I– Rappels sur les matrices

feuilles de TD *Scilab online*

syntaxe Scilab

- La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ sera créée par l'instruction `A=[-1,5;0,4]`.
- La commande `A(1,2)` permet d'accéder à l'élément situé en 1ère ligne et 2ème colonne de la matrice A.
- La commande `B = zeros(2,3)` crée la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- La commande `C = ones(2,2)` crée la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- La commande `D = eye(3,3)` crée la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- **Nouveauté :** la commande `spec(A)` renvoie les valeurs propres de la matrice A (sous forme de vecteur).

Exercice 1 *tous les calculs sont à faire en* `Scilab`

1. Saisir la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et donner les valeurs propres de la matrice A.
2. Les vecteurs propres de A sont (dans le désordre) $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. Associer à chaque valeur propre son vecteur propre.
4. Créer une matrice P contenant les vecteurs U, V, W.
5. Quel calcul faut-il effectuer pour obtenir la matrice diagonale issue de A ?

II– Extraits de sujets de concours

Exercice 2 *extrait BCE BSB 2018*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n, par la relation :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n + 3$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. On considère le programme `Scilab` ci-dessous. Quelle instruction faut-il ajouter en ligne 5 pour le programme calcule et affiche la valeur de u_n, l'entier n non nul étant donné par l'utilisateur ?

```
1  n = input('n ?')
2  v = -1/2, u = 1
3  for i = 2:n
4      a = u
5      ...
6      v = a
7  end
8  disp(u)
```

Exercice 3 *extrait Ecricome 2018*

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire indiscernables au toucher, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, elles aussi indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U ;
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient ;
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans l'autre urne ;

- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant a lieu dans la même urne.

Pour tout entier naturel non nul n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches piochées au cours des n premiers tirages.
On rappelle qu'en `Scilab`, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,k)` renvoie un entier aléatoire compris entre 1 et k. Recopier et compléter les lignes à pointillés du script `Scilab` ci-dessous afin qu'il simule la variable aléatoire X_2 :

```
function X2 = simulation ()
    tirage1 = grand(1, 1, 'uin', 1, 3)
    if tirage1 < 3 then
        res1 = 1
        tirage2 = grand(1, 1, 'uin', 1, 4)
        if tirage2 == 1 then res2 = 1
        else res2 = 0
        end
    else
        res1 = 0
        tirage2 = ...
        if tirage2 < 3 then res2 = ...
        else res2 = ...
        end
    end
    X2 = res1 + res2
endfunction
```

Question rajoutée : déterminer de manière mathématique l'espérance de la variable X_2. Retrouver ce résultat par une simulation.

Exercice 4 *extrait Ecricome 2019*

Soit g la fonction numérique réelle définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x - 1 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. **a.** Calculer la limite de g en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

b. Montrer que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$. En déduire la limite de g en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de g sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

3. **a.** Démontrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.

b. Étudier la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (D).

4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$

b. Compléter l'algorithme de dichotomie ci-dessous écrit à l'aide de `Scilab` afin qu'il affiche un encadrement de α à 10^{-2} près lorsque a et b sont choisis tels que $\alpha \in [a,b]$.

```
function y = g(x)
    y = ...
endfunction
a = input('Entrer la valeur de a : ')
b = input('Entrer la valeur de b : ')
while b - a ...
    m = ...
    if g(a)*g(m) <= 0 then
       b = ...
    else
       ...
    end
end
disp(...)
```

c. Le programme `Scilab` affiche `0.88` comme résultat. Dans un même repère orthonormé, placer le réel α sur l'axe des abscisses, tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite (D).