Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa

Grzegorz Kończak, Małgorzata Złotoś

2024-12-27

Spis treści

List of Figures

List of Tables

Tylko notatki

To do wyrzucenia

To jest książka o rachunku prawdopodobieństwa

Good (?) I.J. Good Aczel str. 65

Por. Krysicki (?) a także Hellwig (?)

Bernstein et al. (?)

Good (?)

(?)

Jędrzejczak & Pekasiewicz (?)

To Trzpiot & Kończak (?) zadania

Szymańska (?)

Trzpiot (?)

Kucharski (?)

Piasecki & Tomasik (?)

Małecka (?)

Ulman & Ćwiek (?)

(?)

Ganczarek-Gamrot (?)

Także Kończak (?)

Por. Jakubowski & Sztencel (?)

Bertsekas & Tsitsiklis (?)

Billingsley (?)

Capiński & Zastawniak (?)

Kinney (?)

Covington (**?**)

Suhov & Kelbert (**?**)

Feller (**?**)

Thas (**?**)

Definicja jest następująca (**?**):

Zeliaś et al. (**?**)

Steinhaus & Kobyliński (**?**)

Plucińska & Pluciński (**?**)

Krzyśko (**?**)

Simons (**?**)

Bernstein (**?**)

Kończak (**?**)

Sobczyk (**?**)

Kowgier (**?**)

Feller (**?**)

Rao (**?**)

Wywiał (**?**)

Jasiulewicz & Kordecki (**?**)

Bratijczuk & Chydziński (**?**)

Wieczorkowski & Zieliński (**?**)

Czaplicki (**?**)

Wawrzynek (**?**)

Snopkowski (**?**)

Plucińska & Pluciński (**?**)

Kończak (**?**)

Aczel (**?**)

Iwasiewicz & Paszek (**?**)

Kończak (**?**)

Przykłady call-out

Informacje

Wprowadzenie ważnych pojęć.

Przykład numer

Tu treść przykładu

Rozwiązanie

Stop

Zdarzenie elementarne - callout-note

Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

Zdarzenie elementarne - callout-tip

Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

Zdarzenie elementarne - callout-caution

Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

Zdarzenie elementarne - callout-important

Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

Zdarzenie elementarne - callout-warning

Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

Zdarzenie elementarne - collapse="false"

Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

> Zdarzenie elementarne collapse="true" apperance="simple"
>
> Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

> Zdarzenie elementarne - "warning" collapse="true" apperance="minimal"
>
> Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

> Definicja
>
> ## Zdarzenie elementarne - callout-warning collapse="false" title="Definicja"
>
> Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

> Zdarzenie elementarne - apperance="simple"
>
> Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

> Zdarzenie elementarne - apperance="minimal"
>
> Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

> Zdarzenie elementarne - icon="false"
>
> Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

> Tip **??**. Cross-Referencing a Tip - #tip-example1 .callout-tip
>
> Add an ID starting with `#tip-` to reference a tip.

> Tip **??**. Cross-Referencing a Tip-2
>
> Add an ID starting with `#tip-example1` to reference a tip.

To próba odwołania do Tip **??**

Zadania

Pytania problemowe

Prawda czy fałsz?

Pytania testowe

Wprowadzenie

P.S. Laplace "Theorie analytique des probabilities" (za: Rao 1997, s. 83) Laplace

Godne uwagi jest to, że nauka, która zaczęłą się od rozważania gier losowych, powinna stać się najważniejszą dziedziną ludzkiej wiedzy.

Amir Aczel (**?**, XIV) podkreśla, że umiejętność formułowania precyzyjnych prognoz dotyczących przebiegu przyszłych zdarzeń i związana z tym możliwość dokonywania wyboru pomiędzy różnymi alernatywami jest najistotniejszym aspektem życia współczesnych społeczeństw. To przewidywanie nie byłoby możliwe bez wielkiego postępu w zakresie teorii prawdopodobieństwa w ostatnim stuleciu.

Chociaż przyjmuje się, że początki rozważań nad pojęciem prawdopodobieństwa miały miejsce w XVII wieku, to jednak znacznie wcześniej ludzie podejmowali codzienne decyzje w warunkach niepewności, w jakiejś mierze nieświadomie oceniając szanse realizacji różnych zdarzeń. Znaczenie tej nauki podkreśla statystyk Irving John Good (**?**), który sformułował myśl, że "*teoria prawdopodobieństwa jest znacznie starsza niż rodzaj ludzki*" (za Aczel (**?**)). Ocena niepewności (prawdopodobieństwa) łączy w sobie ideę uczenia się na podstawie doświadczenia oraz ideę rozumowania indukcyjnego. Większość aktualnych zastosowań teorii prawdopodobieństwa nie ma nic wspólnego bezpośrednio z grami losowymi, to jednak gry losowe są najlepszymi przykładami ilustrującymi pojęcie prawdopodobieństwa oraz sposoby jego obliczania (Aczel (**?**)).

W książce przedstawiono podstawy rachunku prawdopodobieństwa z przeznaczeniem dla wykorzystania na kierunkach I stopnia lub II stopnia przez studentów kierunków ilościowych.

W pierwszym rozdziale w sposób zwięzły przedstawiono wybrane fakty z rozwoju metod rachunku prawdopodobieństwa. Poczynając od najdawniejszych czasów, kiedy kwestię losowości wiązano z bóstwami, poprzez pierwsze próby sformalizowania tych zagadnień, zwykle związane z grami hazardowymi, aż do wskazania kluczowych osiągnięć rozwoju tej teorii i najważniejszych naukowców.

W rozdziale drugim omówiono zagadnienia kombinatoryki. W szczególności uwzględniono kombinacje, wariacje bez powtórzeń i z powtórzeniami oraz permutacje. Przedstawiono charakterystykę tych pojęć oraz zamieszczono przykłady wykorzystania podanych wzorów.

W kolejnym rozdziale scharakteryzowano podstawowe zagadnienia niezbędne do wprowadzenia pojęcia prawdopodobieństwa jak: doświadczenie losowe, zdarzenie losowe, zdarzenie elementarne i przestrzeń zdarzeń elementarnych. W dalszej części rozdziału przedstawiono wybrane definicje prawdopodobieństwa, w tym definicje klasyczną oraz aksjomatyczną.

W rozdziale czwartym przedstawiono pojęcie zmiennej losowej. Scharakteryzowano podstawowe własności zmiennych losowych skokowych i ciągłych. Zaprezentowano pojęcia rozkładu prawdopodobieństwa, gęstości i dystrybuanty, wartości oczekiwanej oraz wariancji zmiennej losowej.

W rozdziale piątym zaprezentowano wybrane rozkłady zmiennych losowych skokowych. Uwzględniono zmienne losowe o rozkładach dwupunktowym, dwumianowym oraz Poissona. Dla omawianych rozkładów przedstawiono ich najważniejsze charakterystyki.

W rozdziale szóstym zaprezentowano wybrane rozkłady zmiennych losowych ciągłych. Uwzględniono m.in. zmienne losowe o rozkładach jednostajnym, trójkatnym, normalnym, t Studenta oraz chi-kwadrat. Dla tych rozkładów przedstawiono ich najważniejsze charakterystyki.

W rozdziale siódmym przedstawiono charakterystykę wybranych rozkładów wielowymiarowych skokowych i ciągłych. Szczególną uwagę zwrócono na rozkłady dwuwymiarowe, a w szczególności na dwuwymiarowy rozkład normalny.

W rozdziale ósmym przedstawiono wybrane zagadnienia teoretyczne. Omówiono funkcje zmiennych losowych, funkcje tworzące momenty zmiennej losowej oraz funkcje charakterystyczne, a także wybrane twierdzenia graniczne.

W rozdziałach od 2-7 zamieszczono przykłady z rozwiązaniami a także zadania do sdamodzielnego rozwiązania i pytania różnego typu pozwalające Czytelnikowi zweryfikować swoją wiedzę.

Dla uzupełnienia informacji można polecić książki:

- teoria Hellwig (**?**), Aczel (**?**), Bratijczuk & Chydziński (**?**), Krzyśko (**?**), Jakubowski & Sztencel (**?**), Snopkowski (**?**), Kończak (**?**)
- zadania Plucińska & Pluciński (**?**), Jasiulewicz & Kordecki (**?**) , Krysicki (**?**), Trzpiot & Kończak (**?**)
- z zakresu popularnonaukowego: Rao (**?**), Bernstein et al. (**?**), Steinhaus & Kobyliński (**?**),

We wszystkich rozdziałach podano także dane o wartościowych źródłach internetowych informacji z danej tematyki.

W książce przyjęto pewne oznaczenia wybranych fragmentów, a schemat tych oznaczeń zamieszczono ponizej.

Określenia pojęć, objaśnienia lub definicje

To jest określenie pojęcia (definicja???) lub objaśnienie

Przykłady (treść przykładu i rozwiązanie)

Przykład numer

Tu jest treść przykładu

Rozwiązanie

Tu jest rozwiązanie przykładu.

***

To jest informacja o końcu przykładu.

Twierdzenia i wnioski

Twierdzenia i wnioski

To jest twierdzenie lub wniosek

Dla zadań i pytań zamieszczonych na zakończenie rozdziałów 2-7 przyjęto następujace oznaczenia.

Zadania

Tu zamieszczono zadania do materiału z rozdziału

Pytania problemowe

Tu zamieszczono pytania problemowe do materiału z rozdziału

Prawda czy fałsz?

Tu zamieszczono pytania typu “Tak / Nie” do materiału z rozdziału

Pytania testowe

Tu zamieszczono pytania testowe z jedną poprawną odpowiedzią do materiału z rozdziału

1 Rys historyczny

Mitologia grecka dla wyjaśnienia początku wszechrzeczy odwołuje się do gier losowych, a więc w jakiejś mierze do zagadnień związanych z prawdopodobieństwem. Trzej bracia rzucali kośćmi o władzę nad wszechświatem: Zeus wygrał niebo, Posejdon otrzymał morza, a przegrany Hades zstapił do piekieł jako władca podziemnego świata (**?**).

Już w starożytności ludzie pasjonowali się grami losowymi. Gry takie były popularne w różnych kulturach. W starożytnym Egipcie, Grecji i Rzymie znane były gry w kości a także inne gry hazardowe. Malowidła w egipskich grobowcach, datujące się na 3500 rok przed naszą erą, przedstawiają partie gry w kości (**?**). Najstarsze ślady gier w kości znaleziono w wielu miejscach na świecie m.in. Iranie, archipelagu szkockim i Indiach Muduko.

W British Museum znajdują się wykorzystywane do gier żetony i tablica sumeryjska, datowane na ok. 4 tys. lat p.n.e. Z tamtych czasów pochodzi też gra hazardowa w astragale. Były to kamyki mające 4 strony i każdą z odpowiednią ilością oczek. Wykorzystywano je nie tylko do gier, ale i do wróżb, a nawet do podejmowania decyzji (Nowicka 2009).

W Egipcie nałogowi gracze byli karani obowiązkowymi pracami, ale jednocześnie sami faraonowie nie mieli oporów przed rozgrywaniem partii, a niekiedy wykorzystywali do tego celu sfałszowane kostki (**?**). Sceny uwidaczniające grających młodzieńców zostały ujęte również na starożytnych greckich wazach.

W Azji ze starożytnych form wróżbiarstwa rozwinęły się gry karciane. Gry takie w Europie zyskały znaczną popularność dopiero po wynalezieniu druku. Uczestnicy gier próbowali przewidzieć wyniki na podstawie intuicji i obserwacji, ale nie było wówczas formalnych narzędzi matematycznych do analizy tych zjawisk.

Proste określenia prawdopodobieństwa próbowano formułować jeszcze przed naszą erą. Arystoteles (około 300 p.n.e.) powiedział, że "prawdopodobne jest to, co zwykle się zdarza", a odnosząc się do rzutów kośćmi wyróżniał "rzut łatwiejszy" i "rzut trudniejszy". W starożytnym Rzymie najlepszy rzut określano mianem "venus", a najogorszy był "rzutem psa" (Imperium Romanum). Cyceron (ok. 60 r. p.n.e.) opisał prawdopodobieństwo jako "przewodnik życia" (**?**).

Żołnierze Poncjusza Piłata rzucali losy o szatę Jezusa Chrystusa podczas Jego męki na krzyżu. "Nie rozdzierajmy jej, ale rzućmy o nią losy, do kogo ma należeć" (*Biblia Tysiąclecia* (**?**), J 19.23), a z kolei w Ewangelii Łukasza jest napisane „Potem rozdzielili między siebie Jego szaty, rzucając losy" (*Biblia Tysiąclecia* (**?**) Łk. 23.34).

W tym czasie cesarz rzymski Klaudiusz (10 p.n.e. - 54) miał specjalnie dostosowany w powozie stół do gry w kości aby móc grać podczas podróży. Napisał nawet książkę na temat zasad gry w kości Klaudiusz.

Nieco ponad 100 lat później rzymski cesarz Marek Aureliusz (121-180) tak pasjonował się grami hazardowymi, że zawsze w podróżach towarzyszył mu krupier. Również setki lat później poważne osobistosci świata politycznego były zafascynowane grami losowymi. Tak tez było np. w przypadku Jerzego Waszyngtona (1732-1799), gdzie gry hazardowe często były uprawiane w jego namiocie podczas rewolucji amerykańskiej (**?**).

Hinduska epopeja *Mahabharata* napisana przed 400 r. zawiera historię króla Rtuparny , który przekazuje swoją wiedzę człowiekowi imieniem Nala, który jest opanowany namiętnością do gry w kości. Rtuparna jest opisywany jako człowiek zdolny oszacować liczbę liści na drzewie na podstawie znajomosci liczby liści na przypadkowo wybranej gałęzi (**?**). Dopiero 16 wieków później zostanie sformalizowana teoria wnioskowania statystycznego o charakterystykach populacji na podstawie prób.

Pewną wiedzę o prawdopodobieństwie wykazywali też rabini działający w okresie, który nastąpił po zniszczeniu drugiej świątyni jerozolimskiej (rok 587). W Talmudzie stosowane jest rozumowanie o charakterze probabilistycznym przy rozważaniu kwestii związanych z dietetyką, podatkami, ustaleniem ojcostwa oraz cudzołóstwem (**?**).

Za panowania Henryka II (1154-1189) w Mennicy Królewskiej w Londynie ustanowiono tradycję ceremonii “Trial of the Pyx”. Słowo “Pyx” w staroagielskim oznacza “skrzynię” lub “puszkę” (**?**). Ceremonia miała charakter religijny i była związana z oceną jakości złotych monet wybijanych w mennicy królewskiej. Każdego dnia spośród wykonanych w mennicy monet wybierano losowo jedną (próbkowanie) ze złota (niekiedy były to srebrne monety) i wrzucano ją do skrzyni. Co trzy lub cztery lata skrzynia była otwierana, liczono monety i wyznaczano ich łączną wagę. Otrzymaną wagę porównywano z ustalonym wzorcem po uwzglednieniu liczby monet i pewnego zakresu tolerancji. Cała ceremonia pozwalała królowi sprawować kontrolę nad wykorzystaniem królewskiego złota. Jeśli monety były zbyt ciężkie, to świadczyło to o marnowaniu złota z królewskiego skarbca. Jeśli monety były zbyt lekkie, to waluta traciła na wartości, a ktoś z obsługi mógł czerpać zyski z zaoszczędzonego złota. Jeśli test zakończył sie pomyślnie, to wydawano ucztę. W prciwnym przypadku mistrza mennicy mogło czekać więzienie, a nawet śmierć. Przez wiele lat mistrzem mennicy był wybitny naukowiec Izaak Newton (1699-1727). W tym czasie jeden z testów nie zakończył się pomyślnie, ale nie były to już czasy, w których stosowano tak srogie kary jak we wczesniejszych wiekach (**?**). Ceremonia “Trial of the Pyx” jest imponujacym przykładem zastosowania metod probabilistycznych i statystyki na setki lat przed formalnym opracowaniem zasad rachunku prawdopodobieństwa. W latach 20. XX wieku Walter A. Shewhart wprowadził karty kontrolne do monitorowania jakości procesów produkcyjnych (**?**; **?**), których idea jest podobna do opisywanego rozwiązania.

Dopiero w XVII wieku, kiedy hazard stał się popularny w Europie, zaczęto systematycznie badać i opisywać prawdopodobieństwo, co zapoczątkowało rozwój tej dziedziny matematyki.

To niezwykłe, że gry hazardowe stały za początkiem nauki, która z czasem stała się kluczowa w rozwoju wielu dyscyplin naukowych.

W 1499 roku franciszkanin Tomasz Murner zajął się związkiem kart z matematyką. Wykorzystując karty opracował prawa logiki. Galileusz (1564–1642) napisał traktat "*Rozważania nad grą w kości*". Jednak pierwszym dojrzałym od strony matematycznej dziełem dotyczącym gry w kosci jest praca "*O rachubach gry w kosci*" CH. Huygensa (1629–1695) pochodząca z 1657 roku. Pokazującym specyficzne pojęcia i metody tej nowej gałęzi matematyki. (Nowicka 2009).

Faktyczny przełom w podejściu do określenia pojęcia prawdopodobieństwa nastąpił w drugiej połowie XVII wieku, a jego inicjatorem był francuski szlachcic i hazardzista, Antoine Gombaud (1607-1684), znany jako Chevalier de Méré. Był on z zamiłowania matematykiem, ale również namiętnym hazardzistą (**?**[XV]). Posiadał niezwykłą intuicję do właściwego obstawiania wyników w grach losowych. Obstawiał często właściwie wyniki, które jego przciwnicy uważali za czysto losowe z równymi prawdopodobieństwami wystąpienia. De Mere wielokrotnie obstawiał, że w czterech rzutach sześcienną kostką do gry wypadnie przynajmniej jedna "6". Przez ówczesnych graczy takie zdarzenie było traktowane jako jednakowo prawdopodobne ze zdarzeniem przeciwnym. Jednak w rzeczywistości prawdopodobieństwo takiego zdarzenia wynosi około 0,5177, a więc jest nieco większe od 0,5 (**?**). Przy dużej liczbie gier, de Méré nieco częściej wygrywał niż przegrywał i w długiej perspektywie pomnażał swój kapitał. De Méré stosował także inną strategię, która polegała na obstawianiu, że w serii 24 rzutów dwiemia sześciennymi kostkami zdarzy się wystapienie dwóch "6". Rozumowanie było następujące: obstawienie wyrzucenia "6" w czterech rzutach kostką było korzystne, to jeżeli dołoży się dodatkową kostkę (6 dodatkowych wariantów, czyli 6 razy 4 to 24) to przy 24 rzutach dwiema kostkami korzystne będzie obstawienie wystąpienia dwóch "6". Jednak stosując niedostępny wówczas aparat obliczeniowy można łatwo wykazać, że prawdopodobieństwo wystąpienia przynajmniej raz dwóch "6" w 24 rzutach dwiema kostkami wynosi około 0,4914, a więc nieco mniej niż 0,5. Wielokrotnie obstawiając taki wariant de Méré poniósł znaczne straty finansowe. Wątpliwości związane z opisanym zdarzeniem skłoniły go do zwrócenia się z zapytaniem listownie do Błażeja Pascala (1623 – 1662). Innym zagadnieniem, które de Méré poruszył w korespondencji z Pascalem, był problem podziału wygranej w niedokończonej grze w kości. Wcześniej to zagadnienie rozważał już Luca Paccioli (1445-1517), matematyk i franciszkanin uważany za ojca rachunkowosci (**?**). Te pytania zapoczątkowały korespondencję między Pascalem a Pierre'em de Fermat (1601-1661), podczas której obaj matematycy analizowali różne problemy związane z grami losowymi. Ich wymiana listów doprowadziła do powstania podstawowych zasad teorii prawdopodobieństwa. Pascal i Fermat byli pierwszymi, którzy sformułowali zasady kombinatoryki i zaczęli badać zdarzenia losowe w sposób systematyczny, co dało początek nowej dziedzinie matematyki. Pascal i Fermat nigdy się nie spotkali, ale dzięki intensywnej wymianie listów, opracowali metody obliczania prawdopodobieństwa, które stały się fundamentem dla dalszych badań w tej dziedzinie.

Tak powoli rodziły się podstawy rachuneku prawdopodobieństwa w znanej nam formie. Dla dalszego rozwoju w kolejnych dziesięciolecia niezbędne było społeczne zaakceptowanie idei, że przyszłość nie jest całkowicie zdeterminowana i że można ją przewidywać za pomocą liczb. To pokazuje, że rachunek prawdopodobieństwa nie tylko rozwinął matematykę, ale także wpłynął na sposób postrzegania świata (**?**[s. XVII ???]).

W 1703 roku Gottfried von Leibniz (1646 - 1716) w liście do szwajcarskiego matematyka Jakuba Bernoulliego (1654 - 1705) napisał, że "*przyroda ustanawia prawidłowości zdarzeń, lecz stosują się one tylko do większości przypadków*" (**?**[s. XVII]). To wskazanie specyfiki losowości zainspirowało Bernolliego do poszukiwań, a efektem rozważań była m.in. pierwsza książka o zagadnieniach rachunku prawdopodobieństwa pt. "Ars Conjectandi" ("Sztuka przewidywania"). W swojej pracy opublikowanej pośmiertnie w 1713 roku w Bazylei Bernoulli wykazał, że przy dużej liczbie prób, średnia wyników zbliża się do pewnej ustalonej wartości. Twierdzenie udowodnione przez Bernoulliego nosi nazwę prawa wielkich liczb Bernoulliego (**?**). To odkrycie miało ogromne znaczenie dla teorii prawdopodobieństwa i statystyki, ponieważ umożliwiło bardziej precyzyjne przewidywanie wyników w długim okresie czasu. Bernoulli położył również podwaliny pod rozwój teorii prawdopodobieństwa jako nauki matematycznej, a jego prace były kontynuowane przez innych badaczy w XVIII i XIX wieku. Jego badania kontynuowali inni matematycy, w tym Abraham de Moivre (1667-1754), który wprowadził pojęcie rozkładu normalnego oraz Karol Gauss (1777-1855), który zajmował się teorią błędów. Prawo wielkich liczb zostało wzmocnione między innymi przez rosyjskiego matematyka Pafnutija Czebyszewa (1821-1894), a także jego uczniów Aandrieja Markowa (1856-1922) i Aleksandra Lapunowa (1857-1918).

Niespełna sto lat od czasu, gdy Pascal i Fermat podjęli wspólne badania nad obliczaniem prawdopodobieństw pastor Thomas Bayes (ok. 1702 - 1761) wskazał na możliwość podejmowania decyzji wykorzystując metodę łączenia nowych i wcześniejszych informacji (**?**[XVII]). Obecnie wzór Bayes'a znajduje szerokie zastosowania w ekonomii, finansach, medycynie, kryminalistyce, naukach przyrodniczych i wielu innych dziedzinach.

W 1812 roku P.S. Laplace (1749-1827) sformułował tzw. klasyczną definicję prawdopodobieństwa zdarzenia losowego, jako miarę sznsy wystąpienia tego zdarzenia (**?**). Prawdopodobieństwo zdarzenia określił on jako stosunek liczby zdarzeń sprzyjajacych pojawieniu się tego zdarzenia do ogólnej liczby zdarzeń jednakowo możliwych. Definicja ta ma jednak wiele wad. Można ją stosować tylko, gdy rozpatrywane zbiory zdarzeń są skończone. Poważną wadą formalną jest fakt, iż jest to definicja tautologiczna, ponieważ przy formułowaniu pojęcia prawdopodobieństwa odwołuje się do określenia jednakowo prawdopodobnych zdarzeń.

O ile pierwsza książka z rachunku prawdopodobieństwa została wydana w roku 1713, to pierwsza książka o tej tematyce w Polsce ukazała się w roku 1790, a więc krótko przed całkowitą utratą niepodległości. Autorem książki "*Rachunek zdarzeń i przypadków losu*" był Jan Śniadecki (1756-1830). Jan śniadecki.

S.D. Poisson (1781-1840)

daty (Kowgier (**?**))

W XIX wieku rachunek prawdopodobieństwa znalazł szereg zastosowań w ekonomii, medycynie, genetyce i w wielu innych dyscyplinach nauki. Jednak cały czas nie była to sformalizowana matematycznie teoria. W 1900 roku David Hilbert (1862-1943) postawił problem zmatematyzowania teorii prawdopodobieństwa (?). Chciał, aby teoria prawdopodobieństwa wywodziła się, tak jak geometria, z układu pojęć pierwotnych i aksjomatów.

W XX wieku Andriej Kołmogorow (1903-1987) doprowadził do ważnego przełomu w teorii prawdopodobieństwa wprowadzając aksjomatyczny system, który ujednolicił i sformalizował tę dziedzinę. Kołmogorow zdefiniował prawdopodobieństwo jako miarę przypisaną zdarzeniom losowym, spełniającą określone aksjomaty. Wprowadzony w 1933 roku w pracy „Podstawowe pojęcia teorii prawdopodobieństwa” aksjomatyczny model jest podstawą współczesnych badań i praktyki w zakresie analizy ryzyka, teorii gier oraz statystyki. Jego podejście umożliwiło rozwój nowoczesnej teorii prawdopodobieństwa i jej zastosowanie w różnych dziedzinach nauki, takich jak fizyka, ekonomia, biologia i informatyka. Dzięki wprowadzeniu definicji aksjomatycznej rachunek prawdopodobieństwa stał się integralną częścią matematyki i narzędziem niezbędnym w analizie zjawisk losowych.

2 Elementy kombinatoryki

Kombinatoryka to dział matematyki, którego przedmiotem jest obliczanie liczby zbiorów, w jakie można łączyć, w określony sposób, przedmioty należące do danego zbioru skończonego (**?**).

W tym rozdziale zostaną omówione kombinacje, wariacje bez powtórzeń, wariacje z powtórzeniami oraz permutacje. W przedstawionych w niniejszym rozdziale wzorach wykorzystywany będzie symbol (!) silni. Silnia jest obliczana następujaco:

$$n! = 1 \cdot 2 \ldots \cdot n, \text{dla } n \geq 1 \tag{2.1}$$

Dodatkowo określa się, że

$$0! = 1$$

Zagadnienia omawiane w tym rozdziale są szeroko opisane w literaturze. Czytelnik może poszerzyć swą wiedzę odwołując sie do np. Kowgier (**?**), Bratijczuk & Chydziński (**?**), Kałuszka (**?**), Hellwig (**?**). Po przedstawieniu teoretycznym oraz przytoczeniu odpowiednich wzorów podane zostaną przykłady oraz zestawy zadań i pytań.

Uzupełnienia: Kombinatoryka

Kombinatoryk_lic

Kombinatoryka

2.1 Kombinacje

> **Kombinacje**
>
> k-Elementową kombinacją zbioru n-elementowego A nazywa się każdy k ($k \leq n$) elementowy podzbiór zbioru A.

Liczba kombinacji podaje na ile sposobów można wybrać k elementów spośród n elementów. Liczbę takich kombinacji oznacza się symbolem C_n^k i wyraża się ona następującym wzorem:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.2}$$

Trójkąt Pascala

Liczbę kombinacji dla różnych wartości k i n można zwizualizować wykorzystując trójkąt Pascala. Jest to uporządkowany zbiór liczb w formie trójkąta (zob rys. **??**) . Na samej górze trójkąta znajduje się liczba 1. To jest pierwszy wiersz trójkąta Pascala. Każdy wiersz zaczyna się i kończy liczbą 1. Każda liczba w wierszu, która nie jest na brzegu (pierwsza lub ostatnia w wierszu), jest sumą dwóch liczb bezpośrednio nad nią z poprzedniego wiersza.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

. . . .

Rysunek 2.1. Trójkąt Pascala

Na rys. **??** przedstawiono pierwsze 6 wierszy trójkąta Pascala, są to wiersze od $n = 0$ do $n = 5$. W wierszu przedostatnim są umieszczone liczby: $1, 4, 6, 4$ i 1. Odpowiadają one kolejno następującym kombinacjom: $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$. W szczególności trzecia liczba w przedostatnim wierszu, czyli 6, odpowiada liczbie kombinacji $\binom{4}{2}$.

Przykład 2.1

Na ile sposobów można wybrać spośród 5 osób delegację trzyosobową?

Rozwiązanie

Liczba elementów zbioru wynosi $n = 5$. Liczba wybieranych osób wynosi $k = 3$. Wobec tego liczba możliwości wyznaczana jest następująco:

$$C_5^3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

Delegację 3 osobową spośród 5 osób można wybrać na 10 sposobów.

Przykład 2.2

Przykład 2.3

Przykład 2.4

2.2 Wariacje z powtórzeniami

Wariacje z powtórzeniami

k-Elementową wariacją z powtórzeniami n-elementowego zbioru A nazywa się każdy ciąg o długości k złożony z elementów zbioru A z możliwością wystąpienia powtórzeń elementów.

Liczbę k-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego oznacza się symbolem V_n^k i wyznacza się na podstawie wzoru:

$$V_n^k = n^k \tag{2.3}$$

Przykład 2.5

Przykład 2.6

Przykład 2.7

Przykład 2.8

2.3 Wariacje bez powtórzeń

Wariacje bez powtórzeń

k-Elementową wariacją bez powtórzeń n-elementowego zbioru A nazywa się każdy ciąg o długości k złożony z elementów zbioru A, gdzie nie występują powtórzenia elementów.

Liczbę k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n elementowego oznacza się symbolen $\bar{V}_n^k$. Liczbę takich wariacji wyznacza się na podstawie następującego wzoru:

$$\bar{V}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{2.4}$$

Przykład 2.9

Przykład 2.10

Przykład 2.11

Przykład 2.12

2.4 Permutacje

Permutacje

n-Elenentową permutacją zbioru A o liczbie elementów n nazywa się każdy ciąg elementów tego zbioru o długosci n bez powtarzania się elementów.

Permutacja zbioru to ustawienie wszystkich n elementów w ciąg o długosci n bez powtórzeń. Liczbę permutacji zbioru n elementowego oznacza się symbolem P_n i oblicza następująco:

$$P_n = n! \tag{2.5}$$

Przykład 2.13

Przykład 2.14

Przykład 2.15

Przykład 2.16

2.5 Zadania i pytania

Zadania

1.
2.
3.
4.
5.

Pytania problemowe

1.
2.
3.
4.
5.

Prawda czy fałsz?

1.
2.
3.
4.
5.

Pytania testowe

1.
2.
3.
4.
5.

3 Zdarzenia losowe i prawdopodobieństwo

We wszystkich teoriach naukowych istnieją pojęcia pierwotne, których się nie definiuje. W arytmetyce jest to np. liczba, w teorii mnogości jest to zbiór, a w geometrii punkt, prosta czy płaszczyzna (**?**).

Pojęciami pierwotnymi, a więc niedefiniowanymi, w teorii rachunku prawdopodobieństwa są zdarzenie elementarne ω oraz przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω (**?**) związane z doświadczeniem losowym D. Pomimo braku formalnej definicji można te zagadnienia opisać i podać szereg przykładów przestrzeni zdarzeń elementarnych dla różnych doświadczeń losowych.

Zdarzenie losowe

Podfstawy

Podstawowe pojęcia

Klasyczne

3.1 Podstawowe pojęcia

Przed określeniem prawdopodobieństwa niezbędne jest wprowadzenie następujących pojęć (por. Kowgier (**?**), Krysicki (**?**),Bratijczuk & Chydziński (**?**)):

- doświadczenie losowe,
- zdarzenie losowe,
- zdarzenie elementarne,
- przestrzeń zdarzeń elementarnych.

> **i** Doświadczenie losowe
>
> Doświadczenie losowe, to pewien eksperyment, którego wyniku nie można jednoznacznie przewidzieć.

Doswiadczenie (eksperyment) określane jest jako losowe, jesli przy kolejnych jego powtórzeniach w identycznych warunkach można otrzymywać różne wyniki. Przykładami doświadczeń losowych są:

- Jednokrotny rzut monetą.
- Jednokrotny rzut sześcienną kostką do gry.
- Trzykrotny rzut sześcienną kostką do gry.
- Losowanie kuli z urny, w której jest 5 kul białych i 3 czarne.
- Cena zamknięcia akcji spółki X podczas ustalonej sesji giełdowej.

Przykład. Jednokrotny rzut monetą.

W jednym rzucie symetryczną monetą możliwe są dwa rezultaty, które zwykle oznaczane są symbolami "O" (orzeł) i "R" (reszka).

Przykład. Jednokrotny rzut sześcienną kostką do gry.

Przy rzucie sześcienną kostką do gry możlwych jest 6 następujących wyników: $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Przykład. Trzykrotny rzut monetą.

Przy trzykrotnym rzucie monetą liczba wszystkich możliwych rezultatów wynosi 8 ($\bar{V}_2^3 = 2^3 = 8$). Symbolicznie wszystkie możliwe wyniki takiego doświadczenia można zapisać następująco:

(O,O,O), (O,O,R), (O,R,O), (O,R,R), (R,O,O), (R,O,R), (R,R,O), (R,R,R).

Realizacja doświadczenia losowego prowadzi do uzyskania jakiegoś wyniku. Może to być np. liczba oczek uzyskana w rzucie kostką, kolor wylosowanej z urny kuli lub cena zamknięcia akcji danej spółki podczas ustalonej sesji giełdowej. Wynik doświadczenia losowego, to zdarzenie losowe, a do oznaczenia zdarzeń losowych zwykle używa się dużych liter: $A, B, C \ldots$.

Zdarzenie losowe

Zdarzenie losowe to wynik doświadczenia losowego.

Doświadczenie losowe zwykle jest opisywane słownie np. "otrzymano parzystą liczbę oczek w rzucie kostką", ale często można to zdarzenie opisać w sposdób nieco bardziej sformalizowany, np. wymieniając zdarzenia elementerne wchodzące w skład danego zdarzenia losowego.

Niech doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Przykładami zdarzeń losowych w takim doświadczeniu są:

A - suma wyrzuconych oczek jest większa od 9.

$A = \{(6, 6), (6, 5), (6, 4), (5, 6), (5, 5), (4, 6)\}$

B - na pierwszej kostce otrzymano 6 oczek.

$B = (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$

C - na obu kostach otrzymano 6 oczek.

$C = (6, 6)$

W powyższych przykładach poza słownym opisem doświadczenia losowego przedstawiono także zapis formalny.

Zdarzenie elementarne

Zdarzenie elementarne, to niepodzielny wynik doświadczenia losowego.

Zdarzenia elementarne zwykle oznaczane są przez ω.

Niech doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry. Przykładami zdarzeń elementarnych w takim doświadczeniu są:

$C = \{(6, 6)\}$

$D = \{(4, 3)\}$

E - suma wyrzuconych oczek wynosi 2

$E = \{(1, 1)\}$

Zdarzenie losowe:

F- suma oczek wynosi 3 - nie jest zdarzeniem elementanym, ponieważ

$F = \{(1, 2), (2, 1)\}$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

Zbiór wszystkich zdarzeń elementranych określa sie mianem przestrzeni zdarzeń elementarnych i oznacza zwykle symbolem Ω.

W doświadczeniu polegającym na jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry, przestrzeń zdarzeń elementarnych jest następująca:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych nazywana jest mocą zbioru Ω. W omawianym przypadku jednokrotnego rzutu szescienną kostką do gry jest to:

$$|\Omega| = 6$$

Do oznaczenia mocy zbioru stosuje się niekiedy następujące oznaczenie:

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6.$$

Jeśli doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie symetryczną monetą, to przestrzeń zdarzeń elementarnych jest następująca:

$$\Omega = \{(O,O,O),(O,O,R),(O,R,O),(O,R,R),(R,O,O),(R,O,R),(R,R,O),(R,R,R)\}$$

Liczba zdarzeń elementarnych w tym przypadku wynosi:

$$|\Omega| = 2^3 = 8.$$

3.2 Rachunek zdarzeń losowych

Z powyższych określeń wynika, że zdarzenia losowe są zbiorami. Możliwe jest wykonywanie na nich działań jak w rachunku zbiorów. Przed określeniem takich działań przedstawiona zostanie stosowna terminologia dotycząca zdarzeń losowych:

Ω - zdarzenie losowe pewne

$\emptyset$ - zdarzenie losowe niemożliwe

$A \cup B$ - suma zdarzeń losowych A i B

$A \cap B$ - iloczyn (koniunkcja, przekrój) zdarzeń losowych A i B

$A \setminus B$ - róznica zdarzeń losowych A i B

$A' = \Omega \setminus A$ - zdarzenie losowe przeciwne do zdarzenia A, dopełnienie zdarzenia A

$A \Rightarrow B$ lub $A \subseteq B$ - zajście zdarzenia losowego A pociąga za sobą zajście zdarzenia B.

i Zdarzenie losowe A

Wynik doświadczenia losowego to zdarzenie losowe. Jest to podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych, składający się wyłącznie ze zdarzeń elementarnych sprzyjajacych danemu zdarzeniu losowemu A.

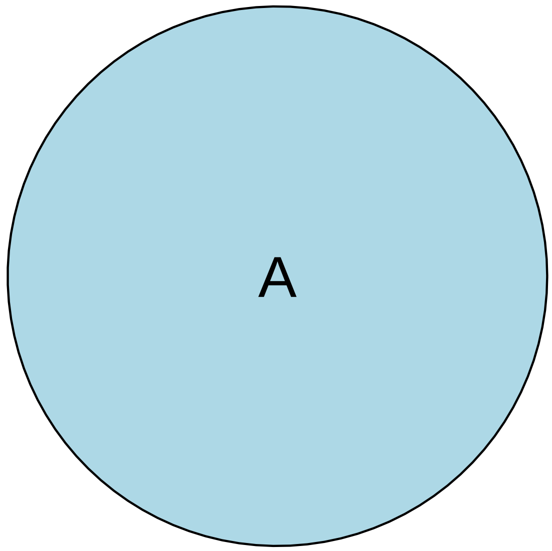
W jednokrotnym rzucie kostką przestrzeń zdarzeń elementarnych jest określona następujaco:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Jeżeli rozpatrywane jest zdarzenie losowe A odpowiadające wyrzuceniu parzystej liczby oczek, to zdarzenie losowe A składa się z trzech zdarzeń elementarnych. Zdarzenie losowe A można zapisać następująco:

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

Na rys. **??** symbolicznie przedstawiono zdarzenie A. Zaznaczony obszar, to zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A.



Rysunek 3.1. Zdarzenie A

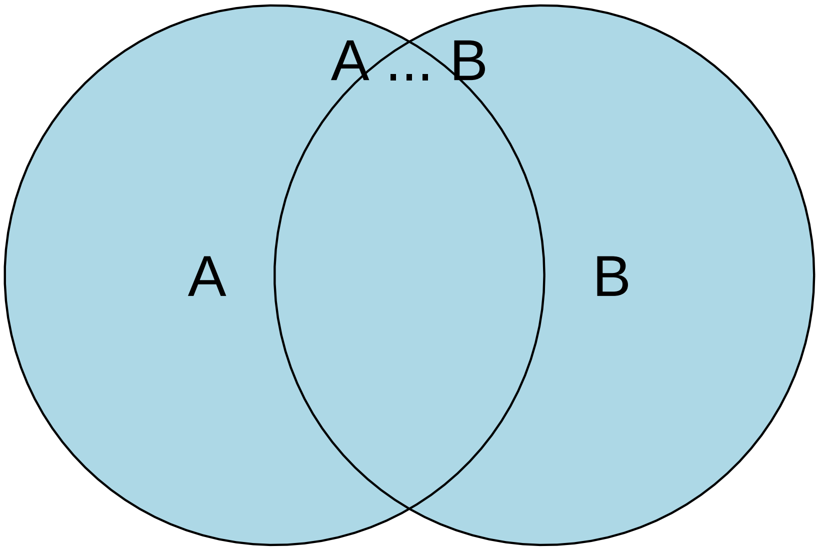
3.2.1 Działania na zdarzeniach losowych

W rachunku zdarzeń można dokonywać różnych działań, jak np. obliczanie sumy, iloczynu czy różnicy zdarzeń losowych. Możliwe jest także wyznaczanie zdarzenia prezciwnego (dopełnienia) do danego zdarzenia. Poniżej scharakteryzowano takie operacje i przedstawiono je graficznie.

> **i** Suma zdarzeń A i B
>
> Sumą zdarzeń A i B jest zbiór składajacy się ze zdarzeń elementarnych należących do zdarzenia losowego A lub do B.

Na rys. **??** przedstawiono w formie graficznej sumę zdarzeń A i B.

Do zdarzenia będącego sumą tych zdarzeń należą wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A lub B.



Rysunek 3.2. Suma zdarzeń losowych

Iloczyn zdarzeń A i B

Iloczynem (albo koniunkcją, przekrojem) zdarzeń A i B jest zbiór składający się ze zdarzeń elementarnych należących jednocześnie do zdarzenia losowego A i do B.

Na rys. **??** przedstawiono w formie graficznej iloczyn zdarzeń A i B

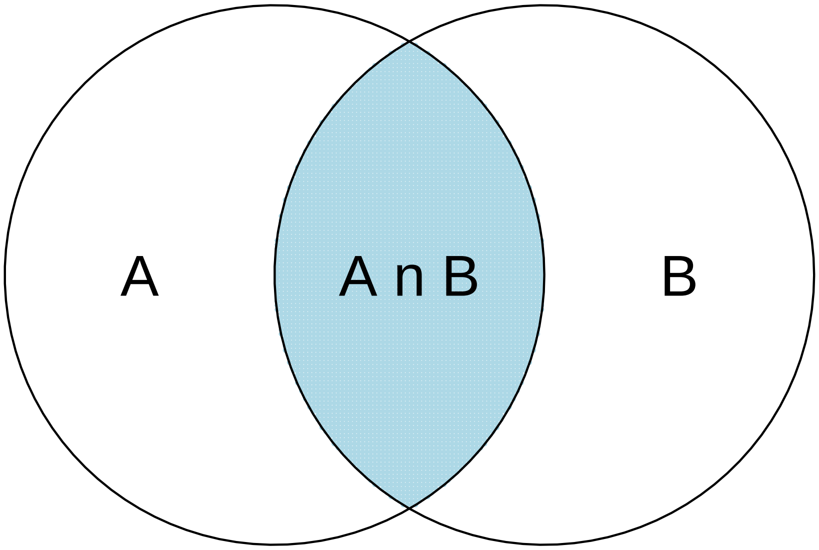
Do iloczynu zdarzeń A i B należą te zdarzenia elementarne, które sprzyjają jednocześnie zdarzeniu A i B.

Różnica zdarzeń A i B

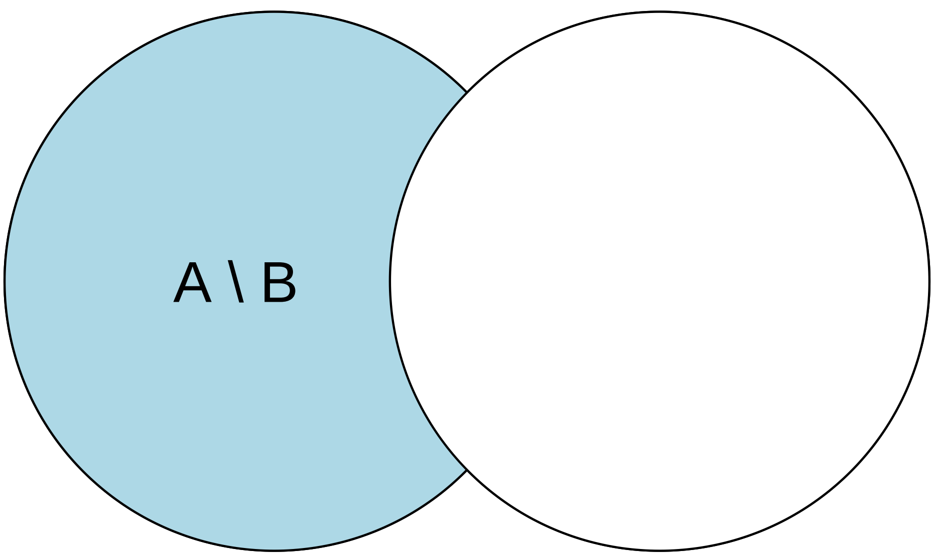
Różnicą dwóch zdarzeń A i B jest zbiór składajacy się ze zdarzeń, które należą do zdarzenia losowego A i jednoczesnie nie należą do B.

Na rys. **??** przedstawiono w formie graficznej różnicę zdarzeń A i B

Różnica zdarzeń losowych A i B, to zbiór zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i nie należących do zdarzenia B.



Rysunek 3.3. Iloczyn (koniunkcja, przekrój) zdarzeń losowych



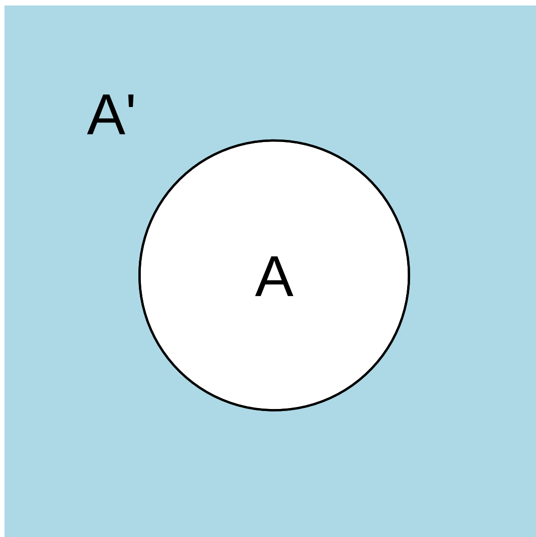
Rysunek 3.4. Różnica zdarzeń losowych

Zdarzenie przeciwne (dopełnienie) do zdarzenia A

Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A, to zdarzenie A', w skład którego wchodzą wszystkie zdarzenia elementarne nie należące do zdarzenia A.

Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A składa się ze zdarzeń elementarnych, które nie należą do A. Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A oznaczane jest jako A' lub $\overline{A}$.

Na rys. **??** przedstawiono schematycznie dopełnienie zdarzenia A.



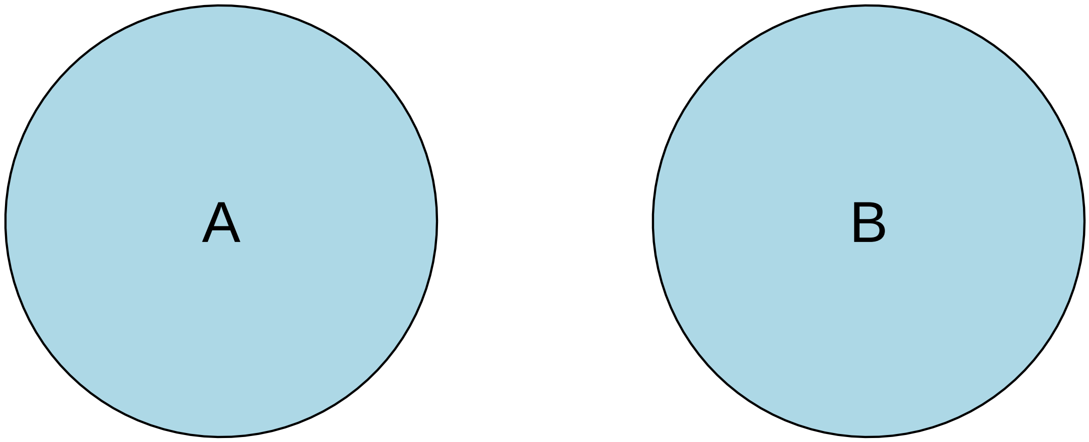
Rysunek 3.5. Zdarzenie A i zdarzenie A' do niego przeciwne

Oczywiście spełnione są następujące warunki

$$A \cup A' = \Omega$$
$$(A')' = A$$
$$\Omega' = \emptyset$$
$$\emptyset' = \Omega$$

Zdarzenia wykluczajace się (lub rozłączne)

Zdarzenia wykluczające się to zdarzenia losowe, których koniunkcja jest zbiorem pustym.



Rysunek 3.6. Suma zdarzeń losowych

Przedstawione symbolicznie na rys. **??** zdarzenia A i B sa zdarzeniami rozłączymi. Koniunkcja (iloczyn) tych zdarzeń jest zbiorem pustym.

Zdarzenia losowe A i B określane są jako zdarzenia wykluczające się, jeśli spełniony jest następujący warunek:

$$P(A \cap B) = \emptyset$$

Poniżej przedstawiono najważniejsze własności działań na zdarzeniach losowych (por. Krysicki (**?**)).

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

3.2.2 Sigma ciało zdarzeń

Dla określenia pojęcia prawdopodobieństwa niezbędne jest wproawdzenie pojęcia σ-ciała (sigma ciało) zdarzeń. Niepustą klasę zdarzeń $\mathcal{F}$ utworzonych z pewnej przestrzeni Ω nazywa się σ-ciałem jeśli spełnia ona następujace warunki (por. Hellwig (**?**), Wywiał (**?**))

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A' \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Z pierwszych dwóch warunków wynika bezpośrednio, że dla dowolnego σ-ciała $\mathcal{F}$

$$\Omega \in \mathcal{F}.$$

Wprowadzenie pojęcia σ-ciała zdarzeń pozwala na określenie prawdopodobieństwa. Wybór odpowiedniego σ-ciała pozwala dostosować model probabilistyczny do specyfiki rozważanego problemu. σ-ciało zdarzeń jest kluczowym elementem formalnej definicji przestrzeni probabilistycznej, umożliwiającym spójne podejście do modelowania zjawisk losowych.

3.3 Przykłady - rachunek zdarzeń

Przykład 3.1

Przykład 3.2

Przykład 3.3

Przykład 3.4

Przykład 3.5

Przykład 3.6

XXXXXXXXXXXXXXXXX

3.4 Wybrane określenia i definicje prawdopodobieństwa

W ostatnich stuleciach podejmowano różne próby dla określenia pojęcia prawdopodobieństwa. Charakteryzując pojęcie prawdopodobieństwa Aczel (**?**) określa je jako ilościową miarę niepewności. Wskazuje, że jest to liczba, która wyraża siłę przekonania o tym, że zajdzie niepewne zdarzenie. Poniżej przedstawiono wybrane definicje prawdopodobieństwa. Wraz z przykładami ich zastosowań.

3.4.1 Definicja klasyczna

Niech n będzie liczbą wszystkich zdarzeń losowych elementarnych jednakowo prawdopodobnych, a k liczbą takich zdarzeń sprzyjajacych zdarzeniu A. Prawdopodobieństwa zdarzenia A to iloraz liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A do liczby wszystkich zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych.

$$P(A) = \frac{k}{n} \tag{3.1}$$

Wzór ten można zapisać odwołując się do liczby elentów zbioru A wprowadzając oznaczenie:

$$|A| = k$$

gdzie symbol $|A|$ oznacza moc zbioru A, co dla zbiorów skończonych odpowiada liczbie elementów tego zbioru. Wówczas wzór **??** może być zapisany następująco

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Dla wyznaczenia prawdopodobieństwa uzyskania parzystej liczby oczek w rzucie sześcienną kostką do gry należy określić przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω oraz zbiór A i ich liczbę elementów. W omawianym przypadku zdarzenia można zapisać następująco:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

Na podstawie definicji klasycznej otrzymuje się:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Wynik jest zgodny z oczekiwaniami. Prawdopodobieństwo uzyskania parzystej liczby oczek w jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry wynosi $\frac{1}{2}$.

Przedstawiona definicja (klasyczna), mimo że prosta i intuicyjna, charakteryzuje się jednak bardzo poważną wadą, Definiując pojęcie "prawdopodobieństwa" wykorzystano określenie "jednakowo prawdopodobne". To definicja przez tautologię. Nie jest dopuszczalne definiowanie pojęć z wykorzystaniem pojęcia definiowanego. Podana definicja nie spełnia formalnych wymogów matematycznych, dlatego zostaną przedstawione inne stosowane definicje prawdopodobieństwa.

3.4.2 Definicja statystyczna

Jeżeli n jest liczbą przeprowadzonych doświadczeń, a m liczbą wyników tych doświadczeń, które sprzyjają zdarzeniu A (np. wyrzucenie parzystej liczby oczek w rzucie sześcienną kostką do gry), to prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A można wyrazić następujaco:

$$P(A) \approx \frac{m}{n} \tag{3.2}$$

Definicja statystyczna nie podaje dokładnej wartości prawdopodobieństwa zdarzenia A, a jedynie jego przybliżoną wartość. Dla dobrego przybliżenia niezbędne jest, aby liczba wykonanych doświadczeń n była znaczna.

Francuski przyrodnik Georges-Louis Leclerc de Buffon (1707 - 1788) rzucał monetą 4040 i otrzymał 2048 razy orła. Na tej podstawie uzyskał przybliżoną wartość prawdopodobieństwa wyrzucenia orła (**?**):

$$P(A) \approx \frac{2048}{4040} = 0,50693$$

Angielski statystyk Karol Pearson (1857 - 1936) rzucał monetą 24000 razy uzyskując 12012 razy orła. Na tej podstawie uzyskał ocenę prawdopodobieństwa wyrzucenia orła w pojedynczym rzucie monetą:

$$P(A) \approx \frac{12012}{24000} = 0,5005$$

Obaj wybitni naukowcy uzyskali zbliżone wyniki i bliskie wartosci 0,5. Jednak zastosowanie deficji statystycznej nie prozwadzi do uzyskania dokładnej wartości szukanego prawdopodobieństwa, a jedynie jego przybliżonej wartości.

3.4.3 Definicja geometryczna

Idea definicji geometrycznej prawdopodobieństwa zostanie przedstawiona na przykładzie wyznaczania prawdopodobieństwa spotkania się dwóch osób.

Przykład 3.7. Spotkanie dwóch osób

Jaś i Małgosia umówili się na spotkanie w kawiarence. Ustalili, że oboje przyjdą niezależnie pomiędzy godziną 17:00 a 18:00. Przyjęli jednak, że każde z nich będzie czekało na drugą osobę dokładnie 20 minut. Obliczyć prawdopodobieństwo, że Jaś i Małgosia spotkają się ustalonego dnia w kawiarence.

Rozwiązanie

W rozważanym przypadku nie można jednoznacznie stwierdzić, czy Jaś i Małgosia w ustalonym dniu spotkają się w kawiarence.

Oto przykłady czasu przyjścia do kawiarenki, gdy osoby się spotkają:

- Jaś 17:10, Małgosia 17:25
- Jaś 17:30, Małgosia 17:32
- Jaś 17:55, Małgosia 17:40

Przykłady czasu przyjścia do kawiarenki, gdy osoby się nie spotkają:

- Jaś 17:10, Małgosia 17:45
- Jaś 17:30, Małgosia 17:55
- Jaś 17:55, Małgosia 17:15

Widoczne jest, że opisane doświadczenie jest zdarzeniem losowym, ponieważ wyniku tego doświadczenia nie można jednoznacznie przewidzieć. Zasadne jest wobec tego pytanie o prawdopodobieństwo zdarzenia, że Jaś i Małgosia spotkają się ustalonego dnia w kawiarence. Niech A oznacza zdarzenie losowe, że ustalonego dnia Jaś i Małgosia spotkają się w kawiarence.

Nietrudno zauważyć, że nie można bezpośrednio określić skończonego zbioru zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych. Nie jest więc możliwe, do obliczenia szukanego prawdopodobieństwa, zastosowanie definicji klasycznej.

Trudno także zastosować definicję statystyczną. Dla uzyskania, wyłącznie przybliżonej wartości prawdopodobieństwa, należałoby planować codzienne spotkania przez kilka lat i za każdym razem rejestrować, czy osoby się spotkały, czy nie. Ostatecznie nie uzyskanoby wartości szukanego prawdopodobieństwa, a jedynie jego przybliżoną wartość.

Z pomocą w takim przypadku przychodzi definicja geometryczna prawdopodobieństwa. Niech x oznacza czas przybycia do kawiarenki Jasia, a y czas przyjścia Małgosi. Przyjmując, że czas zostanie zapisany w godzinach licząc od 17:00 zarówno x jak i y mogą przyjmować wartości od 0 do 1.

Warunek spotkania (realizacja zdarzenia A) można zapisać następująco:

$$|x - y| \leq \frac{1}{3}$$

gdzie $x, y \in [0, 1]$.

Warunek ten można zapisać równoważnie w postaci układu dwóch nierówności:

$$\begin{cases} x - y \leq \frac{1}{3} \\ y - x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

gdzie $x, y \in [0, 1]$.

Na rys. **??** przedstawiono graficznie rozwiązanie rozważanego warunku.

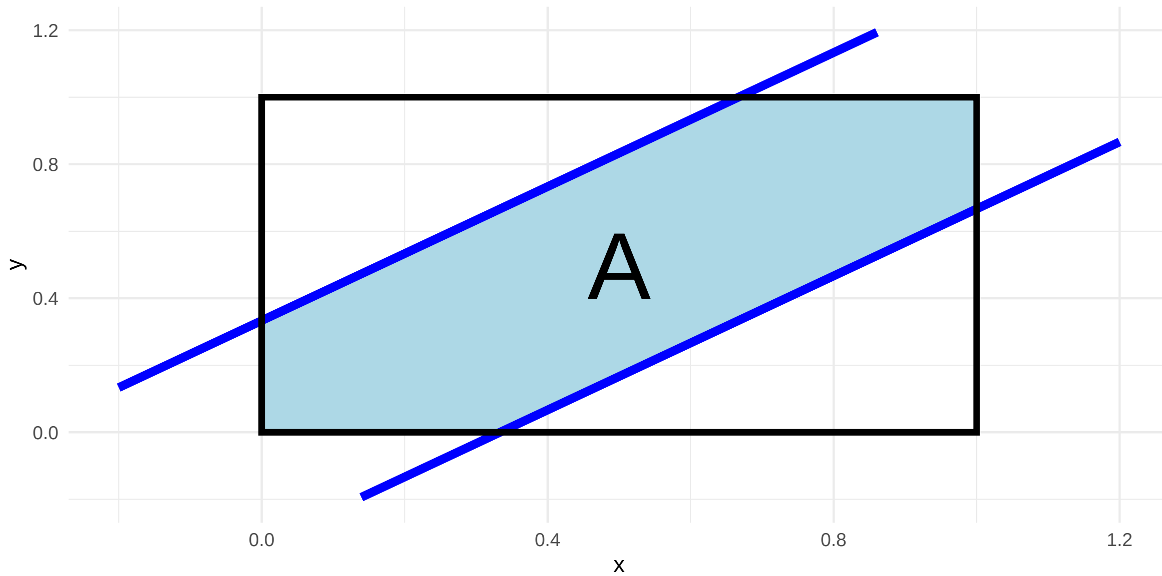
Prawdopodobieństwo zdarzenia A można określić jako stosunek pola zaznaczonego obszaru, do pola całego obszaru (przestrzeń zdarzeń elementarnych). W omawianym przypadku może to być zapisane następująco:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \tag{3.3}$$

gdzie $\mu(.)$ oznacza miarę zbioru, a w omawianym przypadku będzie to pole zbioru.

Pole całego obszaru to pole kwadratu o boku 1, a więc pole to wynosi 1. Pole obszaru A wygodnie obliczyć jako różnicę pomiędzy polem całego zaznaczonego na rys. **??** kwadratu, a sumą dwóch pól trójkątów. Odwołując się do wzoru **??** szukane prawdopodobieństwo wynosi:

$$P(A) = \frac{1 - 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{2}{3}}{1} = \frac{5}{9}$$



Rysunek 3.7. Obszar zdarzenia A

W tym przypadku pole zaznaczonego obszaru wynosi $\frac{5}{9}$. Łatwo można dostrzec, że zmieniając nieco warunki zadania, np. czas oczekiwania na drugą osobę na 15 lub 35 minut, uzyska się inny rezultat, ale definicja geometryczna będzie we wszystkich takich przypadkach skuteczna.

3.4.4 Definicja aksjomatyczna

Żadna z powyżej przedstawionych definicji prawdopodobieństwa nie może być podstawą pozwalającą zbudować wolną od sprzeczności konstrukcję naukową (Hellwig (**?**)). O wadach definicji klasycznej wspomniano powyżej. Pozostałe przedstawione definicje także nie spełniają formalnych wymogów matematycznych. Rozwiązaniem jest przedstawiona przez Andrieja Kołmogorowa w roku 1933 definicja aksjomatyczna.

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego D, a $\mathcal{F}$ σ-ciałem określonym na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω. Prawdopodobieństwem nazwywamy funkcję P przyporządkowującą każdemu zdarzeniu losowemu $A \in \mathcal{F}$ liczbę $P(A)$ zgodnie z następującymi warunkami (por. Kowgier (**?**), Wywiał (**?**), Kordecki (**?**)):

1. $P(A) \geq 0$, dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{F}$

,

2. $P(\Omega) = 1$

3. $P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n ...) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + ...$ dla dowolnych parami rozłącznych zdarzeń $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ze zbioru $\mathcal{F}$.

Trzy powyższe punkty, to tzw. aksjomaty w omawianej definicji prawdopodobieństwa.

3.5 Prawdopodobieństwo - wybrane zagadnienia

Teoria prawdopodobieństwa stanowi istotne zagadnienie w matematyce, ułatwiające badanie i modelowanie zjawisk losowych. Dużą rolę odgrywają takie pojęcia jak prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo bezwzględne, zdarzenia niezależne i twierdzenie Bayesa. Prawdopodobieństwo warunkowe umożliwia ocenę prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzenia, przy założeniu, że wystąpiło inne zdarzenie. Zdarzenia niezależne definiuje się jako te zdarzenia, których realizacja nie wpływa na prawdopodobieństwo wystąpienia innych zdarzeń. Wzór Bayesa natomiast stanowi potężne narzędzie, które umożliwia aktualizację prawdopodobieństw w świetle nowych informacji. Opanowanie tych pojęć jest niezbędne dla biegłego zastosowania teorii prawdopodobieństwa w różnych dziedzinach, od statystyki i analizy danych po podejmowanie decyzji w obliczu niepewności.

3.5.1 Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A i B będą dowolnymi zdarzeniami losowymi. Prawdopodobieństwo zdarzenia A obliczane przy założeniu, że zaszło zdarzenie B nazywamy prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A pod warunkiem B i oznaczane jest symbolem $P(A/B)$

$$(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{3.4}$$

dla $A, B \in \mathcal{F},\ P(B) > 0$.

3.5.2 Prawdopodobieństwo całkowite

Prawdopodobieństwo całkowite pozwala na obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia, które może zajść na kilka różnych sposobów. Jest to szczególnie użyteczne w przypadkach, gdy zdarzenie może być wynikiem kilku różnych, wzajemnie wykluczających się zdarzeń. Umożliwia ono dekompozycję złożonych problemów probabilistycznych na prostsze części, które można łatwiej analizować i sumować.

Uwzględniając dwa zbiory można to zapisać następująco: Jeżeli $B_1 \cup B_2 = \Omega$, to:

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) \tag{3.5}$$

Wzór **??** można uogólnić na n składników i przyjmuje on wówczas postać:

Jeżeli $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$, to

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + ... + P(A/B_n)P(B_n). \tag{3.6}$$

3.5.3 Niezależność zdarzeń losowych

Niezależność zdarzeń oznacza, że wystąpienie jednego zdarzenia nie wpływa na prawdopodobieństwo wystąpienia drugiego zdarzenia. Jest to kluczowe założenie w wielu modelach probabilistycznych i statystycznych, ułatwiające analizę i obliczenia. Zdarzenia A i B są niezależne, jeśli

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{3.7}$$

Łatwo zauważyć, że dla dowolnego zdarzenia A zdarzenia A i Ω są niezależne:

$$P(\Omega \cap A) = P(A) = 1 \cdot P(A) = P(\Omega)P(A)$$

Jeżeli $P(A) = 0$, to dla dowolnego zdarzenia B, zdarzenia A i B są niezależne. Wystarczy zauważyć, że $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$, to $P(A \cap B) = 0$ i wówczas otrzymujemy:

$$P(A \cap B) = 0 \cdot P(B) = P(A)P(B).$$

W bardziej złożonym przypadku, gdy rozpatrywanych jest $n > 2$ zdarzeń $A_1, A_2, ..., A_n$ warunek niezależności (dokładniej: wzajemnej niezależności lub zespołowej niezależnosci) zadany wzorem **??** oznacza, że prawdopodobieństwołącznego zajścia $m(m \leq n)$ zdarzeń spośród nich jest równe iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń, czyli (**?**):

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) ... P(A_{i_m}) \tag{3.8}$$

dla każdego $m \leq n$ i każdego m-wyrazowego rosnącego ciągu $i_1, i_2, ..., i_m$ liczba naturalnych $1 \leq i_1, i_2, ..., i_m \leq n$.

Spełnienie warunku $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) ... P(A_n)$ nie oznacza, że wszystkie zdarzenia $A_1, A_2, ..., A_n$ są parami niezależne (por. np. Krzyśko (**?**))

3.5.4 Wzór Bayesa

Jeżeli zdarzenia $B_1, B_2, \dots, B_n$ są zdarzeniami parami rozłącznymi, czyli $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ o dodatnich prawdopodobieństwach, czyli $P(B_i) > 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ oraz $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$, to

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)} \tag{3.9}$$

Wzór Bayes'a (**??**) informuje w jai sposób zaktualizować przekonania o prawdopodobieństwie zdarzenia na podstawie dodatkowych informacji. Wzór wyraża relację między prawdopodobieństwem warunkowym a prawdopodobieństwem brzegowym i prawdopodobieństwem a priori.

3.5.5 Podstawowe własności prawdopodobieństwa

Poniżej przedstawiono wybrane najważniejsze własności prawdopodobieństwa (**?**).

1. Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego (oznaczenie $\emptyset$)

$$P(\emptyset) = 0,$$

2. Jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B ($A \Rightarrow B$), to

$$P(A) \leq P(B)$$

3. Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia A jest nie większe od 1.

$$P(A) \leq 1, \text{ dla dowolnego zdarzenia} A.$$

4. Jeżeli zdarzenie A pociąga zdarzenie B, (co zapisujemy $A \Rightarrow B$), to

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

5. Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \dots A_n$ są parami rozłączne, to

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

6. Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego A' do zdarzenia A wynosi:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

7. Prawdopodobieństwo sumy dowolnych zdarzeń A i B wynosi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(a \cap B)$$

8. Prawdopodobieństwo iloczynu dowolnych zdarzeń A i B wynosi:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(a \cup B)$$

3.6 Przykłady - prawdopodobieństwo

Przykład 3.7

Przykład 3.8

Przykład 3.9

Przykład 3.10

Przykład 3.11

Przykład 3.12

3.7 Zadania i pytania

Zadania

1.
2.
3.
4.
5.

Pytania problemowe

1.
2.
3.
4.
5.

Prawda czy fałsz?

1.
2.
3.
4.
5.

Pytania testowe

1.
2.
3.
4.
5.

4 Zmienna losowa - podstawowe określenia

Zmienna losowa

Zmienna losowa

Zmienna losowa

Zmienna losowa

Niech $\mathcal{F}$ będzie σ-ciałem przestrzeni Ω i niech X będzie funkcją określoną na Ω o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Definicja (**?**):

Funkcja X jest zmienną losową, jeżeli dla każdej liczby $c \in \mathbb{R}$

$$\{\omega : X(\omega) < c\} = X^{-1}(-\infty;\ c) \in \mathcal{F}$$

gdzie X^{-1} jest operacją przeciwobrazu zbioru poprzez funkcję X.

Często w literaturze podawane jest opisowe określenie pojęcia zmiennej losowej. Aczel (**?**) podaje, że "*zmienną losową jest zmienna, która przyjmuje różne wartości liczbowe, wyznaczone przez los*", a Dobiesław Bobrowski (1980): "*zmienną losową jest zmienna, która w wyniku doświadczenia przyjąć może jedną z wartości z pewnego zbioru liczb rzeczywistych i to z określonym prawdopodobieństwem*" (za Snopkowski (**?**)) .

Zmienne losowe oznaczane są dużymi literami $X, Y, Z, ...$, poza nielicznymi wyjątkami gdzie zwyczajowo stosuje się specyficzne oznaczenia np. t, χ^2 lub ξ.

W badaniach naukowych zmienne losowe są wykorzystywane do modelowania i analizy zjawisk, które mają element niepewności. Rozkłady zmiennych losowych znajdują szerokie zastosowania w różnych zagadnieniach w ekonomii i finansach jak np.:

- w ocenie ryzyka rynkowego i zarzadzaniu ryzykiem (**?**; **?**; **?**, **?**);
- w analizach rynku ubezpieczeń (**?**);
- w analizach rozkładów wynagrodzeń (**?**; **?**);

- w analizach szeregów czasowych i prognozowaniu (**?**);
- w analizach giełdowych (**?**);
- w analizach symulacyjnych (**?**, **?**; **?**);
- w ekonomicznych badaniach porównawczych (**?**; **?**).

Wyróżnia się dwa rodzaje zmiennych losowych:

- zmienna losowa skokowa,
- zmienna losowa ciągła.

4.1 Zmienna losowa skokowa

Zmienna losowa skokowa (dyskretna), to taka zmienna losowa, która może przyjmować skończenie lub przeliczalnie wiele wartości (**?**). Regułę, według której jednostkowa masa prawdopodobieństwa rozkłada się na poszczególne wartości zmiennej losowej nazywa się funkcją rozkładu prawdopodobieństwa.

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej dyskretnej X może być dany w następującej postaci:

$$P(X = x_i) = p_i \text{ dla } i = 1, 2, \dots, k \tag{4.1}$$

gdzie $p_i > 0$

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ *lub* $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Jest to funkcja przyporządkowująca wartości prawdopodobieństwa poszczególnym wartościom x_i zmiennej losowej X. Funkcja ta może być podana w postaci wzoru analitycznego, poprzez wymienienie wszystkich par (x_i, p_i) a także w formie graficznej.

Kolejną ważną charakterystyką zmiennej losowej jest dystrybuanta. Jest to funkcja $F(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ zadana następującym wzorem:

$$F(x) = P(X < x) \text{ dla } x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Dla zmiennej losowej skokowej wzór **??** może być równoważnie zapisany w postaci:

$$F(x) = \sum_{i:\ x_i < x} p_i$$

Dystrybuanta $F(x)$ zawsze spełnia następujące warunki:

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$F(x) \text{ jest funkcją niemalejącą}$$

$$F(x) \text{ jest funkcją lewostronnie ciągłą}$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \text{ oraz } \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

W charakterystyce zmiennych losowych wykorzystywane są parametry jak wartość oczekiwana oraz wariancja. Wartość oczekiwana zmiennej losowej EX obliczana jest następująco:

$$EX = \sum_i x_i p_i \tag{4.3}$$

Wariancja zmiennej losowej D^2X zadana jest wzorem:

$$D^2X = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 \tag{4.4}$$

gdzie:

$$EX^2 = \sum_i x_i^2 p_i$$

Po obliczeniu D^2X wyznacza się odchylenie standardowe tej zmiennej losowej. Odchylenie standardowe zmiennej losowej X, to pierwiastek kwadratowy z wariancji zmiennej losowej, czyli:

$$DX = \sqrt{D^2X} \tag{4.5}$$

Przykład 4.1. Jednokrotny rzut sześcienną kostką do gry

Rozważmy jednokrotny rzut sześcienną kostką do gry. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych oczek. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa i dystrybuantę zmiennej losowej X. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję tej zmiennej losowej.

Rozwiązanie

Zmienna losowa X może przyjmować następujące wartości: $1, 2, 3, 4, 5$ oraz 6. Wszystkie te wartości są przyjmowane z jednakowymi prawdopodobieństwami $p = \frac{1}{6}$.

Dla tak określej zmiennej funkcja rozkładu prawdopodobieństwa ma następującą postać:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{dla } x = 1 \\ \frac{1}{6} & \text{dla } x = 2 \\ \frac{1}{6} & \text{dla } x = 3 \\ \frac{1}{6} & \text{dla } x = 4 \\ \frac{1}{6} & \text{dla } x = 5 \\ \frac{1}{6} & \text{dla } x = 6 \end{cases}$$

Zwykle rozkład zmiennej losowej skokowej wygodnie jest przedstawiać w formie tabeli (por. tabela **??**)

Tabela 4.1. Rozkład prawdopodobieństwa liczby oczek w jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Na rys. **??** przedstawiono funkcję rozkładu prawdopodobieństwa liczby wyrzuconych oczek w jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.

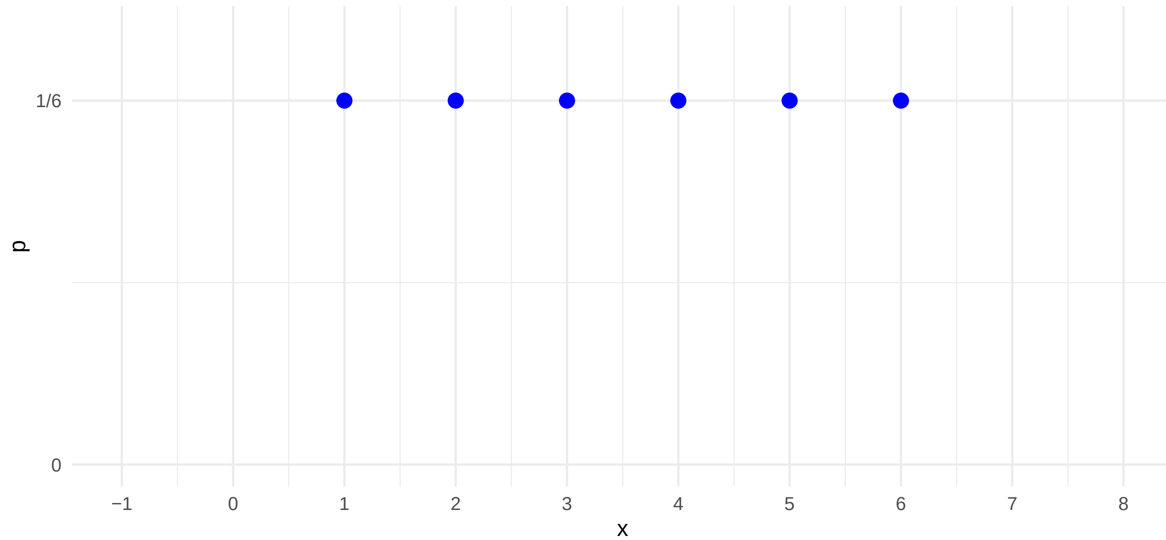
Dla tak określej zmiennej dystrybuanta $F(x)$ (por. **??**) ma następującą postać:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 1 \\ \frac{1}{6} & \text{dla } 1 < x \leq 2 \\ \frac{2}{6} & \text{dla } 2 < x \leq 3 \\ \frac{3}{6} & \text{dla } 3 < x \leq 4 \\ \frac{4}{6} & \text{dla } 4 < x \leq 5 \\ \frac{5}{6} & \text{dla } 5 < x \leq 6 \\ 1 & \text{dla } x > 6 \end{cases}$$

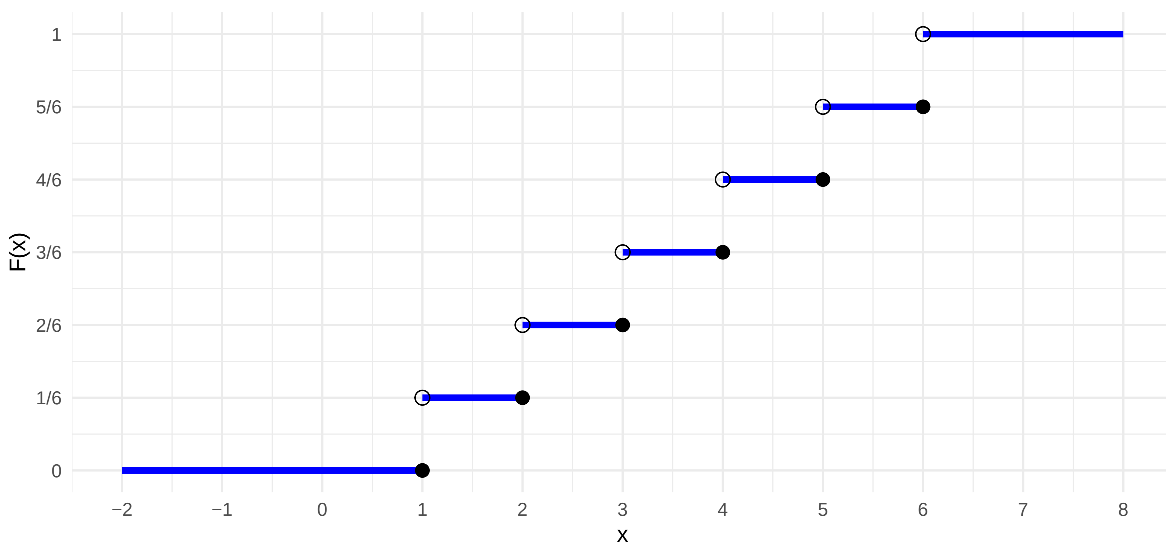
Na rys. **??** pokazano dystrybuantę $F(x)$ zmiennej losowej X.

Zgodnie ze wzorem **??** wartość oczekiwana w jednokrotnym rzucie kostką wynosi:

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{2}{6} + ... + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$



Rysunek 4.1. Rozkład prawdopodobieństwa liczby otrzymanych oczek w jednokrotnym rzucie sześcienną kostką do gry



Rysunek 4.2. Dystrybuanta zmiennej losowej

Rezultat ten należy tak rozumieć, że gdyby wielokrotnie (setki, tysiace razy) rzucać sześcienną kostką do gry, to przeciętna wartość wyrzuconej liczby oczek będzie bliska 3,5.

Do wyznaczenia wariancji na podstawie wzoru **??** niezbędne jest obliczenie EX^2

$$EX^2 = 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{4}{6} + ... + 6 \cdot \frac{36}{6} = \frac{91}{6}$$

Wobec tego wariancja zmiennej losowej X wynosi:

$$D^2X = \frac{91}{6} - (3,5)^2 \approx 2,92$$

Odchylenie standardowe DX wynosi:

$$DX = \sqrt{2,92} = 1,71$$

Przy wielokrotnym rzucaniu sześcienną kostką do gry liczba wyrzuconych oczek odchyla się przeciętnie od wartości oczekiwanej o około 1,71.

Stop

4.2 Zmienna losowa ciągła

Zmienna losowa ciągła, to taka zmienna losowa, która może przyjmować dowolne wartości z pewnego przedziału. Możliwe wartości takiej zmiennej tworzą zbiór nieprzeliczalny (**?**). O ile dla zmiennej losowej skokowej podawana była funkcja rozkładu prawdopodobieństwa, to dla zmiennej losowej ciagłej jej odpowiednikiem jest funkcja gęstości.

Funkcja gęstości $f(x)$ spełnia następujące warunki:

1. $f(x) \geq 0$, dla $x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Dystrybuanta zmiennej losowej to funkcja:

$$F(x) = P(X < x) \text{ dla } x \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Dla zmiennej losowej ciągłej dystrybuanta zadana **??** może być zapisana w postaci:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{4.7}$$

Prawdopodobieństwo, że zmienna losowa ciągła przyjmie wartość z przedziału [a, b] można obliczyć w oparciu o funkcję gęstości następująco:

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx \tag{4.8}$$

To samo prawdopodobieństwo można obliczyć wykorzystując wartosci dystrybuanty zmiennej losowej X:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) \tag{4.9}$$

Podobnie jak dla zmiennej losowej skokowej, tak również w charakterystyce zmiennych losowych ciągłych wykorzystywane są parametry jak wartość oczekiwana oraz wariancja. Wartość oczekiwana zmiennej losowej EX obliczana jest następująco:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \tag{4.10}$$

Wariancja zmiennej losowej D^2X zadana jest wzorem:

$$D^2X = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2 \tag{4.11}$$

gdzie:

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

Po obliczeniu D^2X wyznacza się odvhylenie standardowe tej zmiennej losowej. Odchylenie standardowe zmiennej losowej X, to pierwiastek kwadratowy z wariancji zmiennej losowej, czyli:

$$DX = \sqrt{D^2X} \tag{4.12}$$

Przykład 4.2. Czas oczekiwania na autobus

Na pewnym przystanku autobus odjeżdża dokładnie co 10 minut. Niech X oznacza czas oczekiwania na odjazd autobusu losowego podróżnego. Podać gęstość zmiennej losowej X, jej dystrybuantę oraz wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję tej zmiennej losowej.

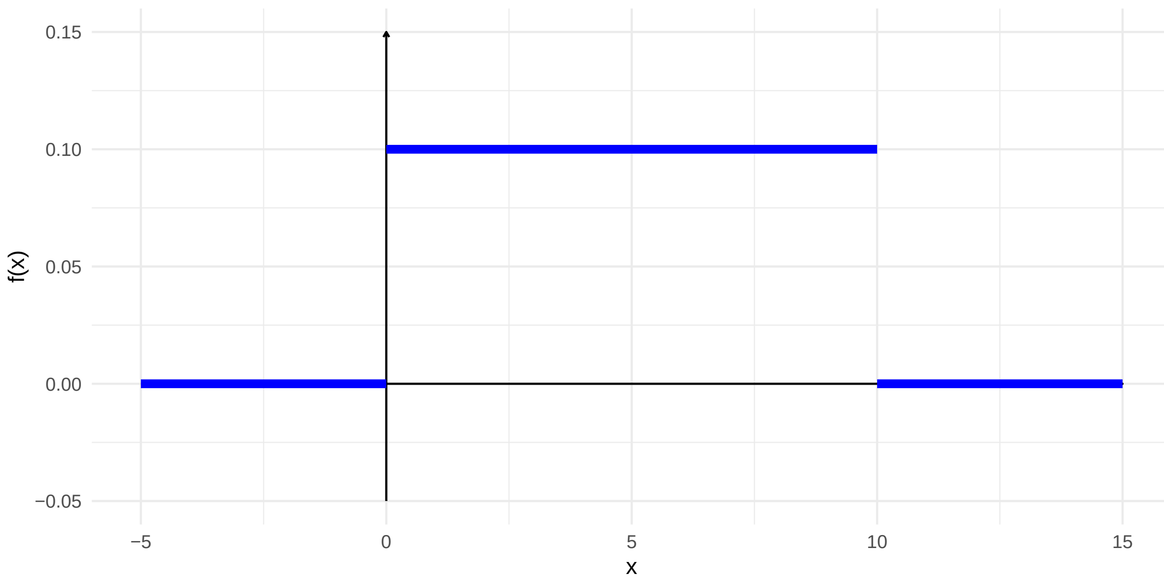
Rozwiązanie

Zmienna losowa X może przyjmować wartości od 0 do 10.

Gęstość zmiennej losowej X ma następującą postać:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{10} & \text{dla } 0 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{dla } x > 10 \end{cases} \tag{4.13}$$

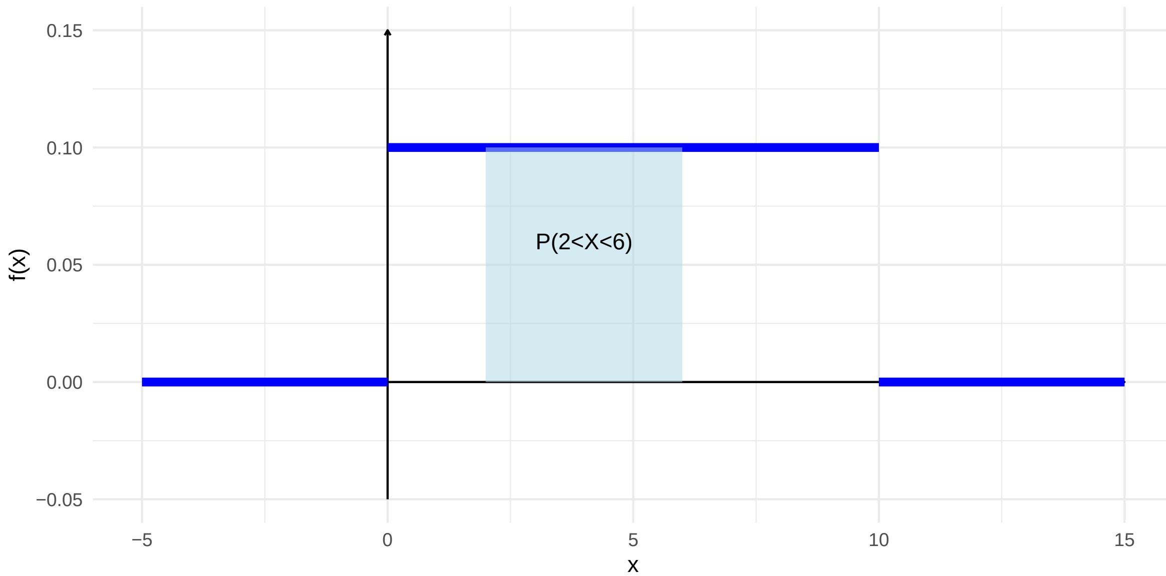
Wykres funkcji gęstości zmiennej losowej X przedstawia rys. **??**



Rysunek 4.3. Gęstość rozkładu normalnego standardowego

Na rys. **??** przedstawiono funkcję gęstości jak na rys. **??**, ale dodatkowo zaznaczono obszar pod funkcją gęstości w zakresie $x \in (2, 6)$. Pole to odpowiada prawdopodobieństwu realizacji zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany pasażer będzie oczekiwał na autobus od 2 do 6 minut. W omawianym przypadku prawdopodobieństwo to wynosi 0,4.

Dystrybuanta zmiennej losowej X jest zadana wzorem:



Rysunek 4.4. Gęstość rozkładu normalnego standardowego z zaznaczeniem prawdopodobieństwa realizacji w zakresie 2 do 6

$$F(x) = P(X < x),$$

a wyznaczenie tej funkcji zostanie zrealizowane w trzech etapach:

a) $x \in (-\infty, 0)$

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

b) $x \in [0, 10]$

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{10}\,dt = 0 + \left[\frac{1}{10}t\right]_{0}^{x} = 0 + \frac{1}{10}x = \frac{1}{10}x$$

c) $x \in (10, \infty)$

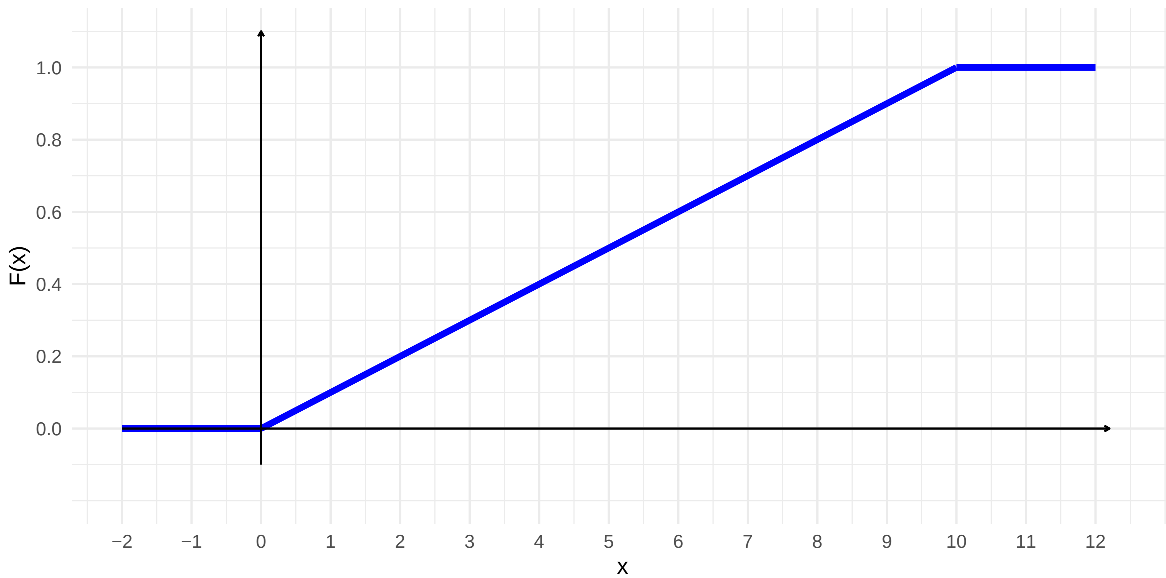
$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{10} f(t)\,dt + \int_{10}^{x} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{10} \frac{1}{10}\,dt + \int_{10}^{x} 0\,dt = 0 + \left[\frac{1}{10}t\right]_0^{10} + 0 = 0 + 1 + 0 = 1$$

Wobec powyższych wyników dystrybuantę można zapisać następująco:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{10}x & \text{dla } 0 \leq x \leq 10 \\ 1 & \text{dla } x > 10 \end{cases}$$

Na rys. **??** przedstawiono dystrybuantę zmiennej losowej X. Jest to funkcja niemalejąca, a granice w $-\infty$ i ∞ wynoszą odpiednio 0 i 1.



Rysunek 4.5. Dystrybuanta zmiennej losowej X

Korzystając ze wzoru **??** można wyznaczyć prawdopodobieństwo oczekiwania na autobus pomiędzy 2 min. oraz 6 min (por. rys. **??**). Wartości dystrybuanty w tych punktach są następujące:

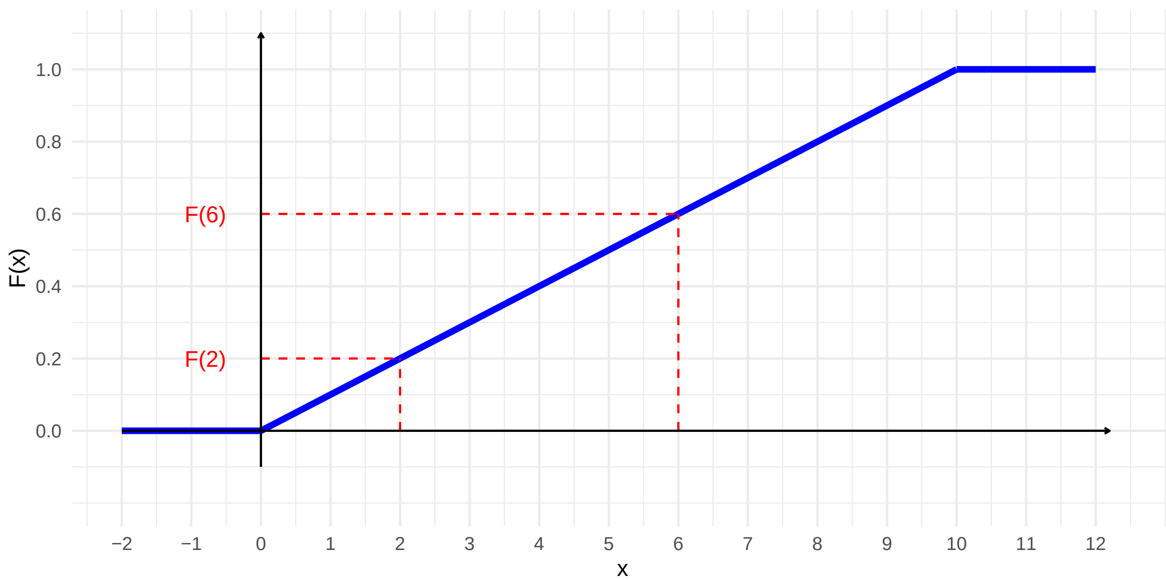
$$F(2) = \frac{2}{10}$$

$$F(2) = \frac{6}{10}$$

Wobec tego na podstawie (**??**) otrzymujemy:

$$P(2 < X < 6) = F(6) - F(2) = \frac{6}{10} - \frac{2}{10} = \frac{4}{10}$$

Odpowiednie wartości dystrybuanty przedstawiono na rys. **??**



Rysunek 4.6. Dystrybuanta zmiennej losowej X

Do obliczenia wartości oczekiwanej zmiennej losowej X wykorzystanie wzór **??**

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{10} xf(x)dx + \int_{10}^{\infty} xf(x)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} x0dx + \int_{0}^{10} x\frac{1}{10}dx + \int_{10}^{\infty} x0dx = 0 + \frac{1}{10}\int_{0}^{10} xdx + 0 =$$
$$= \frac{1}{10}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\left(\frac{10^2}{2} - 0^2\right) = 5$$

Otrzymany wynik informuje nas, że gdyby na przystanek przychodziło bardzo wielu pasażerów, to ich przeciętny czas oczekiwania na autobus wynosiłby około 5 minut.

Do obliczenia wariancji niezbędne jest wyznaczenie wartości EX^2:

$$EX^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{10} x^2 f(x)dx + \int_{10}^{\infty} x^2 f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 0dx + \int_{0}^{10} x^2 \frac{1}{10}dx + \int_{10}^{\infty} x^2 0dx = 0 + \frac{1}{10}\int_{0}^{10} x^2 dx + 0 =$$

$$\frac{1}{10}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = \frac{1}{10}\left(\frac{10^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1000}{3} = \frac{1000}{30} = \frac{100}{3}$$

Wobec tego wariancja zmiennej losowej X wynosi

$$D^2X = \frac{1000}{3} - 5^2 \approx 8,33$$

Odchylenie standardowe zmiennej losowej X wynosi

$$DX = \sqrt{8,33} = 2,9$$

Otrzymana wielkość informuje nas, że gdyby wielu pasażerów przychodziło na przystanek autobusowy, to ich czas oczekiwania na odjazd autobusu odchylałby się przecietnie od wartości opczekiwanej o około 2,9 minuty.

***

4.3 Własności wartości oczekiwanej i wariancji

Wprowadzone parametry wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej charalkteryzują się pewnymi własnościami. Poniżej wskazano najważniejsze własności tych parametrów.

- Wartość oczekiwana - najważniejsze własności

Wartość oczekiwana stałej, jest równa tej stałej wartości.

$Ec = c$

Gdyby na każdej ściance sześciennej kostki do gry były np. dwa oczka, a zmienna losowa X przyjmowała wartość równą liczbie wyrzuconych oczek, to wartość oczekiwana takiej zmiennej losowej (stałej) wynosiłaby 2.

$E(cX) = cEX$

$E(X + c) = EX + c$

$E(X + Y) = EX + EY$

$N \leq EX \leq M$, jeśli $N \leq X \leq M$

$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$, dla X, Y niezależnych.

- Wariancja - najważniejsze własności

$D^2 c = 0$

$D^2(cX) = c^2 D^2 X$

$D^2(X + c) = D^2 X$

$D^2(X + Y) = D^2 X + D^Y$, dla X, Y niezależnych.

4.4 Przykłady - zmienna losowa

Przykład 4.3.

Przykład 4.4.

Przykład 4.5.

Przykład 4.6.

4.5 Zadania i pytania

Zadania

1.
2.
3.

4.
5.

Pytania problemowe

1.
2.
3.
4.
5.

Prawda czy fałsz?

1.
2.
3.
4.
5.

Pytania testowe

1.
2.
3.
4.
5.