

## Адекватные доказательства теорем по дифференциальным уравнениям

### 22. (Теорема Коши) Эльсгольц

Используется принцип сжатых отображений, доказательство которого (стр. 48-49) практически очевидно, дальше вручную проверяется, что оператор  $A[y]$  (интегральной формы диф. уравнения) является сжимающим.

Принцип сжимающих отображений  $\rightarrow$  Замена диф. уравнения интегральным  $\rightarrow$  Введение оператора  $A[y]$   $\rightarrow$  Условие Липшица  $\rightarrow$  Проверка, что  $A[y]$  — сжимающий  $\rightarrow$  Ручное обобщение на случай систем

### 23/24. (ФСР, вронскиан) Филиппов

Доказывается все для однородной системы (стр. 67-78), затем почти очевидным образом переносится на линейные уравнения (стр. 81-86).

Линейная независимость  $\rightarrow$  Вронскиан  $\rightarrow$  Фунд. система решений  $\rightarrow$  Дифференцирование детерминанта  $\rightarrow$  Формула Лиувилля  $\rightarrow$  Замена переменных (переход от системы к лин. уравнению)

### 25. (Вариация постоянных) Филиппов

Аналогично предыдущему. Доказывается в одну строчку (стр. 79) для систем, затем заменой переменных (стр. 90) для линейных уравнений.

Вариация постоянных ( $c = c(t)$ )  $\rightarrow$  Дифференцирование общего решения  $\rightarrow$  Подстановка в неоднородное уравнение  $\rightarrow$  Окончательная формула через обратную матрицу  $\rightarrow$  Замена переменных (переход от системы к лин. уравнению)

### 26. (Теорема Штурма и следствия) Романко, Филиппов

Доказательство слово-в-слово повторяет Филиппова, но переходы освещены более подробно (стр. 193-197). Кроме того, в Филиппове есть не все следствия. Но следствие о расстоянии между нулями уравнения  $y'' + q(x)y = 0$  с  $m^2 \leq y(x) \leq M^2$  понятнее в Филиппове (стр. 113).

Замена переменного  $\rightarrow$  Общий вид  $y'' + q(x)y = 0 \rightarrow$  Лемма о простых нулях ( $y(x_0) = 0 \Rightarrow y'(x_0) \neq 0$ )  $\rightarrow$  Без о.о.  $y > 0, z > 0 \rightarrow$  Домножение исходных уравнений на  $y$  и  $z$ , вычитание полученных равенств и интегрирование по  $x \rightarrow$  Теорема Штурма и несколько очевидных следствий, полученных из разных оценок с разными  $Q(x)$

**27.** (Устойчивость по Ляпунову) Романко, Филиппов

Определение устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости дано в Романко (стр. 241-242). Достаточные условия асимпт. устойчивости приведены в теореме в Филиппове (стр.165), нужна только 1-ая часть доказательства.

**Примечание.** Устойчивость по Ляпунову необходимо требует продолжимости решений бесконечно вправо в малой окрестности положения равновесия. (см. билет 14)

Устойчивость по Ляпунову  $\rightarrow$  Асимптотическая устойчивость  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  Общий вид решения линейной системы  $\rightarrow$  ФСР  $X(0) = E$   
(см. матричная экспонента)  $\rightarrow$  Ограниченность  $\|X(t)\| < M \rightarrow$  Оценка  
сверху с  $\delta = \varepsilon/M$