Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ____

   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ____

   ____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем
$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\ \overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$
Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что
$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\ y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\ z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3 \end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. В системе координат с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ даны точки $A(2,1,-1)$, $B(3,0,2)$, $C(5,1,1)$ и $D(0,-1,3)$, являющиеся вершинами тетраэдра. Найдите объём тетраэдра, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60^\circ$

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

   Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, а длины оснований соотносятся как $DC/AD = 2/3$. Найти координаты точки M в системе координат $\{E, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}\}$, если известны её координаты $(1, 1)$ в системе $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$

   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$

   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$

   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3\\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3\\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3\\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

   Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1\\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2\\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. В системе координат с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ даны точки $A(2,1,-1)$, $B(3,0,2)$, $C(5,1,1)$ и $D(0,-1,3)$, являющиеся вершинами тетраэдра. Найдите объём тетраэдра, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°$

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ______________________________

____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ______________________________

____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\ \overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

   Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\ y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\ z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3 \end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. Координаты (x, y, z) каждой точки пространства в первой системе координат выражаются через координаты (x', y', z') этой же точки во второй системе координат соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + \beta_1 \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + \beta_2 \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + \beta_3 \end{aligned}$$

   (a) Первая СК – прямоугольная. Найдите критерий прямоугольности второй СК.

   (b) Найдите необходимое и достаточное условие одинаковой ориентации базисов первой и второй СК.

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ____

____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$

   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$

   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$

   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ____

____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\ \overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\ y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\ z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3 \end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. Координаты (x, y, z) каждой точки пространства в первой системе координат выражаются через координаты (x', y', z') этой же точки во второй системе координат соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + \beta_1 \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + \beta_2 \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + \beta_3 \end{aligned}$$

   (a) Первая СК – прямоугольная. Найдите критерий прямоугольности второй СК.

   (b) Найдите необходимое и достаточное условие одинаковой ориентации базисов первой и второй СК.

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ____

   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ____

   ____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

   Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. В пространстве даны две прямоугольные системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты $(-1, 3, 5)$. Вектор $\mathbf{e}'_1$ образует углы, равные $60°$ с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и острый угол с $\mathbf{e}_3$. Вектор $\mathbf{e}'_2$ компланарен с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и образует с вектором $\mathbf{e}_2$ острый угол. Тройки $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ ориентированы одинаково. Найдите координаты точки пространства в первой СК, если известны ее координаты (x', y', z') во второй СК.

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем
$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3\\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3\\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3\\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$
Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что
$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1\\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2\\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, а длины оснований соотносятся как $DC/AD = 2/3$. Найти координаты точки M в системе координат $\{E, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}\}$, если известны её координаты $(1,1)$ в системе $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

   если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ______________________________

____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ______________________________

____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

   Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора **a** и **b** и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального **a** и **b**:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. Координаты (x, y, z) каждой точки пространства в первой системе координат выражаются через координаты (x', y', z') этой же точки во второй системе координат соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + \beta_1 \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + \beta_2 \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + \beta_3 \end{aligned}$$

   (a) Первая СК – прямоугольная. Найдите критерий прямоугольности второй СК.

   (b) Найдите необходимое и достаточное условие одинаковой ориентации базисов первой и второй СК.

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ______________________________

____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ______________________________

____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. В системе координат с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ даны точки $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 2)$, $C(5, 1, 1)$ и $D(0, -1, 3)$, являющиеся вершинами тетраэдра. Найдите объём тетраэдра, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°$

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ______________________________

____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ______________________________

____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3\\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3\\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3\\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1\\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2\\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол 60°. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, а длины оснований соотносятся как $DC/AD = 2/3$. Найти координаты точки M в системе координат $\{E, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}\}$, если известны её координаты $(1, 1)$ в системе $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ______________________________

____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ______________________________

____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. В системе координат с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ даны точки $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 2)$, $C(5, 1, 1)$ и $D(0, -1, 3)$, являющиеся вершинами тетраэдра. Найдите объём тетраэдра, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°$

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ______________________________

____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ______________________________

____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

   Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, а длины оснований соотносятся как $DC/AD = 2/3$. Найти координаты точки M в системе координат $\{E, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}\}$, если известны её координаты $(1, 1)$ в системе $\{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ______________________________

   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ______________________________

   ____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

   Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. В пространстве даны две прямоугольные системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты $(-1, 3, 5)$. Вектор $\mathbf{e}'_1$ образует углы, равные $60°$ с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и острый угол с $\mathbf{e}_3$. Вектор $\mathbf{e}'_2$ компланарен с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и образует с вектором $\mathbf{e}_2$ острый угол. Тройки $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ ориентированы одинаково. Найдите координаты точки пространства в первой СК, если известны ее координаты (x', y', z') во второй СК.

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

   если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ______________________________

____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ______________________________

____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

   Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. Координаты (x, y, z) каждой точки пространства в первой системе координат выражаются через координаты (x', y', z') этой же точки во второй системе координат соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + \beta_1 \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + \beta_2 \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + \beta_3 \end{aligned}$$

   (a) Первая СК – прямоугольная. Найдите критерий прямоугольности второй СК.

   (b) Найдите необходимое и достаточное условие одинаковой ориентации базисов первой и второй СК.

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ____

   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ____

   ____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем
$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$
Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что
$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол 60°. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора **a** и **b** и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального **a** и **b**:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. Координаты (x, y, z) каждой точки пространства в первой системе координат выражаются через координаты (x', y', z') этой же точки во второй системе координат соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + \beta_1 \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + \beta_2 \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + \beta_3 \end{aligned}$$

   (a) Первая СК – прямоугольная. Найдите критерий прямоугольности второй СК.

   (b) Найдите необходимое и достаточное условие одинаковой ориентации базисов первой и второй СК.

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$

если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ____

   ____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ____

   ____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\
\mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\
\overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

   Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\
y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\
z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3
\end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:
$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$

2. Координаты (x, y, z) каждой точки пространства в первой системе координат выражаются через координаты (x', y', z') этой же точки во второй системе координат соотношениями:
$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + \beta_1 \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + \beta_2 \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + \beta_3 \end{aligned}$$
   (a) Первая СК – прямоугольная. Найдите критерий прямоугольности второй СК.
   (b) Найдите необходимое и достаточное условие одинаковой ориентации базисов первой и второй СК.

3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:
$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$
если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.

Тест к воркшопу по аналитической геометрии

1. Дайте определение смешанного произведения и опишите его геометрический смысл: ______________________________

____

2. В базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ заданы вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$.

   (a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

   (b) В случае ОНБ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$

3. Для произвольных $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ выберите верные равенства:

   a) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   b) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$
   c) $(\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \alpha(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}, \mathbf{c})$
   d) $(\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}_1 + \beta\mathbf{b}_2, \mathbf{c}) = -\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}) - \beta(\mathbf{a}, \mathbf{b}_2, \mathbf{c})$

4. Заданы системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ (1) и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ (2). Начало второй системы O' имеет в первой координаты $(1, 1, -1)$. Базисные векторы системы (2) выражаются через через базисные векторы системы (1) как

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

   (a) Матрица перехода из (1) в (2) $S =$

   (b) Известны координаты точки $M(1, 1, 1)$ в системе координат (2). Координаты в (1) равны:

5. Записать критерий компланарности векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ в терминах смешанного произведения: ______________________________

____

Задания к воркшопу по аналитической геометрии

Базовые обязательные задания

1. Вычислите площадь треугольника, построенного на векторах $(1\ 2)$ и $(-1\ 3)$, заданных в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$, $\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 60°$.

2. В правом ОНБ три вектора $\mathbf{a}(2, 1, -3)$, $\mathbf{b}(2, 1, -2)$ и $\mathbf{c}(5, -2, 0)$ образуют треугольную призму. Найти объем призмы и высоту, проведенную к основанию (за основание считать треугольник, образованный векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

3. Даны системы координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, причем

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \alpha_{11}\mathbf{e}_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{22}\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2 + \alpha_{33}\mathbf{e}_3 \\ \overrightarrow{OO'} &= \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

   Пусть даны координаты некоторой точки $M(x', y', z')$. Докажите, что

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{21}y' + \alpha_{31}z' + \beta_1 \\ y &= \alpha_{12}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{32}z' + \beta_2 \\ z &= \alpha_{13}x' + \alpha_{23}y' + \alpha_{33}z' + \beta_3 \end{aligned}$$

4. Задана система координат $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ (1), а СК $\{O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$ (2) получена из первой поворотом векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ на угол $60°$. Начало второй системы имеет в первой координаты $(1, 1)$. Найти матрицу перехода из (1) в (2), если $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ – ОНБ.

5. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка K, а на стороне AC – точка L. Известно, что $AK : KB = 1 : 2$, а $AL : LC = 1 : 5$. Точка P – точка пересечения медиан $\triangle ABC$, а точка M имеет координаты $(2, -4)$ в СК $\{C, \overrightarrow{BL}, \overrightarrow{AP}\}$. Найдите координаты точки M в СК $\{B, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AL}\}$.

6. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является серединой основания. Найти координаты точки пространства в системе координат $\{A, \mathbf{AB}, \mathbf{AF}, \mathbf{AS}\}$, если известны её координаты x', y', z' в системе координат $\{S, \mathbf{SC}, \mathbf{SD}, \mathbf{SM}\}$.

7. Докажите, что если векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ некомпланарны, т.е. образуют базис в пространстве, то их попарные векторные произведения $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$ также образуют базис. Такой базис называется **биортогональным** к базису $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и обладает рядом важных свойств, используемых в математике.

Дополнительные индивидуальные задания

1. Даны неколлинеарные вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и число $p \in \mathbb{R}$. Решить векторное уравнение и объяснить геометрический смысл всех его решений, а также частного решения, ортогонального $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:
$$(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = p$$
2. В системе координат с базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ даны точки $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 2)$, $C(5, 1, 1)$ и $D(0, -1, 3)$, являющиеся вершинами тетраэдра. Найдите объём тетраэдра, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1, \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = \angle(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 60°$
3. Решите систему векторных уравнений в пространстве:
$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = p; \quad (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = q; \quad (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = s,$$
если векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ некомпланарны.