ОКОН - Домашна 1

195/2021

а)

$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + \beta x_1 x_2 + x_1 + 2x_2$ Определи точки (x_1^*, x_2^*) за кои $\nabla f = 0$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + \beta x_2 + 1 \\ 2x_2 + \beta x_1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{добиваме систем} \begin{cases} 2x_1 + \beta x_2 + 1 = 0 \\ \beta x_1 + 2x_2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\beta x_2 + 1}{2} \\ x_2 = -\frac{\beta x_1 + 2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} * \\ x_2 = -\frac{\beta\left(-\frac{\beta x_2 + 1}{2}\right) + 2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} * \\ x_2 = \frac{\beta^2 x_2 + \beta - 4}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} * \\ 4x_2 - \beta^2 x_2 = \beta - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} * \\ x_2 = \frac{\beta - 4}{4 - \beta^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\beta\left(\frac{\beta-4}{4-\beta^2}\right) + 1}{2} \\ * \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{\beta^2 - 4\beta + 4 - \beta^2}{-(4-\beta^2)}}{2} \\ * \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4 - 4\beta}{2(4 - \beta^2)} \\ x_2 = \frac{\beta - 4}{4 - \beta^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2(-1+\beta)}{4 - \beta^2} \\ x_2 = \frac{\beta - 4}{4 - \beta^2} \end{cases} \quad (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2(-1+\beta)}{4-\beta^2}, \frac{\beta - 4}{4 - \beta^2}\right), \ \beta \neq \pm 2$$

$\beta \neq \pm 2$ ~~бидејќи~~ поради тоа што за тие вредности на β системот нема решение односно се проблема

б) Хесова матрица

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{bmatrix}$$

- За точките да бидат апсолутен минимум потребно е да $\nabla^2 f$ е позитивно семидефинитна односно ф-јата да биде конвексна

за тоа да биде семидефинитна потребно е дијагоналните минори да и бидат ненегативни

- диаг минори од прв ред $|2| \geq 0$ ✓ $|2| \geq 0$ ✓
- минори од втор ред - $\det(\nabla^2 f(x)) = \begin{vmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{vmatrix} = 4 - \beta^2 \geq 0 \Rightarrow \beta^2 \leq 4 \Rightarrow \beta \in [-2, 2]$

- За некоја точка да биде единствен глобален минимум потребно е да $\nabla^2 f$ е позитивно дефинитна матрица односно ф-јата да е строго конвексна

за ф-јата да е позитивно дефинитна потребно е да минорите и бидат позитивни

$|2| > 0$ ✓ $\det\begin{vmatrix} 2 & \beta \\ \beta & 2 \end{vmatrix} = 4 - \beta^2 > 0$ $\beta^2 < 4 \Rightarrow \beta \in (-2, 2)$

поради тоа што ф-јата не е дефинирана на $\beta = \{-2, 2\}$

За $\beta \in (-2, 2)$ Хесовата ф-ја е позитивно дефинитна и $f(x_1, x_2)$ е строго конвексна според тоа ф-јата има локален и глобален мин, во $\left(\frac{-2(1-\beta)}{4-\beta^2}, \frac{\beta-4}{4-\beta^2}\right)$

$\min f(x_1, x_2)$ за $\beta = 0$ е $\left(\frac{-2}{4}, \frac{-4}{4}\right) \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

и тој изнесува $\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{4}$

ОКОН - Домашна 2

195/2021

а)

а) Да се докаже дека е конвексна со хесијан

$$f(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x^T x} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$x^T x = \left[x_1^2 + x_2^2 \right]_{1\times 1} \qquad x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}_{1\times 2}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}} & \frac{-x_1 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}} \\ \frac{-x_1 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}} & \frac{x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}} \cdot \begin{bmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{bmatrix}$$

За ф-јата да е конвексна потребно е да нејзината хесова ф-ја да биде позитивно семидефинитна односно $\nabla^2 f(x_1, x_2) \geq 0$ според крит ПСДМ

, $|x_1^2| = x_1^2 \geq 0$ ✓

од прв ред $|x_2^2| = x_2^2 \geq 0$ ✓

од втор ред $\begin{vmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{vmatrix} = x_1^2 x_2^2 - x_1^2 x_2^2 = 0 \geq 0 \quad \forall x_1, x_2 \in R$ ✓

$\Rightarrow$ следува $\nabla^2 f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ е конвексна ф-ја

б) Со хесијана, да се докаже строго конвексност на функцијата

$$f(x) = \|x - b\|_2^2 = (x-b)^T (x-b)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (1)\ \left[x_1 - b_1,\ x_2 - b_2 \ \dots \right]_{1\times n} \qquad \begin{bmatrix} x_1 - b_1 \\ x_2 - b_2 \\ \vdots \\ x_n - b_n \end{bmatrix}_{n\times 1} (2)$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - b_1) \\ \vdots \\ 2(x_n - b_n) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$(1)\cdot(2) = \left[(x_1-b_1)^2 + (x_2-b_2)^2 \dots (x_n-b_n)^2 \right]_{1\times 1}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & & 2 \end{bmatrix}_{n\times n} = 2 \cdot I$$

треба $\nabla^2 f(x) > 0$

$|2| = 2 > 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$

$\vdots$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2 \end{vmatrix}_{i\times i} = 2^i > 0$ т.е $2^i > 0 \quad i = \overline{1,n}$

сите главни минори се позитивни $\Rightarrow$ ф-јата е строго конвексна $\Rightarrow$

$\boxed{\nabla^2 f > 0 \Rightarrow f \text{ е конвексна}}$

ОКОП - Домашна 3

195/2021

Задача е Rosenbrock ф-јата $f(x_1,x_2)=100(x_2-x_1^2)^2+(1-x_1)^2$

а) Дали дадената ф-ја е конвексна на $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}200(x_2-x_1^2)(-2x_1)+2(1-x_1)(-1)\\ 200(x_2-x_1^2)(1)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-400x_1(x_2-x_1^2)-2(1-x_1)\\ 200(x_2-x_1^2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}400x_1^3-400x_1x_2+2x_1-2\\ 200x_2-200x_1^2\end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}400(3x_1^2-x_2)+2 & -400x_1\\ -400x_1 & 200\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}=-400(x_2-x_1^2)+(-400x_1)(-2x_1)+2=-400(x_2-x_1^2)+800x_1^2+2=$$
$$=1200x_1^2-400x_2+2=400(3x_1^2-x_2)+2$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2}=200 \qquad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2}=-400x_1 \qquad \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2\partial x_1}=-400x_1$$

I

$$400(3x_1^2-x_2)+2=1200x_1^2-400x_2+2>0$$

II

$$(400(3x_1^2-x_2)+2)(200)-400^2x_1^2)=(1200x_1^2-400x_2+2-800x_1^2)200=$$
$$(400x_1^2-400x_2+2)200=200(400(x_1^2-x_2)+2)>0$$

I ... $\begin{cases}3x_1^2-x_2\geq\frac{-1}{200}\\ x_1^2-x_2\geq\frac{-1}{200}\end{cases}$

шо годи за конвексности.

$f(0,0)=1$

$f(1,1)=100(1-1)+(1-1)=0$

$f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=100(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})^2+(1-\frac{1}{2})^2=100(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{2})^2=\frac{100}{16}+\frac{1}{4}=\frac{104}{16}=\frac{52}{8}=\frac{26}{4}=\frac{13}{2}$

$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y),\ \lambda\in(0,1)$

$f(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y)\leq\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y) \qquad \lambda=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=(\frac{0+1}{2},\frac{0+1}{2})=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\frac{13}{2}=f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\not\leq\frac{1}{2}f(0,0)+\frac{1}{2}f(1,1)=\frac{1}{2}1+0=\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{ф-јата не е конвексна на } \mathbb{R}^2}$

б)

$\nabla f(x) = 0$ - услов за да најдеме стац точки

$$\begin{bmatrix} -400x_1(x_2-x_1^2)-2(1-x_1) \\ 200(x_2-x_1^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -400x_1(x_2-x_1^2)-2(1-x_1)=0 \\ 200(x_2-x_1^2)=0 \Leftrightarrow x_2-x_1^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -400x_1(\underbrace{x_2-x_1^2}_{0})-2(1-x_1)=0 \\ x_2-x_1^2=0 \;\; \text{замена} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(1-x_1)=0 \\ x_2=x_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1^2 \end{cases} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \end{cases}$$

имаме единствена стац. точка во $(1,1)$

Заменуваме $(1,1)$ во хесијанот

$$\begin{bmatrix} 400(3-1)+2 & -400 \\ -400 & 200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} |802| > 0 \\ \begin{vmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{vmatrix} = 802 - 2\cancel{00} - 400 \cdot \cancel{400}^2 = 802 - 800 = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (1,1) \text{ е минимум}$$

$$f(1,1) = 100(1-1^2)^2 + (1-1)^2 = 0$$

Според особините на ф-јата не може да има помала вредност од 0 при $x_1, x_2 \in R$

$(1,1)$ е глобален минимум

в) Да испитаме се наоѓа во $(1,1)$ и има вредност $f(x_1,x_2)=0$

Оком - Домашно 4

Compartment	Weight Capacity (tones)	Space Capacity (m^3)
Front	10	6800
Centre	16	8700
Rear	8	5300

Cargo	Weight (tonnes)	Volume (m^3/tonne)	Profit (€/ton)
C_1	18	480	310
C_2	15	650	380
C_3	23	580	350
C_4	12	390	285

- Proportion Constraint to keep balance: 10 : 16 : 8 (front, centre, rear)
- X_{ij} - weight of cargo i in compartment j

goal maximum profit

$$\max f(x) = 310\sum_{j=1}^{3} X_{1j} + 380\sum_{j=1}^{3} X_{2j} + 350\sum_{j=1}^{3} X_{3j} + 285\sum_{j=1}^{3} X_{4j}$$

s.t

$$X_{ij} \geq 0 \quad i \in \{1,2,3,4\},\ j \in \{1,2,3\}$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_{i1} \leq 10$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_{i2} \leq 16$$

$$\sum_{i=1}^{4} X_{i3} \leq 8$$

$$480X_{11} + 650X_{21} + 580X_{31} + 390X_{41} \leq 6800$$

$$480X_{12} + 650X_{22} + 380X_{32} + 390X_{42} \leq 8700$$

$$480X_{13} + 630X_{23} + 5800X_{33} + 390X_{43} \leq 5300$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{1j} \leq 18$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{2j} \leq 15$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{3j} \leq 23$$

$$\sum_{j=1}^{3} X_{4j} \leq 12$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{4} X_{i1}}{10} = \frac{\sum_{i=1}^{4} X_{i2}}{16} = \frac{\sum_{i=1}^{4} X_{i3}}{8}$$

$$C = \begin{bmatrix} 310 \\ 310 \\ 310 \\ 380 \\ 380 \\ 380 \\ 350 \\ 350 \\ 350 \\ 285 \\ 285 \\ 285 \end{bmatrix}_{12\times 1} \qquad X = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{41} \\ x_{42} \\ x_{43} \end{bmatrix}_{12\times 1} \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 8 \\ 18 \\ 15 \\ 23 \\ 12 \\ 6800 \\ 8700 \\ 5300 \end{bmatrix}_{10\times 1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 480&0&0&650&0&0&580&0&0&390&0&0 \\ 0&480&0&0&650&0&0&580&0&0&390&0 \\ 0&0&480&0&0&650&0&0&580&0&0&390 \end{bmatrix}_{10\times 12}$$

$$D = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 8&-5&0&8&-5&0&8&-5&0&8&-5&0 \\ 4&0&-5&4&0&-5&4&0&-5&4&0&-5 \\ 0&1&-2&0&1&-2&0&1&-2&0&1&-2 \end{array}\right]_{3\times 12}$$

$$\frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{4} x_{i1}}^{a}}{10} = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{4} x_{i2}}^{b}}{16} = \frac{\overbrace{\sum_{i=1}^{4} x_{i3}}^{c}}{8}$$

$$\frac{a}{10} - \frac{b}{16} = 0 \Rightarrow 8a - 5b = 0$$

$$\frac{a}{10} - \frac{c}{8} = 0 \Rightarrow 4a - 5c = 0$$

$$\frac{b}{16} - \frac{c}{8} = 0 \Rightarrow b - 2c = 0$$

maximize $C^T \cdot X$

s.t.

$$AX \le b$$

$$X \ge 0$$

$$D \cdot X = 0$$

za resavane lo komijyeicn

ОКОП - Домашна 5

195/2021

minimize $f_0(x_1;x_2)$

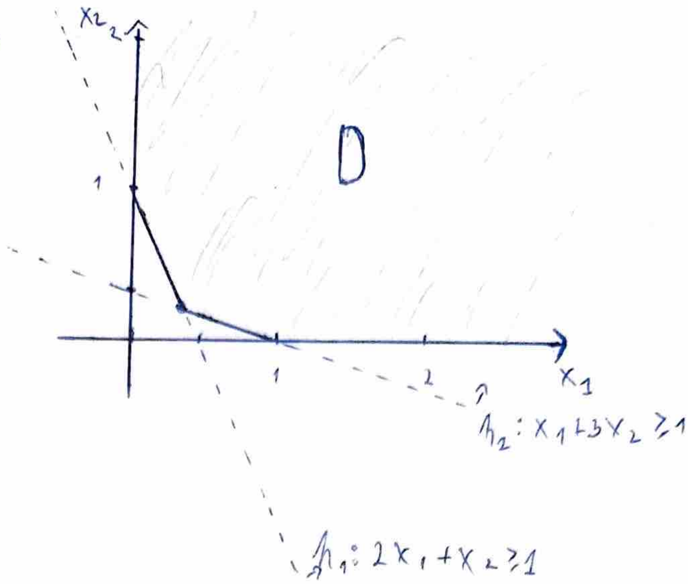
s.t.

$h_1: 2x_1 + x_2 \geq 1$

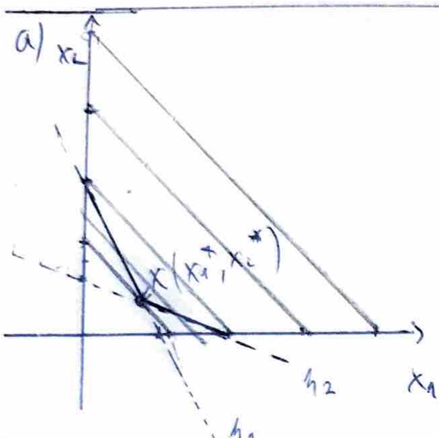
$h_2: x_1 + 3x_2 \geq 1$

$h_3: x_1 \geq 0$

$h_4: x_2 \geq 0$



а)



$\min f_0(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

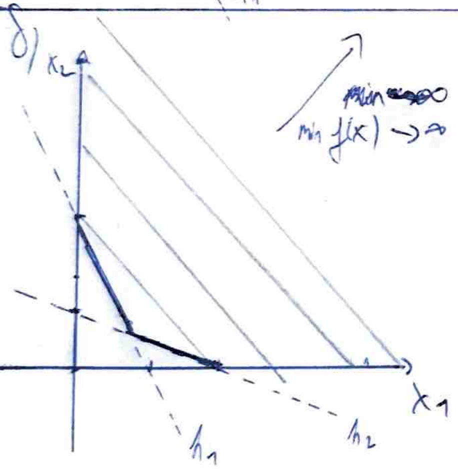
s.t. $h_i(x)$ $i = \{1,2,3,4\}$

$\min f_0(x_1, x_2) = f_0(0{,}4,\ 0{,}2) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$

пресек на h_1 и h_2

$x_1^* = \frac{1\cdot(-1) - 3\cdot(-1)}{2\cdot 3 - 1\cdot 1} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ $\quad x_2^* = \frac{(-1)\cdot 1 - (-1)\cdot 2}{2\cdot 3 - 1\cdot 1} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

б)

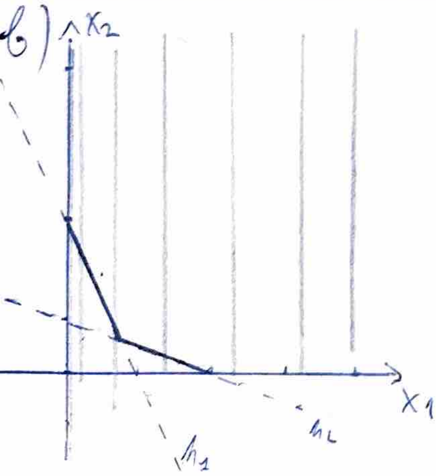


$\min f_0(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$

s.t $h_i(x)$ $i = \{1,2,3,4\}$

Овој проблем нема решение односно решението се стреми кон $-\infty$ ова се должи на тоа што овој проблем не е ограничен од горе и x_1 и x_2 земаат ∞ многу големи вредности

в)



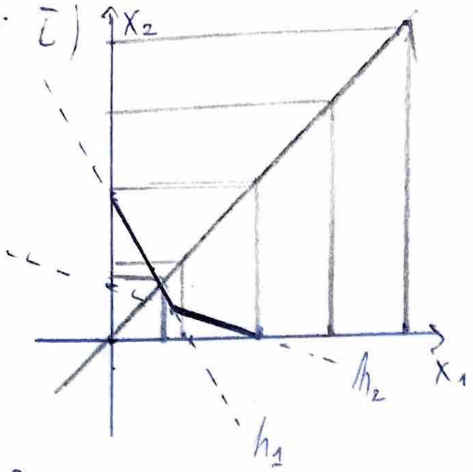
$\min f_0(x_1, x_2) = x_1$

s.t $h_i(x)$ $i = \{1,2,3,4\}$

$f_0(0, x_2) = 0$ е минималната вредност на оваа ф-ја

тоа се наоѓа на правата $(0, x_2)$ или што $x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_2 \geq 1$ односно $x_2 \in [1, \infty)$

Односно целната ф-ја се исполнува во ∞ многу точки до мин.

i) 

minimize $f(x_1,x_2) = \max\{x_1, x_2\}$

s.t h_1, h_2, h_3, h_4

овој проблем може да се одели на 2 потпроблеми односно

(I) $\max\{x_1, x_2\} = x_1$ кога $x_1 \geq x_2$ и (II) $\max\{x_1, x_2\} = x_2$ кога $x_2 \geq x_1$

(I)

min x_1

s. t.

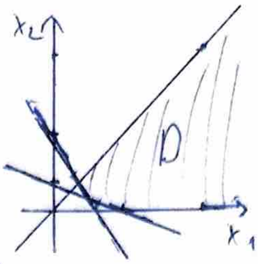
h_1

h_2

h_3

h_4

$h_5: x_1 \geq x_2$

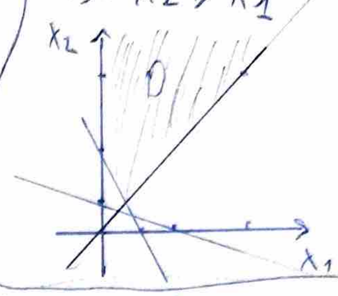


(II)

min x_2

s.t h_1, h_2, h_3, h_4

$h_5: x_2 \geq x_1$



и минимално решение ќе биде истото од двете 2

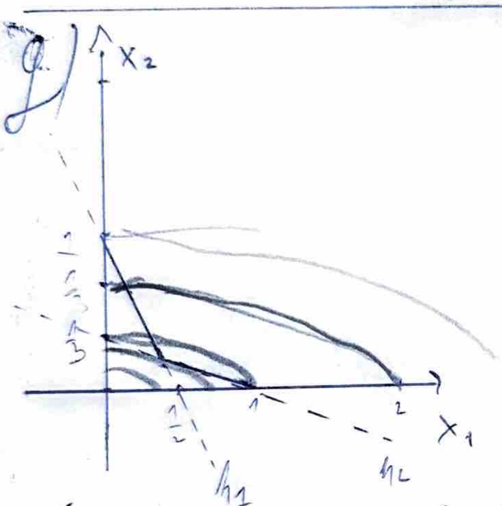
може да се види дека за тоа решение x_1 или x_2 истото решение ќе биде и вредноста на $f(x_1^*, x_2^*)$ што би не доведува до заклучок дека целната ф-ја има мин вредност кога $x_1 = x_2$

бараме пресек на

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 3x_1 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = \frac{1}{3} \\ x_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

min решение е во $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ и изнесува $\frac{1}{3}$

---

j) 

minimize $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 9x_2^2 = x_1^2 + (3x_2)^2 = r$

минимална вредност на функцијата би се добила кога истата ќе стане тангента на едно од решенијата а притоа ги исполнува сите други во најнеповолниот случај

Со оглед дека кога е тангента на h_1 односно $x_1^2 + (3x_2)^2 = \frac{1}{4}$ не е задоволен условот за h_2 ќе се бидеме да најдеме кога целната ф-ја е тангента на h_2

$$\begin{cases} x_1^2 + (3x_2)^2 = r \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^2 + \left(3\frac{1-x_1}{3}\right)^2 = r \\ x_2 = \frac{1-x_1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^2 + 1 - 2x_1 + x_1^2 = r \\ x_2 = \frac{1-x_1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1^2 - 2x_1 + 1 - r = 0 \\ x_2 = \frac{1-x_1}{3} \end{cases}$$

потребно е да имаме 1 реш

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{+2 \pm (0)}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \frac{1}{2}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{6} \end{cases}$$

минимално реш се добива во точката $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$

со вредност $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$r = \frac{1}{2}$

проверка

$2x_1 + x_2 \geq 1$ $\quad$ $x_1 + 3x_2 \geq 1$

$1 + \frac{1}{6} \geq 1$ ✓ $\quad$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

ОКОН - Домашна - 6

195/2021

minimize $f(x) = \frac{1}{2}x^T P x + q^T X + r$

$P_{n\times n}$ - позитивно деф. м-ца

$q_{n\times 1}$

$r_{1\times 1}$

$X = {}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

a) Итеративна низа за решавање на О.П. со користење на Њутновиот метод.

$$x^{k+1} = x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \cdot \nabla f(x^k) \quad k = 0, 1, 2..$$

1)

$$\nabla_x (x^T A x) = 2Ax \quad \text{(ако } A \text{ е симетрична маш)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(x^T A x) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_i \cdot x_j\right\} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\sum_{i\neq k}^{n}\sum_{j\neq k} A_{ij} x_j x_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{i\neq k} A_{ik} x_i x_k + \sum_{j\neq k} A_{kj} x_{kj} + A_{kk} x_k^2\right\} = \sum_{i\neq k} A_{ik} x_i + \sum_{j\neq k} A_{kj} x_j + A_{kk}x_k + A_{kk}x_k =$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} A_{ki} X_i$$

$\boxed{A_{ik} = A_{kj} \text{ - поради симетричноста}}$

$$= \frac{\partial}{\partial x_k}(x^T A x) = 2AX$$

2) $\nabla_x q^T X = q$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} q^T x = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) = q_k \rightarrow \nabla_x q^T X = q$$

1) + 2) $\Rightarrow \nabla f(x) = \nabla\left\{\frac{1}{2}x^T P x + q^T X + r\right\} = \frac{1}{2}\cdot 2PX + q = Px + q$

3) $\nabla_x (Ax) = A$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(Ax) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_{ij}\right\} =$$

$$\nabla_x^2 f(x) = \nabla^2\left\{\frac{1}{2}x^T P x + q^T X + r\right\} = P$$

$$x^{k+1} = x^k - P^{-1}(Px^k + q) = x^k - P^{-1}Px^k + P^{-1}q = x^k - x^k + P^{-1}q = P^{-1}q$$

б)

$$x^1 = x^0 - (\nabla^2 f(x^0))^{-1} \nabla f(x^0) = x^0 - P^{-1}\cdot(P \cdot x^0 + q) = x^0 - I x^0 - P^{-1} q =$$

$$= x^0 - x^0 - P^{-1} \cdot q = -P^{-1} \cdot q$$

Поради тоа што P е позитивно дефинитна знаеме дека добиеното е единствено и дека тоа е апсолутниот минимум

$$x = -P^{-1} \cdot q$$

в) ~~Формула~~ итеративна низа за GD методот е $x^{k+1} = x^k - \sigma_0 \nabla f(x^k) =$

$$= x^k - \sigma_0 (P x^k + q) = x^k - \sigma P x^k + \sigma_0 q = (I_{n\times n} - \sigma_0) x^k - \sigma q$$

ОКОН - Домашна 7

195/2021

minimize $x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2$

а) $$\nabla f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3x_2 \\ 3x_2^2 - 3x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1^2 - 3x_2 = 0 \\ 3x_2^2 - 3x_1 = 0 \end{cases} \overset{/:3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1^2 = x_2 \\ x_2^2 = x_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ (x_1^2)^2 - x_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1^4 - x_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1(x_1^3 - 1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1(x_1 - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \end{cases}$$

Не може x да припаѓа во R

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$ Стационарни точки (x_1, x_2) се $\{(0,0), (1,1)\}$

Со хесијанова м-ца ќе испитаме дали се лок. екстреми или седлести точки

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{bmatrix}$$

За $(x_1,x_2) = (0,0)$ $\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} =$ матрицата е недефинитна $\Rightarrow$ седлеста точка

За $(x_1;x_2) = (1,1)$ $\nabla^2 f(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

$|6| > 0$

$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 25 > 0$ Матрицата е позитивно дефинитна $\Rightarrow$ точката е екстрем односно локален мин

б) Итеративна низа на Њутнов метод е $x_k = x_{k-1} - \frac{f'(x_{k-1})}{f''(x_{k-1})}$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3x_2 \\ 3x_2^2 - 3x_1 \end{bmatrix}_{2\times1} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

односно $x^{k+1} = x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1}[\nabla f(x^k)]$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{bmatrix}_{2\times2} \quad \nabla^2 f(x^k)^{-1} = \frac{1}{36x_1x_2 - 9}\begin{bmatrix} 6x_2 & 3 \\ 3 & 6x_1 \end{bmatrix} = \frac{1 \cdot 3}{_3 9(4x_1x_2 - 1)}\begin{bmatrix} 2x_2 & 1 \\ 1 & 2x_1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x)^{-1} \cdot \nabla f(x) = \frac{1}{3(4x_1x_2 - 1)}\begin{bmatrix} 2x_2 & 1 \\ 1 & 2x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3x_1^2 - 3x_2 \\ 3x_2^2 - 3x_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6x_1^2x_2 - 6x_2^2 + 3x_2^2 - 3x_1 \\ 3x_1^2 - 3x_2 + 6x_2^2x_1 - 6x_1^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4x_1x_2 - 1}\begin{bmatrix} 2x_1^2x_2 - x_2^2 - \ldots \\ 2x_2^2x_1 - x_1^2 - \ldots \end{bmatrix}$$

(1)

$$[\nabla^2 f(x)]^{-1}[\nabla f(x)] = \begin{bmatrix} 2x_1^2x_2 - x_2^2 - x_1 \\ 2x_2^2x_1 - x_1^2 - x_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4x_1x_2 - 1}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} - \frac{1}{4x_1^kx_2^k - 1}\begin{bmatrix} 2(x_1^k)^2x_2^k - (x_2^k)^2 - x_1^k \\ 2(x_2^k)^2x_1^k - (x_1^k)^2 - x_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^k(4x_1^kx_2^k - 1) - 2(x_1^k)^2x_2^k + (x_2^k)^2 + x_1^k}{4x_1^kx_2^k - 1} \\ \dfrac{x_2^k(4x_1^kx_2^k - 1) - 2(x_2^k)^2x_1^k + (x_1^k)^2 + x_2^k}{4x_1^kx_2^k - 1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4(x_1^k)^2x_2^k - \cancel{x_1^k} - 2(x_1^k)^2x_2^k + (x_2^k)^2 + \cancel{x_1^k} \\ 4x_1^k(x_2^k)^2 - \cancel{x_2^k} - 2(x_2^k)^2x_1^k + (x_1^k)^2 + \cancel{x_2^k} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4x_1^kx_2^k - 1} = \begin{bmatrix} 2(x_1^k)^2x_2^k + (x_2^k)^2 \\ 2x_1^k(x_2^k)^2 + (x_1^k)^2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4x_1^kx_2^k - 1}$$

$$= \frac{1}{4x_1^kx_2^k - 1}\begin{bmatrix} x_2^k(2(x_1^k)^2 + x_2^k) \\ x_1^k(2(x_2^k)^2 + x_1^k) \end{bmatrix}$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad x^1 = \begin{bmatrix} -2(2\cdot(-2)^2 + -2) \\ -2(2\cdot(-2)^2 + -2) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -12 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{15} \\ -\frac{12}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,8 \\ -0,8 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} \left(-\frac{12}{15}\right)\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{12}{15}\right)^2 + \left(-\frac{12}{15}\right)\right) \\ \dots \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4\cdot\frac{12\cdot 12}{15\cdot 15} - 1} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{15}\cdot\left(2\cdot\frac{144}{225} - \frac{12}{15}\right) \\ * \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{4\cdot\frac{144}{225} - \frac{225}{225}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{12}{15}\cdot\frac{108}{225} \\ * \end{bmatrix} \cdot \frac{225}{351} = -\frac{12}{15}\cdot\frac{108}{225}\cdot\frac{225}{351} = -\frac{16}{65}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{16}{65} \\ -\frac{16}{65} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,246 \\ -0,246 \end{bmatrix}$$

$$x^3 = \begin{bmatrix} -\frac{256}{6305} \\ -\frac{256}{6305} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0406 \\ -0,0406 \end{bmatrix}$$

Со почеток во $(-2,-2)$ со Њутновата метода се доближуваме до седлестата точка $(0,0)$

в) $$x^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x^1 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,3(3) \\ 1,3(3) \end{bmatrix} \quad x^2 = \begin{bmatrix} \frac{16}{15} \\ \frac{16}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,06(6) \\ 1,06(6) \end{bmatrix} \quad x^3 = \begin{bmatrix} \frac{256}{255} \\ \frac{256}{255} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,00392 \\ 1,00392 \end{bmatrix}$$

Со почеток во $(2,2)$ со Њутновата метода се доближуваме до локалниот мин

г) Целната ф-ја нема глобален мин, ако земете вредности за x_1 и x_2 поголеми од локалниот мин $(1,1)$ што лесно може да го забележите. Од в и б забележавме Њутновиот метод конвергира или кон седлестата точка или локалниот мин во зависност од почетната точка.

ОКОП - домашно 9

19/5/2021

$$f(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \qquad D = \{ x = (x_1, x_2 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x \log x' = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$

$$\nabla f(x_n) = \begin{bmatrix} -(\log x_1 + 1) \\ -(\log x_2 + 1) \\ \vdots \\ -(\log x_n + 1) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$x_i > 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

$\frac{1}{x_i} > 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

$-\frac{1}{x_i} < 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & -\frac{1}{x_n} \end{bmatrix}_{n \times n} \qquad -\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

трябва $-\nabla^2 f > 0$

$\left|\frac{1}{x_1}\right| \Rightarrow \frac{1}{x_1} > 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} > 0 \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_2} \end{vmatrix} = \overset{>0}{\frac{1}{x_1}} \overset{>0}{\frac{1}{x_2}} \overset{>0}{\frac{1}{x_n}} > 0 \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{x_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{x_i} \end{vmatrix}_{i \times i} =$$

$$= \prod_{i=1}^{i} \frac{1}{x_i} > 0 \text{ ще } \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} > 0$$

=> матрицата е негативно дефинитна

=> функцията е строго конкавна на дозволената област.

б) Maximize $\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i\right)$

s.t. $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

$x_i > 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$

при ограничава

формираме лагранжова ф-я

$$L(x, \mu) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i + \mu\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = -\log x_i - 1 + \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \log x_i = \mu - 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i = e^{\mu - 1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} * \\ \sum_{i=1}^{n} e^{\mu-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} * \\ n e^{\mu - 1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} * \\ \mu - 1 = \log \frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} * \\ \mu - 1 = \overset{0}{\log 1} - \log n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} * \\ \mu - 1 = -\log n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i = e^{-\log n} \\ \mu = 1 - \log n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i = \frac{1}{e^{\log n}} \\ \mu = 1 - \log n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_i = \frac{1}{n} \\ \mu = 1 - \log n \end{cases}$$

$\boxed{x_i = \frac{1}{n}}$ е апсолутен max на целната функција.

Ова е поради што целната ф-ја е строго конкавна а $x_i = \frac{1}{n}$ $\underbrace{\text{е}}_{\text{за } \forall i, n}$ локален и глобален max на функцијата

и има вредност $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = \log \frac{1}{n} = -\log n$

ОКОП - домашно 10 195/2021

maximize $x_1^{2/3} \cdot x_2^{1/3}$ ја изразуват лагранжовата функција

s.t. $x_1 + x_2 = 6$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{2/3} \cdot x_2^{1/3} + \lambda(x_1 + x_2 - 6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{2}{3} x_1^{-\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{1}{3} x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{-\frac{2}{3}} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3} x_1^{-\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} = -\lambda \\ \frac{1}{3} x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{-\frac{2}{3}} + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} x_1^{-\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} = -\lambda \\ \frac{1}{3} x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} x_1^{-\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} = 0 \\ x_1 = 6 - x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3} x_1^{-\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} = -\lambda \\ \frac{x_1^{\frac{2}{3}}}{3x_2^{\frac{2}{3}}} - \frac{2x_2^{\frac{1}{3}}}{3x_1^{\frac{1}{3}}} = 0 \\ x_1 = 6 - x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} * \\ \frac{x_1 - 2x_2}{3x_2^{\frac{2}{3}} x_1^{\frac{1}{3}}} = 0 \\ * \end{cases} \text{ за } x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 \quad \begin{cases} * \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 6 = 0 \end{cases} \cdot 2 \quad \begin{cases} 3x_1 - 26 = 0 \\ x_1 + x_2 - 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} * \\ x_1 = \frac{26}{3} \\ x_2 + \frac{26}{3} - \frac{6}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} * \\ x_1 = \frac{26}{3} \\ x_2 = \frac{6}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{26}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{6}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = -\lambda \\ * \\ * \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{\frac{6}{3}}{\frac{26}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}\lambda \\ * \\ * \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}\lambda \\ * \\ * \end{cases}$$

$$\boxed{\lambda = - \frac{2 \cdot 2^{-\frac{1}{3}}}{3} = -\frac{2^{\frac{2}{3}}}{3}}$$

$$\nabla_x^2 L(x^*) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} x_1^{-\frac{4}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} & \frac{2}{9} x_1^{-\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{2}{9} x_1^{-\frac{1}{3}} x_2^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{9} x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{-\frac{5}{3}} \end{bmatrix} \quad J(x) = [\nabla f_1(x)] = [1 \mid 1] \Rightarrow M = [1]$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad V = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3\sqrt[3]{26}} & \frac{2^{2/3}}{36} \\ \frac{2^{2/3}}{36} & -\frac{2 \cdot 2^{2/3}}{36} \end{bmatrix}$$

$$N^T \cdot \nabla_x^2 L N(x^*) = \left[-\frac{4 \cdot 2^{2/3}}{36} - \frac{1}{3\sqrt[3]{26}} \right]^{(1)} \text{ и } \left[-\frac{1}{3\sqrt[3]{26}} - \frac{4 \cdot 2^{2/3}}{36} \right]^{(2)} \text{ ①}$$

(1)

$$\left[-\frac{4\cdot 2^{2/3}}{3b}-\frac{1}{3\sqrt[3]{2}b}\right]$$

(2)

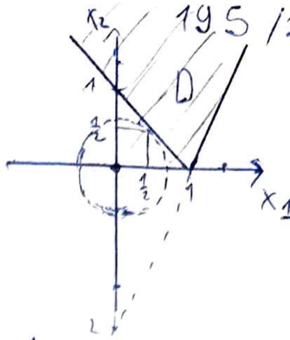
$$\left[-\frac{1}{3\sqrt[3]{2}\,b}-\frac{4\cdot 2^{2/3}}{3b}\right]$$

негативно дефинисати функција за $b>0$

Односно добијено решење показан максимум

ОКОМ - Задача 12

19.5/2021



a)

minimize $x_1^2 + x_2^2$

s.t. $1 - x_1 - x_2 \le 0$

$2 - 2x_1 + x_2 \ge 0$ односно $-2 + 2x_1 - x_2 \le 0$

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(+1 - x_1 - x_2) + \lambda_2(-2 + 2x_1 - x_2)$$

ја формираме лагранжовата ф-ја

согласно со ККТ условите ја формираме следниот систем

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1(-x_1 - x_2 + 1) = 0 \\ \lambda_2(2x_1 - x_2 - 2) = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2 \ge 0 \end{cases}$$

можни се следните случаи:

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ - нема активни ограничувања x^* е внатрешна точка на D - не е од интерес
- $\lambda_1 > 0 \quad \lambda_2 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$ } 1 активно ограничување
- $\lambda_2 > 0 \quad \lambda_1 = 0 \Rightarrow f_2 = 0$
- $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow f_1 = f_2 = 0$ } 2 активни ограничувања

$\lambda_2 = 0 \quad \lambda_1 > 0$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ 2x_1 - \lambda_1 = 0 \\ 2x_2 - \lambda_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ x_1 = \frac{\lambda_1}{2} \\ x_2 = \frac{\lambda_1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{\lambda_1}{2} - \frac{\lambda_1}{2} + 1 = 0 \\ x_1 = \frac{\lambda_1}{2} \\ x_2 = \frac{\lambda_1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Бидејќи системот има решение добиеното решение е оптимално и постапката завршува

$(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad f_0(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

б)

minimize $x_1^2 + x_2^2$

s.t. $1 - x_1 - x_2 \le 0$

$-2 + 2x_1 - x_2 \le 0$

$$L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda_1(1 - x_1 - x_2) + \lambda_2(-2 + 2x_1 - x_2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 & x_1^* = \dfrac{\lambda_1 - 2\lambda_2}{2} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & x_2^* = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \end{cases}$$

ја формираме лагранжовиот дуален проблем

$$L(x_1^*, x_2^*, \lambda_1, \lambda_2) = g(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{\lambda_1 - 2\lambda_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)^2 + \lambda_1\left(1 - \frac{\lambda_1 - 2\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)$$

$$+ \lambda_2\left(-2 + 2\frac{\lambda_1 - 2\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\lambda_1^2 - 4\lambda_1\lambda_2 + 4\lambda_2^2 + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2\right) +$$

$$\lambda_1\left(1 - \frac{2\lambda_1 - \lambda_2}{2}\right) + \lambda_2\left(-2 + \frac{\lambda_1 - 5\lambda_2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(2\lambda_1^2 + 5\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + 4\lambda_1 - 4\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 8\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2 - 10\lambda_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2\lambda_1^2 - 5\lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 4\lambda_1 - 8\lambda_2\right] = \boxed{-\frac{1}{2}\lambda_1^2 + \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 - \frac{5}{4}\lambda_2^2 + \lambda_1 - 2\lambda_2}$$

При што се формира проблемот

$$\underset{\lambda_1, \lambda_2}{\text{maximize}} \; g(\lambda_1, \lambda_2) \quad \text{s.t. } \lambda_1 \ge 0, \; \lambda_2 \ge 0$$

односно

$$\underset{\lambda_1 \lambda_2}{\text{minimize}} \; -g(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}\lambda_1^2 - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 + \frac{5}{4}\lambda_2^2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 \quad \text{s.t. } \lambda_1 \ge 0, \; \lambda_2 \ge 0$$

при што шо со методот на спуштање на градиенти би ја имам итеративната низа:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k - \sigma \nabla g(\lambda^k) \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\lambda_i^{k+1} = \max(0, \lambda_i^{k+1}) \quad i = 1, 2$$

$$\nabla g(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \\ \dfrac{\partial g(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 - 1 \\ -\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{5}{2}\lambda_2 + 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \qquad \nabla g(\lambda_1, \lambda_2) = P \cdot \lambda + q$$

$$q = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_1^k = \frac{\lambda_1^k - 2\lambda_2^k}{2} \qquad x_2^k = \frac{\lambda_1 + \lambda_2^k}{2}}$$

Задача 14 ОКОП 195/2021

стр 1.

Minimize $-x_1 + x_2^2 + x_3^2$

s.t. f_1 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1$ $\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \le 0$

f_2 $x_1 - x_2 - x_3 \ge 0$ $\Rightarrow -x_1 + x_2 + x_3 \le 0$

$f_{3,4,5}$ $x_i \ge 0$, $i = 1,2,3$ $\quad -x_i \le 0$ $\quad i = 1,2,3$

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) = -x_1 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) + \lambda_2(-x_1 + x_2 + x_3) + \lambda_3(-x_1) + \lambda_4(-x_2) + \lambda_5(-x_3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = -1 + 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + 2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 - \lambda_4 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 + 2\lambda_1 x_3 + \lambda_2 - \lambda_5 \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 1) = 0 \\ \lambda_2(-x_1 + x_2 + x_3) = 0 \\ \lambda_3(-x_1) = 0 \\ \lambda_4(-x_2) = 0 \\ \lambda_5(-x_3) = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \ge 0 \end{cases}$$

$\lambda_3 x_1 = 0$

$\lambda_4 x_2 = 0$

$\lambda_5 x_3 = 0$

1° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 > 0 \Rightarrow f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0$

2° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0$, $\lambda_5 = 0$

3° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5 > 0$, $\lambda_4 = 0$

4° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5 > 0$, $\lambda_3 = 0$

5° $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 > 0$, $\lambda_2 = 0$

6° $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 > 0$, $\lambda_1 = 0$

7° $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

8° $\lambda_2, \lambda_4, \lambda_5 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$

9° $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_5 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_4$

10° $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_5$

11° $\lambda_1, \lambda_4, \lambda_5 > 0$, $\lambda_2 = \lambda_3$

12° $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5 > 0$, $\lambda_2 = \lambda_4$

13° $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4 > 0$, $\lambda_2 = \lambda_5$

14° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5 > 0$, $\lambda_3 = \lambda_4$

15° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4 > 0$, $\lambda_3 = \lambda_5$

16° $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$, $\lambda_4 = \lambda_5$

17° $\lambda_4, \lambda_5 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 22° $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$

18° $\lambda_3, \lambda_4 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$ 23° $\lambda_1, \lambda_5 > 0$ $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$

19° $\lambda_3, \lambda_4 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_5 = 0$ 24° $\lambda_1, \lambda_4 > 0$ $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0$

20° $\lambda_2, \lambda_5 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ 25° $\lambda_1, \lambda_3 > 0$ $\lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$

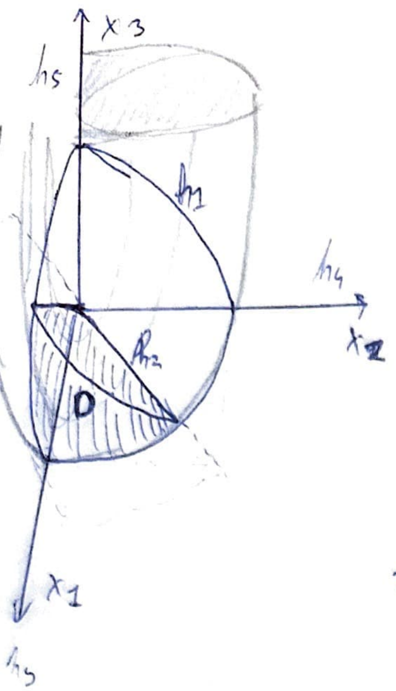
21 $\lambda_2, \lambda_4 > 0$ $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0$ 26° $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$

27° $\lambda_5 > 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$

28° $\lambda_4 > 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0$ 30° $\lambda_2 > 0$ $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5$

29 $\lambda_3 > 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ 31° $\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5$

32° $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5$



$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 = \dots = \lambda_5 = 0$$

$$\begin{cases} -1 + 2\lambda_1 x_1 = 0 \\ 2x_2 + 2\lambda_1 x_2 = 0 \\ 2x_3 + 2\lambda_1 x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \\ \lambda_1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2\lambda_1} \\ 2x_2(\lambda_1 + 1) = 0 \\ 2x_3(\lambda_1 + 1) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 + 1 = 0$
$\lambda_1 = -1$
не може

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2\lambda_1} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \left(\frac{1}{2\lambda_1}\right)^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} * \\ * \\ * \\ \frac{1}{4\lambda_1^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} * \\ * \\ * \\ \lambda_1^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Функцијата ќе има минимум во точката (x_1^*, x_2^*, x_3^*)
$\Rightarrow (1, 0, 0)$ и се добива оптималната вредност
$f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = -1$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$
не може
поради условот
$\lambda_1 \geq 0$