I– Rappels sur rand() et grand()

feuilles de TD *Scilab online*

`rand() et grand()`

- La commande `rand()` renvoie un nombre pseudo-aléatoire entre 0 et 1.
- La commande `grand(m,n,'uin',a,b)` renvoie une matrice de taille $m \times n$ dont les éléments sont des **entiers** suivant une loi uniforme sur $[\![a;b]\!]$.
- La commande `grand(m,n,'unf',a,b)` renvoie une matrice de taille $m \times n$ dont les éléments sont des réels suivant une loi uniforme sur $[a;b[$.
- La commande `grand(m,n,'bin',N,p)` renvoie une matrice de taille $m \times n$ dont les éléments suivent une loi binômiale de paramètres (N,p).
- La commande `grand(m,n,'geom',p)` renvoie une matrice de taille $m \times n$ dont les éléments suivent une loi géométrique de paramètre p.

II– Extraits de sujets de concours

Exercice 1 *extrait Ecricome 2020*
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1}$$

Compléter les trois lignes incomplètes du script Scilab ci-dessous pour qu'il calcule u_n pour n entier naturel entré par l'utilisateur :

```
n = input('Entrer n :')
u = 0 ; v = 1
for k = ...
    w = u
    u = ...
    v = ...
end
disp(u)
```

Exercice 2 *extrait Ecricome 2020*
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1 + u_n + u_n^2}$$

où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{x}{1+x+x^2}$.

On montre (dans une question précédente de l'exercice) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$$

Compléter le script du programme Scilab suivant pour qu'il affiche le plue petit entier naturel non nul n telque $u_n \leqslant \dfrac{1}{1000}$.

```
function y=f(x)
    y = x/(1+x+x^2)
endfunction
u = ...
n = ...
while u ...
    u = ......
    n = ......
end
disp(...)
```

Exercice 3 *extrait Ecricome 2018*

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans l'autre urne ;
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans la même urne.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.

On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,k)` renvoie un entier aléatoire compris entre 1 et k. Recopier et compléter les lignes à pointillés du script `Scilab` ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire X_2 :

```
function X2 = simulation ()
    tirage1 = grand(1, 1, 'uin', 1, 3)
    if tirage1 < 3 then
        res1 = 1
        tirage2 = grand(1, 1, 'uin', 1, 4)
        if tirage2 == 1 then res2 = 1
        else res2 = 0
        end
    else
        res1 = 0
        tirage2 = ...
        if tirage2 < 3 then res2 = ...
        else res2 = ...
        end
    end
    X2 = res1 + res2
endfunction
```

Question rajoutée : déterminer de manière mathématique l'espérance de la variable X_2. Retrouver ce résultat par une simulation.

Exercice 4 *extrait Ecricome 2019*

Soit g la fonction numérique réelle définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a.** Calculer la limite de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

   b. Montrer que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

3. **a.** Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.

   b. Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D).

4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$

   b. Compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous écrit à l'aide de `Scilab` afin qu'il affiche un encadrement de α à 10^{-2} près lorsque a et b sont choisis tels que $\alpha \in [a,b]$.

```
function y = g(x)
    y = ...
endfunction
a = input('Entrer la valeur de a : ')
b = input('Entrer la valeur de b : ')
while b - a ...
    m = ...
    if g(a)*g(m) <= 0 then
        b = ...
    else
        ...
    end
end
disp(...)
```

   c. Le programme `Scilab` affiche `0.88` comme résultat. Dans un même repère orthonormé, placer le réel α sur l'axe des abscisses, tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D).