



Кафедра общей физики

Гармонический анализ

Выполнил: Корепанов Г.М.
512 группа

Преподаватель: Данилин Валерий Алексеевич

Долгопрудный, 2016 г.

1 Цель работы

Изучить спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности щугов и амплитудно - модулированных гармонических колебаний.

2 Теоретический материал

2.1 Спектральный анализ

Рассмотрим функцию вида:

$$f(t) = A_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + \dots + A_n \cos(\omega_n t - \alpha_n)$$

или, что то же самое:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos(\omega_i t - \alpha_i)$$

Причем, A_i, ω_i, α_i - постоянные константы. Множество пар (ω_i, A_i) , $i \in 1..N$ - называется спектром функции $f(t)$.

2.2 Периодические сигналы

Часто встречающаяся задача - разложение сложного сигнала на гармонические колебания различных частот ω . Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется *разложением в ряд Фурье*.

Пусть заданная функция $f(t)$ - периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения сигнала $f(t)$. Её разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t) \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n) \quad (2)$$

где $\frac{a_0}{2}$ - среднее значение функции $f(t)$. Постоянные a_n и b_n определяются выражениями:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt \quad (4)$$

причем точку t_1 можно выбрать любую.

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (5)$$

$$\psi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n} \quad (6)$$

3 Работа и измерения

Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

V_0 - амплитуда, τ - длительность, $f_{\text{повт}} = \frac{2\pi}{T}$ - частота повторения.

Согласно формуле 3 находим:

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n f_{\text{повт}} t) dt \sim \frac{\sin(x)}{x} \quad (7)$$

В силу чётности функции $\forall n \in N b_n = 0$. Таким образом, спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов должен выглядеть как график $\frac{\sin(x)}{x}$.

Работа

В работе используются: *анализатор спектра СК4-56; генератор прямоугольных импульсов Г5-54; осциллограф*

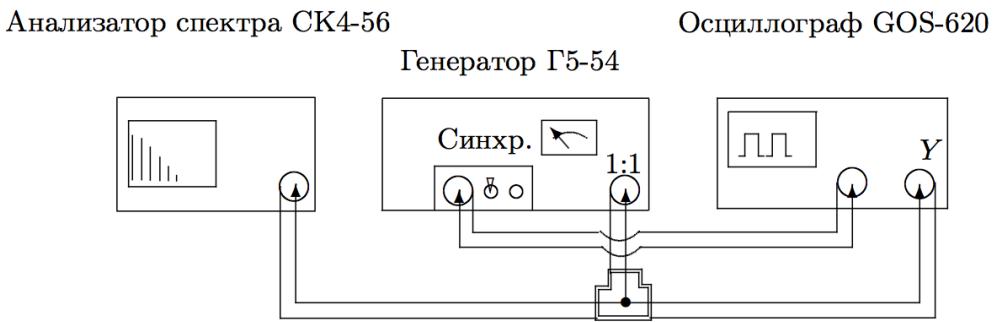


Рис. 1: Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Собираем схему согласно 1. Получаем на экране осциллографа последовательность периодических прямоугольных импульсов. Подключаем анализатор спектра СК4-56 и после настройки наблюдаем спектр сигнала с параметрами:

$$f_{\text{повт}} = 10^3 \text{ Гц}, \tau = 25 \text{ мкс}, m_x = 5 \text{ кГц}$$

При увеличении частоты повторений $f_{\text{повт}}$ вдвое при неизменном τ , увеличивается расстояние $\delta\nu$. При увеличении τ вдвое при неизменной частоте повторений, уменьшается ширина спектра, в соответствии с соотношением неопределенности: $\Delta\nu\tau \simeq 1$.

Измерения

$$\sigma\Delta\nu = 2.5 \text{ кГц}$$

$\tau, \text{мкс}$	150	125	100	80	50	40	30	25	20
$\Delta\nu, \text{кГц}$	7	8.5	10	12.5	19	23	34	41	50
$1/\tau, \text{кГц}$	7	8	10	12.5	20	25	33	40	50

Таблица 1: Зависимость ширины $\Delta\nu$ спектра от длительности импульса τ

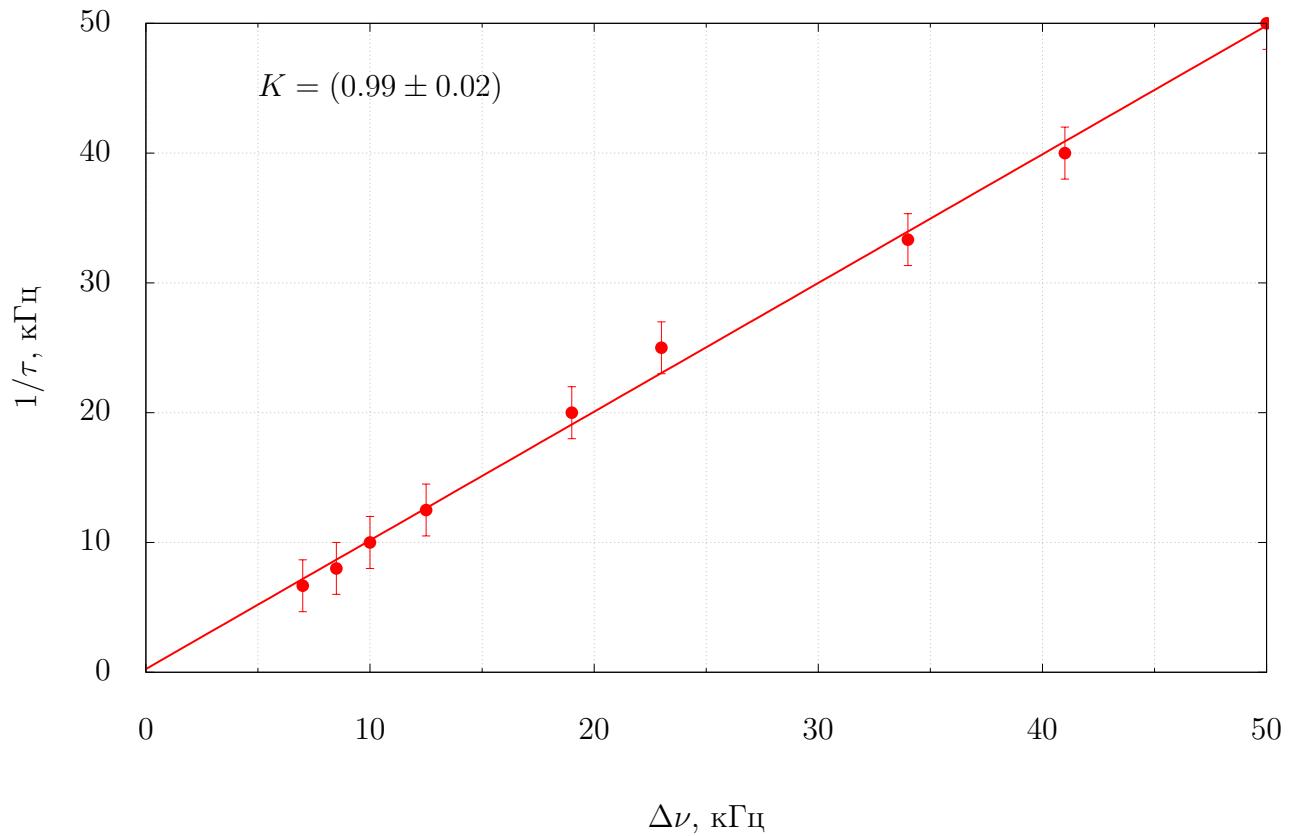


Рис. 2: График зависимости $\Delta\nu(\frac{1}{\tau})$

Коэффициент угла наклона прямой и его погрешность посчитаем методом наименьших квадратов: $\Delta k = \Delta(\nu\tau) = 0,99 \pm 0,05$

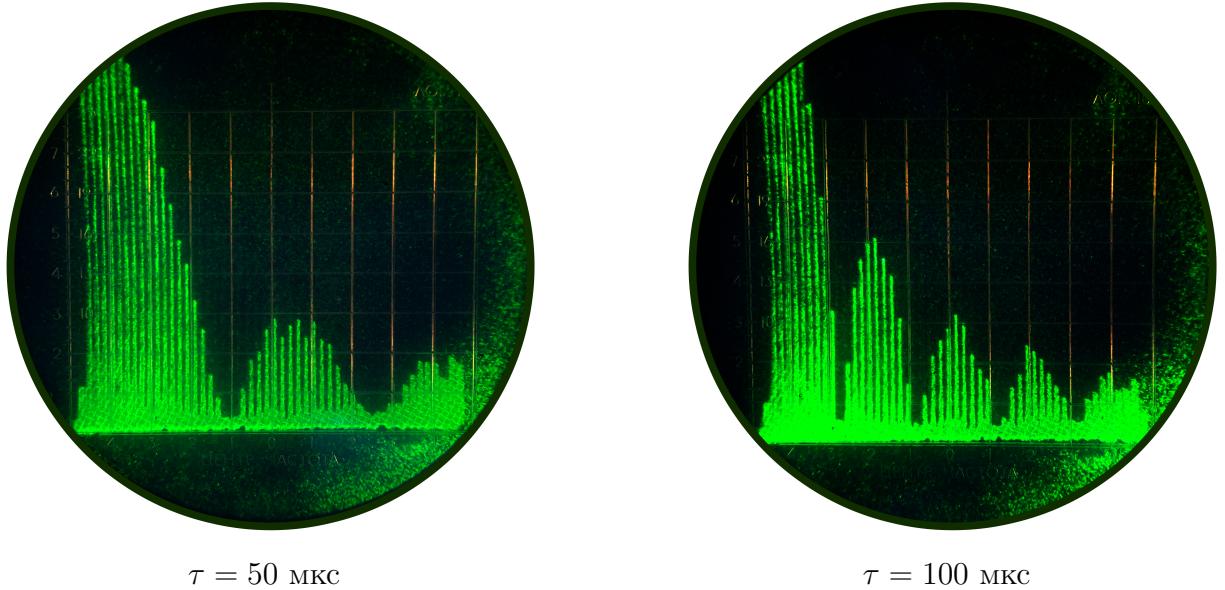


Рис. 3: Спектры колебаний с различными параметрами длительности импульса

Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Рассмотрим периодическую последовательность цугов гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ . Тогда согласно 3:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1) dt \quad (8)$$

Работа

В работе используются: анализатор спектра СК4-56; генератор прямоугольных импульсов Г5-54; осциллограф; генератор сигналов Г6-34

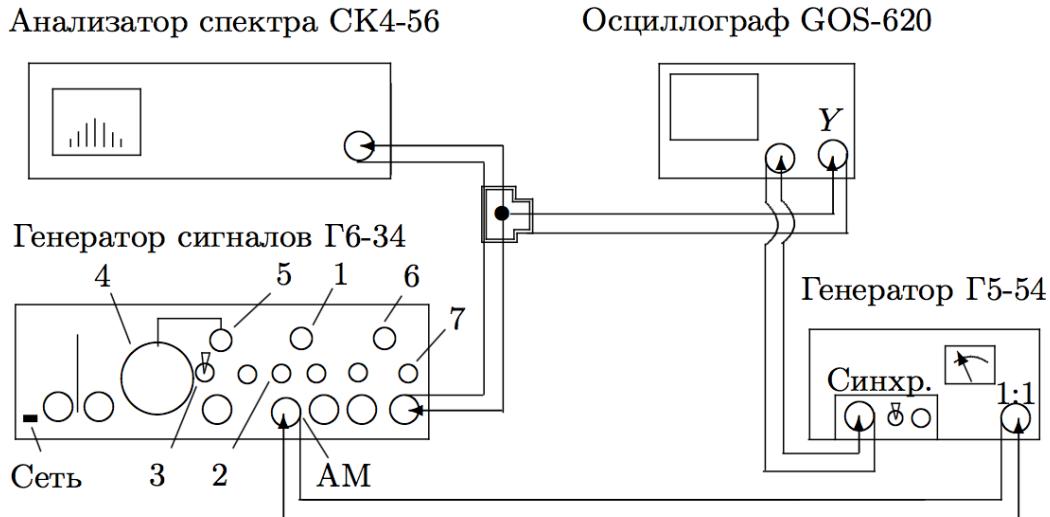


Рис. 4: Схема для исследования спектра периодической последовательности цугов высокочастотных колебаний

Собираем схему согласно 4. Получаем на экране осциллографа последовательность периодических пугов гармонических колебаний, получаемых модулированием синусоиды прямоугольными импульсами. Подключаем анализатор спектра СК4-56 и после настройки наблюдаем спектр сигнала с параметрами:

$$\nu_0 = 25 \text{ кГц}, f_{\text{повт}} = 10^3 \text{ Гц}, \tau = 100 \text{ мкс}, m_x = 5 \text{ кГц}$$

При увеличении τ вдвое при неизменной частоте повторений, вдвое уменьшается ширина спектра, в соответствии с соотношением неопределенности: $\Delta\nu\tau \simeq 1$.

При изменении несущей частоты $\nu_0 = 25, 10$ или 40 кГц при неизменных $f_{\text{повт}} = 10^3 \text{ Гц}, \tau = 100 \text{ мкс}, m_x = 5 \text{ кГц}$, изменяется сдвиг спектра по оси частот.

$\delta\nu, \text{ кГц}$	30	15	11	20	12
N	30	30	30	30	30
$\nu, \text{ кГц}$	1	2	2.7	1.5	2.5
$f_{\text{повт}}, \text{ кГц}$	1	2	2.7	1.5	2.5

Таблица 2: Зависимость расстояния между соседними спектральными компонентами от $f_{\text{повт}}$ при $\tau = 50$ мкс

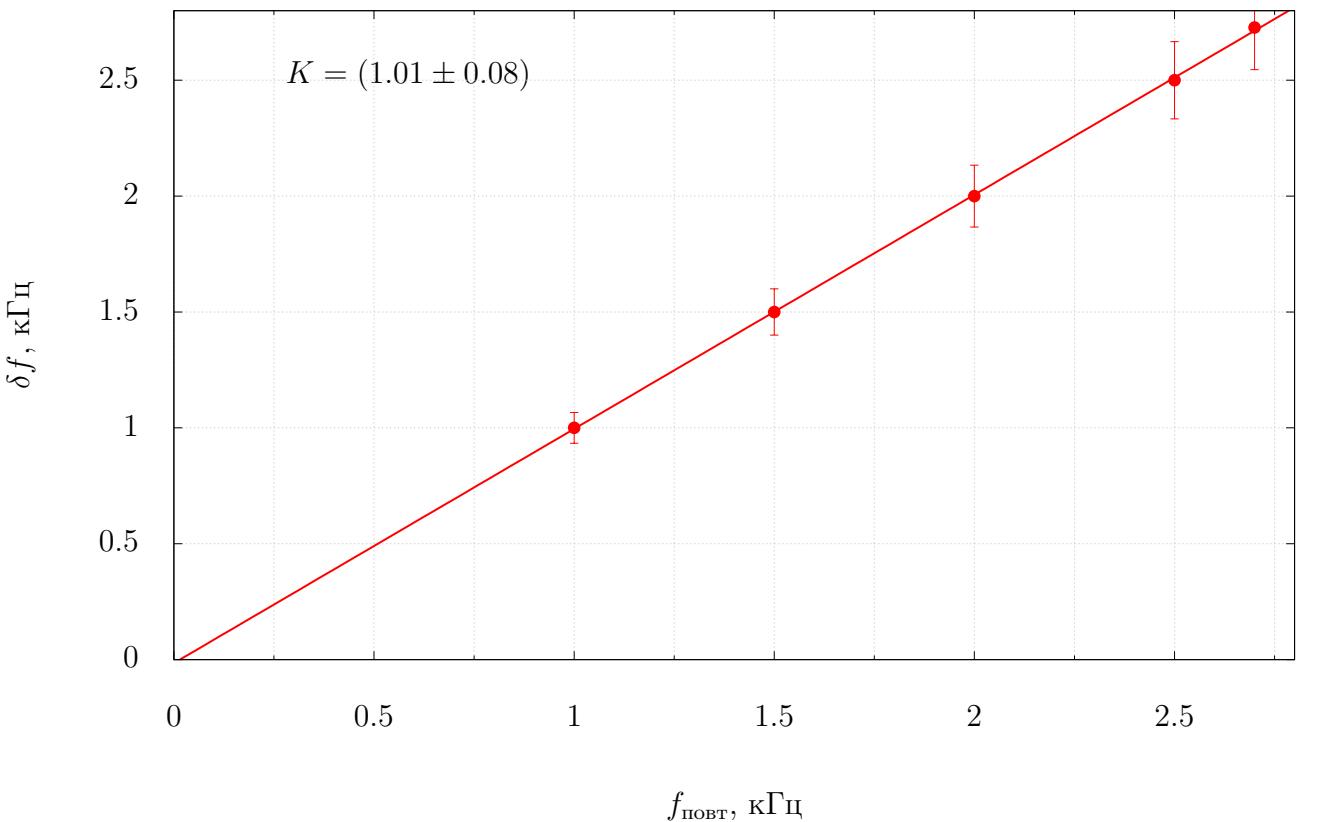


Рис. 5: График зависимости $\delta\nu(f_{\text{повт}})$

Коэффициент угла наклона прямой и его погрешность посчитаем методом наименьших квадратов: $K = (1.01 \pm 0.08)$.

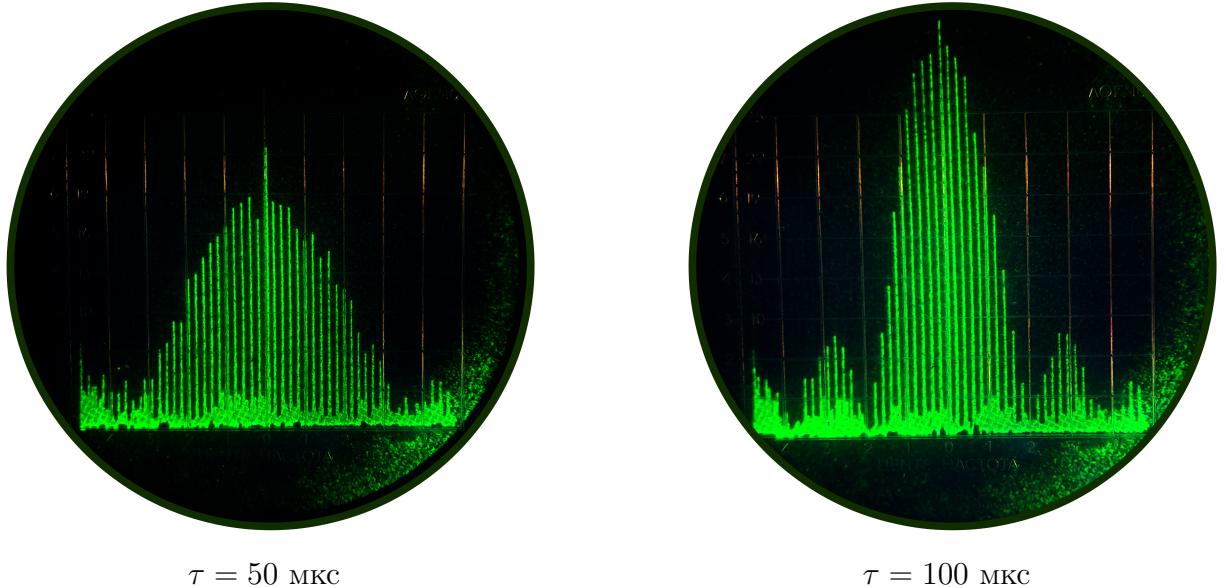


Рис. 6: Спектры колебаний с различными параметрами длительности импульса

Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых, в свою очередь, меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega_0 t) \quad (9)$$

Коэффициент m - глубина модуляции и по определению:

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (10)$$

Работа

В работе используются: анализатор спектра СК4-56; генератор прямоугольных импульсов Г5-54; осциллограф; генератор сигналов Г6-34

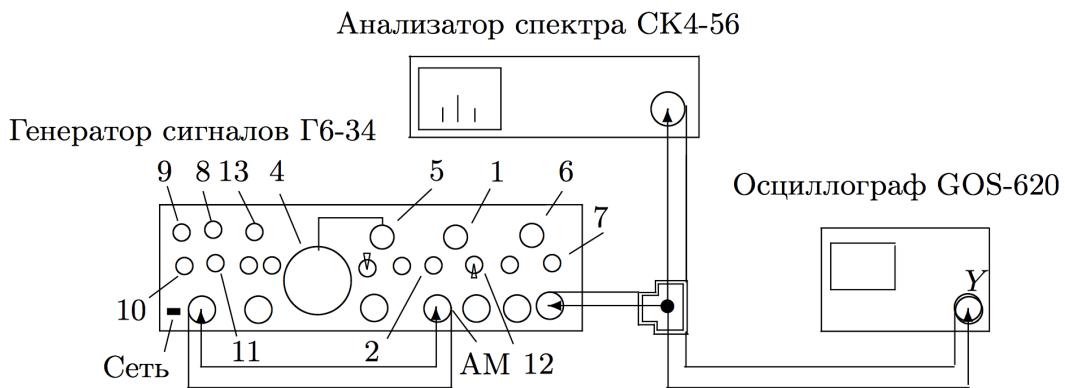


Рис. 7: Схема для исследования спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

Собираем схему согласно 7. Получаем на экране осциллографа гармонический сигнал, модулированный по амплитуде. Подключаем анализатор спектра СК4-56 и после настройки наблюдаем спектр сигнала.

Чтобы измерить глубину модуляции, измерим A_{max} , A_{min} и подставим в формулу 10. Построим график отношения $a_{бок}/a_{осн}$ в зависимости от m .

Рассчитаем теоретический коэффициент наклона, воспользовавшись формулой:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega t). \quad (11)$$

$$a_{осн} = A_0, \quad a_{бок} = \frac{A_0 m}{2} \Rightarrow k_{теор} = 0.5$$

$2A_{max}$	$2A_{min}$	$a_{бок}$	$a_{осн}$	m	$a_{бок}/a_{осн}$
5.4	0.4	4	7.5	0.53	0.86
4.6	1.2	2.6	7.7	0.34	0.59
4	1.8	1.7	7.7	0.22	0.38
3.4	2	2.2	7.6	0.29	0.26
3	2.2	0.6	7.7	0.08	0.15

Таблица 3: Экспериментальные данные

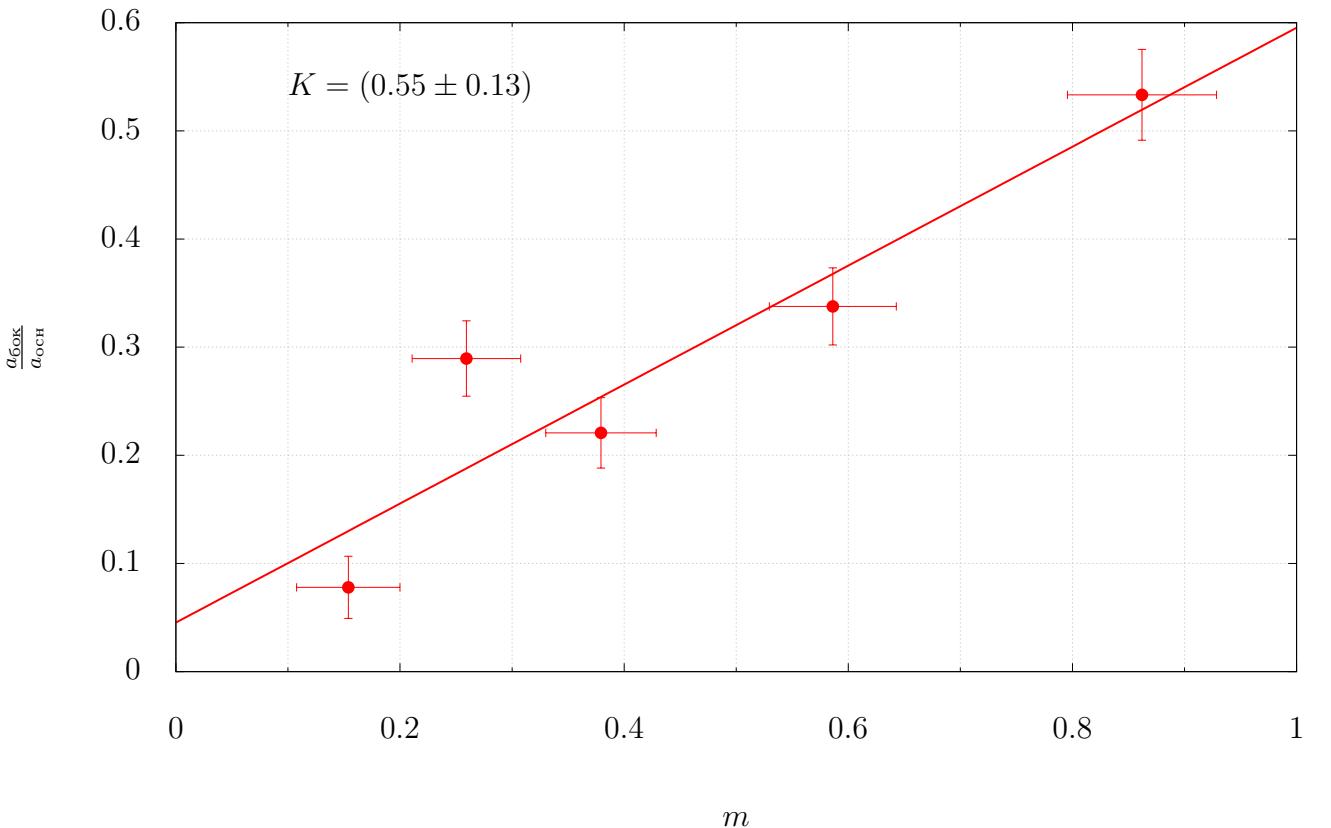


Рис. 8: График зависимости $\frac{a_{бок}}{a_{осн}}(m)$

Коэффициент угла наклона прямой и его погрешность посчитаем методом наименьших квадратов: $K = (0.55 \pm 0.13)$

4 Вывод

Экспериментально было проверено соотношение неопределенности в первых двух экспериментах. Точность достаточно высокая, полученные значения соответствуют ожиданиям. Основной вклад в погрешность вносит отсутствие мелких делений на анализаторе спектра.

В третьем эксперименте было проверена зависимость отношения амплитуд спектральных линий синусоидального сигнала, модулированного низкочастотными гармоническими колебаниями, от коэффициента модуляции.