 실증했다.

Rom and Ferguson(1994)³⁸가 처음으로 하방 편차를 언급하였다. PMPT 의 목표는 평균-분산의 최적화가 아닌 하방 편차를 최소로 하고 목표수익을 최대화하여 행동재무학의 의사결정행태를 충족한다. PMPT 개념은 1) 최소허용수준, 2) 하방 리스크, 3) 수익률 분포의 비대칭성의 세가지 측면으로 구분하여 이해할 수 있다.

첫째로, 최소허용수준은 운용의 실패를 피하면서 최소한 확보되어야 할 투자자들의 허용수준이다. Swisher et al. (2005)³⁹은 투자자들이 생각하는 세가지 리스크를 제시하였다. 최소허용수준은 이 세가지 리스크 중 하나를 고려하여 최소한 달성되어야 수익률이다. 투자자가 생각하는 리스크 중 하나는 원금 손실의 리스크이다. 이 경우 최소허용수준은 원금과 관계가 있다. 다음으로 투자자가 정한 어떤 목표를 달성하지 못할 리스크이다. 그리고 벤치마킹 대비 성과를 달성하지 않을 리스크이다. 이러한 리스크 개념은 투자자의 위험에 대한 허용수준과도 연관되어 있다. 일괄적인 무위험 이자율, 벤치마크 지수

³⁷ Mitton, T., & Vorkink, K. (2007), "Equilibrium underdiversification and the preference for skewness", *The Review of Financial Studies*, 20(4), 1255-1288.

³⁸ Rom, B. M., & Ferguson, K. W. (1994), *loc.cit.*

³⁹ Swisher, P., & Kasten, G. W. (2005), "Post-modern portfolio theory", *Journal of Financial Planning*, 18(9), 74.

등이 아닌 개인의 투자목적 및 위험에 대한 선호도에 따라 다르게 최소허용수준으로 반영할 수 있다.

두번째, 하방리스크는 최소허용수준에서 떨어진 정도를 의미한다. Rom and Ferguson(1994)⁴⁰은 하방 빈도, 하방 편차의 평균, 또는 하방으로 떨어지는 정도가 하방리스크의 대용치로 활용할 수 있다고 한다. 그는 또한 여러가지 자산군으로 그들의 수익에 대한 왜도를 기간별로 조사하였고 수익의 분포를 설명하면서 고차적률(왜도, 첨도)을 이용할 것을 권고하였다. 이는 수익률 분포의 비대칭성 때문이다. Ang et al.(2006)⁴¹이 상방과 하방 변동 사이의 비대칭 관계를 실증했고, Ardia et al(2018)⁴²은 수익률 분포의 비대칭성을 반영하기 위해서 포트폴리오의 하방리스크를 고려할 필요가 있다고 하였다. Harvey and Siddique(2000)⁴³, Jondeau and Rockinger(2006⁴⁴, 2012⁴⁵)도 비대칭적인 분포를 가진 자산들의 포트폴리오 최적화에 고차 적률을 고려할 필요가 있다고 하였다.

PMPT 하에서 자산배분은 상방의 이익 최대화가 목적이 아니라 손실을 최소화하는 것이므로 관리해야 할 중요한 리스크는 하방리스크이다. 또한

⁴⁰ Rom, B. M., & Ferguson, K. W. (1994), *loc.cit.*

⁴¹ Ang, A., Chen, J., & Xing, Y. (2006), "Downside risk", *The Review of Financial Studies*, 19(4), 1191-1239.

⁴² Ardia, D., Boudt, K., & Nguyen, G. (2018), "Beyond risk-based portfolios: balancing performance and risk contributions in asset allocation." *Quantitative Finance*, 1-11.

⁴³ Harvey, C. R., & Siddique, A. (2000), "Conditional skewness in asset pricing tests", *The Journal of Finance*, 55(3), 1263-1295.

⁴⁴ Jondeau, E., & Rockinger, M. (2006), "Optimal portfolio allocation under higher moments", *European Financial Management*, 12(1), 29-55.

⁴⁵ Jondeau, E., & Rockinger, M. (2012), "On the importance of time variability in higher moments for asset allocation", *Journal of Financial Econometrics*, 10(1), 84-123.

수익률 분포의 비대칭성을 고려하기 위하여 왜도, 첨도의 고차적률을 포함한 하방리스크 지표가 필요하다.

3. 하방리스크 지표

하방리스크를 측정하는 대표적인 지표로는 VaR 와 ES 을 들 수 있다. VaR 는 국제결제은행(BIS)에서 금융기관의 리스크 측정 수단으로 권고하면서 사용하였다. VaR 는 일정한 신뢰수준으로 정상적인 시간상황에서 보유기간에 발생할 수 있는 최대 손실금액이다. 예를 들어 신뢰수준 99%에서 10일 VaR 이 100 억원이라는 의미는 어떤 변화로 인해 포트폴리오 가치가 10 일에 100 억원 이상 손실이 발생할 가능성이 1%라는 것이다. 이 개념은 리스크를 금액으로 표시하기 때문에 직관적이고 이해하기 쉽다.

일정한 기간동안 발생한 손실액 X 의 분포함수를 F 라 하고 $F^{-1}(\alpha) = \inf\{x|F(x) \geq \alpha\}$ 이다. 일정한 신뢰수준 α 에서 VaR 는 식(2)으로 정의⁴⁶된다.

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf\{x|P(X > x) \leq 1 - \alpha\} = F^{-1}(\alpha) \quad (2)$$

⁴⁶ Roccioletti, S. (2015). Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall. Springer.

그러나, VaR 는 Artzner et al(1999)⁴⁷이 제안한 일관된 리스크 측정치의 공리 중 sub-additivity 를 충족하지 못한다. 또한 Favre and Galeano (2002)⁴⁸ 는 하방리스크를 측정할 때 왜도와 첨도의 역할을 강조하였다. 2008 년 글로벌 금융위기에서 VaR 는 비정상적인 상황의 극단적인 손실을 반영하지 못했다. 이에 Artzner et al.(1999)⁴⁹가 TailVaR 로 처음 ES 개념을 도입하였고, 이후 Rockafeller and Uryasev(2000)⁵⁰가 Conditional VaR 를 제안하였다. Conditional VaR 가 거의 ES 과 일치함을 보이면서 Conditional VaR, ES 등을 같은 리스크 측정치로 사용하고 있다. ES 는 일정한 신뢰수준 하에서 발생가능한 기대손실 또는 VaR 을 초과하는 손실부분의 조건부 기대값으로 식(3)와 같이 정의된다.

$$ES_{\alpha}(X) = E\{X|X \geq VaR_{\alpha}\} = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_u(X) du \quad (3)$$

⁴⁷ Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999), "Coherent measures of risk", *Mathematical finance*, 9(3), 203-228.

일관된 리스크 측정치 공리: $\rho(\cdot)$ 는 위험측정치

(1) Translation invariance: $c(\text{cash}) \geq 0$ 이면, $\rho(X + c) = \rho(X) - c$

(2) Sub-additivity: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

(3) Positive Homogeneity: $s(\text{size factor}) \geq 0$ 이면, $\rho(sX) = s * \rho(X)$

(4) Monotonicity: $X \leq Y$ 이면, $\rho(X) \leq \rho(Y)$

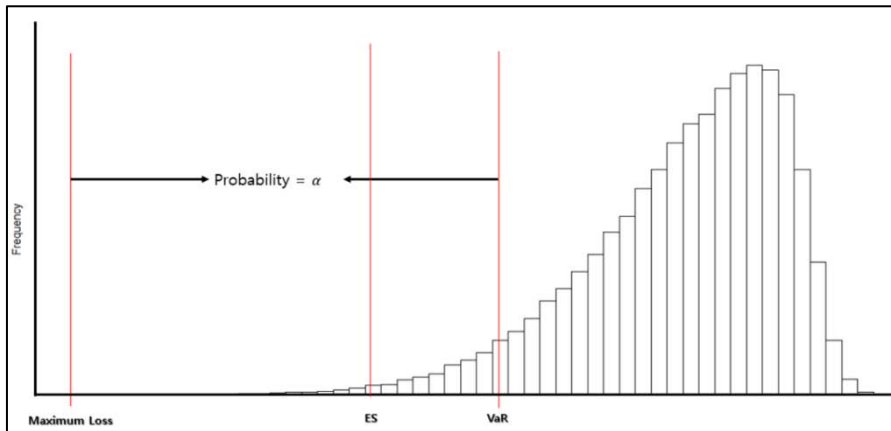
⁴⁸ Favre, L., & Galeano, J. A. (2002), "Mean-modified value-at-risk optimization with hedge funds", *Journal of Alternative Investments*, 5(2), 21-25.

⁴⁹ *Ibid.*

⁵⁰ Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000), *loc.cit.*

VaR 와 ES 의 관계는 [그림 4]와 같다. VaR 가 Basel II 에서 시장위험 측정기준으로 사용되다가 2008 년글로벌 금융위기 이후 Basel III 에서 VaR 가 꼬리부분의 극단적 손실 리스크를 포착하지 못하는 등의 한계점을 이유로 VaR 에서 ES 로 리스크를 측정하도록 권고하고 있다(Basel Committee on Banking Supervision(2013)⁵¹).

[그림 4] 포트폴리오 손실분포의 VaR 과 ES



n 개의 금융자산에 $w = (w_1, \dots, w_n)'$ 의 비중으로 투자하는 포트폴리오가 있다고 하면 n 개 자산의 수익률 $r = (r_1, \dots, r_n)'$ 이 있고 평균(μ), 공분산 행렬(Σ)에 대해 포트폴리오 수익률 r_p 의 평균은 $\mu_p = w'\mu$ 이고 포트폴리오

⁵¹ Basel Committee on Banking Supervision (2013), Consultative Document, *Fundamental Review of the Trading Book: A revised Market Risk framework*, BIS, Basel, Switzerland, <http://www.bis.org/publ/bcbs265.pdf>

분산은 $\sigma_p^2 = w' \Sigma w$ 이다. 자산의 수익률이 정규분포를 따른다는 가정하에 포트폴리오 수익률 r_p 의 VaR 와 ES 는 식(4)과 식(5)로 나타난다.

$$VaR_\alpha(r_p) = -F^{-1}(\alpha) = -\mu_p - z_\alpha \sigma_p \quad (4)$$

$z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ 는 표준정규분포의 분위수를 나타내고 $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포 함수이다.

$$ES_\alpha(r_p) = -E_p[r_p | r_p \leq F^{-1}(\alpha)] \quad (5)$$

기존의 VaR 가 두꺼운 꼬리부분을 간과한다는 문제로 Zangari (1996)⁵² 와 Favre and Galeano(2002)⁵³ 는 Cornish and Fisher(1938)의 Cornish and Fisher expansion⁵⁴ 을 이용하여 자산수익률의 왜도와 첨도를 설명하였다. 그는 정규분포를 가정한 VaR 의 일부를 조정하여 식(6)와 같이 수정된 VaR 를 제안하였다. $VaR(\alpha)$ 의 z_α 부분에 2 차 Cornish and Fisher expansion 을 적용하여

⁵² Zangari, P. (1996), "An improved methodology for measuring VaR". *RiskMetrics Monitor*, 2(1), 7-25.

⁵³ Favre, L., & Galeano, J. A. (2002), *loc.cit.*

⁵⁴ Cornish and Fisher expansion 은 누울누적적률(cumulant)를 이용하여 확률분포함수의 분위수를 근사하는 점근적인 전개방식이다

식(7)의 수정된 q_α 로 대체하였다. q_α 는 식(7)와 같이 표준 정규분포의 왜도(S_p), 초과첨도(K_p)를 이용하여 비정규분포의 형태에 점근적으로 전개시켰다.

$$\text{mVaR}(\alpha) = -\mu_p - q_\alpha \sigma_p \quad (6)$$

$$q_\alpha = z_\alpha + \frac{(z_\alpha^2 - 1)}{6} S_p + \frac{(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)}{24} K_p - \frac{(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)}{36} S_p^2 \quad (7)$$

포트폴리오 수익률 r_p 의 공분산행렬 M_2 , 공왜도행렬 M_3 그리고 공첨도행렬 M_4 은 식(8)-식(10)으로 표현된다(Jondeau and Rockinger(2006)⁵⁵).

$$(n \times n) \text{ 공분산행렬 : } M_2 = E[(R - \mu)(R - \mu)'] \quad (8)$$

$$(n \times n^2) \text{ 공왜도행렬 : } M_3 = E[(R - \mu)(R - \mu)' \otimes (R - \mu)'] \quad (9)$$

$$(n \times n^3) \text{ 공첨도행렬 : } M_4 = E[(R - \mu)(R - \mu)' \otimes (R - \mu)' \otimes (R - \mu)'] \quad (10)$$

여기서 \otimes 는 크로네커 곱으로 다차원의 행렬의 곱을 계산하기 위함이다.

포트폴리오 분산(σ_p), 왜도(S_p) 그리고 첨도(K_p)는 공분산행렬, 공왜도행렬과 공첨도행렬을 이용하여 식(11)-(13)로 표현된다.

⁵⁵ Jondeau, E., & Rockinger, M. (2006), *loc.cit.*

$$\sigma_p = w' M_2 w \quad (11)$$

$$S_p = w' M_3 (w \otimes w) \quad (12)$$

$$K_p = w' M_4 (w \otimes w \otimes w) \quad (13)$$

하지만, Boudt et al.(2008)⁵⁶은 ES 을 계산할 때 VaR 에 Zangari (1996)⁵⁷의 mVaR 를 대체해서 계산하는 것이 아닌 Cornish and Fisher expansion 과 Edgeworth expansion 을 함께 이용하여 식(14)의 mES⁵⁸를 제시하였다.

$$mES(\alpha) = \mu_p - \frac{\sigma_p}{\alpha} \phi(q_\alpha) \left[1 + \frac{1}{6} q_\alpha^3 S_p + \frac{1}{72} (q_\alpha^6 - 9q_\alpha^4 + 9q_\alpha^2 + 3) S_p^2 + \frac{1}{24} (q_\alpha^4 - 2q_\alpha^2 - 1) K_p \right] \quad (14)$$

여기서 q_α 는 식(7)이고, S_p 와 K_p 는 식(12)-(13)이다.

VaR 뿐만 아니라 ES 을 최소화하는 최적의 자산배분에 관한 연구들은 많이 진행되어 왔다. 국내에서 김진호(2002)⁵⁹는 마코위츠의 평균-분산모형과

⁵⁶ Boudt, K., Peterson, B., & Croux, C. (2008), "Estimation and decomposition of downside risk for portfolios with non-normal returns", *The Journal of Risk*, 11(2), 79-103.

⁵⁷ Zangari, P. (1996), *loc.cit.*

⁵⁸ Martin, D., & Arora, R. (2015). "Inefficiency of Modified VaR and ES".

⁵⁹ 김진호(2002), "평균-분산 모형과 평균-VaR 모형간 최적위험자산배분 전략 비교", 「재무연구」, 15(2), 143-172.

평균-VaR 모형의 자산배분 성과를 비교하였고 김진호와 김윤전(2003)⁶⁰ 이 Conditional VaR(ES)모형의 자산배분의 성과를 비교하였다. 형남원과 한규숙(2007)⁶¹에서 평균-VaR 모형과 평균-분산 모형을 비교하였다. Favre and Galeano(2002)⁶²는 평균-수정된 VaR 모형으로 자산배분의 성과를 연구하였는데 음의 왜도 또는 양의 초과첨도를 가지는 자산의 경우 mVaR 가 정규분포를 가정한 일반적인 VaR 보다 높게 나옴을 확인하였고, 김태혁 외(2008)⁶³의 연구에서도 정규분포를 가정하지 않은 mVaR 와 ES 모형이 다른 모형보다 성과가 우수함을 보였다. Quaranta and Zaffaroni(2008)⁶⁴은 강건한 Conditional VaR(ES)을 최소화하는 자산배분을 연구하였다. mES를 활용한 자산배분 연구는 국외에서는 Boudt et al.(2008)⁶⁵의 연구 이후로 이루어지고 있지만, 국내에서는 아직 활발하게 진행되고 있지 않고 있다.

⁶⁰ 김진호, 김윤전(2003), “Conditional VaR 모형을 사용한 최적자산배분에 관한 연구”. 「한국증권학회지」, 32(3), 133-165.

⁶¹ 형남원, 한규숙(2007), “하방위험을 이용한 위험자산의 최적배분”. 「한국재무학회 학술대회」, 382-404.

⁶² Favre, L., & Galeano, J. A. (2002), *loc.cit.*

⁶³ 김태혁, 박종해, 권일준(2008), “다양한 VaR 모형들을 이용한 최적자산 배분모형의 성과비교”, 「한국자료분석학회」, 10(1), 347-362..

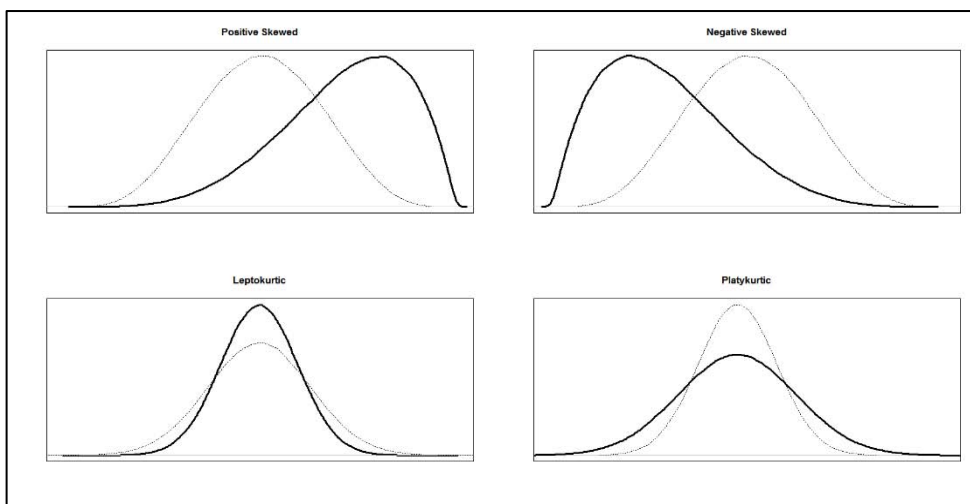
⁶⁴ Quaranta, A. G., & Zaffaroni, A. (2008), “Robust optimization of conditional value at risk and portfolio selection”, *Journal of Banking & Finance*, 32(10), 2046-2056.

⁶⁵ Boudt, K., Peterson, B., & Croux, C. (2008), *loc.cit.*

4. 고차 적률에 대한 축소추정치

평균-분산 모형, VaR 모형, 혹은 mES 모형 등의 최적화 문제에서 분산, 왜도, 그리고 첨도의 추정치가 필요하다. 분산(2 차 적률, 2nd moment)은 평균으로부터 떨어진 정도를 측정하고, 왜도(3 차 적률, 3rd moment)는 분포의 대칭성에서 벗어난 정도를 측정한다. 첨도(4 차 적률, 4th moment)는 분포의 뾰족함을 나타내는 정도로 Darlington(1970)⁶⁶에 따르면 분포의 꼬리부분의 두꺼움에 대한 측도로 평균에서 떨어진 정도를 측정하는 분산과 다르고 꼬리부분의 극단값의 정도와 연관되어 있다.

[그림 5] 왜도 및 첨도



⁶⁶ Darlington, R. B. (1970), "Is kurtosis really "peakedness?"", *The American Statistician*, 24(2), 19-22.

[그림 5]와 같이 왜도가 0 인 것은 X 의 평균인 μ 에 대해 대칭이고, 음의 왜도는 μ 보다 작은 극단값들이 많다는 것이고 양의 왜도는 반대의 상황을 의미한다. 첨도가 크다는 것은 μ 로부터의 일부 극한 값들에 의해 분포의 뾰족한 정도가 변한다는 것이다. 수익률의 분포가 만약 양의 왜도를 가졌다고 하면 오른쪽으로 긴 꼬리를 가지는 경우 (skewed to the right) 로 극단적인 높은 수익의 가능성이 정규분포보다 높고, 반대로 음의 왜도일 경우는 왼쪽으로 긴 꼬리를 가지는 경우(skewed to the left)로 극단적인 손실을 가질 가능성이 높다. 투자자들은 보통 양의 왜도를 선호하는데 만약 음의 왜도를 추구하는 투자자라면 그에 합당한 수익(리스크 프리미엄)을 요구한다. 첨도와 자산 수익률간의 관계에 대한 연구들이 왜도와 수익률간의 관계에 비해 일관된 결과를 보이지는 않지만 대체로 높은 첨도를 가진 자산이 높은 수익률을 보인다. 또한, Scott and Horvath(1980)⁶⁷은 수익률의 분포가 정규분포를 따르지 않고 투자자들이 평균과 왜도에 긍정적이며 분산과 첨도에 부정적인 선호한다고 하였고, Harvey and Siddique(2000)⁶⁸의 연구에서는 투자자들이 왜도가 높은 주식을 선호한다고 하였다. 또한, Dittmar(2002)⁶⁹은 첨도가 주식

⁶⁷ Scott, R. C., & Horvath, P. A. (1980), "On the direction of preference for moments of higher order than the variance", *The Journal of Finance*, 35(4), 915-919.

⁶⁸ Harvey, C. R., & Siddique, A. (2000), *loc.cit.*

⁶⁹ Dittmar, R. F. (2002), "Nonlinear pricing kernels, kurtosis preference, and evidence from the cross section of equity returns", *The Journal of Finance*, 57(1), 369-403.

수익률과에 영향을 미치고 있음을 실증하였다. 국내 주식시장에서도 심명화(2016)⁷⁰의 왜도와 첨도에 대한 투자자들의 선호도가 국외 연구와 일관되게 나타남을 확인하였다.

포트폴리오의 분산(σ_p), 왜도(S_p), 첨도(K_p)는 위의 식(11)-(13)으로 계산된다. 보통은 과거 수익률로부터 계산된 표본 분산, 표본 왜도, 표본 첨도를 이용하는데 이럴 경우 상당히 큰 추정오차 문제가 발생한다. 이미 추정오차를 가지고 있는 추정치들을 이용하여 자산배분 최적화를 하게 되면 결국은 오차를 가진 최적화를 하게 된다. Best and Grauer(1991)⁷¹은 평균-분산 최적화에 따른 투자비중이 평균과 분산 추정치의 변화에 매우 민감하게 변한다고 하였다. Jobson and Korkie(1980)⁷²은 표본으로부터 분산, 공분산 등의 추정치가 모집단의 값들과 차이가 있어 표본으로부터의 추정치를 MPT에 적용하는 것이 대한 주의를 요했고, Chopra and Ziemba(2011)⁷³은 평균, 분산 및 공분산의 표본추정치들 사용하여 포트폴리오 최적화를 할 경우 성과가 나쁨을

⁷⁰ 심명화(2016), “변동성, 왜도, 첨도와 주식수익률의 횡단면”, 『한국재무관리학회』, 33(1), 71-102.

⁷¹ Best, M. J., & Grauer, R. R. (1991), “Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems”, *Management Science*, 37(8), 980-989.

⁷² Jobson, J. D., & Korkie, B. (1980), “Estimation for Markowitz efficient portfolios”, *Journal of the American Statistical Association*, 75(371), 544-554.

⁷³ Chopra, V. K., & Ziemba, W. T. (2011), “The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice”, In *The Kelly Capital growth investment criterion: theory and practice* (pp. 249-257).

보여주었다. 또한 Michaud(1998)⁷⁴은 표본으로부터의 추정치를 이용한 포트폴리오 최적화는 마치 오차를 최대화하는 과정과 같다고 표현하였다. 특히, ES를 이용하여 포트폴리오 최적화를 할 경우 추정오차 문제를 주의 깊게 다루어야 하는데 Yamai and Yoshiba (2005)⁷⁵은 ES가 VaR보다 일관된 리스크 공리를 만족하는 하방리스크 대응치이지만, 수익률 분포가 두꺼운 꼬리를 가지면 VaR보다 ES의 추정오차가 더 크다고 하였다.

또한, 전세계에서 수많은 자산운용사에서 새로운 투자상품을 개발함에 따라 투자대상이 다양화됨에 따라 투자가능한 자산 풀(pool)은 막대하다. 다양한 투자자산마다 가지고 있는 과거 수익률 자료는 다르고 일부는 과거 데이터 수가 극히 적을 수도 있는데 이러한 과거 데이터에서 분산, 공분산 등의 추정치를 계산할 경우 차원의 저주 문제가 발생하게 되며 특히 왜도 및 첨도 등의 고차적률에 대한 추정은 더욱 심각한 추정오차 문제를 야기한다. 예를 들어, 투자가능 자산이 100개면 공분산 추정에 $100(100-1)/2 = 2450$ 개, 왜도 추정에 $(100(100+1)(100+2))/6 = 171700$ 개, 첨도 추정에 $(100(100+1)(100+2)(100+3))/24 = 4421275$ 개로 추정해야 할 모수의 수가

⁷⁴ Michaud, R. O. (1998), "Efficient asset allocation: a practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation", *Harvard Business School Press, Boston*.

⁷⁵ Yamai, Y., & Yoshiba, T. (2005), "Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective", *Journal of Banking & Finance*, 29(4), 997-1015.

기하급수적으로 증가한다. 따라서 표본으로부터 추정오차를 줄이고 차원의 저주문제를 해결하기 위해서는 축소추정치를 사용하는 것이 필요하다.

대표적인 분산-공분산에 대한 축소추정치는 Ledoit and Wolf(2003)⁷⁶의 축소 추정치인데, 과거 수익률로부터의 추정치와 일정한 상관관계를 가정한 구조된 모형을 결합된 모형으로부터 공분산 행렬에 대한 추정치⁷⁷를 제시하였다. 이후, Martellini and Ziemann(2009)⁷⁸이 공분산행렬뿐만 아니라 왜도-공왜도, 첨도-공첨도에 대해서도 확장하여 고차적률에 대한 축소추정치를 제시하였다. 이들은 Ledoit and Wolf(2003)⁷⁹의 방법론을 그대로 고차적률에 확장한 방법(constant correlation approach)과 1 요인모형을 이용하여 차원을 축소한 방법(single factor approach)으로 추정하였는데 1 요인모형을 적용한 축소추정치를 이용한 자산배분이 일정한 상관관계를 가정한 모형의 축소추정치를 이용한 것보다 성과가 좋게 나옴을 확인하였다. Boudt et.al(2015)⁸⁰는 Martellini and Ziemann(2009)⁸¹의 1 요인모형이 아닌 다요인으로 확장하여 고차적률에 대해

⁷⁶ Ledoit, O., & Wolf, M. (2003), "Honey, I shrunk the sample covariance matrix".

⁷⁷ $\hat{\Sigma}_{shrinkage} = \delta F + (1 - \delta)S$ 으로 S 는 표본 공분산행렬이고 F 는 상수의 상관관계를 가정한 구조된 추정치이다. δ 는 F 와 S 를 조절하는 축소강도로 $L(\delta) = \|\delta F + (1 - \delta)S - \Sigma\|^2$ 를 최소화 하도록 추정된 값이다. 추정된 $\delta^* = \max\left\{0, \min\left(\frac{\hat{k}}{T}, 1\right)\right\}$ 이고, \hat{k} 는 $= \frac{\hat{\pi} - \hat{\rho}}{\hat{\gamma}}$ 이다. 자세한 내용은 해당 논문을 참조하기 바란다.

⁷⁸ Martellini, L., & Ziemann, V. (2009), "Improved estimates of higher-order comoments and implications for portfolio selection", *The Review of Financial Studies*, 23(4), 1467-1502.

⁷⁹ Ledoit, O., & Wolf, M. (2003), *loc.cit.*

⁸⁰ Boudt, K., Lu, W., & Peeters, B. (2015), "Higher order comoments of multifactor models and asset allocation", *Finance Research Letters*, 13, 225-233.

⁸¹ *Ibid.*

축소추정치를 추정하는 방법을 연구하였고, 다요인 모델을 이용한 추정치가 차원의 저주 문제를 해결하면서 고차적률 추정치를 계산하는 데 효과적임을 실증하였다. 식(15)는 요인 모형⁸²의 기본 형태이다. 요인모형은 요인의 수익률, 요인가중치 그리고 개별요인으로 자산수익률을 설명한다.

$$r_t = a + Bf_t + e_t \quad (15)$$

r_t 는 자산수익률이고, f_t 는 요인모델에서 요인(factors), B 는 요인가중치(factor loading), e_t 는 잔차 혹은 개별요인(specific factor)이다. 요인모형을 통해 f 개로 축소된 요인으로 2 차적률(공분산행렬), 3 차(왜도-공왜도 행렬), 4 차(첨도-공첨도 행렬)를 표현한 것이 식(16) - 식(18) 이다.

$$M_2^{sh} = \Sigma = BSB' + \Delta \quad \text{where } S = E[(f_t - \mu_f)(f_t - \mu_f)'] \quad (16)$$

$$M_3^{sh} = \Phi = BG(B' \otimes B') + \Omega \quad \text{where } G = E[(f_t - \mu_f)(f_t - \mu_f)' \otimes (f_t - \mu_f)'] \quad (17)$$

$$M_4^{sh} = \Psi = BP(B' \otimes B' \otimes B') + Y \quad \text{where } P = E[(f_t - \mu_f)(f_t - \mu_f)' \otimes (f_t - \mu_f)' \otimes (f_t - \mu_f)'] \quad (18)$$

μ_f 는 요인의 평균이고, M_2^{sh} 는 축소된 포트폴리오 분산-공분산 행렬이다. S 는 $K \times K$ 공분산행렬, K 는 식(15)로부터의 요인의 수, Δ 는 잔차 행렬이다.

⁸² 요인모형(factor model)은 개별종목의 수익률에 영향을 미치는 공통요인(factors)의 관계를 설명

M_3^{sh} 는 추정된 포트폴리오 왜도-공왜도 행렬이고, G 는 $K \times K^2$ 는 공왜도 행렬, Ω 는 잔차 행렬이다. 마찬가지로 M_4^{sh} 는 추정된 포트폴리오 첨도-공첨도 행렬이고, P 는 $K \times K^3$ 는 공왜도 행렬, Y 는 잔차 행렬이다. Boudt et.al(2015)⁸³는 투자자의 기대효용을 최대화하는 목적함수를 하는 자산배분에서 위의 다요인모델을 이용하여 축소된 M_2^{sh} , M_3^{sh} , M_4^{sh} 추정치를 CRRA 효용함수에 적용하여 다요인모델을 통해 축소추정치를 이용한 것이 표본으로부터의 추정치를 이용한 경우보다 성과가 우수함을 보였다.

Yamai and Yoshiba(2005)⁸⁴의 연구에서 두꺼운 꼬리분포를 가지고 있는 자산일 경우 ES의 추정오차가 VaR보다 더 크다고 하였으므로 ES의 추정치의 추정오차를 줄이려는 노력이 필요할 것이다. 따라서, 본 연구에서는 Boudt et al.(2015)⁸⁵의 고차적률에 대해 다요인모형을 통한 축소추정치를 mES에 적용하여 자산배분을 할 경우 다른 모형들과 어떠한 차이가 있는지 확인해보고자 한다.

⁸³ Boudt, K., Lu, W., & Peeters, B. (2015), *loc.cit.*

⁸⁴ Yamai, Y., & Yoshiba, T. (2005), *loc.cit.*

⁸⁵ Boudt, K., Lu, W., & Peeters, B. (2015), *loc.cit.*

제 2 절 리밸런싱

항상 시장이 변화하면서 자산가격도 변동하고 있으므로 원래 계획했던 포트폴리오 구성 비중에서 벗어난다. 포트폴리오 리밸런싱은 이렇게 원래 비중에서 벗어나 있는 자산들의 비중을 원래대로 되돌리는 과정을 말한다. 이는 장기적으로 자산가격이 평균으로 회귀하는 현상에 기초하여 리밸런싱은 인간의 비이성적행동을 제어할 수 있다. 투자자는 약간의 수익이라도 발생하면 이를 실현하여 수익으로 확정하고 손실이 발생하면 이를 확정하기보다 원금으로 회복될 때까지 리밸런싱을 미루는 경우가 많다. 이는 Tversky and Kahneman(1992)⁸⁶이 밝혀냈던 인간의 손실회피 성향 때문이다. 또한 그들이 언급한 자신이 소유하고 있는 것에 대해 과대평가하는 보유효과때문에 투자자들은 기 투자된 자산에 대해 리밸런싱을 비이성적으로 하게 된다. 따라서, 이러한 투자자들의 비이성적 행동을 제어하기 위하여 어떠한 규칙에 근거한 리밸런싱 전략은 필요하다.

⁸⁶ Tversky, A., & Kahneman, D. (1992), *loc.cit.*

1. 전통적 리밸런싱 방법

전통적인 포트폴리오 리밸런싱 방법으로는 크게 주기적 리밸런싱과 밴드 리밸런싱으로 구분된다. 주기적 리밸런싱은 월별, 분기별, 연별 등 정해진 주기에 리밸런싱을 하는 방법이다. 정해진 주기에 하기 때문에 실행하기 쉬우나, 시장의 움직임과 독립적으로 수행되므로, 정해진 주기에 목표비중을 맞추기 위해 불필요한 매수 및 매도에 따른 거래비용이 발생할 수 있다. 밴드 리밸런싱은 자산 비중이 정해진 목표 범위(예를 들어 $\pm 2\%$)를 벗어나면 리밸런싱을 하는 것으로 주기적 방법과 마찬가지로 실행하지 쉽지만, 적절한 밴드를 설정하기 어렵다.

박광수(2009)⁸⁷는 국내 금융시장에서 주식과 채권으로 구성된 포트폴리오 리밸런싱에 대해 실증적으로 분석하였는데 주가가 하락하는 국면에서는 리밸런싱을 하지 않고 매입 후 보유하는 전략이 가장 큰 성과를 보였고 모든 국면에서는 10% 밴드 리밸런싱 전략이 주기적 리밸런싱보다 성과면에서 효과가 있음을 확인하였다. 또한, 남재우와 김병진(2011)⁸⁸에서는 국민연금기금을 대상으로 분석하였는데 전략적 자산배분에서 리밸런싱은

⁸⁷ 박광수(2009), “한국에서의 포트폴리오 리밸런싱에 관한 실증적 연구”, 「한국 FP 학회」, 2(1), 25-43.

⁸⁸ 남재우, 김병진(2011), “전략적자산배분에 따른 포트폴리오 리밸런싱에 관한 연구”, 「국민연금연구원」, 국민연금공단 정책보고서

계획하였던 리스크-수익 프로파일을 유지하기 위해 리밸런싱이 반드시 필요하며, 주기적 방법보다 밴드 리밸런싱을 할 경우 수익성 측면에서 성과가 더 높음을 실증하였다.

자산관리 프로세스 과정에서 대부분 포트폴리오 리밸런싱은 자산배분보다 덜 중요하게 여겨져서 주로 주기적 혹은 비중 밴드를 주어 기계적으로 하는 것이 대부분이다. 투자하고 있는 자산의 특성에 기초해서 리밸런싱을 하는 것이 아닌 대부분 기관투자자들이나 자산운용사에서 많이 사용하는 방법으로 리밸런싱을 하게 되면 비슷한 시기에 동시에 리밸런싱을 하게 되어 이 또한 자산들의 가격 변동성을 유발하는 원인이 될 수도 있다. 따라서, 개별 포트폴리오가 가지는 변동성 특성에 따른 리밸런싱 방법이 필요하다.

2. 구조적 변화점 추정

시간의 흐름에 따라 변화하는 데이터에서 어떤 시점, t 를 기준으로 그 전의 데이터와 그 이후의 데이터 양상이 다르다면 데이터의 구조가 변화했다고 말할 수 있다. 이러한 데이터 구조의 변화는 change points(변화점), break points(단절점), structural break(구조변화) 혹은 regime change(국면 변화) 등으로 표현되어, 경제분야, 바이오, 의학, 기후, 해양학, 그리고 금융 등 다양한 분야에서 구조변화 시점을 추정하기 위한 연구가 활발하게 진행되고

왔다. 시계열 자료에서 구조변화는 특정 시점에서 분포의 특성, 즉 평균, 분산, 혹은 평균과 분산의 동시 변화하는 것을 말한다.

구조변화 분석은 통계학적 접근관점에서 보자면 분포의 가정을 하느냐에 따라 모수적 방법과 비모수적 방법으로 구분될 수 있다. 금융시계열에서는 주로 GARCH 모형을 이용하여 구조변화를 찾으려 하였고(Kokoszka and Leipus (2000)⁸⁹, Berkes et al.(2004)⁹⁰), Signal Processing 에서는 최적 파티셔닝 등의 동적프로그래밍 기법(Auger and Lawrence(1989)⁹¹, Jackson et al.(2005)⁹²)을 이용하여 시간, 비용의 효율적인 측면에서 구조적 변화를 찾는 연구를 진행해왔다.

(1) 모수적 방법

사전에 알려지지 않은 변화시점이 복수인 상황을 가정해보면, 아래 그림과 같이 표현될 수 있다. 시계열 자료 $y_{1:n} = (y_1, \dots, y_n)$ 에 대해 m 은 변화점의 수이고, 변화점은 $\tau_{0:m} = (\tau_0, \dots, \tau_m)$ 으로 표현할 수 있다. $\tau_0 =$

⁸⁹ Kokoszka, P., & Leipus, R. (2000), "Change-point estimation in ARCH models", *Bernoulli*, 6(3), 513-539.

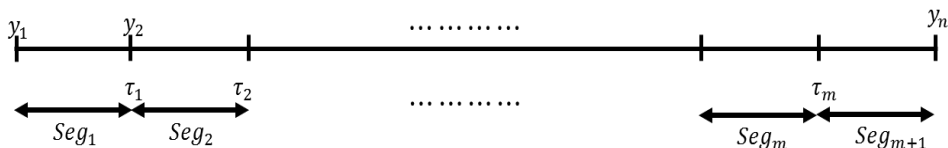
⁹⁰ Berkes, I., Gombay, E., Horváth, L., & Kokoszka, P. (2004), "Sequential change-point detection in GARCH (p, q) models", *Econometric Theory*, 20(6), 1140-1167.

⁹¹ Auger, I. E., & Lawrence, C. E. (1989), "Algorithms for the optimal identification of segment neighborhoods", *Bulletin of mathematical biology*, 51(1), 39-54.

⁹² Jackson, B., Scargle, J. D., Barnes, D., Arabhi, S., Alt, A., Gioumoussis, P., ... & Tsai, T. T. (2005), "An algorithm for optimal partitioning of data on an interval", *IEEE Signal Processing Letters*, 12(2), 105-108.

1, $\tau_{m+1} = n$ 이 성립되고 세그먼트의 수는 $m+1$ 이 되며, i 번째 세그먼트 Seg_i 는 $y_{\tau_{i-1}:\tau_i}$ 가 된다.

[그림 6] 변화점 및 세그먼트



모수적 방법을 이용한 구조변화 연구는 평균, 분산 혹은 평균과 분산이 동시에 변화하는 변화시점을 찾기 위해서 기저의 분포를 가정하는 것으로 가정된 분포하에서 비용함수를 최소화하는 최적화 기법을 사용한다. 주로 비용함수는 자료의 누적합(CUSUM, Page(1954)⁹³), 최대우도법(Chen and Gupta(1999)⁹⁴), 최소제곱법(Bai and Perron(1998)⁹⁵, Lavielle(2005)⁹⁶), 베이지언 방법(Smith(1975)⁹⁷, Mira and Petrone(1996)⁹⁸) 등을 적용하여 다중의 변화시점을

⁹³ Page, E. S. (1954), "Continuous inspection schemes", *Biometrika*, 41(1/2), 100-115.

⁹⁴ Chen, J., & Gupta, A. K. (1999), "Change point analysis of a Gaussian model", *Statistical Papers*, 40(3), 323-333.

⁹⁵ Bai, J., & Perron, P. (1998), "Estimating and testing linear models with multiple structural changes", *Econometrica*, 47-78.

⁹⁶ Lavielle, M. (2005), "Using penalized contrasts for the change-point problem", *Signal processing*, 85(8), 1501-1510.

⁹⁷ Smith, A. F. M. (1975), "A Bayesian approach to inference about a change-point in a sequence of random variables", *Biometrika*, 62(2), 407-416.

⁹⁸ Mira, A., & Petrone, S. (1996), "Bayesian hierarchical nonparametric inference for change-point problems", *Bayesian Statistics*, 5, 693-703.

추정하게 된다. 다중의 변화시점이 있을 경우 가능한 정확한 구조변화 개수와 구조변화 위치(시점) 추정이 중요하다. 구조변화 수가 늘어나면 목적함수를 계산하기 위한 시간이 기하급수적으로 늘어나고 과적합의 문제가 발생할 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 일반적으로 다중 구조변화 시점을 잡는 것에 대한 비용함수와 과적합에 대한 벌점함수를 결합하여 이를 최소로 만드는 최적의 변화시점을 찾는다. 식으로 표현하면 아래와 같다.

$$F(t) = \min \sum_{i=1}^{m+1} [C_{(y_{t_{i-1}}:t_i)}] + \beta f(m) \quad (19)$$

여기에서 C 는 세그먼트에 대한 비용 함수이고, $f(m)$ 은 벌점함수로 일반적으로 세그먼트수에 선형적으로 증가하도록 한다. β 는 적절한 세그먼트 수를 위한 비용함수와 벌점함수의 상충관계를 조절하는 계수이다. 비용함수는 보통 최대우도법을 많이 사용하는데 Horvath(1993)⁹⁹, Chen and Gupta(1999)¹⁰⁰은 최대우도법을 이용하였고 국내에서는 방승욱 등(2001)¹⁰¹ 의 최대우도법을 이용한 주가수익률 변화시점을 추정하였다. 작은 벌점은 과적합을 야기하고

⁹⁹ Horváth, L. (1993), "The maximum likelihood method for testing changes in the parameters of normal observations", *The Annals of statistics*, 671-680.

¹⁰⁰ Chen, J., & Gupta, A. K. (1999), *loc.cit.*

¹⁰¹ 방승욱, 강호정, 이우백(2001), "주식 수익률 행태의 구조변화에 관한 연구", 「산업경제연구」, 14(5), 223-235.

너무 큰 벌점을 과소적합을 야기한다. β 로 벌점함수의 민감도를 조절하는데 보통 모델 선택할 때 많이 사용되는 Akaike's information criterion(AIC¹⁰² : $Pen(\tau) = 2$), Schwarz information criterion(SIC or BIC¹⁰³ : $Pen(\tau) = \log(n)$) 기준을 주로 사용한다.

Signal processing에서는 보통 비용함수를 최대우도법을 이용하고 이 비용함수와 벌점함수의 최적의 조합을 찾기 위한 방법으로는 이분법, 이웃세그먼트, 최적파티셔닝 등을 사용한다. Scott and Knott(1974)이 제안한 이분법은 복잡도가 $O(n \log n)$ 으로 데이터 수에 따라 증가하는 비용함수이다. 단일 변화가 아니라 다중 변화를 검정할 경우, 정확할 수 있으나 많은 연산시간을 요구하여 느린 것이 단점이다. Auger and Lawrence(1989)¹⁰⁴는 최대 변화점의 수를 미리 정한 후에 최적의 변화점을 찾는 이웃세그먼트 방법을 제안하였다. 복잡도는 $O(Q_n^3)$ 으로 Q 는 최대 변화점의 수이다. 적절한 최대 변화점 수를 정하는 방법이 명확하지 않고, 최대 변화점 수를 안다고 할지라도 데이터 수가 많아지면 여전히 많은 계산량을 요구한다. 계산의 효율성을 위해서 Jackson et al.(2005)¹⁰⁵은 선형벌점, 즉 $f(m) = m$ 을 가정한 최적파티셔닝 방법을 제안하였다. 이는 동적프로그래밍 알고리즘을 이용하여

¹⁰² Akaike, H. (1974), "A new look at the statistical model identification", *IEEE transactions on automatic control*, 19(6), 716-723.

¹⁰³ Schwarz, G. (1978), "Estimating the dimension of a model", *The annals of statistics*, 6(2), 461-464.

¹⁰⁴ Auger, I. E., & Lawrence, C. E. (1989), *loc.cit.*

¹⁰⁵ Jackson, B., Scargle, J. D., Barnes, D., Arabhi, S., Alt, A., Gioumousis, P., ... & Tsai, T. T. (2005), *loc.cit.*

모든 시점에서 식(13)을 최적화하는 구조변화 점을 찾는 것이다. 벌점함수를 구조변화점의 수로 가정하여 복잡도는 $O(n^2)$ 이지만 여전히 모든 점에서 식(20)을 최소화하는지 계산을 하게 된다.

$$F(t) = \min\{F(s) + C_{(y_{s+1}:t)} + \beta m\} \quad (20)$$

Killick et al.(2012)¹⁰⁶는 이렇게 여전히 비효율적인 최적 파티셔닝 방법에 프루닝(pruning) 단계를 적용한 PELT(Prune Exact Linear Time) 방법을 제안하여 계산의 효율성을 개선하였다. 비용함수를 계산할 때 프루닝 방법을 적용하는데 식(21), 식(22)와 같이 최근 시점 이전의 비용함수가 작다면 다시 반복해서 계산하지 않고 기존의 비용함수에 새로운 시점에 따른 비용만 더하는 구조로 찾게 된다. 따라서, PELT 의 목적함수는 식(23)로 표현될 수 있다.

$$C_{(y_{(s+1):t})} + C_{(y_{(t+1):T})} + K \leq C_{(y_{(s+1):T})} \quad (21)$$

$$F(s) + C_{(y_{(s+1):t})} + K > F(t) \quad (22)$$

$$F(T) = \min_{\tau \in R_{\tau^*}} \left[F(\tau) + C_{(y_{(\tau+1):\tau^*})} + \beta \right] \quad (23)$$

¹⁰⁶ Killick, R., Fearnhead, P., & Eckley, I. A. (2012), “Optimal detection of changepoints with a linear computational cost”, *Journal of the American Statistical Association*, 107(500), 1590-1598.

Bardwell(2018)¹⁰⁷ 에 연구에서 데이터 양에 따라 구조변화시점이 선형적으로 증가할 경우 최적파티셔닝 방법보다 PELT 가 항상 더 빠른 결과를 보여주는 것을 확인하였다. 따라서, 본 연구에서는 모수적 방법 중 PELT 방법으로 구조변화 시점을 찾고자 한다.

(2) 비모수적 방법

분포를 가정하지 않는 비모수적 방법을 이용하여 구조변화 시점을 추정하는 방법은 밀도추정(Csörgö and Horvath(1988)¹⁰⁸, Desobry et al.(2005)¹⁰⁹), 순서통계량 (Pettie(1979)¹¹⁰, Lombard(1987)¹¹¹, Ross et al.(2011)¹¹²), 유클리디언 거리를 이용한 방법 등이 있다. 유클리디언 거리를 이용한 방법 중 Matteson

¹⁰⁷ Bardwell, L. (2018), "Efficient search methods for high dimensional time-series", Doctoral dissertation, Lancaster University.

¹⁰⁸ Csörgö, M., & Horvath, L. (1988), "20 Nonparametric methods for changepoint problems", *Handbook of statistics*, 7, 403-425.

¹⁰⁹ Desobry, F., Davy, M., & Doncarli, C. (2005), "An online kernel change detection algorithm", *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(8), 2961-2974.

¹¹⁰ Pettitt, A. N. (1979), "A non-parametric approach to the change-point problem", *Applied statistics*, 126-135.

¹¹¹ Lombard, F. (1987), "Rank tests for changepoint problems", *Biometrika*, 74(3), 615-624.

¹¹² Ross, G. J., Tasoulis, D. K., & Adams, N. M. (2011), "Nonparametric monitoring of data streams for changes in location and scale", *Technometrics*, 53(4), 379-389.

¹¹³ Mann-Whitney 또는 Kolmogorov-Smirnov 등의 순위통계량을 사용하여 변화점이 존재하는지 검증

and James(2014)¹¹⁴ 는 Székely(2003)¹¹⁵ 와 Rizzo and Székely(2010)¹¹⁶ 가 소개한 에너지 통계량(U-statistics)을 이용하여 변화시점을 찾아내는 E-divisive 방법을 제안하였다. 에너지 통계량은 통계적 거리를 측정하는 측도로 유클리디언 거리를 사용한다. X 와 Y 를 확률변수라고 하면 x_1, \dots, x_n 와 y_1, \dots, y_m 는 X 와 Y 로부터의 표본이라고 하면, A, B, C 는 통계적 거리이고 다음 식(24) -식(26)과 같이 표현된다.

$$A := \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|x_i - y_j\| \quad (24)$$

$$B := \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|x_i - x_j\| \quad (25)$$

$$C := \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \|y_i - y_j\| \quad (26)$$

¹¹⁴ Matteson, D. S., & James, N. A. (2014), “A nonparametric approach for multiple change point analysis of multivariate data”, *Journal of the American Statistical Association*, 109(505), 334-345.

¹¹⁵ Székely, G. J. (2003), “E-Statistics: The energy of statistical samples”, *Bowling Green State University, Department of Mathematics and Statistics Technical Report*, 3(05), 1-18.

¹¹⁶ Rizzo, M. L., & Székely, G. J. (2010), “Disco analysis: A nonparametric extension of analysis of variance”, *The Annals of Applied Statistics*, 1034-1055.

이에 대해 Szekely(2003)¹¹⁷와 Rizzo and Szekely(2010)¹¹⁸가 $\varepsilon_{n,m}(X,Y) := 2A - B - C$ 의 관계가 있다고 하였고 이를 에너지 통계량이라고 정의하였다. Matteson and James(2014)¹¹⁹은 순차데이터에 대하여 에너지 통계량을 이용하여 거리를 측정하고 계층적으로 군집을 찾아 구조변화 시점과 수(k)를 동시에 찾는다. 구조변화 시점을 $\hat{\tau}$ 라 하면, 목적함수는 식(27)과 같이 표현된다.

$$(\hat{\tau}, \hat{k}) = \max \hat{Q}(X_n, Y_m(k)) \quad (27)$$

여기서 $\hat{Q}(X_n, Y_m(k))$ 는 통계적 거리를 측정하는 것으로 식(28)으로 표현되고, 에너지 통계량인 $\hat{\varepsilon}(X_n, Y_m(k))$ 는 식(29)과 같다.

$$\hat{Q}(X_n, Y_m(k)) = \frac{mn}{m+n} \hat{\varepsilon}(X_n, Y_m(k)) \quad (28)$$

$$\hat{\varepsilon}(X_n, Y_m(k)) = \frac{2}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |X_i - Y_j|^\alpha - \binom{n}{2}^{-1} \sum |X_i - Y_k|^\alpha - \binom{m}{2}^{-1} \sum |Y_j - Y_k|^\alpha \quad (29)$$

따라서, $\hat{\varepsilon}(X_n, Y_m(k))$ 을 최대화하는 시점을 순열검증을 통해 찾고 이를 반복적으로 수행하게 되므로 분포에 대한 가정없이 이용할 수 있다.

¹¹⁷ *Ibid.*

¹¹⁸ *Ibid.*

¹¹⁹ *Ibid.*

E-divisive 방법은 주어진 순차데이터에서 적절한 세그먼트를 찾을 때 이진법과 같이 반복적으로 에너지 통계량을 계산하는 과정을 거쳐 근사적으로 세그먼트를 찾는다. 이에 반해 James and Matteson(2015)¹²⁰는 Kolmogorov-Smirnov, 에너지 통계량 등을 이용한 적합도검정(goodness-of-fit)을 통해 최적의 세그먼트를 찾고 계산의 복잡도 개선을 위해 프루닝을 적용한 방법인 cp3o(Change Points via Probabilistically Pruned Objectives)을 제시하였는데 이 방법은 모수적 방법 PELT와 마찬가지로 근사적으로 해를 찾는 것이 아니라 조건에 맞는 경우에만 세그먼트로 인식하는 방법(exact solution)이다. 시계열 자료 $y_{1:n} = (y_1, \dots, y_n)$ 에 대해 k 는 구조변화점의 수이고, 변화점은 $\tau_{0:k} = (\tau_0, \dots, \tau_k)$ 으로 표현할 수 있다. C_j 는 세그먼트로 $C_j = \{y_i: \tau_{j-1} < i < \tau_j\}$ 이다.

$$\hat{G}(k) = \max_{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k} \sum_{j=1}^k \hat{R}(C_j, C_{j+1}) \quad (30)$$

$$\hat{R}(X_n, Y_m(k)) = \frac{mn}{(m+n)^2} \hat{\varepsilon}(X_n, Y_m(k)) \quad (31)$$

여기서 $\hat{R}(X, Y)$ 은 군집 X 와 Y 의 관측치 사이의 통계적 거리를 나타내는 측도(식(31))이고, 에너지 통계량을 이용한 $\hat{\varepsilon}(X_n, Y_m(k))$ 를 적용한다(식(29)).

¹²⁰ James, N. A., & Matteson, D. S. (2015), “Change Points via Probabilistically Pruned Objectives”, *arXiv preprint arXiv:1505.04302*.

$\hat{R}(X, Y)$ 의 값이 크게 나타나면 두 군집의 분포가 다르게 구분된다는 의미이므로 새로운 변화점으로 인식하게 된다. 따라서 식(30)의 $\hat{R}(X, Y)$ 를 최대화하는 것이 목적함수이다. 본 연구에서는 E-divisive 와 cp3o 의 두 방법을 적용하여 구조적 변화시점을 찾고자 한다.

제 III 장 연구 모형

본 연구에서는 mES 를 최소화하는 전략에 축소추정량을 적용한 자산배분 최적화를 먼저 수행하고, 포트폴리오 수익률의 구조적 변화 시점 추정을 하여 리밸런싱을 진행하고자 한다. 하방리스크 지표 중 VaR 는 일관성있는 리스크 공리를 만족하지 못하기 때문에 ES 최소화하는 것을 자산배분의 목표로 하고 수익률 분포의 비대칭성을 고려하기 위해 고차적률이 반영된 mES를 적용한다. 또한 고차적률에 요인분석을 통한 축소추정량을 적용함으로써 과거데이터를 이용했을 경우에 발생하는 추정오차 문제를 해결할 수 있다.

제 1 절 최적 자산배분

1. 자산배분 모형

고차적률에 대한 축소추정량을 이용한 mES 최소화하는 전략의 성과를 수익 최대화, 분산(표준편차) 최소화, VaR 최소화, ES 최소화, mES 최소화하는 전략들의 성과와 비교하였다. 동일가중(1/N) 포트폴리오는 기존에 많은

연구들¹²¹이 복잡한 최적화 전략보다 단순한 1/N 전략이 우수한 성과를 시현했기 때문에 1/N 전략을 벤치마크 포트폴리오로 사용한다. 코너해가 나올 가능성을 방지하기 위해서 각 전략에 비중제약을 주었다. 비중제약은 목적이나 규제 등에 따라 여러가지 형태로 주어질 수 있다. 본 연구처럼 자산군이 주식, 채권, 대체투자로 구분되어 있을 경우 자산군과 개별 자산에 대해 비중제약을 줄 수 있다. 펀드매니저는 운용펀드에 대한 비중제약에 따라 운용성과 차이도 크기 때문에 적절한 비중제약을 설정해야 한다. 포트폴리오 수익률에 대한 비중제약의 효과를 알아보는 것이 본 연구의 목적이 아니기 때문에 한 특정자산에 집중 투자되는 것을 방지하기 위하여 한 자산에 60% 이상 할당되지 않도록 투자 비중을 제약하였다. 공매도는 없다고 가정하였고, 모든 자산에 투자가 되도록 하였다($w_i > 0$). 전략들의 성과 비교를 위하여 주기적 리밸런싱(분기)을 하였고 이동 윈도우(rolling window)기법을 이용하여 3 년의 데이터로 최적의 자산비중을 찾고 1 년의 성과를 측정하였다. 분석

¹²¹ “simple is the best”

- Plyakha, Y., Uppal, R., & Vilkov, G. (2012). Why does an equal-weighted portfolio outperform value-and price-weighted portfolios?. 에서 동일비중 포트폴리오가 표준편차가 더 크긴했지만 가치 또는 가격 가중 포트폴리오보다 성과가 좋았음
- DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2007). Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?. *The review of Financial studies*, 22(5), 1915-1953. 동일비중 포트폴리오 성과가 다른 복잡한 전략의 성과보다 우수한 경우가 더 많았음

프로그램은 R 을 이용하였고, {PortfolioAnalytics}¹²², {PerformanceAnalytics}¹²³

패키지를 이용하였다. 분석 모형을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\text{분석모형: } \textit{minimize } mES \quad (32)$$

$$\text{제약조건: } w'\mu = r_p, \sum w_i = 1, w_i > 0$$

$mES(\alpha)$ 는 수식(33)으로 표현되고 q_α 는 식(34)이다.

$$mES(\alpha) = \mu_p - \frac{\sigma_p}{\alpha} \phi(q_\alpha) \left[1 + \frac{1}{6} q_\alpha^3 S_p + \frac{1}{24} (q_\alpha^4 - 2q_\alpha^2 - 1) K_p + \frac{1}{72} (q_\alpha^6 - 9q_\alpha^4 + 9q_\alpha^2 + 3) S_p^2 \right] \quad (33)$$

$$q_\alpha = Z_\alpha + \frac{(Z_\alpha^2 - 1)}{6} S_p + \frac{(Z_\alpha^3 - 3Z_\alpha)}{24} K_p - \frac{(2Z_\alpha^3 - 5Z_\alpha)}{36} S_p^2 \quad (34)$$

포트폴리오 분산, 왜도 및 첨도에 대한 축소추정치 σ_p , S_p , 그리고 K_p 는 요인모형을 적용한 다음의 식(35) - 식(37)으로 표현된다.

$$\sigma_p = w' M_2^{sh} w \quad (35)$$

$$S_p = w' M_3^{sh} (w \otimes w) \quad (36)$$

$$K_p = w' M_4^{sh} (w \otimes w \otimes w) \quad (37)$$

¹²² Peterson, B. G., Carl, P., Boudt, K., Bennett, R., Varon, H., Yollin, G., & Martin, R. D. (2015), "Package 'PortfolioAnalytics'", Technical report,

¹²³ Peterson, B. G., Carl, P., Boudt, K., Bennett, R., Ulrich, J., Zivot, E., ... & Wuertz, D. (2015), "Package 'PerformanceAnalytics'".

분산-공분산 행렬, 왜도-공왜도 행렬, 첨도-공첨도 행렬은 과거 데이터로부터의 추정치가 아닌 요인모형을 이용한 축소된 추정치들이 적용된다(식(38)-식(40)).

$$M_2^{sh} = BSB' + \Delta, \quad S = E[(f_t - \mu_f)(f_t - \mu_f)'] \quad (38)$$

$$M_3^{sh} = BG(B' \otimes B') + \Omega, \quad G = E[(f_t - \mu_f)(f_t - \mu_f)' \otimes (f_t - \mu_f)'] \quad (39)$$

$$M_4^{sh} = BP(B' \otimes B' \otimes B') + Y, \quad P = E[(f_t - \mu_f)(f_t - \mu_f)' \otimes (f_t - \mu_f)' \otimes (f_t - \mu_f)'] \quad (40)$$

2. 성과지표

각 포트폴리오의 전략의 우월함은 연율화 수익률이 높은 기준으로 하되, 일관된 결과를 판단하기 위해 성과지표를 기준으로 한다. 각 성과지표에 대한 설명은 다음과 같다.

- (1) 샤프비율(Sharp ratio): 무위험자산 수익률 대비 초과수익률을 포트폴리오 표준편차로 나눈 값이다. 단위당 총위험 대비 초과수익률의 크기를 의미하는 것으로 값이 클수록 성과가 좋다.

$$\text{Sharpe} = \frac{E(R_p) - R_f}{\sigma(R_p)} \quad (41)$$

- (2) 정보비율(Information ratio): 벤치마크 대비 초과 수익을 초과수익의 표준편차(추적오차)로 나눈 값이다. 벤치마크지수의 추정오차 대비 초과수익률의 크기를 의미하는 것으로 값이 클수록 성과가 좋다.

$$IR = \frac{E[R_p - R_B]}{\sqrt{VAR(R_p - R_B)}} \quad (42)$$

- (3) 소티노비율(Sortino ratio): MAR(최소허용수익)대비 초과 수익을 MAR 보다 적은 경우만의 표준편차(downside deviation)으로 나눈 것으로 값이 클수록 성과가 좋다.

$$Sortino = \frac{[E(R_p) - MAR]}{\sqrt{\sum \frac{\min(R_p - MAR, 0)^2}{n}}} \quad (43)$$

- (4) 드로우다운 편차(Drawdown deviation) : 드로우다운은 최고값과 최저값의 차이를 나타내는 것으로 드로우다운 편차는 이 차이의 편차를 의미한다. 값이 작을수록 성과가 좋다.

일반적으로 포트폴리오 성과를 비교하는 사용되는 샤프비율 및 정보비율과 더불어 하방리스크 측면에서 판단할 수 있는 평균 드로우다운과 드로우다운 편차, 그리고 소티노비율도 함께 고려하여 각 포트폴리오 전략의 성과를 비교한다.

제 2 절 리밸런싱 모형

본 연구에서는 모수적 방법(PELT)과 비모수적 방법(E-divisive, cp3o)을 이용하여 구조변화 시점을 추정하고 이 시점에 리밸런싱을 시행한다. 또한 리밸런싱은 액티브 의사 결정 과정(active decision making)이기 때문에 리밸런싱을 시행할 때 원래의 목표 자산비중으로 회귀하는 것이 아니라 추정된 구조변화 시점들에서 다시 제 1 절의 고차적률에 대한 축소추정치를 이용한 mES 를 최소화하는 자산배분 프로세스를 거쳐서 최적의 비중을 찾고 이를 반복적으로 수행한다. 모수적 및 비모수적 방법에 따른 성과만을 비교하기 위해서 리밸런싱에 수반되는 세금, 거래비용 등의 비용을 고려하지 않았다.

1. 모수적 모형

PELT 모형은 $s < t < T$ 에 대하여 식(44)을 만족하는 상수 K 가 존재하고, $t > s$ 에 대하여 식(45)와 같은 관계가 존재하면, 미래 시점 $T(T > t)$ 에서 s 는 최적의 구조변화시점이 될 수 없으므로 그 전까지 시점에 대해 구조변화 시점을 계산하지 않고 식(46)를 만족하는 세그먼트와 시점을 찾는다.

$$C_{(y_{(s+1):t})} + C_{(y_{(t+1):T})} + K \leq C_{(y_{(s+1):T})} \quad (44)$$

$$F(s) + C_{(y_{(s+1):t})} + K \geq F(t) \quad (45)$$

$$F(T) = \min_{\tau \in R_{\tau}^*} \left[F(\tau) + C_{(y_{(\tau+1):\tau^*})} + \beta \right] \quad (46)$$

분석은 R의 {changepoint} 패키지¹²⁴를 이용하였다. 구조변화점 탐색을 위한 함수로는 평균과 분산이 모두 변할 경우를 고려하는 `cpt.meanvar(X)` 함수를 적용하였다. 벌점함수의 민감도 강도를 조절하는 β 는 SIC 기준으로 하되 1, 1.5, 2로 다양하게 하여 β 따라 구조변화 시점이 어떻게 민감하게 추정되는지 시험하였다. 또한 세그먼트 내의 최소 관측치 수를 조절하여 구조변화 시점 추정에 어떠한 영향을 미치는지 시험하였다.

¹²⁴ Killick, R., & Eckley, I. (2014), “changepoint: An R package for changepoint analysis”, *Journal of statistical software*, 58(3), 1-19.

2. 비모수적 모형

본 연구에서는 에너지 통계량을 이용한 계층적 구조변화 추정(E-Divisive)방법과 적합도 검정 및 프루닝 방법을 적용하여 구조변화를 추정(cp3o)방법으로 구조적 변화하는 시점을 실증분석 하였다. E-Divisive 방법은 다변화 시점 추정을 위하여 하나의 변화시점을 추정하고 그 시점으로 나누어지는 세그먼트에 대해 다시 변화시점을 추정하는 과정을 반복하는 것이다. k 번째 반복시점에서 기 추정된 구조변화 시점 s_1, \dots, s_k 에 대하여 새로운 세그먼트 τ 를 검정하기 위하여 랜덤하게 기 추정된 시점들과의 순열테스트를 하여 식(47)이 최대화가 되는 시점을 새로운 세그먼트로 판단한다.

$$\varepsilon(X_n, Y_m(k)) = \frac{2}{mn} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |X_i - Y_j|^\alpha - \binom{n}{2}^{-1} \sum |X_i - Y_k|^\alpha - \binom{m}{2}^{-1} \sum |Y_j - Y_k|^\alpha \quad (47)$$

cp3o 방법은 각 세그먼트에 대해 적합도검정 측도인 \hat{R} 이 충분히 크면 새로운 세그먼트로 인식한다(식(48)). 적합도검정 측도인 \hat{R} 는 본 연구에서는 식(49)의 가중된 에너지 통계량(weighted Energy statistics)을 적용을 하고 프루닝방법을 적용하여 식(48)이 되는 시점을 동적프로그래밍을 통해 찾는다.

$$\hat{G}(k) = \max_{\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k} \sum_{j=1}^k \hat{R}(C_j, C_{j+1}) \quad (48)$$

$$\hat{R}(X_n, Y_m(k)) = \frac{mn}{(m+n)^2} \hat{\varepsilon}(X_n, Y_m(k)) \quad (49)$$

세그먼트 추정의 민감도는 세그먼트 내의 최소 관측치 수로 조절하였다. 변화점 추정을 위하여 R의 {ecp}¹²⁵ 패키지를 이용하여 분석하였다.

Lou, L. (2014)¹²⁶는 swing fund 내의 거래량에 대한 임계점을 찾기 위해 구조변화 시점을 추정하는 방법을 적용하였다. 기존에 이용하였던 최소자승법과 비모수기법인 E-Divisive 방법을 비교하였는데 대부분 최소자승법과 비슷한 결과를 보였지만 일부 펀드에서 E-Divisive 방법을 적용했을 때 성과가 더 우수하였다.

¹²⁵ James, N. A., & Matteson, D. S. (2013), “ecp: An R package for nonparametric multiple change point analysis of multivariate data”, *arXiv preprint arXiv:1309.3295*.

¹²⁶ Lou, L. (2014), “Change-Point Detection on Swing Funds”.

제 IV 장 실증분석

제 1 절 자료의 수집

본 연구에서는 주식, 채권, 대체투자의 3 개 자산군에 해당되는 10 개의 글로벌 ETF 자료를 이용하였다. 로보어드바이저 엔진에서 ETF 를 많이 활용하기 때문에 유사한 투자자산을 이용하여 전략들의 성과를 측정하고자 한다. 고차적률 축소추정량을 이용한 mES 최소화 자산배분 및 구조적 변화시점에서의 리밸런싱 효과를 실증분석한 자료는 2004 년 1 월 1 일부터 2017 년 12 월 30 일까지 주식군의 미국 주식(SPY), 유럽 주식(IEV), 일본 주식(EWJ), 이머징국가 주식(EEM) ETF, 채권군의 미국 중기채권(IEF)과 미국 장기채권(TLT) ETF, 대체투자군의 미국 리츠(IYR), 글로벌 리츠(RWX), 원자재(DBC), 그리고 금(GLD) ETF 의 10 개 자산들(<표 1>)의 일별 로그 수익률¹²⁷ 자료를 이용하였다. 해당 자료는 R 의 {henryquant}¹²⁸ 패키지에서 수집하였다.

¹²⁷ 로그수익률 = $\log(\frac{p}{p_{t-1}})$

¹²⁸ <https://github.com/hyunyulhenry/HenryQuant>

<표 1> 분석 자료 : 글로벌 ETF

주식	미국	S&P500 (SPY)
	유럽	European Stocks (IEV)
	일본	Japanese Stocks (EWJ)
	이머징	Emerging Market Stocks (EEM)
채권	중기	U.S. Mid-term Bill (IEF)
	장기	U.S. Long-term Treasuries (TLT)
대체투자	미국 리츠	U.S. REITs (IYR)
	글로벌 리츠	International REITs (RWX)
	원자재	Commodities (DBC)
	금	Gold (GLD)

<표 2>는 각 ETF 들의 일별 로그 수익률 자료들의 기초통계량이다. 이머징주식 ETF 와 미국주식 ETF 가 각각 8.9%, 8.6%로 가장 높은 연율화 수익률을 보였고 원자재 ETF 의 경우 연율화 수익률도 낮고 표준편차도 높은 편이어서 고리스크가 고수익(High Risk, High Return)을 보장해주지 않음을 알 수 있다. 채권군에서는 중기채권 ETF 와 장기채권 ETF 가 다른 양상을 보였는데 장기채권은 표준편차뿐만 아니라 평균 드로우다운도 중기채권에 비해 2 배 이상 크게 나타나 수익률의 변동성이 크게 나타났다. 평균 드로우다운을 살펴보면 대부분 대체투자과 이머징주식 ETF 가 3% 이상을 보였고

특이하게도 안정적인 투자수단으로 여겨지는 미국 장기채권의 평균 드로우다운이 3.4%로 높게 나타났다.

<표 2> ETF 일별 로그수익률의 기초통계량

구분	주식				채권		대체투자			
	미국	유럽	일본	이머징	미국 장기 채권	미국 중기 채권	미국 리츠	글로벌 리츠	금	원자재
Annualized Return	0.086	0.057	0.045	0.089	0.066	0.046	0.080	0.070	0.079	0.002
Annualized Std Dev	0.183	0.235	0.217	0.306	0.137	0.066	0.302	0.211	0.188	0.206
Annualized Sharpe (Rf=0%)	0.469	0.242	0.209	0.292	0.485	0.695	0.266	0.333	0.422	0.009
Average Drawdown	0.016	0.029	0.031	0.037	0.034	0.015	0.030	0.036	0.033	0.047
Drawdown Deviation	0.011	0.012	0.010	0.014	0.009	0.004	0.014	0.013	0.011	0.014
Sortino Ratio (MAR = 0%)	0.766	0.493	0.449	0.634	0.776	1.041	0.584	0.588	0.705	0.159
Skewness	0.195	-0.149	0.441	0.951	0.015	0.091	0.026	-0.564	-0.186	-0.080
Excess Kurtosis	17.45	10.12	12.99	21.51	2.00	2.50	16.58	8.28	6.01	2.04

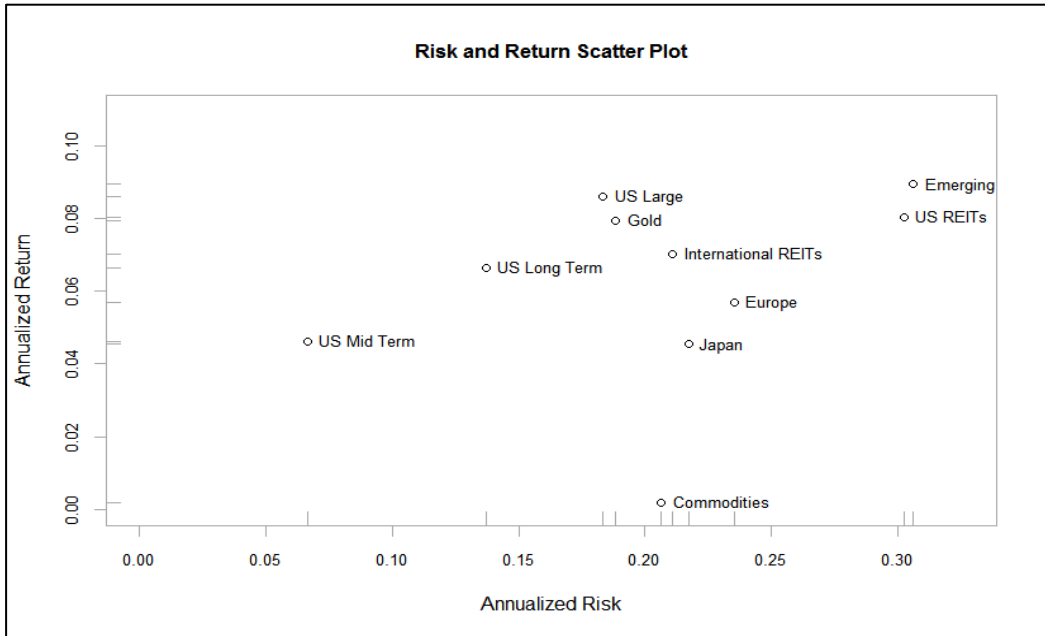
Jarque-Bera test¹²⁹를 한 결과 모든 자산의 로그수익률이 정규분포를 따르지 않는 것으로 나타났다. 대체투자군에서 음의 왜도를 보이는 자산들이 많이 나타났고 주식군에서는 유럽주식이 음의 왜도를 나타냈다. 유럽주식은 글로벌리츠보다 표준편차는 비슷한 수준이나 하방리스크 지표인 평균 드로우다운에 큰 차이가 있다. 그 결과 소티노비율이 글로벌리츠가 더 높게 나왔고 연율화 수익률에서 차이가 나타나 어떤 리스크 지표를 사용하느냐에 따라 리스크 대비 수익에 대한 해석이 다르게 나타날 수 있음을 확인할 수 있다.

2004 년에서 2017 년 동안 자산별 리스크(표준편차) 대비 로그수익률 그래프[그림 4]를 보면 예상대로 미국중기채권은 리스크가 가장 작은 대신 낮은 수익률을 보였고, 리스크가 가장 큰 자산군은 이머징 주식과 미국리츠로 나타났다.

¹²⁹ Jarque-Bera test 는 왜도와 초과첨도를 이용하여 정규분포임을 검정하는 것으로 귀무가설은 ‘정규분포를 따른다’ 는 것이다.

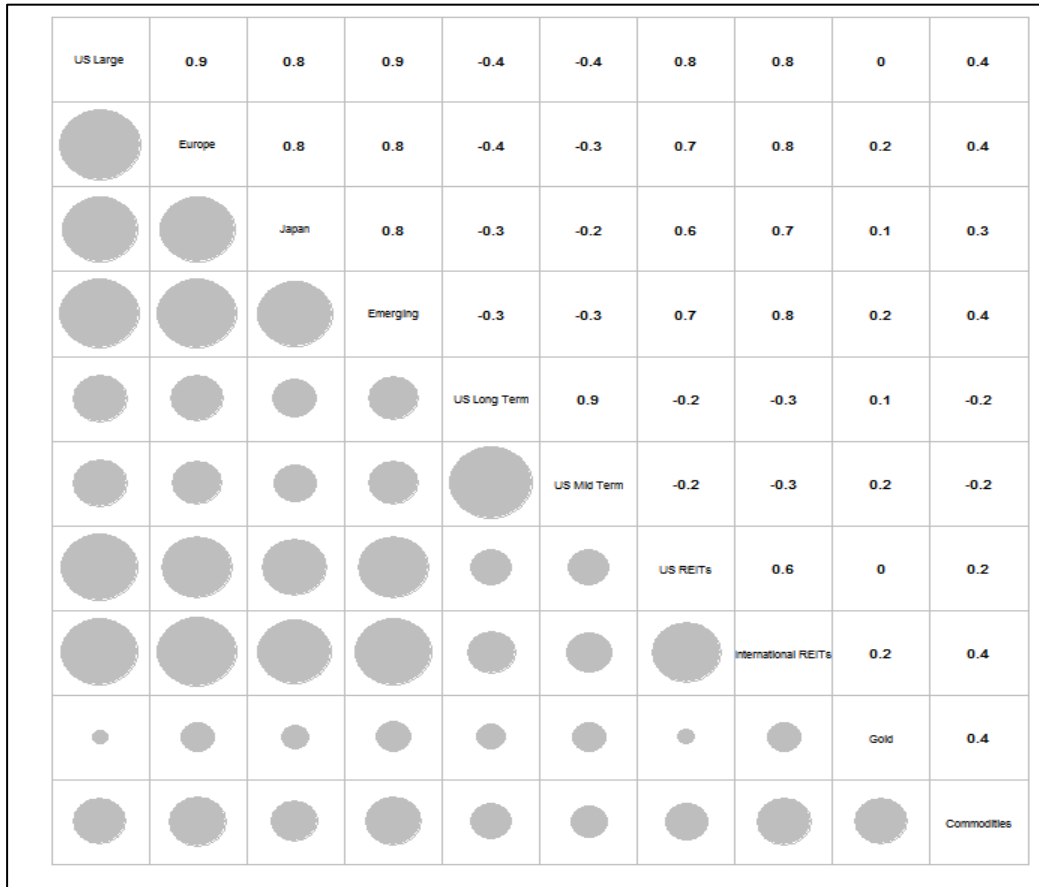
$$JB = \frac{T}{6} \left(s^2 + \frac{(k-3)^2}{4} \right) \sim \chi^2$$

[그림 7] ETF 일별 로그수익률의 수익과 리스크 분포



미국 주식은 이머징 주식보다 리스크가 적으나 비슷한 수준의 평균 수익률을 보였다. 미국 주식과 금, 이머징 주식과 미국 리츠가 비슷한 수준의 리스크 대비 수익을 나타내고 보이고 있고 원자재는 글로벌 리츠와 비슷한 리스크 수준이나 가장 낮은 수익률을 보였다.

[그림 8] ETF 일별 로그수익률의 상관관계



[그림 8]의 일별 로그 수익률의 자산별 상관관계를 보면 예상대로 채권과 주식이 음의 상관관계를 보이고 있고 금을 제외한 대체투자자들도 채권은 음의 상관관계를 보이고 있다. 대체투자 중 금은 대부분 자산들과 낮은 상관관계를 보임을 확인할 수 있고, 글로벌 리츠는 주로 주식군과 상관관계가 높은 것으로 나타났다.

제 2 절 분석 결과

1. 자산배분 결과

각 전략에 대한 자산배분을 한 결과는 <표 3>와 같다. 전략(1)은 벤치마크 포트폴리오인 1/N 전략이다. 전략(2)는 수익 최대화, 전략(3)은 분산(표준편차) 최소화, 전략(4)는 VaR 최소화, 전략(5)는 ES 최소화, 전략(6)은 mES 최소화이다. 전략(7)부터 전략(10)까지는 고차적률의 축소추정치를 적용한 mES 최소화전략으로 축소추정치를 적용할 때 요인 1,2,3, 그리고 5 요인의 경우를 구분한 것이다.

<표 3> 각 전략에 따른 최적자산배분 성과

	Annualized Return	Average Drawdown	Drawdown Deviation	Annualized Std Dev	Annualized Sharpe (Rf=0%)	Sortino Ratio (MAR = 0%)	Information Ratio
(1) Equal Weight(Benchmark)	0.046	0.023	0.010	0.142	0.326	0.551	-
(2) Max.Return	0.033	0.046	0.009	0.168	0.197	0.387	-0.103
(3) Min.StDev	0.038	0.011	0.004	0.062	0.614	0.925	-0.069
(4) Min.VaR	0.044	0.011	0.004	0.062	0.715	1.056	-0.013
(5) Min.ES	0.044	0.011	0.004	0.065	0.677	1.009	-0.017
(6) Min.mES	0.043	0.010	0.004	0.065	0.658	0.977	-0.028
(7) Min.mES.shrinkage(f=1)	0.038	0.012	0.004	0.066	0.577	0.858	-0.062
(8) Min.mES.shrinkage(f=2)	0.050	0.011	0.005	0.065	0.765	1.126	0.028
(9) Min.mES.shrinkage(f=3)	0.047	0.011	0.005	0.064	0.733	1.087	0.006
(10) Min.mES.shrinkage(f=5)	0.050	0.010	0.004	0.064	0.786	1.165	0.037

최소추정치를 이용한 전략((7)-(10))을 제외하고 벤치마크 포트폴리오인 1/N 전략의 연율화 수익률이 가장 높다. 이는 Plyakha et al.(2012)¹³⁰과 DeMiguel et al.(2007)¹³¹의 연구와 같은 결과를 보여주었지만 변동성이 다른 전략들보다 비교적 큰 수준이고 평균 드로우다운도 낮게 나타났다. 수익최대화 전략(2)이 연율화 수익률이 3.3%로 가장 낮을뿐만 아니라 변동성이 크고 평균 드로우다운 및 드로우다운 편차도 다른 전략들보다 2 배 이상 하락하는 위험을 보이고 있다.

하방리스크 지표(VaR, ES, mES)를 최소화하는 전략들의 성과를 살펴보면, 어떤 한 전략의 성과가 두드러지게 높게 나타나지는 않았다. Uryasev(2000)¹³²는 VaR 와 ES 을 최소화하는 전략은 다른 최적 투자비중을 보여준다고 하였고, 여러 논문에서도 두 전략과 MPT 이론의 평균분산 모형에 따른 전략을 비교했을 때 복잡함에 비해 전략의 성과는 일관성 있게 우수한 결과를 보이지 않다고 하였다. 국내 연구인 김진호와 김윤전(2003)¹³³에서도 ES 를 최소화하는 전략의 결과가 평균-분산모형으로부터의 결과가 유의한 차이를 보이지 않다고

¹³⁰ Plyakha, Y., Uppal, R., & Vilkov, G. (2012), “Why does an equal-weighted portfolio outperform value- and price-weighted portfolios?”.

¹³¹ DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2007), “Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?”, *The review of Financial studies*, 22(5), 1915-1953.

¹³² Uryasev, S. (2000), “Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications”, In *Computational Intelligence for Financial Engineering, 2000.(CIFEr) Proceedings of the IEEE/IAFE/INFORMS 2000 Conference on* (pp. 49-57). IEEE.

¹³³ 김진호, 김윤전(2003), *lot.cit.*

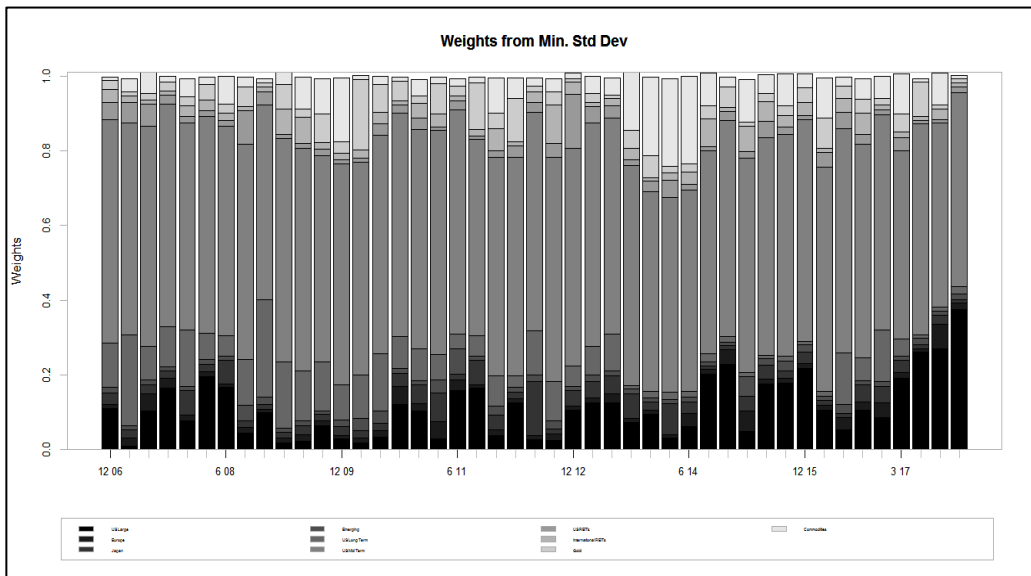
하였다. 김태혁 외(2008)¹³⁴의 다양한 VaR(VaR, mVaR, ES)에 따라 최적 자산배분성과 실증한 연구에는 ES를 최소화한 전략의 성과가 우수하게 나타났다고 하였다. 본 연구에서도 각 전략들이 서로 다른 투자비중을 제시하였다. 성과를 비교해 보면, VaR와 ES를 최소화하는 전략은 같은 평균 드로우다운과 드로우다운 편차를 보이나, VaR 최소화보다 ES 최소화 전략의 수익률 표준편차가 더 커서 샤프비율, 소티노 비율 그리고 정보비율이 낮게 나타났다. 고차적률을 이용한 mES 최소화하는 전략은 ES 최소화 전략보다 평균 드로우다운은 소폭 개선하였지만 샤프비율, 소티노비율, 정보비율은 개선하지 못했다. mES 최소화하는 전략이 왜든, 첼도의 고차적률을 적용하면서 두꺼운 꼬리 부분을 더 반영함으로써 하방리스크는 줄었지만 변동성이 증가된 것으로 판단된다.

전략(1)과 (2)를 제외하고 하방리스크 지표인 평균 드로우다운과 드로우다운 편차가 전략별로 큰 차이를 보이고 있지 않은데 이는 실증분석에 사용된 자료의 특성 때문이다. ETF는 여러 자산들이 분산투자를 고려한 투자비중으로 조합된 바스켓 상품으로 개별 자산보다 변동성이 적은 특성이 있어 이러한 ETF들로 구성된 포트폴리오의 변동성은 크지 않아서 드로우다운이 다이내믹하게 발생되지 않는 것으로 판단된다.

¹³⁴ 김태혁, 박중해, 권일준(2008), *loc.cit.*

[그림 9]-[그림 11]은 각각 StDev, ES, mES 를 최소화하는 전략의 투자비중을 나타낸 것이다. 글로벌 금융위기 영향시점인 2008 년 3 분기부터 2010 년 3 분기 자료로 추정된 추정치를 이용한 결과인 2011 년 3 분기 투자비중을 살펴보면, ES 또는 mES 최소화하는 전략은 StDev 최소화 전략보다 주식군이 아닌 대체투자군에 더 투자를 할당하면서 최적화를 한 것으로 나타났다. 이는 주식군과 리스크 대비 수익률이 비슷한 상품군으로 투자가 할당된 것으로 생각된다.

[그림 9] 분산(표준편차)를 최소화하는 전략의 투자비중



Weights from Min. ES

The chart displays the weights assigned to various countries and regions over time. The y-axis represents the weight, ranging from 0.0 to 1.0. The x-axis shows dates from 12 06 to 3 17. The legend identifies the following categories: Ukraine (black), Europe (dark grey), Japan (medium grey), Emerging (light grey), Volunteering (very light grey), VolunteeringTerm (white), LSPSP (dark grey), InternationalSP (medium grey), Base (light grey), and Committee (white).

The chart shows a significant shift in the distribution of weights over time. In the early period (12 06), the weights are heavily skewed towards Ukraine and Europe. As time progresses, the weights for other regions, particularly Japan and Emerging, increase significantly, eventually becoming the dominant components of the total weight. The 'Committee' category remains a small, consistent portion of the total weight throughout the period.

[illegible]

ES 또는 mES 를 최소화하는 전략이 StDev 보다 더 꼬리부분에 있는 자료를 잘 반영한다고 볼 수 있다. 이는 꼬리부분의 자료(outlier)가 왜도와 첨도 추정에 더 큰 영향을 주었기 때문이고 Boudt(2008)¹³⁵의 수익률 분포가 어느 한쪽으로 치우쳤을 경우 mES 가 꼬리쪽에 치우친 극단값을 더 반영한다는 연구와 일치한다고 판단할 수 있다. 이처럼 이벤트를 포함하는 시기에 따라 자산군에 대한 투자 비중이 크게 달라지는 것을 확인할 수 있고 이를 통해 국면전환 또는 구조적 변화를 고려한 리밸런싱이 필요하다고 판단한다.

ES 와 mES 를 적용했을 때의 차이를 보면 고차적률을 적용했을 경우가 연율화 수익률은 다소 낮아졌지만 평균 드로우다운이 1.0%로 ES 를 최소화하는 경우보다 0.1% 낮추어 하방리스크를 방어하는 효과를 보여주었다. Boudt(2008)¹³⁶의 연구에서도 언급했듯이 수익률의 평균과 표준편차가 ES 혹은 mES 에 영향을 가장 크게 영향을 미치는 적률이지만, 왜도와 첨도도 이에 못지않게 분포의 비대칭적인 요소를 조절하는 중요한 적률이라고 하였는데 mES 를 최소화하는 전략의 실증분석 결과로부터 고차적률을 고려할 경우 하방리스크 방어에 더 효과적이라는 것을 확인할 수 있었다.

¹³⁵ Boudt, Kris.(2008). “Estimation of Financial Risk under Non-Normal Distributions.” (289).

¹³⁶ *Ibid.*

하지만 Martin et al.(2015)¹³⁷에 따르면 고차적률을 포함한 수정된 VaR 와 ES 가 추정오차에 매우 민감하고 추정오차를 줄이는 것이 필요하다고 하였다. 우선, 요인모형을 이용한 축소추정치 를 적용하기 위해 적절한 요인수를 찾기 위하여 누적기여율(cumulative proportion)을 살펴보았다. Boudt et al. (2015) 의 연구에서는 3 요인 모형까지만 다루었는데 <표 4> 에서 보면 5 요인부터 90% 이상의 설명력을 가지는 것으로 나타났다. 이는 실증분석에 이용된 자료가 ETF 자료이기 때문에 주식, 채권 등의 개별 자산들보다 변동성을 적을 수 있어 공통으로 설명되는 요인이 5 요인까지 나온 것으로 판단된다. 따라서, 1, 2, 3, 그리고 5 요인모델로 축소한 추정치를 이용하여 mES 를 최소화하는 전략의 성과를 비교하였다.

<표 4> 주성분분석에 따른 요인별 누적기여율

	PC 1	PC 2	PC 3	PC 4	PC 5	PC 6	PC 7	PC 8	PC 9	PC 10
Eigenvalue	1.2E-03	2.0E-04	1.3E-04	1.0E-04	6.4E-05	5.8E-05	4.9E-05	3.1E-05	1.3E-05	2.3E-06
Proportion of Variance	0.644	0.110	0.073	0.055	0.035	0.031	0.027	0.017	0.007	0.001
Cumulative Proportion	0.644	0.754	0.827	0.882	0.917	0.948	0.975	0.992	0.999	1.000

91.7%의 누적기여율을 가지는 5 요인 모델을 적용한 축소추정치 를 이용한 결과 2 요인 축소추정치 를 이용한 전략과 비슷한 성과를 나타냈다. 수익률은

¹³⁷ Martin, D., & Arora, R. (2015), *loc.cit.*

5%로 동일했으나 5 요인 모델의 축소추정치를 이용한 모델이 추정오차를 효과적으로 줄이면서 평균 드로우다운과 드로우다운 편차를 각 0.1%씩 낮추면서 샤프비율, 소티노비율, 그리고 정보비율을 크게 개선한 결과를 보여주었다.

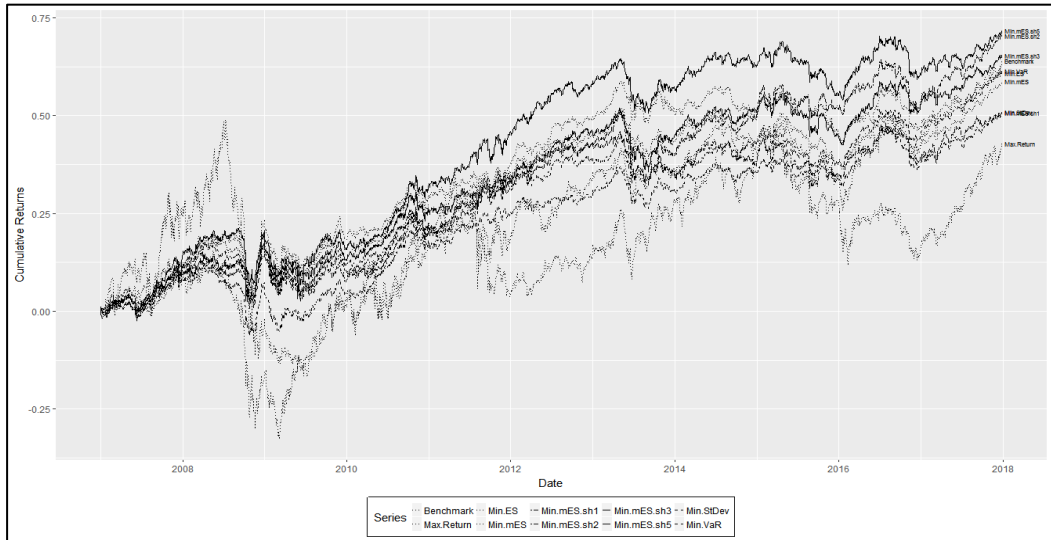
[그림 12]은 축소추정치를 이용한 mES 최소화 전략의 투자비중을 나타낸 그래프이다. 2008 년 6 월부터 2009 년도까지의 기간을 보면 축소추정치를 이용한 전략이 축소추정치를 이용하지 않은 전략보다 더 보수적으로 주식군의 비중을 줄인 것으로 나타났다. 축소추정치를 이용한 전략이 기존의 mES 를 최소화하는 전략과 같은 수준의 표준편차를 보였지만 분기 리밸런싱 시기마다 추정오차가 줄어든 추정치를 이용하여 변동성이 큰 대체투자군보다 주식군의 투자비중을 조절하면서 하방리스크를 방어하는 동시에 수익률을 제고하는 방향으로 자산배분을 하게 된다. 이러한 결과 연율화 수익률을 4.3%에서 5.0%로 증가되는 결과를 가져왔다고 판단할 수 있다.

Weights from Min. mES with Shrinkage(f=5)

The chart displays the relative importance of various features in a model across different dates. The y-axis represents the weight assigned to each feature, ranging from 0.0 to 1.0. The x-axis shows dates: 12 06, 6 08, 12 09, 6 11, 12 12, 6 14, 12 15, and 3 17. The legend identifies the following features: Group, Size, Age, Energy, Volume/Ten, Volume/Ten, LUMPY, Hatched/EPS, Size, and Control. The bars are stacked, showing the cumulative weight of these features for each date. The 'Control' feature (light gray) is consistently present, while other features like 'Group' (black) and 'Size' (dark gray) show varying levels of importance over time.

71

[그림 13] 각 전략의 누적수익률 그래프



각 전략의 누적수익률 그래프를 보면 수익을 최대화하는 전략이 변동성이 가장 컸고, 특히 2008 년 금융위기 영향을 받았던 2009 년에 낙폭이 매우 크게 나타났다. 반면, 굵은 라인의 고차적률에 축소추정치를 적용한 mES 최소화 전략은 동 시기에 낙폭이 상대적으로 크지 않았고 바로 수익률을 회복하는 양상을 보이고 있다. 또한, 2012 년부터는 5 요인모델의 고차적률 축소추정치 모델을 적용한 mES 최소화 전략이 다른 전략에 비해 장기적으로 아웃퍼폼하는 것을 확인할 수 있다. 따라서, 장기적인 관점에서 보았을 때 5 요인모델의 고차적률 축소추정치 모델을 적용한 mES 최소화 전략이 하방리스크를 방어하면서 수익률을 개선해가는 것으로 판단할 수 있다.

2. 리밸런싱 결과

(1) 주기적 리밸런싱 결과

구조적 변화 시점에서 리밸런싱을 하기 전에 먼저 주기적 리밸런싱의 성과 차이에 대해 살펴보았다. 각 주기마다 투자비중이 원래의 비중으로 회귀하는 것이 아닌 다시 고차적률에 축소추정치를 이용한 mES 를 최소화한 전략을 구사하였다. 주기적 리밸런싱의 성과 차이를 보여주는 <표 5>와 각 전략의 누적수익률 그래프인 [그림 14]을 통해 리밸런싱 주기에 따라 연율화 수익률 차이가 크게 나타나는 것을 확인할 수 있다.

<표 5> 주기적 리밸런싱 결과

	Annualized Return	Average Drawdown	Drawdown Deviation	Annualized Std Dev	Annualized Sharpe (Rf=0%)	Sortino Ratio (MAR = 0%)
Monthly Rebalancing	0.032	0.014	0.005	0.067	0.477	0.725
Quarterly Rebalancing	0.050	0.010	0.004	0.064	0.786	1.165
Yearly Rebalancing	0.054	0.011	0.004	0.062	0.881	1.312

월별, 분기별, 연별 리밸런싱한 결과 연 수익률은 3.2%, 5.0%, 5.4%로 리밸런싱 주기에 따라 성과 차이가 나타나고 있음을 확인할 수 있다. [그림 14]의 주기별 리밸런싱의 누적수익률 그래프를 보면, 특히 2014 년 중반부터

분기 및 연별과 월별 리밸런싱 차이가 나타나고 2016년에는 수익률 차이가 극명해진다. 월별, 분기별, 연별 모두 동일한 평균 드로우다운 및 드로우다운 편차 수준을 보였는데, 이는 고차적률에 축소추정치를 적용한 mES를 최소화하는 전략이 하방리스크를 방어하는데 효과적이었음을 보여주는 것이라 판단할 수 있다. 변동성은 예상대로 월별 리밸런싱을 할 경우가 가장 커서 주기가 길어질수록 변동성을 완화시키고 있음을 알 수 있고, 연별 리밸런싱이 가장 성과가 좋은 것으로 나타났다.

[그림 14] 각 주기 리밸런싱에 따른 누적수익률 그래프



가장 크게 성과 차이가 발생한 2016 년은 2013 년부터 2015 년 3 년의 자료를 이용한 전략의 성과를 보여주는 시점인데 이 시기는 유럽 재정위기와 러시아 경제위기를 포함하고 있어 짧은 주기의 리밸런싱은 이러한 이벤트의

영향을 더 민감하게 반응하여 전체 포트폴리오의 성과에 영향을 주는 것으로
 생각된다. 따라서 이벤트의 영향이 남아있는 시기에 리밸런싱을 하느냐의
 여부에 따라 리밸런싱 성과는 달라질 수 있으므로 포트폴리오 수익률의
 구조적 변화에 따른 리밸런싱이 필요하다고 판단한다.

(2) 모수적 방법에 따른 리밸런싱 결과

PELT 에서 적절한 세그먼트 추정에 대한 민감도를 조절하기 위하여
 벌점함수의 강도를 조절하는 β 에 대해 1,1.5,2를 적용하였고 세그먼트 내의
 최소 관측치를 15 와 30 으로 조절하여 판단하였다. β 값이 커질수록 과적합에
 벌점을 주게 되므로 덜 민감하게 구조변화 시점이 추정되었고 세그먼트 내
 최소 관측치 수(m)가 작을수록 민감하게 구조변화 시점이 추정되었다 (부록 1).
 추정된 구조변화 시점에서 리밸런싱 한 결과는 <표 6>과 <표 7>과 같다.

<표 6> m=15 조건 및 벌점강도 변화에 따른 구조변화 시점 추정 결과

	세그먼트 내 최소 관측치 수 = 15						
	변화시점수	Annualized Return	Average Drawdown	Drawdown Deviation	Annualized Std Dev	Annualized Sharpe (Rf=0%)	Sortino Ratio (MAR = 0%)
$\beta=1$	34	0.043	0.012	0.005	0.064	0.673	1.005
$\beta=1.5$	25	<i>0.068</i>	<i>0.009</i>	<i>0.005</i>	<i>0.064</i>	<i>1.055</i>	<i>1.571</i>
$\beta=2$	16	0.062	0.011	0.005	0.066	0.938	1.399

<표 7> m=30 조건 및 벌점강도 변화에 따른 구조변화 시점 추정 결과

	세그먼트 내 최소 관측치 수 = 30						
	변화시점수	Annualized Return	Average Drawdown	Drawdown Deviation	Annualized Std Dev	Annualized Sharpe (Rf=0%)	Sortino Ratio (MAR = 0%)
$\beta=1$	28	0.041	0.012	0.005	0.064	0.641	0.967
$\beta=1.5$	22	0.058	0.009	0.005	0.064	0.906	1.345
$\beta=2$	12	0.052	0.011	0.005	0.069	0.752	1.125

세그먼트내 최소 관측치 수가 15 일때 더 민감하게 구조적 변화시점을 추정하여 이 시점들에 리밸런싱 했을 경우 연율화 수익률, 샤프비율, 소티노 비율이 더 높게 나타났다. β 가 1.5 일 때 평균 드로우다운이 0.9%로 낮아 하방리스크를 방어하는 효과가 나타났다. 따라서, PELT 방법을 적용했을 때 가장 성과가 좋았던 경우는 벌점강도를 1.5 로 주고 세그먼트내 최소 관측치 수가 15 일 경우로 판단된다.

(3) 비모수적 방법에 따른 리밸런싱 결과

E-divisive 방법과 cp30 의 방법에서 적절한 세그먼트 추정에 대한 민감도를 조절은 세그먼트내 최소 관측치 수(m)이다. E-divisive 방법은 계층적으로 세그먼트를 구분하므로 세그먼트내 최소관측치 수가 적을수록 민감하게 구조변화 시점을 추정하고 cp30 의 방법은 적합도검정을 통해 세그먼트를 구분하므로 세그먼트내 최소관측치 수가 클수록 더 민감하게 구조변화 시점을

추정한다(부록 2). 각 방법에 따라 추정된 구조변화 시점에서 리밸런싱 한 결과는 <표 8>과 <표 9>이다.

<표 8> E-divisive 방법으로 추정된 구조변화 시점에서 리밸런싱 결과

	변화시점수	Annualized Return	Average Drawdown	Drawdown Deviation	Annualized Std Dev	Annualized Sharpe (Rf=0%)	Sortino Ratio (MAR = 0%)
m = 60	26	0.056	0.011	0.005	0.066	0.842	1.257
m = 90	23	0.041	0.01	0.004	0.065	0.631	0.938
m = 100	22	0.042	0.01	0.004	0.064	0.651	0.976

E-divisive 방법에서 세그먼트내 최소관측치 수가 가장 적은 경우 민감하게 구조변화 시점을 추정했는데 이 시점들에서 리밸런싱을 시행한 결과, m = 60 일 때 시점들을 민감하게 추정함에 따라 하방리스크 지표들이 0.1%씩 낮아졌지만 m = 90, 100 일 때 보다 연율화 수익률, 샤프비율, 소티노 비율기준으로 성과가 좋게 나타났다.

<표 9> cp3o 방법으로 추정된 구조변화 시점에서 리밸런싱 결과

	변화시점수	Annualized Return	Average Drawdown	Drawdown Deviation	Annualized Std Dev	Annualized Sharpe (Rf=0%)	Sortino Ratio (MAR = 0%)
m = 60	8	0.052	0.01	0.005	0.064	0.813	1.213
m = 90	11	0.046	0.011	0.005	0.066	0.743	1.111
m = 100	20	0.048	0.011	0.005	0.065	0.729	1.091

cp30 방법으로 추정했을 경우 E-divisive 방법보다 보수적으로 변화시점을 추정하는 것으로 나타났다. 세그먼트 내 관측치 수가 적을 경우 보수적으로 변화시점을 추정하면서 연율화 수익률은 E-divisive 방법보다 낮았지만 평균 드로우다운을 0.1% 감소시키는 결과를 나타냈다. $m=70$ 일때 평균 드로우다운을 낮추면서 연율화 수익률을 개선하였지만 구조변화 시점에서 리밸런싱을 할 경우 11년 동안 총 8회만 시행하게 되어 현실적으로 적용하기는 어렵다.

ETF 가 여러가지 자산을 바스켓으로 구성하는 상품이기 때문에 개별 자산들보다 변동성이 낮고 ETF 로 구성된 포트폴리오의 수익률의 변동성은 상대적으로 더 낮아졌을 것이다. 이러한 특성을 가진 포트폴리오 수익률의 구조적 변화시점을 추정하여 리밸런싱을 하게 되어 평균 드로우다운이나 드로우다운 편차가 크게 나타나지 않는다. 따라서 평균 드로우다운이나 드로우다운 편차가 유사한 상황에서 E-divisive 방법의 연율화 수익률이 상대적으로 높으므로 비모수적 방법은 E-divisive 방법을 적용했을 때 가장 성과가 좋았던 것으로 판단한다. <표 10>은 포트폴리오 수익율에 대해 모수적 방법(별점강도 $\beta = 1.5$, $m=15$)과 비모수적 방법(E-divisive, $m=60$)을 이용한 구조변화 시점을 추정한 결과이다. 모수적 방법에 따른 구조변화 시점은 총 25 개으로 나타났고, 비모수적 방법으로는 26 개의 시점으로 나타났다.

<표 10> 모수적 및 비모수적 방법을 이용하여 추정된 구조변화 시점

방법	추정된 구조변화 시점
모수적 (PELT)	"2007-06-03" "2007-07-10" "2007-11-22" "2008-03-24" "2008-09-18" "2008-11-05" "2009-08-12" "2010-04-04" "2010-10-12" "2011-01-04" "2011-06-30" "2011-12-21" "2012-03-12" "2012-04-02" "2013-05-20" "2013-07-10" "2013-12-11" "2015-02-04" "2015-06-04" "2015-08-18" "2015-09-09" "2016-10-17" "2016-11-07" "2016-12-13" "2017-07-05"
비모수적 (ECP)	"2007-01-02" "2007-06-12" "2007-11-25" "2008-03-16" "2008-09-28" "2009-02-19" "2009-08-13" "2009-11-30" "2010-03-25" "2010-07-05" "2010-10-11" "2011-01-05" "2011-08-03" "2011-12-22" "2012-07-30" "2012-10-25" "2013-05-21" "2013-09-05" "2013-12-12" "2014-09-01" "2015-02-03" "2015-05-26" "2015-08-19" "2016-01-20" "2016-07-04" "2016-12-15"

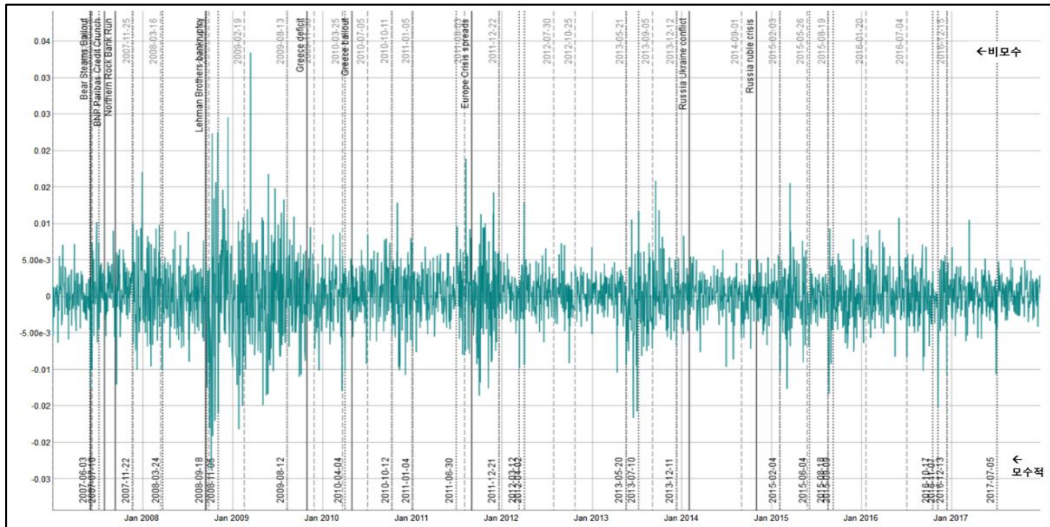
어떠한 이벤트이던지 발생 전에 어떠한 징후 혹은 변동이 발생한다. 2008 년 글로벌 금융위기의 경우 첫 조짐은 2006 년 4 월에 주택가격이 하락한 것이었고, 2007 년 6 월에는 베어스턴스의 베일아웃, 2007 년 8 월에는 BNP Paribas 의 유동성 문제로 인한 투자펀드 환매중단, 그리고 2007 년 9 월에는 영국 노던록(Northern Rock)의 첫뱅크런 등의 신호가 있었다. 2011 년 유럽재정위기도 2010 년 4 월의 그리스 구제금융 신청을 시작으로 유로존 전체로 재정위기가 확산되어 지속되었고, 2014 년 ~ 2015 년 러시아 경제위기도 2014 년에 러시아 루블화 가치 불안정 및 2014 년 6 월부터 12 월동안 석유가격이 50%이상 감소하는 등의 징후들이 있었다. 정리하면 <표 11>과 같다

<표 11> 연도별 주요 금융 이벤트

일 자	주요 이벤트
2006	4월 미국주택가격 하락
2007	6월 베어스턴스 베일아웃 8월 BNP Paribas 투자펀드 환매중단 9월 노던록뱅크런
2008	글로벌 금융 위기
2010	1차 유럽재정위기 - 4월 그리스 구제금융신청 - 11월 아일랜드 구제금융신청
2011	2차 유럽재정위기 - 4월 포르투갈 구제금융 신청 - 7월 이탈리아 국채금리 급상승
2014	3월 러시아 우크라이나 침공 6월 ~11월 석유가격 급락 11월 루블화 가치 하락, 자본 유출 시작
2016	6월 Brexit 11월 미국 대선

포트폴리오 수익률의 구조적 변화 시점 추정을 위해 적용한 모수적 및 비모수적 방법이 모두 2008 년도 글로벌 금융위기 및 2011 년 유럽 재정위기, 2015 년 러시아 경제위기 등 이벤트들을 전후로 구조변화 시점을 제시한 것으로 나타났다. [그림 15]의 추정된 구조적 변화 시점과 주요 이벤트가 발생한 시점들을 비교해서 보면, 추정된 구조변화 시점들이 이러한 신호들을 발생 전후로 인지한 것으로 추론해볼 수 있다.

[그림 15] 추정된 구조변화 시점과 주요 금융 이벤트



2008 년 글로벌 금융위기, 2010 년 유럽재정위기 등 변동성이 큰 이벤트가 발생할 경우 모수적 및 비모수적 방법이 비슷한 구조변화 시점을 제시하는데 2008 년 금융위기의 경우 모수적 방법이 “2008-09-18”에 구조적 변화를 인지했고 비모수적 방법은 “2009-02-19”로 구조적 변화를 인지하고 있다. 2011 년 유럽 재정위기의 경우 모수적 방법이 “2011-06-30”로 구조적 변화를 인지했고 비모수적 방법은 “2011-08-03”으로 인지했다. 변동성이 큰 이벤트의 경우 모수적 방법이 더 사전에 구조적 변화 시점을 제시하는 것으로 판단된다. 리밸런싱 횟수는 모수적 방법이 25 회이고 비모수적 방법이 26 회로 비슷하지만, 비모수적 방법은 상대적으로 낮은 변동성 구간(예를 들어 2012-2013 사이, 2016-2017 년 사이)에서 민감하게 구조변화 시점을 인식하는 것으로

나타났다. 그 결과 모수적 방법보다 변동성을 크게 야기하여 연율화 수익률이 낮아지는 결과를 보였다.

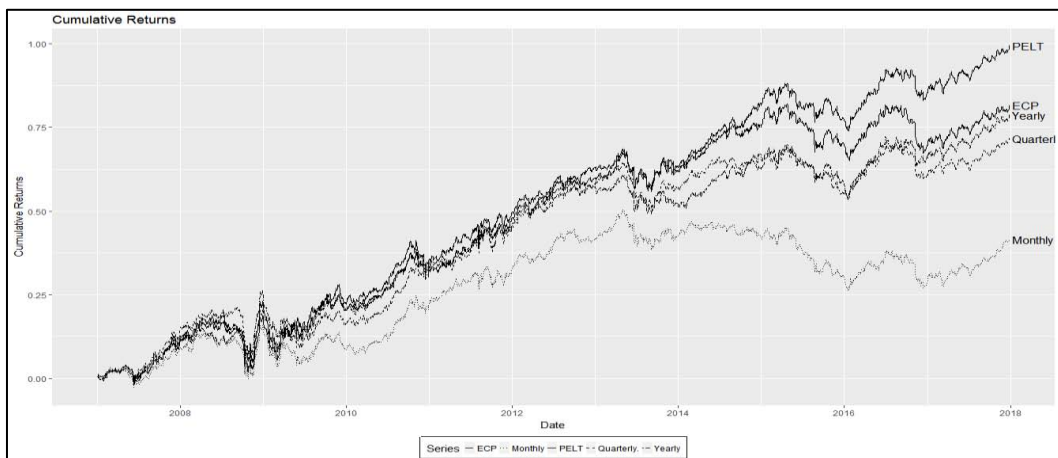
<표 12> 추정된 구조변화 시점에서의 리밸런싱 결과

		Annualized Return	Average Drawdown	Drawdown Deviation	Annualized Std Dev	Annualized Sharpe (Rf=0%)	Sortino Ratio (MAR = 0%)
주기적	Monthly Rebalancing	0.032	0.014	0.005	0.067	0.477	0.725
	Quarterly Rebalancing	0.050	0.010	0.004	0.064	0.786	1.165
	Yearly Rebalancing	0.054	0.011	0.004	0.062	0.881	1.312
구조변화	PELT Rebalancing(모수적)	0.068	0.009	0.005	0.064	1.055	1.571
	ECP Rebalancing(비모수적)	0.056	0.011	0.005	0.066	0.842	1.257

주기적 리밸런싱과 구조적 변화시점 추정에 따른 리밸런싱 결과를 종합해서 보면 <표 12>와 같다. 모수적 방법으로 추정된 구조변화 시점에서 리밸런싱을 한 연율화 수익률이 6.8%로 비모수적 방법으로 추정한 것보다 1.2% 높게 나타났다. 모수적 방법이 연별 리밸런싱보다 민감하게 구조변화 시점을 찾았기 때문에 표준편차는 높지만 하방리스크 지표인 평균 드로우다운을 1.1%에서 0.9%로 크게 낮추었고 수익률 뿐만 아니라 소티노 비율, 샤프비율 측면에서도 우수한 성과를 보이고 있다. 반면 비모수적 방법은 주기적 리밸런싱보다 연율화 수익률은 높았으나 드로우다운 편차는 크게 개선된 성과를 보여주지 못했다. 고차적률의 축소추정치를 적용한 mES 최소화 전략이 평균 드로우다운과 드로우다운 편차 등 하방리스크를 방어하는데 효과를

보이는 것을 확인했기 때문에 리밸런싱의 성과는 연율화 수익률, 샤프비율, 소티노 비율로 비교하였다. 연별 리밸런싱과 비모수적 방법을 적용한 리밸런싱이 비슷한 수준의 평균 드로우다운과 드로우다운 편차를 보이지만 수익률은 0.2% 차이가 난다. 연별 리밸런싱은 총 11 회의 리밸런싱을 시행하였지만 비모수적 방법을 적용한 리밸런싱은 총 26 회의 리밸런싱을 시행하였다. 본 연구에서는 비용은 고려하지 않았지만 비슷한 하방리스크 수준에서 리밸런싱 횟수를 고려했을 때 연별 리밸런싱이 더 선호될 수 있다. 종합적으로 판단해보면, 모수적 방법으로 추정된 구조변화 시점에서 시행한 리밸런싱 전략이 주기적 방법에서 가장 우수한 성과를 보였던 연별 리밸런싱 전략보다 하방리스크를 방어하면서 수익률 개선까지 보여 가장 성과가 우수한 것으로 나타났다.

[그림 16] 리밸런싱 전략에 따른 누적수익률 그래프



[그림 16]의 전략별 누적수익률 그래프를 보면 리밸런싱을 원래 목표 비중으로 회귀하는 것이 아니라 리밸런싱 시점에 고차적률에 5 요인모델의 축소추정치를 적용한 mES 최소화 전략을 시행하였기에 모든 전략이 큰 낙폭 없이 하방리스크를 방어하고 있는 것으로 나타났다. 주기적 방법보다 모수적 및 비모수적 방법으로 포트폴리오 수익률의 구조적 변화시점에서 리밸런싱한 전략의 성과가 더 우수하게 나타나고 있음을 볼 수 있다. 특히, 2014 년부터 주기적 리밸런싱보다 구조적 변화시점에서 리밸런싱한 전략의 성과차이를 벌리면서 아웃퍼폼하고 있다.

[그림 17]와 [그림 18]은 모수적 방법과 비모수적 방법에 제시하는 리밸런싱 시점에서의 투자비중을 나타낸 그래프이다. 성과 차이가 나는 2016 년의 리밸런싱 시점에서의 투자비중을 살펴보면, 모수적 방법은 2016 년 10 월, 11 월, 12 월에 구조적 변화가 발생했음을 제시하고 비모수적 방법은 2016 년 1 월과 7 월에 구조적 변화가 발생했음을 제시하였다. 모수적 방법에 제시한 시점에서 리밸런싱한 결과는 비모수적 방법의 경우보다 낙폭이 적었고 바로 수익률을 회복하는 형태를 볼 수 있다. 또한, 성과차이가 벌어지는 2017 년의 투자비중을 살펴보면 비모수 방법은 2016 년 12 월에 마지막으로 리밸런싱을 하는 반면, 모수적 방법은 2017 년 7 월에 구조적 변화를 인지하여 이 시점에 리밸런싱을 한번 더 하게 된다. 이 결과 모수적 방법이 하방리스크를 줄이면서 타 전략에 비해 계속 아웃퍼폼하는 양상을 보이고

자산가격의 변화를 정확하게 예측할 수 없기 때문에 최적의 리밸런싱 타이밍에 대한 정답은 없다. 시장 상황, 자산의 특성, 개인의 리스크 성향 등 여러 조건에 따라 달라지기 때문이다. 본 연구의 결과가 시사하듯이 최소한 포트폴리오 수익률 자체의 변동성에서 구조변화 시점을 추정하여 리밸런싱을 한다면 하방리스크를 최소화하면서 자산배분 성과를 끌어올릴 수 있음을 실증하였다.

제 V 장 결 론

제 1 절 연구결과 요약

본 연구에서는 자산배분부터 리밸런싱까지 전반적인 자산운용 과정의 효율성을 높이하고자 2004 년부터 2017 년 동안 10 개의 글로벌 ETF(미국 주식, 유럽 주식, 일본 주식, 이머징국가 주식, 미국 중기채권, 미국 장기채권, 미국 리츠, 글로벌 리츠, 원자재, 금)의 일별 로그수익률 자료를 이용하여 실증분석을 하였다. 첫번째 단계인 최적의 자산배분을 시행하기 위해서 PMPT 기반하에 왜도와 첨도의 고차적률을 고려한 자산배분을 하고자 하였다. PMPT 의 자산배분 목적인 하방리스크를 최소화하는 목적함수를 적용하는데 대표적인 하방리스크 측정치 VaR 과 ES 중에 일관된 리스크 측정치 공리를 만족하는 ES 를 사용하였다. 또한 고차적률을 반영하기 위하여 mES 를 이용하였다. 대부분은 표본으로부터 자료를 이용하여 적률(분산, 왜도, 첨도)를 추정하기 때문에 추정오차 문제가 발생하게 되고 이는 투자자산이 많아질수록 오차를 최대화하는 자산배분 결과를 야기할 수 밖에 없다. 따라서 축소추정치를 이용하여 이 문제를 해결하고자 하였다. 그 결과 고차적률에 대해 5 요인 축소추정량을 이용한 mES 최소화전략이 하방리스크 지표인 평균 드로우다운과 소티노비율을 개선하면서 연율화 수익률로 증가시켜 다른

전략에 비해 개선된 결과를 보였기에 이 전략이 PMPT 하에서 하방리스크를 최소화하는 최적의 포트폴리오 비중을 구성했다고 판단한다.

자산배분이 이루어지면 항상 시장의 변화에 따라 자산가격이 변동하게 되어 처음 자산배분을 했을 때의 투자비중과는 괴리가 발생한다. 이를 조정하는 단계가 리밸런싱인데 대부분 월별, 분기별, 연별의 주기적 리밸런싱을 하거나 자산별 투자비중에 밴드를 주는 방식의 리밸런싱을 하게 된다. 리밸런싱은 자산배분만큼 중요한 총체적 자산관리 프로세스의 한 과정이고 이는 거래비용, 세금 등의 비용을 수반하기 때문에 신중하게 하여야 한다. 본 연구에서는 포트폴리오 수익률의 구조적 변화가 나타나는 시점들을 찾고 이 시점들에서 리밸런싱을 수행하여 기존 방법들과 비교하고자 하였다. 또한 단순히 기존에 설정되어 있는 투자비중으로 회귀하는 것이 아니라 리밸런싱 시점에 다시 자산배분을 하는 다이내믹 방법을 적용하였다. 그 이유는 리밸런싱 또한 액티브 의사결정과정이라 판단했기 때문이다. 포트폴리오 수익률의 구조적 변화시점을 추정하기 위해 모수적 방법과 비모수적 방법을 모두 사용했다. 모수적 방법은 다중 구조변화 시점을 잡는 것에 대한 비용함수와 과적합에 대한 벌점함수를 결합하여 이를 최소로 만드는 최적의 변화시점을 찾는다. 시계열이 늘어나고 구조변화점이 다수일 경우 적절한 구조변화점을 찾고 최적의 구조변화점 수를 계산하는데 계산의 효율성이 떨어지기 때문에 이를 해결하기 위한 여러 연구가 진행되었는데 본

연구에서는 최적 파티셔닝 방법에 프루닝 과정을 적용한 PELT 방법을 이용하였다. 비모수적 방법은 유클리디언 거리를 이용한 에너지 통계량이 최대로 되는 세그먼트를 계층적으로 찾아 구조변화 시점과 수를 동시에 찾아가는 E-divisive 방법과 근사적으로 찾는 것이 아닌 에너지 통계량을 적합도 검증 측도로 이용하여 적합도 검증을 만족하는 경우에만 구조변화의 인지하는 cp3o 방법을 이용하였다. 모수적 방법에서는 과적합 및 과소적합의 문제를 별점강도(β)와 세그먼트내 최소 관측치 수(m)로 조절하였고 비모수적 방법에서는 세그먼트내 최소 관측치 수(m)로 조절하였다. 그 결과 모수적 방법은 β 가 1.5 일 때 적절한 구조적 변화 시점(25 회)를 제시하였고, 비모수적 방법은 m 이 60 인경우, E-divisive 방법이 적절한 구조적 변화 시점(26 회)를 제시하였다.

두 방법 모두 2008 년도 글로벌 금융위기 및 2011 년 유럽 재정위기, 2015 년 러시아 경제위기 등 이벤트들을 전후로 구조변화 시점으로 반영한 것으로 판단되었다. 이러한 이벤트들에 대해 전후 신호들을 포착하여 리밸런싱을 하게 된다면 불필요한 리밸런싱을 피하면서 가능한 적기에 리밸런싱을 할 수 있게 된다. 리밸런싱은 단기적인 변화에 민감하게 조정하는 것이 아니라 장기적인 시각에서 안정적인 포트폴리오 성과를 위해 조정하는 과정이기 때문이다. 이 시점에서 리밸런싱을 한 성과는 모수적 방법으로 추정된 구조변화 시점에서 리밸런싱을 한 연율화 수익률이 6.8%로 비모수적

방법으로 추정한 것보다 1.2% 높게 나타났다. 모수적 방법이 연별 리밸런싱보다 민감하게 구조변화 시점을 찾았기 때문에 표준편차는 높지만 하방리스크 지표인 평균 드로우다운을 1.1%에서 0.9%로 크게 낮추었고 수익률 뿐만 아니라 소티노 비율, 샤프비율 측면에서도 가장 우수한 성과를 보이고 있다. 반면 비모수적 방법은 평균 드로우다운과 드로우다운 편차를 모수적 방법보다 개선하지 못하면서 수익률까지 언더퍼폼하는 결과를 보인다. 또한, 주기적 리밸런싱보다 연율화 수익률은 높았으나 드로우다운 편차는 크게 개선된 성과를 보여주지 못했다. 이는 비모수적 방법이 모수적 방법보다 상대적으로 낮은 변동성에도 민감하게 반응하면서 모수적 방법보다 적절한 시기에 구조적 변화 시점을 제시하지 못했기 때문이라고 판단한다. 결론적으로 주기적 리밸런싱보다 포트폴리오 수익률 자체의 변동성으로부터 구조변화 시점을 추정하여 그 시점에서 리밸런싱을 하는 것이 하방리스크를 최소화하면서 자산배분 성과를 제고시키는 데 효과가 있음을 확인하였다.

종합적으로 판단해보면, 고차적률에 축소추정치를 적용한 mES 최소화 전략의 자산배분과 모수적 및 비모수적 방법을 이용한 구조적 변화시점에서 리밸런싱하는 전략이 효과가 있음을 실증하였고 자산배분과 리밸런싱이 별도의 과정이 아니라 통합적으로 관리하는 것이 장기적인 관점에서 안정적인 포트폴리오 성과를 관리하기 위한 과정임을 확인하였다.

제 2 절 연구의 시사점

로보어드바이저의 성과 여부는 내재되어 있는 알고리즘의 정교화에 달려있다. 본 연구의 시사점은 자산배분부터 리밸런싱까지 효율적인 자산관리를 위한 알고리즘 정교화에 기여했다는 시사점이 있다. 구체적인 시사점은 다음과 같다.

첫째, 본 연구에서는 마코위츠의 평균-분산이론이나 블랙리터만 이론에 근거해서 하는 기존의 로보어드바이저와 달리 투자자마다 다른 리스크에 대한 허용수준을 반영할 수 있는 PMPT 기반의 자산배분을 시도했다는 것이다. 이를 위해 투자자들의 손실회피를 최소화하고자 하는 성향을 반영하기 위해 일관된 위험 측정치인 ES 을 하방리스크 측정치로 대용하였고 이를 이용함에 있어 수반되는 추정오차 문제와 자산가격 분포의 비대칭성을 고려하고자 고차적률에 대한 축소추정치를 이용한 결과 평균 드로우다운 및 드로우다운 편차를 기준으로 판단했을 때 다른 전략들보다 수익률이 상회했음을 확인할 수 있었다. 이 결과를 바탕으로 본 연구에서 시도한 방법이 기존의 자산배분 이론을 대체할 수 있음을 확인하였고 로보어드바이저의 성과 향상에 기여할 수 있을 것으로 기대한다.

둘째, 포트폴리오 리밸런싱은 효율적인 자산관리를 위해 필요한 프로세스이지만, 투자자의 손실회피 성향, 보유효과 등의 비 이성적인 행태

때문에 이를 방지하기 위해 어떠한 규칙에 의존할 수 밖에 없는 과정이기도 하다. 시장의 변화를 정확하게 예측하여 적절한 리밸런싱 타이밍을 찾는 것은 불가능하다. 하지만 정확한 예측은 아니더라도 다른 사람들보다 비교적 빨리 자산가격의 구조적 변화시점을 포착하여 리밸런싱을 할 수 있다면 안정적인 포트폴리오 관리에 도움이 된다. 본 연구에서는 기존에 많이 사용했던 방법이 아닌 포트폴리오 수익률 분포의 구조적 변화시점을 추정하여 이 시점들에서 리밸런싱을 시행하였고 우수한 성과를 확인하였기에 리밸런싱 기법에 새로운 방법을 적용하였다는 의의를 가진다. 또한 본 연구를 기반으로 다양한 리밸런싱 시점에 대한 실증 연구가 활성화되기를 기대한다.

마지막으로 포트폴리오 최적 자산배분과 리밸런싱을 별도의 과정이라 여기지 않고 통합적으로 관리하는 것이 효율적이라는 것을 확인하였다는 것이다. 자산배분과 리밸런싱 모두 장기적인 관점에서 안정적인 포트폴리오 성과를 관리하기 위한 과정이다. 어느 과정이 더 중요하고 덜 중요한 문제가 아니기 때문에 이 두 과정이 유기적으로 연계가 되어 있어야 한다.

제 3 절 연구의 한계 및 향후 연구방향

첫째, 본 연구의 실증자료는 글로벌 ETF 자료이다. 다양한 ETF, 낮은 거래비용 그리고 비교적 풍부한 유동성의 이유로 ETF가 포트폴리오 구성자산으로 많이 사용되는 추세이고, 대부분 로보어드바이저 알고리즘이 이미 ETF를 활용하여 자산배분을 하고 있다. 하지만 ETF가 가지는 고유의 성질때문에 자산배분 전략들의 효과가 희석되었을 수 있다. 즉, ETF 자체도 상품들의 바스켓이므로 개별 상품들에 비해 변동성이 완화된 상태이다. 이러한 ETF로 구성된 포트폴리오의 수익률의 왜도, 첨도 등 고차적률을 추정하여 사용하였기 때문에 하방리스크 지표의 커다란 개선을 확인할 수는 없었다. 따라서 다양한 개별 자산군별(주식, 채권, 구조화 등)에 대해서도 고차적률에 대한 축소추정치(Shrinkage)를 이용한 mES를 최소화하는 전략을 적용한다면 하방리스크 방어 및 수익률 개선효과를 분명히 확인할 수 있고 조금 더 강건한(robust) 결과를 제시할 수 있을 것이다.

둘째, 고차적률에 요인모델을 이용한 축소추정치 이용이 완벽하게 추정오차 문제를 해결하지는 못한다. 지금까지 공분산행렬의 축소추정치에 대한 연구는 공분산행렬의 양정치성(Positive Definite)을 만족하지 못하는 문제를 해결하기 위한 방법으로 진행되고 있다. 이를 왜도, 첨도의 고차적률로 확대하여 적용하는 등의 추정오차를 최소화하기 위한 다양한 방법들을

연구하여 적용한다면 추정오차를 줄이는 최적의 포트폴리오를 구성할 수 있을 것이다.

셋째, 적절한 리밸런싱 타이밍을 찾기 위하여 모수적 및 비모수적 방법을 적용하여 포트폴리오 수익률의 구조적 변화 시점을 추정하였다. 본 연구에서는 구조적 변화 시점 추정에 따른 리밸런싱 결과 차이를 비교해보고자 하는 것이 목적이었기 때문에 과적합 및 과소적합의 문제를 조절할 수 있는 벌점함수를 정교하게 다루지 못했다. 모수적 방법에서는 계산의 복잡도를 줄이기 위한 벌점함수를 적용하는 연구가 대부분인데 구조적 변화시점을 얼마나 정확하게 인지하느냐의 여부는 포트폴리오 성과 및 비용의 문제와 연관되어 있으므로 fused LASSO¹³⁸ 등 정교한 벌점함수를 적용하는 것이 필요하다. 또한 비모수적 방법에서는 걱정 세그먼트 인식의 민감도를 조절할 수 있는 방법이 제한적이었는데 걱정 세그먼트 수와 시점에 민감도를 다양하게 조절할 수 있는 방법 적용이 필요하다.

넷째, 포트폴리오 수익률의 구조적 변화를 추정하여 계량적으로 리밸런싱을 시행한 전략도 유의미한 결과를 주었지만 경제 및 사회적 이슈, 애널리스트 의견 등 자산 가격에 영향을 줄 수 있는 정성적이 요소를 고려하지 못했다. 새로운 시점에서 자산 가격 자료에서 유의미한 구조적

¹³⁸ Tibshirani, R., Saunders, M., Rosset, S., Zhu, J., & Knight, K. (2005), "Sparsity and smoothness via the fused lasso", *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 67(1), 91-108.

변화를 찾는 것은 일정 시간이 지난 후 자료들이 쌓였을 경우 가능하지만 이러한 질적 변수를 고려한다면 조금 더 빠른 시점에서 구조적 변화를 인지할 수 있을 것이다. 텍스트 마이닝이나 인공신경망(artificial neural network)등의 머신러닝 기법을 통해 정성적 변수를 같이 고려하여 구조적 변화를 판단한다면 포트폴리오 수익률의 변동만을 고려했을 때보다 더 유의미한 구조적 변화를 판단하여 리밸런싱 성과를 향상시킬 수 있을 것이다.

다섯째, 리밸런싱에 수반되는 거래비용, 세금 등의 여러 비용을 고려하지 않았다는 것이다. 빈번한 거래로 수익률이 향상되었다고 해도 거래비용과 그에 대한 세금을 고려하면 수익률이 향상된 경우가 아닐 수도 있기 때문에 정확한 성과 개선 효과를 확인하기 위해서는 비용을 고려하는 것이 필요하다. 향후 연구에서 이러한 비용들을 고려하여 최적의 포트폴리오 전략을 구사한다면 더욱 실제로 전략들을 이용할 수 있는 유용한 결과를 보일 수 있을 것이라 판단한다.

마지막으로 총체적인 투자의사 결정은 자산선택부터 자산배분 그리고 리밸런싱까지의 과정을 의미한다. 수 많은 투자 가능 자산에서 적절한 수의 투자대상으로 포트폴리오를 구성하는 것은 또 다른 연구이므로 본 연구에서는 이미 자산선택 과정을 거쳤다는 가정하에 10 개의 글로벌 ETF 자산을 대상으로 자산배분과 리밸런싱에 대해 실증분석을 하였다. 하지만, 자산선택

방법까지 포함해서 실증분석을 한다면 통합적인 자산관리에 대한 하나의
솔루션을 제공할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

<국내 문헌>

구기동(2009), “확정기여형 퇴직연금의 투자의사결정에 관한 연구”, 서강대학교 경영대학원 박사학위 논문.

구기동, 신용인, 조철희(2016), 금융자산관리론, 청람, pp. 180~183.

김광훈(2016), “인공지능 자산운용시스템, 로보어드바이저(Robo-Advisor)”, 한국과학기술정보연구, 「KISTI Market Report」

김지은, 이용재, 배금일, 최재욱, 이동열, 김우창(2015), “‘로보 어드바이저’의 현황과 한국시장 도입 가능성에 대한 연구”, 「대한산업공학회 추계학술대회 논문집」, 2242-2247.

김진호(2002), “평균-분산 모형과 평균-VaR 모형간 최적위험자산배분 전략 비교”, 「재무연구」, 15(2), 143-172.

김진호, 김윤전(2003), “Conditional VaR 모형을 사용한 최적자산배분에 관한 연구”, 「한국증권학회지」, 32(3), 133-165.

김태혁, 박종해, 권일준(2008), “다양한 VaR 모형들을 이용한 최적자산 배분모형의 성과비교”, 「한국자료분석학회」, 10(1), 347-362.

남재우, 김병진(2011), “전략적자산배분에 따른 포트폴리오 리밸런싱에 관한 연구”, 「국민연금연구원」, 국민연금공단 정책보고서

민재형(2014), 생각을 경영하라, 청림출판.

박광수(2009), “한국에서의 포트폴리오 리벨런싱에 관한 실증적 연구”, 「한국 FP 학회」, 2(1), 25-43.

박재연, 유재필, 신현준(2016), “로보어드바이저를 이용한 포트폴리오 관리”, 「정보기술아키텍처연구」, 13(3), 467-476.

방승욱, 강호정, 이우백(2001), “주식 수익률 행태의 구조변화에 관한 연구”, 「산업경제연구」, 14(5), 223-235.

심명화(2016), “변동성, 왜도, 첨도와 주식수익률의 횡단면”, 「한국재무관리학회」, 33(1), 71-102.

오세경, 이정우(2015), “국민연금의 전략적 자산배분시 Shortfall Risk 의 적합성에 관한 연구”, 「한국증권학회지」, 44(2), 445-483.

이윤구, 이가연(2007), “한국 펀드시장에서 자산배분효과에 대한 실증분석”, 「대한경영학회지」, 20(4), 1977-1999.

형남원, 한규숙(2007), “하방위험을 이용한 위험자산의 최적배분”, 「한국재무학회 학술대회」, 382-404.

황승규, 임형준, 유시용(2009), “논문 (論文): 기대수익률의 추정에 의한 최적자산배분에 관한 연구-평균-분산 모형과 평균-VAR 모형을 중심으로”, 「재정정책논집」, 11(1), 27-57.

IBK 경제연구소(2016), “로보어드바이저에 관한 오해와 진실”

<국외 논문>

- Akaike, H. (1974), "A new look at the statistical model identification", *IEEE transactions on automatic control*, 19(6), 716-723.
- Ang, A., Chen, J., & Xing, Y. (2006), "DOWNSIDE RISK", *THE REVIEW OF FINANCIAL STUDIES*, 19(4), 1191-1239.
- Ardia, D., Boudt, K., & Nguyen, G. (2018), "Beyond risk-based portfolios: balancing performance and risk contributions in asset allocation." *Quantitative Finance*, 1-11.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999), "Coherent measures of risk", *Mathematical finance*, 9(3), 203-228.
- Auger, I. E., & Lawrence, C. E. (1989), "Algorithms for the optimal identification of segment neighborhoods", *Bulletin of mathematical biology*, 51(1), 39-54.
- Bai, J., & Perron, P. (1998), "Estimating and testing linear models with multiple structural changes", *Econometrica*, 47-78.
- Bardwell, L. (2018), "Efficient search methods for high dimensional time-series", Doctoral dissertation, Lancaster University.
- Basel Committee on Banking Supervision (2013), Consultative Document, *Fundamental Review of the Trading Book: A revised Market Risk framework*, BIS, Basel, Switzerland, <http://www.bis.org/publ/bcbs265.pdf>
- Berkes, I., Gombay, E., Horváth, L., & Kokoszka, P. (2004), "Sequential change-point detection in GARCH (p, q) models", *Econometric Theory*, 20(6), 1140-1167.

- Best, M. J., & Grauer, R. R. (1991), "Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems", *Management Science*, 37(8), 980-989.
- Black, F., & Litterman, R. (1992), "Global portfolio optimization", *Financial analysts journal*, 48(5), 28-43.
- Black, F., & Scholes, M. (1973)., "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of political economy*, 81(3), 637-654.
- Boudt, K., Lu, W., & Peeters, B. (2015), "Higher order comoments of multifactor models and asset allocation", *Finance Research Letters*, 13, 225-233.
- Boudt, K., Peterson, B., & Croux, C. (2008), "Estimation and decomposition of downside risk for portfolios with non-normal returns", *The Journal of Risk*, 11(2), 79-103.
- Boudt, Kris.(2008). "Estimation of Financial Risk under Non-Normal Distributions." (289).
- Campbell, R., Huisman, R., & Koedijk, K. (2001), "Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework", *Journal of Banking & Finance*, 25(9), 1789-1804.
- Chen, J. M. (2016), "Postmodern Portfolio Theory", In *Postmodern Portfolio Theory* (pp. 27-38). Palgrave Macmillan, New York.
- Chen, J., & Gupta, A. K. (1999), "Change point analysis of a Gaussian model", *Statistical Papers*, 40(3), 323-333.
- Chopra, V. K., & Ziemba, W. T. (2011), "The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice", In *The Kelly Capital growth investment criterion: theory and practice* (pp. 249-257).

- Csörgő, M., & Horvath, L. (1988), “20 Nonparametric methods for changepoint problems”, *Handbook of statistics*, 7, 403-425.
- D'Acunto, F., Prabhala, N., & Rossi, A. (2017). “The Promises and Pitfalls of Robo-advising”
- Darlington, R. B. (1970), “Is kurtosis really “peakedness?””. *The American Statistician*, 24(2), 19-22.
- Davis, J. H., Kinniry Jr, F. M., & Sheay, G. (2007), “The asset allocation debate: Provocative questions, enduring realities”, *Vanguard Investment Counseling and Research*.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2007), “Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?”, *The review of Financial studies*, 22(5), 1915-1953.
- Desobry, F., Davy, M., & Doncarli, C. (2005), “An online kernel change detection algorithm”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(8), 2961-2974.
- Dittmar, R. F. (2002), “Nonlinear pricing kernels, kurtosis preference, and evidence from the cross section of equity returns”, *The Journal of Finance*, 57(1), 369-403.
- Estrada, J. (2007), “Mean-semivariance optimization: A heuristic approach”.
- Fama, E. F., & French, K. R.(1992), “The cross-section of expected stock returns”, *the Journal of Finance*, 47(2), 427-465.
- Favre, L., & Galeano, J. A. (2002), “Mean-modified value-at-risk optimization with hedge funds”, *Journal of Alternative Investments*, 5(2), 21-25.

Harvey, C. R., & Siddique, A. (2000), “Conditional skewness in asset pricing tests”, *The Journal of Finance*, 55(3), 1263-1295.

Horváth, L. (1993), “The maximum likelihood method for testing changes in the parameters of normal observations”, *The Annals of statistics*, 671-680.

<https://github.com/hyunyulhenry/HenryQuant>

Ibbotson, R. G., & Kaplan, P. D. (2000), “Does asset allocation policy explain 40, 90, or 100 percent of performance?”, *Financial Analysts Journal*, 56(1), 26-33.

Jackson, B., Scargle, J. D., Barnes, D., Arabhi, S., Alt, A., Gioumouisis, P., ... & Tsai, T. T. (2005), “An algorithm for optimal partitioning of data on an interval”, *IEEE Signal Processing Letters*, 12(2), 105-108.

James, N. A., & Matteson, D. S. (2013), “ecp: An R package for nonparametric multiple change point analysis of multivariate data”, *arXiv preprint arXiv:1309.3295*.

James, N. A., & Matteson, D. S. (2015), “Change Points via Probabilistically Pruned Objectives”, *arXiv preprint arXiv:1505.04302*.

Jobson, J. D., & Korkie, B. (1980), “Estimation for Markowitz efficient portfolios”, *Journal of the American Statistical Association*, 75(371), 544-554.

Jondeau, E., & Rockinger, M. (2006), “Optimal portfolio allocation under higher moments”, *European Financial Management*, 12(1), 29-55.

Jondeau, E., & Rockinger, M. (2012), “On the importance of time variability in higher moments for asset allocation”, *JOURNAL OF FINANCIAL ECONOMETRICS*, 10(1), 84-123.

- Jorion, P. (1992), "Portfolio optimization in practice", *Financial Analysts Journal*, 48(1), 68-74.
- Killick, R., & Eckley, I. (2014), " changepoint: An R package for changepoint analysis", *Journal of statistical software*, 58(3), 1-19.
- Killick, R., Fearnhead, P., & Eckley, I. A. (2012), "Optimal detection of changepoints with a linear computational cost", *Journal of the American Statistical Association*, 107(500), 1590-1598.
- Kokoszka, P., & Leipus, R. (2000), "Change-point estimation in ARCH models", *Bernoulli*, 6(3), 513-539.
- Lavielle, M. (2005), "Using penalized contrasts for the change-point problem", *Signal processing*, 85(8), 1501-1510.
- Ledoit, O., & Wolf, M. (2003), "Honey, I shrunk the sample covariance matrix".
- Lintner, J.(1965), "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Assets in Stock Portfolios and Capital Budgets", *Review of Economics and Statistics*, 47(1), 13-37.
- Lombard, F. (1987), "Rank tests for changepoint problems", *Biometrika*, 74(3), 615-624.
- Lou, L. (2014), "Change-Point Detection on Swing Funds".
- Maginn, J. L., Tuttle, D. L., McLeavey, D. W., & Pinto, J. E. (Eds.) (2007), Managing investment portfolios: a dynamic process (Vol. 3), (John Wiley & Sons), pp.255.
- Markowitz, H. (1952), "Portfolio selection", *The journal of finance*, 7(1), 77-91.

- Markowitz, H., Todd, P., Xu, G., & Yamane, Y. (1993), "Computation of mean-semivariance efficient sets by the critical line algorithm", *Annals of Operations Research*, 45(1), 307-317.
- Martellini, L., & Ziemann, V. (2009), "Improved estimates of higher-order comoments and implications for portfolio selection", *The Review of Financial Studies*, 23(4), 1467-1502.
- Martin, D., & Arora, R. (2015), "Inefficiency of Modified VaR and ES."
- Matteson, D. S., & James, N. A. (2014), "A nonparametric approach for multiple change point analysis of multivariate data", *Journal of the American Statistical Association*, 109(505), 334-345.
- Mausser, H., & Rosen, D. (1999), "Beyond VaR: From measuring risk to managing risk". In *Computational Intelligence for Financial Engineering, 1999.(CIFEr) Proceedings of the IEEE/IAFE 1999 Conference on* (pp. 163-178). IEEE.
- Michaud, R. O. (1989), "The Markowitz optimization enigma: Is 'optimized' optimal?", *Financial Analysts Journal*, 45(1), 31-42.
- Michaud, R. O. (1998), "Efficient asset allocation: a practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation", *Harvard Business School Press, Boston*.
- Mira, A., & Petrone, S. (1996), "Bayesian hierarchical nonparametric inference for change-point problems", *Bayesian Statistics*, 5, 693-703.
- Mitton, T., & Vorkink, K. (2007), "Equilibrium underdiversification and the preference for skewness", *The Review of Financial Studies*, 20(4), 1255-1288.

Mossin, J. (1966), "Equilibrium in a capital asset market", *Econometrica: Journal of the econometric society*, 768-783.

Page, E. S. (1954), "Continuous inspection schemes", *Biometrika*, 41(1/2), 100-115.

Peterson, B. G., Carl, P., Boudt, K., Bennett, R., Ulrich, J., Zivot, E., ... & Wuertz, D. (2015), "Package 'PerformanceAnalytics'".

Peterson, B. G., Carl, P., Boudt, K., Bennett, R., Varon, H., Yollin, G., & Martin, R. D. (2015), "Package 'PortfolioAnalytics'", Technical report,

Pettitt, A. N. (1979), "A non-parametric approach to the change-point problem", *Applied statistics*, 126-135.

Plyakha, Y., Uppal, R., & Vilkov, G. (2012), "Why does an equal-weighted portfolio outperform value-and price-weighted portfolios?".

Quaranta, A. G., & Zaffaroni, A. (2008), "Robust optimization of conditional value at risk and portfolio selection", *Journal of Banking & Finance*, 32(10), 2046-2056.

Rizzo, M. L., & Székely, G. J. (2010), "Disco analysis: A nonparametric extension of analysis of variance", *The Annals of Applied Statistics*, 1034-1055.

Roccioletti, S. (2015), *Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall*. Springer.

Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000), "Optimization of conditional value-at-risk", *Journal of risk*, 2, 21-42.

Rom, B. M., & Ferguson, K. W. (1994), "Post-modern portfolio theory comes of age", *Journal of Investing*, 3(3), 11-17.

- Ross, G. J., Tasoulis, D. K., & Adams, N. M. (2011), "Nonparametric monitoring of data streams for changes in location and scale", *Technometrics*, 53(4), 379-389.
- Ross, S. (1976), "The arbitrage theory of capital asset pricing", *Journal of Economic Theory*, 13(3), 341-360.
- Scherer, B. (2002), "Portfolio resampling: Review and critique", *Financial Analysts Journal*, 58(6), 98-109.
- Schwarz, G. (1978), "Estimating the dimension of a model", *The annals of statistics*, 6(2), 461-464.
- Scott, R. C., & Horvath, P. A. (1980), "On the direction of preference for moments of higher order than the variance", *The Journal of Finance*, 35(4), 915-919.
- Sharpe, W. F. (1964), "Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk", *The journal of finance*, 19(3), 425-442.
- Smith, A. F. M. (1975), "A Bayesian approach to inference about a change-point in a sequence of random variables", *Biometrika*, 62(2), 407-416.
- Swisher, P., & Kasten, G. W. (2005), "Post-modern portfolio theory", *Journal of Financial Planning*, 18(9), 74.
- Székely, G. J. (2003), "E-Statistics: The energy of statistical samples", Bowling Green State University, Department of Mathematics and Statistics Technical Report, 3(05), 1-18.
- Tibshirani, R., Saunders, M., Rosset, S., Zhu, J., & Knight, K. (2005), "Sparsity and smoothness via the fused lasso", *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 67(1), 91-108.

- Tversky, A., & Kahneman, D. (1992), "Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty", *Journal of Risk and uncertainty*, 5(4), 297-323.
- Uryasev, S. (2000), "Conditional value-at-risk: Optimization algorithms and applications", In *Computational Intelligence for Financial Engineering, 2000.(CIFEr) Proceedings of the IEEE/IAFE/INFORMS 2000 Conference on* (pp. 49-57). IEEE.
- Wallick, D. W., Wimmer, B. R., & Balsamo, J. (2015), "Keys to improving the odds of active management success".
- Yamai, Y., & Yoshida, T. (2005), "Value-at-risk versus expected shortfall: A practical perspective", *Journal of Banking & Finance*, 29(4), 997-1015.
- Zangari, P. (1996), "An improved methodology for measuring VaR". *RiskMetrics Monitor*, 2(1), 7-25.

<부록 1> 모수적 방법에 따른 구조적 변화 시점 결과

<표> 세그먼트 내 최소 관측치 수 15 일 때 각 벌점강도에 따른 결과

	세그먼트 내 최소 관측치 수 = 15						
	구조변화시점	Annualized Return	Average Drawdown	Drawdown Deviation	Annualized Std Dev	Annualized Sharpe (RF=0%)	Sortino Ratio (MAR = 0%)
$\beta=1$	"2007-05-06" "2007-05-31" "2007-07-10" "2007-09-05" "2007-10-04" "2007-11-22" "2008-03-24" "2008-09-18" "2008-11-11" "2008-12-17" "2009-08-12" "2010-04-04" "2010-06-09" "2010-10-12" "2011-01-04" "2011-06-30" "2011-12-21" "2012-03-12" "2012-04-02" "2013-05-20" "2013-06-11" "2013-07-04" "2013-10-21" "2014-04-01" "2014-05-28" "2014-12-30" "2015-01-27" "2015-06-04" "2015-08-18" "2015-09-09" "2016-10-17" "2016-11-07" "2016-12-13" "2017-07-05"	0.043	0.012	0.005	0.064	0.673	1.005
$\beta=1.5$	"2007-06-03" "2007-07-10" "2007-11-22" "2008-03-24" "2008-09-18" "2008-11-05" "2009-08-12" "2010-04-04" "2010-10-12" "2011-01-04" "2011-06-30" "2011-12-21" "2012-03-12" "2012-04-02" "2013-05-20" "2013-07-10" "2013-12-11" "2015-02-04" "2015-06-04" "2015-08-18" "2015-09-09" "2016-10-17" "2016-11-07" "2016-12-13" "2017-07-05"	0.068	0.009	0.005	0.064	1.055	1.571
$\beta=2$	"2007-06-03" "2008-09-30" "2008-11-05" "2009-08-12" "2011-01-04" "2011-06-30" "2011-12-21" "2012-03-12" "2012-04-02" "2013-05-20" "2013-10-21" "2015-02-04" "2015-06-04" "2015-08-18" "2015-09-09" "2017-07-05"	0.062	0.011	0.005	0.066	0.938	1.399

<표> 세그먼트 내 최소 관측치 수 30 일 때 각 벌점강도에 따른 결과

	세그먼트 내 최소 관측치 수 = 30						
	구조변화시점	Annualized Return	Average Drawdown	Drawdown Deviation	Annualized Std Dev	Annualized Sharpe (RF=0%)	Sortino Ratio (MAR = 0%)
$\beta=1$	"2007-06-03" "2007-07-16" "2007-11-22" "2008-03-24" "2008-09-18" "2008-11-05" "2009-08-12" "2010-04-04" "2010-06-09" "2010-10-12" "2011-01-04" "2011-06-30" "2011-12-21" "2012-02-27" "2012-04-11" "2013-05-20" "2013-07-04" "2013-10-21" "2014-04-01" "2014-05-28" "2015-02-04" "2015-06-04" "2015-08-18" "2015-09-30" "2016-09-21" "2016-11-06" "2016-12-19" "2017-07-05"	0.041	0.012	0.005	0.064	0.641	0.967
$\beta=1.5$	"2007-06-03" "2007-07-16" "2007-11-22" "2008-03-24" "2008-09-18" "2008-11-05" "2009-08-12" "2010-04-04" "2010-10-12" "2011-01-04" "2011-06-30" "2011-12-21" "2012-02-27" "2012-04-11" "2013-05-20" "2013-07-10" "2013-12-11" "2015-02-04" "2015-06-04" "2015-08-18" "2016-12-13" "2017-07-05"	0.058	0.009	0.005	0.064	0.906	1.345
$\beta=2$	"2007-06-03" "2008-09-18" "2008-11-05" "2009-08-12" "2011-01-04" "2011-06-30" "2011-12-21" "2013-05-20" "2013-10-21" "2015-02-04" "2015-03-19" "2017-07-05"	0.052	0.011	0.005	0.069	0.752	1.125

<부록 2> 비모수적 방법에 따른 구조적 변화 시점 결과

<표> E-divisive 방법에 따른 결과

	구조변화시점	Annualized Return	Average Drawdown	Drawdown Deviation	Annualized Std Dev	Annualized Sharpe (RF=0%)	Sortino Ratio (MAR = 0%)
m = 60	"2007-01-02" "2007-06-12" "2007-11-25" "2008-03-16" "2008-09-28" "2009-02-19" "2009-08-13" "2009-11-30" "2010-03-25" "2010-07-05" "2010-10-11" "2011-01-05" "2011-08-03" "2011-12-22" "2012-07-30" "2012-10-25" "2013-05-21" "2013-09-05" "2013-12-12" "2014-09-01" "2015-02-03" "2015-05-26" "2015-08-19" "2016-01-20" "2016-07-04" "2016-12-15"	0.056	0.011	0.005	0.066	0.842	1.257
m = 90	"2007-01-02" "2007-06-12" "2007-11-25" "2008-04-06" "2008-09-28" "2009-02-19" "2009-08-13" "2010-03-25" "2010-10-13" "2011-02-22" "2011-08-03" "2011-12-22" "2012-07-16" "2012-12-18" "2013-05-21" "2013-12-12" "2014-08-19" "2015-02-03" "2015-06-14" "2016-01-20" "2016-07-04" "2016-12-15" "2017-07-06"	0.041	0.01	0.004	0.065	0.631	0.938
m = 100	"2007-01-02" "2007-06-12" "2007-11-26" "2008-04-27" "2008-09-28" "2009-02-25" "2009-08-13" "2010-03-25" "2010-10-13" "2011-07-13" "2011-12-22" "2012-07-16" "2012-12-13" "2013-05-21" "2013-12-12" "2014-05-29" "2015-02-03" "2015-06-28" "2016-01-20" "2016-07-04" "2016-12-15" "2017-07-06"	0.042	0.01	0.004	0.064	0.651	0.976

<표> cp3o 방법에 따른 결과

	구조변화시점	Annualized Return	Average Drawdown	Drawdown Deviation	Annualized Std Dev	Annualized Sharpe (RF=0%)	Sortino Ratio (MAR = 0%)
m = 70	"2007-11-25" "2008-09-28" "2009-08-24" "2010-10-12" "2011-12-29" "2013-05-21" "2015-01-29" "2016-09-07"	0.052	0.01	0.005	0.064	0.813	1.213
m = 90	"2007-11-25" "2008-09-28" "2009-09-13" "2010-08-30" "2011-08-03" "2012-07-01" "2013-04-30" "2014-03-11" "2015-01-28" "2015-12-17" "2016-12-18"	0.046	0.011	0.005	0.066	0.743	1.111
m = 100	"2007-11-26" "2008-09-21" "2009-05-07" "2009-10-19" "2010-03-25" "2010-08-30" "2011-02-02" "2011-07-21" "2011-12-22" "2012-06-03" "2012-11-12" "2013-04-30" "2013-10-16" "2014-04-02" "2014-09-01" "2015-02-02" "2015-08-03" "2016-01-11" "2016-07-04" "2017-02-27"	0.048	0.011	0.005	0.065	0.729	1.091

< 약어 및 용어 >

영문용어, 약호	설명
APT	Arbitrage Pricing Theory/차익거래가격결정모형
Behavioral bias	행태적 편향
Behavioral finance	행동재무학
Binary segmentation	이분법
CAPM	Capital Asset Pricing Model/자본자산가격결정모형
CARA	Constant Absolute Risk Aversion
Coherent risk measure	일관된 리스크 측정치
Corner solution	코너해
Cost function	비용함수
CRRA	Constant Relative Risk Aversion
Cumulative Prospect theory	누적전망이론
Curse of multidimensionality	차원의 저주
Density estimation	밀도추정
Disposition effect	처분효과
Downside deviation	하방 편차
Downside frequency	하방 빈도
Downside magnitude	하방 정도
Downside risk	하방리스크
Dynamic programming	동적 프로그래밍
E-statistics	Energy statistics/에너지 통계량
Efficient Frontier	효율적 투자선
Endowment effect	보유효과
ES	Expected Shortfall= Conditional VaR, TailVaR
Estimation error	추정오차
ETF	Exchange Traded Fund/상장지수펀드
Euclidean Distance	유클리디언 거리
Factor model	요인모델
Goodness-of-fit	적합도 검정
Higher moment	왜도/첨도 등 고차적률
Implied equilibrium return	내재된 균형 수익률

Kurtosis	첨도
Linear penalty	선형 벌점
Loss aversion	손실 회피
MAR	Marginal Acceptance Rate/최소 허용 수준
mES	Modified ES / 수정된 ES
MPT	Mordern Portfolio Theory/ 현대 포트폴리오 이론
mVaR	Modified VaR/수정된 VaR
Optimal partitioning	최적 파티셔닝
Parametric/non-parametric	모수적/비모수적
Penalty function	벌점함수
Performance measure	성과지표
Permutation test	순열 검증
PMPT	Post Modern Portfolio Theory /포스트-현대 포트폴리오 이론
Rank effect	순위효과
Rank statistics	순서 통계량
Rebalancing	리밸런싱
Risk parity	리스크 패리티
Segment neighborhood	이웃세그먼트
Sequential data	순차데이터
Shrinkage estimators	축소추정치
Skewness	왜도/ negative skewness(음의 왜도)/ positive skewness(양의 왜도)
Statistical divergence	통계적 거리
Threshold	임계점
Trend chasing	추세추종
Utility function	기대효용 함수
VaR	Value-at-Risk