

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ
ВОПРОС ПО ВЫБОРУ, 4 СЕМЕСТР

Фурье-спектрометрия

Студенты

Георгий КОРЕПАНОВ
Иван КАРАСЕВ

Преподаватель

Сергей Николаевич
ЖАБИН



24 января 2018 г.

Пару слов о Фурье-спектроскопии

Интерференция света открывает широчайшие возможности для исследования спектральных характеристик излучения. Так, например, дифракционная решетка является известнейшим спектральным прибором, интерферометр Фабри-Перо обеспечивает прекрасное разрешение при достаточной отражательной способности зеркал.

Легко придумать и еще одно, на первый взгляд неочевидное применение интерференции для исследования спектров. Зная геометрические параметры некоторой интерференционной схемы, можно легко вычислить длину волны монохроматического излучения, поданного на вход этой схемы. Фактически это и дает спектр этого излучения. Можно пойти дальше: например, подавая волну, спектр которой состоит уже из двух линий, можно увидеть биения, естественным образом возникающие при сложении волн разных частот:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

Измерив период биений и основную частоту, можно получить среднюю длину волны и расстояние между близкими спектральными компонентами.

Очевидно, что каждая новая спектральная компонента по-своему изменяет вид интерференционной картины. Предположение о том, что по интерферограмме¹, можно вычислить исходный спектр, оправдываемое содержанием теоремы Винера-Хинчина, позволило создать Фурье-спектрометры, обладающими высочайшей разрешающей способностью² и высокой скоростью получения спектра.

Попробуем реализовать эту идею на практике, чтобы изучить технические требования к оборудованию, необходимые для реализации столь простой, казалось бы, идеи, а также перспективность Фурье-спектроскопии в условиях учебных физтеховских лабораторий.

¹зависимости интенсивности от разности хода в данной интерференционной схеме

²разрешающая способность современных Фурье-спектрографов легко достигает 10^6 и более

Теоретическое описание (теорема Винера-Хинчина)

В основе идеи фурье-спектрометрии лежит теорема Винера-Хинчина, которая связывает спектр излучения с интерферограммой. Приведем строгое ее доказательство.

Функция автокорреляции в терминах усреднения по времени может быть записана следующим образом:

$$\Gamma(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau)dt.$$

Для ограниченных во времени процессов указанный предел равен нулю $\forall \tau$, однако для случайного стационарного процесса предел вполне имеет смысл. Для дальнейшей работы с преобразованием Фурье рассмотрим одну из реализаций $x_T(t)$ процесса $x(t)$, обрезав его вне временного интервала $[-T/2, T/2]$:

$$\begin{aligned} x_T(t) &= x(t), t \in [-T/2, T/2], \\ x_T(t) &= 0, t \notin [-T/2, T/2]. \end{aligned}$$

Ограниченнная во времени реализация может быть записана через преобразование Фурье:

$$x_T(t + \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\omega) e^{i\omega(t+\tau)} d\omega.$$

Подставив это разложение в определение Γ , поменяв порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \Gamma(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\omega) e^{i\omega(t+\tau)} d\omega \right] dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{i\omega t} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\omega) e^{i\omega\tau} x_T^*(\omega) d\omega = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{|x_T(\omega)|^2}{\pi T} \right) e^{i\omega\tau} d\omega \end{aligned}$$

В последнем равенстве переставлены местами операция интегрирования и предельного перехода, что обоснованно теоремой об однородной сходимости³, а также использовано статистическое определение спектральной плотности $S(\omega)$.

$S(\omega)$ определяется как усредненная спектральная характеристика спектрального процесса:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|x_T(\omega)|^2}{\pi T}.$$

Очевидно, введенная таким образом спектральная плотность удовлетворяет естественному условию

$$I = \overline{x^2(t)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega,$$

³материалы по математическому анализу Карасева Р.Н., rkarasev.ru

т.к. согласно равенству Парсеваля

$$\int_{-T/2}^{T/2} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(\omega)|^2 d\omega,$$

и, по определению,

$$\overline{x_T^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T^2(t) dt.$$

Тем самым теорема доказана:

$$\boxed{\Gamma(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.}$$

Неудачные эксперименты

1. Интерферометр Майкельсона – требуется высокоточная подгонка деталей, качественная станина, способ перемещать зеркало без нарушения перпендикулярности зеркал.

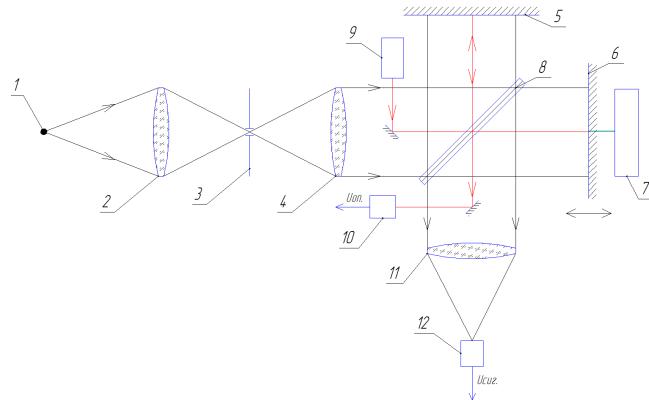


Рис. 1: Схема интерферометра Майкельсона

2. Схема Юнга – как минимум, сильно ограниченная интерферограмма из-за огибающей от дифракции на одной щели.
3. Интерферометры Релея и Жамена – требуют точного измерения давления (и знания точной зависимости показателя преломления от давления), не позволяют удобно и быстро менять разность хода, имеют собственный спектр поглощения
4. Оптоволоконный интеферометр – работает в узких спектральных диапазонах, требует дорогостоящего высокотехнологичного оборудования.

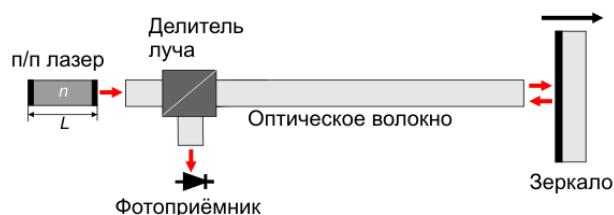


Рис. 2: Схема оптоволоконного интерферометра

Интерференция на клине: спектр «на коленке»

После длительного поиска возможностей для получения качественной интерферограммы, размеры которой не будут сильно ограничены ни размером щелей, ни радиусами временной и пространственной когерентностей, мы разработали следующую схему.

Удобной оказалась интерференция на двух плоскопараллельных пластинках, установленных под известным углом друг к другу (два покровных стекла, сжатых вместе и отделенных с одной стороны слоем известной толщины). Природа полос такая же, как в схеме колец Ньютона, однако полосы прямые и разность хода линейно зависит от смещения, что дает возможность получить достаточно длинную интерферограмму.

Интерференционная картина

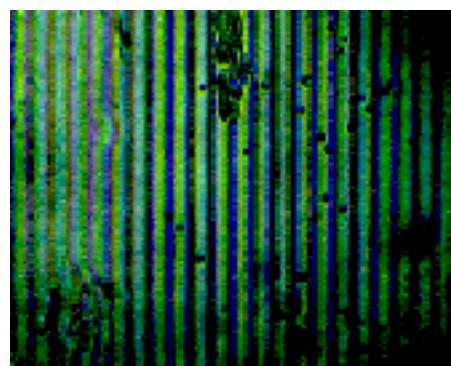


Рис. 3: Интерференционные полосы на пластинах

Интерференция наблюдается в отраженном свете, что создает существенную проблему: определить минимальную засветку поля зрения, осветив при этом максимальную площадь поверхности. Несовершенство имеющегося оборудования и отсутствие достаточного количества времени сделали эту проблему критической, но в результате был достигнут некий оптимальный результат, изображенный на рисунке.

Очевидно, такой картины недостаточно для того, чтобы прописать содержательную интерферограмму, поэтому пришлось перемещать поверхность пластинок и делать последовательные фотографии, с тем, чтобы их впоследствии «спинуть».

В качестве источника света использовалась **ртутная лампа (ДРЛ)**, как источник с достаточно простым легким проверяемым спектром.

Обработка данных

Исходные изображения

В силу упомянутой проблемы малой освещенной области интерференционная картина занимала лишь малую часть матрицы зеркального фотоаппарата:



Рис. 4: Одна из исходных фотографий

50 отснятых фотографий подвергались пакетной обработке с помощью набора скриптов, написанных в среде MATLAB:

5. Совмещение фотографий с помощью вычисления корреляции между последовательными фотографиями при различных смещениях:

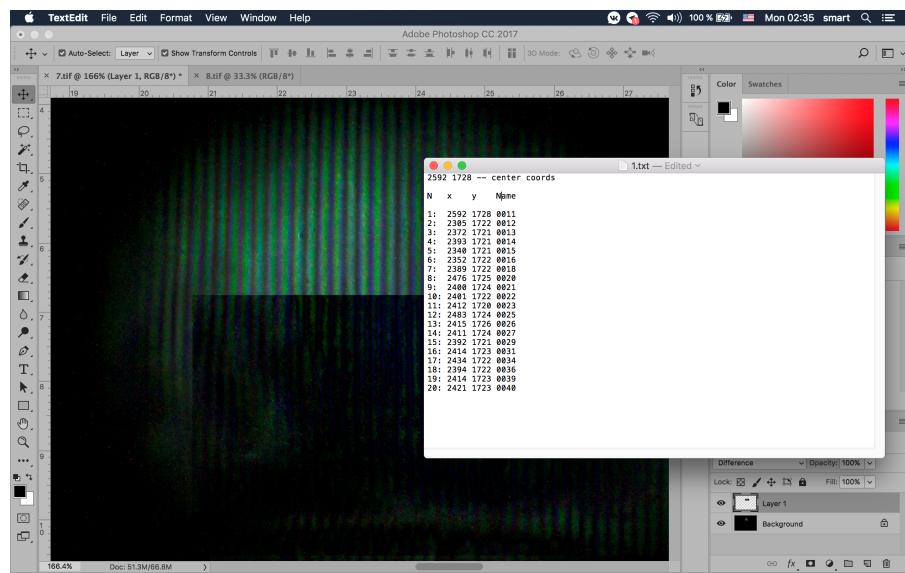


Рис. 5: Совмещение фотографий «вручную» для проверки работы алгоритма

6. Автоматическая обрезка фотографии с выбором наиболее релевантного участка (с наименьшей замусоренностью):

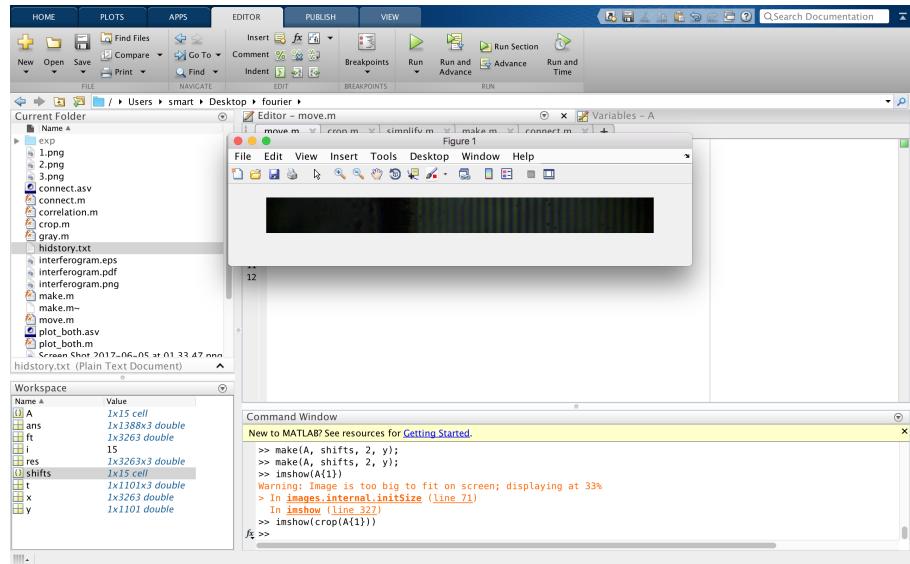


Рис. 6: Обрезка скриптом в MATLAB

7. Построчное суммирование кадра и переход от фотографии к линейному массиву чисел (относительных единиц интенсивности каждого пикселя)
8. Выравнивание средней интенсивности интерференционной картины вдоль кадра:

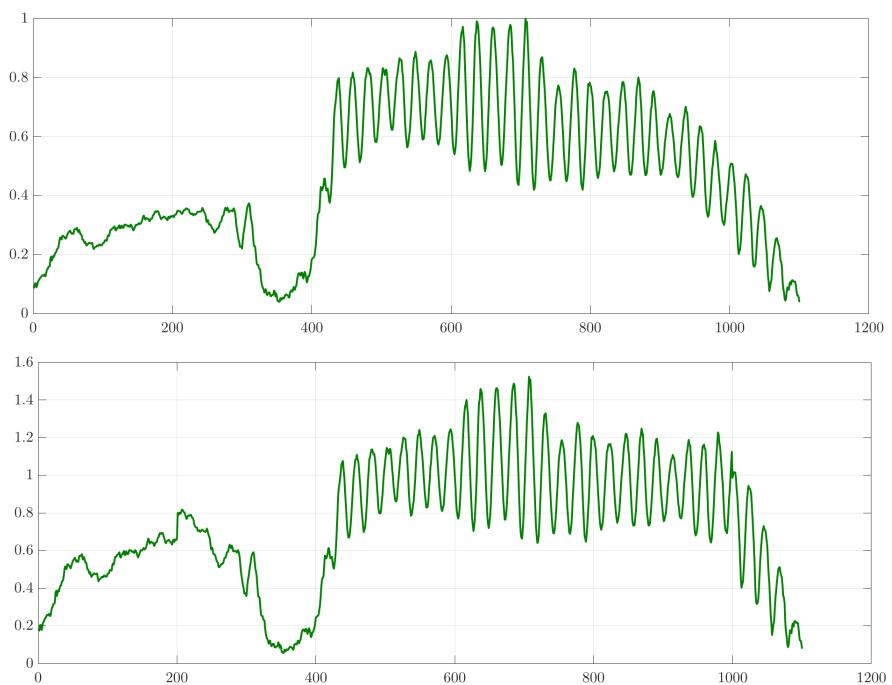


Рис. 7: До и после выравнивания интенсивности

9. Гладкая «спивка» функций наложением огибающей, дающей среднее арифметическое в точке пересечения, также найденной алгоритмом:

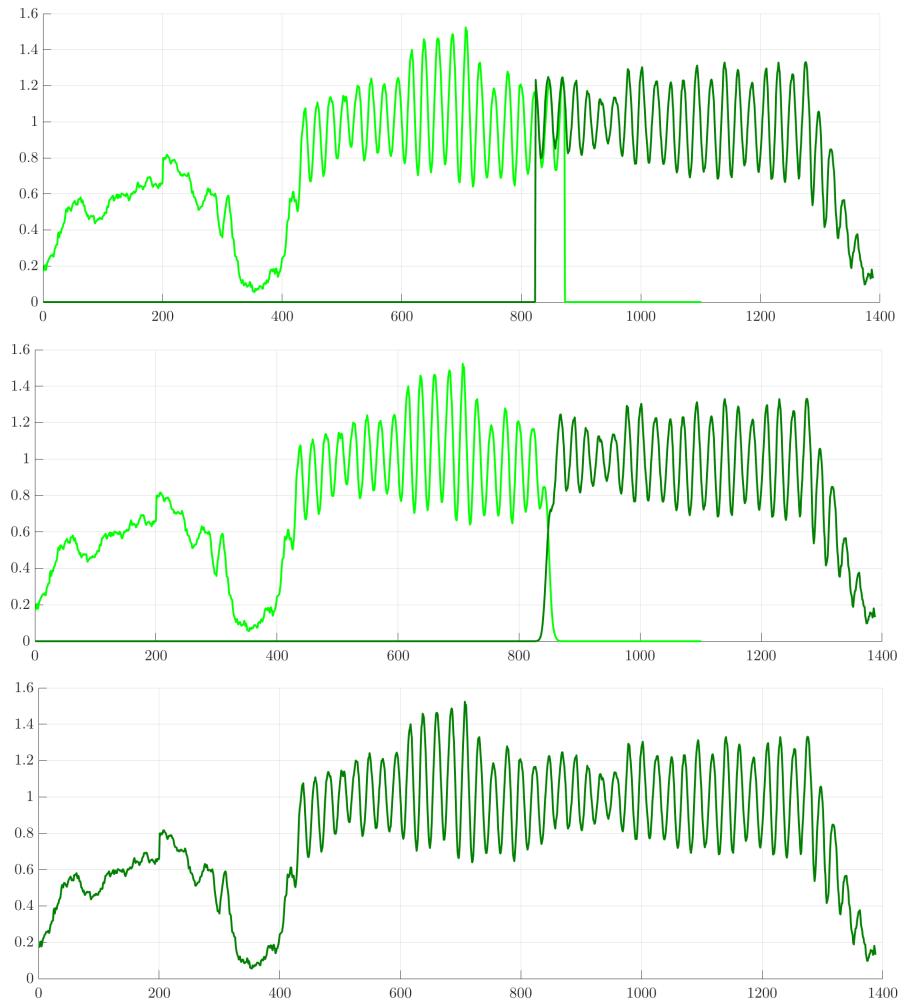


Рис. 8: Последовательные этапы «шитья»

В итоге была получена достаточно длинная интерферограмма (здесь и далее, если не указано иное, по оси абсцисс указан номер пикселя, по вертикали отложены относительные единицы, пропорциональные интенсивности):

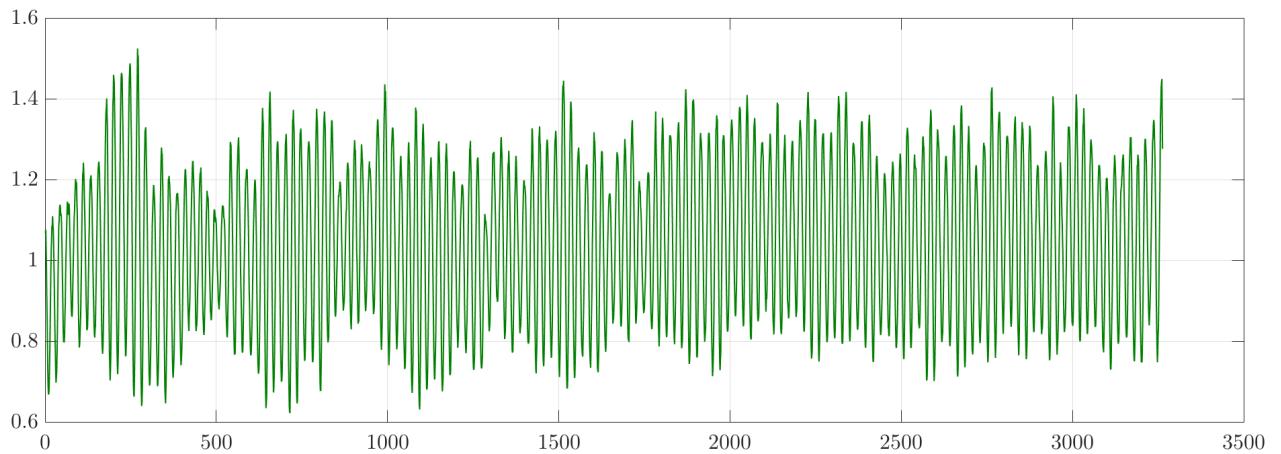


Рис. 9: Интерферограмма

Результаты и сравнение с известными параметрами спектра

Вычислив дискретное преобразование Фурье от полученной интерферограммы, получим спектр излучения ртутной лампы:

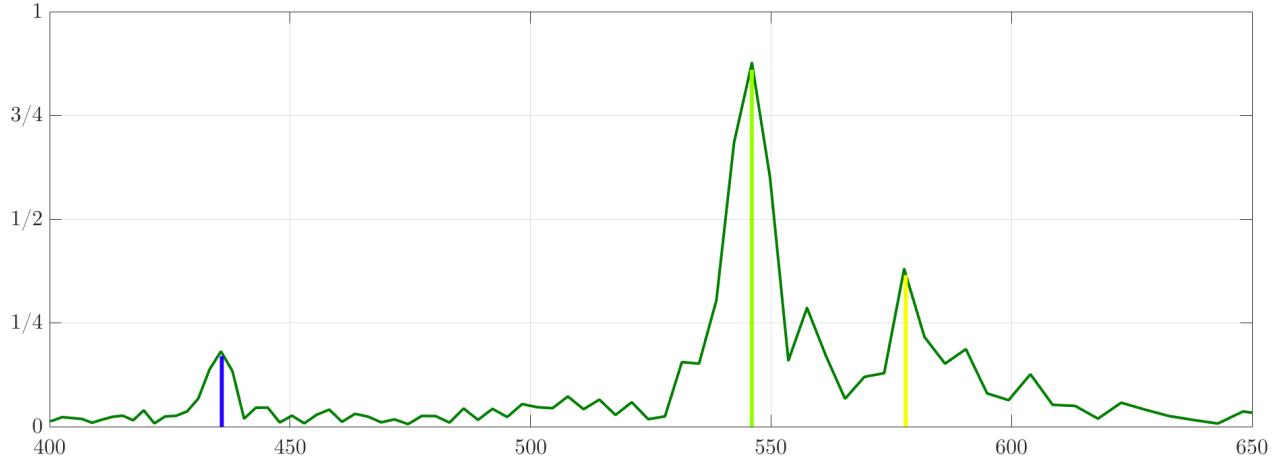


Рис. 10: Спектр ртутной лампы, вычисленный по ДПФ интерферограммы

На графике цветными вертикальными линиями обозначены известные значения длин волн самых ярких линий ртутной лампы.

Абсолютные значения совпали с точностью $\varepsilon = 0,01\%$.

Выводы

1. Изучен принцип Фурье-спектроскопии
2. Исследованы перспективы использования различных интерференционных схем для реализации указанного метода
3. Использована схема с двумя полоскопараллельными пластинками
4. Получен спектр ртутной лампы, проверена адекватность и применимость Фурье-спектроскопии в реальных условиях