Адекватные доказательства теорем из курса дифференциальных уравнений

В заметке собраны ссылки на наиболее понятные, простые, но вместе с тем достаточно полные доказательства теорем курса дифференциальных уравнений. Нумерация совпадает с нумерацией экзаменационных билетов в программе.

Также даны некоторые замечания по вопросам, не освещенным в указанных учебниках. Приведены планы доказательств.

17. (Автономные системы) *Филиппов, Арнольд*

Рассматривается поведение автономной системы в окрестности неособой точки, а также классификация ФТ (фазовых траекторий).

Примечание. У Арнольда (стр. 65-66 указанные свойства доказаны несколько проще/понятней.

Примечание. Теорема о выпрямлении траекторий: в достаточно малой окрестности любой неособой точки векторное поле диффеоморфно постоянному полю $\vec{E}$.

Фаз. пространство $\to$ $x(t+c)$ — решение $\to$ ФТ либо совпадают, либо не $\cap$, т.к. $y(t+t_2-t_1) \equiv x(t)$ $\to$ Периодичность $\to$ Наименьший период $\to$ Отсутствие самопересечений $\to$ Классификация: ПР, (не)замкнутая без самопересечений

18. (Фазовый портрет линейной системы $n = 2$) $\forall$

Во всех учебниках написано понятно. Записываем матрицу в жордановом базисе и анализируем решения при различных λ.

Примечание. Теорема о кач. эквивалентности: если линеаризованная система — простая, и ПР — не центр, то в некоторой окрестности нелинейная и линеаризованная линейная системы гомеоморфны.

Жорданов базис $\to$ (Не)устойчивый узел ($\operatorname{sign}\lambda_1 = \operatorname{sign}\lambda_2$) $\to$ Седло ($\operatorname{sign}\lambda_1 \neq \operatorname{sign}\lambda_2$) $\to$ Дикритический узел ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, 2 с.в.) $\to$ Вырожденный узел ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, 1 с.в., 1 п.в.) $\to$ Фокус, центр ($\lambda \in \mathbb{Z}$) $\to$ Вырожденная матрица — всякая фигня

13/22. (Теорема Коши) *Эльсгольц*

Используется принцип сжатых отображений, доказательство которого (стр. 48-49) практически очевидно, дальше вручную проверяется, что оператор $A[y]$ (интегральной формы диф. уравнения) является сжимающим.

Принцип сжимающих отображений $\to$ Замена диф. уравнения интегральным $\to$ Введение оператора $A[y]$ $\to$ Условие Липшица $\to$ Проверка, что $A[y]$ — сжимающий $\to$ Обобщение на случай систем

19. (Первые интегралы) *Романко, Филиппов*

В Филиппове (стр. 213) есть несколько слов о критерии первого интеграла (u — п.и. $\iff$ $\iff$ $\dot{u}(t)_f = 0$) и о понижении порядка системы при наличии нетривиального первого интеграла.

В Романко есть то же самое, но нудно доказанное на целую страницу (стр. 252, стр. 257).

Определение $\to$ Критерий $\to$ Разрешение $u(x) = C$ относительно x_i $\to$ Подстановка x_i в систему $\to$ Проверка обратимости такой замены

20. ($\exists\ n - 1$ первых интегралов) *Арнольд*

Эта теорема — прямое следствие теоремы о выпрямлении траекторий, т.к. преобразование координат инвариантно относительно свойства «быть первым интегралом» (стр. 72).

23/24. (ФСР, вронскиан) *Филиппов*

Доказывается все для однородной системы (стр. 67-78), затем почти очевидным образом переносится на линейные уравнения (стр. 81-86).

Линейная независимость $\to$ Вронскиан $\to$ Фунд. система решений $\to$ Дифференцирование детерминанта $\to$ Формула Лиувилля $\to$ Замена переменных (переход от системы к лин. уравнению)

25. (Вариация постоянных) *Филиппов*

Аналогично предыдущему. Доказывается в одну строчку (стр. 79) для систем, затем заменой переменных (стр. 90) для линейных уравнений.

Примечание. Система уравнений для вариации постоянной в случае линейного уравнения получается из явной записи матричного равенства $X(t)c'(t) = f_0(t)$.

Вариация постоянных ($c = c(t)$) $\to$ Дифференцирование общего решения $\to$ Подстановка в неоднородное уравнение $\to$ Окончательная формула через обратную матрицу $\to$ Замена переменных (переход от системы к лин. уравнению)

26. (Теорема Штурма и следствия) *Романко, Филиппов*

Доказательство Романко почти повторяет Филиппова, но переходы освещены более подробно (стр. 193-197). Кроме того, в Филиппове есть не все следствия. Но следствие о расстоянии между нулями уравнения $y'' + q(x)y = 0$ с $m^2 \le y(x) \le M^2$ понятнее в Филиппове (стр. 113).

Замена переменного $\to$ Общий вид $y'' + q(x)y = 0$ $\to$ Лемма о простых нулях ($y(x_0) = 0 \Rightarrow y'(x_0) \neq 0$) $\to$ Без о.о. $y > 0, z > 0$ $\to$ Домножение исходных уравнений на y и z, вычитание полученных равенств и интегрирование по x $\to$ Теорема Штурма и несколько очевидных следствий, полученных из разных оценок с разными $Q(x)$

27. (Устойчивость по Ляпунову) *Романко, Филиппов*

Определение устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости дано в Романко (стр. 241-242). Достаточные условия асимпт. устойчивости приведены в теореме в Филиппове (стр.165), нужна только 1-ая часть доказательства.

Примечание. Устойчивость по Ляпунову необходимо требует продолжимости решений бесконечно вправо в малой окрестности положения равновесия (см. билет 14).

Примечание. Теоремы Ляпунова об (асимпт.) устойчивости, теорема Четаева и теорема об устойчивости по лин. приближению — без доказательства

Устойчивость по Ляпунову $\to$ Асимптотическая устойчивость $\to$ Общий вид решения линейной системы $\to$ ФСР $X(0) = E$ (см. e^{At} (билет 9)) $\to$ Ограниченность $\|\|X(t)\|\| < M \to$ Оценка сверху с $\delta = \varepsilon/M$