feuilles de TD Scilab online

I– Rappels sur les matrices

syntaxe Scilab

- La matrice $A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ sera créée par l'instruction `A=[-1,5;0,4]`.
- La commande `A(1,2)` permet d'accéder à l'élément situé en 1ère ligne et 2ème colonne de la matrice A.
- La commande `B = zeros(2,3)` crée la matrice $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
- La commande `C = ones(2,2)` crée la matrice $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.
- La commande `D = eye(3,3)` crée la matrice $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.
- **Nouveauté :** la commande `spec(A)` renvoie les valeurs propres de la matrice A (sous forme de vecteur).

Exercice 1 *tous les calculs sont à faire en* `Scilab`

1. Saisir la matrice $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -2\\ 2 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ et donner les valeurs propres de la matrice A.
2. Les vecteurs propres de A sont (dans le désordre) $U=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.
3. Associer à chaque valeur propre son vecteur propre.
4. Créer une matrice P contenant les vecteurs U, V, W.
5. Quel calcul faut-il effectuer pour obtenir la matrice diagonale issue de A ?
6. Proposer une méthode intelligente de calcul de A^n.

Exercice 2
Écrire une fonction `somme(a, b)` qui prend en paramètres deux nombres `a` et `b` et qui renvoie leur somme.

II– Extraits de sujets de concours

Exercice 3 *extrait BCE BSB 2018*
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0=-\frac{1}{2}$ et $u_1=1$ et pour tout entier naturel n, par la relation :

$$u_{n+2}=u_{n+1}+6u_n+3$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. On considère le programme `Scilab` ci-dessous. Quelle instruction faut-il ajouter en ligne 5 pour le programme calcule et affiche la valeur de u_n, l'entier n non nul étant donné par l'utilisateur ?

```
1  n = input('n ?')
2  v = -1/2, u = 1
3  for i = 2:n
4      a = u
5      ...
6      v = a
7  end
8  disp(u)
```

Exercice 4 *extrait Ecricome 2020*
Un bureau de poste dispose de deux guichets. Trois clients notés A, B, C arrivent en même temps. Les clients A et B se font servir tandis que C attend, puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère. On définit les variables aléatoires X, Y, Z égales à la durée en minutes de l'opération des clients A, B et C respectivement lorsqu'ils sont au guichet. On fixe a et b deux réels strictement positifs, et on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre a, et que Y suit une loi exponentielle de paramètre b.
On suppose enfin que X et Y sont indépendantes.
On note T la variable aléatoire égale au temps d'attente en minutes du client C avant de parvenir à un des guichets. La variable aléatoire T prend donc **la plus petite** des valeurs prises par X et Y.
On rappelle que, pour `n` un entier naturle non nul, et `lambda` un réel strictement positif, l'instruction `grand(1, n, 'exp', 1/lambda)` simule `n` fois une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre `lambda` et stocke les `n` réalisations ainsi obtenues dans une matrice.
On considère le code Scilab suivant :

```
function T = simul(a, b)
    X = grand(1, 10000, 'exp', 1/a)
    Y = grand(1, 10000, 'exp', 1/b)
    T = X
    for k = ...
        if ... then
                T(k) = ...
        end
    end
endfunction
a = input('a : ')
b = input('b : ')

T = simul(a, b)
```

1. Compléter le code de la fonction `simul` pour qu'elle construise une matrice `T` contenant 10000 réalisations de la variable aléatoire T.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $a = b = \dfrac{1}{2}$, et on suppose que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle, de paramètre 1, la variable aléatoire Z étant indépendante de X et Y. On s'intéresse à $V = T + Z$ qui représente le temps total passé par le client C dans la poste, attente et service compris.
On s'intéresse à la fonction Scilab suivante :

```
function f= simul2()
    T = simul(1/2, 1/2)
    Z = grand(1, 10000, 'exp', 1)
    n = 0
    for k = 1:10000
        if T(k) + Z(k) > 2 then
            n = n + 1
        end
    end
    f = n / 10000
endfunction
```

On lance la fonction `simul2` plusieurs fois de suite, et on obtient les résultats suivants :

`0.4045      0.4151      0.4221      0.4096      0.4188`

2. Que retourne la fonction `simul2` ? On pourra utiliser la définition de la variable aléatoire V.
3. On constate que les résultats renvoyés sont différents mais relativement proches. Sans démonstration, indiquer quel théorème de probabilité assure ce phénomène.

On admet que V est encore une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $A > 0$:

$$\int_0^A g(x)\mathrm{d}x = 1 - \mathrm{e}^{-A} - A\mathrm{e}^{-A}$$

5. Vérifier que g est bien une densité de probabilité.
6. Calculer $P(V \leqslant 2)$. En déduire la valeur de $P(V > 2)$.
7. Ce résultat est-il cohérent avec les résulats Scilab de la question 2. ?