

Instituto Tecnológico de Buenos Aires

93.54 MÉTODOS NUMÉRICOS

Trabajo práctico N°2

Grupo 3

FORTECHA, María Eugenia	58138
LAMBERTUCCI, Guido Enrique	58009
POUTHIER, Florian	61337
LONDERO BONAPARTE, Tomás Guillermo	58150

Profesor

FIERENS, Pablo Ignacio
ÁLVAREZ, Adrián Omar

Presentado: 06/06/19

1. Introducción

El trabajo presentado consiste en aproximar funciones dadas en ecuaciones diferenciales, mediante el uso del método de Heun o también conocido como Runge-Kutta de segundo orden. Estas ecuaciones representan un modelo de crecimiento óseo basado en un balance entre osteoblastos y osteoclastos, obtenidas del artículo de *Lemaire et al*¹.

El sistema a aproximar es el siguiente:

$$\frac{dR}{dt} = D_R \cdot \pi_C - \frac{D_B}{\pi_C} I_R, \quad (1)$$

$$\frac{dB}{dt} = \frac{D_B}{\pi_C} \cdot R - k_B \cdot B + I_B, \quad (2)$$

$$\frac{dC}{dt} = D_C \cdot \pi_L - D_A \cdot \pi_C \cdot C + I_C. \quad (3)$$

donde D_A , D_B , D_C y D_R son constantes, R , B y C las incógnitas π_C y π_L son funciones de las incógnitas (π_C función de C y π_L función de B y R). A su vez, estas últimas dependen de otras funciones, las cuales son dato y varían dependiendo la situación analizada. Todos los valores, tanto de las constantes como de las funciones anteriormente mencionadas, son obtenidas del artículo.

2. Código empleado

El código elaborado para este trabajo fue hecho en **Matlab**. Cabe destacar que se probó previamente el algoritmo aproximando la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, & \text{con } t \in [0; 1] \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

sabiendo que el resultado de esta es

$$x(t) = e^t$$

determinando así su adecuado funcionamiento.

■ Benchmark

```
f=@(t,x,par)[x];
par=@(t) t;0;
[t,x]=miode(f,1,0,1,0.5,0.0001,par);
```

El x final obtenido, correspondiente a la aproximación de e^1 , fue 2.718281 que tiene un error absoluto con respecto al valor real menor al establecido como máximo.

■ Heun:

¹Vincent Lemaire, Frank L. Tobin, Larry D. Greller, Carolyn R. Cho, and Larry J. Suva. Modeling the interactions between osteoblast and osteoclast activities in bone remodeling. 229:293–309, 2004.

```

function [t, x]=heun(f,x0,t0,tf,n,par)
    h=(tf-t0)/n;
    t=linspace(t0,tf,n+1);
    x(1,:)=x0;
    for i=1:n
        k1(i,:)=f(t(i),x(i,:),par(i));
        k2(i,:)=f(t(i)+h,x(i,:)+h*k1(i,:),par(i));
        x(i+1,:)=x(i,:)+(h/2)*(k1(i,:)+k2(i,:));
    end
end

```

■ **Miode:**

```

function [t,x] = miode(f,x0,t0,tf,dtmax,tol,par)
    n = ceil((tf-t0)/dtmax);
    error = 10; %Para que entre al while
    while(error > tol)
        [t1,x1]=heun(f,x0,t0,tf,n,par);
        [t2,x2]=heun(f,x0,t0,tf,2*n,par);
        error = abs(x1(end,:)- x2(end,:));
        n = n+1;
    end
    h =(tf-t0)/n;
    [t,x] = heun(f,x0,t0,tf,n,par);
end

```

■ **Figura 2 (A) - 1:**

```

Ib=@(t) t>=20 & t<=80;
par = @(t) [0 0.0001*Ib(t) 0 0 0 0];
f=@(t,x,par)[7e-4*((x(:,3)+2.5e-4)/(x(:,3)+5e-3))-0.035*((x(:,3)+5e-3)/(x(:,3)+2.5e-4))*x(:,1)
+par(:,1),0.035*((x(:,3)+5e-3)/(x(:,3)+2.5e-4))*x(:,1)-0.189*x(:,2)+par(:,2),
2.1e-3*((102352.9412)*(((par(:,3)/86)+(125/43))/((par(:,3)/86)+150))*x(:,2)*
(1+(par(:,4)/1e3))/(1+(29/85)+(1/350)*((2e5*((par(:,3)/86)+150)*x(:,1))/
((par(:,3)/86)+(125/43))+par(:,6)))))-0.7*((x(:,3)+2.5e-4)/
(x(:,3)+5e-3))*x(:,3)+par(:,5)];
[t, x] = miode(f,[0.0007734,0.0007282,0.0009127],0,140,1,1e-6,par);
plot(t,x) title('Figura 2 (A)-1') grid on

```

■ **Figura 2 (A) - 2:**

```

Ic=@(t) t>=20 & t<=80;
par = @(t) [0 0 0 0 0.0001*Ic(t) 0];
f=@(t,x,par)...
[t, x] = miode(f,[0.0007734,0.0007282,0.0009127],0,140,1,1e-6,par);
plot(t,x)
title('Figura 2 (A)-2')
grid on

```

■ **Figura 2 (A) - 3:**

```
Ir=@(t) t>=20 & t<=80;
par=@(t) [0.0001*Ir(t) 0 0 0 0];
f=@(t,x,par)...
[t,x]=miode(f,[0.0007734,0.0007282,0.0009127],0,140,1,1e-6,par);
plot(t,x)
title('Figura 2 (A)-3')
grid on
```

■ **Figura 2 (B) - 1:**

```
Ib=@(t) t>=20 & t<=80;
par=@(t) [0 -8.3e-5*Ib(t) 0 0 0 0];
f=@(t,x,par)...
[t,x]=miode(f,[0.0007734,0.0007282,0.0009127],0,140,1,1e-6,par);
plot(t,x)
title('Figura 2 (B)-1')
grid on
```

■ **Figura 2 (B) - 2:**

```
Ic=@(t) t>=20 & t<=80;
par=@(t) [0 0 0 0 -0.00029*Ic(t) 0];
f=@(t,x,par)...
[t,x]=miode(f,[0.0007734,0.0007282,0.0009127],0,140,1,1e-6,par);
plot(t,x)
title('Figura 2 (B)-2')
grid on
```

■ **Figura 2 (B) - 3:**

```
Ir=@(t) t>=20 & t<=80;
par=@(t) [-0.00012*Ir(t) 0 0 0 0];
f=@(t,x,par)...
[t,x]=miode(f,[0.0007734,0.0007282,0.0009127],0,140,1,1e-6,par);
plot(t,x)
title('Figura 2 (B)-3')
grid on
```

■ **Figura 2 (C) - 1:**

```
Ip=@(t) t>=20 & t<=80;
par=@(t) [0 0 1000*Ip(t) 0 0 0];
f=@(t,x,par)...
[t,x]=miode(f,[0.0007734,0.0007282,0.0009127],0,140,1,1e-6,par);
```

```

plot(t,x)
title('Figura 2 (C)-1')
grid on

```

■ **Figura 2 (C) - 2:**

```

I0 =@(t) t>=20 & t<=80;
par = @(t) [0 0 0 0 0 2.5e5*I0(t)];
f=@(t,x,par)...
[t, x] = miode(f,[0.0007734,0.0007282,0.0009127],0,140,1,1e-6,par);
plot(t,x)
title('Figura 2 (C)-2')
grid on

```

■ **Figura 2 (C) - 3:**

```

I1 =@(t) t>= 20 & t<=140;
I0 =@(t) t>=80 & t<=140;
par = @(t) [0 ,0 ,0 ,1e4*I1(t), 0, 9e4*I0(t)];
f=@(t,x,par)...
[t, x] = miode(f,[0.0007734,0.0007282,0.0009127],0,140,1,1e-6,par);
plot(t,x)
title('Figura 2 (C)-3')
grid on

```

3. Resultados obtenidos

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de las funciones estimadas. En estas se observa la concentración de células (en picomolar) en función del tiempo (en días).

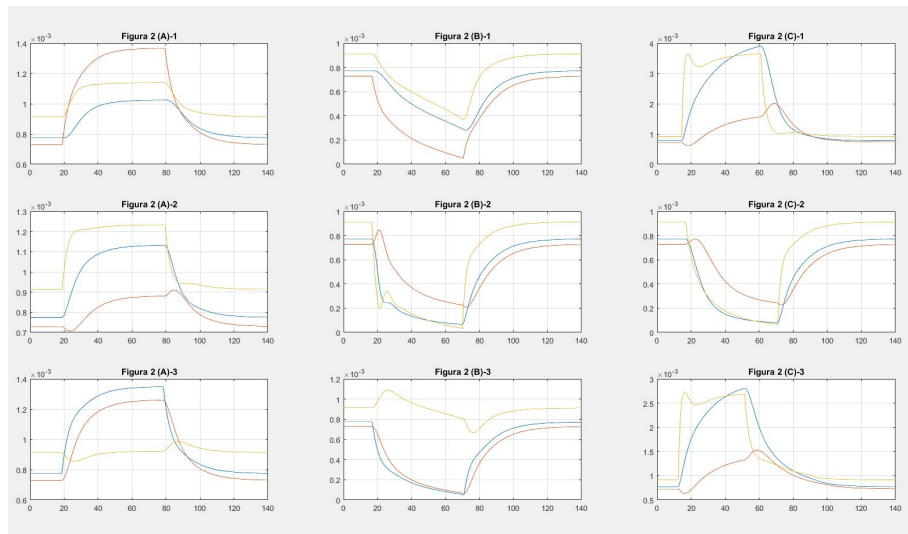


Figura 1: Aproximaciones conseguidas mediante el algoritmo realizado.

4. Conclusión

Comparando los gráficos obtenidos con los presentados en el artículo, se puede verificar en primer lugar que el algoritmo realizado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias funciona correctamente. Por otro lado, se puede observar que las aproximaciones, realizadas con una tolerancia de 10^{-6} , son buenas, es decir, próximas a las empleadas en el artículo.