1.3 线性方程组的直接解法

克拉默法则

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

计算复杂度：$n+1$个n次行列式，n division. Every determinant needs $(n-1)n!$ times multiplication.

Gauss Elimination Method

进行一系列初等变换，消去某个变量前面的系数，将其化为如下形式的方程

$$Ux = c, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \cdots & & & \\ 0 \cdots u_{nn} & & & \end{bmatrix}$$

U是上三角矩阵。如果A非奇异，$u_{ii} \neq 0$

有了上、下三角矩阵，计算解的复杂度~ $O(n^2)$

增广矩阵，置换矩阵

$$(A, b)$$

称为增广矩阵。将其通过线性变换化为上三角形式。
设第一列第r行的$a_{r1} \neq 0$，则将其与第一行互换，通过置换矩阵实现：

$$(\bar{A}, \bar{b}) = P^{1r} \cdot (A, b)$$

置换矩阵

$$P^{1r} = \begin{cases} 1, & ij = 1r \quad \text{or} r1 \\ \delta_{ij}, & ij \neq 1r \neq r1 \end{cases}$$

Frobinius矩阵$G^{(1)}$

对角元全为1的下三角矩阵，下三角部分仅有一列（第一列）不是零。

取$G_{k1}^{(1)} = \frac{\bar{a}_{k1}}{\bar{a}_{11}}$

置换+Frobinius变换

$$(A', b') = G^{(1)}(\bar{A}, \bar{b}) = G^{(1)}P^{(1r)}(A, b)$$

$$(A', b')_{k1} = 0, \quad k = 2, 3, \cdots$$

支点遴选

部分支点遴选

不为零的矩阵元为**支点元**，选取支点作为a_{11}过程称为支点遴选。选择a_{r1}中最大的作为支点是自然的，比起胡乱选择支点，这样选误差最小。

全局支点遴选

选取矩阵元中模最大的作为支点。

Gauss Elimination

$$(A^1, b^1) = G^1 P^1 (A^0, b^0)$$
$$(A^j, b^j) = G^j P^j (A^{j-1}, b^{j-1})$$
$$(A^{n-1}, b^{n-1}) = (U, c)$$

$$(U, c) = \prod_{k=n-1}^{1} G^k P^k (A, b)$$

complexity of computation: $\sim n^3/3$

矩阵的LU分解

LU decomposition

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$分解为一个下三角和上三角矩阵之积：

$$A = LU$$

可以证明，高斯消元法给出了A的一个LU分解。

$$U = (\prod_{k=n-1}^{1} G^k P^k)A \equiv MA$$

where

$$G^j = \begin{pmatrix} I_j & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

G是一个n-j维的、第一列不为零的Frobinius矩阵。
we can prove that $L = PM^{-1}$ is 下三角矩阵， its diagonals are all 1. So we can get :

$$PA = PM^{-1}U = LU$$

LU可分解性?

A是否存在LU 分解取决于它哥哥子矩阵的rank。对任意矩阵LU分解定理比较复杂，但对一个实矩阵来说判断比较简单。

可分解判定

实矩阵A有唯一LU分解的充要条件是A的所有主子矩阵都非奇异。

注意

即便是奇异的矩阵，也可以有LU分解。只要它的哥哥主子矩阵直到n-1阶都是非奇异的即可。

Cholesky分解

Cholesky decomposition

对于正定厄米矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,可找到H使得

$$A = H^\dagger H$$

同时，我们可以要求H上三角。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix} = LL^T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \\ d & e \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & ab & ad \\ ab & b^2+c^2 & bd+ce \\ ad & bd+ce & d^2+e^2+f^2 \end{pmatrix}$$

Cholesky分解也可以从LU分解中得到。先对正定厄密矩阵做LU分解，并把分解中的U矩阵写成对角矩阵乘以单位上三角矩阵的形式：

$$U = \mathrm{diag}\{u_{ii}\} \begin{pmatrix} 1 & u12/u11 & \cdots & u_{1n}/u \\ & 1 & \cdots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

但实际由于对称性，可以用Cholesky分解省时

间。

Cholesky 分解

正定矩阵的各阶主子矩阵也都是正定的。
对n=1，结果平庸。令$A_i \quad i=1,\cdots,n$是第i阶主子矩阵。它们都是正定厄米的。

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{i-1} & \vec{v} \\ \vec{v}^\dagger & \alpha \end{pmatrix} = H_i^\dagger H_i = \begin{pmatrix} H_{i-1}^\dagger & \vec{h} \\ 0^\dagger & \beta \end{pmatrix}$$

$$H_{i-1}^\dagger \cdot \vec{h} = \vec{v}$$
$$\vec{h}^\dagger \vec{h} + \beta^2 = \alpha$$

由于H dagger与v已知，H dagger是一个下三角矩阵，我们可以轻松求解$\vec{h}$,从而

$$\beta = \sqrt{\alpha - \vec{h}^{\dagger}\vec{h}}$$