Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______________________________
   ____

   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______________________________
   ____
   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______________________________
   ____

   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______________________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:

   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:

   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$

   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

a

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

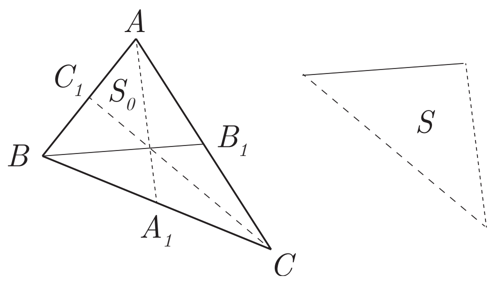
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



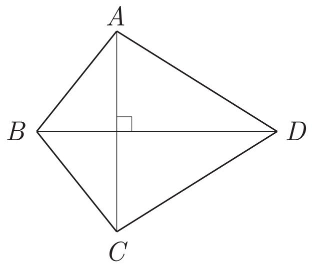
7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

   a) на плоскости
   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. В равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, перпендикулярны. Найти все углы треугольника.

4. Доказать, что для трёх неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равенства $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______________________________
   ____
   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______________________________
   ____
   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______________________________
   ____
   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______________________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что
   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:
   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:
   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$
   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

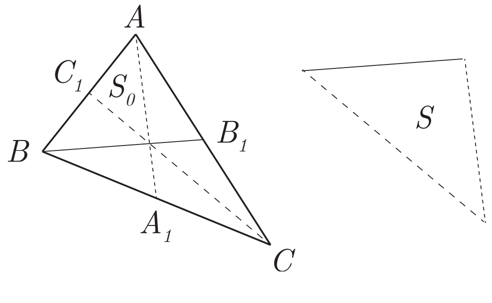
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

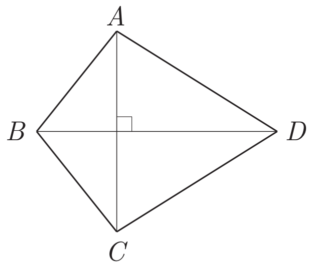
   a) на плоскости

   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \quad \iff \quad \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. В равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, перпендикулярны. Найти все углы треугольника.

4. Найти сумму ортогональных проекций вектора $\mathbf{a}$ на стороны правильного треугольника:

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____

   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____

   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:

   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:

   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$

   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

a

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

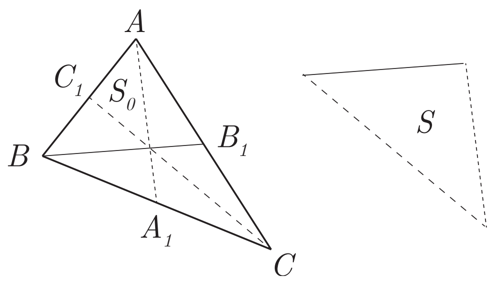
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

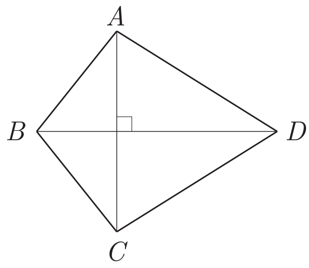
   a) на плоскости

   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. Стороны параллелограмма соотносятся как $m : n$, а угол между ними равен α. Найти угол между диагоналями параллелограмма.

4. Доказать, что для трёх неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равенства $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____________________
   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____________________

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________
   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что
   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:
   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:
   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$
   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]$, если

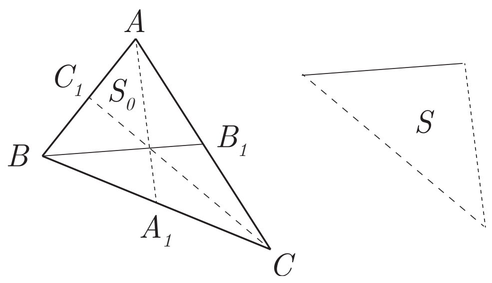
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



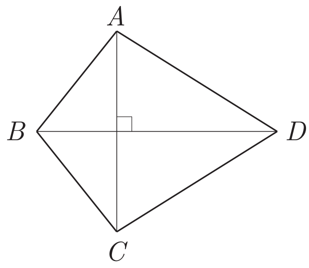
7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

   a) на плоскости
   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. В равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, перпендикулярны. Найти все углы треугольника.

4. Доказать, что для трёх неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равенства $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

5. Найти сумму ортогональных проекций вектора $\mathbf{a}$ на стороны правильного треугольника.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____________________
   ____
   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____________________
   ____
   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________
   ____
   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что
   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:
   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:
   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$
   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90^\circ, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60^\circ, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30^\circ$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

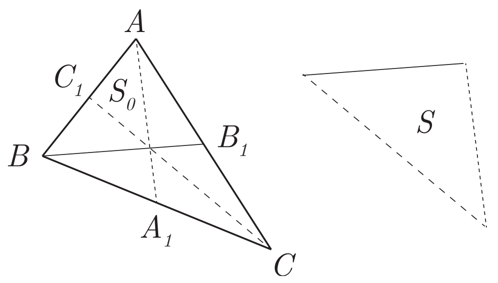
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

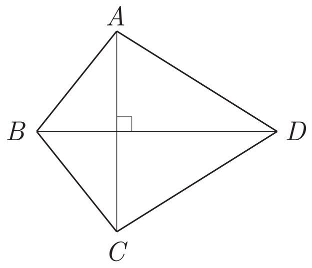
   a) на плоскости

   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных **a** и **b** геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. Доказать, что площадь произвольного выпуклого четырехугольника ABCD равна половине модуля векторного произведения $[\mathbf{AC}, \mathbf{BD}]$.

4. Найти сумму ортогональных проекций вектора **a** на стороны правильного треугольника.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______________________________
   ____
   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______________________________
   ____
   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______________________________________
   ____
   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что
   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:
   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:
   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$
   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

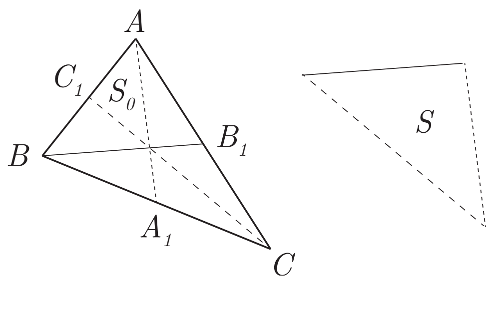
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

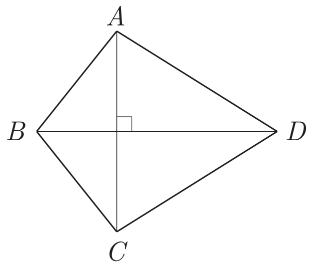
   a) на плоскости

   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. Стороны параллелограмма соотносятся как $m : n$, а угол между ними равен α. Найти угол между диагоналями параллелограмма.

4. Доказать, что для трёх неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равенства $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

5. Найти сумму ортогональных проекций вектора $\mathbf{a}$ на стороны правильного треугольника.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ________________________________

   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ________________________________

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ________________________________

   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ________________________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:

   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:

   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$

   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

a

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

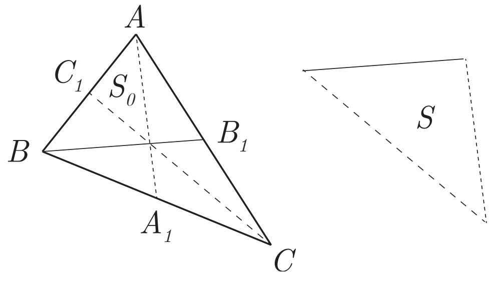
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

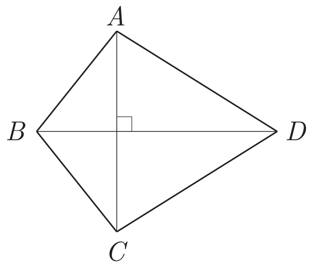
   a) на плоскости

   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. Стороны параллелограмма соотносятся как $m : n$, а угол между ними равен α. Найти угол между диагоналями параллелограмма.

4. Найти сумму ортогональных проекций вектора $\mathbf{a}$ на стороны правильного треугольника.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______________________________
   ____
   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______________________________
   ____
   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______________________________
   ____
   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______________________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что
   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:
   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:
   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$
   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

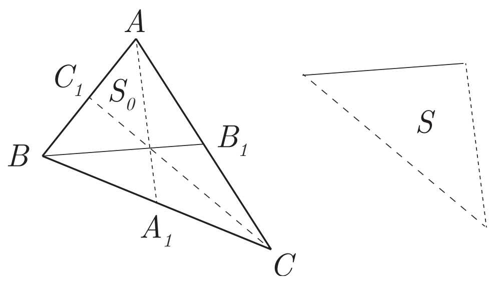
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

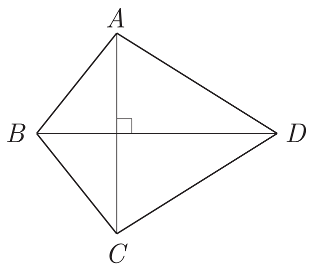
   a) на плоскости

   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. В равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, перпендикулярны. Найти все углы треугольника.

4. Доказать, что для трёх неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равенства $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____________________
   ____
   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____________________
   ____
   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________
   ____
   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что
   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:
   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:
   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$
   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

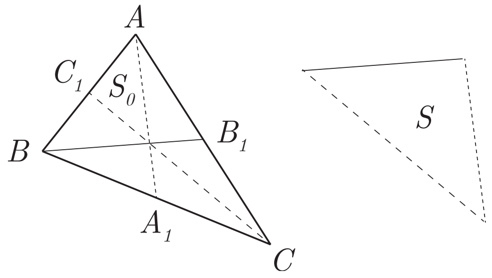
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

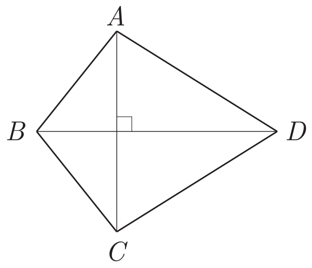
   a) на плоскости

   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Даны векторы $\mathbf{a}(\sqrt{3}\ 3)^T$ и $\mathbf{b}(1\ \ -1)^T$. Найти все векторы $\mathbf{x}$, образующие угол в $60°$ с вектором $\mathbf{a}$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 1$.

3. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

   a) на плоскости
   b) в пространстве

4. Стороны параллелограмма соотносятся как $m : n$, а угол между ними равен α. Найти угол между диагоналями параллелограмма.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______________________________

   ____

   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______________________________

   ____

   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______________________________

   ____

   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______________________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:

   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:

   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$

   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

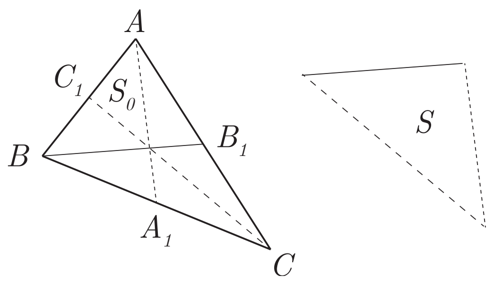
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

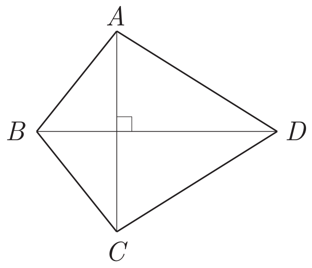
   a) на плоскости

   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \quad \iff \quad \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. Стороны параллелограмма соотносятся как $m : n$, а угол между ними равен α. Найти угол между диагоналями параллелограмма.

4. Найти сумму ортогональных проекций вектора $\mathbf{a}$ на стороны правильного треугольника.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ________________________

   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ________________________

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ________________________

   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ________________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$

   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$

   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:

   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$

   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:

   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$

   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$

   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$

   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

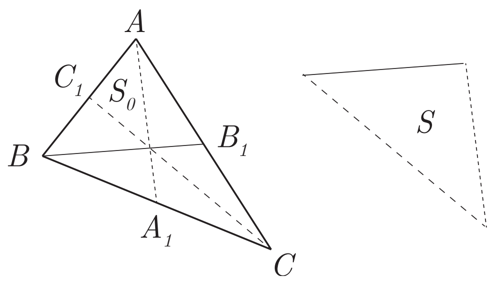
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



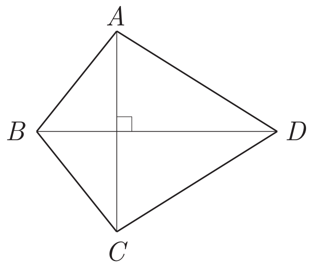
7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

   a) на плоскости
   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. В равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, перпендикулярны. Найти все углы треугольника.

4. Найти сумму ортогональных проекций вектора $\mathbf{a}$ на стороны правильного треугольника:

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______
   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______
   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что
   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:
   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:
   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$
   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

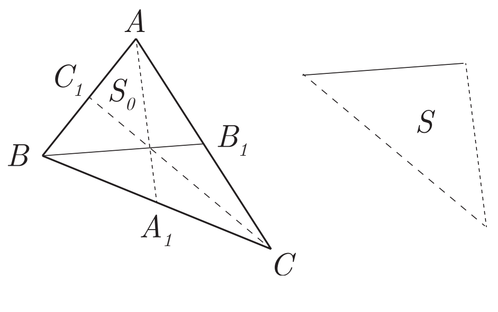
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

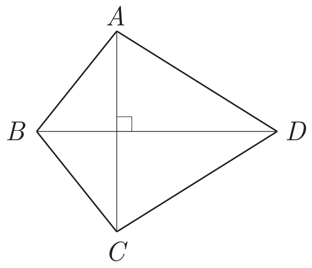
   a) на плоскости

   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Даны векторы $\mathbf{a}(\sqrt{3}\ 3)^T$ и $\mathbf{b}(1\ \ -1)^T$. Найти все вектора $\mathbf{x}$, образующие угол в 60° с вектором $\mathbf{a}$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 1$.

3. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

   a) на плоскости
   b) в пространстве

4. В равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, перпендикулярны. Найти все углы треугольника.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____________________

   ____

   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____________________

   ____

   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________

   ____

   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:

   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:

   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$

   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]]$, если

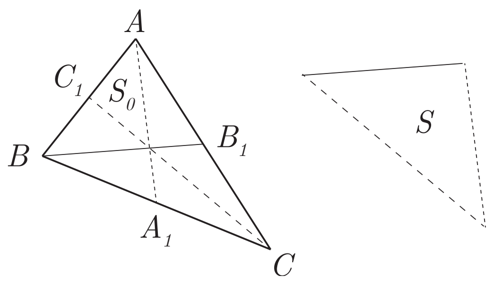
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



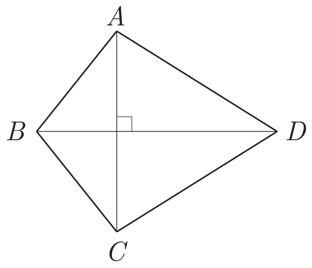
7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

   a) на плоскости
   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. Доказать, что площадь произвольного выпуклого четырехугольника ABCD равна половине модуля векторного произведения $[\mathbf{A}C, \mathbf{B}D]$.

4. Доказать, что для трёх неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равенства $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

5. Найти сумму ортогональных проекций вектора $\mathbf{a}$ на стороны правильного треугольника.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______

   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______

   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:

   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:

   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$

   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

a

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90^\circ, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60^\circ, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30^\circ$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

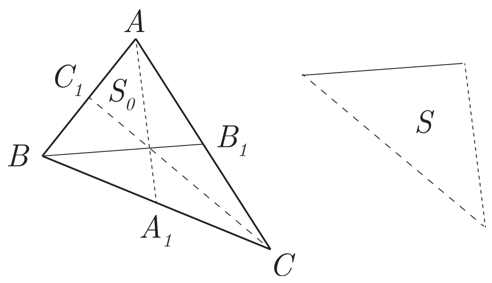
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

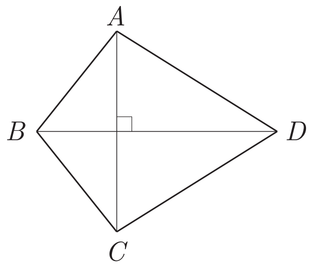
   a) на плоскости

   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Даны векторы $\mathbf{a}(\sqrt{3}\ 3)^T$ и $\mathbf{b}(1\ \ -1)^T$. Найти все векторы $\mathbf{x}$, образующие угол в $60°$ с вектором $\mathbf{a}$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 1$.

3. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

   a) на плоскости
   b) в пространстве

4. Стороны параллелограмма соотносятся как $m : n$, а угол между ними равен α. Найти угол между диагоналями параллелограмма.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____________________

   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____________________

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________

   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$ b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$

   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:

   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$

   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:

   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$ b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$ c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$

   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

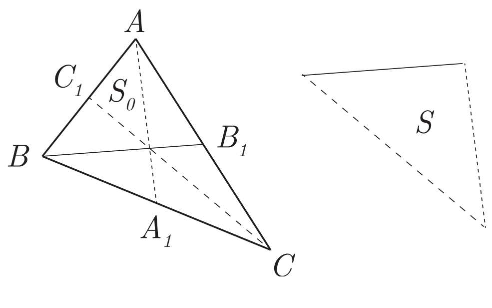
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

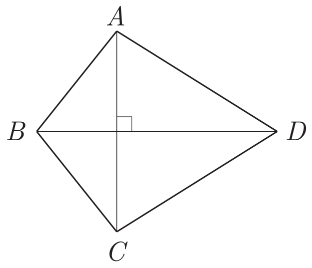
   a) на плоскости

   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. В равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, перпендикулярны. Найти все углы треугольника.

4. Доказать, что для трёх неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равенства $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$

5. Найти сумму ортогональных проекций вектора $\mathbf{a}$ на стороны правильного треугольника.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____________________

   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ____________________

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2+\alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1+\beta_2\mathbf{e}_2+\beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________

   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ____________________

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:

   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:

   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$

   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

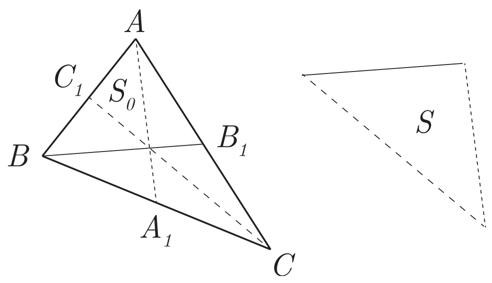
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



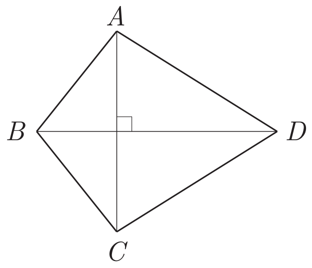
7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

   a) на плоскости
   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \iff \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Даны векторы $\mathbf{a}(\sqrt{3}\ 3)^T$ и $\mathbf{b}(1\ \ -1)^T$. Найти все векторы $\mathbf{x}$, образующие угол в 60° с вектором $\mathbf{a}$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 1$.

3. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

4. Доказать, что площадь произвольного выпуклого четырехугольника ABCD равна половине модуля векторного произведения $[\mathbf{AC}, \mathbf{BD}]$.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение:
   (a) Скалярное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______

   (b) Векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$: ______

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$.
   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______

   (b) если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ОНБ, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) =$ ______

3. Верно ли $\forall\ \alpha, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, что

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
   b) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]$
   c) $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b})$
   d) $[\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = -[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4. Упростите:

   a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) =$
   b) $[\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}] =$

5. В правом ОНБ $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы векторы $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$. Найдите:

   a) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1] =$
   b) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] =$
   c) $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3] =$

   d) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] =$

6. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3\ 1\ 1)^T$ и $\mathbf{b} = (4\ 1\ 2)^T$ (координаты заданы в ОНБ).

7. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ на прямую с направляющим вектором $\mathbf{b} = (3\ 0\ 4)^T$ в ОНБ:

а

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Длины базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны $\sqrt{3}, 3$ и 2 соответственно. Углы между ними равны $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 90°, \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 30°$. Вычислите высоты параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $\mathbf{a}(-3, 1, 0)^T$ и $\mathbf{b}(1, 0, -2)^T$.

2. Выведите формулу Лагранжа двойного векторного произведения.

3. Вычислить $[\mathbf{a},[\mathbf{b}, \mathbf{c}]]$, если

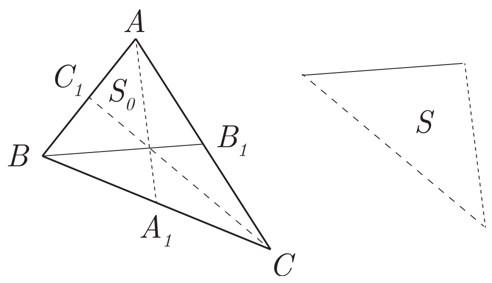
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Базис считать ортонормированным.

4. Сформулируйте и выведите критерий коллинеарности векторов в пространстве (вы можете пользоваться следующим пока не доказанным свойством: если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, то и их попарные векторные произведения тоже некомпланарны).

5. Используя свойства скалярного произведения, докажите, что у любого параллелограмма сумма квадратов длин диагоналей равна сумме квадратов длин всех его сторон.

6. Дан треугольник $\triangle ABC$. Найдите отношение площади S треугольника, составленного из его медиан AA_1, BB_1, CC_1, к площади S_0 исходного треугольника ABC.



7. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и p геометрический смысл всех решений уравнения $(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = p$

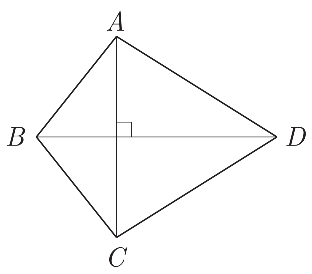
   a) на плоскости

   b) в пространстве

Дополнительные индивидуальные задания

1. Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны $\iff$ суммы квадратов противолежащих сторон равны:

$$AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2 \quad \iff \quad \mathbf{AB} \perp \mathbf{CD}$$



2. Объяснить при заданных $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ геометрический смысл множества решений уравнения $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$.

3. Стороны параллелограмма соотносятся как $m : n$, а угол между ними равен α. Найти угол между диагоналями параллелограмма.

4. Доказать, что для трёх неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равенства $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$