feuilles de TD *Scilab online*

I– Rappels sur rand() et grand()

rand() et grand()

- La commande `rand()` renvoie un nombre pseudo-aléatoire entre 0 et 1.
- La commande `grand(m,n,'uin',a,b)` renvoie une matrice de taille $m \times n$ dont les éléments sont des **entiers** suivant une loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$.
- La commande `grand(m,n,'unf',a,b)` renvoie une matrice de taille $m\times n$ dont les éléments sont des réels suivant une loi uniforme sur $[a;b[$.
- La commande `grand(m,n,'bin',N,p)` renvoie une matrice de taille $m \times n$ dont les éléments suivent une loi binômiale de paramètres (N,p).
- La commande `grand(m,n,'geom',p)` renvoie une matrice de taille $m \times n$ dont les éléments suivent une loi géométrique de paramètre p.

II– Extraits de sujets de concours

Exercice 1 *extrait BCE ESC 2020*
On effectue une succession de lancers (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir «pile» vaut $\frac{1}{2}$ et cette d'obtenir «face» vaut aussi $\frac{1}{2}$. On considère aussi la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition dun premier «pile», et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier «face».

On décide de coder «pile» par 1 et «face» par 0.
Compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage des valeurs prises par les variables aléatoires X et Y lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
x = ...
y = ...
lancer = grand(1,1,'uin',0,1)
if lancer == 1
then
    while lancer == 1
        lancer = grand(1,1,'uin',0,1)
        y = ...
    end
else
    while lancer == 0
        lancer = grand(1,1,'uin',0,1)
        x = ...
    end
end
disp(x)
disp(y)
```

Exercice 2 *extrait BCE ESC 2020*
Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières positives d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0). Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse $k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), alors, à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse k avec la probabilité $\frac{k}{k+1}$, ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+1}$.
On note U l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement de départ) et on admet que U est une variable aléatoire. On convient que U prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en O.
Compléter les commandes du script Scilab suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur prise par U lors de l'expérience aléatoire étudiée.

```
k = 1
hasard = grand(1,1,'uin',1,k+1)
while hasard ...
    k = k + 1
    hasard = ...
end
disp(k, 'U a pris la valeur :')
```

Exercice 3 *extrait BCE ESCP 2016*
Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0. À partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant :

- elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$;

- elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{4}$;
- elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{4}$;

Les différents sauts sont supposés aléatoires.

1. On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,4)` simule une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur $[\![3;4]\!]$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule les 100 premiers déplacements de la puce.

```
A = zeros(1,100)
for k = 1:100
   t = grand(1,1,'uin',1,4)
   if t <= ... then A(k) = 1
   end
   if t == ... then A(k) = 2
   end
   if t == ... then A(k) = 3
   end
end
disp(A)
```

2. On rappelle que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont deux vecteurs de même taille, la commande `plot2d(x,y)` permet de tracer la ligne brisée joignant les points $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$.
On complète le programme `Scilab` de la question 4 en y ajoutant les trois commandes suivantes :

```
x = 1:100
y = cumsum(A)
plot2d(x,y)
```

Quelle sortie graphique obtient-on ?

Exercice 4 *extrait Ecricome 2017*
Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.
Une urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher.
On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe du côté Pile, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient Face, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.
On rappelle qu'en langage `Scilab` l'instruction `grand(1,1,'uin',n1,n1)` renvoie un entier au hasard et uniformément compris entre `n1` et `n2`. Compléter le programme `Scilab` suivant afin qu'il affiche une simulation de la variable aléatoire T.

```
T = ...
if grand(1,1,"uin",1,2) == 1 then
    for k = 1:2
        if grand(1,1,"uin",1,4)<2 then
            T = T + 1
        end
    end
else
    ...
    ...
    ...
    ...
    ...
end
disp(T,"une simulation de T donne :")
```

Exercice 5
Un gardien de nuit doit ouvrir une porte dans le noir et choisit aléatoirement une clé parmi les 10 clés de son trousseau. Comme il ne peut pas les distinguer, il peut essayer plusieurs fois les mêmes clés sans s'en rendre compte. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais jusqu'à ce que la porte s'ouvre.

1. Que vaut $E(X)$?

2. Écrire un programme `Scilab` qui simule 100000 ouvertures de porte et retrouver la valeur théorique de $E(X)$.