

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Запишите произведение преобразований fg , где f – сжатие к оси Oy с коэффициентом $\alpha = 3$, а g – поворот на 90° .

2. Найдите сингулярные направления аффинных преобразований:

а) Сжатие к оси $4x + 6y + 1 = 0$ с коэффициентом $\alpha = 1/2$:

б) Поворот на 30° :

в)
$$\begin{cases} x' = 3y + 3 \\ y' = 4x - 1 \end{cases}$$

3. Напишите уравнение цилиндра радиуса с направляющей $x = t, y = t, z = 0$ радиусом $R = 1$.

4. Запишите общий вид векторных уравнений конуса и цилиндра.

(продолжение на след. странице)

5. Сформулируйте теорему о разложении аффинного преобразования.
6. Запишите аффинное преобразование (если таковое существует), переводящее эллипс $x^2/9 + y^2/4 = 1$ в кривую
- а) $x^2 - y^2 = 1$
 - б) $x^2 + 2y^2 = 1$
 - в) $x = 0$

Материалы к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

Новая тема:

1. Запишите формулы, задающие произведение fg данных аффинных преобразований f и g , и охарактеризовать это произведение геометрически (СК — общая декартова).

f — гомотетия с центром в точке $M(2, -1)$ и коэффициентом $\alpha = 1/2$;

g — центральная симметрия относительно точки $N(3, 1)$.

2. Найдите координаты векторов, задающих главные направления данного аффинного преобразования:

$$\text{a) } \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x' = -4x + 7y \\ y' = 8x + y \end{cases}$$

3. Представьте аффинное преобразование в виде произведения $f = h_2 h_1 g$, где g — ортогональное преобразование, а h_1 и h_2 — сжатия к двум взаимно перпендикулярным прямым.

$$\begin{cases} x' = -4x + 7y \\ y' = 8x + y \end{cases}$$

4. Образующие цилиндра параллельны вектору $\vec{a}(1, 1, 1)$, его направляющая — окружность $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Напишите уравнение цилиндра.
5. Найдите уравнение конуса с вершиной в точке $M(1, 1, 1)$, касающегося сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

На повторение:

1. Найдите расстояние между прямыми $x + y + z - 1 = 0$, $x - y + z + 1 = 0$ и $x = 0$, заданными в ПДСК.
2. В правом ОНБ три вектора $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(4, 5, 6)$ и $\vec{c}(2, 3, 1)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами \vec{a} и \vec{b}).

Дополнительные индивидуальные задачи

1. Запишите формулы, задающие аффинное преобразование, переводящее прямые $x - y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$ соответственно в прямые $3x + 2y - 3 = 0$ и $2x + 3y + 1 = 0$, а точку $A(1, 1)$ в точку $B(-1, -2)$
2. Центром квадрата является точка $P(-1, 2)$, а одна из сторон задается уравнением $x + 2y = 0$. Составить уравнения остальных сторон квадрата.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-7, 13)$ и образующей с прямыми $2x + y + 3 = 0$ и $x + y - 2 = 0$ треугольник площади 9
4. Доказать, что определитель линейного преобразования не зависит от системы координат

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Запишите произведение преобразований fg , где f – сжатие к оси Oy с коэффициентом $\alpha = 3$, а g – поворот на 90° .

2. Найдите сингулярные направления аффинных преобразований:

а) Сжатие к оси $4x + 6y + 1 = 0$ с коэффициентом $\alpha = 1/2$:

б) Поворот на 30° :

в)
$$\begin{cases} x' = 3y + 3 \\ y' = 4x - 1 \end{cases}$$

3. Напишите уравнение цилиндра радиуса с направляющей $x = t, y = t, z = 0$ радиусом $R = 1$.

4. Запишите общий вид векторных уравнений конуса и цилиндра.

(продолжение на след. странице)

5. Сформулируйте теорему о разложении аффинного преобразования.
6. Запишите аффинное преобразование (если таковое существует), переводящее эллипс $x^2/9 + y^2/4 = 1$ в кривую
- а) $x^2 - y^2 = 1$
 - б) $x^2 + 2y^2 = 1$
 - в) $x = 0$

Материалы к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

Новая тема:

1. Запишите формулы, задающие произведение fg данных аффинных преобразований f и g , и охарактеризовать это произведение геометрически (СК — общая декартова).

f — гомотетия с центром в точке $M(2, -1)$ и коэффициентом $\alpha = 1/2$;

g — центральная симметрия относительно точки $N(3, 1)$.

2. Найдите координаты векторов, задающих главные направления данного аффинного преобразования:

$$\text{a) } \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x' = -4x + 7y \\ y' = 8x + y \end{cases}$$

3. Представьте аффинное преобразование в виде произведения $f = h_2 h_1 g$, где g — ортогональное преобразование, а h_1 и h_2 — сжатия к двум взаимно перпендикулярным прямым.

$$\begin{cases} x' = -4x + 7y \\ y' = 8x + y \end{cases}$$

4. Образующие цилиндра параллельны вектору $\vec{a}(1, 1, 1)$, его направляющая — окружность $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Напишите уравнение цилиндра.
5. Найдите уравнение конуса с вершиной в точке $M(1, 1, 1)$, касающегося сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

На повторение:

1. Найдите расстояние между прямыми $x + y + z - 1 = 0$, $x - y + z + 1 = 0$ и $x = 0$, заданными в ПДСК.
2. В правом ОНБ три вектора $\vec{a}(1, 2, 3)$, $\vec{b}(4, 5, 6)$ и $\vec{c}(2, 3, 1)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами \vec{a} и \vec{b}).

Дополнительные индивидуальные задачи

1. Запишите формулы, задающие аффинное преобразование, переводящее прямые $x - y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$ соответственно в прямые $3x + 2y - 3 = 0$ и $2x + 3y + 1 = 0$, а точку $A(1, 1)$ в точку $B(-1, -2)$
2. Центром квадрата является точка $P(-1, 2)$, а одна из сторон задается уравнением $x + 2y = 0$. Составить уравнения остальных сторон квадрата.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-7, 13)$ и образующей с прямыми $2x + y + 3 = 0$ и $x + y - 2 = 0$ треугольник площади 9
4. Доказать, что определитель линейного преобразования не зависит от системы координат