Coeficientes de Árvores Bell

Glaucio Gomes de Magalhães Melo[1], **Emerson Alexandre de Oliveira Lima**[1]

[1] Universidade Católica de Pernambuco
Rua do Príncipe 526, Boa Vista, CEP 50050-900, Recife-PE
Fone: 55 81 3216-4000 - Fax: 55 81 3423-0541

`glaucio.melo@gmail.com, eal@dei.unicap.br`

Abstract. *The purpose of this paper is show in details the Bell Trees' properties and demonstrate the relation between the Stirling numbers of the first kind and the expression's coefficients of the nodes on each level of the Bell Tree.*

Resumo. *O propósito deste trabalho é apresentar em detalhes as propriedades das Árvores Bell e demonstrar a relação entre os números de Stirling de primeira ordem e os coeficientes das expressões dos nós de cada nível da Árvore Bell.*

1. Introdução

Nos problemas de partição de conjuntos n-dimensionais, uma estrutura combinatorial formaliza a disposição de todas as partições. O algoritmo *Next Partition of an n-Set* [3] obtém todas as partições de forma seqüencial através de uma busca em largura no n-ésimo nível dessa árvore. A estrutura descrita em [3] relaciona cada nó com uma partição correspondente, onde o k-ésimo filho à direita da árvore terá $k + 1$ descendentes, enquanto que os nós anteriores terão k descendentes. Árvores Bell [2] possuem a mesma estrutura da árvore descrita em [3], com a diferença de que as propriedades são diferentes para a criação da estrutura, uma vez que as Árvores Bell estão diretamente relacionadas com as posições específicas da lista completa de partições possíveis. Este trabalho é a complementação da seção entitulada *"Bell Trees"* [2] do artigo que apresenta uma família de algoritmos combinatoriais. Dentre estes algoritmos encontra-se o de partição serial e a seção que formaliza o problema a partir de uma estrutura combinatorial definida especificamente para este algoritmo. O propósito do presente trabalho é o desenvolvimento das expressões matemáticas empregadas para o cálculo dos nós de Árvores Bell, como também a demonstração das equações expostas no presente trabalho.

2. Árvores Bell

De um modo geral, define-se Árvores Bell como uma estrutura cujo valores dos nós são formados exclusivamente por números de Bell e constantes inteiras multiplicativas associadas a esses números.

Seja $E_{w,k}$ o valor associado a um nó da árvore, de índice w e z termos, segue a expressão:

$$E_{w,z} = \sum_{j=1}^{z} a_j B_j \tag{1}$$

Em que a_j e B_j representam a constante inteira e o número de Bell, respectivamente. Números de Bell são definidos por

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \tag{2}$$

Onde $\left\{ {n \atop k} \right\}$ é o número de Stirling de segunda ordem, o qual é definido por [1]:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \tag{3}$$

Para o caso de partição de conjuntos, é visto em [2] a definição das propriedades do nó atual para a criação dos seus descendentes, definido por:

$$E_{w,z} \rightarrow \begin{cases} E_{w,z} - (k-1)E_{w-1,z} & \text{para o } k\text{-ésimo filho} \\ E_{w-1,k} & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4}$$

O valor do primeiro nó é inicializado com B_n, sendo n o tamanho do conjunto a ser particionado. Os nós subseqüentes são criados a partir da relação de recorrência mostrada na Eq. 4. A tabela 1 mostra os valores dos primeiros nós da árvore para uma Árvore Bell com 5 níveis, contabilizados de cima para baixo, da esquerda para a direita.

Tabela 1: Valores dos primeiros nós da Árvore Bell

Nós	Expressões
1	B_5
2	B_4
3	$B_5 - B_4$
4	B_3
5,6,7	$B_4 - B_3$
8	$(B_5 - B_4) - 2(B_4 - B_3)$
9	(B_2)
10,11,12,14,15,17,18	$(B_3 - B_2)$
13,16,19,20,21,22	$(B_4 - B_3) - 2(B_3 - B_2)$
23	$(B_5 - B_4) - 2(B_4 - B_3) - 3[(B_4 - B_3) - 2(B_3 - B_2)]$

Desenvolvendo as expressões dos nós 3, 8, 13, 23, e o último nó da árvore, segue os valores:

$$\begin{array}{l} B_5 \\ B_5 - B_4 \\ B_5 - 3B_4 + 2B_3 \\ B_5 - 6B_4 + 11B_3 - 6B_2 \\ B_5 - 10B_4 + 35B_3 - 50B_2 + 24B_1 \end{array} \tag{5}$$

Observando apenas os coeficientes que envolvem as expressões, tem-se o triângulo de Stirling de primeira ordem com os sinais alternados. A seqüência dos nós da árvore mencionados em 5 podem ser reescritas na forma:

$$\begin{aligned}
&\left[{1 \atop 1}\right] B_5 \\
&\left[{2 \atop 2}\right] B_5 - \left[{2 \atop 1}\right] B_4 \\
&\left[{3 \atop 3}\right] B_5 - \left[{3 \atop 2}\right] B_4 + \left[{3 \atop 1}\right] B_3 \\
&\left[{4 \atop 4}\right] B_5 - \left[{4 \atop 3}\right] B_4 + \left[{4 \atop 2}\right] B_3 - \left[{4 \atop 1}\right] B_2 \\
&\left[{5 \atop 5}\right] B_5 - \left[{5 \atop 4}\right] B_4 + \left[{5 \atop 3}\right] B_3 - \left[{5 \atop 2}\right] B_2 + \left[{5 \atop 1}\right] B_1
\end{aligned} \tag{6}$$

Os outros nós da árvore comportam-se de modo semelhante ao triângulo em 6, diferenciando-se apenas nos índices dos números de Bell.

No sentido combinatorial, os números de Stirling de primeira ordem denotam o número de possibilidades de n objetos serem arranjados em k ciclos, enquanto que os números de Stirling de segunda ordem tratam do número de partições de n conjuntos em k partes não-vazias [1]. As expressões desenvolvidas neste trabalho são valores inteiros que representam o padrão de repetição pelo qual os índices de saída das partições se comportam, seguindo a saída de dados dos algoritmos *Next Partition of an n-Set* [3] e o *Serial Partition of an n-Set* [2].

Sintetizando as somas apresentadas em cada linha do triângulo, segue a identidade:

$$R^{z,n} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix} B_{z-i} \tag{7}$$

Em que z representa o índice inicial do número de Bell e n o número de termos da expressão. Quando $z = n$, $R^{z,n}$ possuirá apenas uma repetição, indicando o comportamento das últimas partições da lista:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \begin{bmatrix} n \\ n-i \end{bmatrix} B_{n-i} = 1 \tag{8}$$

3. Demonstração

Partindo para a demonstração dos coeficientes dos triângulos, segue a definição do número de Stirling de primeira ordem [1]:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \tag{9}$$

A expressão associada ao k-ésimo termo é o critério-base para o cálculo dos descedentes do nó atual da Árvore Bell. Como consequência da definicação exposta na Eq. 4, o número de termos da expressão aumenta em uma unidade quando se opera com duas expressões $E_{k,z}$ quaisquer à direita da equação. Assim sendo, segue a igualdade:

$$E_{k,z+1} = E_{k,z} - zE_{k-1,z} \tag{10}$$

Se $E_{k,z+1}$ for representado como um coeficiente binomial, segue a relação:

$$\left|\begin{matrix} z+1 \\ k \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} z \\ k \end{matrix}\right| - z\left|\begin{matrix} z \\ k-1 \end{matrix}\right| \tag{11}$$

Colocando em função de $\left|\begin{smallmatrix} z \\ k \end{smallmatrix}\right|$, segue a identidade:

$$\left|\begin{matrix} z \\ k \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} z-1 \\ k \end{matrix}\right| - (z-1)\left|\begin{matrix} z-1 \\ k-1 \end{matrix}\right| \tag{12}$$

Os argumentos quando dispostos como binômios assumem um formato semelhante com o modelo geral de relações de recorrência de dois parâmetros [1]. Sendo assim, segue o modelo exposto na referência [1]:

$$\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right| = (\alpha n + \beta k + \gamma)\left|\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix}\right| + (\alpha' n + \beta' k + \gamma')\left|\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix}\right| \tag{13}$$

Na tabela 1, as expressões dos nós da árvore mostram de modo recorrente o que seria a potência fatorial decrescente, levando em consideração que os números de Bell estejam assumindo o valor de x na expressão:

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)...(x-n+1) \tag{14}$$

Com $x^{\underline{n}}$ possuindo n fatores multiplicativos. Uma importante relação, mostrada em [1] exibe uma outra identidade para $x^{\underline{n}}$:

$$x^{\underline{n}} = \sum_k (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \tag{15}$$

Essa relação é idêntica à mostrada na Eq. 7, com a diferença que os valores referentes à x^k já são conhecidos na efetuação do cálculo, onde esse número é o B_k da Eq. 7.

4. Conclusão

Os coeficientes apresentados nesse artigo indicam que o seu cálculo pode ser caracterizado com relações mais simples que a relação de recorrência concebida originalmente para o problema. Árvores Bell são úteis para mapear as posições específicas do padrão de repetição para partições de conjuntos. Conforme visto em [2] e [3], os valores referentes às partições são os índices em que cada elemento do conjunto ficará contido no seu respectivo subconjunto. O algoritmo para a saída estilizada desses índices é visto em [2], números de Stirling são estudados em [1] e algoritmos seriais são expostos em [2] e [4].

Referências

[1] GRAHAM, R. L., KNUTH, D. E., PATASHNIK, O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, second edition, Addison-Weslay, Reading, Mass., 1994.

[2] MELO, Glaucio G. M., OLIVEIRA-LIMA, Emerson A. Serial and Unserial Combinatorial Families, Journal of Discrete Algorithms, Elsevier, 2005 (Submitted).

[3] NIJENHUIS, A., WILF, H. S. Combinatorial Algorithms for computers and calculators. Academic Press, INC, 1978.

[4] WILF, H. S. East Side, West Side, online version, 2000, http://www.cis.upenn.edu/∼wilf/.