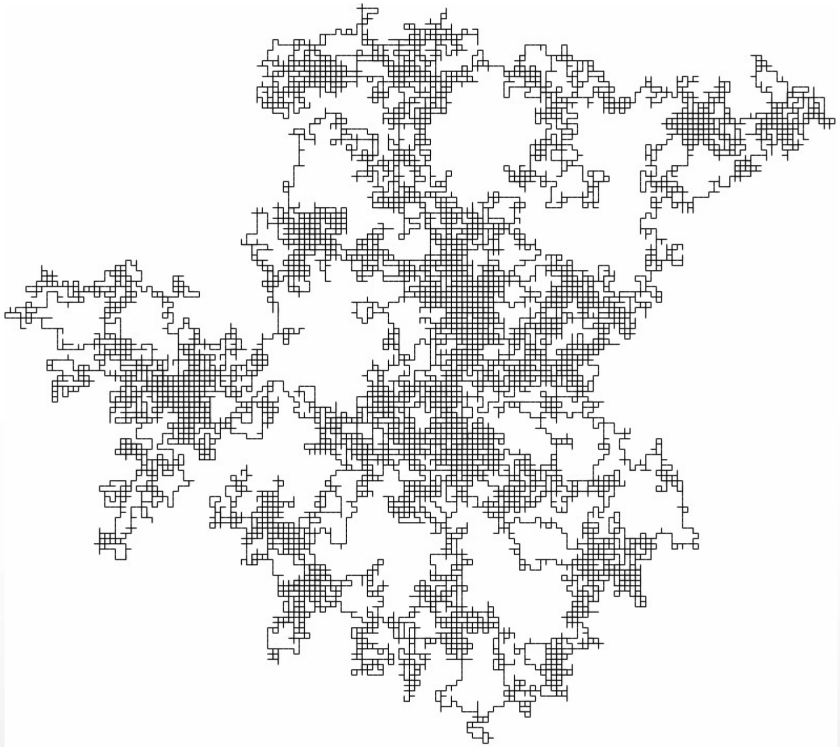
Universidade Federal do Pará
Instituto de Tecnologia -ITEC
Disciplina: IA Bio-Inspirada e Otimização.

Random Walks e Lévy Flights

Profa: Jasmine Araújo.
Prof: Glauco.

Sumário

- Random Variables
- Random Walks
- Lévy Distribution and Lévy Flights
- Otimização com Cadeias de Markov



Random Variables

- Na aula anterior vimos que a aleatoriedade tem um papel importante na exploração(diversificação) e na "explotação"(intensificação).
- A essência da aleatoriedade é o passo aleatório ou random walks.
- Alguns "insights" de como as metaheurísticas se comportam será visto daqui em diante.

Random Variables

- Variáveis aleatórias podem ser consideradas como uma expressão nas quais o valor é a realização ou saída dos eventos associados com um processo aleatório, tais como, o nível de ruído da rua.
- Os valores das variáveis aleatórias são reais, embora algumas variáveis tais como o número de carros na rua pode somente assumir valores discretos e tais variáveis são chamadas de variáveis aleatórias discretas.
- Se uma variável aleatória tais como o ruído em um local particular pode ter alguns valores reais em um intervalo, isso é chamado de contínuo.
- Se uma variável aleatória pode ter ambos os valores discreto e contínuo, é chamado de misto.
- As variáveis aleatórias mapeiam eventos a números reais: sample space.

Random Variables

- Para cada variável aleatória, uma função densidade de probabilidade pode ser usado para expressar sua distribuíção de probabilidade.
- Ex: número de chamadas por minuto e o número de usuários de um web server por dia (distribuíção de Poisson)

  - $p(n;\lambda) = \frac{\lambda^{n} * e^{-\lambda}}{n!}$

- $(n = 0,1,2..)$ e
- $\lambda > 0$ é *um parâmetro que denota a média ou*
- *expectativa de ocorrência de um evento*
- durante um intervalo

Random Variables

- Diferentes variáveis aleatórias terão diferentes distribuições.

- A distribuição gaussiana ou normal é a distribuição mais popular,porque muitas variáveis físicas incluem intensidade de luz, erros e incertezas em medições e muitos outros processos que obedecem a distribuição normal.

- $f(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ $\qquad$ $-\infty < x < \infty$

- onde μ é a média e $\sigma > 0$ é $o\ desvio\ padrão$.
- Essa distribuição normal é frequentemente escrita como

$$N(\mu, \sigma^2)$$

Random Variables

No caso quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$
é $chamada\ de\ distribuição\ normal\ padrão,\ N(0,1)$

Outra importante distribuição é a chamada distribuição de Lévy.

A distribuição de Lévy é uma distribuição da soma de N variáveis aleatórias distribuidas identicamente e independentemente cuja transformada de Fourier assume a seguinte forma:

$$F_N(k) = e^{-N|k|^{\beta}}$$

Random Variables

- Para obter a distribuição real L(s) não é simples, pois a integral

- $L(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(\tau\, s) e^{-\alpha\tau^{\beta}} d\tau\,, \qquad (0 < \beta \le 2)$

- não tem forma analítica, exceto para poucos casos especiais.

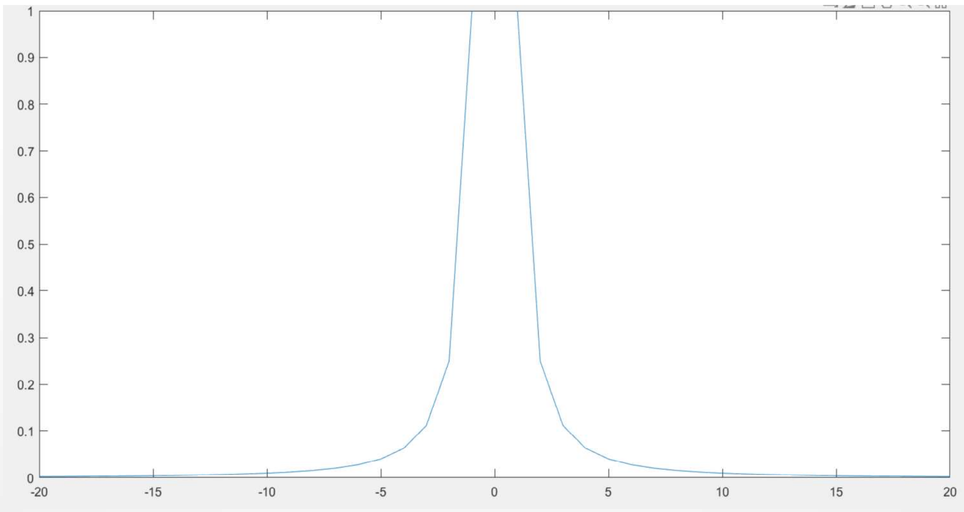
- Essa integral é chamada de **distribuição de Lévy com um índice β.**

- Valores de α=1, serve para a maior parte das aplicações.
- Valores de β=1(distribuição de Cauchy) e β=2 (distribuição normal, movimento Browniano)

Random Variables

- A integral
- $L(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos(\tau s) e^{-\alpha\tau^\beta} d\tau, \qquad (0 < \beta \leq 2)$

- pode ser descrita como uma série assintótica e sua principal ordem aproximada para o comprimento do vôo resulta em uma distribuição de lei de potência:
  - $L(s) \sim |s|^{-1-\beta}$



Random Walks

Um passeio aleatório ou random walk é um processo aleatório o qual consiste em pegar uma série consecutiva de passos aleatórios como:

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i = X_1 + \ldots + X_N,$$

onde X_i é um passo aleatório extraído de uma distribuição aleatória. Pode ser reescrito como:

$$S_N = \sum_{i=1}^{N-1} + X_N = S_{N-1} + X_N \ ,$$

Isso significa que o próximo estado S_N somente dependerá do estado atual S_{N-1} e do movimento ou transição X_N do estado existente para o próximo estado.

O tamanho ou comprimento do passo pode ser fixo ou variável.

Aplicações: física, economia, estatística, ciência da computação, ciência ambiental e engenharia.

Random Walks

- Considere um exemplo, o caminhar de uma pessoa embriagada em uma rua, a cada passo ele pode ir para frente ou para trás, isso forma um random walk em uma dimensão.

- Se essa pessoa embriagada anda em um campo de futebol, ele pode andar em alguma direção aleatoriamente, isso se chama random walk em 2D.

- Simplificando a função, um passo aleatório pode ser descrito pela seguinte equação:

$$S_{t+1} = S_t + w_t$$

- onde S_t é a localização atual ou estado em t, e w_t é um passo ou variável aleatória com uma distribuição conhecida.

Random Walks

- Se cada passo ou pulo é realizado no espaço n-dimensional então ele se torna um random walk em dimensões mais altas.

- O tamanho ou comprimento do passo pode variar de acordo com uma distribuição bem conhecida.

- Se o passo obedece a distribuição gaussiana, o random walk se torna no movimento browniano.

Figure 2.1: Brownian motion in 2D: random walk with a Gaussian step-size distribution and the path of 50 steps starting at the origin $(0, 0)$ (marked with $\bullet$).

Random Walks

- Quando o número de passos N aumenta, segundo o teorema do limite central isso implica que o random walk deveria se aproximar de uma distribuição gaussiana.

- A média das localizações das partículas é obviamente zero, sua variância aumentará linearmente com t.

- No espaço n-dimensional, a variância dos random walks brownianos pode ser escrita como:

    - $\sigma^2(t) = |v_0|^2 t^2 + (2dD)t$,

- onde v_0 é a velocidade drift do sistema

- $D = \frac{s^2}{2\tau}$ é o coeficiente de difusão efetiva que está relacionado ao comprimento do passo s sobre um intervalo de tempo τ durante cada pulo ou salto.

Random Walks

- O movimento Browniano segue então a distribuição gaussiana com média zero e variância dependente do tempo:
- $B(t) \sim N(0, \sigma^2(t))$ *o símbolo ~é de seguir, obedecer*

- Um processo de difusão pode ser visto como uma série de movimento browniano e o movimento obedece a distribuição gaussiana.

- Por esta razão, a difusão padrão é frequentemente chamada de difusão gaussiana.

Random Walks

- Se o movimento em cada passo é não Gaussiano então a difusão é chamada de difusão não-Gaussiana.

- Se o comprimento do passo obedece a outra distribuição teremos que tratar com um random walk mais geral.

- Um caso muito especial acontece quando o comprimento do passo obedece a distribuição de Lévy, tal random walk é chamado de Lévy flights ou Lévy Walk.

Lévy Distribution e Lévy Flights

- Lévy flights são um passo aleatório cujo comprimento do passo é retirado da distribuição de Lévy.

- Frequentemente em termos de uma fórmula simples da lei de potência:
  - $L(s) \sim |s|^{-1-\beta}$

- onde $0 < \beta \leq 2$,
- Uma versão simples da distribuição de Lévy pode ser definida como:

- $L(s,\gamma,\mu) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} e^{-\frac{\gamma}{2(s-\mu)}} \frac{1}{(s-\mu)^{3/2}}, & 0 < \mu < s < \infty \\ 0, & otherwise \end{cases}$

Lévy Distribution e Lévy Flights

- Onde $\mu > 0$ é um passo mínimo e γ é um parâmetro escalar.
- Quando $s \rightarrow \infty$, temos um caso especial da distribuição de Lévy:

  - $L(s, \gamma, \mu) \approx \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{s^{3/2}}$

- Em termos de transformada de Fourier:
- $F(k) = e^{-[\alpha|k|^{\beta}]}, \quad 0 < \beta \leq 2$

- onde α é um parâmetro escalável.
- Não há integral inversa simples para essa transformada, há apenas para casos especiais:

Lévy Distribution e Lévy Flights

- Para o caso de $\beta = 2$:
    - $F(k) = e^{-\alpha k^2}$,

A transformada inversa de fourier corresponde a uma distribuição gaussiana.

- Para o caso de $\beta = 1$:
    - $F(k) = e^{-\alpha |k|}$,

O que corresponde a distribuição de Cauchy.

$$p(x, \gamma, \mu) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x - \mu)^2}$$

onde μ é o parâmetro de localização, enquanto γ controla o escalonamento da distribuição.

Para o caso geral, a integral inversa abaixo:

$$L(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos{(ks)} e^{-\alpha |k|^2} \, dk$$

Lévy Distribution e Lévy Flights

- Pode ser estimada somente quando s é grande:

$$L(s) \to \frac{\alpha\beta\Gamma(\beta)\sin\frac{\pi\beta}{2}}{\pi|s|^{(1+\beta)}}$$

- com $s \to \infty$

- A função Gamma é definida como:
  - $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{(z-1)}\, e^{-t} dt$

Quando z=n é um inteiro a função gama:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Lévy Distribution e Lévy Flights

- Lévy Flights são mais eficientes do que os passeios aleatórios brownianos em explorar o desconhecido, um espaço de busca de grande escala.
- Existem muitas razões para explicar essa eficiência e uma delas é devido ao fato de que a variância dos Lévy Flights é:
- $\sigma^2(t) \sim t^{3-\beta}, \;\; 1 \leq \beta \leq 2,$
- aumenta muito mais rápido do que o relacionamento linear do random walk browniano ($\sigma^2(t) \sim t$)

Lévy Distribution e Lévy Flights

- Na figura abaixo mostra o percurso de Lévy Flights em 50 passos
- começando de (0,0) com $\beta=1$.

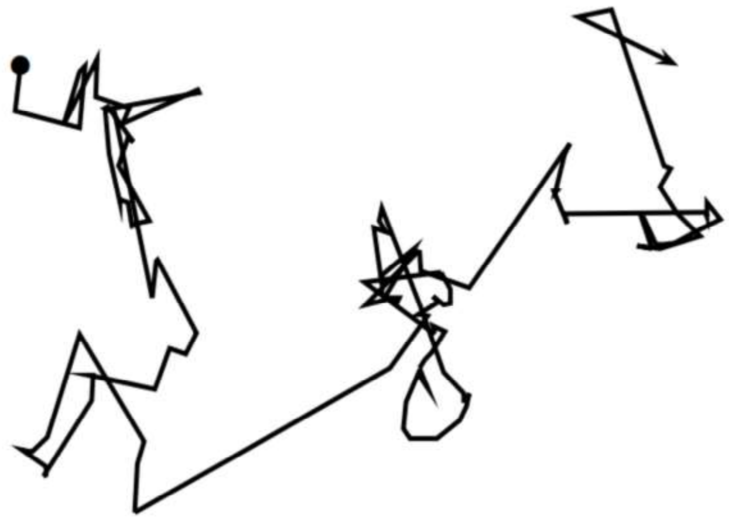


Figure 2.2: Lévy flights in consecutive 50 steps starting at the origin $(0,0)$ (marked with $\bullet$).

- Do ponto de vista da implementação a geração de números aleatórios com Lévy Flights consiste em dois passos:

Lévy Distribution e Lévy Flights

A escolha de uma direção aleatória e a geração de passos que obedeçam a escolhida distribuição de Lévy.

A geração de uma direção deveria ser definida de uma distribuição uniforme.

A geração de passos é um pouco mais complicada. Existem algumas maneiras mas a mais conhecida o chamado Algoritmo de Mantegna para gerar uma distribuição estável simétrica (passos pode ser positivos e negativos)

Uma variável aleatória U e sua distribuição de probabilidade pode ser chamada de estável se a combinação linear das suas duas cópias idêncticas (U1 AND U2) obedece a mesma distribuição.

aU1+ bU2 tem a mesma distribuição de cU + d, $a,b>0$ e $c,d \in \Re$

$\mathcal{s}$e d=0 então é chamado de estritamente estável.
Cauchy, Gaussiano e Lévi são estáveis.

Lévy Distribution e Lévy Flights

No algoritmo de Mantegna, o comprimento do passo s pode ser calculado por:

$$s = \frac{u}{|v|^{1/\beta}} \,,$$

u e v são gerados a partir de distribuições normal que são:

$$u \sim N(0, \sigma_u^2) \quad , \; v \sim N(0, \sigma_v^2)$$

onde $\sigma_u = \left\{ \frac{\Gamma(1+\beta)\sin(\pi\beta/2)}{\Gamma[(1+\beta)/2]\beta 2^{(\beta-1)/2}} \right\}^{1/\beta}, \qquad \sigma_v = 1.$

Essa distribuição (para s) obedece a distribuição de Lévy esperada para $|s| \geq |s_0|$ onde s_0 é o menor valor do passo.

Em princípio, o valor do $|s_0| \gg 0$ mas na realidade pode ser um valor tão sensível como 0.1 até 1.

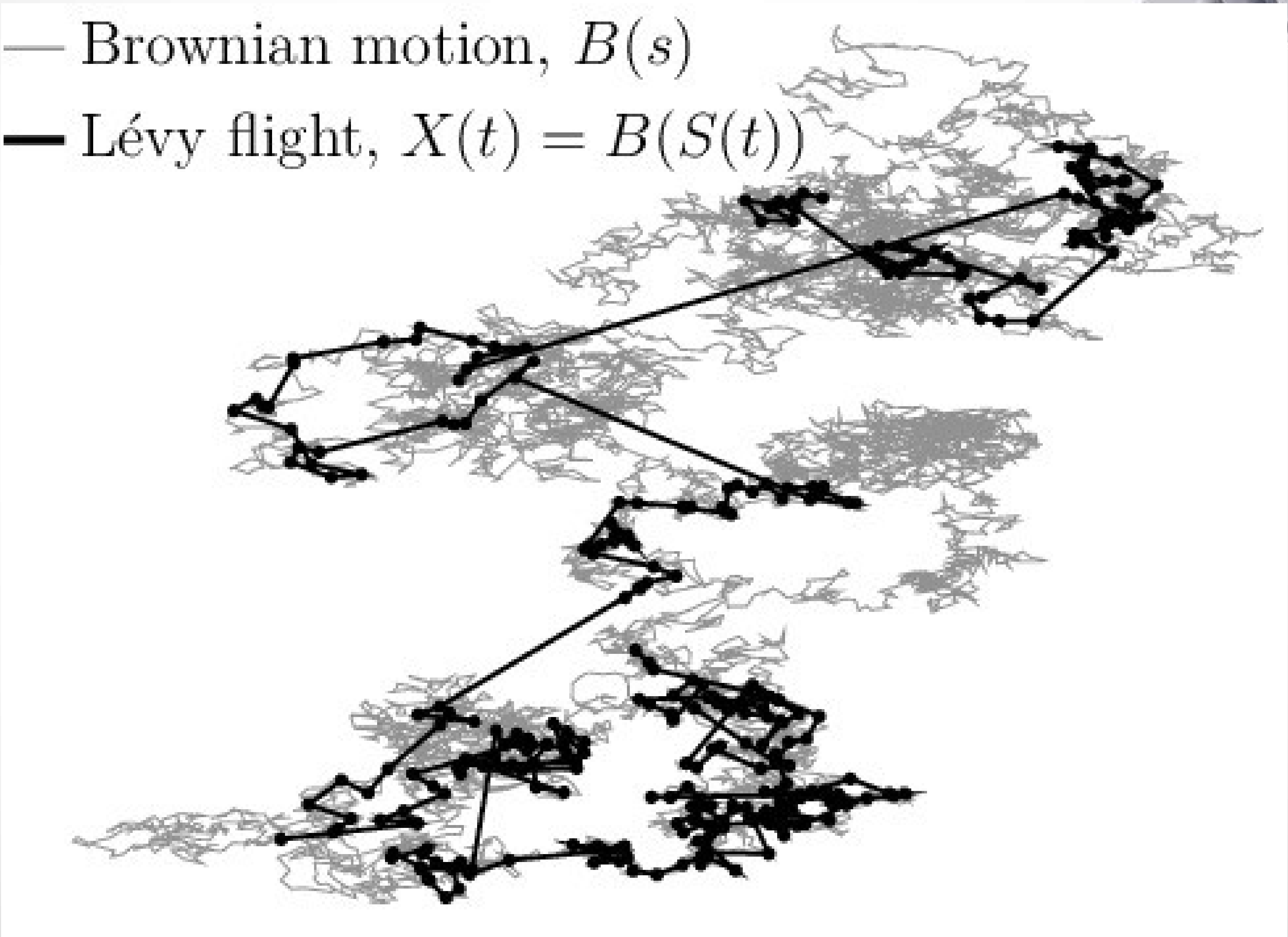
Lévy Distribution e Lévy Flights

- Estudos mostram que os Lévy Flights podem maiximizar a eficiência nas buscas de recursos em ambientes incertos.

- Podem ser observados Lévy Flights em moscas de frutas, macacos aranha, albatrozes.

- Muitos fenômenos físicos como difusão de moléculas fluorescentes, comportamento do resfriamento e ruído poderiam mostrar características dos Lévy Flights sob determinadas condições.

Lévy Distribution e Lévy Flights



Bibliografia

- Xin She Yang. Nature Inspired Metaheuristics Algorithm,Luniver Press, 2010.