feuilles de TD   Scilab online

I– Extraits de sujets de concours

Exercice 1 *extrait Ecricome 2019*

Soit g la fonction numérique réelle définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a.** Calculer la limite de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

b. Montrer que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

3. **a.** Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.

b. Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D).

4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$

b. Compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous écrit à l'aide de `Scilab` afin qu'il affiche un encadrement de α à 10^{-2} près lorsque a et b sont choisis tels que $\alpha \in [a,b]$.

```
function y = g(x)
    y = ...
endfunction
a = input('Entrer la valeur de a : ')
b = input('Entrer la valeur de b : ')
while b - a ...
    m = ...
    if g(a)*g(m) <= 0 then
        b = ...
    else
        ...
    end
end
disp(...)
```

c. Le programme `Scilab` affiche `0.88` comme résultat. Dans un même repère orthonormé, placer le réel α sur l'axe des abscisses, tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D).

Exercice 2 *extrait ESCP 2020*

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Montrer que $A^3 - 3A^2$ est proportionnelle à I.

b. En déduire que A est inversible, puis exprimer la matrice A^{-1} en fonction de A et de A^2.

c. Écrire une instruction `Scilab` permettant de saisir la matrice A.

d. En utilisant la question `1.b`, proposer une instruction `Scilab` permettant de calculer A^{-1}.

e. Donner une instruction `Scilab`, différente de la précédente, permettant aussi de calculer A^{-1}.

2. On rappelle que, par convention, $A^0 = I$.

Justifier que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}$, puis compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette de saisir A, puis de calculer et d'afficher A^n pour une valeur de n supérieure ou égale à 2 entrée par l'utilisateur.

```
n = input('entrer une valeur pour n:')
I = [1,0,0;0,1,0;0,0,1]
A = [...;...;...]
B = A^2
for k = 3:n
    C = 3*B + (9/4)*I
    I = ...
    A = ...
    B = ...
end
disp(B)
```

Exercice 3 *extrait BSB 2020*

Antoine et Béatrice jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

On suppose que c'est Antoine qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.

On rappelle que l'instruction `a = grand(1,1,’bin’,1,p)` simule une loi de Bernoulli de paramètre p.

Ainsi si $p = \frac{2}{3}$ l'instruction `a = grand(1,1,’bin’,1,2/3)` affecte à la variable a la valeur 0 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et la valeur 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

1. Compléter les lignes 4 et 5 du programme ci-dessous de telle sorte que lors de chacun des 20 échanges de la partie la variable `a` correspondent au point marqué par Antoine lors de cet échange (c'est-à-dire 1 ou 0)
2. Recopier et compléter les lignes 2 et 7 du programme afin que la variable `S` calcule la somme des points obtenus par Antoine durant la partie.

```
1  a = grand(1,1,'bin',1,2/3)
2  S = ...
3  for i = 2:n
4      if a == 1 then a = grand(...)
5            else a = grand(...)
6      end
7      S = ...
8  end
9  disp(S)
```

Exercice 4 *extrait BSB 2020*

Une entreprise fabrique à la chaîne des cartouches d'imprimante. Chaque cartouche a une probabilité p d'être défectueuse. En bout de chaîne une machine détecte à coup sûr les cartouches défectueuses et les retire de la chaîne.

On suppose que la valeur de p est connue et égale à $\frac{2}{100}$.

L'entreprise fabrique en une heure 100 cartouches dont les défauts éventuels sont indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cartouches défectueuses détectées en bout de chaîne durant cette période.

1. Reconnaître la loi de X. On donnera l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X ainsi que l'expression de $P(X = k)$ pour tout entier k appartenant à $X(\Omega)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

La machine affiche chaque heure le nombre de cartouches défectueuses mais l'afficheur ne peut plus afficher la valeur 0. En revanche il affiche normalement tous les autres nombres y compris 10, 20, etc. Lorsque X est égale à 0 il affiche au hasard n'importe quel nombre parmi les autres valeurs possibles de X. Soit Y la variable aléatoire égale à la valeur affichée.

3. On rappelle que l'instruction `grand(1,1,’bin’,1,p)` simule une loi binomiale de paramètres (n, p) et que l'instruction `grand(1,1,’uin’,1,n)` simule une loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$.

   Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche les valeurs respectives de X et de Y.

```
X = grand(1,1,...)
if X == 0 then Y = ...
          else Y = ...
end
disp(X), disp(Y)
```