# 컴퓨터 그래픽스 제4장 2차원 그래픽스의 기본 요소

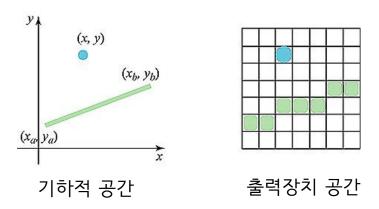
2019년 2학기

# <u>4장 학습 내용</u>

- 2차원 그래픽스 기본 요소
  - 점
  - 선
  - 원
  - 영역 채우기
  - 앨리어싱 효과

### 점과 선의 정의 및 속성

- 2차원 그래픽스의 기본적인 출력 요소
  - 점, 선, 다각형, 원, 타원, 곡선, 문자 등
  - 점과 선은 모든 2차원 그래픽스 객체 표현의 기본 요소
- 점 (Point)
  - 래스터 방식의 출력장치에서의 기본 요소
    - 점의 속성: 크기, 명암, 색상, 모양 등
  - 기하공간에서의 점: 좌표 (x, y)



#### 점과 선의 정의 및 속성

- 선 (Line)
  - 직선: 양방향으로 무한히 길다.
  - 선분: 두 점 사이의 선 조각

p(u) = p0 + ud매개 변수 방정식

-p0: 시작 점, u: 매개 변수 (0 <= u <= 1), d: 두 점 사이의 거리

직선 방정식 (명시적) y = mx + b

-m: 기울기, b: v축 절편

암시적 방식 ax + by = d

-a, b, c: 상수

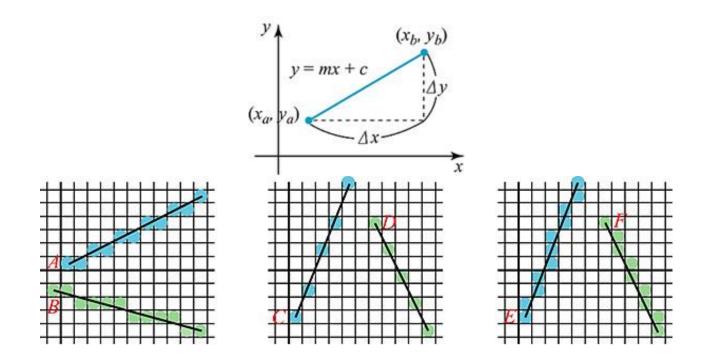
- 시작점 (xa, ya)과 끝점 (xb, yb) 또는 시작점 좌표 (xa, ya)와 증가 값 (Δx, Δy)의 상 대좌표로 정의
  - 선의 속성: 유형, 굵기, 색상, 선 끝 모양 등
- 직선 방정식을 이용하여 선의 좌표 값 구하기
  - y = mx + c

m: 기울기 c: y축 절편

- 두 끝점 (x1, y1) (x2, y2)를 사용하여 m과 c를 구한다
  - m = (y2 y1) / (x2 x1)
  - -c = y1 mx1

#### 선 그리기: DDA 알고리즘

- DDA (Digital Differential Analyzer) 알고리즘
  - 선의 양끝 좌표로부터 래스터 출력 장치로 변환하는 가장 기본적인 알고리즘
  - 선의 공식을 y = mx + c의 형태로 계산
    - 0 ≤m ≤1 인 경우,
    - m >1인 경우,
    - m < 0인 경우,



### 선 그리기: DDA 알고리즘

- 초기화를 한다.
  - $\triangle x = x_b x_a$  ,  $\triangle y = y_b y_a$
  - $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
  - $x_1 = x_a, y_1 = y_a$
- 기울기에 m의 값에 따라 다음계산을 수행한다.
  - 기울기  $|m| \le 1$ 인 경우, 매번 k+1번 째 점에서  $(1 \le k \le \Delta x)$

$$x_{k+1} = x_k + 1$$
  
 $y_{k+1} = y_k + m$   
따라서,  $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k + 1, round(y_k + m))$ 

- 기울기 1 < |m| 인 경우, 매번 k+1번 째 점에서 (1 ≤ k ≤  $\triangle$ y)

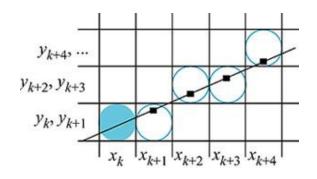
$$y_{k+1} = y_k + 1$$
  
 $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{m}$   
따라서,  $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (round(x_k + \frac{1}{m}), y_k + 1, )$ 

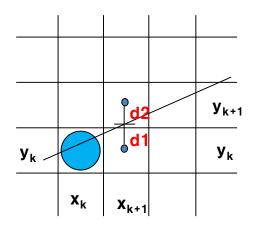
#### 선 그리기: DDA 알고리즘

#### • DDA 알고리즘의 특징

- 곱하기가 없이 소수점(Floating-point) 더하기 연산만을 반복
- 부동 소수 연산 사용, 정수연산에 비해서는 상대적으로 속도가 떨어진다.
- 반올림 연산 함수의 실행시간이 걸린다.
- 매번 정수좌표를 구할 때마다 오차가 축적

- Bresenham 알고리즘
  - 선을 구성하고 있는 어느 한 점에서 가능한 다음 점
    - 오른쪽 점 또는 오른쪽 바로 위의 점
  - 가능한 두 점 중, 실 선과 두 개의 가능한 점의 차이 (아래 그림에서 d1과 d2)가
     더 작은 점을 선택하여 선을 나타내는 알고리즘
  - 소수점 계산 없이 정수의 더하기 연산과 이동 연산만으로 처리되므로 속도가 빠르다.





- 알고리즘 초기화
  - 기울기가 1보다 작은 경우 (|m| < 1):</li>
    - y = mx + c,  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 
      - 시작점: (x<sub>a</sub>, y<sub>a</sub>),
      - 가능한 두 점: (x<sub>a</sub>+1, y<sub>a</sub>), (x<sub>a</sub>+1, y<sub>a</sub>+1)
      - 일반적인 k번째 점:  $(x_k, y_k)$ ,
      - 가능한 두 점:  $(x_k+1, y_k), (x_k+1, y_k+1)$

#### - 다음 점 x<sub>k+1</sub> 에서

$$y = mx_{k+1} + c$$
  
 $d_1 = y - y_k = m (x_k + 1) + c - y_k$   
 $d_2 = (y_k + 1) - y = (y_k + 1) - (m (x_k + 1) + c)$   
 $\mathbf{d_1} - \mathbf{d_2} = \{m(x_k + 1) + c - y_k\} - \{y_k + 1 - (m(x_k + 1) + c)\}$   
 $= 2m (x_k + 1) - 2 y_k + 2c - 1$   $(d_1 - d_2)$ : 두 거리 사이의 차이)

#### - 양변에 ∆x를 곱한다

-  $p_k$  (판단매개변수) =  $(d_1 - d_2) \Delta x$ 

$$p_k = (d_1 - d_2) \Delta x$$
  
 $p_k = 2 \Delta y (x_k + 1) + \Delta x (-2y_k + 2c - 1) = 2 \Delta y x_k - 2 \Delta x y_k + 2 \Delta y + \Delta x (2c - 1)$   
 $(p_k \text{ 에 } p_{k+1} \text{ 대입하면})$   
 $p_{k+1} = 2 \Delta y \cdot x_{k+1} - 2 \Delta x y_{k+1} + 2 \Delta y + \Delta x (2c - 1)$   
 $p_{k+1} - p_k = 2 \Delta y (x_{k+1} - x_k) - 2 \Delta x (y_{k+1} - y_k)$   
 $p_{k+1} = p_k + 2 \Delta y - 2 \Delta x (y_{k+1} - y_k)$ 

 $p_k$ 의 부호에 따라  $p_k < 0 \rightarrow d_1 - d_2 < 0 \rightarrow d_1 < d_2 \rightarrow y_{k+1} = y_k \\ 0 \le p_k \rightarrow 0 \le d_1 - d_2 \rightarrow d_2 \le d_1 \rightarrow y_{k+1} = y_k + 1$ 

$$\mathbf{p_k} < \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{p_{k+1}} = \mathbf{p_k} + 2 \Delta y \qquad (\mathbf{y_{k+1}} - \mathbf{y_k} == 0) \\
\mathbf{0} \le \mathbf{p_k} \rightarrow \mathbf{p_{k+1}} = \mathbf{p_k} + 2 (\Delta y - \Delta x) \qquad (\mathbf{y_{k+1}} - \mathbf{y_k} == 1)$$

따라서 
$$p_k < 0$$
 이면  $\rightarrow$  다음 점은  $(x_k+1, y_k)$   $0 \le p_k$  이면  $\rightarrow$  다음 점은  $(x_k+1, y_k+1)$ 

마지막으로 시작점: (x<sub>a</sub>, y<sub>a</sub>)일 때 첫 번째 매개변수 값은,

$$p1 = 2 \Delta y x_k - 2 \Delta x y_k + 2 \Delta y + \Delta x (2c - 1)$$

$$= 2 \Delta y x_a - 2 \Delta x y_a + 2 \Delta y + \Delta x (2c - 1)$$

$$= 2 \Delta y x_a - 2 \Delta x (m x_a + c) + 2 \Delta y + \Delta x (2c - 1)$$

$$= 2 \Delta y x_a - 2(\Delta y x_a + \Delta x c) + \Delta y + \Delta x (2c - 1)$$

$$= 2 \Delta y - \Delta x$$

- 브레즌햄 선 그리기 알고리즘 정리:
  - 기울기가 0과 1 사이인 경우에 적용
  - 초기값을 구한다.
    - 시작점의 좌표: (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>)

• 
$$C_1 = 2\Delta y$$

• 
$$p_1 = 2\Delta y - \Delta x$$

- 판별식 pょ값에 따라 다음 점의 위치를 구한다.

• 
$$p_k < 0 \rightarrow$$
 다음 점:  $(x_k + 1, y_k)$   $p_{k+1} = p_k + C_1$ 

• 
$$0 \le p_k \to \text{ Chear Mathematical Points} = p_k + C_2$$

예) 시작점 (1, 1) 끝점 (10, 7)을 연결하는 선을 구성하는 점들의 좌표값은?

 $C_2 = 2(\Delta y - \Delta x)$ 

### 워 그리기

- 원: 한 점에서 같은 거리에 있는 점들의 집합
  - 점들을 선분으로 연결하여 곡선의 모양을 근사적으로 그린다.
  - 원을 나타내는 식
    - 원의 공식: x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup> = r<sup>2</sup>
    - 매개변수 방정식: y = f(x) 또는, x = g(θ), y = h(θ)
    - 직교 좌표계에서는:  $y = \sqrt{r^2 x^2}$
    - 극 좌표계에서는: x = r cosθ,

$$y = r \sin \theta$$

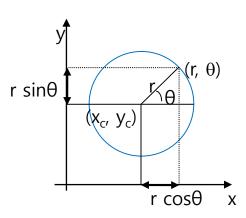
- 원의 중심이 (x<sub>c</sub>, y<sub>c</sub>) 일 때는,

- 원의 공식은 
$$(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$$

- 극좌표식은

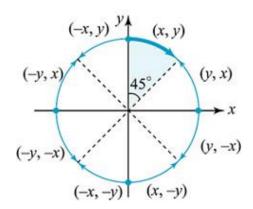
$$x = x_c + r \cos\theta$$
,

$$y = y_c + r \sin\theta$$



#### • Bresenham 알고리즘

- 제곱근이나 삼각함수 등의 계산이 없이 정수 연산만으로 처리
- 각도가 90' ≥ θ ≥45' 인 부분에 대하여 계산
- x방향으로 1만큼 증가 → y축에서는 같은 점 또는 1감소된 점: k번째 점 $(x_k, y_k)$  → k+1번째 점 $(x_k+1, y_k)$  또는  $(x_k+1, y_k-1)$

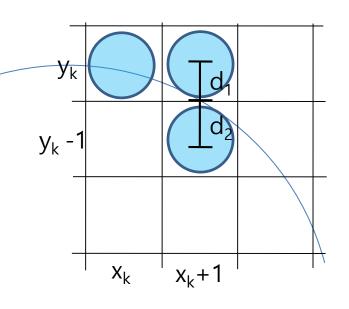


- x, < y,인 동안 반복

- 
$$x_k < y_k$$
인 동안 반복  
 $x^2 + y^2 = r^2$   
 $y^2 = r^2 - x^2 \rightarrow y_{k+1}^2 = r^2 - (x_k + 1)^2$   
 $d_1 = y_k^2 - y^2$   
 $d_2 = y^2 - (y_k - 1)^2$   
 $p_k = d_1 - d_2 = (y_k^2 - y^2) - \{y^2 - (y_k - 1)^2\}$   
 $p_{k+1} = (y_{k+1}^2 - y^2) - \{y^2 - (y_{k+1} - 1)^2\}$ 

$$p_{k+1} - p_k = 2 y_{k+1}^2 - 2 y_k^2 - 2 y_{k+1} + 2 y_k + 4(x_k + 1) + 2$$

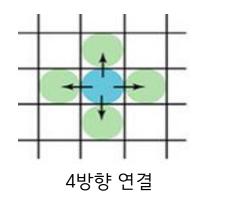
즉,  $p_{\nu} < 0 \rightarrow d_1 - d_2 < 0 \rightarrow$ 다음 점은  $(x_{\nu} + 1, y_{\nu})$  $0 \le p_k \to 0 \le d_1 - d_2 \to$ 다음 점은  $(x_k + 1, y_k - 1)$ 

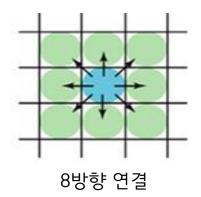


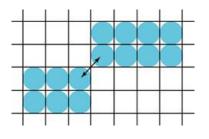
$$p_{k+1} = p_k + 4x_k + 6$$
  
 $p_{k+1} = p_k + 4(x_k - y_k) + 10$ 

- 시작점에서,  $p1 = (y_1^2 - y_2^2) - \{y_2^2 - (y_1 - 1)^2\} = 3 - 2r$ 초기화: x₁ = x₂, y₁ = y₂+r, p₁ = 3-2r
- 예) 중심이 (0, 0)이고 반지름이 6인 원을 구성하는 점들의 좌표값은?

- 2차원 그래픽스에서 영역
  - 모든 그림들은 픽셀들로 구성되고,
  - 선이나 도형이 서로 만나서 영역이 생성된다.
- 영역의 특성
  - 영역: 같은 색상 값을 갖는 이웃한 픽셀들의 집합
  - 이웃한 픽셀간의 연결 방식 (픽셀의 연결 방식)

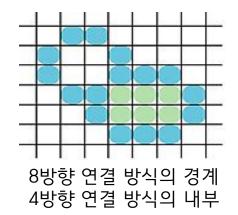


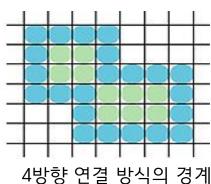




영역 연결방식의 예: 4방향 연결 - 2개의 영역 8방향 연결 - 1개의 영역

- 래스터 출력에서 영역의 경계 픽셀과 내부 픽셀은 연결방식을 다르게,
  - 경계 8방향 연결 ⇒ 내부는 반드시 4방향 연결 채우기
  - 경계 4방향 연결 ⇒ 일반적으로 내부는 8방향 연결 채우기
- 일반적인 래스터 방식의 출력장치
  - Bresenham 선 그리기 알고리즘은 8방향연결 방식
  - 영역 채우기 알고리즘은 내부 영역을 4방향연결 방식으로 채우기



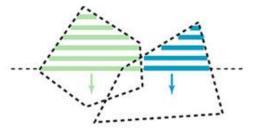


4방향 연결 방식의 경계 8방향 연결 방식의 내부

#### 영역 채우기 알고리즘

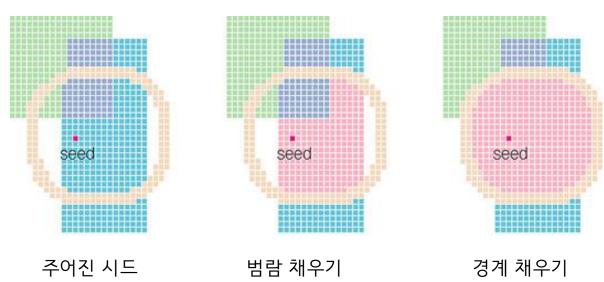
- 시드 채우기 방식
  - 그림이 래스터 버퍼에 그려진 후 이미지에서 영역의 채우기를 실행
  - 영역 내부의 한 픽셀이 시드로 주어지고 이 픽셀에서부터 채워나간다
  - 주로 페인팅 소프트웨어나 대화식 이미지 처리 프로그램 (사용자가 원하는 영역을 클릭하면 그 점을 시드로 하여 채우기를 실행)에서 사용
- 다각형 주사변환 방식
  - 매 주사선 별로 다각형의 내부 구간을 판단하여 해당 픽셀을 칠한다.
  - 주사선채우기(Scan-line Fill)라고도 한다.
  - 구로 벡터방식의 그리기 소프트웨어에서 사용 (채우기를 하는 도형의 벡터 데이터를 가지고 있다)





다각형 주사변화 방식

- 시드 채우기 (Seed fill) 방식
  - 다각형 내부의 한 점 (x, y)가 seed로 주어진다.
  - 이 점을 중심으로 이웃 픽셀이 영역의 내부에 있는지를 판단하여 영역 채우기를 하다.
  - 내부 영역에 대한 판단
    - Interior-defined: 같은 값을 가지고, 연결된 픽셀들을 내부 영역으로 판단 → 범람 채 우기 (Flood Fill)
    - Boundary-defined: 경계의 안쪽에 위치하는 픽셀들을 내부 영역으로 판단 → 경계 채 우기 (Boundary Fill)



(Flood-fill)

(Boundary-fill)

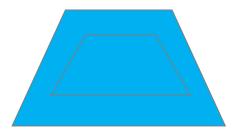
- 알고리즘 진행 방법
  - 내부의 한 점 시드(seed)를 스택에 저장한다
  - Seed pixel을 중심으로 4방향 또는 8방향의 이웃 픽셀에 대해 내부의 점인지를 확인
  - 재귀적 함수 (Recursive) 사용하여 이웃한 픽셀들을 검사해나간다.

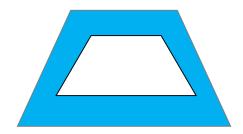
```
범람 채우기 알고리즘
 void flood fill (int x, int y)
                                                         // 시드 (x, y) 에서 시작
       if (read_pixel (x, y) == bqColor)
                                                         // 현재 픽셀이 배경색 'bgColor'이면,
                                                        // bgColor가 아니면 종료
// 채우기 색 'fillColor'로 칠한다.
// 오른쪽으로 반복
// 왼쪽으로 반복
// 아래로 반복
       {
           write_pixel (x, y, fillColor);
           flood fill (x+1, y);
           flood_fill (x-1, y);
           flood_fill(x, y+1);
           flood fill (x, y-1);
경계 채우기 알고리즘
 void boundary fill(int x, int y)
                                                         // 시드 (x, y) 에서 시작
       current = read_pixel(x, y);
       if ((current != bdColor)
                                                        // 경계 및 채울 색인지 확인
                                                         // 경계색이면 종료
                    && (current != fillColor))
       {
                                                        // 내부를 채우기 색 'fillColor'로 칠한다.
// 오른쪽으로 반복
// 왼쪽으로 반복
// 아래로 반복
// 위로 반복
                    write_pixel (x, y, fillColor);
                    boundary_fill (x+1, y);
                    boundary_fill (x-1, y);
                    boundary_fill (x, y+1);
```

boundary fill (x, y-1);

#### 다각형 내부 판단 규칙

 여러 개의 다각형으로 구성된 복잡한 도형이 주어지면 내부 영역을 다르게 판단할 수 있다.

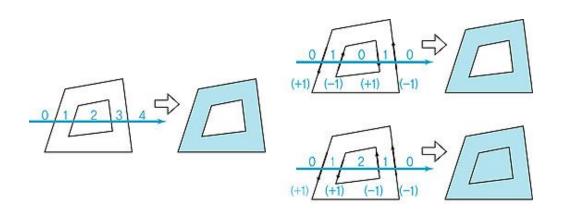




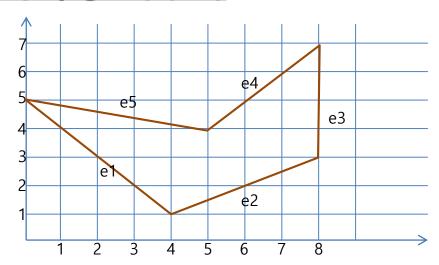
- 판단 규칙
  - 1. 홀짝 규칙 (Even-Odd rule)
    - 매 주사선별로 x값을 증가하면서
      - 다각형의 에지가 홀수 번째 교차하면 내부 구간이 시작
      - 짝수 번째 교차하면 외부 구간이 시작된다.
    - 알고리즘이 간단하다.
    - 서로 다른 두 개의 다각형이 겹쳐있을 때 그 겹친 부분은 항상 외부 영역으로 판단

#### <u>다각형 내부 판단 규칙</u>

- 2. 접기회수 규칙 (Non-Zero Winding Rule): 에지의 방향을 고려
  - 다각형에서 각 에지의 벡터 방향은 꼭짓점이 주어진 순서에 따라 정해진다
    - 각 주사선에서 아래쪽 방향의 모서리와 교차 → 1 증가
    - 각 주사선에서 위쪽 방향의 모서리와 교차 → 1 감소
  - 에지와 주사선의 교차점의 합을 구한다.
    - 합이 0이면 → 외부
    - 합이 0이 아니면 → 내부
  - 특징:
    - 다각형 모서리의 방향에 따라 내부와 외부영역을 지정해줄 수가 있다.
    - 홀짝 규칙보다 약간 복잡, 도형 설계에서 자유롭게 내부와 외부 영역 지정 가능, 정교한 드로 잉 소프트웨어에서 많이 사용



- 다각형 주사 변환 방식 (Polygon scan-conversion)
  - 매 주사선마다 교차되는 edge(에지, 모서리)들의 목록을 유지, 갱신하여 영역을 설정한다.
  - 가장 대표적인 방법: Y-X 다각형 주사선 알고리즘
  - Edge list
    - 에지 목록 EL (Edge List): 다각형의 전체 edge의 목록
      - 시작점의 y 좌표값 (더 작은 y 값) 순서로 다각형의 전체 에지를 정렬하여 전체 에 지의 EL 구성
      - 매 주사선에서 교차하는 에지를 EL에서 꺼내어 AEL로 옮겨 관리
    - **활성화된 에지 목록** AEL (Active Edge List): 각 주사선과 교차하여 활성화 된 edge 목록
      - 해당 주사선과 각 에지와의 교차점의 x값을 구한 후 2개 씩 짝을 만들어 이들 사이를 채운다.
    - 그리기가 완료된 AEL내의 에지를 찾아서 제거 (AEL의 에지 중 아래쪽 점의 y 좌표가 주사선의 y좌표보다 작게 되면 EL에서 제거



```
e1 (0, 5) (4, 1)
e2 (4, 1) (8, 3)
e3 (8, 3) (8, 7)
e4 (8, 7) (5, 4)
e5 (0, 5) (5, 4)
```

EL = {e1, e2, e3, e4, e5} -> 시작점의 y값 (작은 값)에 따라 정렬: {e2, e1, e3,e5, e4}

```
y=1: AEL = {e2, e1}
y=2: AEL = {e2, e1}
y=3: AEL = {e2, e2, e3}
y=4: AEL = {e1, e3, e5, e4 }
y=5: AEL = {e1, e3, e5, e4 }
y=6: AEL = {e3, e4}
y=7: AEL = {e3, e4}
y=8: AEL = { }
```

- Y-X 다각형 주사선 알고리즘의 특징
  - Y-X 알고리즘: Y값 순서로 전체 에지 정렬, 교차점은 X 좌표값 순서로 정렬
  - 효율성: 에지의 목록에 대한 부분적인 일관성(Coherence)으로 발생
- Y-X 다각형 주사선 알고리즘
  - 1) 초기화를 한다.

각 에지들을 Y좌표의 최소값 순서로 정렬하여 Edge List(EL)를 구성한다.

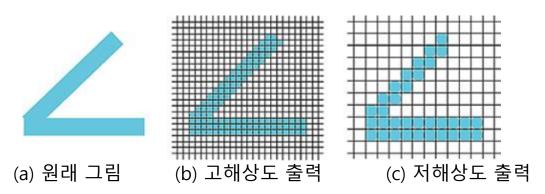
- 2) 매 주사선  $y_k$ 에서 다음을 수행한다.
  - a) AEL을 갱신한다.

```
AEL에서 y_b < y_k 인 에지를 삭제하고,  // 완료된 에지 삭제 EL에서 y_a = y_k 인 에지를 AEL로 이동한다. // 새로운 에지 삽입 단, AEL 과 EL에 더 이상의 에지가 없으면 종료한다.
```

- b) AEL에서 각 에지의 교차점을 계산한다.
- c) 교차점 x값을 정렬한 후 각 쌍을 결정하여 그 사이를 채운다

#### <u> 안티 앨리어싱</u>

- 래스터 출력의 문제점
  - 앨리어싱 효과
    - 계단 현상 (jaggies, aliasing)
    - 모양이 들쑥 날쑥하고 선이 움직일 때 위치가 바뀐다.
    - 작은 물체가 깜빡 깜빡 한다. (blinking)
  - 앨리어싱이 생기는 이유
    - 저해상도의 출력장치에서 두드러진다.
    - 아날로그 방식의 그림을 디지털 화 하는데 샘플링 오차가 발생



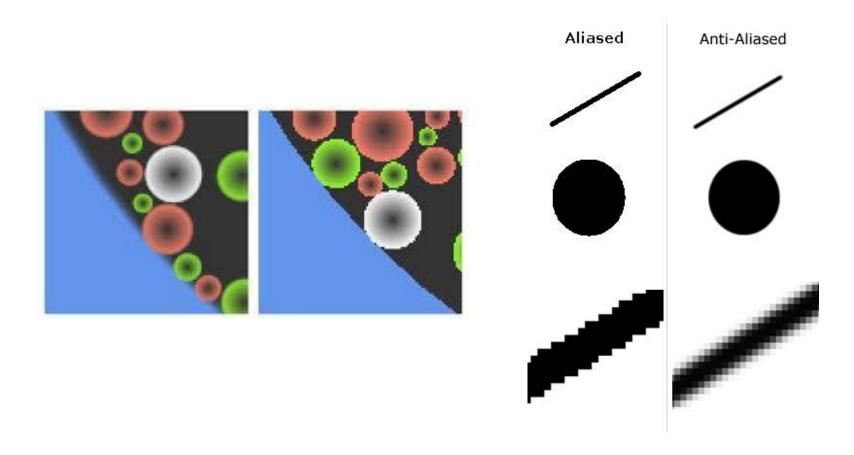
#### 아티 앨리어싱

- 안티 앨리어싱(Antialiasing)
  - 컬러 또는 회색조(Gray) 출력 장치에서 경계가 부드럽게 보이도록 하는 기법
  - 물체의 경계 픽셀에서 물체와 배경의 색상을 혼합해서 그린다.
  - 선 그리기, 다각형 채우기, 문자 생성 등에 적용이 가능
  - 해상도를 높인다. → 물리적 해상도의 한계
  - 안티 앨리어싱 기법
    - 샘플링 레이트를 높이는 방법
      - 샘플링의 숫자를 높인다
      - · SSAA, MSAA 등
    - 흐처리 기법
      - 렌더링 후 후처리 시 적용하는 방법
      - FXAA, MLAA 등



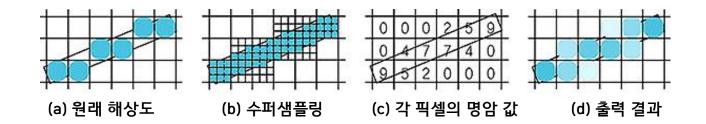


# 안티 앨리어싱

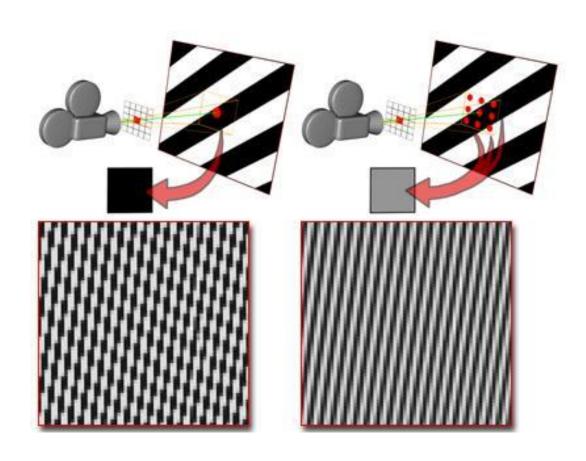


#### 안티 앨리어싱: 수퍼 샘플링 기법

- 수퍼 샘플링 (Super sampling Anti Aliasing, SSAA) 기법
  - 출력 장치의 해상도보다 고해상도에서 그림을 자세히 표현할 수 있도록 하나의 픽셀 영역을 여러 개로 분할하는 기법.
  - 원래의 해상도로 환원할 때 픽셀의 명암값을 계산하여 보여준다.
    - 픽셀의 영역에 포함되는 고해상도 픽셀의 개수에 비례하여 명암값을 계산

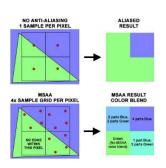


#### 안티 앨리어싱: 수퍼 샘플링 기법



#### <u> 안티 앨리어싱</u>

- 멀티 샘플링 기법 (Multi Sampling Anti Aliasing, MSAA)
  - 수퍼 샘플링 기법을 효율과 성능면에서 최적화 한 샘플링 기법
  - 폴리곤의 외곽선이 지나가는 곳만 적용한다.
  - 각 픽셀 당 1개 이상의 샘플링 정보를 사용하여 명암값을 조정
  - 대부분의 응용 프로그램에서 사용하는 알고리즘 기법



- FXAA (Fast Approximate Anti Aliasing)
  - NVDIA 에서 출시한 기법으로 계속 버전 업그레이드 됨
  - 렌더링을 한 후 처리하는 후처리 기법
  - 렌더링 된 그래픽에서 주변 픽셀에서 밝기 차이를 계산하고 주변 픽셀의 색을 혼합하는 방식
- MLAA (Morphological Anti Aliasing)
  - 이미지 기반의 후처리 방식 기법
  - 렌더링 후 외곽선을 찾아 외곽선의 픽셀들을 블렌딩 하는 방식

#### • 그외,

- NFAA (Normal Filter Anti Aliasing)
  - 가장자리 찾기를 위하여 필터를 적용한 셰이더 기반의 후처리 기법
- CSAA (Coverage Sampling Anti Aliasing)
  - 범위 형태의 샘플링으로 MSAA와 비슷
- 그 외에도 많은 기법이 있고, 계속 연구 중

### 안티 앨리어싱



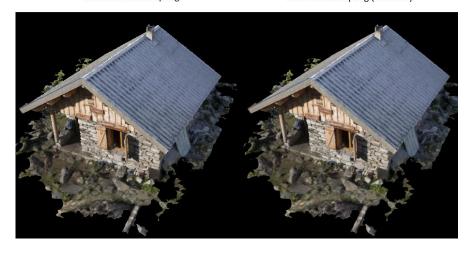


Final Fantasy XIV에서 MALL 기법을 적용한 결과 출처: Geeks3D

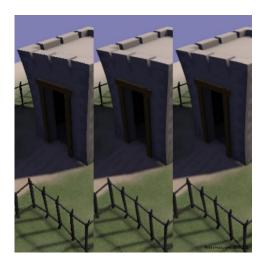


Without multisampling

With multisampling (MSAAx8)



Multi Sampling Anti Aliasing 출처: vulkan tutorial



AA없음/ MSAA / FXAA 출처: NVIDIA