I– Calcul matriciel : syntaxe et utilisation basique

feuilles de TD *Scilab online*

1. Vecteurs lignes, vecteurs colonnes

syntaxe Scilab

- ▶ le vecteur-colonne $A = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ sera créé par l'instruction `A=[6;5;9]`.
- ▶ le vecteur-ligne $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ sera créé par l'instruction `B=[3,1,4,5]`.
- ▶ La commande `A(1)` renvoie la valeur du premier élément de `A`.
- ▶ La commande `B(2)=7` modifie la valeur du deuxième élément de `B`.
- ▶ La commande `A(4)=3` crée un quatrième élément pour vecteur `A`.

2. Utilisation d'un vecteur pour stocker les termes successifs d'une liste

▶ **Exemple :**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
Tester successivement les deux scripts suivants.

script n° 1

```
u = 3
for i=2:10
   u = 2*u+1
end
disp(u)
```

À la fin de ce script, que contient la variable `u` ?

script n° 2

```
u(1) = 3
for i=2:10
   u(i) = 2*u(i-1)+1
end
disp(u)
```

À la fin de ce script, que contient la variable `u` ?

Dans les programmes rencontrés jusqu'à présent (script n° 1), une seule et unique variable `u`, ne pouvant contenir **qu'un seul nombre**, servait à recevoir successivement les différentes valeurs prises par les termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
L'utilisation d'un vecteur `u` permet maintenant (script n° 2) de rendre accessibles **tous** les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'à un certain rang.

▶ **Remarques :**

- Le premier élément d'un vecteur `u` se nomme `u(1)`. Cela peut entraîner des confusions lorsque la suite mathématique (u_n) que l'on étudie commence à l'indice 0 et non pas à l'indice 1.
- Le vecteur dans le script n° 2 est un vecteur-colonne qui se crée au fur et à mesure qu'on lui rajoute des éléments. Parfois, ce vecteur sera entièrement en début d'exercice (rempli de 0).

3. Création de matrices

syntaxe Scilab

- ▶ la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ sera créée par l'instruction `A=[-1,5;0,4]`.
- ▶ La commande `A(1,2)` permet d'accéder à l'élément situé en 1ère ligne et 2ème colonne de la matrice A.
- ▶ La commande `B=zeros(2,3)` crée la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Opérations sur les matrices

syntaxe Scilab

- ▶ Le produit d'une matrice A par un nombre k s'obtient par la commande `k*A`
- ▶ Le produit de deux matrices A et B s'obtient par la commande `A*B` .

II– Extraits de sujets de concours

Exercice 1 *extrait BCE BSB 2016*

On considère la fonction g définie sur $[1;2]$ par $g(x) = \ln(x+2)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Compléter le programme suivant afin qu'il mémorise les valeurs de u_1 à u_{20} et qu'il représente graphiquement ces termes.

```
u(1)=...
for i=2:20
   u(i)=...
end
plot([1:20],u,'+')
```

2. Exécutez ce code et observez le graphique donné par Scilab. Que pouvez-vous conjecturer sur le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et sur sa limite ?

Exercice 2 *extrait BCE BSB 2016*

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par leurs premiers termes $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 2$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n - 6b_n + 2c_n \\ b_{n+1} = 2a_n - 4b_n + 2c_n \\ c_{n+1} = -2a_n + 2b_n \end{cases}$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = AU_n$.

2. Compléter le programme ci-dessous pour qu'il calcule et affiche la valeur de a_{10}.

```
A = ...
U = [0;1;2]
for i=1:10
    U=A*U
end
disp(...)
```

Exercice 3 *extrait de BCE BSB 2017*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par leurs premiers termes $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ et $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $\begin{cases} u_{n+1} = u_n \\ v_{n+1} = v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + w_n \end{cases}$

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

2. On considère le programme suivant qui permet de calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

```
1  A=...
2  u=zeros(1,10)
3  v=zeros(1,10)
4  w=zeros(1,10)
5  u(1)=1,v(1)=0,w(1)=2
6  X=[1;0;2]
7  for i=2:10
8      X=A*X
9      u(i)=1
10     ...
11     ...
12 end
```

a. Compléter la ligne 1 afin que soit mémorisée dans la variable `A` la matrice A.

b. Pour mémoriser les termes successifs de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v_2 à v_{10}, quelle instruction parmi celles-ci faut il ajouter en ligne 10 ? (On justifiera la réponse).

A. `v(i)=X(i)` B. `v(i)=X` C. `v(i)=X(2)`

D. une autre instruction à préciser.

c. Proposer de la même manière une instruction pour la ligne 11 qui permette de mémoriser les premiers termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.