NTNU
Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse
Høst 2013

Emne TIØ 4116 Mikroøkonomi og investeringsanalyse

Øving 5

Utlevering:	Torsdag 18. september	kl 1800
Veiledning:	Onsdag 24. september	kl 1315-1400 i S Rom 265
Innlevering:	Onsdag 1. oktober	kl 2359 på It's Learning

Oppgave 1: Litt om CES-produktfunksjonen (Kap 7)

En CES-produktfunksjon er ganske mye brukt i empiriske analyser. En del egenskaper har den felles med Cobb-Douglas-funksjonen, men CES-funksjonen er mer generell i den forstand at den ikke legger like sterke restriksjoner på beskrivelsen av teknologien som skal analyseres. En CES-funksjon kan skrives på formen:

$$q = [K^{\rho} + L^{\rho}]^{\frac{\gamma}{\rho}} \; ; \; \rho \leq 1 \, ; \rho \neq 0 \; ; \; \gamma > 0$$

a) Hva er betingelsene for at denne produktfunksjonen skal vise konstant, stigende eller avtagende avkastning med hensyn på skala?

b) Beregn den marginale substitusjonsraten, MRTS.

c) Substitusjonselastisiteten, σ, er en parameter som viser hvor fleksibel teknologien er. Det vil si hvor lett det er å erstatte en produksjonsfaktor, for eksempel ”arbeid”, L, med en annen produksjonsfaktor, for eksempel ”kapital”, K, når faktorprisen, her reallønn, endres i forhold til den andre faktorprisen, her realrente, realavkastning på ”kapital”. (Jo større verdi σ har, desto mer fleksibel forutsetter produktfunksjonen at teknologien er). Substitusjonselastisiteten er definert som relativ endring i forholdet mellom produksjonsfaktorene i forhold til relativ endring i MRTS. Den enkleste matematiske formuleringen bygger på logaritmiske deriverte:
$$\sigma = \frac{\partial \ln\left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}}\right)}{\partial \ln(\mathrm{MRTS})}$$
Beregn substitusjonselastisiteten! (Hint: Husk at $\ln \mathrm{x}^{y} = y ln x$. Det skal ikke være nødvendig å faktisk gjennomføre logaritmisk derivasjon.) Forklar hvordan formen på isokvanten blir avhengig av størrelsen til substitusjonselastisiteten og dermed de parameterne som bestemmer elastisiteten!

d) Anta at produksjonsfunksjonen får formen:

$$q = \left[100 + \sqrt{K} + \sqrt{L}\right]^2 \; ; \; (\rho = 0.5 \, ; \gamma = 1)$$

Viser denne produktfunksjonen konstant, stigende eller avtagende utbytte med hensyn på skala?

Oppgave 2: Produktfunksjon og kostnadsfunksjon (Eksamensoppgave, august 2007)

En bedrift produserer et produkt, q, ved hjelp av en produksjonsprosess som kan beskrives ved følgende produktfunksjon: $q = \sqrt{K} \cdot \sqrt{L}$, der K måler mengden kapitalutstyr brukt i produksjonen og L måler innsatsen av arbeidskraft. Produksjonsmengden, q, og bruk av kapitalutstyr, K, og arbeidskraft, L, måles i forhold til samme tidsperiode. Kostnadene knyttet til bruk av en enhet kapitalutstyr per tidsperiode er gitt ved r. Tilsvarende er w kostnadene per enhet arbeidskraft, regnet per tidsperiode.

a) For en gitt produksjonsmengde, q_0, illustrer grafisk bedriftens økonomiske tilpasning i bruk av produksjonsfaktorene K og L!

b) Med utgangspunkt i den spesifiserte produktfunksjonen finn et uttrykk for bedriftens valg av produksjonsfaktorforholdet: K/L som funksjon av faktorprisene r og w!

c) Finn bedriftens bruk av, (etterspørsel etter), kapitalutstyr, K, og av arbeidskraft, L, som funksjoner av produksjonsmengde, q, og faktorprisene r og w!

d) Utled bedriftens kostnadsfunksjon – lang sikt!

Anta nå at produktfunksjonen er gitt ved: $q = \left(\sqrt{K} + \sqrt{L}\right)^2$.

e) Vis at denne funksjonen avbilder en produksjonsprosess med konstant utbytte med hensyn på produksjonsskala ("constant returns to scale")! Skisser prinsipielt formen på bedriftens kostnadsfunksjon – lang sikt!

f) La faktorprisene få verdiene: $r = 1$ og $w = 2$. Utled bedriftens kostnadsfunksjon – lang sikt som funksjon av produsert kvantum q!

g) La faktorprisene være gitt som ovenfor og anta dessuten at mengden kapitalutstyr er gitt på kort sikt som $K' = 4$. Finn bedriftens kostnadsfunksjon – kort sikt og tegn denne funksjonen inn i samme diagram som du tegner bedriftens kostnadsfunksjon – lang sikt! Gi en kortfattet drøfting av resultatet!

Oppgave 3: Forurensing og økonomisk regulering av forurensning (Kap 7)

En tapetfabrikk bruker en del kjemikalier i sin produksjon. Til nå har bedriften fått lov til å slippe de kjemiske restproduktene ut i en elv. Det er et fast forhold mellom bruken av kjemikalier og utslippet av problematisk avfall. Bruken av kjemikalier i produksjonen tilsvarer W utslippsekvivalenter målt i kubikkmeter utslipp. Bedriften sin produksjonsfunksjon kan da skrives som: $q = (1/125)K \cdot W$, der q er årlig produksjonskapasitet av tapet målt i kvadratmeter, K er antall maskintimer kapitalutstyr brukt i årsproduksjonen, og W er antall kubikkmeter utslipp til elva per år. (Obs! W er samtidig et mål for bruken av kjemikalier i årsproduksjonen)

I utgangspunktet er ikke bedriften underlagt noen form for utslippsregulering. Driftskostnadene knyttet til produksjonen er direkte proporsjonale med bruken av kjemikalier og dermed W. Disse kostnadene er 400 kroner/m^3 av W. Leiekostnaden for kapitalutstyret er 1600 kroner/maskintime

a) Beregn det optimale mengdeforhold mellom de to innsatsfaktorene. (Finn en ligning for substitumalen lang sikt!)

b) Markedet bedriften operer i, begrenser omsetningsvolumet til 128 000 m^2 tapet per år. Hvor stor er optimal innsats av kapitalutstyr (maskintimer) og utslipp (m^3) per år?

c) Finn et generelt uttrykk for kostnadsfunksjonen (kostnadsfunksjonen lang sikt) beregn kostnadsnivået for bedriften når q = 128 000 m^2!

d) Miljøverndepartementet planlegger å innføre ei miljøavgift på t kr/m^3 utslipp.
   i. Finn et generelt uttrykk som viser hvordan optimal faktorinnsats varierer med størrelsen på miljøavgifta t, faktorpriser og produksjonskapasitet!
   ii. Dersom t = 100 kr/m^3, hvor mye betaler bedriften i miljøavgift og hvor mye endres kostnadsnivået i forhold til situasjonen uten avgift gitt at produksjonskapasiteten er som før (q = 128 000 m^2)?