Guía 3 - Parte II
Sistemas complejos en máquinas paralelas

2do Cuatrimestre 2015

Esta guía tiene como objetivo poner en práctica la realización de discretizaciones de algunas ecuaciones diferenciales parciales por el método de las diferencias finitas, su clasificación y su posterior implementación. Para los siguientes ejercicios se pide realizar las consignas: [1]

a Clasifique la ecuación diferencial: elíptica, parabólica o hiperbólica.

b Discretice por diferencias finitas. Intercale el uso de los métodos: explícito, crank-nicolson y fuertemente implícito.

c Implemente la solución basándose en las rutinas para resolución de sistemas de ecuaciones lineales del práctico anterior.

d Grafique la solución para diferentes tiempos.

Ejercicios:

1. En una placa petri se introduce un gel cuya composición es distinta en cada mitad de dicha placa. En el centro de la misma, por goteo, se mantiene una concentración constante de una determinada sustancia, 2g/l. Dicha sustancia se transporta a través del gel. Se realizan mediciones durante 30 minutos y en base a los datos obtenidos se generan la siguientes funciones que describen el avance de los frentes de la sustancia en cada mitad.

$$f_{izq}(t) = 1.234\ t^{0.5} \quad y \quad f_{der}(t) = 0.567\ t^{0.5} \tag{1}$$

El fenómeno de transporte escala con $t^{0.5}$, por lo que presenta un régimen difusivo. Se pide realizar una simulación numérica del experimento antes descripto utilizando la ecuación de difusión 2D con coeficiente de difusión variable en el espacio, pero constante en el tiempo.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \bullet (D(x,y)\nabla C) \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(D(x,y)\ \frac{\partial C}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(D\ \frac{\partial C}{\partial y}\Big) \tag{2}$$

Donde $x, y \in [0,1]$ y $t > 0$ son las variables espacial y temporal respectivamente. C(x,y,t) la concentración de la sustancia dependiente del espacio y el tiempo.

   (a) Establezca las condiciones de contorno e iniciales apropiadas para el problema.

   (b) Ajuste los coeficientes de difusión para satisfacer los datos experimentales.

2. La ecuación de la onda describe la propagación de éstas a velocidad v. Es una importante EDP usada en diversas áreas de la física, como acústica, electromagnetismo y fluidodinámica. Se pide modelar numércamente dicha ecuación en 2D, para diferentes velocidades (definidas por usted) y sobre un recito cuadrado.

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v\nabla^2\Psi \Rightarrow \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v\Big(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}\Big) \tag{3}$$

Donde $x, y \in [-1,1]$ y $t > 0$ son las variables espacial y temporal respectivamente. $\Psi(x,y,t)$ la amplitud de la onda dependiente del espacio y el tiempo.

   (a) Use como condición inicial una gauseana centrada en el recinto $\Psi(x,y) = e^{-(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})}$ y en el contorno la condición de dirichlet $\Psi(x,y) = 0$

   (b) Use como condición inicial $\Psi(x,y) = 0$ en todo el dominio y en el contorno la condición de neumann $\nabla\Psi, \hat{\mathbf{n}} = 0$. De forma aleatoria y durante el transcurso de la simulación, perturbe el dominio estableciendo $\Psi(x_{rand}, y_{rand}) = -1$, para generar nuevas ondas.

Bibliografía:

- "Analisis Numéricos para Ingeniería". FI. UNMDP. Argentina. http://www3.fi.mdp.edu.ar/analisis/

[1] Nota: Se recomienda realizar las implementaciones en C++ y los gráficos en Octave/Matlab.