

# Адекватные доказательства теорем из курса дифференциальных уравнений

В заметке собраны ссылки на наиболее понятные, простые, но вместе с тем достаточно полные доказательства теорем курса дифференциальных уравнений. Нумерация совпадает с нумерацией экзаменационных билетов в программе.

Также даны некоторые замечания по вопросам, не освещенным в указанных учебниках. Приведены планы доказательств.

## 17. (Автономные системы) Филиппов

Рассматривается поведение автономной системы в окрестности неособой точки, а также классификация ФТ (фазовых траекторий).

**Примечание.** Теорема о выпрямлении траекторий: в достаточно малой окрестности любой неособой точки векторное поле диффеоморфно постоянному полю  $\vec{E}$ .

Фаз. пространство  $\rightarrow x(t+c)$  — решение  $\rightarrow$  ФТ либо совпадают, либо не  $\cap$ , т.к.  $y(t+t_2-t_1) \equiv x(t) \rightarrow$  Периодичность  $\rightarrow$  Наименьший период  $\rightarrow$  Отсутствие самопересечений  $\rightarrow$  Классификация: ПР, (не)замкнутая без самопересечений

## 18. (Фазовый портрет линейной системы $n=2$ ) $\forall$

Во всех учебниках написано понятно. Записываем матрицу в жордановом базисе и анализируем решения при различных  $\lambda$ .

**Примечание.** Теорема о кач. эквивалентности: если линеаризованная система — простая, и ПР — не центр, то в некоторой окрестности нелинейная и линеаризованная линейная системы гомеоморфны.

Жорданов базис  $\rightarrow$  (Не)устойчивый узел ( $\text{sign } \lambda_1 = \text{sign } \lambda_2$ )  $\rightarrow$  Седло ( $\text{sign } \lambda_1 \neq \text{sign } \lambda_2$ )  $\rightarrow$  Дикритический узел ( $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ , 2 с.в.)  $\rightarrow$  Вырожденный узел ( $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ , 1 с.в., 1 п.в.)  $\rightarrow$  Фокус, центр ( $\lambda \in \mathbb{Z}$ )  $\rightarrow$  Вырожденная матрица — всякая фигня

## 13/22. (Теорема Коши) Эльсгольц

Используется принцип сжатых отображений, доказательство которого (стр. 48-49) практически очевидно, дальше вручную проверяется, что оператор  $A[y]$  (интегральной формы диф. уравнения) является сжимающим.

Принцип сжимающих отображений  $\rightarrow$  Замена диф. уравнения интегральным  $\rightarrow$  Введение оператора  $A[y]$   $\rightarrow$  Условие Липшица  $\rightarrow$  Проверка, что  $A[y]$  — сжимающий  $\rightarrow$  Обобщение на случай систем

### 19. (Первые интегралы) Романко, Филиппов

В Филиппове (стр. 213) есть несколько слов о критерии первого интеграла ( $u$  — п.и.  $\iff \iff \dot{u}(t)_f = 0$ ) и о понижении порядка системы при наличии нетривиального первого интеграла.

В Романко есть то же самое, но нудно доказанное на целую страницу (стр. 252, стр. 257).

Определение  $\rightarrow$  Критерий  $\rightarrow$  Разрешение  $u(x) = C$  относительно  $x_i \rightarrow$   
Подстановка  $x_i$  в систему  $\rightarrow$  Проверка обратимости такой замены

### 23/24. (ФСР, вронскиан) Филиппов

Доказывается все для однородной системы (стр. 67-78), затем почти очевидным образом переносится на линейные уравнения (стр. 81-86).

Линейная независимость  $\rightarrow$  Вронскиан  $\rightarrow$  Фунд. система решений  $\rightarrow$   
Дифференцирование детерминанта  $\rightarrow$  Формула Лиувилля  $\rightarrow$  Замена  
переменных (переход от системы к лин. уравнению)

### 25. (Вариация постоянных) Филиппов

Аналогично предыдущему. Доказывается в одну строчку (стр. 79) для систем, затем заменой переменных (стр. 90) для линейных уравнений.

**Примечание.** Система уравнений для вариации постоянной в случае линейного уравнения получается из явной записи матричного равенства  $X(t)c'(t) = f_0(t)$ .

Вариация постоянных ( $c = c(t)$ )  $\rightarrow$  Дифференцирование общего  
решения  $\rightarrow$  Подстановка в неоднородное уравнение  $\rightarrow$  Окончательная  
формула через обратную матрицу  $\rightarrow$  Замена переменных (переход от  
системы к лин. уравнению)

### 26. (Теорема Штурма и следствия) Романко, Филиппов

Доказательство Романко почти повторяет Филиппова, но переходы освещены более подробно (стр. 193-197). Кроме того, в Филиппове есть не все следствия. Но следствие о расстоянии между нулями уравнения  $y'' + q(x)y = 0$  с  $m^2 \leq y(x) \leq M^2$  понятнее в Филиппове (стр. 113).

Замена переменного  $\rightarrow$  Общий вид  $y'' + q(x)y = 0 \rightarrow$  Лемма о простых  
нулях ( $y(x_0) = 0 \Rightarrow y'(x_0) \neq 0$ )  $\rightarrow$  Без о.о.  $y > 0, z > 0 \rightarrow$   
Домножение исходных уравнений на  $y$  и  $z$ , вычитание полученных  
равенств и интегрирование по  $x \rightarrow$  Теорема Штурма и несколько  
очевидных следствий, полученных из разных оценок с разными  $Q(x)$

**27.** (Устойчивость по Ляпунову) Романко, Филиппов

Определение устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости дано в Романко (стр. 241-242). Достаточные условия асимпт. устойчивости приведены в теореме в Филиппове (стр.165), нужна только 1-ая часть доказательства.

**Примечание.** Устойчивость по Ляпунову необходимо требует продолжимости решений бесконечно вправо в малой окрестности положения равновесия (см. билет 14).

**Примечание.** Теоремы Ляпунова об (асимпт.) устойчивости, теорема Четаева и теорема об устойчивости по лин. приближению — без доказательства

Устойчивость по Ляпунову  $\rightarrow$  Асимптотическая устойчивость  $\rightarrow$   
Общий вид решения линейной системы  $\rightarrow$  ФСР  $X(0) = E$   
(см.  $e^{At}$  (билет 9))  $\rightarrow$  Ограниченность  $\|X(t)\| < M \rightarrow$  Оценка сверху с  
 $\delta = \varepsilon/M$