Opérations matricielles et recherche d'information

1 décembre 2020

—Lexicologie, terminologie, dictionnairique—

Créer et utiliser des matrices avec numpy

Un vecteur est une matrice de dimensions $1 \times n$, où une liste numpy : a = np.array([1,2,5])
Le i=ième élément du vecteur : a[i]
Accéder aux éléments avec indice $\geq i$ du vecteur : a[i :]
Accéder aux éléments avec indice $< i$ du vecteur : a[:i]
Une matrice (dimensions $n \times m$) est une liste de listes : b = np.array([[3,2,9],[1,5,1],[0,3,4]])
Accéder à la ligne i de la matrice : b[i] ou b[i, :]
Accéder à la colonne j de la matrice : b[:, j]
L'élément i, j de la matrice est celle de l'i -ième ligne, j -ième colonne : b[i, j]
Créer une matrice de dimensions 5×6 avec des valeurs zéro partout : c = np.zeros([5,6])
Transposée d'une matrice A : A_{ij} devient B_{ji}, soit on échange les lignes et les colonnes.

Multiplication de deux vecteurs :
avec le même nombre n de dimensions (*produit scalaire, dot product, inner product*) :

$$u = x \times y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 .... x_n y_n \tag{1}$$

Par exemple :

a = np.array([1, 0, 3])
b = np.array([0, 9, 9])

$$c = a \times b = 1 \times 0 + 0 \times 9 + 3 \times 9 = 27 \tag{2}$$

Multiplication vecteur-vecteur, vecteur-matrice, matrice-matrice dans numpy :

$$c = np.dot(a, b) \tag{3}$$

ou

$$c = np.matmul(a, b) \tag{4}$$

Multiplication matrice-vecteur :
la multiplication d'une matrice avec un vecteur donne un vecteur, dont le i -ième élément est le produit scalaire de la ligne i de la matrice et du vecteur :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\text{x}1 + 3\text{x}5 = 16 \\ 4\text{x}1 + 0\text{x}5 = 4 \\ 2\text{x}1 + 1\text{x}5 = 7 \end{bmatrix}$$

I. Multiplication de matrice avec un vecteur de colonne.

La matrice a les dimensions $m \times n$, et le vecteur $n \times 1$ (ou $1 \times n$), donc le nombre des colonnes de la matrice = la dimensionnalité du vecteur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Exercices I.

1. A la main : calculez le résultat.
   — vecteur - vecteur :

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} =$$

   — matrice - vecteur :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

2. Créez une matrice A 15×10 peuplée avec les nombres entiers naturels impairs en ordre croissant de gauche à droite et de haut en bas. (Tip : vous pouvez utiliser np.arange, puis np.reshape pour modifier les dimensions une fois que vous avez la suite des valeurs).

   — Sélectionnez colonnes avec indice 2-5, dans une matrice B.
   — Sélectionnez les lignes 0-4, dans une matrice C.
   — Créez un vecteur z de dimension 10, avec une valeur de 1 à l'indice 4, zéro ailleurs.
   — Calculez le produit scalaire de la première ligne de A avec z.
   — Calculez le produit de la matrice C avec z.

Multiplication matrice-matrice :
produits des matrice A de taille $m \times n$ et matrice B de taille $n \times p$ (nombre des colonnes dans A = nb des lignes dans B) :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \tag{5}$$

donc on multiplie les lignes de A avec les colonnes de B. Intuitivement : on prend les colonnes de la matrice B un par un et on fait le même calcul que dans I. multiplication de matrice avec un vecteur de colonne.

C_{ij} contient donc le produit des vecteurs de ***l'i-ième ligne de A et de la j-ième colonne de B***.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 32 & 18 \\ 144 & 50 \end{bmatrix}$$

Exercices II.

1. A la main : calculez le résultat.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 9 & 3 & 8 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

2. `https://github.com/fastai/numerical-linear-algebra/blob/master/README.md`
   — Le premier exercice sous "Matrix and Tensor Products" (AIDS)
   — Le deuxième exercice sous "Matrix and Tensor Products" (shopping)