컴퓨터 그래픽스
제8장 3차원 객체의 모델링

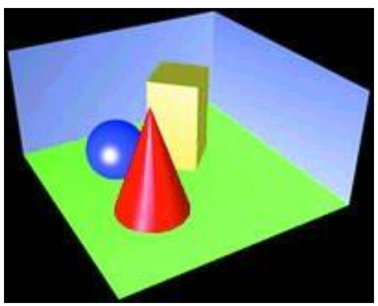
2019년 2학기

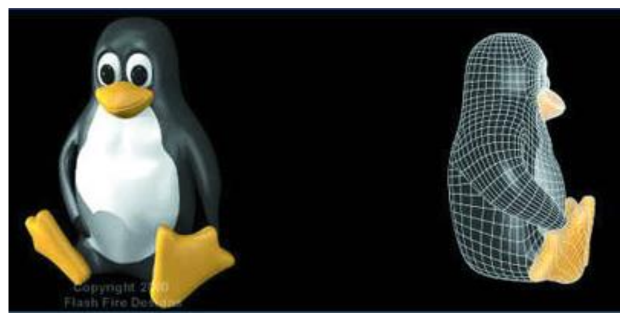
8장 학습 내용

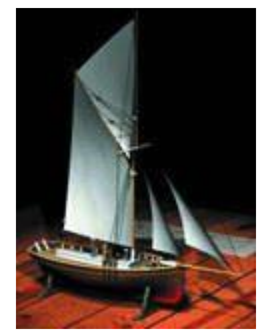
- **3차원 객체의 모델링**
  - 다각형 면
  - 평면 방정식
  - 스플라인

객체 모델링

- **3차원 객체 표현**
  - 다각형 면이나 2차 곡면을 이용하여 객체 표현
    - 매시 (Mesh, 삼각형이나 사각형을 서로 연결하여 사용)로 표현
  - 임의의 모양을 가진 3차원 객체를 표현
  - 곡선 또는 곡면 함수를 이용하여 부드러운 물체 표현
    - Bezier 곡선, 스플라인(Spline), NURBS 곡선 및 곡면

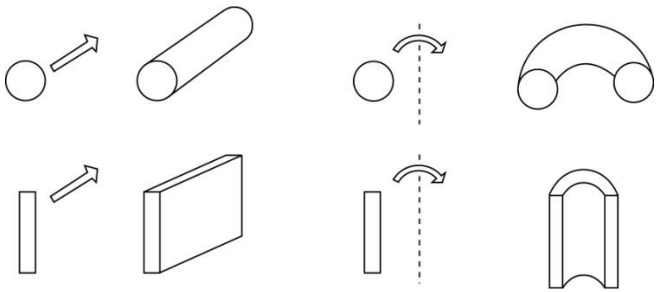




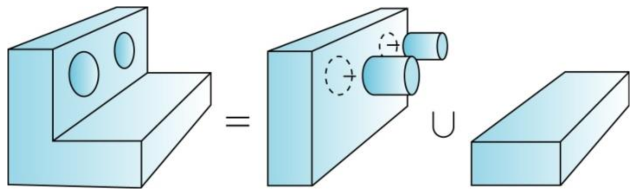


객체 모델링

- 스위핑 (Sweeping) 기법을 이용
  - 간단한 평면 도형을 공간상에서 이동 또는 회전시켜 복잡한 3차원 객체를 생성하는 기법
  - 원 → 원기둥, 도우넛…



- CSG (Constructive Solid Geometry, 조립적 입체기하학) 기법 이용
  - 기본적인 3차원 개체들을 집합 연산시켜 새로운 객체를 만들어내고, 이를 반복함 으로서 점차 복잡한 객체를 생성한다.

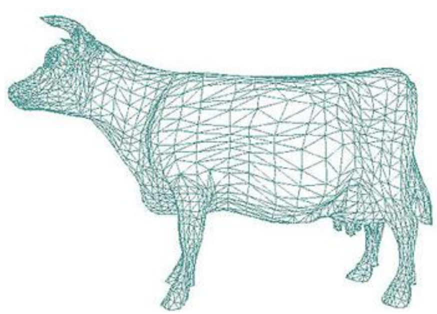
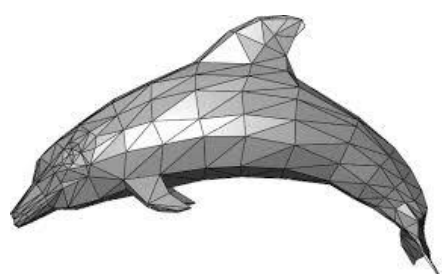
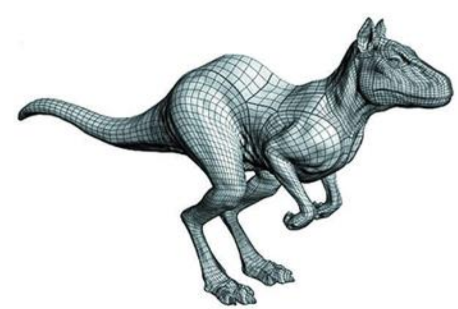


- 프랙탈 기하학 또는 입자시스템 이용
  - 기본 객체를 규칙에 따라 반복적으로 처리하여 자연물과 같은 불규칙적인 모습의 객체를 규칙적으로 모델링한다.

다각형 면 모델링

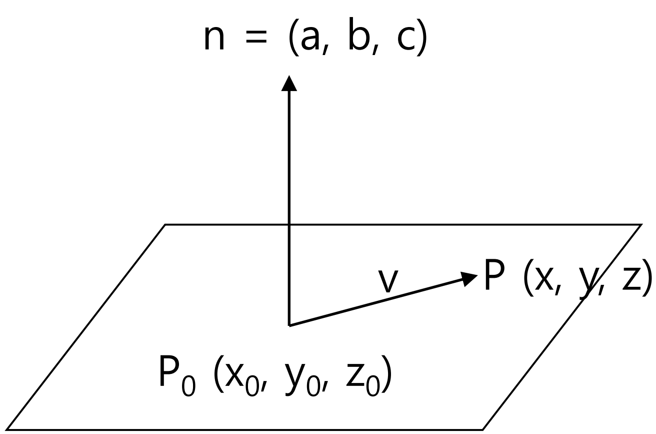
- **다각형 매시 표현**
  - 곡면을 삼각형이나 사각형으로 구성된 그물 형태로 표현한 그래픽 표현 기법
    - 삼각 매시법(Triangular Mesh): 삼각형을 이용하여 곡면을 표현하는 기법
      - 가장 간단한 다각형인 삼각형을 이용
      - 수학 함수로 모델링 한 곡면인 경우에도 다각형 매시를 사용하여 렌더링: 1초당 렌더링 할 수 있는 삼각형의 개수를 통하여 가속기의 성능을 표현한다.
    - 사각 매시법(Quadrilateral Mesh): 사각형을 이용
      - 일반적으로 4개의 점은 한 평면위에 놓이지 않는다.
      - 2개의 삼각형으로 분할하여 각각의 평면 방정식을 사용

  - 삼각형 면: 1차 방정식 (Ax + By + Cz + D = 0)를 이용
    - 공간상에 일직선상에 놓여있지 않은 3점을 이용하여 하나의 평면을 구성

평면 방정식

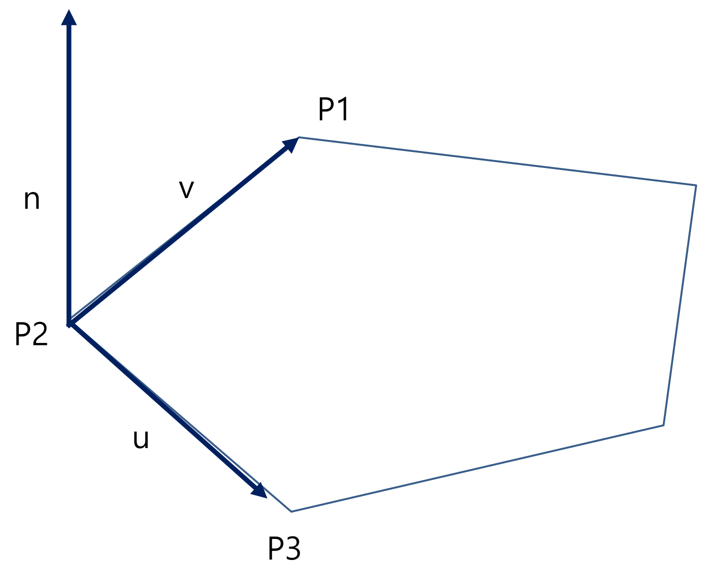
- **다각형 면은 평면으로 구성**
  - 평면 방정식 유도:
    - $P_0(x_0, y_0, z_0)$가 평면 위의 점이고 벡터 $n(a, b, c)$는 평면에 수직인 벡터일 때, 임의의 점 $P(x, y, z)$가 평면 위의 점이라면, 벡터 $v = P-P_0$도 평면 위의 벡터이다.
    - $n \cdot v = 0$
    - $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$
    - $ax + by + cz + d = 0, \quad d = -ax_0 - by_0 - cz_0$
    - $n \cdot p + d = 0$



세 점을 사용하여 법선 벡터 구하기

- **폴리곤의 정점 자료에서 법선 구하기**
  - 폴리곤의 법선 벡터
    - 2개의 인접한 엣지로 외적을 구한 후 정규화한다.

```
void computeNormal (vector P1, vector P2, vector P3)
{
        vector u, v, n, y(0, 1, 0);
        u = p3 - p2;
        v = p1 - p2;
        n = cross (u, v);
        normalize (n);
}
```



평면 방정식

- **임의의 세 점으로 평면 방정식 구하기**
  - 임의의 세 점 P1(x_1, y_1, z_1), P2(x_2, y_2, z_2), P3(x_3, y_3, z_3) 으로 평면 구성할 때, 평면 방정식은

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

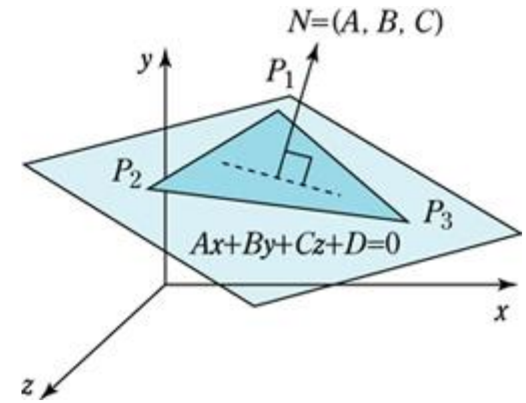
이때 Cramer's rule에 의해서 계수는,

$A = y_1(z_2-z_3)+y_2(z_3-z_1)+y_3(z_1-z_2)$

$B = z_1(x_2-x_3)+z_2(x_3-x_1)+z_3(x_1-x_2)$

$C = x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$

$D = -x_1(y_2z_3-y_3z_2) - x_2(y_3z_1-y_1z_3) - x_3(y_1z_2-y_2z_1)$



- **공간상에 점과 평면과의 관계**
  - 점 P가 $Ax + By + Cz + D < 0$이면 → 평면의 안쪽
  - 점 P가 $Ax + By + Cz + D = 0$이면 → 평면 위
  - 점 P가 $Ax + By + Cz + D > 0$이면 → 평면의 바깥쪽

크레이머 법칙

- **크레이머 법칙**
  - 연립방정식 Ax = b는

정칙 행렬 A = $\begin{bmatrix} a11 & a12 & \dots & a1n \\ a21 & a22 & \dots & a2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ an1 & an2 & \dots & ann \end{bmatrix}$ 과 두 벡터 x = $\begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ \dots \\ xn \end{bmatrix}$ b = $\begin{bmatrix} b1 \\ b2 \\ \dots \\ bn \end{bmatrix}$

로 세워져 있다.

A의 j번째 열을 b로 대체한 행렬을 Aj라고 하면

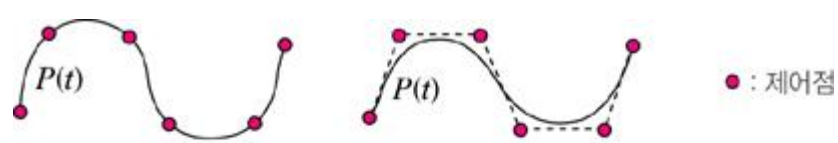
$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

스플라인 곡선

- **스플라인 (Spline)**
  - 간단한 다항식(Polynomial)으로 표현되는 부드러운 형태의 곡선
  - 곡선의 중요한 위치를 나타내는 제어점을 지정하여 곡선의 형태를 만들 수 있다.
  - 용도: 곡선 설계, 곡면 설계, 애니메이션의 동작 경로

  - 스플라인 종류
    - 보간 스플라인 (Interpolate spline): 주어진 점을 모두 지나는 부드러운 곡선
      - 일반 스플라인 곡선

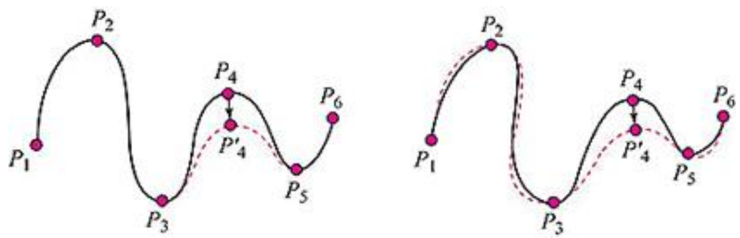
    - 근사 스플라인 (Approximate spline): 주어진 점들을 지나지 않으면서 제어점을 연결하는 선들의 모양에 근사하는 부드러운 곡선
      - 부드러움을 위해 제어점을 통과하지 않고 제어점은 곡선을 끌어당기는 역할을 한다.
      - 베지어 곡선, B-스플라인 곡선, NURBS 곡선



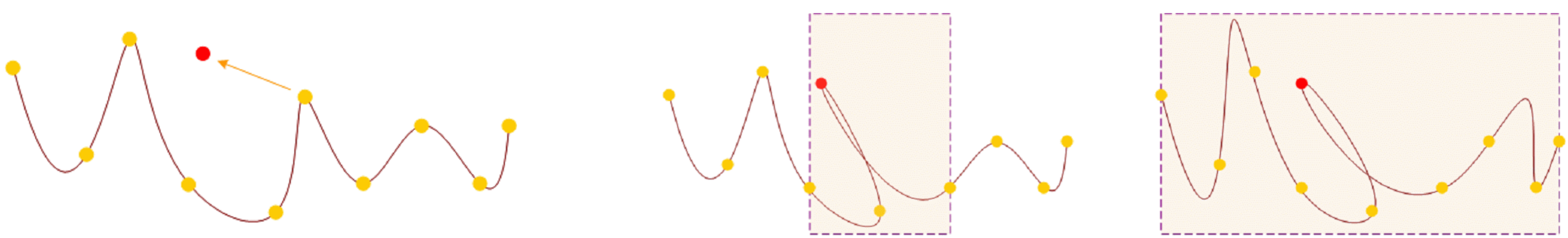
(a) 보간곡선 (b) 근사곡선

스플라인 곡선

- **곡선의 국부 제어 (Locality): 제어점 하나가 바뀔 때 영향을 미치는 부분**
  - 제어점 하나를 이동시켰을 때, 제어점과 인접한 일부분의 모양만 바뀌면 국부 제어 가능
  - 제어점 하나를 이동시켰을 때, 곡선 전체의 모양이 바뀌면 국부 제어가 가능하지 않다.

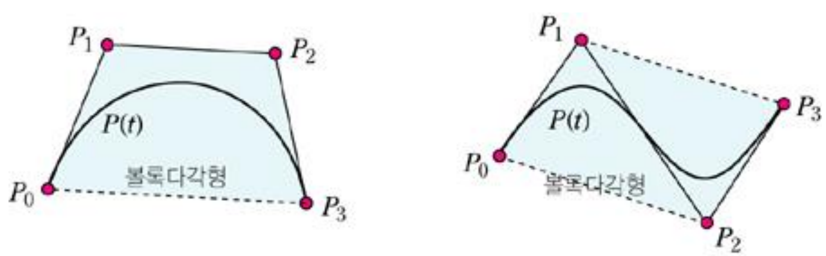


(a) 국부제어가 되는 경우 (b) 국부제어가 되지 않는 경우

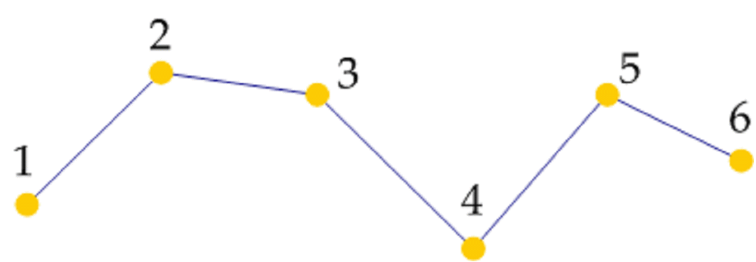

(a) (b)

스플라인 곡선

- **Convex hull (볼록 다각형):**
  - 제어점들을 모두 둘러싸고 있는 최소 면적의 볼록한 형태의 경계
    - 구간별 3차 다항식: 4개의 인접한 제어점
    - 구간별 2차 다항식: 3개의 인접한 제어점
  - 스플라인 곡선이 항상 볼록다각형 내부에 존재 → 곡선의 형태 파악



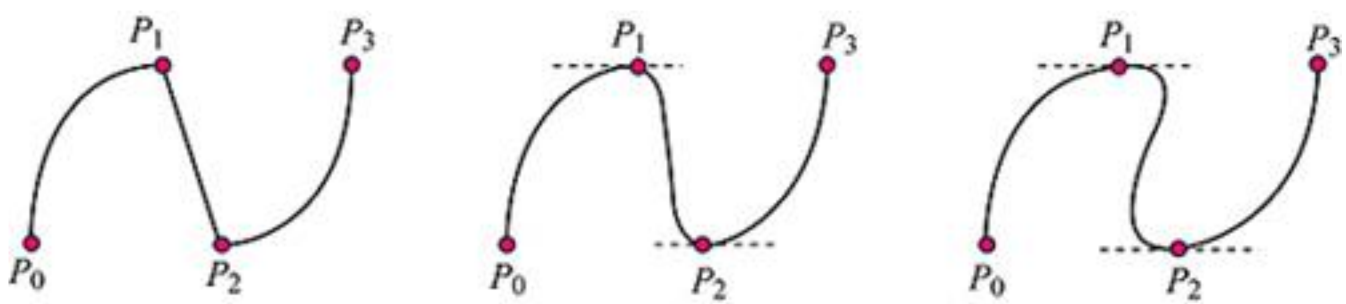
- **Control graph (제어 그래프):**
  - 근사 곡선에서 제어점들을 연결한 직선 형태



스플라인 곡선의 연속성

- 스플라인 곡선 P(x, y, z)의 매개변수 형태
  - $x = x(u), y = y(u), z = z(u)$ $\qquad 0 \leq u \leq 1$
  - n차 스플라인: 변수 x, y, z 가 매개변수 u의 n차식으로 표현되는 스플라인

- Continuity: 분할된 곡선을 연결하여 하나의 긴 곡선을 설계할 때 연결되는 지점에 다양한 연결 조건
  - C^0연속성: 두 곡선이 단순히 연결, 양쪽 곡선의 좌표 값이 동일
  - C^1연속성: 곡선의 기울기가 동일, 즉, 1차 도함수가 동일 (접선 벡터의 방향이 동일하다)
  - C^2연속성: 양쪽 곡선의 곡률이 동일, 즉, 1차 및 2차 도함수가 동일



(a) 곡선의 C^0 연속성 (b) 곡선의 C^1 연속성 (c) 곡선의 C^2 연속성

3차 스플라인 곡선

- **변수 x, y, z가 매개변수 u의 3차 식으로 표현**
  - n+1개의 제어점이 주어지고 이들 제어점을 보간하는 n개의 곡선으로 구성
  - C^1 및 C^2 연속성을 만족
  - 다음의 다항식을 만족

    $x(u) = a_x u^3 + b_x u^2 + c_x u + d_x$

    $y(u) = a_y u^3 + b_y u^2 + c_y u + d_y$

    $z(u) = a_z u^3 + b_z u^2 + c_z u + d_z$ 단, $0 \le u \le 1$
  - 위의 식의 행렬 형태,

    $x(u) = [u^3 \; u^2 \; u \; 1] \bullet$

    $= U \bullet C$ (U: 매개변수 u의 행렬 C: 계수 행렬)

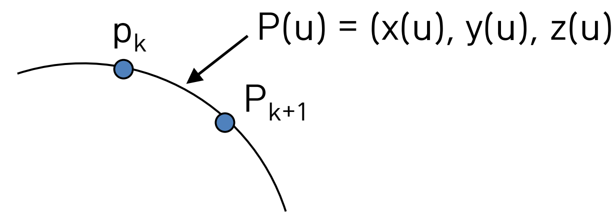
    $= U \bullet M_{spline} \bullet M_{geom}$

    M_{geom}: 경계조건 행렬 M_{spline}: 커브의 모양을 나타내는 행렬

허마이트 스플라인 (Hermite Splines)

- **스플라인 조건:**
  - 제어점과 기울기 값에 의해서 스플라인 커브를 결정
  - 두 끝점에 관계되기 때문에 부분적으로 바꿀 수 있다.
  - P(u): 제어점 p_k와 p_{k+1} 사이의 매개변수 3차원 함수

$$
\begin{aligned}
P(0) &= p_k \\
P(1) &= p_{k+1} \\
P'(0) &= Dp_k \\
P'(1) &= Dp_{k+1}
\end{aligned}
$$



- $P(u) = au^3 + bu^2 + cu + d \qquad 0 \le u \le 1$

  행렬: $P(u) = [u^3\ u^2\ u\ 1] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

- $P'(u) = 3au^2 + 2bu + c$

  행렬: $P'(u) = [3u^2\ 2u\ 1\ 0] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

허마이트 스플라인 (Hermite Splines)

– 위의 식에서 u에 0과 1을 넣어 다시 풀면,

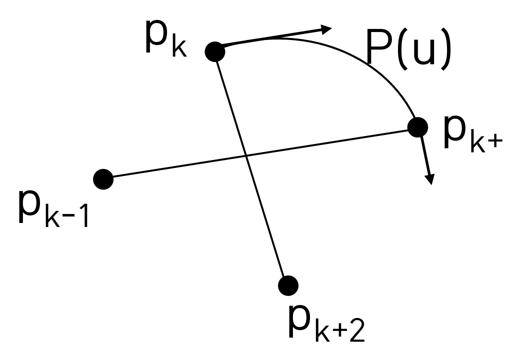
$$\begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ Dp_k \\ Dp_{k+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} =$$

– P(u) =

카디널 스플라인 (Cardinal Splines)

- **스플라인 조건:**
  - 각 곡선 부분의 경계에서 지정된 끝점 접선으로 3차 곡선들을 보간한다
  - 제어점의 기울기 값은 두 이웃 제어점 좌표로부터 계산된다.
    - 4개의 연속되는 제어점으로 지정
      - 중간 두 제어점은 부분 끝점
      - 다른 두 제어점은 끝점 기울기 계산에 사용



- $P(0) = p_k$
- $P(1) = p_{k+1}$
- $P'(0) = \frac{1}{2} * (1-t) * (p_{k+1} - p_{k-1})$
- $P'(1) = \frac{1}{2} * (1-t) * (p_{k+2} - p_k)$

  - t (tension 매개변수): 스플라인이 입력 제어점에 얼마나 느슨하게 또는 단단하게 맞춰지는지 제어
    - » t<0 : 느슨한 곡선 t > 0: 타이트한 곡선

카디널 스플라인 (Cardinal Splines)

– 위의 식을 행렬로 풀면

$$\begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P'(0) \\ P'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k \\ p_{k+1} \\ s(p_{k+1} - p_{k-1}) \\ s(p_{k+2} - p_k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

캣멀롬 스플라인 (Catmull-Rom Splines)

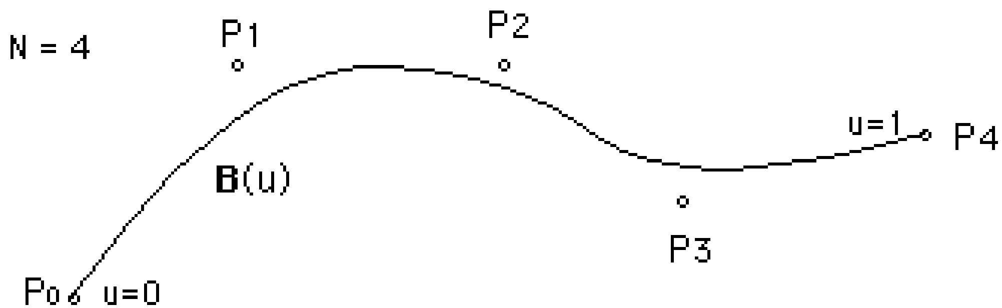
- **캣멀롬 스플라인**
  - 카디널 스플라인의 특별한 경우
    - 균일하게 점이 이동한다고 가정한 경우

    - $P'(0) = \frac{1}{2} * (p_{k+1} - p_{k-1})$
    - $P'(1) = \frac{1}{2} * (p_{k+2} - p_{k})$

    로 설정하여 스플라인을 구성하는 점들을 찾아낸다.

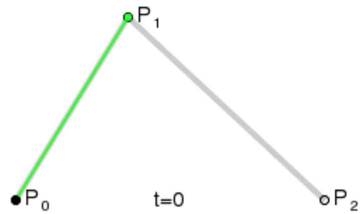
베지에 곡선 (Bezier Curves)

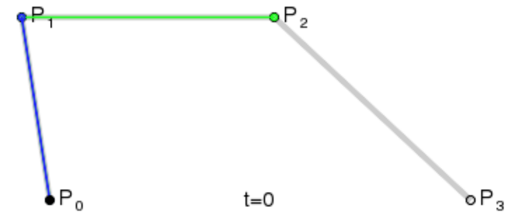
- **다항식으로 표현되는 근사곡선**
  - CAD에서 많이 사용되는 커브
  - 주어진 제어점의 위치에 의해 곡선의 형태가 결정되는 근사곡선
  - 어떤 숫자의 제어점에도 베지에 커브는 적용될 수 있다.
  - 제어점의 수는 베지어 다항식의 차수를 결정
    - 2개의 제어점: 두 점 사이의 선분
    - 3개의 제어점: 2차원 곡선
    - 4개의 제어점: 3차원 곡선

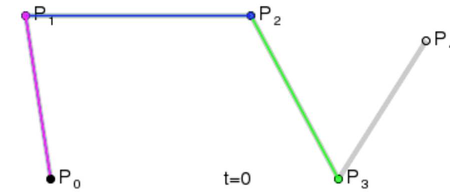


베지에 곡선 (Bezier Curves)

– 제어점 중 처음과 끝 점을 빼고는 보통 어느 조절점과도 만나지 않는다.







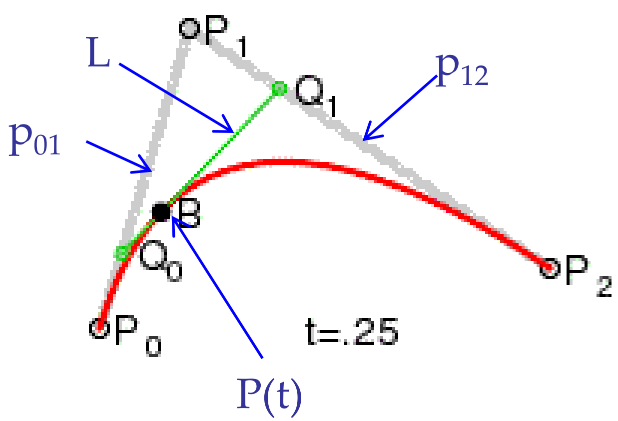
2차원 커브 3차원 커브 4차원 커브

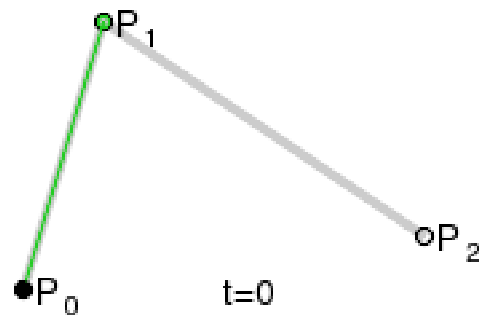
– 곡선은, 항상 제어점으로 이루어진 다각형 안에 들어가고, 곡선이 조절점들 사이에서 크게 벗어나지 않는다.

– 배합함수(Blending Function)
  - 어느 한 점에서 각 제어점이 미치는 영향
  - 제어점의 차수보다 하나 작은 다항식

베지에 곡선 (Bezier Curves)

- **3개의 제어점을 가진 베지에 곡선**
  - $p_{01}(t) = (1 - t)p_0 + tp_1$
  - $p_{12}(t) = (1 - t)p_1 + tp_2$
  - $p(t) = (1 - t)p_{01}(t) + tp_{12}(t)$





베지에 곡선 (Bezier Curves)

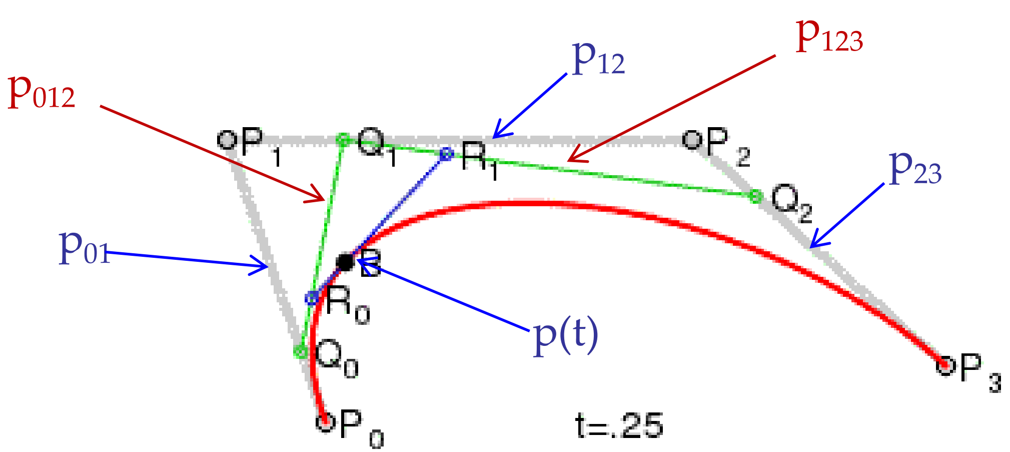
- **4개의 제어점을 가진 베지에 곡선**
  - $p_{012}(t) = (1-t)p_{01}(t) + tp_{12}(t)$
  - $p_{123}(t) = (1-t)p_{12}(t) + tp_{23}(t)$
  - $p(t) = (1-t)p_{012}(t) + tp_{123}(t)$

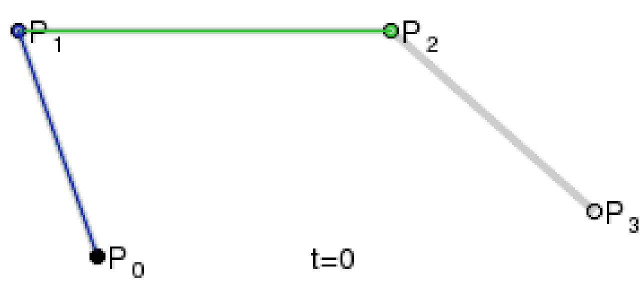
$$= (1-t)\{(1-t)p_{01}(t) + tp_{12}(t)\} + t\{(1-t)p_{12}(t) + tp_{23}(t)\}$$

$$= (1-t)[(1-t)\{(1-t)p_0 + tp_1\} + t\{(1-t)p_1 + tp_2\}]$$

$$+ t[(1-t)\{(1-t)p_1 + tp_2\} + t\{(1-t)p_2 + tp_3\}]$$

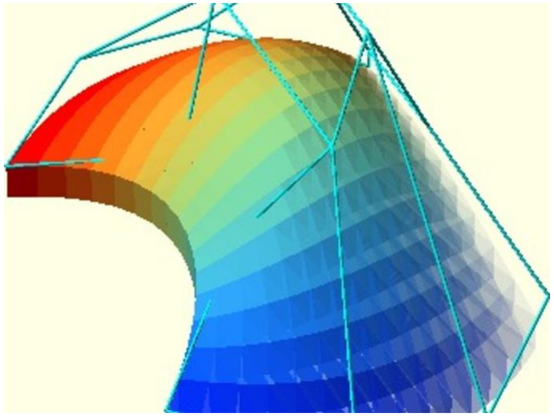
$$= p_0(1-t)^3 + 3p_1t(1-t)^2 + 3p_2t^2(1-t) + p_3t^3$$



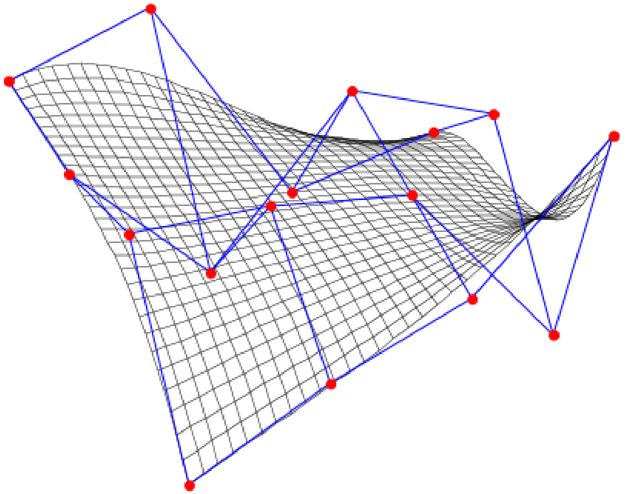


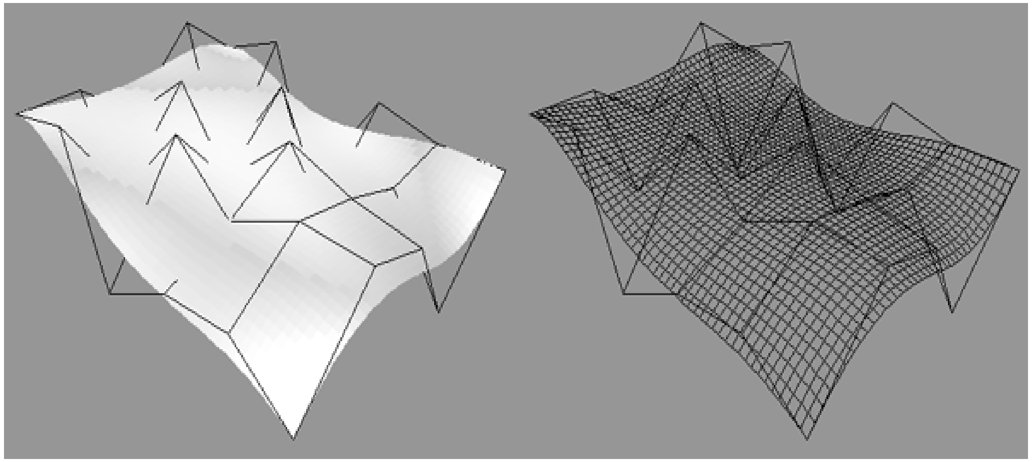
베지에 곡선 (Bezier Curves)

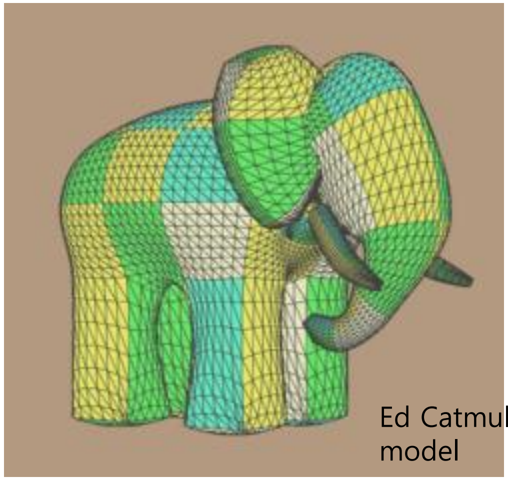
- **베지에 곡선/곡면으로 생성된 객체**



Willian A Adams
Bezier surfac







Ed Catmull's "Gumbo" model