

Sistemas Complejos en Máquinas Paralelas
Departamento de Computación
FCEyN – Universidad de Buenos Aires
2015

**Métodos Iterativos para
Sistemas de Ecuaciones Lineales**

Métodos Iterativos

1. Implemente el método de Jacobi para el siguiente sistema de ecuaciones, sabiendo que dicho método es convergente. Observar cómo las iteraciones se acercan a la solución exacta $(1, 2, 1)^t$. Tome los siguientes parámetros numéricos: semilla=(0,0,0) tolerancia=0.001

$$\begin{aligned}4x_1 - x_2 &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 &= 6 \\ -x_2 + 4x_3 &= 2\end{aligned}$$

2. Resuelva el problema anterior con el método de Gauss-Seidel. Comparar la velocidad de convergencia respecto del método de Jacobi: grafique el error de convergencia vs número de iteración para cada método.
3. Implemente una función que resuelva por el método de Jacobi un sistema de ecuaciones lineales genérico $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$. La función debe recibir como parámetros \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{X}^0 y la tolerancia de convergencia. Haga lo mismo para Gauss-Seidel. Las fórmulas para Jacobi y Gauss-Seidel, respectivamente, son:

$$x_i^k = \frac{b_i - \sum_{j, i \neq j} a_{i,j} x_j^{k-1}}{a_{i,i}} \quad x_i^k = \frac{b_i}{a_{i,i}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^k - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} x_j^{k-1}$$

4. Analizar la convergencia del método de Jacobi para el siguiente sistema de ecuaciones calculando el radio espectral de la matriz de iteración. En caso de no ser convergente, reordenar las ecuaciones para que, si es posible, pueda aplicarse el método. Luego resuelva con el código implementado.

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + 10x_3 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= -11 \\ 10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25\end{aligned}$$

5. Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0\end{aligned}$$

- (a) Analizar la convergencia del método de Gauss-Seidel.
- (b) Si el método es convergente, resolver usando el código implementado. $x_0 = (0, 0, 0)^t$

Resolución mediante Métodos Iterativos de Ecuaciones Diferenciales Discretizadas

En una ecuación diferencial las incógnitas son funciones. Si se necesita conocer como evolucionan dichas funciones a lo largo del tiempo, estamos hablando de un problema transitorio. Si lo que se necesita saber es el estado final de las funciones, es decir, conocer las funciones cuando éstas ya no cambian en el tiempo, estamos hablando de un problema estacionario. Para resolver una ecuación diferencial, en el caso transitorio, necesitamos además apropiadas condiciones de borde e iniciales. En el caso estacionario, sólo las condiciones de borde.

Las ecuaciones diferenciales son usadas ampliamente en varias áreas de las ciencias básicas y la ingeniería para modelar gran variedad de problemas. En muchos casos no se cuenta con una solución analítica o bien ésta es muy difícil de conseguir, por lo que el uso de métodos numéricos se convierte en una excelente herramienta para calcular buenas aproximaciones de estas ecuaciones. Para la implementación computacional es necesario realizar un proceso de discretización, el cual convierte una ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones convencional, el cual puede ser resuelto mediante métodos iterativos.

1. Se desea modelar, de forma simplificada, el problema de la conducción de calor sobre un dissipador de aluminio (Figura A). Para ello se considerará solamente un corte transversal del mismo (Figura B).



Figura A



Figura B

Bajo el dissipador se encuentra un CPU a una temperatura $T_{CPU}=60\text{ }^{\circ}\text{C}$, y alrededor del dissipador la temperatura ambiente es $T_{AMB}=30\text{ }^{\circ}\text{C}$.

La ecuación de Laplace es usada para modelar la distribución de la temperatura en estado estacionario a través de un material. Para el corte transversal sólo es necesaria su versión en dos dimensiones espaciales:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Donde $T=T(x,y)$ es el campo escalar de la temperatura en función de las coordenadas espaciales x e y .

Para realizar la discretización del problema se representará su dominio (Figura B) mediante una matriz de 9×11 celdas. En la misma se incluyen también las condiciones de borde del problema.

T_{AMB}	T_{AMB}	T_{AMB}	T_{AMB}	T_{AMB}	T_{AMB}	T_{AMB}	T_{AMB}	T_{AMB}	T_{AMB}	T_{AMB}
T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}
T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}
T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}
T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}
T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}	?	T_{AMB}
T_{AMB}	?	?	?	?	?	?	?	?	?	T_{AMB}
T_{AMB}	?	?	?	?	?	?	?	?	?	T_{AMB}
T_{AMB}	T_{CPU}	T_{CPU}	T_{CPU}	T_{CPU}	T_{CPU}	T_{CPU}	T_{CPU}	T_{CPU}	T_{CPU}	T_{AMB}

Matriz de Temperaturas, T

Una discretización realizada mediante el método de diferencias finitas arroja el siguiente esquema:

$$T(i, j-1) + T(i, j+1) + T(i-1, j) + T(i+1, j) - 4T(i, j) = 0$$

Se pide:

- (a) Expresar el esquema discretizado en forma matricial.
- (b) Verificar convergencia.

- (c) Resolver por el método de Jacobi.
- (d) Graficar el resultado final.

2. En un tubo de 15cm de largo se tiene una determinada solución, cuya concentración inicial es de 0.01g/litro. En uno de los extremos del tubo se coloca una membrana semipermeable que conecta éste con un pequeño contenedor que alberga la misma solución que antes pero con una concentración de 1g/l. En el otro extremo del tubo se colocó también una membrana semipermeable, y se conecta dicho extremo a un recipiente con un reactivo que produce que la concentración de la sustancia en cuestión baje a 0. La difusividad de la sustancia es de $0.01\text{cm}^2/\text{h}$. Se desea conocer la variación de la concentración a lo largo del tubo y través del tiempo durante los primeros 15 minutos. La siguiente ecuación diferencial modela el problema.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Una discretización realizada mediante el método de diferencias finitas arroja el siguiente esquema:

$$C^{n+1}(i) = 0.5(C^n(i+1) + C^n(i-1))$$

Donde C representa la concentración de la sustancia y n es el tiempo. Debe respetarse la siguiente relación para asegurar la estabilidad del método:

$$\frac{D \Delta t}{\Delta x^2} = 0.5$$

C es un vector de $m=15\text{cm}/\Delta x$ posiciones. El anterior esquema deriva en un sistema de ecuaciones lineales: $\mathbf{A} \mathbf{C}^{n+1} = \mathbf{B} \mathbf{C}^n$. En el inicio, $\mathbf{C}^{n=0}$ tiene todos sus valores definidos, se puede calcular el lado derecho de la ecuación $\mathbf{B} \mathbf{C}^{n=0}$ para luego resolver el sistema y obtener $\mathbf{C}^{n=1}$. En la segunda iteración temporal nuevamente se calcula el lado derecho, haciendo uso de $\mathbf{C}^{n=1}$, y se resuelve el sistema para obtener los valores de $\mathbf{C}^{n=2}$. De esta manera se continúa iterando hasta llegar al límite de tiempo, o hasta que el error máximo entre los vectores de concentración de dos iteraciones consecutivas (\mathbf{C}^{n+1} y \mathbf{C}^n) se considere despreciable.

Se pide en este ejercicio:

- (a) Expresar el esquema discretizado en forma matricial.
- (b) Verificar convergencia.
- (c) Resolver las iteraciones temporales utilizando el método de Gauss-Seidel.
- (d) Graficar el resultado final en 3D (concentración, distancia y tiempo).

Referencias

- “Análisis Numéricos para Ingeniería”. FI. UNMDP. Argentina
<http://www3.fi.mdp.edu.ar/analisis/>
- “Métodos Numéricos”. FI. UNMDP. Argentina.
<http://www3.fi.mdp.edu.ar/metodos>
- “Métodos Numéricos”. Iván F. Asmar Ch.
<http://www.unalmed.edu.co/~ifasmar/libro.html>

Nota: Se recomienda realizar las implementaciones en C++ y los gráficos en Octave/Matlab.