



EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
INFORMATIKAI KAR  
NUMERIKUS ANALÍZIS TANSZÉK

---

# Képek vízjelezése ortogonális függvényrendszerekben

Dr. Németh Zsolt  
egyetemi adjunktus

Kruppai Gábor  
programtervező informatikus MSc

Budapest, 2021

**EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM**  
**INFORMATIKAI KAR**

**DIPLOMAMUNKA TÉMABEJELENTŐ**

**Hallgató adatai:**

**Név:** Kruppa Gábor

**Neptun kód:** A180FM

**Képzési adatok:**

**Szak:** programtervező informatikus, mesterképzés (MA/MSc)

**Tagozat:** Nappali

Belső témavezetővel rendelkezem

*Témavezető neve: Németh Zsolt*

*munkahelyének neve, tanszéke: ELTE IK, Numerikus Analízis Tanszék*

*munkahelyének címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sny. 1/C.*

*beosztás és iskolai végzettsége: egyetemi tanársegéd, PhD*

*A diplomamunka címe: Képek vizjelezése ortogonális függvényrendszerekben*

**A diplomamunka téma:**

(A témavezetővel konzultálva adja meg 1/2 - 1 oldal terjedelemben diplomamunka témájának leírását )

A hagyományos vizjelek mindenki számára könnyedén észrevehetők, vizuálisan takarnak a képeken, valamint számos módon könnyedén eltávolíthatók különféle képszerkesztő programokkal.

A képek szabad szemmel jól látható vizjelezése helyett a vízjelet más módon is elhelyezhetjük a képben. A képet felbonthatjuk egy adott ortogonális függvényrendszer alapján, majd a vízjelet az így kapott Fourier együtthatókban, azok kis módosításával kódolhatjuk. Az együtthatókból való visszaállítás után a kép szabad szemmel nem látható módon fogja tartalmazni az így elhelyezett vízjelet. Az így kódolt információt a kép esetleges módosítása után is ki szeretnénk nyerni, ezért ezen módszerek ellenállóságát is vizsgálunk kell különféle transzformációkra és geometriai átalakításokra, mint például az eltolás, forgatás, átméretezés és vágás, valamint akár a kép tömörítő algoritmusok.

A problémára több módszer és függvényrendszer is ismert, melyek mind rendelkeznek különböző előnyökkel, hátrányokkal és megsoritásokkal. A dolgozat célja ezen függvényrendszerek alkalmazásával kódolt vízjelek transzformációkkal szembeni ellenállásának vizsgálata és kísérlet a kiterjesztésre, mint például egy helyett több színcsatorna kezelése.

Budapest, 2020.12.14.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
<b>2. Képi vízjelezés</b>	<b>5</b>
2.1. Vízjelek csoportosítása . . . . .	6
<b>3. Ortogonális függvényrendszerrek</b>	<b>9</b>
3.1. Fourier momentumok . . . . .	9
3.2. Zernike momentumok . . . . .	12
<b>4. Vízjelezés radiális-harmonikus függvényekkel</b>	<b>15</b>
4.1. Vízjel beágyazása . . . . .	15
4.2. Vízjel kiolvasása . . . . .	19
4.3. Kép torzulása . . . . .	20
<b>5. Implementáció</b>	<b>24</b>
5.1. Képek . . . . .	24
5.2. Momentumok . . . . .	24
5.3. Tesztek . . . . .	26
5.4. Futási idő javítása a mérések során . . . . .	26
<b>6. Ellenállóság vizsgálata</b>	<b>28</b>
6.1. Mérési módszer és környezet . . . . .	28
6.2. Geometriai transzformáció ellenállóság . . . . .	29
6.3. Zaj ellenállóság . . . . .	30
6.4. Képtömörítés ellenállóság . . . . .	34
6.5. Egyéb képmódosítás . . . . .	35
<b>7. Konklúzió és kitekintés</b>	<b>37</b>
<b>Hivatkozások</b>	<b>38</b>

## 1. Bevezetés

A különféle tartalmak vízjelezése valamilyen plusz információ beágyazását jelenti meglévő jelekbe, azok valamilyen módosításával. Fontos kiemelni, hogy vízjelezésnél nem információ mellékeléséről beszélünk, hanem beágyazásáról. A különbség főleg abban nyilvánul meg, hogy míg az előbbinél a jel mérete megnő, addig az utóbbinál változatlan marad – értendő ezalatt az esetleges tömörítési algoritmus alkalmazása előtti állapot.

A digitális technológiák széles körű elterjedésével és az ezzel járó hang, kép, videó és szöveges anyagok könnyű másolhatóságával és manipulálhatóságával ezek vízjelezés is egyre fontosabb és minden napibb lett, ám ez közel sem jelenti azt, hogy újfajta területről van szó: a digitális vízjelek csak egy újabb kategória a témaban. A nyomtatásban és az analóg kommunikációban már régóta alkalmazznak vízjeleket, de az információ valamilyen hordozó közegbe ágyazásának ötlete már az ókorban is ismert volt.

A vízjelezési módszerek legfőbb céljai napjainkban hitelesség igazolás, eredet azonosítás, adat követés és szerzői jogvédelem. A széles körű felhasználási területek a minden napokban használt készpénztől és hivatalos igazolványoktól, a nyomtatott anyagokon át, egészen a minden nemű digitális tartalmakig terjednek. minden bankjegy és a személyazonosításra szolgáló igazolvány tartalmaz mind jól látható és rejttett – azaz csak valamilyen körülmény esetén vagy speciális eszköz segítségével látható – jeleket, melyek a hamisítás megnehezítését szolgálják. A térképeszetben meghatározott helyeken tudatosan elkövetett apró pontatlanságok szolgálnak a kiadó azonosítására és a tartalmi másolatok leleplezésére. A letölthető vagy online megtekinthető könyvek, zenék, filmek és képek általában szintén tartalmaznak személyre szabott rejttett vízjeleket, melyek segítségével például azonosítható, hogy kinkeresztül szívárogtak ki értékes információk.

Az információ jelekbe ágyazása önmagában nem nehéz probléma, azonban számolni kell azzal, hogy lesznek, akik módosítják a vízjelezett jelet, ami befolyásolhatja a vízjel kiolvashatóságát és további felhasználhatóságát. Ha eredetiséget vagy származást szeretnénk kódolni, akkor olyan módszerre van szükségünk, mely minél inkább ellenáll a tartalmazó jel módosításainak.

A dolgozat a digitális képekkel kapcsolatos vízjelezési módszerekkel foglalkozik, ezen belül pedig a képek valamelyen geometriailag invariáns tulajdonságaiba kódoló módszerekkel. Ilyenek például a képek ortogonális függvényrendszerek szerinti felbontásából kapott együtthatókat használó algoritmusok. A problémára több módszer és függvényrendszer is ismert, de a terület jelenleg is aktívan kutatott. Munkám során az ilyen függvényrendszerek alkalmazásával kódolt vízjelek különféle transzformációkkal szembeni ellenállóságának vizsgálatával foglalkoztam, melynek eredménye a jelenleg ismert, ilyen célra alkalmas felbontások implementációja és ezek összehasonlító elemzése. A vizsgált rendszerek gyakorlati összehasonlításához egységes tesztek készültek, melyek segítséget nyújtanak az egyes módszerek alkalmazhatóságának megítélésében.

## 2. Képi vízjelezés

A "hagyományos" értelemben vett képi vízjelek mindenki számára jól ismertek, könnyedén észrevehetők és általában céljuktól függően vizuálisan takarnak a képeken. Önmagában ez nem probléma, hiszen a legtöbb esetben éppen az a cél, hogy a vízjel jól észrevehető és akár a felhasználást megnehezítő jelzést adjon az azt felhasználónak és nézőnek. Hátrány lehet viszont, hogy az ilyen fajta megjelölésnek minden szemlélő tudatában van, jól lokalizálhatók a képeken, valamit legtöbbje számos módon könnyedén eltávolítható különféle képszerkesztő programok segítségével.



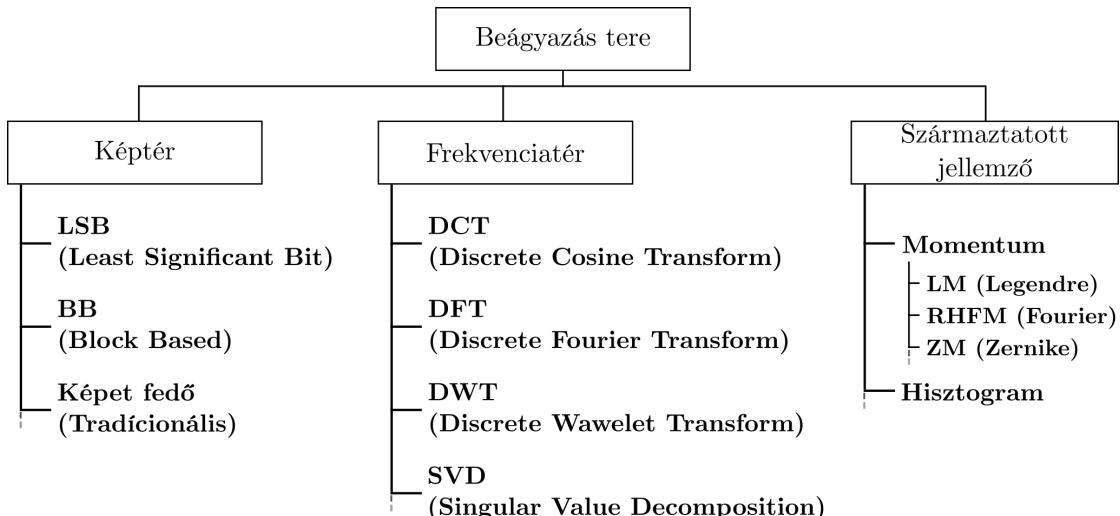
1. ábra. A "watermark" szöveggel vízjelezett kép (a) hagyományos módon, (b) beágyazással.

A képek szabad szemmel jól látható módosítása helyett a vízjel más módon is elhelyezhető. A kép különböző technikákkal átalakítható valamilyen más reprezentációba, majd a vízjel ebbe az új alakba kerül beágyazásra. A módosított alakból történő rekonstrukció után a kép implicit fogja tartalmazni a vízjelet. Erre az átalakításra/felbontásra használhatunk megfelelő ortogonális függvényrendszereket, majd a vízjel az így kapott Fourier-együttthatókban vagy momentumokban, azok kis módosításával kódolható. A módosított együtthatókból való visszaállítás után a módosult kép szabad szemmel nem látható módon fogja tartalmazni az így elhelyezett vízjelet. A módszer további előnyének tekinthető, hogy az így kódolt információ nem egy helyre koncentrálódik a képen, valamint szabad szemmel nem észrevehető, így a kép kifejezetten a vízjel eltávolítását célzó módosítására is kisebb a kockázat.

Mivel az így kódolt információt a kép esetleges módosítása után is ki szeretnénk nyerni, ezért ezen módszerek ellenállóságát is vizsgálnunk kell mind különféle geometriai transzformációkra, mind az egész képet érintő pixelérték változásokat eredményező algoritmusokra. A leggyakrabban előforduló geometriai transzformációk az átméretezés, forgatás, vágás és tükrözés, a kép pixelértékeit érintő algoritmusok közül pedig a veszteséges kép tömörítő algoritmusok a dominánsak.

A vízjelezési módszerek több tulajdonságuk mentén is kategorizálhatóak. Az egyes alkalmazási területektől és céljuktól függően a különböző problémákra más tulajdonságú vízjelek nyújthatnak jobb megoldást.

## 2.1. Vízjelek csoportosítása



2. ábra. Legelterjedtebb képi vízjelezési módszerek csoportosítása a beágyazás technikája szerint.

Az előzőekben említett, ortogonális függvényrendszerek szerinti momentumokat használó módszercsalád csak egyike a jelenleg ismert és használt vízjelezési eljárásoknak (ld. 2. ábra). Ezek összehasonlítása [4] és különféle minden nap területeken való alkalmazhatósága [5, 6] a közelmúltban egyre aktívabb területté vált. A dolgozathoz választott momentum módszerek (RHFMRHF, ZM) a kimagasló transzformáció- és zaj ellenállóságuk miatt kifejezetten alkalmasak képi vízjelezésre, ám – mint az a későbbiekben kifejtésre kerül – megvannak a maguk hátrányai is.

Az egyes módszerek tovább bonthatók vagy jellemzhetők az elkódolt vízjel tulajdonságai alapján. Míg a 2. ábra csoportosítása egy technikai tulajdonság szerinti

bontás, az alkalmazások szempontjából fontosabb tulajdonságok az észlelhetőség, ellenállóság és a kiolvashatóság kérdése.

### **2.1.1. Észlelhetőség**

A vízjelek észlelhetősége alatt az emberi szem általi megkülönböztethetőséget értjük az eredeti és a vízjelezett kép között. Az észlelhető módszereknél szabad szemmel is megállapítható, hogy a kép módosítva lett. Ez vagy valamilyen takaró objektum képre illesztését jelenti, vagy olyan mértékben lett módosítva a kép valamelyen másik térbe – például frekvenciatérbe – transzformált alakja, hogy a visszaállítás után a kép szabad szemmel is látható módon torzult.

Fontos megjegyezni, hogy az észlelhetőségből nem következik a beágyazott információ olvashatósága, ugyanis az akár titkosított is lehet. Például: egy online megnézhető film esetében a vizuális élmény megőrzése végett nem szeretnénk vizuálisan takaró elemeket elhelyezni, ezzel szemben egy egyedi grafikával rendelkező termék online hirdetésénél elkerülendő, hogy a kép tartalma más által is felhasználható legyen, így itt általában a kép egészén jól észlelhető vízjel használatos.

### **2.1.2. Ellenállóság**

A módosításra érzékeny vízjelek az adatok integritásának, eredetiségenek igazolását hivatottak jelezni, például hivatalos dokumentumokon.

Az ellenálló módszerek a kép különféle transzformációkra invariáns tulajdonsgaiba kódolják a vízjelet. Ez a legtöbb esetben az eredeti tulajdonost vagy az tartalmat éppen megtekintő személyét hivatott azonosítani és ezáltal követhetővé tenni az adott médiatartalmat. Például online filmek esetén az adott nézőre egyedi azonosító képbe kódolásával.

### **2.1.3. Referenciakép szükségessége**

A referenciaképet használó algoritmusok az eredeti és a vízjellel módosított kép közötti különbség alapján értelmezik az elkódolt vízjelet. Ezeknél a módszereknél minden esetben szükség van az eredeti kép ismeretére is, melyet meg kell osztani mindenivel, aki szeretné értelmezni ezen kódolást.

A direkt módszerek úgy módosítják az eredeti képet, hogy egy adott függvény sor

a módosított adatokon való kiértékelésével pont az elkódolt információt kapjuk. Ebből adódóan, a direkt módszereknél nincs szükség az eredeti képre, viszont ismerni kell a megfelelő függvényt mely – egy privát kulcs szerepével betöltve – akár több képre is azonos is lehet.

### 3. Ortogonális függvényrendszerek

#### 3.1. Fourier momentumok

A sugármenti Fourier momentumok ("radial harmonic Fourier moments", RHFM) az egységlemezen értelmezett, folytonos értelemben véve ortogonális momentumok. Definíciója szerint [7], a  $\phi_{nm}$   $n(n \geq 0)$ -ed rendű (*order*),  $m$  ismétlésszámú (*repetition*) RHFM az alábbi módon számítható ki egy egységlemezen értelmezett  $f$  valós függvényre:

$$\phi_{nm} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 f_p(r, \theta) P_{nm}^*(r, \theta) r dr d\theta \quad (3.1)$$

ahol  $f_p$  az  $f$  függvény polár koordinátákon értelmezett megfelelője és  $P^*$  a  $P$  magfüggvény komplex konjugált jelöli.

A  $\phi_{nm}$  momentum magfüggvénye, az alábbi módon definiált:

$$P_{nm}(r, \theta) = T_n(r) \exp(im\theta) \quad (3.2)$$

$$T_n(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{r}} & \text{ha } n = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{r}} \sin((n+1)\pi r) & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \sqrt{\frac{2}{r}} \cos(n\pi r) & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases} \quad (3.3)$$

Az így kapott együtthatókból, az  $f_p(r, \theta)$  függvény a

$$f_p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{nm} T_n(r) \exp(im\theta) \quad (3.4)$$

módon állítható vissza.

A (3.1) képlet  $N \times N$  méretű  $f$  kép esetén, diszkretizálva az alábbi alakba írható:

$$\phi_{nm} \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} f(p, q) T_n(r_{p,q}) \exp(-im\theta_{p,q}) \Delta^2 \quad (3.5)$$

ahol  $I$  képpontjainak indexelése 0-tól kezdődik,  $\Delta = \frac{2}{N}$  az egységkörbe írt kép két szomszédos képpontja közötti távolság, a  $(p, q)$  képpont síknegyedet figyelembe vevő polár koordinátái pedig  $f, [-1, 1] \times [-1, 1]$  -be transzformált  $x_p, y_q$  koordinátáival

### 3 ORTOGONÁLIS FÜGGVÉNYRENDSZEREK

számolhatók:

$$x_p = \frac{2p}{N-1} - 1 \quad (3.6)$$

$$y_q = \frac{2q}{N-1} - 1 \quad (3.7)$$

$$r_{p,q} = \sqrt{x_p^2 + y_q^2} \quad (3.8)$$

$$\theta_{p,q} = \arctan_2 \left( \frac{y_q}{x_q} \right) \quad (3.9)$$

Véges számú együtthatóval közelítve, a kép az alábbi módon állítható vissza:

$$f_p(r, \theta) \approx \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} \phi_{nm} T_n(r) \exp(im\theta) \quad (3.10)$$

ahol általában  $n_{max} = K$ ,  $m_{max} = \alpha K$ .

A (3.5) módon diszkretizált kiszámítás sajnos  $T_n(r) \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow 0$ ) miatt numerikusan instabil és a magfüggvény adott  $n$  és  $m$  esetén  $[p - \frac{\Delta}{2}, p + \frac{\Delta}{2}]$  és  $[q - \frac{\Delta}{2}, q + \frac{\Delta}{2}]$  intervallumon konstansnak tekintése az ortogonalitást is elrontja. Az integrál pontos közelítésére bevezethetők – többek között – Gauss-kvadratúra formulák [8, 9], melyekkel jobb numerikus stabilitás és az ortogonalitás megtartása is elérhető, de ezzel tovább nő a már önmagában magas számítási igény –  $\mathcal{O}(K^2 N^2)$ .

A kép rekonstrukció (3.10) műveletigénye a teljes képre  $\mathcal{O}(N^2 K^2)$ .

#### 3.1.1. Számítási igény csökkentése

A (3.5) képlet jobboldala algebrai átalakításokkal Fourier-transzformálittal ki-fejezhető alakra hozható, melynél gyors Fourier-transzformáció alkalmazható [3]. Ekkor a  $\phi_{nm}$  együtthatók, az alábbi módon számolhatók:

$$\phi_{nm} = \begin{cases} \sqrt{2}F[0, m] & \text{ha } n = 0 \\ F[k, m] + F[K - k, m] & \text{ha } n = 2k \ (k = 1, 2, \dots) \\ i(F[k, m] - F[K - k, m]) & \text{ha } n = 2k - 1 \ (k = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (3.11)$$

### 3 ORTOGONÁLIS FÜGGVÉNYRENDSZEREK

ahol  $F = \mathcal{F}^{(2)} \left( \left[ \sqrt{\frac{r_u}{2}} f_p(r_u, \theta_v) \right]_{u=0, \dots, K, v=-K, \dots, K} \right)$  és  $\mathcal{F}^{(2)}$  a 2-dimenziós Fourier transzformációt jelöli és az egységgörön értelmezett polár pontrendszer koordinátái:

$$r_u = \frac{u}{K} \quad (u = 0, \dots, K) \quad (3.12)$$

$$\theta_v = \frac{v}{K} 2\pi \quad (v = 0, \dots, K) \quad (3.13)$$

Ezzel az átalakítással nemcsak egy numerikusan stabilabb képletet kapunk mely kiküszöböli az  $r = 0$  körüli értékek pontatlanságát, de gyors Fourier-transzformációt alkalmazva, a számítási igény is jelentősen lecsökken –  $\mathcal{O}(K^2 + K^2 \log(K^2)) = \mathcal{O}(K^2 \log(K^2))$ .

A momentumok számítási igénye tovább – felére – csökkenthető csak a nemnegatív ismétlésszámú momentumokat kiszámításával, ugyanis  $F_{n,-m} = F_{nm}^*$  szimmetria miatt  $m < 0$  esetén konjugálással előállítható a momentum értéke a megfelelő pozitív ismétlésszámú momentumból.

#### 3.1.2. Ortonormált pontrendszer

A (3.12) és a (3.13) képletekből jól látható, hogy a módosított számításkor  $(r_u, \theta_v)$  polár koordináták a  $f_p$  függvény sugár és szög szerinti egyenletes mintavételezése. Ez az új pontrendszer nem esik egybe az eredeti pixel pozíciókkal, így  $f_p(r_u, \theta_v)$  meghatározásához valamilyen interpolációt kell alkalmazni.

Ezen új pontrendszer előnye, hogy az így kapott momentumot definiáló polinomok diszktér esetben ortonormált rendszert fognak alkotni – ami az eredeti Descartes pixel pozíciók használatakor nem teljesül. A momentumok diszkrét ortogonális tulajdonságából következik, hogy várhatóan ellenállóbb lesz a zajra és a különféle transzformációkra, mint a nem ortogonális rendszerek. Szintén az új pontrendszernek köszönhető, hogy az így definiált momentumok számításakor gyors Fourier-transzformáció alkalmazható, az előző fejezetben bemutatott módon.

### 3.2. Zernike momentumok

A Zernike- és pszeudo-Zernike momentumok (ZMs/PZMs) az előzőekhez hasonlóan szintén az egységlemezen értelmezett, folytonos értelemben véve ortogonális momentumok. Definíciója szerint [11], az  $A_{nm}$   $n(n \geq 0)$ -ed rendű (*order*),  $m$  ismétlésszámú (*repetition*) (pszeudo-) Zernike momentum az alábbi módon számítható ki egy egységlemezen értelmezett  $f$  valós függvényre:

$$A_{nm} = \frac{n+1}{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 f_p(r, \theta) V_{nm}^*(r, \theta) r dr d\theta \quad (3.14)$$

ahol  $f_p$  az  $f$  függvény polár koordinátákon értelmezett megfelelője és  $V^*$  a  $V$  magfüggvény komplex konjugált jelöli, valamint a momentum akkor értelmezett, ha  $n - |m|$  nemnegatív, továbbá Zernike momentum esetén páros. Ha  $n - |m|$  nem tesz eleget ennek a feltételnek, akkor  $A_{nm} = 0$  használható a számítások során.

A  $V_{nm}(r, \theta)$  magfüggvény az alábbi módon definiált:

$$V_{nm}(r, \theta) = R_{nm}(r) \exp(im\theta) \quad (3.15)$$

ahol  $R_{nm}(r)$  Zernike momentum esetén:

$$R_{nm}(r) = \sum_{s=0}^{\frac{n-|m|}{2}} \left[ \frac{(-1)^s (n-1)! r^{n-2s}}{s! \left(\frac{n+|m|}{2} - s\right)! \left(\frac{n-|m|}{2} - s\right)!} \right] \quad (3.16)$$

pszeudo-Zernike momentum esetén pedig:

$$R_{nm}(r) = \sum_{s=0}^{n-|m|} \left[ \frac{(-1)^s (2n+1-s)! r^{n-s}}{s! (n+|m|+1-s)! (n-|m|-s)!} \right] \quad (3.17)$$

Látható, hogy a pszeudo-Zernike momentumok számítása csak a radiális komponensben tér el az eredetitől. Használatukkal jobb zaj-ellenállóság [10] érhető el vízjelzéskor, cserébe viszont numerikusan (még) nehezebb a számolásuk, így a gyakorlatban a ZM-hoz képest kisebb fokszámig alkalmazhatók hatékonyan [11].

Az így kapott  $\{A_{nm} : n - |m| \text{ nemnegatív és páros}\}$  együtthatókból, az  $f_p(r, \theta)$  függvény

$$f_p(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{nm} V_{nm}(r, \theta) \quad (3.18)$$

### 3 ORTOGONÁLIS FÜGGVÉNYRENDSZEREK

módon állítható vissza.

A (3.14) képlet  $N \times N$  méretű képek esetén, diszkretizálva az alábbi alakba írható:

$$A_{nm} \approx \frac{n+1}{\pi} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} f(x_p, y_q) V_{nm}^*(x_p, y_q) \Delta^2 \quad (3.19)$$

ahol  $f$  az egységkörbe transzformált kép,  $\Delta = \frac{2}{N}$  két szomszédos képpont távolsága,  $x_q$  és  $y_p$  pedig (3.6) és (3.7) -hez hasonlóan számolható.

Véges számú együtthatóval közelítve a kép az alábbi módon állítható vissza:

$$f_p(r, \theta) \approx \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} A_{nm} V_{nm}(r, \theta) \quad (3.20)$$

ahol általában  $n_{max} = K$ ,  $m_{max} = \alpha K$  és a nem értelmezett indexekre  $A_{nm} = 0$ .

Az adott  $K$ -ra létező összes együttható (3.19) kiszámítása és ezekből a teljes kép visszaállítása (3.20) a fenti hagyományos képletekkel kifejezetten magas műveletigényű – egyaránt  $\mathcal{O}(K^2 N^4)$  – mely a módszer egy nagy hátránya.

#### 3.2.1. Számítási igény csökkentése

A momentumban használt radiális polinom hagyományos számítási módja (3.16) már önmagában  $\mathcal{O}(N^2)$  műveletigényű, melyet minden  $(n, m)$  indexre és több  $r \in [0, 1]$  sugármenti távolságra ki kell számolni. Ezeket az értékeket előre is kiszámolhatjuk ( minden  $(n, m)$  indexre és az egységkörbe transzformált kép egyik síknegyedében lévő pixelek origótól vett távolságára) – továbbra is  $\mathcal{O}(K^2 N^4)$  időben.

Az  $R_{nm}$  polinomok értékeinek gyorsabb meghatározásához a módosított Kintner módszer [2] használható, mellyel rekurzívan,  $\mathcal{O}(K^2)$  időben számolható minden  $R_{nm}(r)$  egy rögzített  $r \in [0, 1]$  érték esetén:

$$R_{nm}(r) = \frac{(K_2 r^2 + K_3) R_{n-2,m}(r) + K_4 R_{n-4,m}(r)}{K_1} \quad (3.21)$$

### 3 ORTOGONÁLIS FÜGGVÉNYRENDSZEREK

ahol  $n \neq m$ ,  $n - m \neq 2$  és  $K_1, K_2, K_3, K_4$  együtthatók definíciója:

$$K_1 = \frac{(n+m)(n-m)(n-2)}{2} \quad (3.22)$$

$$K_2 = 2n(n-1)(n-2) \quad (3.23)$$

$$K_3 = -m^2(n-1) - n(n-1)(n-2) \quad (3.24)$$

$$K_4 = \frac{-n(n+m-2)(n-m-2)}{2} \quad (3.25)$$

valamint az előbbi képletekkel nem számolható  $n = n$  és  $n - m = 2$  esetekben pedig az alábbi formulák alkalmazhatók:

$$R_{nn}(r) = r^n \quad (3.26)$$

$$R_{n,n-2}(r) = nR_{nn}(r) - (n-1)R_{n-2,n-2}(r) \quad (3.27)$$

A radiális polinomok értékeit (3.16) helyett a módosított Kintner módszerrel előre kiszámolva minden előforduló  $r$  sugárra, az összes momentum kiszámításának ideje  $\mathcal{O}(N^2K^2 + K^2N^2) = \mathcal{O}(K^2N^2)$ -re csökken.

A momentumok számítási igénye tovább – felére – csökkenthető csak a nemnegatív ismétlésszámú momentumok kiszámításával, ugyanis  $A_{n,-m} = A_{nm}^*$  szimmetria miatt  $m < 0$  esetén egy konjugálással előállítható a momentum értéke a megfelelő pozitív ismétlésszámú momentumból.

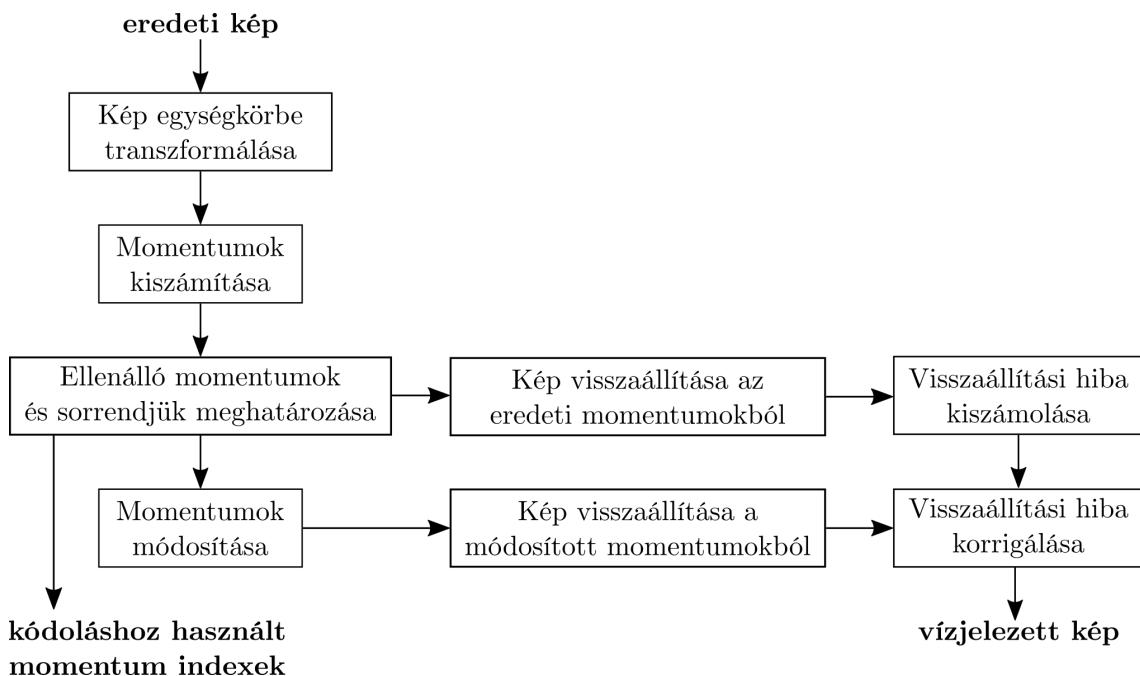
#### 3.2.2. Ortogonalitás és pontrendszer

Mind ZM és PZM esetében a momentumok folytonos esetben ortonormáltak lesznek, viszont diszkrét esetben – az RHFMs-mel ellentétben – sajnos nem fog teljesülni az ortogonalitás. Az RHFMs-nél ez a kép egy új mintavételezésével vált lehetséges, ezzel szemben a Zernike momentumok esetén erre nincs ismert módszer.

## 4. Vízjelezés radiális-harmonikus függvényekkel

A kép ortogonális függvényrendszer szerinti felbontásából kapott együtthatók módosításával kódoló direkt módszerek – a kódolás és kiolvasás lépései tekintve – hasonlóan működnek.

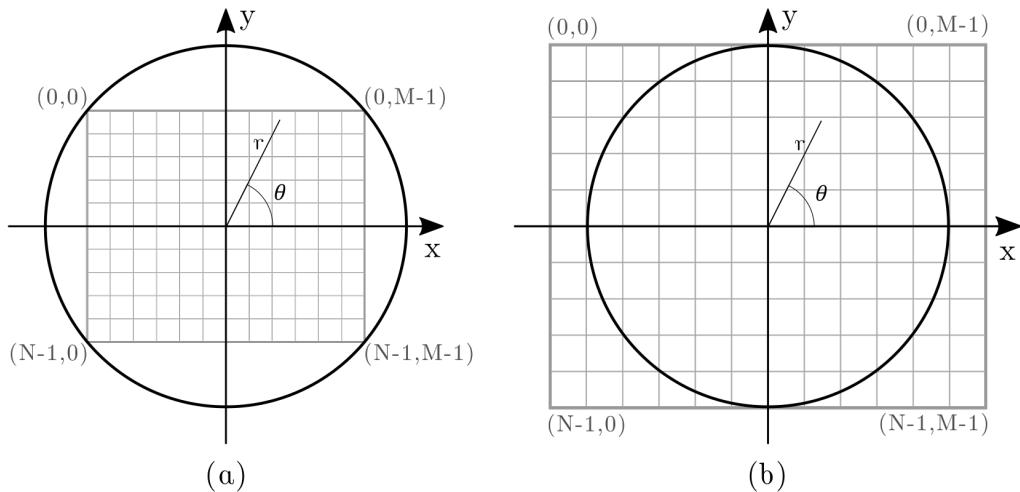
### 4.1. Vízjel beágyazása



3. ábra. Vízjel beágyazása lépései.

- (1) **Az eredeti kép transzformálása** A képet az adott függvényrendszer értelmezési tartományába transzformáljuk a méretarányok megtartásával. Ha az eredeti kép "alakja" eltér az értelmezési tartomány – a vizsgált módszerek esetén az egységlemez – "alakjától", akkor az egyik lehetőség a teljes kép értelmezési tartományba transzformálása (kép köré írt kör), a másik lehetőség pedig az értelmezési tartomány kitöltése a képpel (képbe írt kör). Könnyen belátható, hogy a kép köré írt kör használatával jelentősen csökkenne a számítások szempontjából "hasznos" tartomány és a momentumok elvesztenék invariáns tulajdonságukat a forgatásra, így a legtöbb alkalmazásnál a képbe írt kör használatos.

## 4 VÍZJELEZÉS RADIÁLIS-HARMONIKUS FÜGGVÉNYEKKEL



4. ábra. (a) egységkörbe írt kép, (b) képbe írt egységkör

### (2) Momentumok kiszámítása

Az adott függvényrendszer szerinti momentumok a 3. fejezetben leírtak szerint számolhatóak. Számítási módtól függően, a kép indexelésekor nem biztos, hogy egész értékeket kapunk, ekkor az ottani intenzitásérték meghatározására valamelyen interpoláció alkalmazandó.

### (3) Ellenálló momentumok kiválasztása

A vízjel kódolására a nagyobb abszolút értékű – "ellenálló" – momentumok a legideálisabbak, mivel ezek változnak legkevésbé a képhez adott zaj- és a különféle transzformációk esetén. További előny, hogy ezen momentumok módosításakor itt lesz a legkisebb a relatív eltérés, így a módosított visszaállított kép is kisebb mértékben torzul majd.

Függvényrendszer	Használható momentumok	Gyakorlati feltételek
RHF (F <sub>nm</sub> )	n, m ≥ 0	n - m ≤ 0
ZM (A <sub>nm</sub> )	n, m ≥ 0, n ≥ m, 2   n - m	4 ∤ m
PZM (A <sub>nm</sub> )	n, m ≥ 0, n ≥ m	4 ∤ m

1. táblázat. Momentumok rendjére és ismétlésszámára vonatkozó feltételek [3, 11].

## 4 VÍZJELEZÉS RADIÁLIS-HARMONIKUS FÜGGVÉNYEKKEL

Általános szabályként elmondható, hogy alacsony  $n, m$  indexű momentumokba érdemes kódolni, ugyanis  $|F_{nm}| \rightarrow 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ ), így minél nagyobb indexű momentumokat választunk, azok annál kisebb abszolút értékűek lesznek, ami az ellenállóságra és a torzításra nézve kifejezetten hátrányos. Ebből kifolyólag a kódolandó bitek számát sem lehet tetszőlegesen növelni nagyobb minőségirolás nélkül (ld. 4.3 fejezet).

Amennyiben az alkalmazás megkívánja, a vízjel szabad kiolvasását megakadályozandó  $K = [k_1, k_2, \dots]$  indexsorozat (kulcs) is készíthető a kiválasztott momentumok kódoláskor vett sorrendjének módosításával. Ebben az esetben kiolvasáskor szintén ismerni kell ezt a sorrendet.

### (4) Momentumok módosítása

Adott kódolandó  $w = [b_1, b_2, \dots, b_d] \in \{0, 1\}^d$  bitsorozat  $(M_{k_1}, M_{k_2}, \dots, M_{k_d})$  momentumokba kódolására a bináris kvantált dither moduláció [1] a legelterjedtebb módszer, mely az alábbi képlettel írható le:

$$M'_{k_i} = \begin{cases} \frac{(\lambda_i - \frac{1}{2})\Delta}{|M_{k_i}|} M_{k_i} & \text{ha } (\lambda_i + b_i) \bmod 2 = 1 \\ \frac{(\lambda_i + \frac{1}{2})\Delta}{|M_{k_i}|} M_{k_i} & \text{ha } (\lambda_i + b_i) \bmod 2 = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

ahol  $\lambda_i = \text{round}\left(\frac{|M_{k_i}|}{\Delta}\right)$ ,  $\Delta$  a kvantálási lépésköz és *round* a kerekítés függvény.

A  $\Delta$  lépésköz megválasztása tekinthető alkalmazásfüggőnek, ugyanis a nagyobb érték nagyobb torzulást eredményez, cserébe nő a vízjel ellenállósága (ld. 4.3. fejezet).

A képlet alapján, más modulust alkalmazva lehetőség lenne akár több információ (pl. 2 bit) kódolására is egyetlen momentumba, de a gyakorlatban ez a transzformáció-ellenállóság megtartásához nagyobb kvantálási lépésközt tenne szükséges, így a visszaállított kép is nagyobb mértékben torzulna (ld. 4.3 fejezet).

### (5) Vízjelezett kép visszaállítása

A képet a módosított  $(M'_{k_1}, M'_{k_2}, \dots, M'_{k_d})$  momentumokból csak az egységlemezen tudjuk visszaállítani és – a használt momentumok számától függően –

## 4 VÍZJELEZÉS RADIÁLIS-HARMONIKUS FÜGGVÉNYEKKEL

szabad szemmel is könnyen észrevehető hibával. Azonban a hiba túlnyomó hányada nem a momentumok módosítása miatt keletkezett, hanem a kép momentumkkal való approximációja és a numerikus hibák következtében. Az eredeti momentumokból való visszaállítás hibáját hozzáadva a módosított momentumkból visszaállított képhez, az a visszaállítási hibáktól mentes lesz valamint továbbra is tartalmazni fogja a vízjelet.

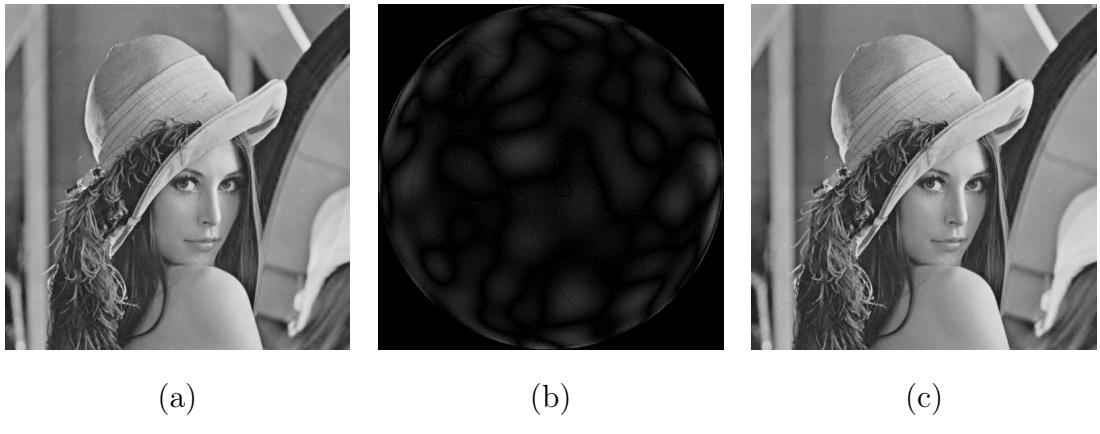
$$F = \text{Moments}(f) \quad (4.2)$$

$$F' = \text{Modify}(F) \quad (4.3)$$

$$f' = f - \text{Reconstruct}(F) + \text{Reconstruct}(F') \quad (4.4)$$

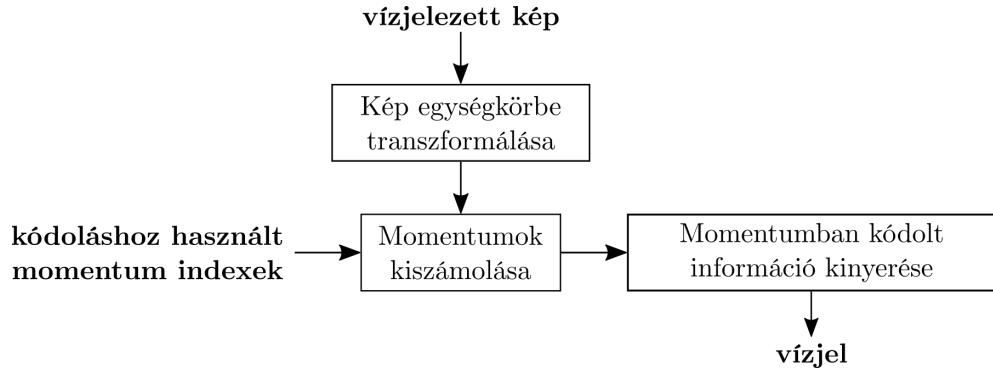
ahol  $f$  és  $f'$  az eredeti illetve a módosított kép,  $F$  és  $F'$  az eredeti és módosított momentumok, *Moments*, *Modify*, *Reconstruct* függvények pedig a momentumok számolását, módosítását és az ezekből való visszaállítást jelentik az adott momentumra (ld. 3. fejezet).

Kiemelendő, hogy a mindenkor visszaállítás során elég csak a módosításra kiválasztott momentumokat használni, ugyanis a fel nem használt vagy ki nem számolt momentumok által reprezentált információt kiválasztott momentumokkal számolt visszaállítási hiba tartalmazni fogja.



5. ábra. A vízjelezés soráni (a) eredeti kép, (b) beágyazott vízjel  $10\times$  intenzitással, (c) vízjellel módosított kép.

## 4.2. Vízjel kiolvasása



6. ábra. Vízjel kiolvasásának lépései.

### (1) Az eredeti kép transzformálása

A képet a 4.1.(1) szerint az egységlemezre transzformáljuk.

### (2) Momentumok kiszámítása

A momentumok kiszámításánál a 4.1.(2) ponthoz hasonlóan járunk el, de itt a beágyazott vízjel kiolvasásához elég csak a kódolás során módosított momentumokat kiszámítani.

### (3) Bitek kiolvasása

A beágyazás során az információt a módosított momentumok magnitúdójába kódoltuk, ennek megfelelően az információt a momentumok abszolút értékének kvantáltja fogja tartalmazni [1]. A 4.1.(4) részben használt kódolás esetén, ez a kapott érték paritása lesz.

$$b'_k = \text{floor} \left( \frac{|F_{k_i}|}{\Delta} \right) \mod 2 \quad (4.5)$$

ahol  $k_i$  a 4.1.(3) pontban bevezetett indexsorozat egy eleme,  $F_{k_i}$  az ennek megfelelő momentum,  $\Delta$  a kódoláskor használt kvantálási lépésköz és *floor* pedig a lefelé kerekítés művelet.

A kiolvasáskor tapasztalható, a kódolás vagy a transzformációk során keletkezett hibák elfedésére a vízjel megválasztása során hibajavító kódok alkalmazhatók.

### 4.3. Kép torzulása

Ahogy az a 4.1. fejezetben is többször előkerült, a momentumok módosítása a visszaállított kép torzulását eredményezi. A torzulás mértéke a módosított momentumok relatív változásától függ. Feltehetjük, hogy az alkalmazás során a kvantálási lépésköz előre rögzített, továbbá a 3. fejezetben ismertetett függvényrendszeren szerinti momentumok ortogonális projekciójának tekinthetők, melyekre a Bessel-egyenlőtlenség alapján:

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |F_{nm}(f)|^2 \leq \|f\|^2 \quad (4.6)$$

$$\Rightarrow |F_{nm}| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty) \quad (4.7)$$

Általánosan megfogalmazva, a vízjelet a kis  $n, m$  indexű momentumokba célszerű kódolni, ugyanis a nagyobb indexű momentumok abszolút értéke kisebb, így a kvantálási lépésköztől függő relatív érték-módosítás is nagyobb lesz.

$$MSE(I, J) = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (I[i, j] - J[i, j])^2 \quad (4.8)$$

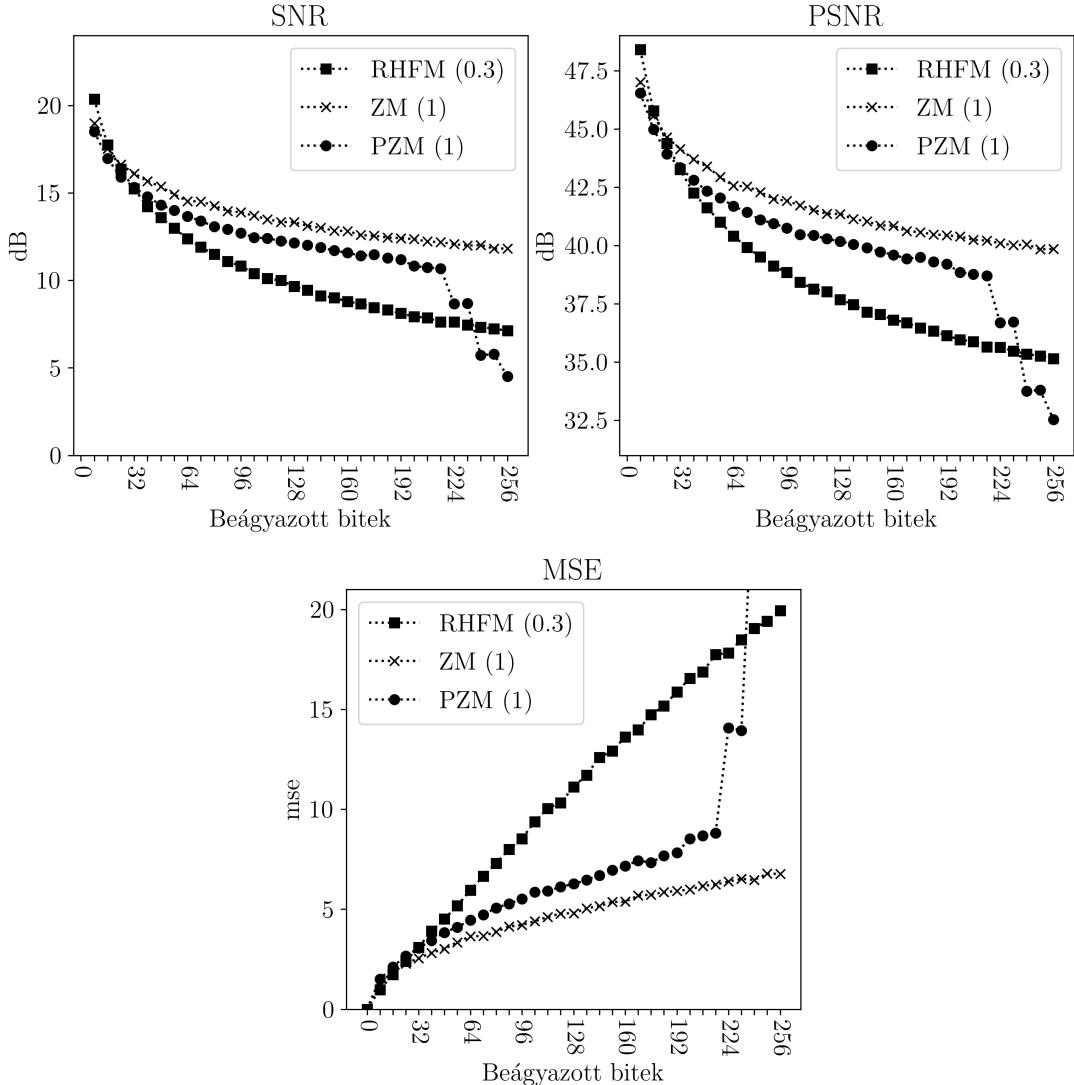
$$SNR(I, J) = 10 \log_{10} \left( \frac{\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M I^2[i, j]}{MSE(I, J)} \right) \quad (4.9)$$

$$PSNR(I, J) = 10 \log_{10} \left( \frac{\max_{i,j} I[i, j]^2}{MSE(I, J)} \right) \approx 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{MSE(I, J)} \right) \quad (4.10)$$

A kódolás által előidézett torzulás mérésére a minőségének definíciójától függően több metrika is alkalmazható. A dolgozatban a tesztek során a "peak signal-to-noise ratio" (PSNR, maximum jel-zaj arány) lett elsődlegesen figyelembe véve, mivel a gyakorlatban a képrekonstrukció hibájának ez a legszélesebb körben használt mérőszáma. Az egyszerűség kedvéért a kép maximum intenzitását 8bpp (bit per pixel) szürkeárnyalatos képek esetében tekinthetjük 255-nek. Ezen felül a további összehasonlíthatóság érdekében a "signal-to-noise ratio" (SNR, jel-zaj arány) és a "mean squared error" (MSE, négyzetes hiba átlaga) metrikák is mérésre kerültek (ld. 7. ábra), de paraméterek hangolásánál és a végső eredményekben nem játszottak

## 4 VÍZJELEZÉS RADIÁLIS-HARMONIKUS FÜGGVÉNYEKKEL

szerepet.

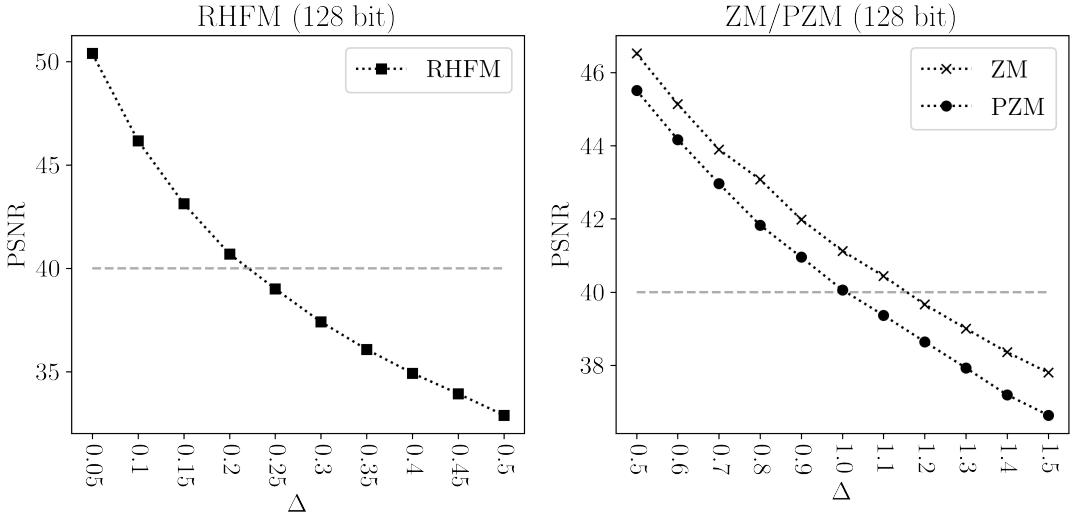


7. ábra. Metrikák az alkalmazott függvényrendszer és a beágyazott bitek számának függvényében. A RHFM esetében  $\Delta_{RHF M} = 0.3$ , a ZM és PZM módszereknél pedig  $\Delta_{ZM} = \Delta_{PZM} = 1.0$  kvantálási lépésközzel.

Az 7. ábra eredményei alapján látható, hogy a (pszeudo-) Zernike momentumok a vizsgált metrikák alapján kisebb mértékben torzítják a képet. Ahogy az a 3. fejezetben is említésre került, a PZM-ek numerikus instabilitása miatt a ZM-ekhez képest csak kisebb fokig használhatóak jól a gyakorlatban, így a kódolható bitek száma is jobban korlátozott – jelen környezetben 216.

A tesztek során a torzítást elfogadhatónak tekinthetjük, ha a PSNR értéke nagyobb, mint 40dB. Mivel a transzformáció ellenállóság vizsgálatnál (ld. 6. fejezet) 128 bitnyi információt szeretnénk a képekbe kódolni elfogadható hibával, így eh-

## 4 VÍZJELEZÉS RADIÁLIS-HARMONIKUS FÜGGVÉNYEKKEL



8. ábra. Különböző kvantálási lépésközök esetén tapasztalt PSNR értékek a 40dB-es célértékhez képest (átlagolt eredmények, ld. 6. fejezet).

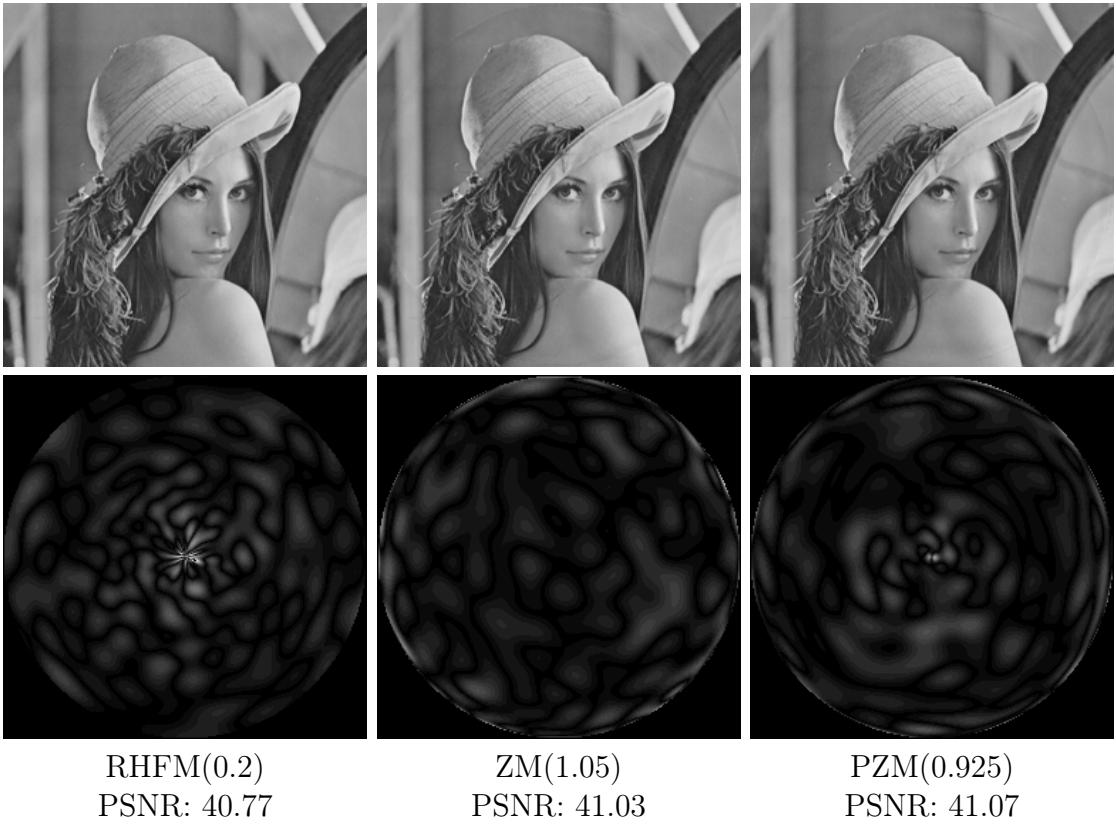
hez mérten kell kvantálási lépésközt is választani a különböző módszerekhez. Az összehasonlítható eredmények érdekében a várható PSNR értéket egységesen 40dB környékére kell hozni.

A 8. ábrán látható mérések alapján, az RHFM esetében a  $\Delta_{RHF M} = 0.2$  választással  $PSNR_{RHF M} \approx 40.70dB$  tapasztalati értéket kapunk. A ZM/PZM esetében kis lépésköz változás esetén lineárisnak tekintve a PSNR változását, a  $\Delta_{PZ M} = 0.925$  választás lineáris-interpolált  $PSNR_{PZ M} \approx 40.73dB$  értéke elég közelíneknél tekinthető az  $PSNR_{RHF M}$ -hez. A ZM esetében hasonlóan eljárva  $\Delta_{ZM} = 1.05$  és  $PSNR_{ZM} \approx 40.78dB$  értékeket kapunk.

Az így beállított módszerenkénti kvantálási lépésközök képi eredményét a 9. ábra szemlélteti. A képek torzulása – a módszerek által használt polinomok adott helyen vett értékeiből adódóan – RHFM esetében a kép közepére, ZM és PZM esetben inkább a képre illesztett egységlemez szélére koncentrálódik, de még így is sokkal egyenletesebb a különbség eloszlása.

A tényleges minőségromlás és az esetleges kódolási hiba (közvetlen a beágyazás után tapasztalható BER) képenként változó. Ezen hibák nagyrészt a 8 bites képpont ábrázolásnál fellépő kerekítési hibákból származnak, de megfigyelhető, hogy a nagy felületen fehér (közel 255 pixel intenzitású) vagy fekete (közel 0 pixel intenzitású) színekkel tartalmazó képeknél a vízjelezés additív "zaja" után az értékek [0,255] in-

#### 4 VÍZJELEZÉS RADIÁLIS-HARMONIKUS FÜGGVÉNYEKKEL



9. ábra. Ugyanazon 128 bites vízjel különböző momentumokkal való képbe ágyazása utáni torzulás. Az eredeti és a vízjelezett kép különbségének abszolút értéke  $10 \times$  intenzitással, a kvantálási lépésközök hangolása után.

tervallumba "vágása" is kezdeti bithibákat eredményez. A későbbi tesztek átlagolt eredményei során konzisztensen tapasztalható  $BER > 0$  értékek is főként ily módon keletkeztek.

## 5. Implementáció

Az algoritmusok és tesztek implementációjánál a *Python* programozási nyelvre esett a választás. Ugyan sebesség/futási idő szempontjából nagy valószínűséggel jobban járnánk egy erősen típusos nyelvvel, de a *Python*hoz elérhető matematikai és képi könyvtárak hatalmas előnyt jelentenek a számítások és képi transzformációk elvégzésénél. Mivel a cél nem a legjobb futási idő elérése volt, hanem a módszerek reprezentatív összehasonlítása, így jelen esetben a kisebb sebesség megengedhető volt tesztek könnyebb implementálhatóságáért cserébe.

### 5.1. Képek

A képek betöltését, egységkörbe transzformálását (ld. 4.1. fejezet (1) lépés), azaz a pixel pozíciókból való polár koordináták számítását (vagy fordítva) egy erre a célra írt kép osztály valósítja meg.

### 5.2. Momentumok

Mivel a bemutatott momentumok kiszámolása, a vízjel kódolása és kiolvasása, valamint a kép momentumokból történő visszaállítása hasonló módon történik, így a különböző momentumok egységes interfész kaptak, mely jelentősen egyszerűsítette a tesztek implementálását. A momentumok külön-külön definiálják a saját ortogonális függvényrendszerüket, de ezek ismeretében egy kép egy adott indexű momentumának meghatározása, valamint adott momentumok esetében a kép egy pixelének visszaállítása már azonos módon történhet. Mivel a vízjelek kódolása és kiolvasása csak erre a két műveletre épül, így ez is általánosan definíálható egy szülő osztályban.

Az  $\exp(im\theta) = \exp^*(i(-m)\theta)$  tulajdonság miatt  $F_{nm} = F_{n,-m}^*$ , azaz a momentumok az ismétlésszámot tekintve konjugált-szimmetrikusak  $m = 0$ -ra nézve. Ezt a tulajdonságot kihasználva, elegendő csak az  $m > 0$  indexű momentumok kiszámolása.

A vízjelek kódolása és kiolvasása esetén a számítási igény jelentősen tovább csökkenhető csak az érintett momentumok kiszámolásával és a kép csak ezek segítségével történő visszaállításával. Ez esetben visszaállításkor egy kifejezetten nagy visszaál-

lítási hibával rendelkező képet kapunk, de a kódolás során a "visszaállítási hiba korrigálása" lépésben (ld. 4.1.(5)) ez hasonló módon kompenzálsra kerül, ugyanúgy, mint több momentum használata esetén.

Mivel a kép egy számítás során állandó, így az ortogonális függvények harmonikus és radiális részébe minden momentum index esetén ugyan azok a  $(r, \theta)$  polár koordináták kerülnek behelyettesítésre. Ezen koordináták egyszeri kiszámolása és eltárolása szintén jelentős teljesítményjavulással jár, mivel a szögfüggvények kiszámítása költséges művelet.

Ezeken felül, kihasználhatunk néhány momentum-specifikus tulajdonságot is:

### RHFM

A momentumok számolására történhet 2-dimenziós gyors Fourier-transzformációval (ld. 3. fejezet), mely ugyan minden momentumot meghatároz egy adott fokig/ismétlésszámig, de a legtöbb esetben még így is gyorsabb futást eredményez.

A (4.7) tulajdonság miatt, a vízjelek kódolásánál a momentumok átlós sorrendjével biztosítható a minél kisebb torzítás és nagyobb ellenállóság (ld. 10. ábra, (a) sorrend).

### ZM

A radiális polinomok értékének számítására a módosított Kintner módszert alkalmazva egy adott  $r$  sugár esetén minden  $R_{nm}(r)$  értéket meghatározhatunk  $0 \leq n < K$ ,  $0 \leq m < L$  indexekre  $\mathcal{O}(KL)$  időben. Az egységkörbe transzformált kép pixeleinek origótól vett távolsága szimmetrikus a tengelyekre, így az  $R_{nm}(r)$  értékek egy momentum esetén négyeszer is felhasználásra kerülnek; eltárolásukkal csökkenthető a futási idő.

A (4.7) tulajdonság miatt, a vízjelek kódolásánál a momentumok sorfolytonos sorrendjével biztosítható a minél kisebb torzítás és nagyobb ellenállóság (ld. 10. ábra, (b) sorrend).

### PZM

A radiális polinom kivételével a számítása megegyezik a ZM-nél ismertetettekkel, így közvetlenül származtatható abból a radiális függvények felüldefiniálásával.

A momentumok sorrendje itt a ZM esetéhez hasonlóan sorfolytonos (ld. 10. ábra, (c) sorrend).

$F_{00}^1 F_{01}^2 F_{02}^4 F_{03}^7 F_{04}^{11} \dots$	$F_{00}^1$ $F_{11}^2$ $F_{22}^3$ $F_{33}^5$ $F_{44}^7$ $\vdots$	$F_{00}^1$ $F_{11}^2$ $F_{22}^3$ $F_{33}^4$ $F_{44}^5$ $\vdots$
$F_{10}^3 F_{11}^5 F_{12}^8 F_{13}^{12} \dots$	$F_{11}^2$ $F_{20}^3$ $F_{31}^5$ $F_{40}^7$ $\vdots$	$F_{20}^3$ $F_{31}^4$ $F_{42}^8$ $F_{40}^7$ $\vdots$
$F_{20}^6 F_{21}^9 F_{22}^{13} \dots$	$F_{22}^4$ $F_{33}^6$ $F_{44}^9$ $\vdots$	$F_{20}^4$ $F_{21}^5$ $F_{32}^7$ $F_{33}^8$ $F_{43}^{10}$ $F_{44}^{15}$ $\vdots$
$F_{30}^{10} F_{31}^{14} \dots$	$F_{33}^6$ $F_{44}^9$ $\vdots$	$F_{30}^7$ $F_{31}^8$ $F_{32}^9$ $F_{33}^{10}$ $\vdots$
$F_{40}^{15} \dots$	$F_{44}^9$ $\vdots$	$F_{40}^{11} F_{41}^{12} F_{42}^{13} F_{43}^{14} F_{44}^{15}$ $\vdots$

10. ábra. Momentumok kódolási sorrendjei (a) RHFM, (b) ZM, (c) PZM módszerek használata esetén.

### 5.3. Tesztek

A különálló tesztek szintén saját osztályt és egységes metódusokat kaptak, mivel a vízjelezett kép meglétét, az eredeti vízjel ismeretét és a módosított momentumok ismeretét feltételezve, a lépések megegyeznek az összes ellenállóságot vizsgáló esetben: (1) transzformáljuk a képet egy adott módon az adott paraméterekkel, (2) a transzformált képből dekódoljuk a vízjelet, (3) összehasonlítjuk a transzformáció után dekódolt vízjelet az eredetivel. Így minden transzformáció saját általános tesztből származtatott osztályt kapott, melyek csak a transzformációt végző metódusban térnek el és melyek egy adott képre a reprezentált transzformáció függvényében közvetlen BER értékeket adnak.

### 5.4. Futási idő javítása a mérések során

Mivel a tesztképek azonos felbontásúak (256x256), így a különböző képek és azok tesztjei során ugyanazon koordináták fognak szerepelni a momentumokat definiáló függvények számításakor.

A bemutatott momentumok kiszámolásakor, az eltérő definíciók ellenére, minden esetben az egységkörbe eső pixel értékeit szorozzuk össze egy a momentum definíciójából adódó, a pixel egységkörbeni pozíciójától függő  $V$  függvények konjugáltjaival, lásd (5.2). A pixelek visszaállítása is hasonló módon egyszerűsíthető, lásd (5.4).

$$F_{nm} = \sum_u \sum_v I[u, v] V_p^*(n, m, r_{u,v}, \theta_{u,v}) \quad (5.1)$$

$$= \sum_u \sum_v I[u, v] V^*(n, m, u, v) \quad (5.2)$$

$$I[u, v] = \sum_{n,m} F_{n,m} V_p(n, m, r_{uv}, \theta_{uv}) \quad (5.3)$$

$$= \sum_{n,m} F_{n,m} V(n, m, u, v) \quad (5.4)$$

Az (5.2) és (5.4) képleteket használva a számítások során, lényegében két azonos méretű ( $N \times N$ ) mátrixot kell elemenként összeszorozni, majd az így kapott értékeket összeadni  $\mathcal{O}(N^2)$  időben, mely a ZM és PZM esetekben lényegesen jobb, mint  $\mathcal{O}(N^2 K^2)$ . Mivel a momentumok csak az egységkörben definiáltak, így  $r_{uv} > 1$  esetén  $V(\cdot, \cdot, u, v) := 0$  választással továbbra is helyes eredményeket kapunk.

$V(n, m, u, v)$   $n, m \geq 0, 0 \leq u, v < N$  értékeket minden módszerre elég csak egyszer kell kiszámolni és eltárolni. A mérésekkor a kiszámolt mátrixokat közvetlen a memóriába tölthetjük és elvégezhetjük a szorzást.

A jobb aszimptotikus futási idő mellett, még egy előny, hogy a mátrixokkal való műveletekkor erre optimalizált, *C*-ben írt *Python* könyvtárakat is használhatunk, mely még inkább hozzájárul a kisebb futási időhöz.

Az így kapott négy dimenziós  $V$  komplex mátrix már kis rend/ismétlésszám/képméret esetében is viszonylag nagy méretű lesz, például egy 256x256 méretű képnél már az  $n, m \leq 20$  korláttal is 400MB méretű mátrixot kapunk. A 5.2. fejezetben említett szimmetria miatt ez a méret a felére csökkenthető a kép valamelyik koordinátája mentén. A  $V$  mátrix többszöri memóriába töltése felesleges időigényes művelet lenne, így ezt csak egyszer töltjük be a memóriába ezután megosztjuk a mérési tesztek között.

## 6. Ellenállóság vizsgálata

A módszerek ellenállóságának összehasonlításához először a 4.3. fejezetben leírt módon és metrika alapján közel azonos értékre érdemes hozni a módszerek beágyazás utáni kép torzítását, mivel így tekinthetjük úgy, hogy a módszerek "költsége" azonos. Ezután összehasonlíthatjuk, hogy hasonló mértékű módosításért cserébe mekkora ellenállóságot kapunk a későbbi kép-manipulációk során.

### 6.1. Mérési módszer és környezet

A dolgozatban bemutatott eredmények minden esetben átlagolt értékek, melyek a 11. ábrán látható 10 különböző,  $256 \times 256$  méretű képen lettek kiértékelve, egyenként 5 különböző, független, egyenletes eloszlású random bitsorozat használatával, mely tesztenként összesen 50 futtatást eredményez. Amennyiben nincs külön feltüntetve a beágyazott bitsorozat hossza, úgy abban az esetben a dolgozat során – a számítási igényeket és rendelkezésre álló erőforrást figyelembe véve – alapértelmezettnek választott 128 bit a kódolt vízjel mérete.

A számolások során – amennyiben szükség volt rá – a polár koordináták és a képek Descartes koordináta rendszere közötti konverzió soráni numerikus hibából és az esetleges méretbeli eltérésekből adódó nem egész pixel-indexek problémája a környező pixelek bilineáris interpolációjával lett feloldva.



11. ábra. Mérésekhez használt képek.

A módszerek kvantálási lépésköze a 4.3. fejezetben meghatározott értékek alapján lett beállítva, azaz:

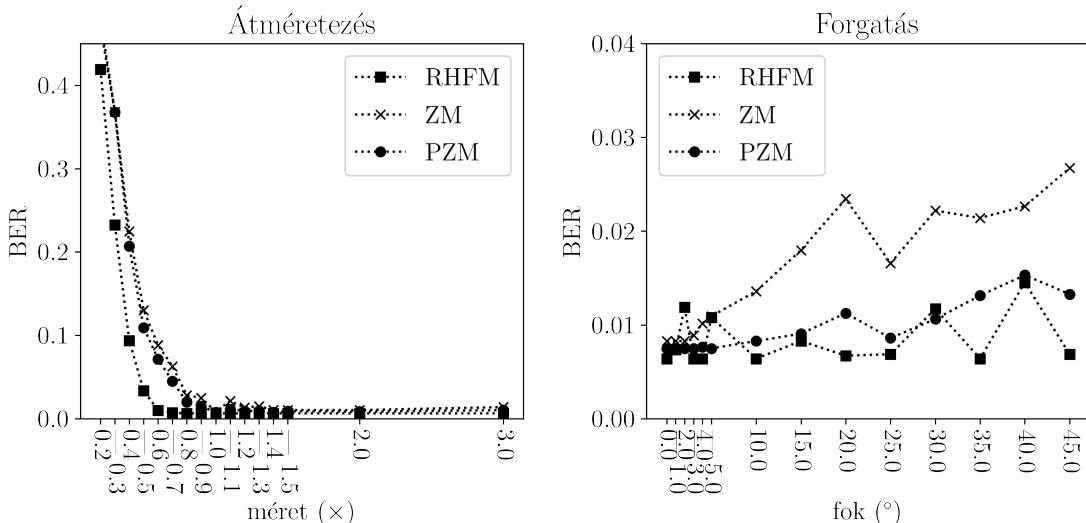
Módszer	Kvantálási lépésköz ( $\Delta$ )	$PSNR \approx$
RHFM	0.2	40.70
ZM	1.05	40.78
PZM	0.925	40.73

2. táblázat. A tesztek során használt alapértelmezett kvantálási lépésközök 128 bit beágyazása esetén (ld. 4.3. fejezet).

$$BER = \frac{\text{hibásan dekódolt bitek száma}}{\text{beágyazott bitek száma}} = \frac{1}{N} \sum_i^N \mathbb{I}(b_i \neq b'_i) \quad (6.1)$$

A módszer ellenállóságát a transzformációk után hibásan kiolvasott bitek és a beágyazott bitek arányával (BER – *bit error rate*) jellemezhetjük, mellyel egy 0 és 1 közötti értéket kapunk. Mivel a vízjelet egy uniform bitsorozatként generáltuk, így  $BER = 0.5$  esetén már lényegében semmit nem tudunk a kódolt információról.

## 6.2. Geometriai transzformáció ellenállóság



12. ábra. Átméretezés és forgatás utáni BER értékek.

### Átméretezés

A pixelek interpolálásához több módszer (legközelebbi, bilineáris, köbös, Lanczos) is kipróbálásra került, ám a tapasztalatok alapján ez nem befolyásolja ér-

demen az eredményeket. A 12. ábra eredményeinél bilineáris interpoláció lett alkalmazva.

### Forgatás

Az átméretezéshez hasonlóan a forgatás során sem volt számottevő különbség az interpolációs módszerek között. Bár itt már előfordultak kisebb eltérések az eredményekben, ám ezek mértéke kisebb volt mint 1%. A 12. ábra eredményeinél bilineáris interpoláció lett alkalmazva.

### Tükrözés

A mért módszerek esetében a képek sem a horizontális, sem a vertikális tengely szerinti tükrözése nem befolyásolja a kódolt vízjelet. Ez a tulajdonság könnyen látható a (5.2) képletből, ugyanis a  $V_p(n, m, \cdot, \cdot)$  mátrix abszolút értéke szimmetrikus a tengelyekre – a valós részek az egyik, a képzetes részek pedig a másik tengelyre. A (5.2) összegből kapott momentum abszolút értéke a tükrözés előtt és után ugyan akkora lesz, így ez a kódolt vízjelet nem befolyásolja.

## 6.3. Zaj ellenállóság

### Elmosás

Az elmosás különböző méretű Gauss-kernelek segítségével történt, különböző  $\sigma$  választásokkal. A nagyobb kernekkal történő szűrés esetén az RHF M módszer ellenállónak bizonyult a Zernike polinomokat használó módszerekkel szemben; a mérések alapján átlagosan több mint 25%-kal kevesebb a hibásan olvasott bitek száma, ami 5% körüli javulást jelent a helyesen visszakapott bitek számánál.

A Gauss-kernel paraméteres definíciója

$$G(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6.2)$$

ahol  $x$  és  $y$  a kernel középpontjától vett koordináták.

A 4. fejezetben említett tulajdonság, miszerint az alacsonyabb indexekhez tartozó momentumok ellenállóbbak, főként a képhez adott zaj esetén mutatkozik meg, azon belül is az elmosásnál. Ez a jelenség magyarázható a kódoláshoz választott momentumokkal. Az alacsonyabb indexek az alacsony frekvenciás komponensekért felelnek, az indexeket növelte pedig a reprezentált frekvencia is növekszik. Elmo-

sás során (ld. Gauss-szűrő, 13. ábra) a képre lényegében egy alul áteresztő szűrőt alkalmazunk, így a magas frekvenciás komponensek elvesznek.

A 10. ábrán szemléltetett létező momentumokat és kódolási sorrendeket tekintve látható, hogy a ZM indexekre tett megkötései miatt a PZM-hez képest egy adott rendig fele annyi használható momentum létezik, így ugyanannyi bit elkódolásához a magasabb frekvenciákat képviselő magasabb indexű momentumokra is szükség van, amiből következik PZM előnye alul áteresztő szűrők esetén. Az RHFM módszernél hasonlóan érvelve belátható, hogy a három módszer közül miért ez lesz a leginkább ellenálló az elmosásra.

### Élesítés

Az a képek az "*unsharp masking*" módszerrel lettek "élesítve", melynél az elmosott kép a megfelelő méretű,  $\sigma = 2$  paraméterű Gauss-kernellel lett előállítva. A mérések során az eredeti és az elmosott kép lineáris kombinációjának  $\alpha$  aránya volt a paraméter.

$$I' = \alpha I - (\alpha - 1)G(I) \quad (6.3)$$

ahol  $G(I)$  az  $I$  kép Gauss-kernellel elmosott változata.

### Só-bors zaj

A só-bors zaj  $p$  valószínűsséggel, függetlenül lett alkalmazva a pixelekre. Az így kiválasztott pixelek helyére egyenlő valószínűsséggel kerültek fekete (0) illetve fehér (255) értékek. minden kép minden vízjel kódolására 5 random só-bors zaj lett generálva, ez képenként 25 random só-bors zajt jelent, így a 14. ábra eredményei itt 250 eset átlagát mutatják.

### Fehér zaj

A kép minden pixeléhez egyenlő valószínűsséggel adunk egy  $[-\alpha 128, \alpha 128]$  közötti értéket.

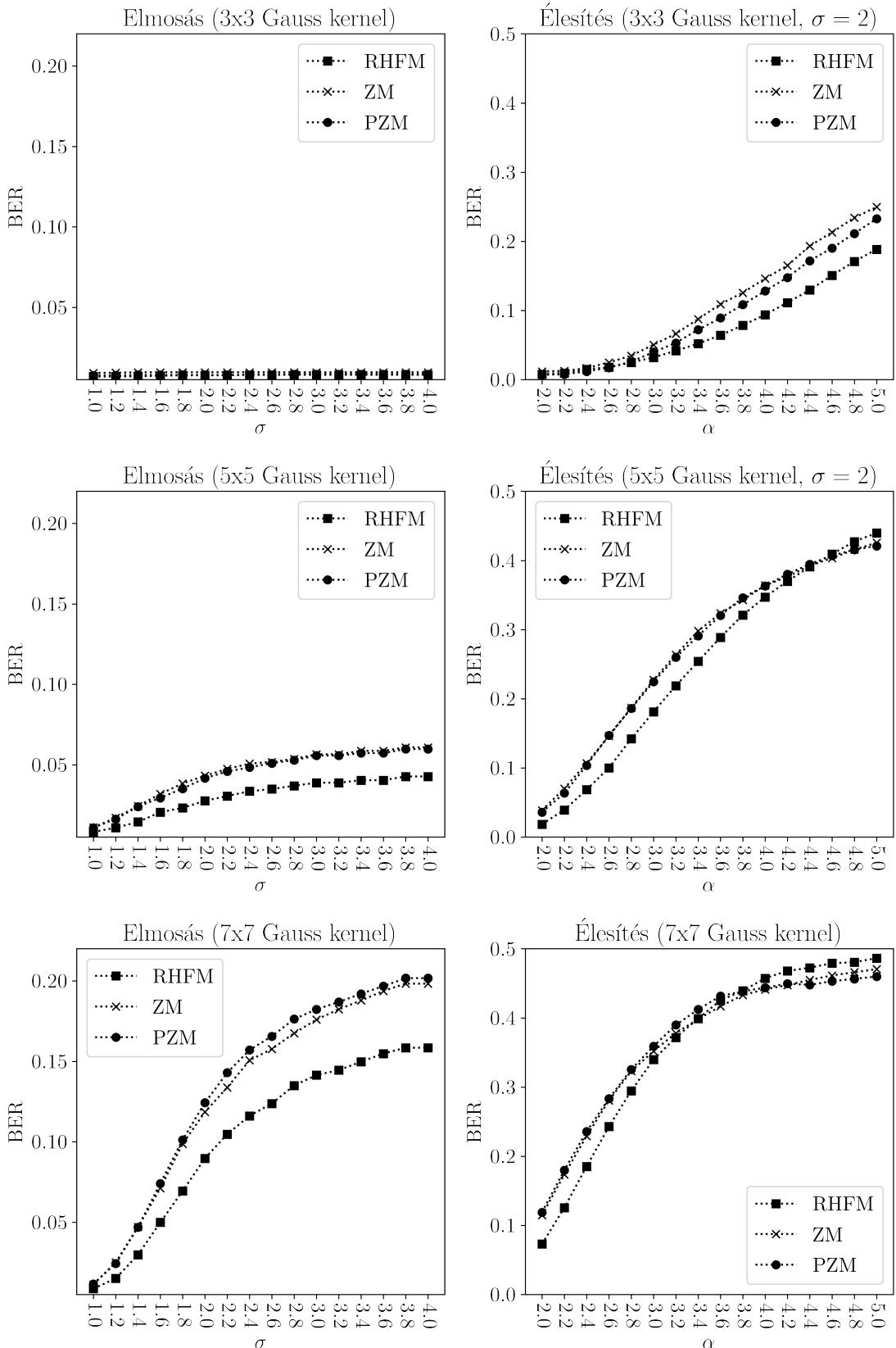
$$I'[x, y] = I[x, y] + \alpha \cdot U([-128, 128]) \quad (6.4)$$

ahol  $U([-128, 128])$  egy egyenletes eloszlású érték -128 és 128 között.

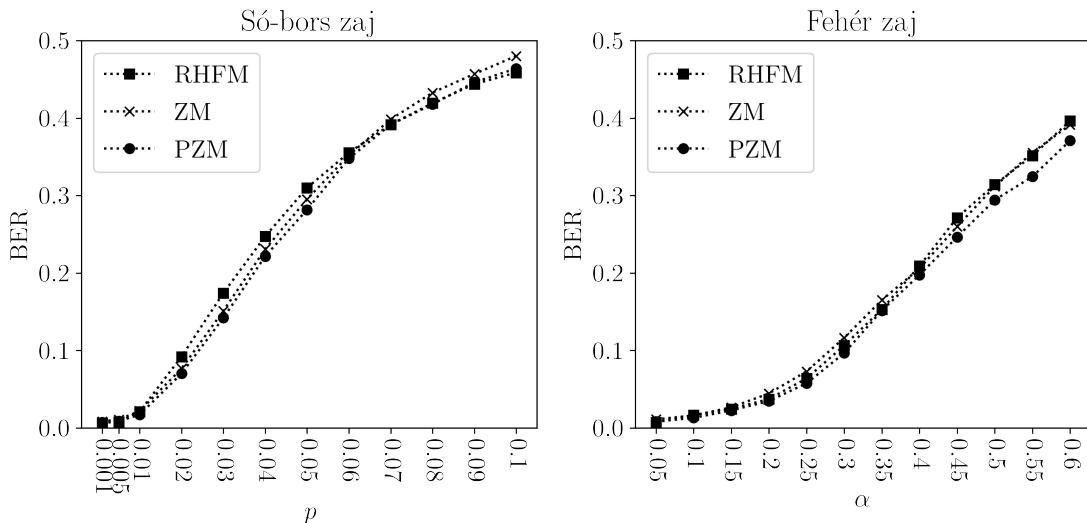
### Medián szűrő

Az új pixelértékeket az adott pixelpozíció körüli, adott távolságon ( $\infty$  normában)

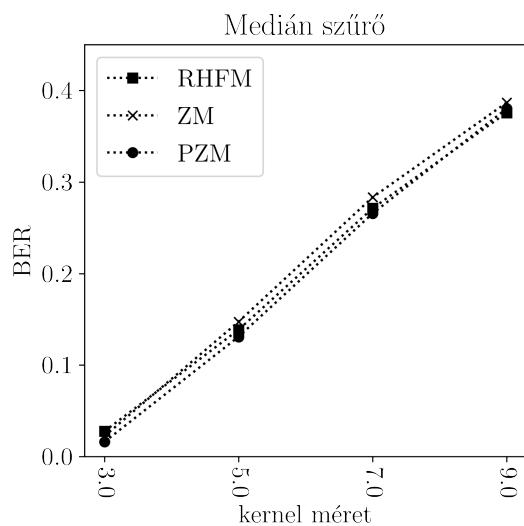
belüli értékek mediánjaként határozzuk meg.



13. ábra. Elmosás és élesítés utáni BER értékek.

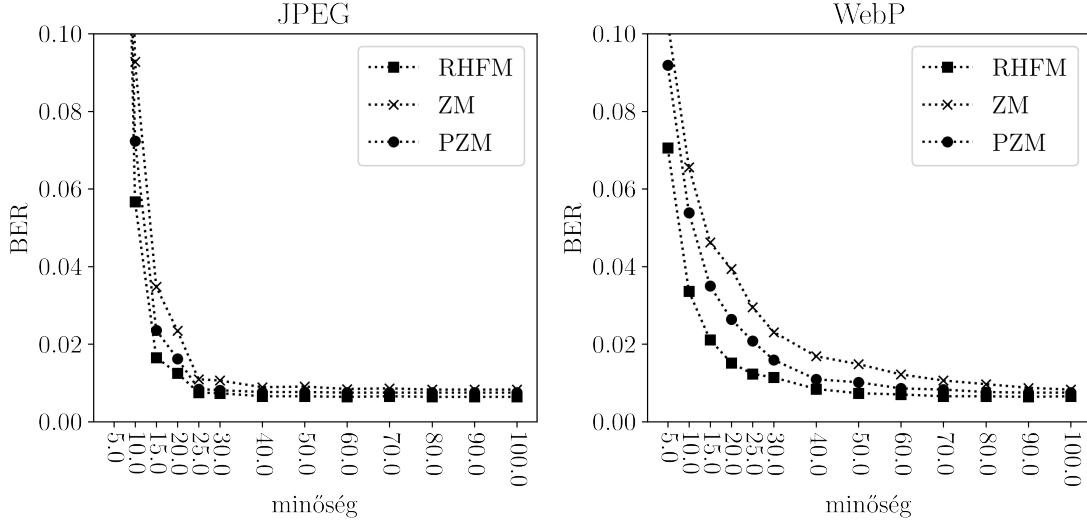


14. ábra. Só-bors és fehér zaj utáni BER értékek.



15. ábra. Medián szűrő utáni BER értékek.

## 6.4. Képtömörítés ellenállóság



16. ábra. Veszeséges képtömörítések utáni BER értékek.

A veszeséges tömörítések esetén kapott eredmények összhangba hozhatók az elmosásnál leírtakkal, miszerint a tömörítés során – a tömörítés mértékétől függően – elveszítjük a magasabb frekvenciás komponenseket, így az alacsonyabb indexekbe kódoló módszerek itt szintén jobb ellenállóságot mutatnak.

### JPEG

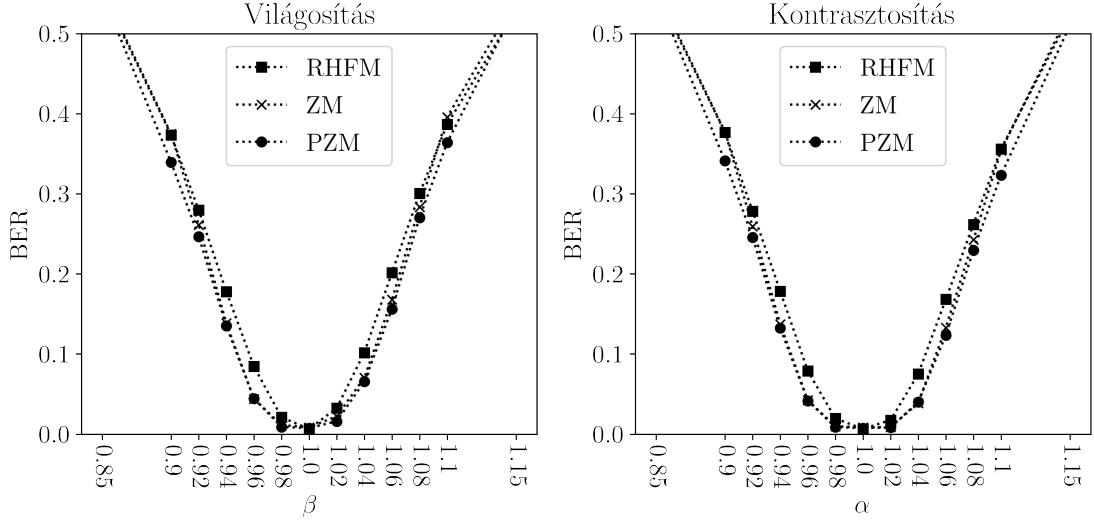
A mérések soráni JPEG tömörítés a *libjpeg* programkönyvtár segítségével lett megvalósítva. A kapott eredmények alapján mindegyik momentum hasonlóan jól tolerálja az ilyen fajta minőségiromlást.

### WebP

A mérések soráni WebP tömörítést a *libwebp* programkönyvtár segítségével lett megvalósítva. A WebP az internetes képmegosztásban egyre elterjedtebb tömörített formátum, ugyanis a JPEG-hez képest kisebb fájlméret jellemzi azonos SSIM ("structural similarity") index esetén.

A 16. ábra mérései alapján a WebP formátumba (rosszabb minőséggel) tömörített képekből nagyobb hibával tudjuk kiolvasni a beágyazott vízjeleket, valamint ezen tömörítési eljárások ellen az RHF M módszer bizonyult ellenálóbbnak.

## 6.5. Egyéb képmódosítás



17. ábra. Világosítás és kontrasztsítás utáni BER értékek.

Felhasználói szempontból a képek világosítása és kontrasztosítása egy egyszerű művelet, melyet a legtöbb képszerkesztő alkalmazás az első opciónak között ajánl. A momentumok számításából adódóan ezekre a transzformációkra nagyon érzékenyek lesznek a módszerek. Ennek kivédésére a vízjel elkódolása illetve kiolvasása előtti hisztogram-kiegyenlítés alkalmazása lenne egy lehetséges megoldás. A ZM és PZM jobb eredményei a nagyobb kvantálási lépésközökkel magyarázhatók, ami miatt a maradékosszalok nagyobb módosítás esetén romlanak.

### Világosítás

A világosítás művelete az alábbi módon írható fel:

$$I'[x, y] = \beta I[x, y] \quad (6.5)$$

ahol  $I$  az eredeti kép és  $I'$  értékeit  $[0, 255]$  közötti egész értékekere kerekítjük.

Behelyettesítve a (5.2) képletbe:

$$F_{nm}(I') = \sum_u \sum_v \beta I[u, v] V^*(n, m, u, v) \quad (6.6)$$

$$= \beta \sum_u \sum_v I[u, v] V^*(n, m, u, v) \quad (6.7)$$

$$= \beta F_{nm}(I) \quad (6.8)$$

$\Delta \approx 1$  kvantálási lépésközzel és nagy momentum értékekkel ( $|F_{nm}| > 10$ ), (6.8) alapján látható, hogy már kis együtthatók esetén is más maradékosztályt kaphatunk a kvantált momentumokra.

### Kontrasztosítás

$$I'[x, y] = \alpha I[x, y] + (1 - \alpha)\bar{I}[x, y] \quad (6.9)$$

ahol  $I$  az eredeti kép,  $\bar{I}$  a kép pixelértékeinek átlaga,  $\alpha$  pedig a kontrasztosítás együtthatója, illetve a világosításhoz hasonlóan itt is kerekítünk.

## 7. Konklúzió és kitekintés

Az eredmények alapján az RHFM módszer általában jobb ellenállóságot nyújt a különféle kép transzformációkkal szemben. A ZM alapú módszerek, a képek momentumokból való visszaállíthatóság és a képfelismerés során mutatott előnyök ellenére, csak a világosítás és a kontrasztosítás során bizonyultak jobbnak az RHFM-mel szemben. Ennek fő okai az alacsonyabb indexeken értelmezett momentumok száma és kvantálási lépésközök közötti különbségek, valamint a használt pontrendszerek diszkrét ortogonális tulajdonsága – vagy annak hiánya.

Gyakorlati alkalmazhatóság szempontjából már nem ennyire egyértelmű a helyzet. A számítási komplexitás szerint az RHFM előnyösebb a  $\mathcal{O}(K^2 \log(K^2))$  időigényével, mint a ZM módszerek  $\mathcal{O}(K^2 N^2)$  komplexitása. A kép torzulásának tekintetében viszont már fordított a helyzet, ugyanis a ZM módszereknél a torzulás jóval egyenletesebben oszlik meg az új képen, míg RHFM esetén ez a kép közepére koncentrálódik, ami a beágyazandó bitek számának növelésével – azaz a magasabb indexű momentumok használatával – szabad szemmel is jól láthatóvá válik.

A vizsgált momentumok (RHFM, ZM, PZM) közül, jelen összehasonlításban, összességében az RHFM módszer bizonyult a legalkalmasabbnak ellenálló momentum alapú vízjelezésre. A ZM alapú módszerek egy jelenlegi nagy hátránya, hogy a kép pixelein számolva nem teljesül a diszkrét ortogonalitás, mely jelentősen hozzájárul a tesztek során is tapasztalt csökkent ellenállósághoz, valamint a momentumok lassabb kiszámolhatóságához. Amennyiben ZM esetében is ismert lenne olyan újramintavételezési módszer, amellyel – hasonlóan az RHFM-nél látottaknál – teljesülne a számolt momentumot definiáló polinomok ortogonalitása, akkor elképzelhető, hogy a magasabb indexek használatának ellenére is jobb ellenállóság lenne elérhető a ZM és PZM esetén.

## Hivatkozások

- [1] B. Chen és G. W. Wornell. „Quantization index modulation: a class of provably good methods for digital watermarking and information embedding”. *IEEE Transactions on Information Theory* 47.4 (2001), 1423–1443. old. DOI: 10.1109/18.923725.
- [2] Chee-Way Chong, P. Raveendran és R. Mukundan. „A comparative analysis of algorithms for fast computation of Zernike moments”. *Pattern Recognition* 36.3 (2003), 731–742. old. ISSN: 0031-3203. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0031-3203\(02\)00091-2](https://doi.org/10.1016/S0031-3203(02)00091-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320302000912>.
- [3] Wang Chun-peng, Wang Xing-yuan és Xia Zhi-qiu. „Geometrically invariant image watermarking based on fast Radial Harmonic Fourier Moments”. *Signal Processing: Image Communication* 45 (2016), 10–23. old. ISSN: 0923-5965. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.image.2016.03.007>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0923596516300236>.
- [4] Preeti Garg és R. Rama Kishore. „Performance comparison of various watermarking techniques”. *Multimedia Tools and Applications* 79.35 (2020. szept.), 25921–25967. old. ISSN: 1573-7721. DOI: 10.1007/s11042-020-09262-1. URL: <https://doi.org/10.1007/s11042-020-09262-1>.
- [5] Chandan Kumar, Amit Kumar Singh és Pardeep Kumar. „A recent survey on image watermarking techniques and its application in e-governance”. *Multimedia Tools and Applications* 77.3 (2018. febr.), 3597–3622. old. ISSN: 1573-7721. DOI: 10.1007/s11042-017-5222-8. URL: <https://doi.org/10.1007/s11042-017-5222-8>.
- [6] Shabir A. Parah és tsai. „Information hiding in medical images: a robust medical image watermarking system for E-healthcare”. *Multimedia Tools and Applications* 76.8 (2017. ápr.), 10599–10633. old. ISSN: 1573-7721. DOI: 10.1007/s11042-015-3127-y. URL: <https://doi.org/10.1007/s11042-015-3127-y>.

- [7] Haiping Ren és tsai. „Multidistortion-invariant image recognition with radial harmonic Fourier moments”. *J. Opt. Soc. Am. A* 20.4 (2003. ápr.), 631–637. old. DOI: 10.1364/JOSAA.20.000631. URL: <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-20-4-631>.
- [8] C. Singh és R. Upneja. „A Computational Model for Enhanced Accuracy of Radial Harmonic Fourier Moments”. 2012.
- [9] Chandan Singh és Sukhjeet K. Ranade. „A high capacity image adaptive watermarking scheme with radial harmonic Fourier moments”. *Digital Signal Processing* 23.5 (2013), 1470–1482. old. ISSN: 1051-2004. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2013.05.006>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200413001206>.
- [10] C. -. Teh és R. T. Chin. „On image analysis by the methods of moments”. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 10.4 (1988), 496–513. old. DOI: 10.1109/34.3913.
- [11] Yongqing Xin, Simon Liao és Miroslaw Pawlak. „Circularly orthogonal moments for geometrically robust image watermarking”. *Pattern Recognition* 40.12 (2007), 3740–3752. old. ISSN: 0031-3203. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2007.05.004>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031320307002130>.