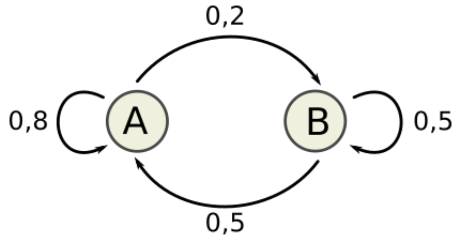
feuilles de TD Scilab online

I– Rappels sur les chaînes de Markov

Considérons deux équipes de volley, l'équipe A et l'équipe B.

- Quand elle est au service, l'équipe A à 80 % de chances de gagner le point et donc de re-servir ensuite ;
- Quand elle est au service, l'équipe B à 50 % de chances de gagner le point et donc de re-servir ensuite ;

Cette situation peut se modéliser par le graphe suivant :



Si on appelle a_n (resp. b_n) la probabilité que l'équipe A (resp. B) soit au service lors du n-ième point,
Si on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ le vecteur-ligne contenant ces probabilités,
alors on a le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,8a_n + 0,5b_n \\ b_{n+1} = 0,2a_n + 0,5b_n \end{cases}$$

qui s'écrira matriciellement

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

soit

$$X_{n+1} = X_n \times M \qquad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

- M est appelée **matrice de transition**
- La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **chaîne de Markov**. De manière intuitive, cela signifie que la valeur de X_{n+1} ne va dépendre que de X_n et pas des valeurs précédents : c'est un processus «sans mémoire».

`Scilab` permet de simuler le comportement d'une chaîne de Markov.

Attention, l'utilisation est un peu particulière : `Scilab` a besoin «d'initialiser» le processus, de connaître les conditions initiales. Dans notre exemple, cela correspond à l'information : «quelle équipe sert en premier ?»
On pourrait imaginer que `Scilab` attendrait cette information sous la forme du vecteur $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ si l'équipe A sert en premier, ou bien $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$ si l'équipe B sert en premier. Non !
`Scilab` va attendre un paramètre `x0` qui sera égal à 1 si l'équipe A sert en premier, et égal à 2 si c'est l'équipe B. Comme si dans le graphe, les nœuds étaient numérotés à partir de 1, en partant de la gauche.

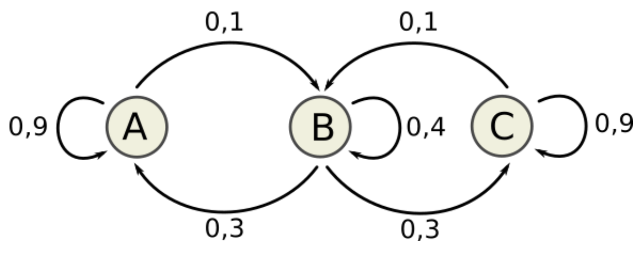
syntaxe Scilab

La syntage `T = grand(10, 'markov', M, x0)` va donner les 10 positionnements successifs d'un curseur, placé initialement sur le nœud `x0`, lorsque l'évolution du déplacement est donné par la matrice de transition `M`.

Exercice 1 *à faire uniquement en Scilab*
On reprend la situation précédente du match de volley.

1. Créer une variable `M` contenant la matrice de transition.
2. Taper l'instruction `T = grand(10, 'markov', M, 2)` et commenter les résultats obtenus.
3. Modifier la matrice de transition et relancer la simuation, en essayant d'anticiper les résultats.

Exercice 2



Un individu se positionne sur le nœud B puis se déplace sur les nœuds A, B, C suivant les probabilités indiquées sur le graphe ci-contre.

1. Écrire dans Scilab la matrice `M` de transition permettant de simuler le mouvement de cet individu.
2. Faire 20 simulations de son mouvement et observer les résultats obtenus.
3. Modifier la matrice `M` afin de rendre le nœud A **absorbant** (si on arrive sur A, on ne peut pas en sortir). Vérifier par simulation.

II– Extraits de sujets de concours

Exercice 3 *extrait BCE ESCP 2019*

On suppose que dans une certaine région, pendant une période donnée, seuls deux états météo sont possibles : le beau temps et le mauvais temps.

L'étude des bulletins météo du passé laisse penser que le temps qu'il fait un certain jour de cette période dépend qu'il a fait la veille de la façon suivante :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égale à $\frac{4}{5}$.
- s'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égale à $\frac{2}{5}$

On s'intéresse à une période débutant le jour 1, jour au cours duquel il a fait beau.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

- B_n l'évènement : «il fait beau le jour n» ;
- $\overline{B_n}$ l'évènement : «il fait mauvais le jour n ;
- $u_n = P(B_n)$ et $v_n = P(\overline{B_n})$.

1. **a.** Donner la valeur de u_1.

   b. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$

2. **a.** À l'aide des probabilités totales, établir la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n$$

   b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_{n+1} en fonction de u_n.

   c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de n.

   d. Calculer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n$ et interpréter ce résultat.

3. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n$.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la matrice à une ligne et deux colonnes suivante : $X_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$

   Déterminer la matrice carrée K, indépendante de n, qui vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_{n+1} = X_n K$$

   c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, donner pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de X_{n+1} en fonction de X_1 et de K.

   d. En déduire l'expression (sous forme de tableau) de la matrice K^n en fonction de n.

4. On code un jour de beau temps par 1 et un jour de mauvais temps par 2.

   On admet que la commande `x = grand(99, 'markov', K, 1)` renvoie un vecteur contenant autant de "1" que de jours de beau temps et autant de "2" que de jours de mauvais temps, et ceci, entre le deuxième jour et le centième jour.

   Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il renvoie le nombre de jours de beau temps lors des 100 premiers jours de la période considérée, y compris le premier.

```
K = [...... ; .......]
x = grand(99,'markov',K,1)-1
n = ....
disp(n, 'le nombre de jours de beau temps est :')
```

5. **a.** Soit U_n l'évènement «il fait beau pendant les n premiers jours de la période considérée». Calculer $P(U_n)$.

   b. Soit V_n l'évènement «il fait beau au moins deux fois lors des n premiers jours de la période considérée.

   Calculer $P(V_n)$.