Glauber de Souza Faria
17213050160
Angra dos Reis - RJ

Matemática Computacional

①

A CURVA SERÁ DEFINIDA POR

$$\boxed{y = e^{-x^2}}$$

INICIALMENTE ENCONTRAREMOS OS PONTOS DE INFLEXÃO

$f'(x) = (e^{-x^2})$ → Aplicar Regra Cadeia

$$\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) = (e^{-x^2})'$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= -x^2 \\ u' &= -2x \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x) &= f'(u) \cdot u' \\ f'(x) &= -2xe^{u} \\ f'(x) &= -2xe^{-x^2} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(u) &= e^{u} \\ f'(u) &= e^{u} \end{aligned}}$$

$$f''(x) = ((f'(x))')$$

$$(-2xe^{-x^2})' = -2(xe^{-x^2})'$$

Aplicando a Regra da multiplicação:

$$-2[(x)'.(e^{-x^2})+(x).(e^{-x^2})']$$

$$-2[e^{-x^2}+(x).(-2xe^{-x^2})]$$

$$-2[e^{-x^2}+(-2x^2e^{-x^2})]$$

$$-2(e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2})$$

+ Igualar a zero e resolver:

$$-2(e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2})=0$$

$$-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=0$$

$$-2e^{-x^2}(1-2x^2)=0$$

$$e^{-x^2}(-2+4x^2)=0$$

* Seja $e^{-x^2}=0$, será indefinido, pois não existe, por conta $Ln \neq 0$

$$-2+4x^2=0$$

$$4x^2=2$$

$$x^2=\frac{2}{4}$$

$$x=\sqrt{1/2}$$

Analisando os sinais das derivadas teremos que:

$$f''(x) = -2\left(e^{-x^2} - 2 \cdot x^2 \cdot e^{-x^2}\right)$$

$$f''(0) = -2\left(e^{-0^2} - 2 \cdot 0^2 \cdot e^{-0^2}\right)$$

$$f''(0) = -2(1)$$

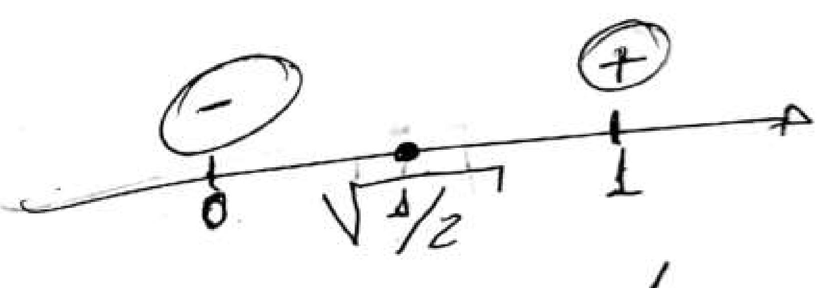
$$f''(0) = -2$$

$$f''(1) = -2\left(e^{-1^2} - 2 \cdot 1^2 \cdot e^{-1^2}\right)$$

$$f''(1) = -2(-0{,}367)$$

$$f''(1) \cong 0{,}736$$

Analizando o gráfico teremos:



Portanto, podemos dizer que f é côncava para baixo, no intervalo $\left(-\infty, \sqrt{1/2}\right)$ e côncava para cima, no intervalo $\left(\sqrt{1/2}, +\infty\right)$

PORTANTO, O PONTO de INFLEXÃO É
$\sqrt{1/2}$.

(2)

$$f(x) = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}$$

PARA CONSTRUIR O GRÁFICO, TEREMOS:

+ ENCONTRAR OS PONTOS DE INTERESSE:

$f(x)$, ONDE $x = 0$.

$$f(0) = \sqrt[3]{2a0^2 - 0^3}$$

$$f(0) = \sqrt[3]{0 - 0} = \sqrt[3]{0} = 0$$

SABEMOS QUE QUANDO $X = 0$, $Y = 0$.

PORTANTO A PRIMEIRA COORDENADA É $A(0,0)$

SABEMOS QUE SERÁ NECESSÁRIO UMA SEGUNDA COORDENADA:

$$f(a) = \sqrt[3]{2 \cdot a \cdot a^2 - a^3}$$

$$f(a) = \sqrt[3]{2a^3 - a^3}$$

$$f(a) = \sqrt[3]{a^3}$$

$$f(a) = a$$

Quando $x = a ; y = 0$, $B(a, a)$

$$f(-a) = \sqrt[3]{2a(-a)^2 - (-a)^3}$$

$$f(-a) = \sqrt[3]{2 \cdot a^3 + a^3}$$

$$f(-a) = \sqrt[3]{2a^4}$$

$$f(x) = y$$

- Calcularemos as assíntotas horizontais

$$\boxed{f(x) = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3}}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{2ax^2}{x^3} - \frac{x^3}{x^3}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{2ax^2}{x^3} - \frac{x^3}{x^3}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \acute{\epsilon} - 1}$$

Considerando:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0 \quad a \in \mathbb{R}, \text{Temos:}$$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{0 - 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \acute{\epsilon} - 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x)}$$

- Não existirão assíntotas verticais.

- Teremos que encontrar os extremos relativos, mas conhecidos como ponto de máximo e mínimo relativo.

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{2ax^2 - x^3}\right)'$$

$$f'(x) = \left[\left(2ax^2 - x^3\right)^{1/3}\right]' \longrightarrow \text{Regra da Cadeia}$$

$$U = 2ax^2 - x^3 \qquad U' = 4ax - 3x^2$$

$$f(U) = U^{1/3} \qquad f'(U) = \frac{1}{3} U^{-2/3}$$

$$f'(x) = f'(U) \cdot U'$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} U^{-2/3} \cdot 4ax - 3x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} U^{-2/3} \cdot 4ax - 3x^2$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \left(2ax^2 - x^3\right)^{-2/3} \cdot 4ax - 3x^2$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot 4ax - 3x^2}{3\left(2ax^2 - x^3\right)^{2/3}}$$

$$f'(x) = \frac{4ax - 3x^2}{3\left(2ax^2 - x^3\right)^{2/3}}$$

Applicando teremos.

$$\frac{4ax - 3x^2}{3(2ax^2 - x^3)^{2/3}} \Rightarrow 0 \qquad \to 1$$

$4ax = 3x^2 = 0$

$x(4a - 3x) = 0$

$4a - 3x = 0$

$4a = 3x$

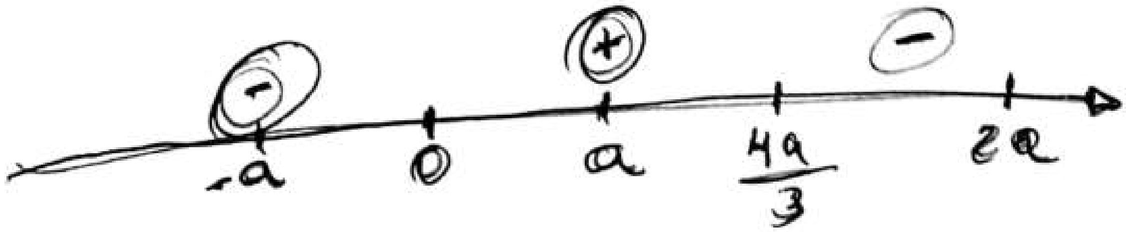
$\boxed{\frac{4a}{3} = x}$

Logo teremos que os pontos críticos serão:

$x = 0$

$x = \frac{4a}{3}$

Construiremos a análise dos sinais na reta:



Substituindo em $f''(x)$, temos:

$$f''(x) = \frac{4ax - 3x^2}{3(2ax^2 - x^3)^{2/3}}$$

$$f(-a) = \frac{4a(-a) - 3(-a)^2}{3(2 \cdot a(-a)^2 - (-a)^3)^{2/3}}$$

$$f(-a) = \frac{-4a^2 - 3a^2}{3(2a^3 - a^3)^{2/3}} = \frac{-7a^2}{3(3a^3)^{2/3}}$$

$$f(a) = \frac{4 \cdot a \cdot a - 3(a)^2}{3(2a \cdot a^2 - a^3)^{2/3}} = \frac{4a^2 - 3a^2}{3(2a^3 - a^3)^{2/3}}$$

$$f(a) = \frac{a^2}{3(a^3)^{2/3}}$$

$$f(2a) = \frac{4a(2a) - 3(2a)^2}{3(2 \cdot a(2a)^2 - (2a)^3)^{2/3}}$$

$$f(2a) = \frac{8a^2 - 12a^2}{3(8a^3 - 8a^3)^{2/3}} = \frac{-4a^2}{3(8a^3 - 8a^3)^{2/3}}$$

Logo $x=0$ é um ponto de mínimo

$x=\frac{4a}{3}$ é um ponto de máximo

Função será decrescente em $(-\infty,0)\cup\left(\frac{4a}{3},\infty\right)$

Função será crescente em $\left(0,\frac{4a}{3}\right)$

Precisamos encontrar o ponto de Inflexão:

$f''(x)=0$

$$f''(x)=\left(\frac{4ax-3x^2}{3(2ax^2-x^3)^{2/3}}\right)' \rightarrow$$ Aplicaremos Regra do Quociente

$$f''(x)=(4ax-3x^2)'\left(3(2ax^2-x^3)^{2/3}\right)-(4ax-3x^2)\cdot\left(3(2ax^2-x^3)^{2/3}\right)'\Big/\left[\left(3(2ax^2-x^3)^{2/3}\right)\right]^2$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{-8a^2x^2}{9(2ax^2-x^3)^{5/3}}}$$

Aplicando, teremos:

$$\frac{-8a^2x^2}{9(2ax^2-x^3)^{5/3}}$$

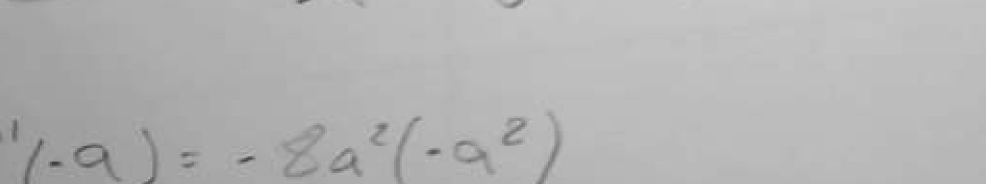
$$\frac{-8a^2x^2}{9(2ax^2-x^3)^{5/3}} = \frac{0}{1}$$

$$-8a^2x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{-8a^2}$$

$$\boxed{x = 0}$$

Analisando os sinais da derivada de 2º ordem, temos:



$$f''(-a) = \frac{-8a^2(-a^2)}{9(2a(-a)^2-(-a)^3)^{5/3}}$$

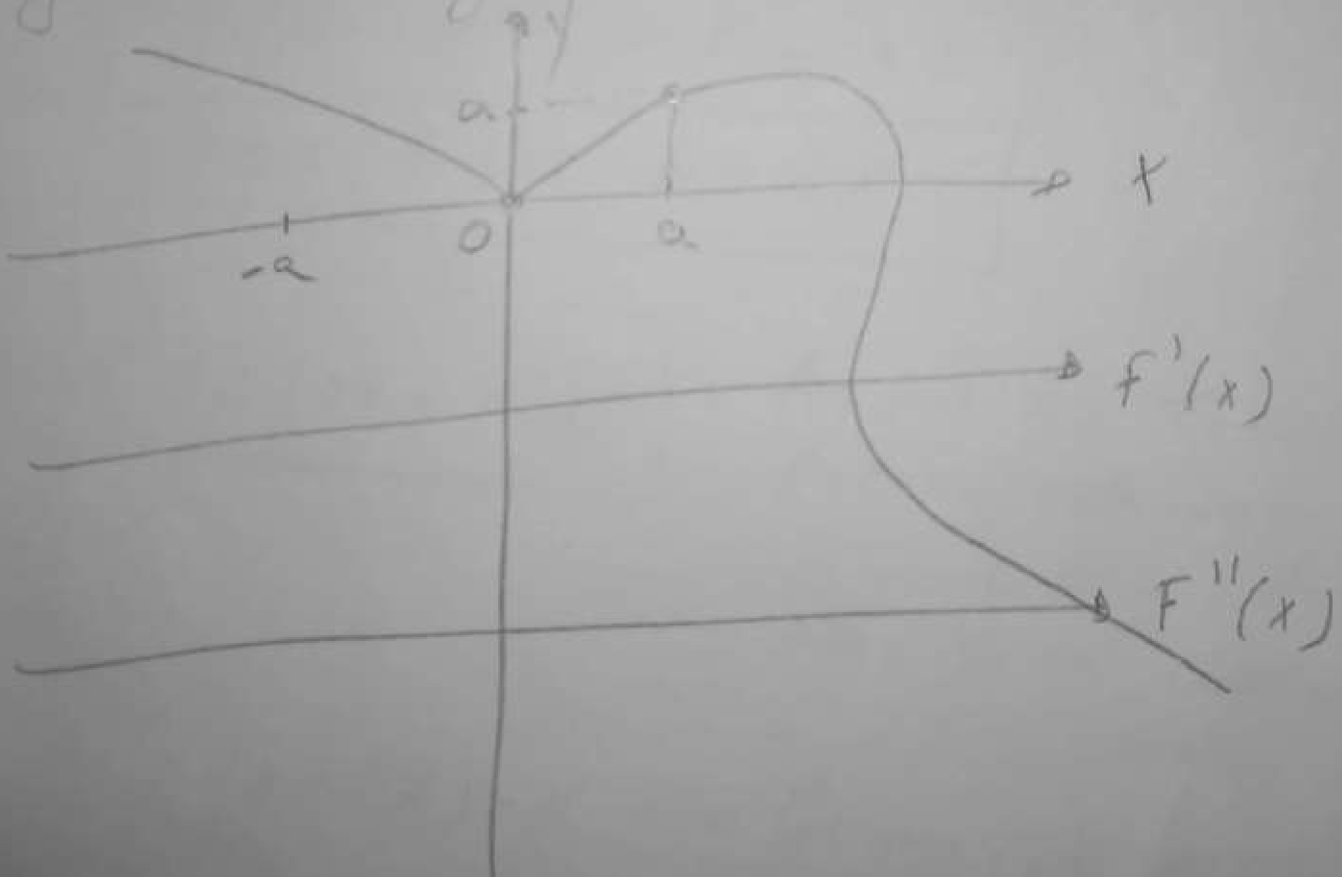
$$f''(-a) = \frac{-8a^4}{9(2a^3+a^3)^{5/3}}$$

$$f''(a) = \frac{-8 \cdot a^2 \cdot a^2}{9(2 \cdot a \cdot a^2 - a^3)^{5/3}}$$

$$f''(a) = \frac{-8a^4}{9(2a^3 - a^3)^{5/3}}$$

Portanto, não teremos um ponto de inflexão.

Com estas informações esboçamos o gráfico da seguinte forma:



(3)

Sabemos que a propriedade rural, tem o formato retângular

Perimetro do terreno é:

$$\boxed{P = 2(b+h)}$$

→ O lado maior do retângulo, tem o dobro do comprimento do menor.

Logo, podemos definir:

$\boxed{h = x, \text{ temos } b = 2x}$

$\boxed{P = 2(2x + x)}$ → Perimetro total, porem sabemos que um lado não será cercado

$P = 2(2x + x) - x$ → Perimetro total menos o lado que não receberá cerca.

Digitalizado com CamScanner

$P = 2(2x + x) - x$

$P = 2(3x) - x$

$P = 6x - x$

$P = 5x$

Para calcularmos, a quantidade mínima de cerca necessária, faremos:

$$\frac{dP}{dx} = 0$$

Aplicando, temos que:

$$\frac{d}{dx}(5x) = 5$$

A quantidade mínima será de 5 m.

(4)

(a) $\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + 2\,dx =$

$\int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx + \int 2\,dx =$

$\int x^{-2}\,dx + \int \frac{1}{x \cdot x^{1/2}}\,dx + \int 2\,dx =$

$\int x^{-2}\,dx + \int \frac{1}{x^{3/2}}\,dx + \int 2\,dx =$

$\int x^{-2}\,dx + \int x^{-3/2}\,dx + \int 2\,dx =$

$\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right] + \left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right] + [2x] + C =$

$\left[\frac{-1}{x}\right] + \left[x^{-1/2} \cdot -\frac{2}{1}\right] + [2x] + C =$

$\left[\frac{-1}{x}\right] + \left[-2x^{-1/2}\right] + [2x] + C =$

$\frac{-1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 2x + C =$

(4) (b) $f(x) = \frac{1}{5-2x}$

$$\int \frac{1}{5-2x}\, dx$$

Mudança de Variável

$U = 5 - 2x$

$du = (5 - 2x)'\, dx$

$du = (5)' - (2x)'\, dx$

$du = -2dx$

$dx = \frac{du}{-2}$

$dx = -1/2\, du$

Alterando na Integral, teremos:

$$\int \frac{1}{U} \cdot -\frac{1}{2}\, du = \frac{-1}{2} \int \frac{1}{U}\, du =$$

$$\boxed{\frac{-1}{2} \left[\ln U \right] + C}$$

$$-\frac{1}{2} \left[\ln (5 - 2x) \right] + C$$

$$\boxed{\int \frac{1}{5-2x}\, dx = -1/2 \ln (5 - 2x) + C}$$

4 e) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$

Aplicando mudança de variável, teremos:

$U = x^3 + 1$

$du = (x^3+1)'\,dx$

$du = (x^3)' + (1)'\,dx$

$du = 3x^2\,dx$

$dx = \frac{du}{3x^2}$

Substituiremos na integral teremos

$\int \frac{x^2}{\sqrt{U}} \frac{dU}{3x^2} =$

$\int \frac{1}{\sqrt{U}} \frac{du}{3} =$

$\int \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{U}}\,du =$

$\frac{1}{3}\left[\frac{U^{1/2}}{1/2}\right] + C =$

$\boxed{2/3\,(U^{1/2}) + C}$

Logo teremos:

$2/3\,(x^3+1)^{1/2} + C = 2/3\sqrt{x^3+1} + C$

$\boxed{\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C}$

(4) (a) $f(x) = e^{x/a}$

$\int e^{x/a} dx$

Aplicaremos a mudança de variável,

$U = \frac{x}{a}$

$du = (x/a)' dx$

$du = 1/a \; dx$

$du \frac{1}{a} \; dx$

$dx = \frac{du}{1/a}$

$dx = du \cdot \frac{a}{1}$

$\int e^{u} . a . du = a \int e^{u} du =$

$a = [e^{u}] + c$

$a = e^{x/a} + c \Rightarrow \boxed{\int e^{x/a} dx = a e^{x/a} + c}$

(5) (a) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cos^2 x \, dx$

$$\boxed{\begin{aligned} &\cdot\ U = \cos(x) \\ &\cdot\ dU = (\cos(x))' dx \\ &\cdot\ dU = -\operatorname{SEN}(x)\, dx \\ &\cdot\ dx = \frac{dU}{-\operatorname{SEN}(x)} \end{aligned}}$$

Integrando, teremos:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{SEN} X \cdot U^2 \cdot \frac{dU}{-\operatorname{SEN}(x)}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{SEN} X \cdot U^2}{-\operatorname{SEN} X}\, dU =$$

$$\int_0^{\pi/2} -U^2 dU$$

$$-\int_0^{\pi/2} U^2 dU$$

$$-\left[\frac{U^3}{3}\right]_0^{\pi/2}$$

5) A) Substituindo o encontrado na Integral:

$$-\left(\frac{\cos^3 x}{3}\right)^{\pi/2} =$$

$$\left[-\frac{\cos^3(\pi/2)}{3}\right] - \left[-\frac{\cos^3(0)}{3}\right] =$$

$$-\frac{\cos^3(\pi/2)}{3} + \frac{\cos^3 0}{3} =$$

$$\frac{0}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{\text{Portanto } \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x \, dx = \frac{1}{3}}$$

Digitalizado com CamScanner

6

Hipérbole Equilater $xy = a^2$
Logo, $x = a$ e $x = 2a$

Área será definida por:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Logo:

$$xy = a^2$$
$$y = \frac{a^2}{x}$$
$$y = a^2 \cdot \frac{1}{x}$$

Portanto:

$$A = \int_a^{2a} a^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

$$A = a^2 \int_a^{2a} \frac{1}{x}\,dx$$

$$A = a^2 \left[Ln(x) \right]_a^{2a}$$

$$A = a^2 \left[Ln(2a) - Ln(a) \right]$$

$$A = a^2 \cdot Ln\left(\frac{2\cancel{a}}{\cancel{a}}\right) \Rightarrow A = a^2 \cdot In(2) \Rightarrow A \cong 0{,}693a^2$$

Logo a resposta é $\cong 0{,}693a^2$

(7)

Utilizaremos:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$$ → Para Calcularmos Volume dos sólidos.

Como é definido um sólido?

R.: Uma parábola definida por $y^2 = 2pX$ e pela reta $X = a$

$$f(x)^2 = 2px$$

$$V = \int_0^a \pi (2px)\, dx$$

$$V = 2\pi p \int_0^a x\, dx$$

$$V = 2\pi p \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

$$V = 2\pi p \left[\frac{a^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right]$$

$$\boxed{V = \pi p a^2}$$

(8)

(9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 5x}{3x} \rightarrow$

$\lim\limits_{x \to} \text{sen } 5 \cdot 0$

$\lim\limits_{x \to 0} 0$

$\lim\limits_{x \to 0} 3x$

$\lim\limits_{x \to 0} 0$,

Logo podemos aplicar L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5 \cdot 0}{3 \cdot 0}$$

$$\lim_{x \to 0} \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\text{sen } 5x)'}{(3x)'}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 \cdot \cos(5x)}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 \cdot \cos(5x)}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 \cdot \cos(5 \cdot 0)}{3}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} 5/3}$$

8)

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow$ $\boxed{\lim_{x \to 0} \ln(1+0) = \quad \lim_{x \to 0} 0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+0)}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x = \quad \lim_{x \to} 0}$$

Aplicando L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\ln(1+x))'}{(x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{(1+x)}}{1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1+0}{1} \quad \lim_{x \to 0} 1}$$

Digitalizado com CamScanner

(8) (1) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{+x} - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} e^{+0} - e^{-0} - 2.0 = \\ &\lim_{x \to 0} 1 - 1 - 0 = \\ &\lim_{x \to 0} 0 \end{aligned}}$$

$=$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} 0 - \operatorname{sen} 0 = \\ &\lim_{x \to 0} 0 - 0 \\ &\lim_{x \to 0} 0 \end{aligned}}$$

Logo Podemos Aplicar L'Hospital

8 c Aplicando L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{x} - e^{-x} - 2x)'}{1 - \cos(x)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{x})' + (e^{-x})' - (2x)'}{(1)' - (\cos(x))'} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$$

Aplicaremos L'Hospital novamente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{x} - e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos(x))'} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^{x})' + (e^{-x})' - (2)'}{(1)' - (\cos(x))'} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x} - 0}{0 - (-\mathrm{sen}(x))} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{\mathrm{sen}(x)}$$

8 c Aplicaremos L'Hospital novamente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(sen(x))'} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{(sen(x))'} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{cos(x)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^0 + e^{-0}}{cos(0)}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} 2}$$

• Foi L'Hospital 3 vezes, pois nas vezes anteriores, continuamos de forma indeterminada onde 0/0.