TD: Décomposition en série de Fourier

1 Position du problème

L'étude en détail du régime sinusoïdal en électricité, en mécanique,... est intéressante car pratiquement toute fonction$^{\diamond}$ peut se décomposer en une somme de sinusoïdes. Cette opération s'appelle la décomposition en série de Fourier.

Soit $s(t)$ un signal de période T. Par décomposition en série de Fourier donne:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n.\cos(n.\omega.t) + b_n.\sin(n.\omega.t)) \text{ avec } \omega = \frac{2.\pi}{T}.$$

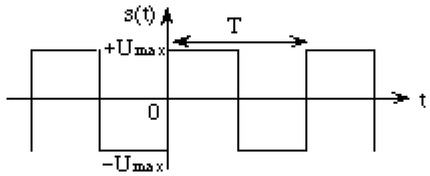
Les coefficients a_n et b_n sont donnés par les relations suivantes:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T s(t).\mathrm{d}t;\ a_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t).\cos(n.\omega.t).\mathrm{d}t \text{ pour } n \geq 1;\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T s(t).\sin(n.\omega.t).\mathrm{d}t.$$

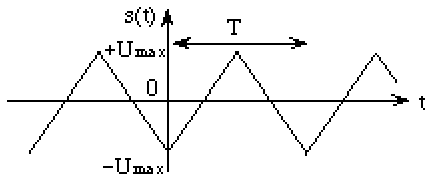
On peut également mettre la décomposition sous la forme suivante:

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n.\cos(n.\omega.t + \varphi_n) \text{ avec } c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ et } \tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}.$$

1. Démontrer qu'un signal carré, d'amplitude $\pm U_{max}$, de période T, se décompose en série de Fourier de la façon suivante: $s(t) = \dfrac{4.U_{max}}{\pi}.\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2.n+1).\omega.t)}{2.n+1}$.
   Tracer l'allure $s(t)$ lorsque la somme porte sur les 1, 2, 3,... premiers termes. Observer qu'au bout de simplement 6 termes $s(t)$ est déjà assez proche d'un signal carré.



2. Démontrer qu'un signal triangulaire, d'amplitude $\pm U_{max}$, de période T, se décompose en série de Fourier de la façon suivante: $s(t) = -\dfrac{8.U_{max}}{\pi^2}.\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2.n+1).\omega.t)}{(2.n+1)^2}$.
   Tracer l'allure $s(t)$ lorsque la somme porte sur les 1, 2, 3,... premiers termes. Observer qu'au bout de simplement 3 termes $s(t)$ est déjà assez proche d'un signal triangulaire.



Solution

1. *On considère la fonction créneau impaire:* $\begin{cases} f(t) = 1 & \textit{pour} \quad t \in [n.T, (n+\frac{1}{2}).T] \\ f(t) = 0 & \textit{pour} \quad t \in [(n+\frac{1}{2}).T, (n+1).T] \end{cases}$
   On a: $a_0 = \frac{1}{T}.\frac{T}{2} = \frac{1}{2}$
   $a_n = \frac{2}{T}.\int_{t=0}^{T/2}\cos(\omega_n.t).\mathrm{d}t = \frac{2}{T}.\left[\frac{\sin(\omega_n.t)}{\omega_n}\right]_0^{T/2} = \frac{2}{T}.\frac{\sin(n.\frac{2.\pi}{T}.\frac{T}{2})}{n.\frac{2.\pi}{T}} \Rightarrow a_n = 0$ *(cf.* $f(t) - a_0$*: impaire).*
   $b_n = \frac{2}{T}.\int_{t=0}^{T/2}\sin(\omega_n.t).\mathrm{d}t = \frac{2}{T}.\left[-\frac{\cos(\omega_n.t)}{\omega_n}\right]_0^{T/2} = \frac{2}{T}.\frac{-\cos(n.\frac{2.\pi}{T}.\frac{T}{2})+1}{n.\frac{2.\pi}{T}} \Rightarrow \begin{cases} n \textit{ pair} & b_n = 0 \\ n \textit{ impair} & b_n = \frac{2}{T}.\frac{T}{n.2.\pi}.2 = \frac{2}{n.\pi} \end{cases}.$
   D'où: $f(t) = \frac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2.n+1).\pi}\sin((2.n+1).\frac{2.\pi}{T}.t).$

$^{\diamond}$ Toute fonction périodique continûment dérivable sauf, éventuellement, en un nombre fini de points par période.

On obtient le résultat demandé en symétrisant le signal (on impose $a_0 = 0$) et en multipliant par l'amplitude crête-à-crête $2.U_{max}$; d'où: $s(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4.U_{max}}{(2.n+1).\pi} \sin((2.n+1).\frac{2.\pi}{T}.t)$

2. *On considère la fonction triangle paire:* $\begin{cases} f(t) = \frac{t}{T/2} & pour \quad t \in [n.T, (n+\frac{1}{2}).T] \\ f(t) = 2 - \frac{t}{T/2} & pour \quad t \in [(n+\frac{1}{2}).T, (n+1).T] \end{cases}$.

$a_0 = \frac{1}{T}.\left\{\int_{t=0}^{T/2} \frac{t}{T/2}.\mathrm{d}t + \int_{t=T/2}^{T} (2 - \frac{t}{T/2}).\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{T}.\left\{[\frac{t^2/2}{T/2}]_{t=0}^{T/2} + [2.t - \frac{t^2/2}{T/2})]_{t=T/2}^{T}\right\} = \frac{1}{T}.(\frac{T}{4} + 2.\frac{T}{2} - \frac{T^2 - T^2/4}{2.T/2})$

$a_0 = \frac{1}{T}.(\frac{5.T}{4} - \frac{3.T^2/4}{T}) = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

$b_n = 0$ *(cf. $f(t)$: paire).*

$a_n = \frac{2}{T}.\left\{\int_{t=0}^{T/2} \frac{t}{T/2}.\cos(\omega_n.t).\mathrm{d}t + \int_{t=T/2}^{T} (2 - \frac{t}{T/2}).\cos(\omega_n.t).\mathrm{d}t\right\}$

En intégrant par parties: $\begin{cases} f = t \ ou \ 2 - 2.t/T & f' = 1 \ ou \ -2/T \\ g' = \cos(\omega_n.t) & g = \frac{\sin(\omega_n.t)}{\omega_n} \end{cases}$ *, on a:*

$a_n = \frac{2}{T}.\left\{\frac{2}{T}.\left(\left[t.\frac{\sin(\omega_n.t)}{\omega_n}\right]_{t=0}^{T/2} - \int_{t=0}^{T/2} \frac{\sin(\omega_n.t)}{\omega_n}.\mathrm{d}t\right) + \left[(2 - \frac{2.t}{T}).\frac{\sin(\omega_n.t)}{\omega_n}\right]_{t=T/2}^{T} + \int_{t=T/2}^{T} \frac{2}{T}.\frac{\sin(\omega_n.t)}{\omega_n}.\mathrm{d}t\right\}$

$a_n = \frac{2}{T}.\left\{\frac{2}{T}.\left(\frac{T}{2} \times 0 + \left[\frac{\cos(\omega_n.t)}{\omega_n^2}\right]_{t=0}^{T/2}\right) + (2 - \frac{2.T/2}{T}) \times 0 - \frac{2}{T}.\left[\frac{\cos(\omega_n.t)}{\omega_n^2}\right]_{t=T/2}^{T}\right\}$

$a_n = \frac{2}{T}.\left\{\frac{2}{T}.\frac{\cos(n.\frac{2.\pi}{T}.\frac{T}{2}) - 1}{\omega_n^2} - \frac{2}{T}.\frac{\cos(2.n.\pi) - \cos(n.\frac{2.\pi}{T}.\frac{T}{2})}{\omega_n^2}\right\}$

$a_n = \frac{4}{T^2.\omega_n^2}.(2.\cos(n.\pi) - \cos(2.n.\pi) - 1) \Rightarrow \begin{cases} n \ pair & a_n = 0 \\ n \ impair & a_n = -\frac{4}{\omega_n^2}.\frac{4}{T^2} = -\frac{4}{n^2.\pi^2} \end{cases}$.

D'où: $f(t) = \frac{1}{2} - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2.n+1)^2.\pi^2}.\cos((2.n+1).\frac{2.\pi}{T}.t)$.

On obtient le résultat demandé en symétrisant le signal (on impose $a_0 = 0$) et en multipliant par l'amplitude crête-à-crête $2.U_{max}$; d'où: $s(t) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8.U_{max}}{(2.n+1)^2.\pi^2}.\cos((2.n+1).\frac{2.\pi}{T}.t)$.

2 Code avec MATHEMATICA

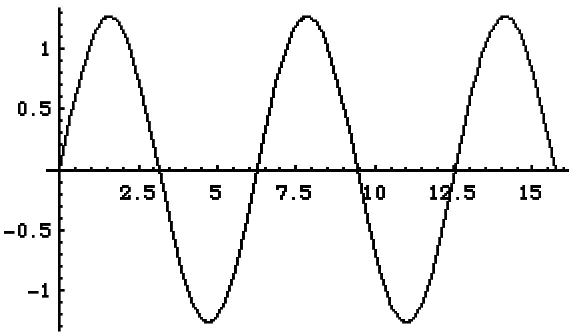
DÉCOMPOSITION EN SÉRIE DE FOURIER

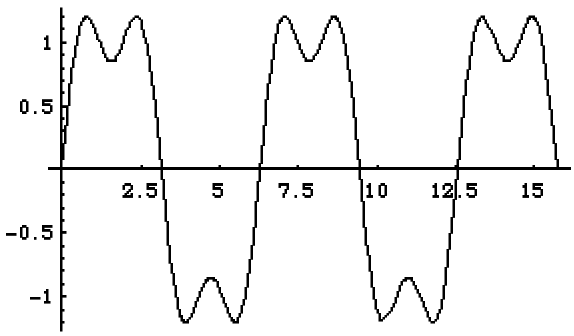
Signal Carré

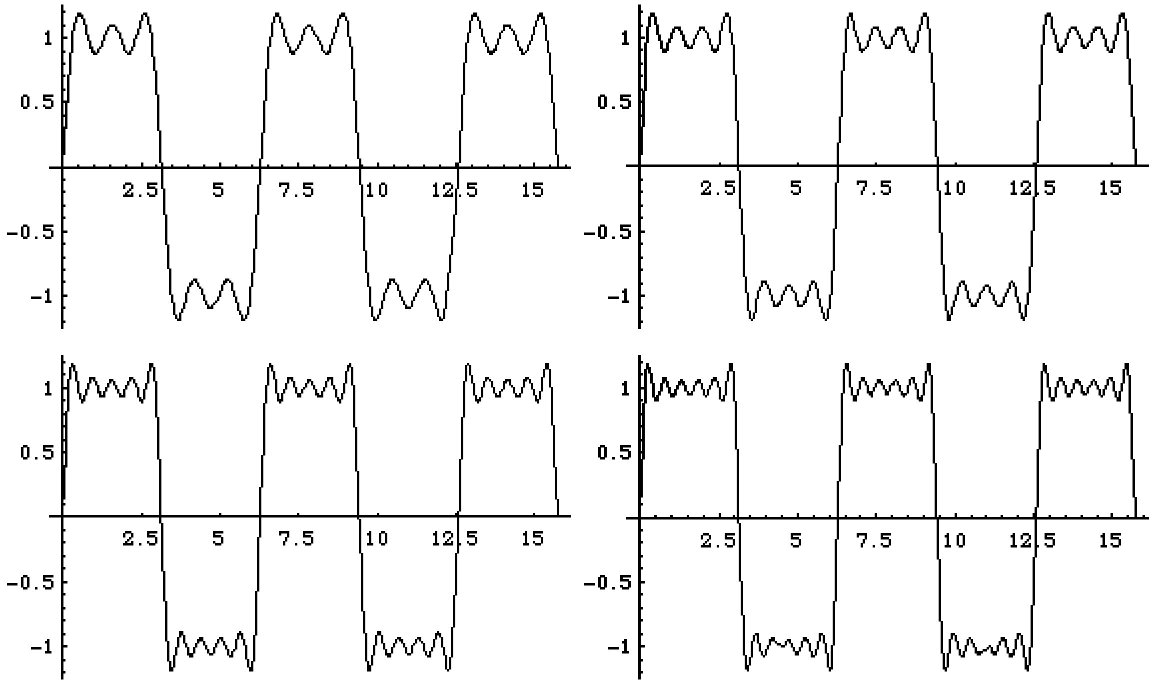
```
In[1]:= Umax=1;omega=1;s[t_]=.;t=.;

Carre[nmax_]:={ tmp=0; For[n=0,n<=nmax,n++, tmp=tmp+Sin[(2 n +1) omega t]/(2 n +1)];
s[t_]:=(4.Umax/N[Pi])*tmp; Plot[s[t],{t,0,5 Pi/omega}]};

In[3]:= For[i=0,i<=5,i++,Carre[i]]
```





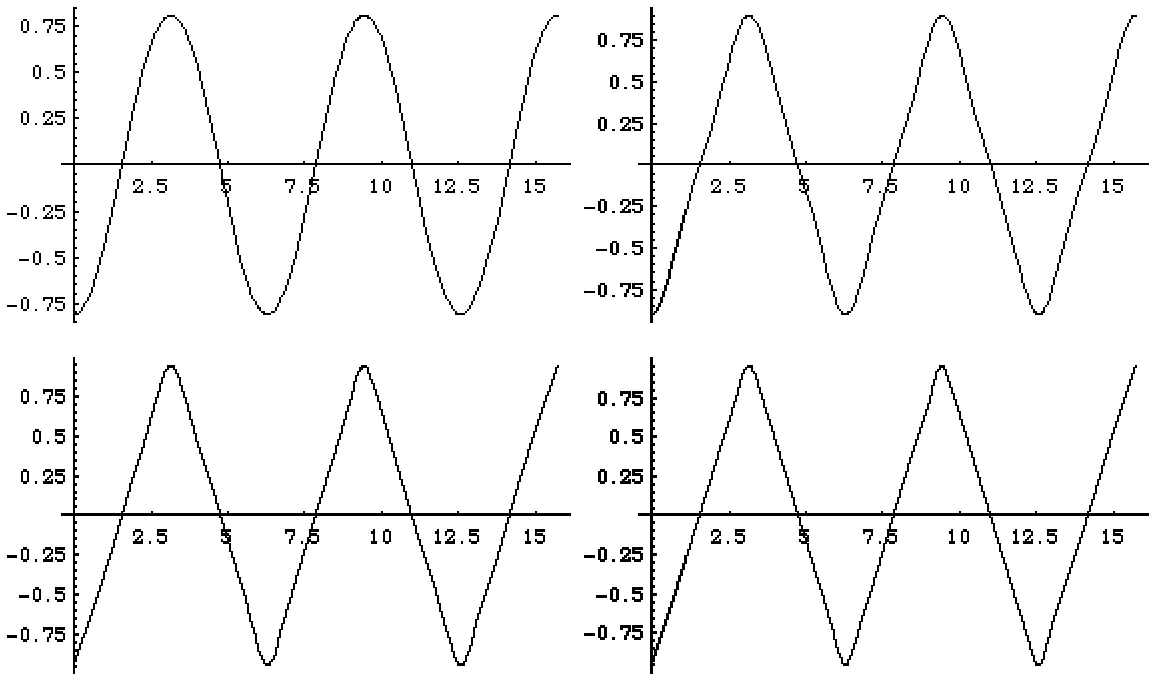


Signal Triangulaire

```
In[4]:= Umax=1;omega=1;s[t_]=.;t=.;

Triangle[nmax_]:={ tmp=0; For[n=0,n<=nmax,n++,tmp=tmp+Cos[(2 n +1) omega t]/(2 n +1)^2];
s[t_]:=-(8 Umax/N[Pi]^2)*tmp; Plot[s[t],{t,0,5 Pi/omega}]};

In[6]:= For[i=0,i<=3,i++,Triangle[i]]
```



3 Code avec Python

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```