微扰法求解非线性谐振子

非线性谐振子的方程为:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + Ax^2 + Bx^3 + \cdots = 0$$

我们假设加入非线性项之后，$x(t)$依然是一个周期函数，但振动的周期和函数形式不再是简单的简谐振动$\sin(\omega_0 t), \cos(\omega_0 t)$。但由于它还是周期函数（假设这个原频率为$\omega$），我们可以对它进行傅里叶级数展开:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\omega t}$$

其中f_n是各项的振幅。

X^N的计算

问题

我们有了$x(t)$的展开式，如何计算各阶非线性项中$x^n(t)$的值？这是计算的**核心问题**

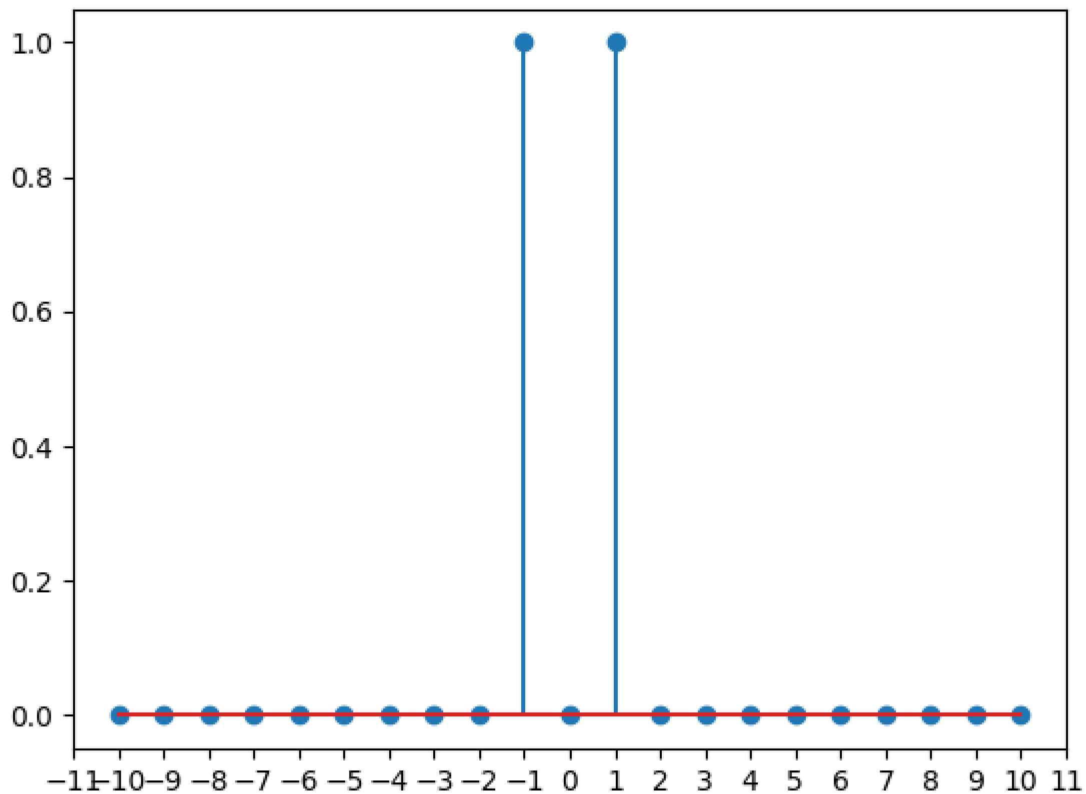
$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\omega t} \\
x^2(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m-\infty}^{\infty} f_n f_m e^{i(n+m)\omega t} \\
&= \sum_{u=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n f_{u-n} \right) e^{iu\omega t} \\
&= \sum_{u=-\infty}^{\infty} g_u e^{iu\omega t}
\end{aligned}
$$

其中$g_u = (f*f)_u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n f_{u-n}$是序列$f_n$和自己的离散卷积
同理，$x^k(t)$的计算就是k个序列f_n作离散卷积，结果与f_n一样，也构成一个无穷序列。下面我们展示一个离散卷积的计算示例。

离散卷积

我们将以$f^{(0)}$为例，展示卷积的计算过程。$f^{(0)}$的表达式为：

$$f_1^{(0)} = a$$
$$f_{-1}^{(0)} = \overline{a}$$

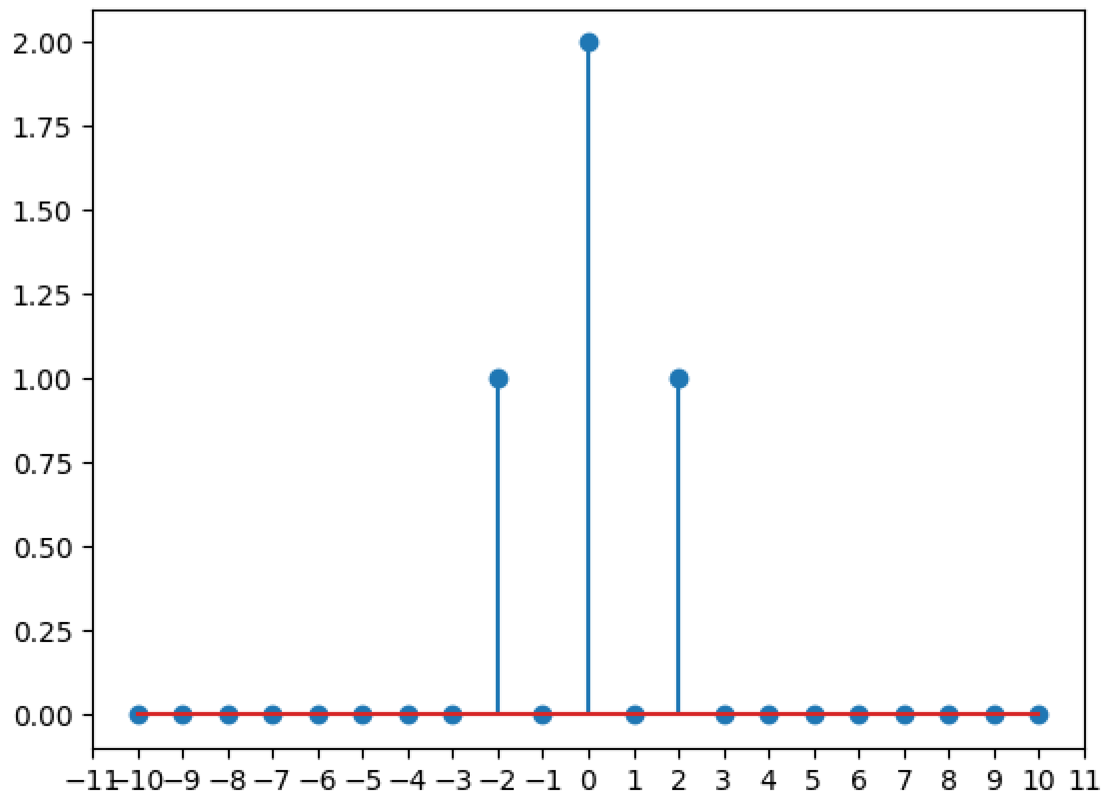

1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−11 −10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

计算$g = f^{(0)} * f^{(0)}$:

$$g_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^{(0)} f_{-n}^{(0)} = 2a\overline{a}$$

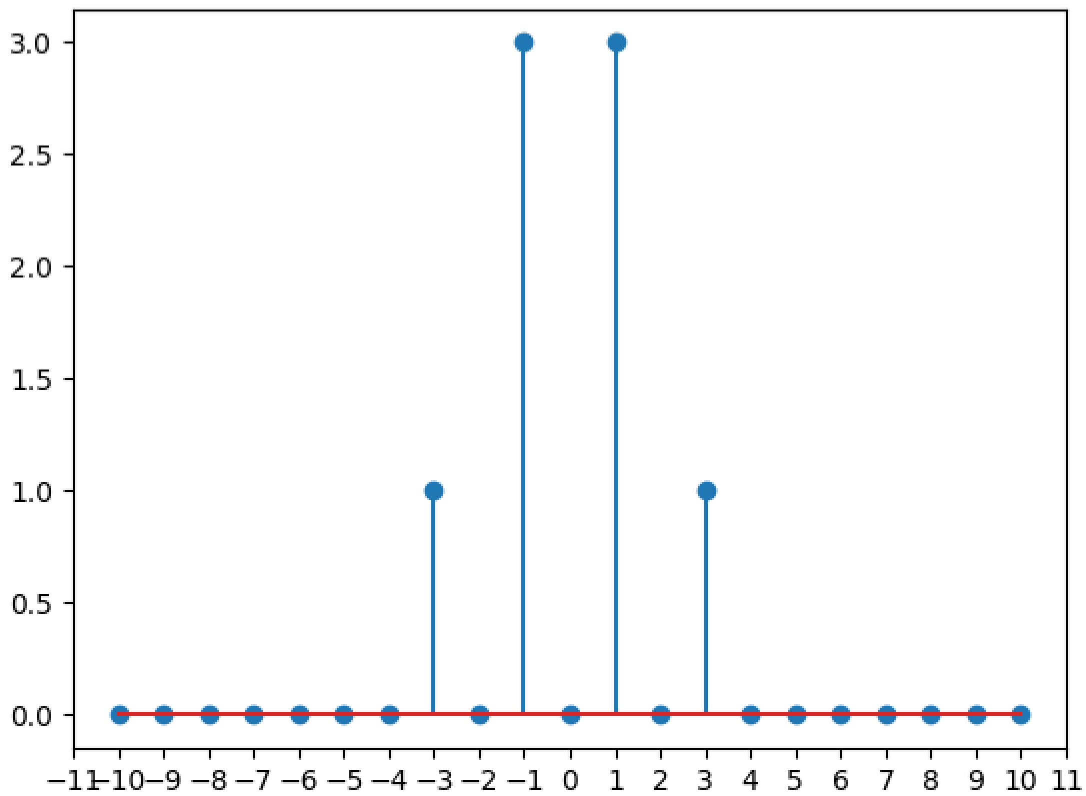
$$g_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^{(0)} f_{2-n}^{(0)} = a^2,$$

$$g_{-2} = \overline{a}^2$$


2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−11 −10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

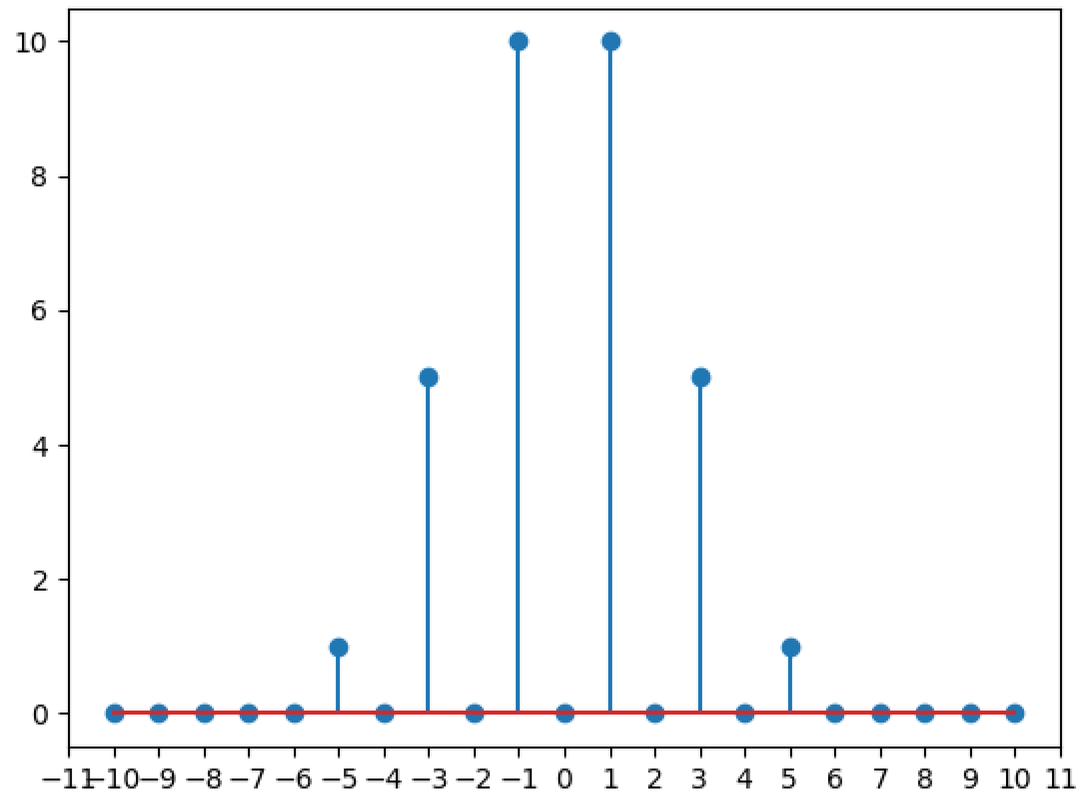
在此基础上计算$h = f^{(0)} * f^{(0)} * f^{(0)} = g * f^{(0)}$:

$$
\begin{aligned}
h_3 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^{(0)} f_{3-n}^{(0)} = a^3, \\
h_{-3} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^{(0)} f_{-3-n}^{(0)} = \overline{a}^3 \\
h_{\pm 1} &= 3a^2\overline{a}, 3a\overline{a}^2
\end{aligned}
$$



3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−11 −10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

卷积计算可以不断地进行下去：



……

总结

可以看出，对同一个函数地频谱进行多次卷积，会使得频谱由低频区向两侧的高频区扩展开来。这也是非线性谐振子频谱中高频项的来源。

计算

1.线性情形下的计算

当方程没有非线性项时：

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

它的通解为：

$$x(t) = a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t)$$

或者写成复数形式：

$$x(t) = f_1 e^{i\omega_0 t} + f_{-1} e^{-i\omega_0 t}$$

由于x是实数，所以$f_1 = f^*_{-1}$

2.非线性情形的计算思路

当存在非线性项，且非线性项的能量远小于谐振子项时,我们假设它对f_n和ω的影响也是很小的，所以可以写成：

$$f_n = f_n^{(0)} + f_n^{(1)} + f_n^{(2)} + \cdots$$
$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \cdots$$

把它们和非线性项代入方程：

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + Ax^2 + Bx^3 + \cdots = 0$$

$0 = \frac{\mathrm{d}^2}{dt^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f_n^{(0)} + f_n^{(1)} + f_n^{(2)} + \cdots) e^{in(\omega_0+\omega_1+\omega_2+\cdots)t} + \omega_0^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f_n^{(0)} + f_n^{(1)} + f_n^{(2)} + \cdots) e^{in(\omega_0+\omega_1+\omega_2+\cdots)t} + A \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \cdots) * (f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \cdots)_n e^{in(\omega_0+\omega_1+\omega_2+\cdots)t} + B \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f * f * f)_n e^{in(\omega_0+\omega_1+\omega_2+\cdots)t}$

以上式子可以简写成：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-n^2\omega^2 f_n + \omega_0^2 f_n + A(f*f)_n + B(f*f*f)_n + \cdots)e^{in\omega t} = 0$$

左侧为傅里叶展开式，右边是零，由$e^{in\omega t}$的完备性知，左侧各项系数为0：

$$-n^2\omega^2 f_n + \omega_0^2 f_n + A(f*f)_n + B(f*f*f)_n + \cdots = 0 \qquad \forall n = 0, \pm1, \pm2,$$

$-n^2(\omega_0+\omega_1+\omega_2+\cdots)^2(f_n^{(0)}+f_n^{(1)}+f_n^{(2)}+\cdots)+\omega_0^2(f_n^{(0)}+f_n^{(1)}+f_n^{(2)}+\cdots)+A\sum_{n=-\infty}^{\infty}(f^{(0)}+f^{(1)}+f^{(2)}+\cdots)*(f^{(0)}+f^{(1)}+f^{(2)}+\cdots)_n+\cdots=0$

将上式按大小阶数展开，相同阶数和为零，得到方程：

第零阶：　$(-n^2+1)\omega_0^2 f_n^{(0)} = 0, \forall n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

第一阶：　$A(f^{(0)}*f^{(0)})_n + \omega_0^2 f_n^{(1)} - 2n^2\omega_0\omega_1 f_n^{(0)} - n^2\omega_0 f_n^{(1)} = 0, \forall n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$

第零阶

从第零阶中可以解出

$$\begin{cases} f_n^{(0)} = 0, n \neq \pm 1 \\ f_n^{(0)} \neq 0, n = \pm 1 \end{cases}$$

由于$x(t)$为实数，$f_n = f_n^*$，不妨设$f_1^{(0)} = a, f_{-1}^{(0)} = \overline{a}$
这对应线性项：

$$x(t) = 2\mathrm{Re}(a)\cos\omega_0 t - 2\mathrm{Im}(a)\sin\omega_0 t$$

第一阶

$$A(f^{(0)} * f^{(0)})_n + \omega_0^2 f_n^{(1)} - 2n^2\omega_0\omega_1 f_n^{(0)} - n^2\omega_0 f_n^{(1)} = 0, \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

第一阶中含有$f_n^{(1)}$, ω_1两个未知量。

当$n \pm 1$时，方程中$f_n^{(1)}$前系数为零，方程中只剩下ω_1,可以解出：

$$A(f^{(0)} * f^{(0)})_{\pm 1} - 2\omega_0\omega_1 f_{\pm 1}^{(0)} = 0$$
$$\omega_1 = \frac{A(f^{(0)} * f^{(0)})_{\pm 1}}{2\omega_0 f_{\pm 1}^{0}}$$

经过计算知道$\omega_1 = 0$.当$n \neq \pm 1$时，代入$\omega_1 = 0$可以计算各个$f_n^{(1)}$的值：

$$f_n^{(1)} = \frac{A(f^{(0)} * f^{(0)})_n}{(n^2 - 1)\omega_0^2} \qquad (n \neq \pm 1)$$

看起来我们无法计算$f_{\pm 1}^{(1)}$的值，但因为第零阶中的a是人为规定的，故可以包含高

阶下$n=\pm1$的微扰（相当于假设振动基频的振幅就是$a,\overline{a}$）
因此我们不妨设$f_{\pm1}^{(1)}=0$

$$f_0^{(1)}=-\frac{2A_1a\overline{a}}{\omega_0^2},f_{-2}^{(1)}=\frac{A_1\overline{a}^2}{3\omega_0^2},f_2^{(1)}=\frac{A_1a^2}{3\omega_0^2}$$

更高阶的一般性分析

第k阶的方程可以写作:

$$(-n^2+1)\omega_0^2 f_n^{(k)} - 2 f_n^{(0)} n^2 \omega_0 \omega_k +$$
$$\lambda_n(\omega_0^2, A_1, \cdots, A_k, \omega_1, \cdots, \omega_{k-1}, f_n^{(0)}, f_n^{(1)}, \cdots, f_n^{(k-1)}) = 0$$

在求第k阶之前，我们已经求得了$\omega_1, \cdots, \omega_{k-1}, f_n^{(0)}, \cdots, f_n^{(k-1)}$的值，因此函数$\lambda_n$是已知项

- $n = \pm 1$ 可以求出ω_k
- $n \neq \pm 1$可以求出$f_n^{(k)} (n \neq \pm 1)$
  因此可以不断地计算下去。

计算自动化

可以看到，更高阶的计算十分繁琐，涉及的计算不仅项数极多，而且计算式中存在对无穷序列的多次离散卷积，很难处理。为了减少计算量，我们转向自动化符号计算工具(sympy)，开发了一个计算各阶项参数的程序

一些重要的结果:

(下面设定$f_1^{(0)}=a, f_{-1}^{(0)}=\overline{a}$)

第一阶:

$$\omega_1=0$$
$$f_0^{(1)}=-\frac{2A_1a\overline{a}}{\omega_0^2}$$
$$f_2^{(1)}=\frac{A_1a^2}{3\omega_0^2},\qquad f_{-2}^{(1)}=\frac{A_1\overline{a}^2}{3\omega_0^2}$$

第二阶:

$$\omega_2=\frac{a\left(-10A_1^2+9A_2\omega_0^2\right)\overline{a}}{6\omega_0^3}$$
$$f_3^{(2)}=\frac{A_1^2a^3}{12\omega_0^4}+\frac{A_2a^3}{8\omega_0^2},\qquad f_{-3}^{(2)}=\frac{A_1^2\overline{a}^3}{12\omega_0^4}+\frac{A_2\overline{a}^3}{8\omega_0^2}$$

第三阶:

$$\omega_3=0$$
$$f_0^{(3)}=-\frac{38A_1^3a^2\overline{a}^2}{9\omega_0^6}+\frac{10A_1A_2a^2\overline{a}^2}{\omega_0^4}-\frac{6A_3a^2\overline{a}^2}{\omega_0^2}$$
$$f_2^{(3)}=\frac{59A_1^3a^3\overline{a}}{54\omega_0^6}-\frac{31A_1A_2a^3\overline{a}}{12\omega_0^4}+\frac{4A_3a^3\overline{a}}{3\omega_0^2},\qquad f_{-2}^{(3)}=\frac{59A_1^3a\overline{a}^3}{54\omega_0^6}-\frac{31A_1A_2a\overline{a}^3}{12\omega_0^4}+$$

$$\frac{4A_3\,a\overline{a}^3}{3\omega_0^2}$$

$$f_4^{(3)} = \frac{A_1^3 a^4}{54\omega_0^6} + \frac{A_1 A_2 a^4}{12\omega_0^4} + \frac{A_3 a^4}{15\omega_0^2}, \qquad f_{-4}^{(3)} = \frac{A_1^3 \overline{a}^4}{54\omega_0^6} + \frac{A_1 A_2 \overline{a}^4}{12\omega_0^4} + \frac{A_3 \overline{a}^4}{15\omega_0^2}$$

规律

(查看输出结果)

- $\omega_{2k} \neq 0, \omega_{2k+1} = 0$
- 圆频率修正的大小和振幅相关，而线性振子的圆频率和振幅无关。这是**非线性振子**的特性
- 阶数k与频谱修正项关系：
  - 共轭：$f_n^{(k)} = \overline{f_{-n}^{(k)}}$
  - k阶的频谱修正$f_n^{(k)}$只对有限个n不为0，且k越大不为零的数量越多
    - $k = 1 : n = 0, \pm 2$
    - $k = 2 : n = \pm 3$
    - $k = 3 : n = 0, \pm 2, \pm 4$
  - 奇偶性：k为奇数时，存在对f_0（也就是平衡位置）的修正。这是因为谐振子该阶项对应的受力始终沿着一个方向；k为偶数时对f_0的修正为0
- 非线性项A_i对频谱修正的关系：
  - A_k对频谱的影响从第k阶开始出现，会出现无限多包含A_k的项

分别代入各A_I的情况

(查看)
一些性质:

- 不同A_i产生的频谱不能叠加（因为存在A_1A_2这样的项）
- A_1对各阶修正频率的影响:
  - A_{2k}只影响$\omega_{2k},\omega_{2k+2},\cdots$
  - A_{2k+1}只影响$\omega_{2k+1},\omega_{2k+3},\cdots$
- A_1对各阶修正频谱的影响:
  - A_{2k}对所有阶数$\geq 2k$的f_n^k有影响
  - A_{2k+1}只影响奇数阶项:$f^{2k+1},f^{2k+3},\cdots$