mode: passage
header : false
footer : false
date: 22-9-24
author: gky
title: Computation-2

1.3 线性方程组的直接解法

$$Ax = b$$

克拉默法则

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

计算复杂度：$n+1$个n次行列式，n division. Every determinant needs $(n-1)n!$ times multiplication.

Gauss Elimination Method

进行一系列初等变换，消去某个变量前面的系数，将其化为如下形式的方程

$$Ux=c,\quad U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \cdots \\ 0\cdots u_{nn} \end{bmatrix}$$

U是上三角矩阵。如果A非奇异，$u_{ii}\neq 0$
有了上、下三角矩阵，计算解的复杂度$\sim O(n^2)$

增广矩阵，置换矩阵

$$(A,b)$$

称为增广矩阵。将其通过线性变换化为上三角形式。
设第一列第r行的$a_{r1}\neq 0$，则将其与第一行互换，通过置换矩阵实现：

$$(\bar{A},\bar{b})=P^{1r}\cdot(A,b)$$

置换矩阵

$$P^{1r}=\begin{cases}1, & ij=1r \quad \text{or} r1 \\ \delta_{ij}, & ij\neq 1r\neq r1\end{cases}$$

Frobinius矩阵$G^{(1)}$

对角元全为1的下三角矩阵，下三角部分仅有一列（第一列）不是零。
取$G^{(1)}_{k1}=\frac{\bar{a}_{k1}}{\bar{a}_{11}}$

置换+Frobinius变换

$$(A',b')=G^{(1)}(\bar{A},\bar{b})=G^{(1)}P^{(1r)}(A,b)$$
$$(A',b')_{k1}=0,\quad k=2,3,\cdots$$

支点遴选

部分支点遴选

不为零的矩阵元为**支点元**，选取支点作为a_{11}过程称为支点遴选。选择a_{r1}中最大的作为支点是自然的，比起胡乱选择支点，这样选误差最小。

全局支点遴选

选取矩阵元中模最大的作为支点。

Gauss Elimination

$$
\begin{gathered}
(A^1, b^1) = G^1 P^1 (A^0, b^0) \\
(A^j, b^j) = G^j P^j (A^{j-1}, b^{j-1}) \\
(A^{n-1}, b^{n-1}) = (U, c)
\end{gathered}
$$

$$
(U, c) = \prod_{k=n-1}^{1} G^k P^k (A, b)
$$

complexity of computation: $\sim n^3/3$

矩阵的LU分解

LU decomposition

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$分解为一个下三角和上三角矩阵之积：

$$
A = LU
$$

可以证明，高斯消元法给出了A的一个LU分解。

$$
U = (\prod_{k=n-1}^{1} G^k P^k) A \equiv MA
$$

where

$$
G^j = \begin{pmatrix} I_j & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}
$$

G是一个n-j维的、第一列不为零的Frobinius矩阵。
we can prove that $L = PM^{-1}$ is 下三角矩阵， its diagonals are all 1. So we can get :

$$
PA = PM^{-1}U = LU
$$

LU可分解性?

A是否存在LU 分解取决于它哥哥子矩阵的rank。对任意矩阵LU分解定理比较复杂，但对一个实矩阵来说判断比较简单。

可分解判定

实矩阵A有唯一LU分解的充要条件是A的所有主子矩阵都非奇异。

注意

即便是奇异的矩阵，也可以有LU分解。只要它的哥哥主子矩阵直到n-1阶都是非奇异的即可。

Cholesky分解

Cholesky decomposition

对于正定厄米矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,可找到H使得

$$A = H^\dagger H$$

同时，我们可以要求H上三角。

$$\begin{aligned}A = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & 5 & -4\\ 2 & -4 & 6\end{pmatrix} = LL^T = \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & c & 0\\ d & e & f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & d\\ 0 & c & e\\ 0 & 0 & f\end{pmatrix}\\ = \begin{pmatrix}a^2 & ab & ad\\ ab & b^2+c^2 & bd+ce\\ ad & bd+ce & d^2+e^2+f^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cholesky分解也可以从LU分解中得到。先对正定厄密矩阵做LU分解，并把分解中的U矩阵写成对角矩阵乘以单位上三角矩阵的形式：

$$U = \mathrm{diag}\{u_{ii}\}\begin{pmatrix}1 & u12/u11 & \cdots & u_{1n}/u_{11}\\ & 1 & \cdots & \\ & & & 1\end{pmatrix} = DU_0$$

但实际由于对称性，可以用Cholesky分解省时间。

Cholesky 分解

正定矩阵的各阶主子矩阵也都是正定的。
对n=1，结果平庸。令$A_i \quad i = 1,\cdots,n$是第i阶主子矩阵。它们都是正定厄米的。

$$A_i = \begin{pmatrix}A_{i-1} & \vec{v}\\ \vec{v}^\dagger & \alpha\end{pmatrix} = H_i^\dagger H_i = \begin{pmatrix}H_{i-1}^\dagger & \vec{h}\\ 0^\dagger & \beta\end{pmatrix}$$

$$H_{i-1}^\dagger \cdot \vec{h} = \vec{v}$$

$$\vec{h}^\dagger\vec{h}+\beta^2=\alpha$$

由于H dagger与v已知，H dagger是一个下三角矩阵，我们可以轻松求解$\vec{h}$,从而

$$\beta=\sqrt{\alpha-\vec{h}^\dagger\vec{h}}$$