

Адекватные доказательства теорем по дифференциальным уравнениям

В заметке собраны ссылки на наиболее понятные, простые, но вместе с тем достаточно полные доказательства теорем курса дифференциальных уравнений. Нумерация совпадает с нумерацией экзаменационных билетов в программе.

Также даны некоторые замечания по вопросам, не освещенным в указанных учебниках. Приведены планы доказательств.

22. (Теорема Коши) Эльсгольц

Используется принцип сжатых отображений, доказательство которого (стр. 48-49) практически очевидно, дальше вручную проверяется, что оператор $A[y]$ (интегральной формы диф. уравнения) является сжимающим.

Принцип сжимающих отображений \rightarrow Замена диф. уравнения интегральным \rightarrow Введение оператора $A[y]$ \rightarrow Условие Липшица \rightarrow Проверка, что $A[y]$ — сжимающий \rightarrow Обобщение на случай систем

23/24. (ФСР, вронскиан) Филиппов

Доказывается все для однородной системы (стр. 67-78), затем почти очевидным образом переносится на линейные уравнения (стр. 81-86).

Линейная независимость \rightarrow Вронскиан \rightarrow Фунд. система решений \rightarrow Дифференцирование детерминанта \rightarrow Формула Лиувилля \rightarrow Замена переменных (переход от системы к лин. уравнению)

25. (Вариация постоянных) Филиппов

Аналогично предыдущему. Доказывается в одну строчку (стр. 79) для систем, затем заменой переменных (стр. 90) для линейных уравнений.

Примечание. Система уравнений для вариации постоянной в случае линейного уравнения получается из явной записи матричного равенства $X(t)c'(t) = f_0(t)$.

Вариация постоянных ($c = c(t)$) \rightarrow Дифференцирование общего решения \rightarrow Подстановка в неоднородное уравнение \rightarrow Окончательная формула через обратную матрицу \rightarrow Замена переменных (переход от системы к лин. уравнению)

26. (Теорема Штурма и следствия) Романко, Филиппов

Доказательство слово-в-слово повторяет Филиппова, но переходы освещены более подробно (стр. 193-197). Кроме того, в Филиппове есть не все следствия. Но следствие о расстоянии между нулями уравнения $y'' + q(x)y = 0$ с $m^2 \leq y(x) \leq M^2$ понятнее в Филиппове (стр. 113).

Замена переменного \rightarrow Общий вид $y'' + q(x)y = 0 \rightarrow$ Лемма о простых нулях ($y(x_0) = 0 \Rightarrow y'(x_0) \neq 0$) \rightarrow Без о.о. $y > 0, z > 0 \rightarrow$ Домножение исходных уравнений на y и z , вычитание полученных равенств и интегрирование по $x \rightarrow$ Теорема Штурма и несколько очевидных следствий, полученных из разных оценок с разными $Q(x)$

27. (Устойчивость по Ляпунову) Романко, Филиппов

Определение устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости дано в Романко (стр. 241-242). Достаточные условия асимпт. устойчивости приведены в теореме в Филиппове (стр.165), нужна только 1-ая часть доказательства.

Примечание. Устойчивость по Ляпунову необходимо требует продолжимости решений бесконечно вправо в малой окрестности положения равновесия (см. билет 14).

Устойчивость по Ляпунову \rightarrow Асимптотическая устойчивость \rightarrow Общий вид решения линейной системы \rightarrow ФСР $X(0) = E$ (см. e^{At} (билет 9)) \rightarrow Ограниченность $\|X(t)\| < M \rightarrow$ Оценка сверху с $\delta = \varepsilon/M$