Otimização em Python

- Programação Linear
- Linear Inteira-Mista
- Não Linear
- Não Linear Inteira-Mista
- Heurísticas (GA e Particle Swarm)
- Constraint Programming

Rafael Silva Pinto

rafaelcxc@gmail.com

www.linkedin.com/in/rafaelspinto

Agenda

- Instalando Python e Bibliotecas
- Começando com Python
- Programação Linear (LP)
- Explorando o Pyomo
- Explorando o Or-Tools
- Programação Linear Inteira-Mista (MILP)
- Programação Não Linear (NLP)
- Programação Não Linear Inteira-Mista (MINLP)
- Heurísticas (GA e Particle Swarm)
- Constraint Programming

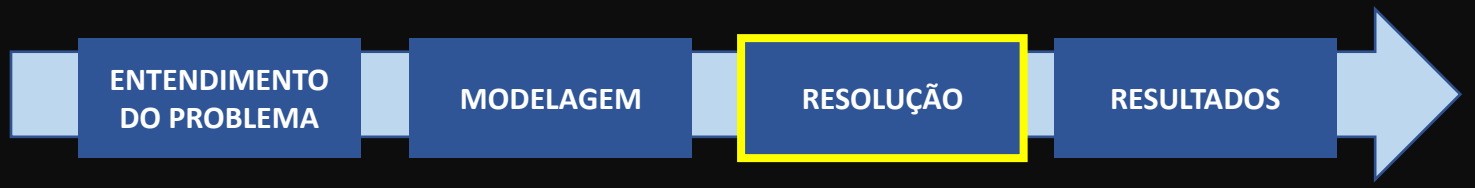
O que é otimização

- Busca pela decisão ótima
- Qualquer problema de planejamento: longo, médio, curto prazo, operacional
- Aplicado a decisões de investimento, operação, definição de rotas, redução de custos...

- Ex.: Desejamos maximizar a receita da venda de 2 produtos (x e y), sendo que cada um custa 1 real. Qual a produção diária necessária?

  Conhecemos as seguintes restrições de operação
  2y <= x+8 (tempo de produção)
  2x + y <= 14 (matéria prima)
  2x <= y+10 (histórico de venda)
  x,y <= 10 (máximo diário)

$$\max x + y$$
$$-x + 2y \leq 8$$
$$2x + y \leq 14$$
$$2x - y \leq 10$$
$$0 \leq x \leq 10$$
$$0 \leq y \leq 10$$



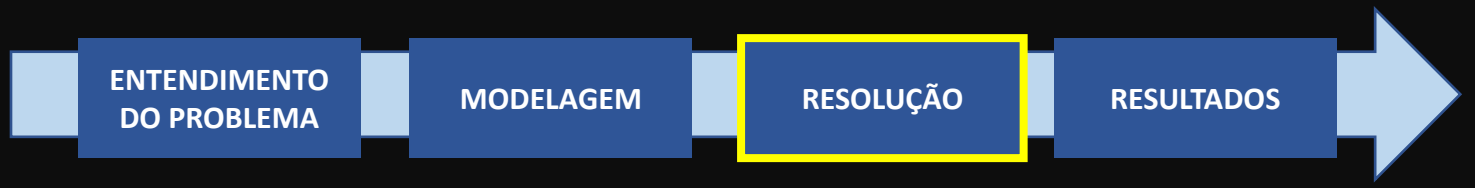
O que é otimização

- Busca pela decisão ótima
- Qualquer problema de planejamento: longo, médio, curto prazo, operacional
- Aplicado a decisões de investimento, operação, definição de rotas, redução de custos...

- Ex.: Desejamos maximizar a receita da venda de 2 produtos (x e y), sendo que cada um custa 1 real. Qual a produção diária necessária?

  Conhecemos as seguintes restrições de operação
  2y <= x+8 (tempo de produção)
  x (2 + y) <= 14 (matéria prima)
  2x <= y+10 (histórico de venda)
  x,y <= 10 (máximo diário)

$$\max x + y$$
$$-x + 2y \leq 8$$
$$2x + yx \leq 14$$
$$2x - y \leq 10$$
$$0 \leq x \leq 10$$
$$0 \leq y \leq 10$$



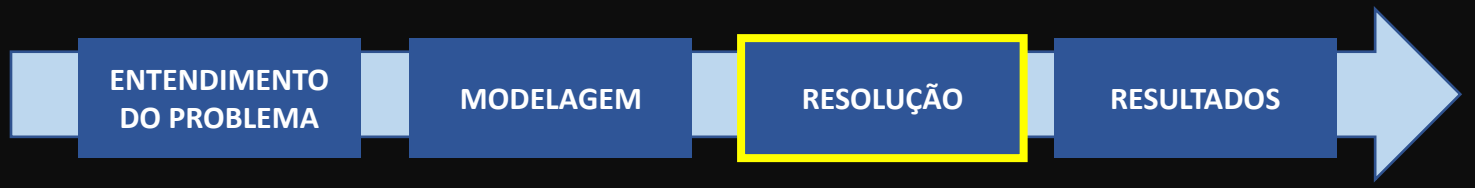
O que é otimização

- Busca pela decisão ótima
- Qualquer problema de planejamento: longo, médio, curto prazo, operacional
- Aplicado a decisões de investimento, operação, definição de rotas, redução de custos...

- Ex.: Desejamos maximizar a receita da venda de 2 produtos (x e y), sendo que cada um custa 1 real. Qual a produção diária necessária?

  Conhecemos as seguintes restrições de operação
  2y <= x+8 (tempo de produção)
  2x + y <= 14 (matéria prima)
  2x <= y+10 (histórico de venda)
  x,y <= 10 (máximo diário)

$$\max x + y$$
$$-x + 2y \leq 8$$
$$2x + y \leq 14$$
$$2x - y \leq 10$$
$$0 \leq x \leq 10$$
$$0 \leq y \leq 10$$
x e y inteiros



Instalando Python e Bibliotecas

Formas de começar com Python

WinPython

Portátil

https://winpython.github.io/

Anaconda

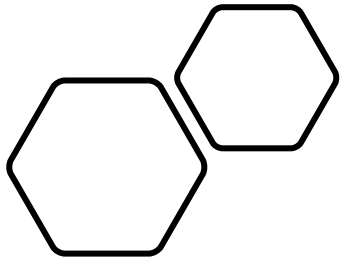
Criação e gestão de ambientes
https://www.anaconda.com/

Instalação Python

Nativa e mais recomendada (opinião pessoal)

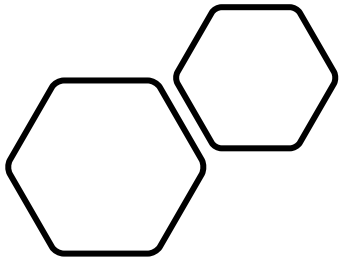
https://www.python.org/

Instalando Python



- Windows:
  - Acessar https://www.python.org/
  - Fazer download e instalar
  - Checar instalação
  - Atualizar PIP
- Linux
  - Verificar versão:
    python --version

Bibliotecas

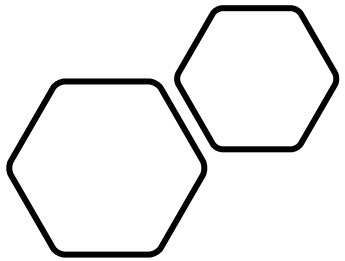


- Prompt de Comando:
  pip install BIBLIOTECA

IDE Spyder

pip install spyder

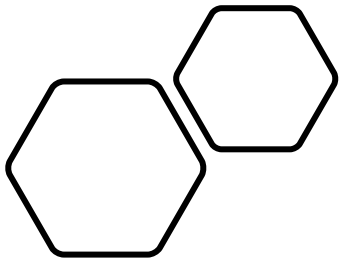
Jupyter Notebook



pip install jupyterlab

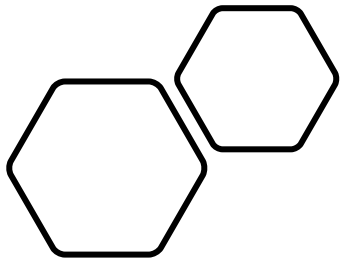
Começando com Python

Começando com Python



Arrays
Tuplas
Dicionários

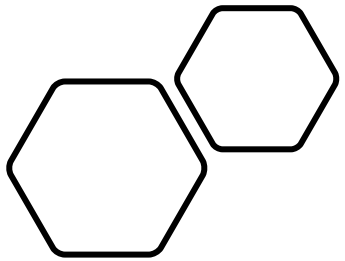
Começando com Python



If
For
While

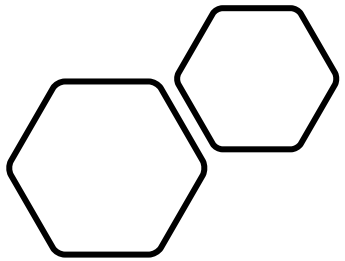
Comandos inline

Começando com Python



Functions
Classes

Começando com Python

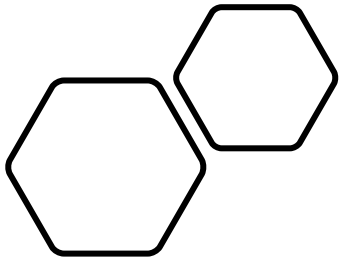


Numpy

Começando com Python

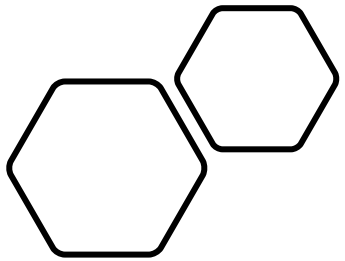
Pandas

Começando com Python



Pandas
ler Excel
E algumas funções

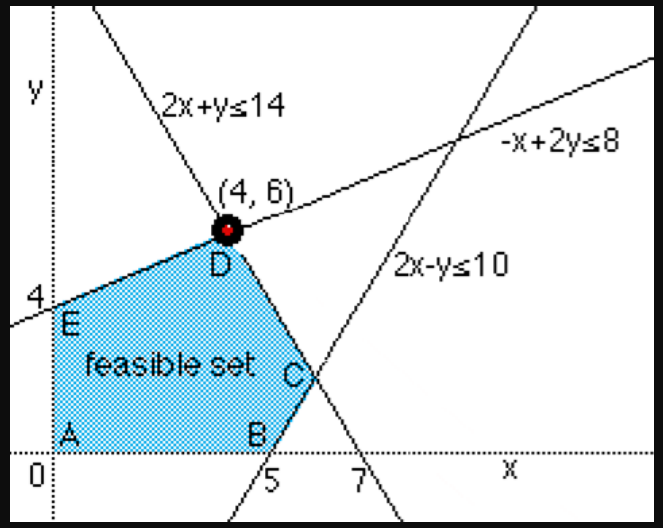
Começando com Python



Gráficos com Matplotlib

Programação Linear (LP)

Introdução



$$\max x + y$$

$$-x + 2y \leq 8$$

$$2x + y \leq 14$$

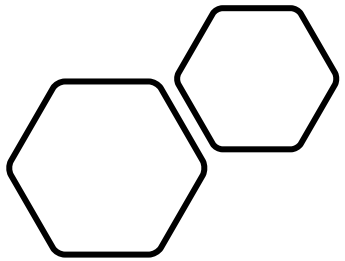
$$2x - y \leq 10$$

$$0 \leq x \leq 10$$

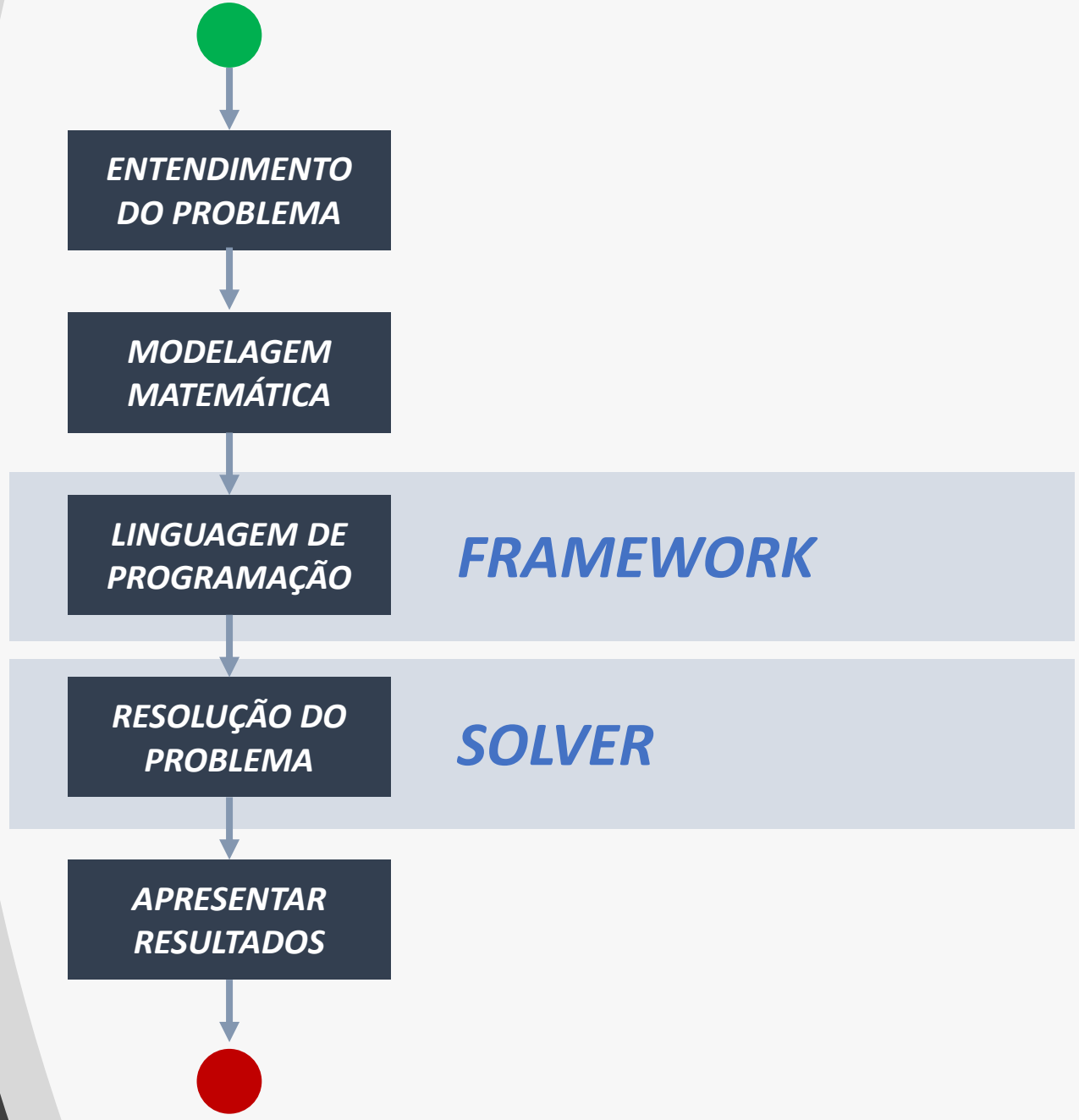
$$0 \leq y \leq 10$$

Programação Linear

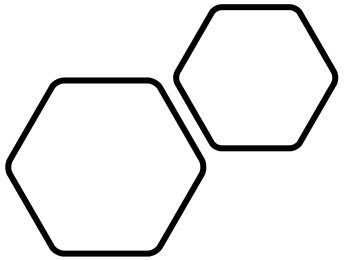
Solver
vs
Framework



Solver vs Framework



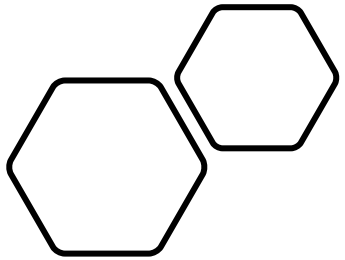
Programação Linear



Or-Tools

https://developers.google.com/optimization

Programação Linear



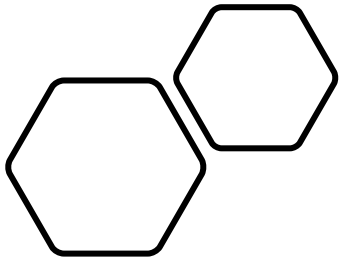
Scip

https://www.scipopt.org/

Fazer download e instalar SCIP
Instalar a biblioteca PYSCIPOPT
Configurar a variável de ambiente SCIPOPTDIR

Documentação da biblioteca
https://github.com/SCIP-Interfaces/PySCIPOpt

Programação Linear

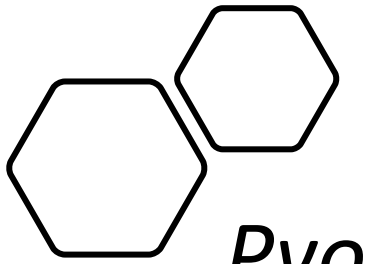


Gurobi

https://www.gurobi.com/

Fazer download e instalar Gurobi
Ativar Gurobi
Instalar a biblioteca gurobipy

Programação Linear



Pyomo

1) pip install pyomo

2) instale um solver

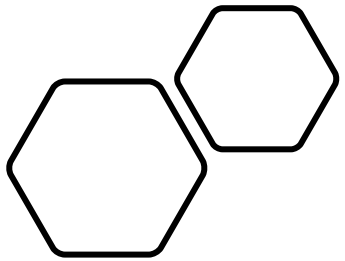
ex.: Gurobi, SCIP ou **GLPK**:

GLPK for Windows
http://sourceforge.net/projects/winglpk/

Add GLPK e GLPK/win64
na variável de ambiente PATH

Documentação
https://pyomo.readthedocs.io/

Programação Linear

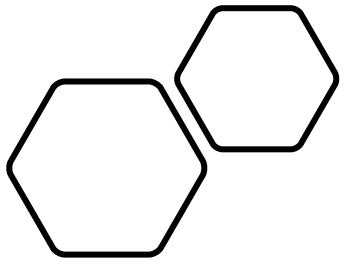


PuLP

pip install cython
pip install pulp

Mais informações em
https://github.com/coin-or/pulp

Programação Linear



Qual solver e framework escolher

Qual solver e framework escolher

Framework (AML)	Problemas Lineares	Problemas Não Lineares	Facilidade de iniciar	Facilidade de configurar um novo solver	Facilidade de troca de solver
Pyomo	X	X	MÉDIA	ALTA	ALTA
Ortools	X		MUITO ALTA	BAIXA	ALTA
PuLP	X		ALTA	ALTA	MÉDIA
SCIP	X	X	ALTA	NÃO É POSSÍVEL	NÃO É POSSÍVEL
SciPy	X	X	BAIXA	MÉDIA	MÉDIA

Solver	Problemas Lineares	Problemas não lineares	Grátis / Comercial
Gurobi	X		COMERCIAL
Cplex	X		COMERCIAL
CBC	X		GRÁTIS
GLPK	X		GRÁTIS
IPOPT		X	GRÁTIS
SCIP	X	X	GRÁTIS
Baron		X	COMERCIAL

Exercício Proposto

Imprima o resultado obtido e o tempo de processamento para resolução do seguinte problema de otimização, usando o pyomo.

$$\min -4x - 2y$$

$$x + y \leq 8$$

$$8x + 3y \geq -24$$

$$-6x + 8y \leq 48$$

$$3x + 5y \leq 15$$

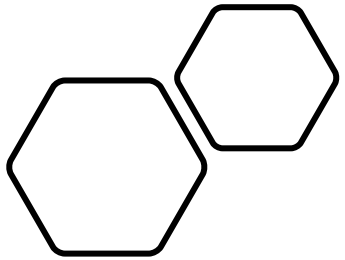
$$x \leq 3$$

$$y \geq 0$$

Observações: Use a biblioteca *time* para computar o tempo de processamento

Explorando o Pyomo

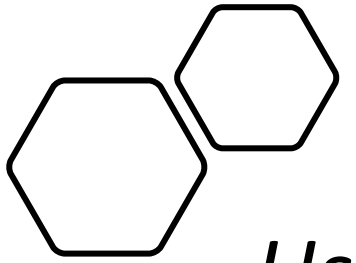
Explorando o Pyomo



Trabalhando com diferentes solvers

CBC:
https://projects.coin-or.org/Cbc
https://bintray.com/coin-or/download/Cbc/c

Explorando o Pyomo

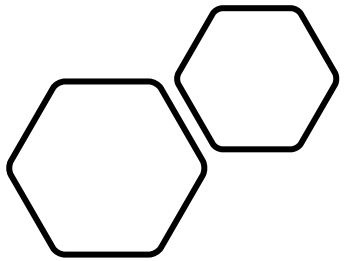


Usando o Gurobi e Cplex no Pyomo

Gurobi:
- Instale e ative (veja a aula de LP: Gurobi)
- No Pyomo: opt = SolverFactory(‘gurobi')

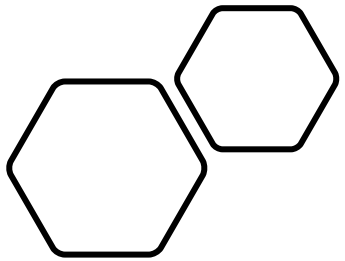
CPLEX
- Acesse https://www.ibm.com/br-pt/products/ilog-cplex-optimization-studio
- Login, download e instalar
- No Pyomo: opt = SolverFactory(‘cplex')

Explorando o Pyomo



Trabalhando com vetores e somatórios

Explorando o Pyomo



Imprimindo modelo, restrições e resumo do Pyomo

Vetores, matrizes e somatórios

Geração de energia

ID	Custo	Limite Geração
0	0,10	20 kW
1	0,05	10 kW
2	0,30	40 kW
3	0,40	50 kW
4	0,01	5 kW

Pontos de consumo

ID	Potência consumida
0	50 kW
1	20 kW
2	30 kW

***Somente os geradores 0 e 3 podem atender o ponto de consumo 0**

$$\min \sum_{i_g=0}^{4} C_g(i_g) P_g(i_g)$$

$$\sum_{i_g=0}^{4} P_g(i_g) = \sum_{i_c=0}^{2} P_c(i_c)$$

$$P_c(0) \leq P_g(0) + P_g(3)$$

$$P_g(i_g) \geq 0 \quad \forall i_g$$

$$P_g(i_g) \leq P_g(i_g)^{LIM} \quad \forall i_g$$

Vetores, matrizes e somatórios

Geração de energia

ID	Custo	Limite Geração
0	0,10	20 kW
1	0,05	10 kW
2	0,30	40 kW
3	0,40	50 kW
4	0,01	5 kW

Pontos de consumo

ID	Potência consumida
0	50 kW
1	20 kW
2	30 kW

***Somente os geradores 0 e 3 podem atender o ponto de consumo 0**

$$\min \sum_{i_g=0}^{4} C_g(i_g) P_g(i_g)$$

$$\sum_{i_g=0}^{4} P_g(i_g) = \sum_{i_c=0}^{2} P_c(i_c)$$

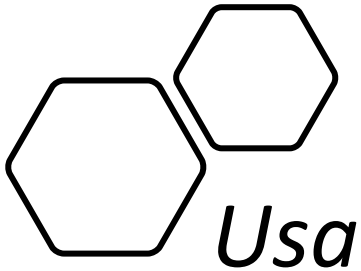
$P_c(i_c) \leq \sum_{i_g \in \Omega_{i_g}^{i_c}} P_g(i_g) \; \forall i_c$ com dependência

$$P_g(i_g) \geq 0 \quad \forall i_g$$

$$P_g(i_g) \leq P_g(i_g)^{LIM} \quad \forall i_g$$

Explorando o Or-Tools

Explorando Or-Tools



Usando o Gurobi e SCIP

Atenção!
Diversas pessoas reportam dificuldades em fazer essa configuração.

Erros podem acontecer por incompatibilidade de versões entre o Python, Visual Studio e Ortools.
Se você tiver dificuldades, sugiro que use o Pyomo

Explorando Or-Tools

Usando Gurobi e Scip no Or-Tools

Garanta que o Gurobi e Scip estão instalados

- pip install wheel

- Confira https://developers.google.com/optimization/install/python/source_windows

- instale o Git: https://git-scm.com/
- instale o Cmake: https://www.cmake.org/
- instale o Microsoft Visual Studio 2019 (pacote desenvolvimento C++)

- abra o **x64 Native Tools Command Prompt**
- cd C:\
- git clone https://github.com/google/or-tools
- cd or-tools
- tools\make third_party
- edit Makefile.local
- tools\make python
- tools\make install_python

Explorando Or-Tools

Vetores, Matrizes e somatório

Vetores, matrizes e somatórios

Geração de energia

ID	Custo	Limite Geração
0	0,10	20 kW
1	0,05	10 kW
2	0,30	40 kW
3	0,40	50 kW
4	0,01	5 kW

Pontos de consumo

ID	Potência consumida
0	50 kW
1	20 kW
2	30 kW

***Somente os geradores 0 e 3 podem atender o ponto de consumo 0**

$$\min \sum_{i_g=0}^{4} C_g(i_g) P_g(i_g)$$

$$\sum_{i_g=0}^{4} P_g(i_g) = \sum_{i_c=0}^{2} P_c(i_c)$$

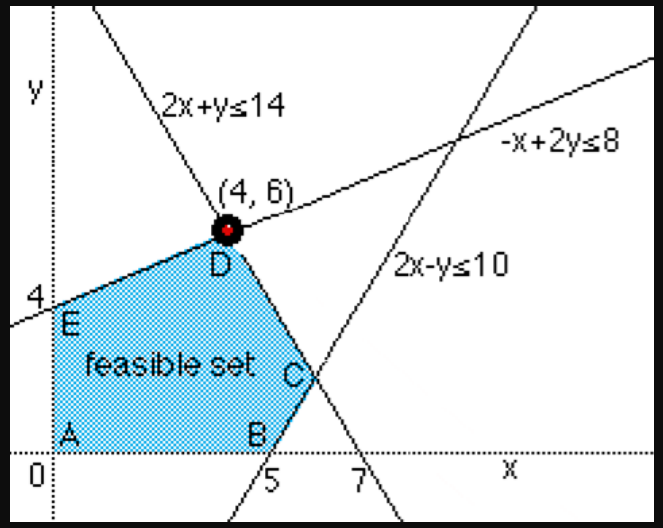
$P_c(i_c) \leq \sum_{i_g \in \Omega_{i_g}^{i_c}} P_g(i_g)\ \forall i_c$ com dependência

$$P_g(i_g) \geq 0 \quad \forall i_g$$

$$P_g(i_g) \leq P_g(i_g)^{LIM} \quad \forall i_g$$

Programação Linear Inteira-Mista (MILP)

Introdução



$$\max x + y$$

$$-x + 2y \leq 8$$

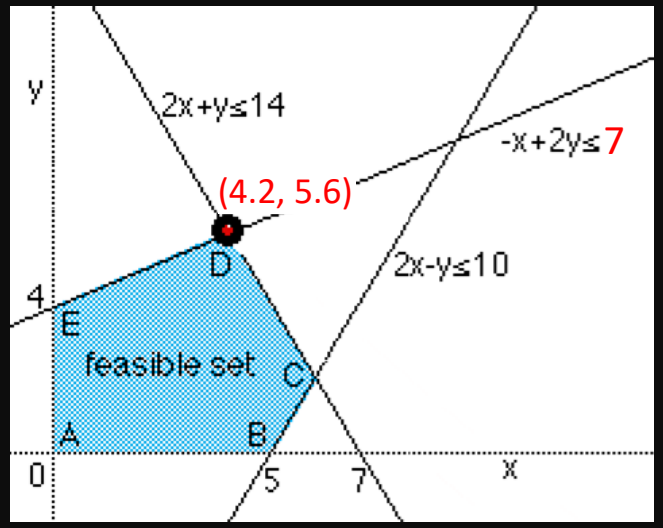
$$2x + y \leq 14$$

$$2x - y \leq 10$$

$$0 \leq x \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 10$$

Introdução



$$\max x + y$$

$$-x + 2y \leq 7$$

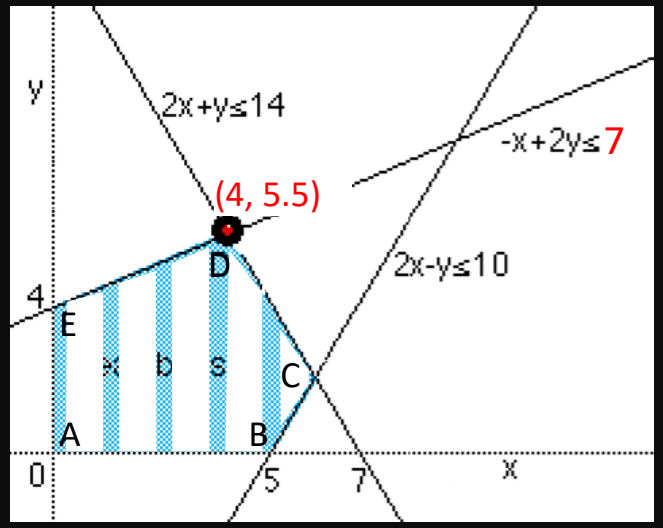
$$2x + y \leq 14$$

$$2x - y \leq 10$$

$$0 \leq x \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 10$$

Introdução



$$\max x + y$$

$$-x + 2y \leq 7$$

$$2x + y \leq 14$$

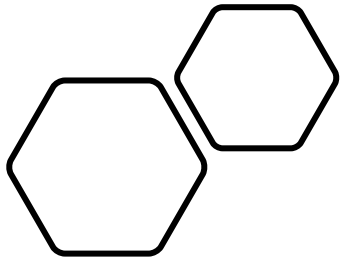
$$2x - y \leq 10$$

$$0 \leq x \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 10$$

x como inteiro

MILP

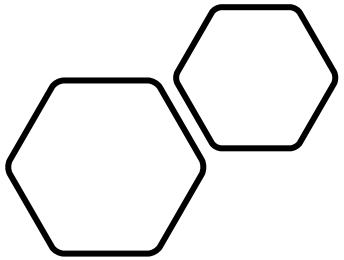


Pyomo

model.x = pyo.Var(within=Integers)

https://pyomo.readthedocs.io/en/stable/pyomo_modeling_components/Sets.html#predefined-virtual-sets

MILP

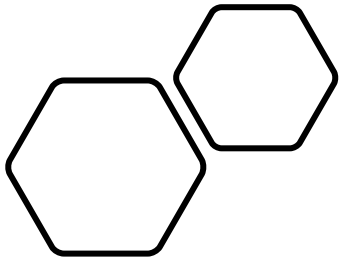


Ortools

Solver:
CBC_MIXED_INTEGER_PROGRAMMING
GUROBI_MIXED_INTEGER_PROGRAMMING

x = solver.IntVar(0,10,'x’)

MILP



SCIP

x = model.addVar('x', vtype='INTEGER')

Exercício Proposto

Imprima o resultado obtido e o tempo de processamento para resolução do seguinte problema de otimização, usando o pyomo.

$$\min \sum_{i=1}^{5} x_i + y$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i + y \leq 20$$

$$x_i + y \geq 15 \text{ , } \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{5} i \cdot x_i \geq 10$$

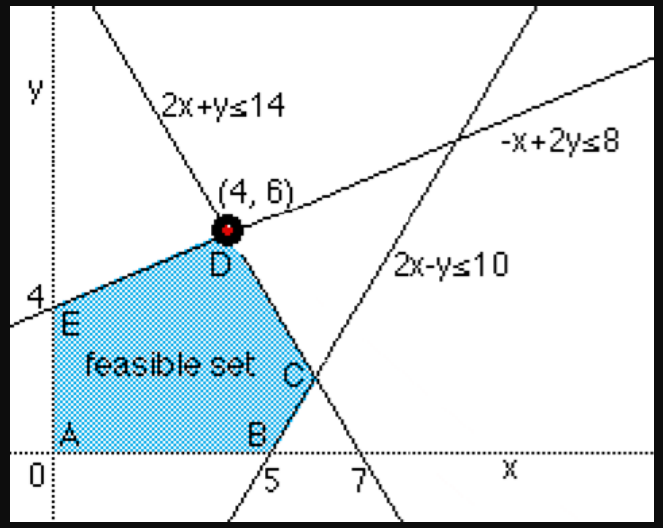
$$x_5 + 2y \geq 30$$

$$x_i, y \geq 0$$

x_i inteiro, $\forall i$

Programação Não Linear (NLP)

Introdução



$$\max x + y$$

$$-x + 2y \leq 8$$

$$2x + y \leq 14$$

$$2x - y \leq 10$$

$$0 \leq x \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 10$$

Introdução

$$\max x + xy$$

$$-x + 2yx \leq 8$$

$$2x + y \leq 14$$

$$2x - y \leq 10$$

$$0 \leq x \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 10$$

NLP

Pyomo: IPOPT

Pesquise por ipopt binaries
https://www.coin-or.org/download/binary/Ipopt

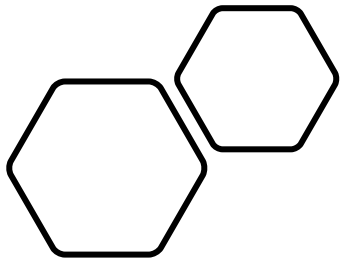
Descompacte C:\

Pyomo

```
opt = SolverFactory(
‘ipopt',
executable='C:\\ipopt\\bin\\ipopt.exe')
```

NLP

SCIP



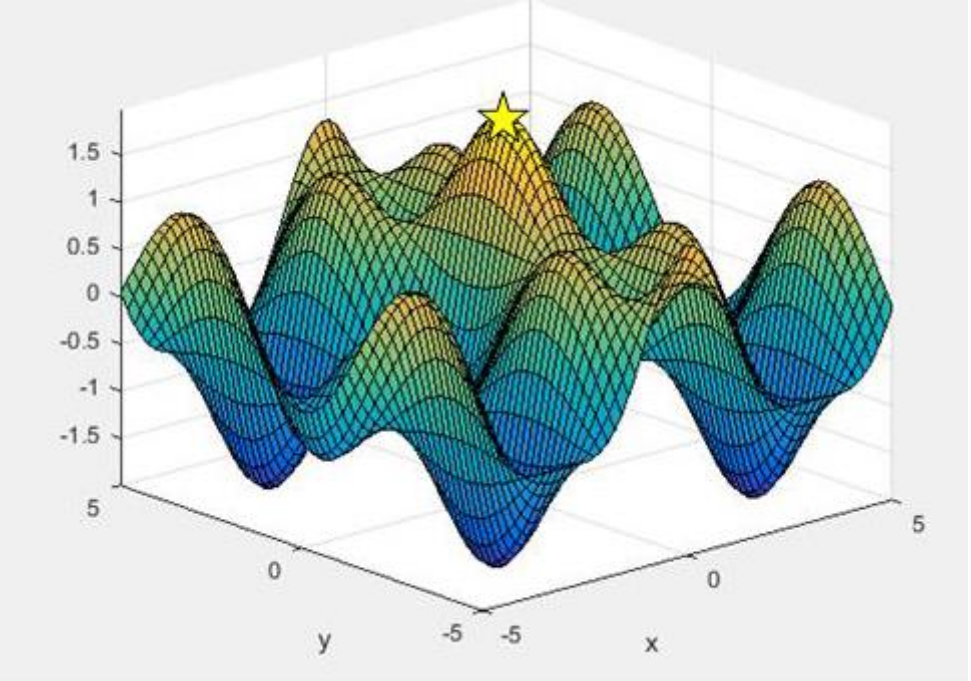
Exercício Proposto

Imprima o resultado obtido e o tempo de processamento para resolução do seguinte problema de otimização, usando o pyomo.

$$\max \cos(x+1) + \cos(x)\, cos(y)$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$-5 \leq y \leq 5$$



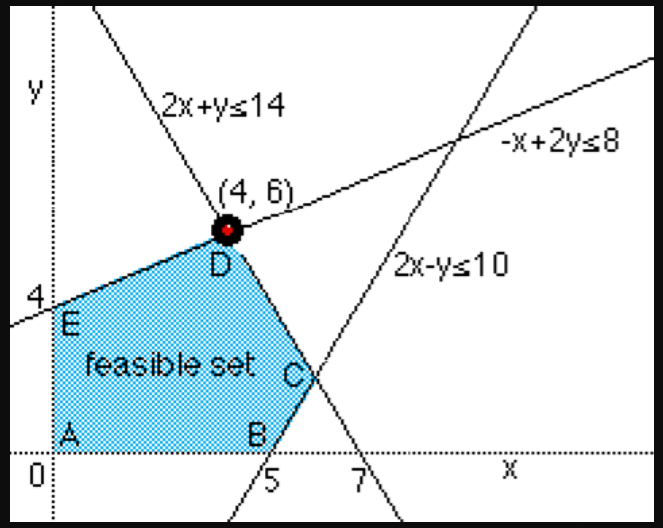
Aproveite e explore as funções

model.x = pyo.Var(initialize=N)

opt.options[‘tol’] = N

Programação Não Linear Inteira-Mista (MINLP)

Introdução



$$\max x + y$$

$$-x + 2y \leq 8$$

$$2x + y \leq 14$$

$$2x - y \leq 10$$

$$0 \leq x \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 10$$

Introdução

$$\max x + xy$$

$$-x + 2yx \leq 8$$

$$2x + y \leq 14$$

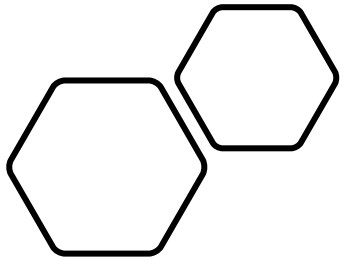
$$2x - y \leq 10$$

$$0 \leq x \leq 10$$

$$0 \leq y \leq 10$$

x inteiro

MINLP



Pyomo: Couenne

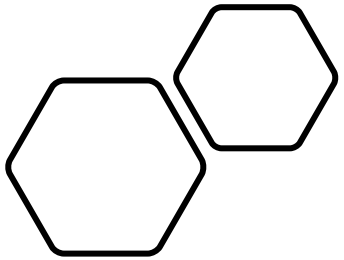
https://projects.coin-or.org/Couenne

https://www.coin-or.org/download/binary/Couenne/

Baixar e descompactar em C:

```
opt = SolverFactory('couenne',
executable='C:\\couenne\\bin\\couenne.exe')
```

MINLP

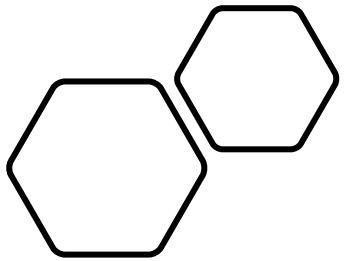


Decomposição Pyomo + MindtPy

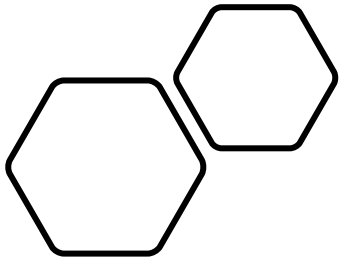
```
opt = SolverFactory('mindtpy’)

opt.solve(model, mip_solver=‘gurobi',
nlp_solver='ipopt')
```

MINLP

SCIP



MINLP

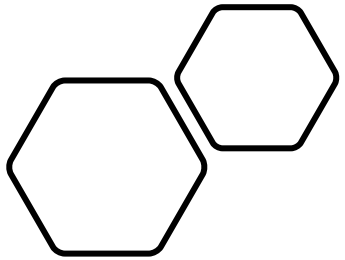


Algoritmo Genético

pip install geneticalgorithm

https://pypi.org/project/geneticalgorithm/

MINLP



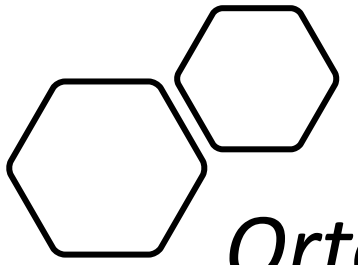
Particle Swarm

pip install pyswarm

https://pythonhosted.org/pyswarm/

Constraint Programming (CP)

CP



Ortools

https://developers.google.com/optimization/cp/integer_opt_cp

Maximize $2x + 2y + 3z$
subject to

$x + {}^{7}/_{2}\,y + {}^{3}/_{2}\,z$	$\leq$	25
$3x - 5y + 7z$	$\leq$	45
$5x + 2y - 6z$	$\leq$	37
x, y, z	$\geq$	0

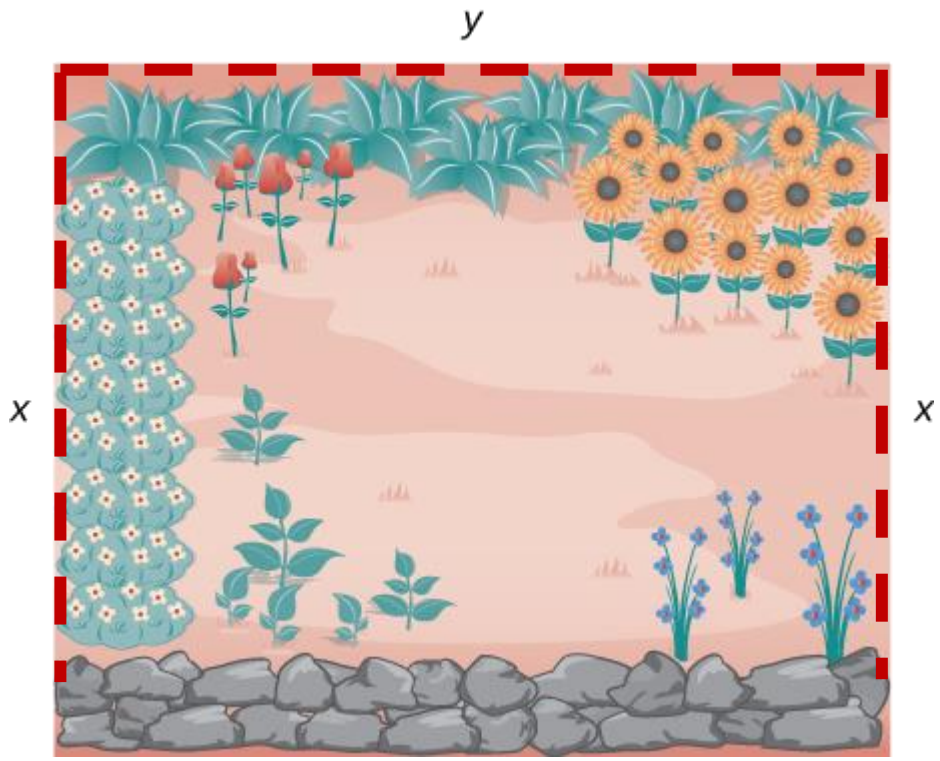
x, y, z integers

Exemplos Práticos

Cercar um Jardim

Qual a maior área que podemos cercar de um Jardim usando uma cerca de até 100 metros? Defina também as dimensões desse Jardim.

Obs.: O jardim já é cercado por um muro de pedra em uma de suas extremidades.

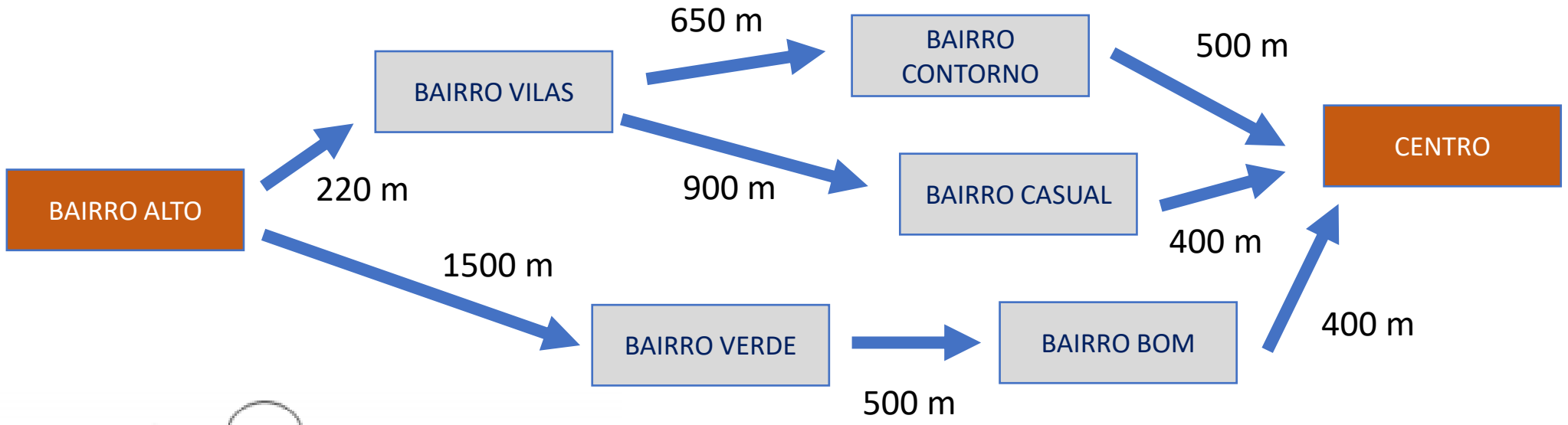


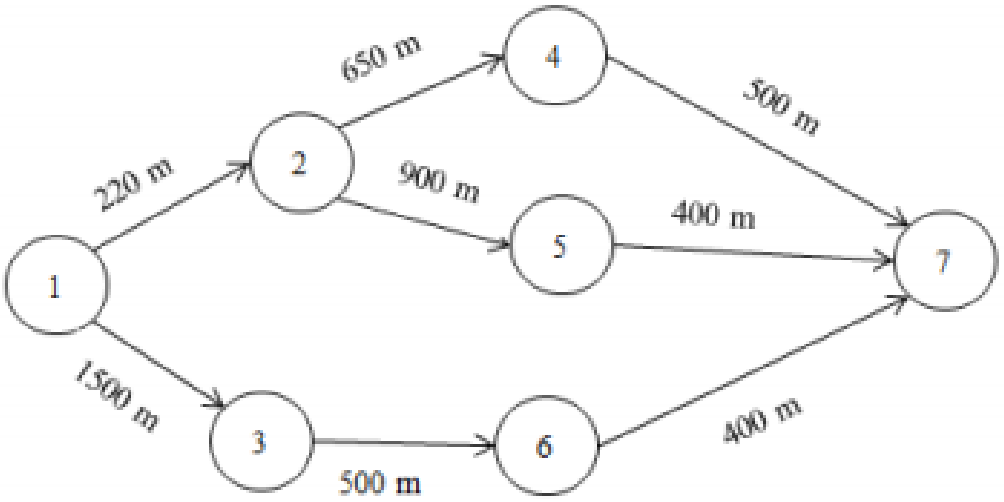
$$\max xy$$

$$2x + y \leq 100$$

$$x, y > 0$$

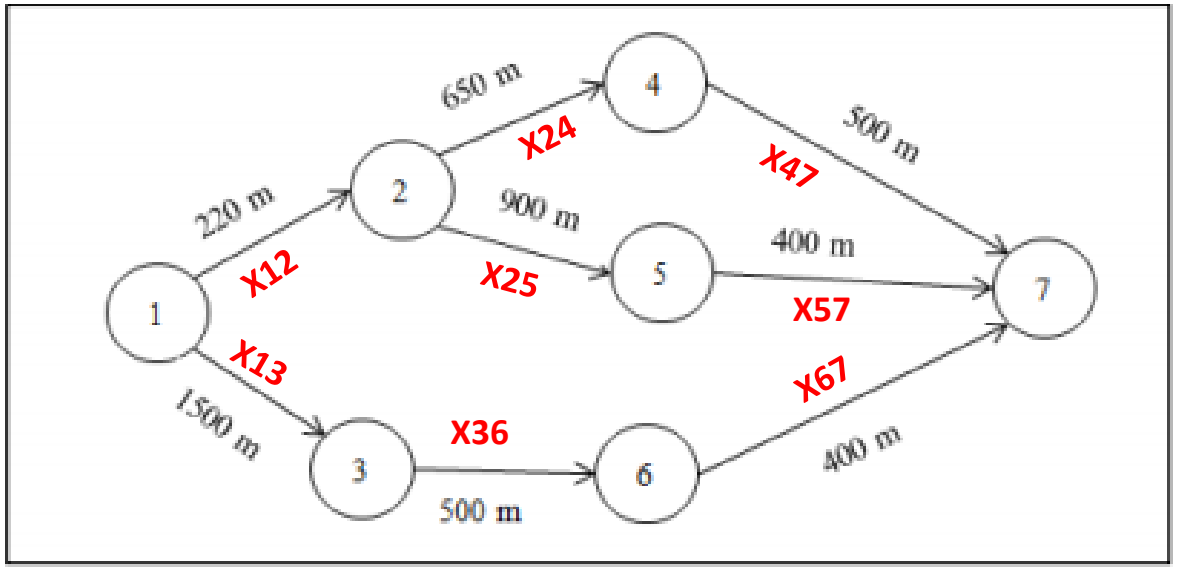
Otimização de Rota





Otimização de Rota

Qual a melhor rota entre os pontos 1 e 7?



$$\min \sum x_{ij} D_{x_{ij}}$$

$$\sum_{sai} x_{ij} = 1 \quad nó\ origem$$

$$\sum_{entra} x_{ij} = 1 \quad nó\ destino$$

$$\sum_{sai} x_{ij} \leq 1 \quad \forall nó/(origem, destino)$$

$$\sum_{entra} x_{ij} \leq 1 \quad \forall nó/(origem, destino)$$

$$\sum_{entra} x_{ij} = \sum_{sai} x_{ij} \quad \forall nó/(origem, destino)$$

$$todo\ x_{ij}\ binário$$

Maximizar Receita

Uma locadora de carros deseja maximizar sua receita.
Pelo histórico de vendas, sabe-se que praticando um valor de aluguel (p) entre 50 e 200 reais, o número de carros alugados por dia é N(p) = 1001-5p.

Qual o valor de aluguel que maximiza a receita diária?
E qual o número esperado de carros a serem alugados?

$$\max p\ N$$

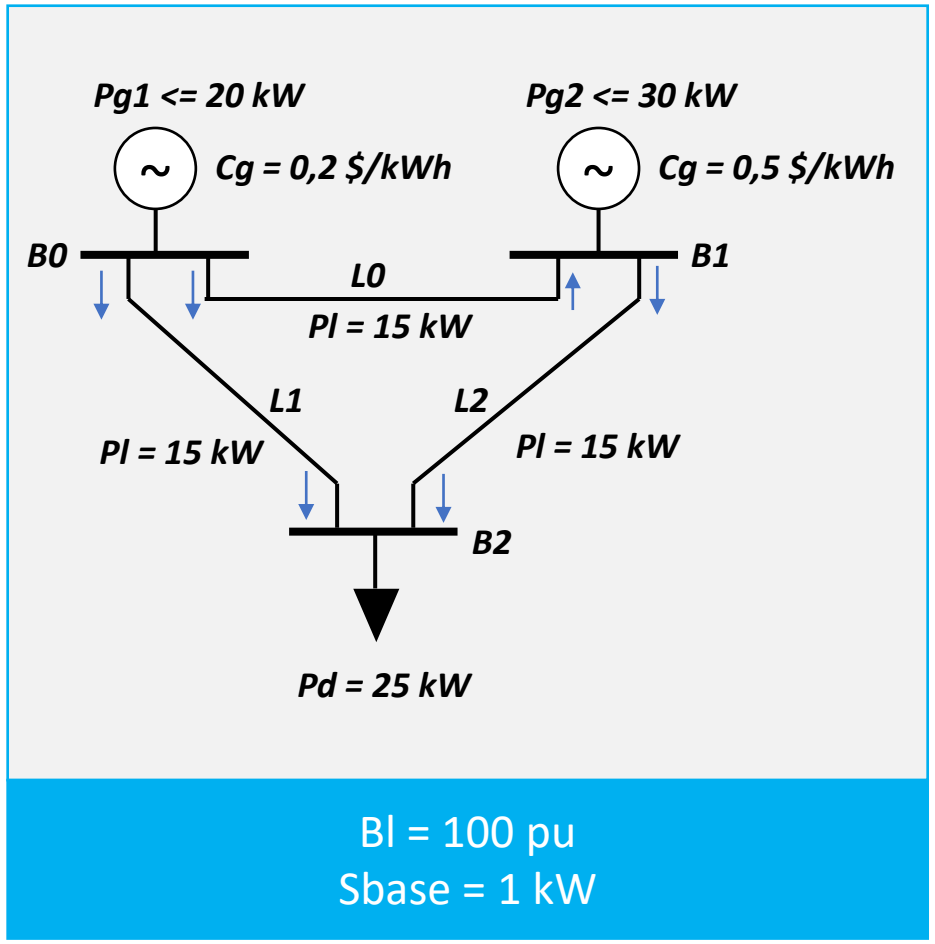
$$N = 1001 - 5p$$

$$50 \leq p \leq 200$$

$$N\ inteiro$$

Fluxo de Potência Ótimo Linear: Sistemas Elétricos

Quais são os valores ótimos de geração e o fluxo de potência nas linhas de transmissão do sistema abaixo?



$$\min \sum_{g} C_g P_g$$

$$\sum_{g \in \Omega_n} P_g - \sum_{l \in \Omega_{n=l(s)}} P_l + \sum_{l \in \Omega_{n=l(r)}} P_l = \sum_{d \in \Omega_n} P_d \quad \forall n$$

$$P_l = B_l(\theta_{l(n=s)} - \theta_{l(n=r)}) \quad \forall l$$

$$0 \leq P_g \leq P_g^{max} \quad \forall g$$

$$-P_l^{max} \leq P_l \leq P_l^{max} \quad \forall l$$

$$-\pi \leq \theta_n \leq \pi \quad \forall n$$

$$\theta_n = 0 \quad n: ref(0)$$

Parabéns!!

Desafios:
https://math.libretexts.org/Courses/Mount_Royal_University/MATH_1200%3A_Calculus_for_Scientists_I/3%3A_Applications_of_Derivatives/3.6%3A_Applied_Optimization_Problems