

Opérations matricielles et recherche d'information

1 décembre 2020

—Lexicologie, terminologie, dictionnairique—

Créer et utiliser des matrices avec numpy

Un vecteur est une matrice de dimensions $1 \times n$, où une liste numpy : `a = np.array([1,2,5])`

Le i -ième élément du vecteur : `a[i]`

Accéder aux éléments avec indice $\geq i$ du vecteur : `a[i:]`

Accéder aux éléments avec indice $< i$ du vecteur : `a[:i]`

Une matrice (dimensions $n \times m$) est une liste de listes : `b = np.array([[3,2,9],[1,5,1],[0,3,4]])`

Accéder à la ligne i de la matrice : `b[i]` ou `b[i, :]`

Accéder à la colonne j de la matrice : `b[:, j]`

L'élément i, j de la matrice est celle de l' i -ième ligne, j -ième colonne : `b[i, j]`

Créer une matrice de dimensions 5×6 avec des valeurs zéro partout : `c = np.zeros([5,6])`

Transposée d'une matrice A : A_{ij} devient B_{ji} , soit on échange les lignes et les colonnes.

Multiplication de deux vecteurs :

avec le même nombre n de dimensions (*produit scalaire, dot product, inner product*) :

$$u = x \times y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (1)$$

Par exemple :

`a = np.array([1, 0, 3])`

`b = np.array([0, 9, 9])`

$$c = a \times b = 1 \times 0 + 0 \times 9 + 3 \times 9 = 27 \quad (2)$$

Multiplication vecteur-vecteur, vecteur-matrice, matrice-matrice dans numpy :

$$c = np.dot(a, b) \quad (3)$$

ou

$$c = np.matmul(a, b) \quad (4)$$

Multiplication matrice-vecteur :

la multiplication d'une matrice avec un vecteur donne un vecteur, dont le i -ième élément est le produit scalaire de la ligne i de la matrice et du vecteur :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 3 \times 5 = 16 \\ 4 \times 1 + 0 \times 5 = 4 \\ 2 \times 1 + 1 \times 5 = 7 \end{bmatrix}$$

I. Multiplication de matrice avec un vecteur de colonne.

La matrice a les dimensions $m \times n$, et le vecteur $n \times 1$ (ou $1 \times n$), donc le nombre des colonnes de la matrice = la dimensionnalité du vecteur.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Exercices I.

1. A la main : calculez le résultat.

— vecteur - vecteur :

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 & 8 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} =$$

— matrice - vecteur :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

2. Créez une matrice A 15×10 peuplée avec les nombres entiers naturels impairs en ordre croissant de gauche à droite et de haut en bas. (Tip : vous pouvez utiliser `np.arange`, puis `np.reshape` pour modifier les dimensions une fois que vous avez la suite des valeurs).

- Sélectionnez colonnes avec indice 2-5, dans une matrice B.
- Sélectionnez les lignes 0-4, dans une matrice C.
- Créez un vecteur z de dimension 15, avec une valeur de 1 à l'indice 4, zéro ailleurs.
- Calculez le produit scalaire de la première ligne de A avec z.
- Calculez le produit de la matrice C avec z.

Multiplication matrice-matrice :

produit des matrices A de taille $m \times n$ et matrice B de taille $n \times p$ (nombre des colonnes dans A = nb des lignes dans B) :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \quad (5)$$

donc on multiplie les lignes de A avec les colonnes de B. Intuitivement : on prend les colonnes de la matrice B un par un et on fait le même calcul que dans I. multiplication de matrice avec un vecteur de colonne.

C_{ij} contient donc le produit des vecteurs de *l'i-ème ligne de A et de la j-ème colonne de B*.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \\ 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 32 & 18 \\ 144 & 50 \end{bmatrix}$$

Exercices II.

1. A la main : calculez le résultat.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 9 & 3 & 8 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 9 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

2. <https://github.com/fastai/numerical-linear-algebra/blob/master/README.md>

- Le premier exercice sous "Matrix and Tensor Products" (AIDS)
- Le deuxième exercice sous "Matrix and Tensor Products" (shopping)