Guía 3 - Parte III
Sistemas complejos en máquinas paralelas

2do Cuatrimestre 2015

Esta guía tiene como objetivo poner en práctica la realización de discretizaciones de algunas ecuaciones diferenciales parciales por el método de las diferencias finitas, su clasificación y su posterior implementación. Para los siguientes ejercicios se pide realizar las consignas: [1]

a Clasifique la ecuación diferencial: elíptica, parabólica o hiperbólica.

b Discretice por diferencias finitas. Intercale el uso de los métodos: explícito, crank-nicolson y fuertemente implícito.

c Implemente la solución basándose en las rutinas para resolución de sistemas de ecuaciones lineales del práctico anterior.

d Grafique la solución para diferentes tiempos.

Ejercicios:

1. La ecuación de Burgers en su forma vectorial es la siguiente:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v_e}}{\partial t} + \boldsymbol{v_e} \cdot \nabla \boldsymbol{v_e} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{v_e} \tag{1}$$

Podemos expresar dicha ecuación en su forma bidimensional de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{3}$$

Donde $x, y \in [0; 2]$ y $t > 0$ son las variables espacial y temporal respectivamente. $\boldsymbol{v_e} = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ es la velocidad del fluido dependiente del espacio y el tiempo. ν es el coeficiente de viscocidad. Se desea resolver dicha ecuación en base a los siguiente datos: $\nu = 0.01$, condiciones de contorno: $u(x, y, t) = v(x, y, t) = 1$ para todo x, y perteneciente al borde del recinto y $t \geq 0$. Condiciones iniciales: $u(x, y, 0) = 2$ y $v(x, y, 0) = 2$ para $0.5 \leq x \leq 1$ y $0.5 \leq y \leq 1$. Sino $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 1$. Tenga en cuenta la siguiente condición numérica para satisfacer la estabilidad: $\frac{\nu \Delta t}{\Delta x \Delta y} = 0.009$

(a) Realice un gráfico para cada tiempo t_i (definidos por usted) compuesto por $u(x, y, t_i)$, $v(x, y, t_i)$, $\boldsymbol{v_e}(x, y, t_i)$ y $|\boldsymbol{v_e}(x, y, t_i)|$. Puede usar *subplot* en Octave/Matlab para realizar este tipo de gráficos.

(b) Analice el resultado obtenido, distinga los fenómenos difusivo y convectivo.

2. Las ecuaciones de Navier-Stokes describen el movimiento de los fluidos, particularmente como se relaciona la velocidad, presión, temperatura y densidad de un fluido en movimiento. Son ecuaciones en derivadas parciales no lineales y tienen gran relevancia en el mundo de la física y la ingeniería. Se usan para la representación de flujos en vehículos, en cañerías, sanguíneos, atmósfera, corrientes oceánicas, etc. Actualmente no se dispone de una solución analítica general. En el pasado se hizo uso de aproximaciones y simplificaciones a dichas ecuaciones para poder encontrar soluciones. Recientemente, el alto rendimiento de las computadoras ha sido aprovechado para resolverlas numericamente usando una variedad de métodos como diferencias finitas, volúmenes finitos, elementos finitos y métodos espectrales. Esta área de estudio se conoce como *Computational Fluid Dynamics* o *CFD*.

[1] Nota: Se recomienda realizar las implementaciones en C++ y los gráficos en Octave/Matlab.

Trabajaremos con las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v_e} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v_e}}{\partial t} + (\boldsymbol{v_e} \cdot \nabla)\boldsymbol{v_e} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v_e} \tag{5}$$

Donde (1) es la ecuación de conservación de la masa para densidad ρ constante, y (2) es la ecuación del momento. $\boldsymbol{v_e}$ es la velocidad del fluido y p la presión. ν es el coeficiente de viscocidad. Las ecuaciones anteriores tienen el problema de que no existe una forma obvia de acoplar presión y velocidad. Para solucionar este problema se aplica la divergencia en ambos miembros de (2), se trabaja algebraicamente y se aplica la restricción (1). Se llega entonces a una nueva forma de las ecuaciones anteriores, cuya versión bidimensional es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{8}$$

Donde $x, y \in [0; 2]$ y $t > 0$ son las variables espacial y temporal respectivamente. $u(x, y, t)$ y $v(x, y, t)$ son los componentes x-y de la velocidad del fluido dependiente del espacio y el tiempo. Se desea resolver el $Lid-$ *driven cavity problem* en el cual a un recipiente (2D) que contiene un determinado fluido se le desliza su tapa hacia uno de los lados, provocando cambios en el movimiento y la presión del fluido. Para resolver el problema se cuenta con los siguiente datos: $\nu = 0.1$. ρ=1. Condiciones iniciales $u, v, p = 0$ en todos lados. Condiciones de contorno $u = 1$ en $y = 2$ (la "tapa"). $u, v = 0$ en los demás bordes. $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ en $y = 0$. $p = 0$ en $y = 2$. $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ en $x = 0, 2$

(a) Analice los cambios de presión en los extremos del recipiente en contacto con la tapa.

(b) ¿Cuánto tarda el fluido en estabilizarse?

Bibliografía:

- https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/nseqs.html
- http://nbviewer.ipython.org/github/barbagroup/CFDPython/blob/master/lessons/10_Step_8.ipynb
- http://nbviewer.ipython.org/github/barbagroup/CFDPython/blob/master/lessons/13_Step_10.ipynb
- http://nbviewer.ipython.org/github/barbagroup/CFDPython/blob/master/lessons/15_Step_11.ipynb
- https://en.wikipedia.org/wiki/Navier%E2%80%93Stokes_equations
- https://en.wikipedia.org/wiki/Millennium_Prize_Problems