内插 函数计算 数据拟合

引言

假设仪测量点是按大小排列（支撑点|节点）。内插的函数要求$f(x)$必须满足：

$$f(x_i) = y_i, i = 0, 1, \cdots, n$$

支撑点数目越大，对函数的了解越精细。
内插与外推不同：内插问题感兴趣的是函数再区间内的值，外推感兴趣的是已知区间外的值。
内插与拟合不同：内插要求支撑点测得函数值是严格的；拟合一般要考虑y_i的误差

类型选择：取决于物理理解

- 多项式函数,...：假设无限光滑解析
- 分式函数,...：可能有奇异性
  函数的计算问题：
- 函数有明确的解析表达式
- 利用某种近似描写目标函数

Lagrange多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad x \in [x_0, x_n]$$

有$n+1$个参数a_i。我们希望$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, \cdots, n$
考虑

$$L_j(x) = \prod_{0 \le m \le n, m \ne j} \frac{x - x_m}{x_j - x_m}, \quad j = 0, 1, \cdots, n$$

这个多项式满足

$$L_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad 0 \le i, j \le n$$

那么把$P_n(x)$写作：

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

就满足拟合的要求。

牛顿内插

特点： 随着支撑点增多，再利用已有多项式的情形下，逐阶地提高多项式阶数

$$N(x)=\sum_{i=0}^{n}a_in_i(x)$$
$$n_i(x)=\prod_{k=0}^{i-1}(x-x_k), n_0(x)\equiv 1$$

$x_0,\cdots,x_{i-1}$是$n_i(x)$的根，它的系数是多少不影响总体多项式在这些点的值。
当有$x_0,\cdots,x_{i-1}$处值的多项式增加了x_i点的值，我们只要加入$a_in_i(x)$，计算系数a_i就可以了。

$$a_i=y_i-\left(a_0+a_1(x_i-x_0)+a_2(x_i-x_0)(x_i-x_1)+\cdots+a_{i-1}\prod_{k=0}^{i-1}(x_i-x_k)\right)$$

Neville算法

假设$n+1$个节点为$(x_i,f_i),\quad i=0,1,\cdots,n$构建递推关系:

$$P_i(x)\equiv f_i, i=0,1,\cdots,n$$
$$P_{i_0i_1\cdots i_k}(x)=\frac{(x-x_{i_0})P_{i_1\cdots i_k}(x)-(x-x_{i_k})P_{i_0\cdots i_{k-1}}(x)}{x_{i_k}-x_{i_0}}$$

可以证明

$$P_{i_0i_1\cdots i_k}(x_{i_j})=f_{i_j}\quad j=0,1,\cdots,k$$

上式是去端点的两个多项式的线性加权平均
对于端点值：$x=x_{i_0}\quad \text{or}\quad x=x_{i_k}$

多项式内插的误差估计

假设f(x)在$[x_0,x_n]$上有至少n+1阶导数，那么对于$\forall x\in[x_0,x_n]$，一定有$\xi\in[x_0,x_n]\quad \text{such that}$

$$f(x)-P_n(x)=\omega(x)f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$$

where $\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$。
i.e.

$$|f(x)-P_n(x)| \le \frac{|x_n-x_0|^2}{(n+1)!}\max_{x_0\le\xi\le x_n}|f^{(n+1)}(\xi)|$$

证明

$$G(x)=\frac{f(x)-P_n(x)}{\omega(x)}$$
$$\omega(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$\forall x^* \in [x_0,x_n], x^* \neq x_i$,define

$$K(x) \equiv f(x)-P_n(x)-G^*(x)\omega(x)$$

It has n+2 zero-points:

$$K(x_0,x_1,\cdots,x_n,x^*)=0$$

so its derivative of (n+1) order has at least 1 zero point.

$$\exists \xi \in [x_0,x_n] \quad K^{(n+1)}(\xi)=0$$
$$f^{(n+1)}(\xi)-(n+1)!G(x^*)=0$$

$\forall x \in [x_0,x_n]$, we have

$$f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!}\omega(x)$$

得证

Runge现象

当支撑点数目增加时，多项式的次数随之增加。在那些不是支撑点的地方，Lagrange内插对象是与期望值可能相差很远。

例子

$$f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$$

在$x\in[-1,1]$间内插，

$$\lim_{n\to\infty}(\max_{-1\le x\le 1}|f(x)-P_n(x)|)=+\infty$$

有理分式内插

当函数在某区间变化行为剧烈，我们可以用有理分式内插。

$$\Phi^{(m,n)}(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

递推式中的参数：

$$\begin{gathered}\phi(x_i,x_j)=\frac{x_i-x_j}{y_i-y_j}\\ \phi(x_i,x_j,x_k)=\frac{x_j-x_k}{\phi(x_i-x_j)-\phi(x_i-x_k)}\\ \cdots\\ \phi(x_i,\cdots,x_l,x_m,x_n)=\frac{x_m-x_n}{\phi(x_i,\cdots,x_m)-\phi(x_i,\cdots,x_l,x_n)}\end{gathered}$$

构造两个n次多项式的比$\Phi^{(n,n)}(x)$,可通过2n+1个点$\Phi^{(n,n)}(x_i)=y_i,i=0,1,\cdots,2n$

样条函数内插

二次样条函数:用一个二次多项式去连接两个点，能保证曲线端点处光滑。
找二次样条函数$S(x)$，满足

- S(x)在每个区间都是二次多项式
- 在所有节点具有一阶连续导数
- 满足$S(x_i)=y_i$

举例说明

有四个点x_0, x_1, x_2, x_3，假设边界设定为$f'(x_0)$已知.
[x_0,x_1]之间:$f'(x_0), f(x_0), f(x_1)$确定二次函数
[x_1,x_2]之间：$f'(x_1^-), f(x_1), f(x_2)$确定二次函数
...

三次样条函数内插

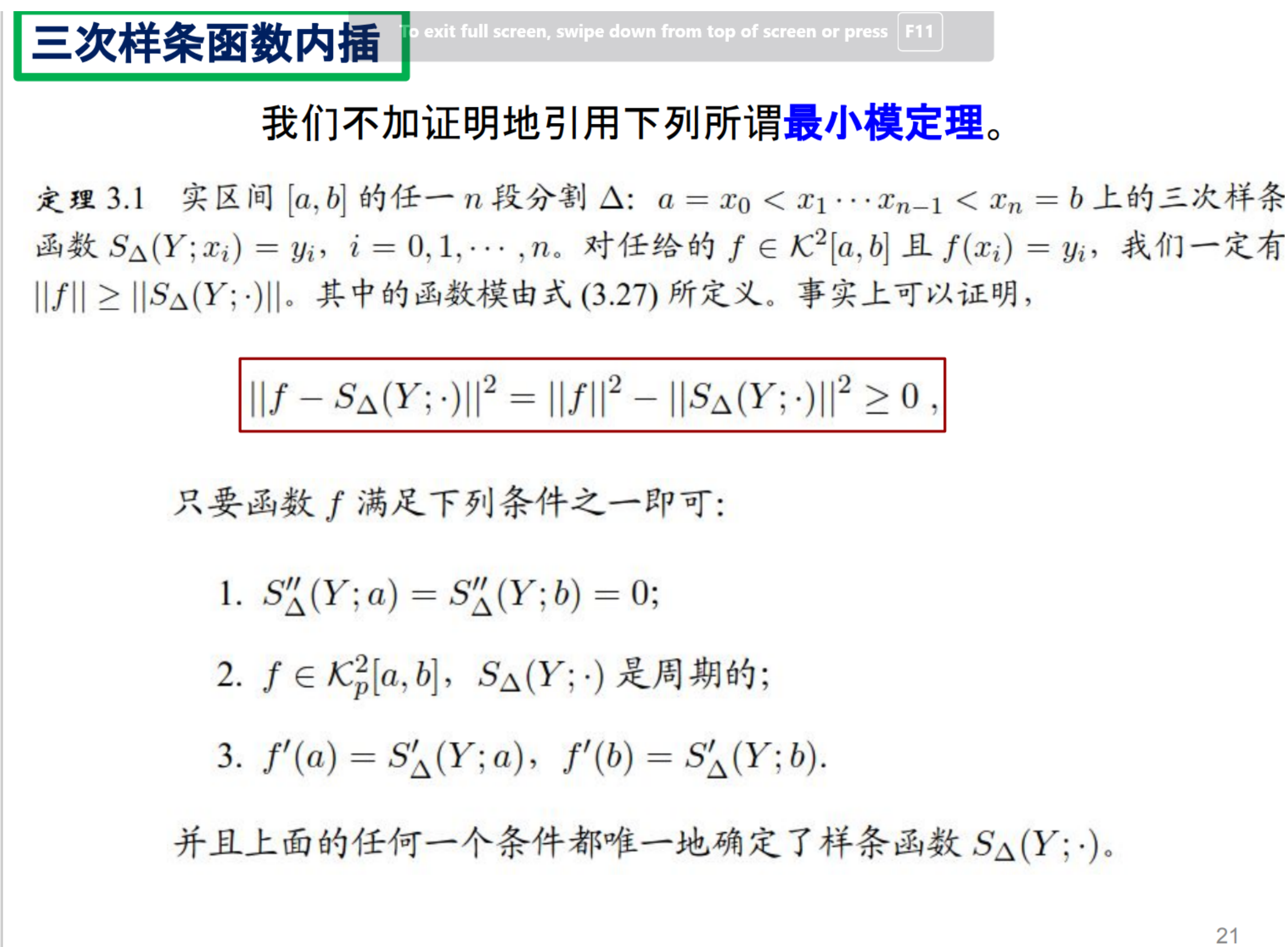
考虑区间$[a,b]$上m阶以下所有导数连续、m阶导数平方可积的函数空间$K^m[a,b]$,$\forall f \in K^2[a,b]$，定义函数模

$$||f|| = \int_a^b dx|f''(x)|^2$$

若函数导数很小，曲率接近于$f''(x)$。
三次样条函数可以使得这个模最小。也就是最光滑的函数。

最小模定理

最小模定理



三次样条函数内插

To exit full screen, swipe down from top of screen or press F11

我们不加证明地引用下列所谓**最小模定理**。

定理 3.1 实区间 $[a,b]$ 的任一 n 段分割 Δ: $a = x_0 < x_1 \cdots x_{n-1} < x_n = b$ 上的三次样条函数 $S_\Delta(Y; x_i) = y_i$，$i = 0, 1, \cdots, n$。对任给的 $f \in \mathcal{K}^2[a,b]$ 且 $f(x_i) = y_i$，我们一定有 $||f|| \geq ||S_\Delta(Y; \cdot)||$。其中的函数模由式 (3.27) 所定义。事实上可以证明，

$$\boxed{||f - S_\Delta(Y; \cdot)||^2 = ||f||^2 - ||S_\Delta(Y; \cdot)||^2 \geq 0\,,}$$

只要函数 f 满足下列条件之一即可：

1. $S''_\Delta(Y; a) = S''_\Delta(Y; b) = 0$;
2. $f \in \mathcal{K}_p^2[a,b]$，$S_\Delta(Y; \cdot)$ 是周期的;
3. $f'(a) = S'_\Delta(Y; a)$，$f'(b) = S'_\Delta(Y; b)$.

并且上面的任何一个条件都唯一地确定了样条函数 $S_\Delta(Y; \cdot)$。

21

三次样条函数的内插

需要$4n$个参数
中间节点、一阶、二阶导数连续+端点值 = 4n-2个方程
其他边界条件：

- 给定两端一阶导数
- 给定两端二阶导数
- 给定周期边界，一阶和二阶导数连续（$y_n = y_0$）
- 假定[x_0,x_2]用同一个三次多项式描述

函数的近似与计算：级数表达的函数计算

Chebyshev近似

$S(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n T_n(x)$
最小化

$$F = ||S(x) - f(x)||_2^2 = \int_a^b \left[\sum_n c_n T_n(x) - f(x)\right]^2$$

$\frac{\partial F}{\partial c_n} = 0$