Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 1^o semestre de 2020 — Gabarito

Questões

1. (1,00 ponto)

Informe o domínio e a imagem das seguintes funções

(a) $f(x) = 2 + (x-1)^3$

(b) $f(x) = 2x^4 - 4$

(c) $f(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+4}$

Solução:

(a) $f(x) = 2 + (x-1)^3$

A função $f(x)$ está definida em toda a reta real, logo,

Dom $f(x) = \mathbb{R}$

e é polinomial, assim

Im $f(x) = \mathbb{R}$

(b) $f(x) = 2x^4 - 4$

Assim como no item anterior

Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Im $f(x) = \mathbb{R}$

(c) $$f(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

O denominador desta função não pode ser igual a zero, ou seja,

$(x-1)^2 \neq 0 \quad \text{ou} \quad x \neq 1$

como o denominador se anula somente neste ponto o domínio será

Dom $f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

a função será sempre negativa e nunca se anula, logo

Im $f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < 0\} = (-\infty, 0)$

(d) $$f(x) = \frac{x-1}{x+4}$$

Como no item anterior, o denominador desta função não pode ser igual a zero, ou seja,

$x + 4 \neq 0 \quad \text{ou} \quad x \neq -4$

como o denominador se anula somente neste ponto o domínio será

Dom $f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -4\}$

e sua imagem

Im $f(x) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

2. (1,00 ponto) ———————————————————————

Determine as inversas das seguintes funções

(a) $f(x) = 3x + 4$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$

(c) $f(x) = \dfrac{x+a}{x-a}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

(e) $f(x) = x^2 - 4, \quad x \leq 0$

(f) $f(x) = x^2 - 4, \quad x \geq 0$

Solução:

(a)

$$f(x) = 3x + 4$$

$$y = 3x + 4 \Longrightarrow y - 4 = 3x \Longrightarrow \frac{y-4}{3} = x \Longrightarrow x = \frac{y-4}{3}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{3}$

(b)

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

$$y = \frac{1}{x-a} \Longrightarrow y(x-a) = 1 \Longrightarrow yx - ya = 1 \Longrightarrow yx = 1 + ya \Longrightarrow x = \frac{1+ya}{y}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \dfrac{1+xa}{x}$

(c)

$$f(x) = \frac{x+a}{x-a}$$

$$y = \frac{x+a}{x-a} \Longrightarrow y(x-a) = x + a \Longrightarrow yx - ya = x + a \Longrightarrow yx - x = a + ya$$

$$\Longrightarrow x(y-1) = a + ya \Longrightarrow x = \frac{a(y+1)}{y-1}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \dfrac{a(x+1)}{x-1}$

(d)

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

$$y = \frac{1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{y}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

(e)

$$f(x) = x^2 - 4, \quad x \leq 0$$

$$y = x^2 - 4 \Longrightarrow y + 4 = x^2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\,y+4}$$

Como o domínio se restringe a $\;x \leq 0\;$ temos

que a inversa será o ramo negativo de $\pm\sqrt{\,y+4}$

isto é $f^{-1}(x) = -\sqrt{\,x+4}$

(f)

$$f(x) = x^2 - 4, \quad x \geq 0$$

Com uma análise semelhante ao item anterior

$$y = x^2 - 4 \Longrightarrow y + 4 = x^2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\,y+4}$$

Como o domínio se restringe a $\;x \geq 0\;$ temos

que a inversa será o ramo positivo de $\pm\sqrt{\,y+4}$

isto é $f^{-1}(x) = \sqrt{\,x+4}$

3. (1,00 ponto) ———————————————————————

Calcule os limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{s\to 1/2} \frac{s+4}{2s}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 4} (e^x + 4x)$

(c) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h}$

Solução:

(a) $$\lim_{s\to 1/2} \frac{s+4}{2s} = \frac{1/2+4}{2\cdot 1/2} = \frac{9}{2}$$

(b) $$\lim_{x\to 4} (e^x + 4x) = \lim_{x\to 4} e^x + \lim_{x\to 4} 4x = e^4 + 4\cdot 4 = e^4 + 16$$

(c) $$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$$

Relembrando o triângulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\cdots\cdots & & & & & & & &
\end{array}$$

logo

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4)-x^4}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3\right)\\
&= \lim_{h\to 0}4x^3+\lim_{h\to 0}6x^2h+\lim_{h\to 0}4xh^2+\lim_{h\to 0}h^3\\
&= 4x^3+0+0+0\\
&= 4x^3
\end{aligned}$$

4. (1,00 ponto) ---

Calcule os seguintes limites,

(a) $$\lim_{x\to 2^+} f(x),\quad \lim_{x\to 2^-} f(x)\quad \text{e}\quad \lim_{x\to 2} f(x)$$

onde

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{se}\quad x<2\\ 2 & \text{se}\quad x=2\\ 9-x^2 & \text{se}\quad x>2\end{cases}$$

(b) $$\lim_{x\to 1/5^+} f(x),\quad \lim_{x\to 1/5^-} f(x)\quad \text{e}\quad \lim_{x\to 1/5} f(x)$$

onde

$$f(x)=2+|\,5x-1\,|$$

(c) $$\lim_{x\to 0} f(x), \quad \lim_{x\to 5^+} f(x), \quad \lim_{x\to 5^-} f(x), \quad \lim_{x\to 5} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -5} f(x)$$

onde

$$f(x) = \frac{x^5 - 25}{x - 5}$$

Solução:

(a)

$$\lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2} f(x)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se} \quad x < 2 \\ 2 & \text{se} \quad x = 2 \\ 9 - x^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} 9 - x^2 \\ &= 9 - 2^2 \\ &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} x^2 + 1 \\ &= 2^2 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Como os limites laterais em $x = 2$ existem e são iguais,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

ou

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

(b) $$\lim_{x\to 1/5^+} f(x), \quad \lim_{x\to 1/5^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1/5} f(x)$$

onde

$$f(x) = 2 + |\ 5x - 1\ |$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1/5^+} f(x) &= \lim_{x\to 1/5^+} 2 + |\ 5x - 1\ | \\ &= 2 + |\ 5 \cdot \frac{1}{5} - 1\ | \\ &= 2 + |\ 0\ | \\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1/5^-} f(x) &= \lim_{x\to 1/5^-} 2 + |\ 5x - 1\ | \\ &= 2 + |\ 5 \cdot \frac{1}{5} - 1\ | \\ &= 2 + |\ 0\ | \\ &= 2\end{aligned}$$

Como os limites laterais em $x = 2$ existem e são iguais,

$$\lim_{x\to 1/5} f(x) = \lim_{x\to 1/5^-} f(x) = \lim_{x\to 1/5^+} f(x)$$

ou

$$\lim_{x\to 1/5} f(x) = \lim_{x\to 1/5} 2 + |\ 5x - 1\ |= 2$$

(c) $$\lim_{x\to 0} f(x), \quad \lim_{x\to 5^+} f(x), \quad \lim_{x\to 5^-} f(x), \quad \lim_{x\to 5} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -5} f(x)$$

onde

$$f(x) = \frac{x^5 - 25}{x - 5}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x^5 - 25}{x - 5} &= \frac{0^5 - 25}{0 - 5} \\ &= \frac{-\ 25}{-\ 5} \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{x^5 - 25}{x - 5} = \frac{\lim\limits_{x \to 5^+} x^5 - 25}{\lim\limits_{x \to 5^+} x - 5}$$

$$\Rightarrow \frac{3100}{0^+}$$
$$= +\infty$$

$$\lim_{x\to 5^-} \frac{x^5-25}{x-5} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to 5^-} x^5-25}{\displaystyle\lim_{x\to 5^-} x-5}$$
$$\Rightarrow \frac{3100}{0^-}$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^5-25}{x-5} = \nexists \qquad \text{Segundo os dois itens anteriores.}$$

$$\lim_{x\to -5} \frac{x^5-25}{x-5} = \frac{(-5)^5-25}{(-5)-5}$$
$$= \frac{-3125-25}{-5-5}$$
$$= \frac{-3150}{-10}$$
$$= 315$$

5. (1,00 ponto) ---

Calcule os seguintes limites infinitos,

(a) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^3-2}$$

(b) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x\sqrt{x}+3x-10}{x^3}$$

Solução:

(a)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^3-2} &= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+3x+1\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-2\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-2}{x^3}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{3x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{2}{x^3}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^3}\right)} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^3}} \\
&= \frac{0+0+0}{1-0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{x}+3x-10}{x^3} &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{3/2}}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{10}{x^3}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{3/2}}+\frac{3}{x^2}-\frac{10}{x^3}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{10}{x^3} \\
&= 0+0-0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

6. (1,00 ponto)

Investigue a continuidade nos pontos indicados:

(a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{em} \quad x = 0$$

(b) $$f(x) = x - |\, x \,| \qquad \text{em} \quad x = 0$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 3 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases} \qquad \text{em} \quad x = 2$$

Solução:

(a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{em} \quad x = 0$$

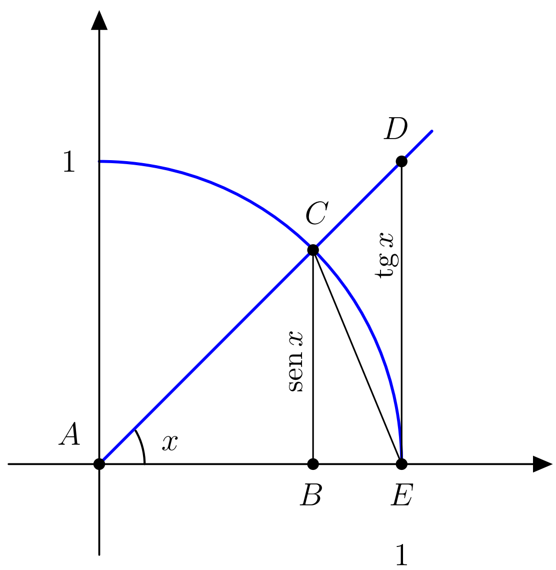
Mais especificamente, para que uma função seja contínua em um ponto x, o limite da função neste ponto deve existir e ser igual ao valor da função no ponto. Isto é, se $x = a$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{e} \qquad f(x) = f(a) \;\; \text{em} \;\; x = a$$

Como os limites do numerador e do denominador são infinitos não podemos aplicar os resultados que conhecemos de limites. Seu valor seria $0/0$. Chamamos isso de uma indeterminação e mais adiante estudaremos como tratá-las. No entanto, podemos fazer uma análise geométrica do problema.

Para calcular o limite da função uma ideia é calcular os limites laterais no ponto em questão ($x \to 0^-$ e $x \to 0^+$), caso eles existam e sejam iguais teremos encontrado o limite desejado.

Considere o gráfico a seguir, que nos mostra o círculo trigonométrico em seu primeiro quadrante. O ângulo x e sua função seno (eixo vertical).



Nessa figura temos dois triângulos retângulos, a saber, o triângulo ABC formado pelos segmentos de reta, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, e o triângulo AEC formado pelos segmentos de reta, $\overline{AE}$, $\overline{ED}$ e $\overline{AD}$. É fácil verificar que o segmento $\overline{BC}$ vale $\operatorname{sen} x$, e o segmento $\overline{BC}$ vale $\operatorname{tg} x$ — use as definições geométricas das funções trigonométricas,

Triângulo *ABC*

$$\operatorname{sen}\left(\hat{\text{A}}\text{ngulo}\right) = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\operatorname{sen} x}{1} \quad (\text{triângulo } ABC)$$

$$\Longrightarrow \overline{BC} = \operatorname{sen} x \quad (\text{triângulo } ABC)$$

Triângulo *AEC*

$$\text{Área}_{AEC} = \frac{1}{2} \cdot \text{Base} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$$

Triângulo *AED*

$$\operatorname{tg}\left(\hat{\text{A}}\text{ngulo}\right) = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Cateto Adjacente}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DE}}{1} \quad (\text{triângulo } AED)$$

$$\Longrightarrow \overline{DE} = \operatorname{tg} x \quad (\text{triângulo } AED)$$

$$\text{Área}_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \text{Base} \cdot \text{Altura} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Seção circular *AEC* (com ângulo x)

Figura	Ângulo	Área
Círculo	2π	$\pi \cdot (\text{raio})^2$
Seção circular	x	(Área da seção)

Por regra de três, a área da seção circular é:

$$\text{Regra de três} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} 2\pi & \text{———} & \pi \cdot (\text{raio})^2 \\ x & \text{———} & (\text{Área da seção}) \end{array}$$

ou

$$(\text{Área da seção}) = \frac{\pi \cdot (\text{raio})^2 \cdot x}{2\pi} \quad (\text{Seção circular } \widehat{AEC} \text{ com ângulo } x)$$

como o raio vale 1

$$\Longrightarrow \text{Área}_{\widehat{AEC}} = \frac{x}{2} \quad (\text{Seção } \widehat{AEC})$$

Resumindo

$$\text{Área}_{AEC} = \frac{\operatorname{sen} x}{2}, \qquad \text{Área}_{\widehat{AEC}} = \frac{x}{2}, \qquad \text{Área}_{AED} = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

olhando na figura as três áreas, é imediato perceber

$$\text{Área}_{AEC} < \text{Área}_{\widehat{AEC}} < \text{Área}_{AED}$$

ou

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

Numa análise análoga, no quarto quadrante, chegaremos à desigualdades semelhantes, porém com sinais trocados, já que no quarto quadrante o ângulo seria $-x$ e os valores dos senos são negativos

Unificando as duas análises — para ângulos positivos (1º quadrante) e ângulos negativos (4º quadrante) com a função valor absoluto, podemos reescrever

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{2}\right| < \left|\frac{x}{2}\right| < \left|\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right|$$

ou

$$\frac{1}{2}\left|\operatorname{sen} x\right| < \frac{1}{2}\left|x\right| < \frac{1}{2}\left|\operatorname{tg} x\right|$$

ou ainda

$$|\operatorname{sen} x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$$

agora, podemos dividir as desigualdades por $|\operatorname{sen} x|$. Que, por ser positivo, não inverte o sentido das desigualdades

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{|\operatorname{sen} x|} < \frac{|x|}{|\operatorname{sen} x|} < \frac{|\operatorname{tg} x|}{|\operatorname{sen} x|}$$

$$1 < \frac{|x|}{|\operatorname{sen} x|} < \frac{|1|}{|\cos x|}$$

ou seus recíprocos

$$1 > \frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|} > |\cos x|$$

como aqui, só nos interessa o primeiro e quarto quadrantes, podemos retirar os módulos das desigualdades acima, já que a função $\cos x$ é sempre positiva nos 1º e 4º quadrantes, assim como a função $\frac{|\operatorname{sen} x|}{|x|}$ que também sempre é positiva nesse quadrantes, pois quando x é positivo também o é $\operatorname{sen} x$ e quando x é negativo, $\operatorname{sen} x$ também é, daí

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

passando ao limite

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \lim_{x\to 0} 1$$

mas

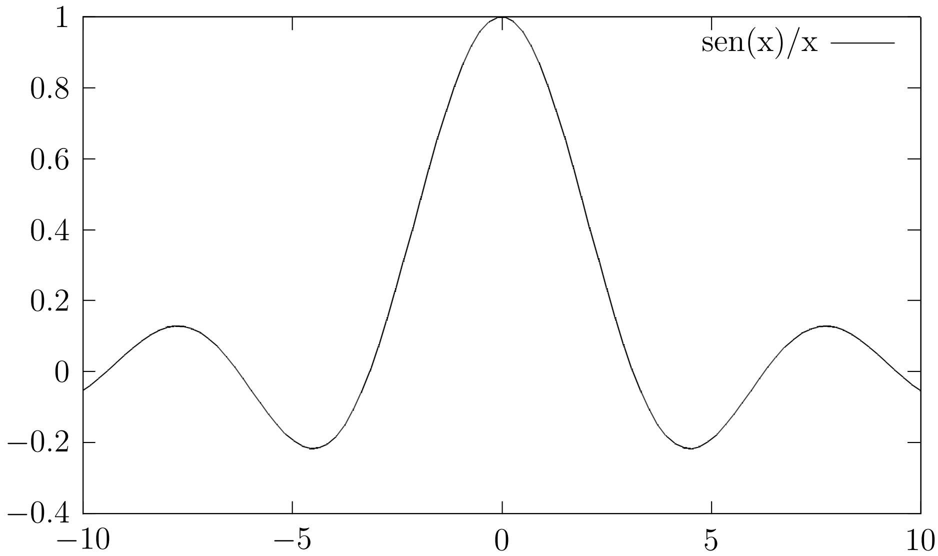
$$\underbrace{\lim_{x\to 0}\cos x}_{1} < \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} < \underbrace{\lim_{x\to 0} 1}_{1}$$

$$1 < \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

logo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Como a função vale 0 em $x = 0$ e seu limite vale 1, ela é descontínua em $x = 0$.



(b) $\quad f(x) = x - \mid x \mid \qquad$ em $\quad x = 0$

porém

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x - \mid x \mid) = 0 - \mid 0 \mid = 0$

e

$f(0) = 0 - \mid 0 \mid = 0$

portanto, a função é contínua em $x = 0$.

(c) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x^2-4} & \text{se} \quad x\neq 2\\ 3 & \text{se} \quad x=2\end{cases} \qquad \text{em} \quad x=2$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x+2)(x-2)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}\\ &= \frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+2}\\ &= \frac{12}{4}\\ &= 3\end{aligned}$$

e por definição

$$f(2)=3$$

Mostrando que a função é contínua em $x=2$.

7. (1,00 ponto) ———————————————————————————

Ache a inclinação da reta tangente a curva $x=y^4-6y^2$ nos pontos aonde a curva corta o eixo-y.

Solução:

Uma **primeira interpretação** considera o plano yx — e não xy, o que é mais frequente — ou seja, y é a variável independente e x a variável dependente.

Primeiramente vamos determinar os pontos aonde a curva corta o eixo-y, isto é aonde $x=0$. Com $x=0$

$$0=y^4-6y^2 \implies y^2(y^2-6)=0 \implies y=-\sqrt{6},\; y=0 \;\text{ e }\; y=\sqrt{6}$$

Logo estes pontos são $(y,x)=(0,0)$, $(y,x)=(-\sqrt{6},0)$ e $(y,x)=(\sqrt{6},0)$.

A inclinação da reta tangente é o valor da derivada no ponto, lembre-se de que a expressão para esta reta é

$$x-x_0=f'(y_0)(y-y_0)$$

onde (y_0,x_0) são as coordenadas do ponto e

$$f'(y)=4y^3-12y$$

Para o ponto $(-\sqrt{6}, 0)$

$$f'(-\sqrt{6}) = 4 \cdot \left(-\sqrt{6}\right)^3 - 12 \cdot \left(-\sqrt{6}\right) = -12\sqrt{6},$$

para o ponto $(0, 0)$

$$f'(0) = 4 \times (0)^3 - 12 \times 0 = 0$$

e para o ponto $(\sqrt{6}, 0)$

$$f'(\sqrt{6}) = 4 \cdot \left(\sqrt{6}\right)^3 - 12 \cdot \left(\sqrt{6}\right) = 12\sqrt{6},$$

Logo no ponto $(-\sqrt{6}, 0)$ a inclinação da reta tangente vale $-12\sqrt{6}$, no ponto $(0, 0)$ a inclinação da reta tangente vale 0 e no ponto $(\sqrt{6}, 0)$ a inclinação da reta tangente tem valor $12\sqrt{6}$.

Uma **segunda interpretação** considera o plano xy, como comumente é feito, isto é, x é a variável independente e y a variável dependente. Neste caso

Vamos determinar os pontos aonde a curva corta o eixo-y, isto é aonde $x = 0$. Com $x = 0$

$$x = y^4 - 6y^2 \implies y^2\left(y^2 - 6\right) = 0 \implies y = -\sqrt{6},\ y = 0 \text{ e } y = \sqrt{6}$$

Logo estes pontos são $(x, y) = (0, -\sqrt{6})$, $(x, y) = (0, 0)$ e $(x, y) = (0, \sqrt{6})$.

A inclinação da reta tangente é o valor da derivada no ponto, lembre-se de que a expressão para esta reta é

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

onde (x_0, y_0) são as coordenadas do ponto e agora

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

e daí

$$\begin{aligned} x = y^4 - 6y^2 &\implies \frac{dx}{dx} = \frac{d(y^4)}{dx} - 6\frac{d(y^2)}{dx} \\ &\implies 1 = 4y^3\frac{dy}{dx} - 6 \cdot 2y\frac{dy}{dx} \\ &\implies 1 = \left(4y^3 - 12y\right)\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

e explicitando a derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4y^3 - 12y}$$

Para o ponto $(0, -\sqrt{6})$

$$f' = \frac{1}{4 \cdot (-\sqrt{6})^3 - 12 \cdot (-\sqrt{6})} = \frac{1}{-12\sqrt{6}} = -\frac{1}{12\sqrt{6}},$$

para o ponto $(0, 0)$

$$f' = \frac{1}{4 \cdot (0)^3 - 12 \cdot (0)} = \frac{1}{0} \ \Rightarrow \infty$$

e para o ponto $(0, \sqrt{6})$

$$f' = \frac{1}{4 \cdot (\sqrt{6})^3 - 12 \cdot (\sqrt{6})} = +\frac{1}{12\sqrt{6}}$$

Logo no ponto $(0, 0)$ a reta tangente tem inclinação infinita (∞), isto é, ela é vertical, e nos pontos $(0, -\sqrt{6})$ e $(0, \sqrt{6})$ as inclinações das retas tangentes valem $-\frac{1}{12\sqrt{6}}$ e $+\frac{1}{12\sqrt{6}}$, respectivamente.

8. (1,00 ponto) ———————————————————————————

Calcule o valor das derivadas até quarta ordem da função $f(x) = \cos(x^2)^{-5/4}$ no ponto $x = 0$.

Solução:

Vejamos as derivadas de $f(x)$

$f(x) = \cos(x^2)^{-5/4}$

$$f'(x) = \left[\cos(x^2)^{-5/4}\right]'$$

$$= -\frac{5}{4}\left(\cos(x^2)\right)^{-5/4-1} \cdot \left[\cos(x^2)\right]'$$

$$= -\frac{5}{4}\left(\cos(x^2)\right)^{-9/4} \cdot \left(-\text{sen}\,\left(x^2\right)\left[x^2\right]'\right)$$

$$= -\frac{5}{4}\left(\cos(x^2)\right)^{-9/4} \cdot \left(-\text{sen}\,\left(x^2\right)(2x)\right)$$

$$= \frac{5}{2} \cdot x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4}$$

$$f''(x) = \left[\frac{5}{2} \cdot x \cdot \operatorname{sen}\left(x^2\right) \cdot \left(\cos(x^2)\right)^{-9/4}\right]'$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left[x \cdot \operatorname{sen}\left(x^2\right) \cdot \left(\cos(x^2)\right)^{-9/4}\right]'$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left\{[x]' \cdot \left(\operatorname{sen}\left(x^2\right) \cdot \left(\cos(x^2)\right)^{-9/4}\right) + (x) \cdot \left[\operatorname{sen}\left(x^2\right) \cdot \left(\cos(x^2)\right)^{-9/4}\right]'\right\}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left\{1 \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} + x \cdot \left[\operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4}\right]'\right\}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left\{\operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} + x \cdot \left[\operatorname{sen} x^2\right]' \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} + x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \left[\left(\cos x^2\right)^{-9/4}\right]'\right\}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left\{\operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} + x \cdot \left(-\cos x^2 \left[x^2\right]'\right) \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} + x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4-1} \cdot \left[\cos x^2\right]'\right\}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left\{\operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} - 2 \cdot x^3 \cdot \cos x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} - \frac{9}{4} \cdot x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-13/4} \cdot \left[\cos x^2\right]'\right\}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left\{\operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} - 2 \cdot x^3 \cdot \cos x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} - \frac{9}{4} \cdot x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-13/4} \cdot \left(-\operatorname{sen} x^2\right) \cdot \left[x^2\right]'\right\}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left\{\operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} - 2 \cdot x^3 \cdot \cos x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} + \frac{9}{4} \cdot x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-13/4} \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot (2x)\right\}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left\{\operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} - 2 \cdot x^3 \cdot \cos x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} + \frac{9}{2} \cdot x^2 \cdot \operatorname{sen}^2 x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-13/4}\right\}$$

Agora vamos calcular os valores pedidos das seguintes funções

$$f(x) = \cos(x^2)^{-5/4}$$

$$f'(x) = \frac{5}{2} \cdot x \cdot \operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4}$$

$$f''(x) = \frac{5}{2} \cdot \left\{\operatorname{sen} x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} - 2 \cdot x^3 \cdot \cos x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-9/4} + \frac{9}{2} \cdot x^2 \cdot \operatorname{sen}^2 x^2 \cdot \left(\cos x^2\right)^{-13/4}\right\}$$

em $x = 0$

$$f(0) = \cos(0^2)^{-5/4}$$

$$= \cos(0)^{-5/4}$$

$$= 1^{-5/4}$$

$$= 1$$

$$f'(0) = \frac{5}{2} \cdot 0 \cdot \operatorname{sen} 0^2 \cdot \left(\cos 0^2\right)^{-9/4}$$

$$= 0$$

$$f''(0) = \frac{5}{2} \cdot \left\{\operatorname{sen} 0^2 \cdot \left(\cos 0^2\right)^{-9/4} - 2 \cdot 0^3 \cdot \cos 0^2 \cdot \left(\cos 0^2\right)^{-9/4} + \frac{9}{2} \cdot 0^2 \cdot \operatorname{sen}^2 0^2 \cdot \left(\cos 0^2\right)^{-13/4}\right\}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left\{\operatorname{sen} 0 \cdot (\cos 0)^{-9/4} - 2 \cdot 0 \cdot \cos 0 \cdot (\cos 0)^{-9/4} + \frac{9}{2} \cdot 0 \cdot \operatorname{sen}^2 0 \cdot (\cos 0)^{-13/4}\right\}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left\{0 \cdot (1)^{-9/4} - 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot (1)^{-9/4} + \frac{9}{2} \cdot 0 \cdot 0 \cdot (1)^{-13/4}\right\}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \left\{0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{9}{2} \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1\right\}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \{0 - 0 + 0\}$$

$$= 0$$

Resumindo

$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(x) = 0$

9. (2,00 pontos) ———————————————

Ache as primeiras e segundas derivadas das funções:

(a) $f(x) = (10 - 5x^2)^4$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{2 - x^4}$

(c) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x^3)$

Solução:

(a)

$$f(x) = (10 - 5x^2)^4$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[(10 - 5x^2)^4\right]' \\
&= 4(10 - 5x^2)^3 \left[10 - 5x^2\right]' \\
&= 4(10 - 5x^2)^3(-2 \cdot 5x^1) \\
&= -40x(10 - 5x^2)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left[-40x \left(10 - 5x^2\right)^3\right]' \\
&= \left[-40 \left(10x^3 - 5x^5\right)^3\right]' \\
&= -40 \left[\left(10x^3 - 5x^5\right)^3\right]' \\
&= -40 \cdot 3 \left(10x^3 - 5x^5\right)^2 \left[10x^3 - 5x^5\right]' \\
&= -120 \left(10x^3 - 5x^5\right)^2 \left(30x^2 - 25x^4\right)
\end{aligned}$$

(b)

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{2 - x^4}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{x^2 + 4}{2 - x^4}\right]' \\
&= \frac{\left[x^2 + 4\right]' \left(2 - x^4\right) - \left(x^2 + 4\right) \left[2 - x^4\right]'}{\left(2 - x^4\right)^2} \\
&= \frac{2x \left(2 - x^4\right) - \left(x^2 + 4\right) \left(-4x^3\right)}{\left(2 - x^4\right)^2} \\
&= \frac{\left(4x - 2x^5\right) + \left(4x^5 + 16x^3\right)}{\left(2 - x^4\right)^2} \\
&= \frac{\left(4x + 2x^5 + 16x^3\right)}{\left(2 - x^4\right)^2} \\
&= \frac{2x \left(2 + 8x^2 + x^4\right)}{\left(2 - x^4\right)^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left[\frac{(4x+16x^3+2x^5)}{(2-x^4)^2}\right]' \\
&= \frac{[4x+16x^3+2x^5]'(2-x^4)^2-(4x+16x^3+2x^5)\left[(2-x^4)^2\right]'}{(2-x^4)^4} \\
&= \frac{(4+48x^2+10x^4)(2-x^4)^2-(4x+16x^3+2x^5)\left(2(2-x^4)[2-x^4]'\right)}{(2-x^4)^4} \\
&= \frac{(4+48x^2+10x^4)(2-x^4)^2-(4x+16x^3+2x^5)(2(2-x^4)(-4x^3))}{(2-x^4)^4} \\
&= \frac{(4+48x^2+10x^4)(2-x^4)^2+8x^3(4x+16x^3+2x^5)(2-x^4)}{(2-x^4)^4} \\
&= \frac{(4+48x^2+10x^4)(2-x^4)+8x^3(4x+16x^3+2x^5)}{(2-x^4)^3} \\
&= \frac{(8+96x^2+20x^4-4x^4-48x^6-10x^8)+(32x^4+128x^6+16x^8)}{(2-x^4)^3} \\
&= \frac{(8+96x^2+48x^4-80x^6+6x^8)}{(2-x^4)^3}
\end{aligned}
$$

(c)

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\cos x^3\right)$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\operatorname{sen}\left(\cos x^3\right)\right]' \\
&= \cos\left(\cos x^3\right)\left[\cos x^3\right]' \\
&= \cos\left(\cos x^3\right)\left(-\operatorname{sen} x^3\right)\left[x^3\right]' \\
&= \cos\left(\cos x^3\right)\left(-\operatorname{sen} x^3\right)\left(3x^2\right) \\
&= -3x^2\cdot\operatorname{sen} x^3\cdot\cos\left(\cos x^3\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left[-3x^2\cdot\operatorname{sen} x^3\cdot\cos\left(\cos x^3\right)\right]' \\
&= \left[-3x^2\right]'\cdot\left(\operatorname{sen} x^3\cdot\cos\left(\cos x^3\right)\right)+\left(-3x^2\right)\cdot\left[\operatorname{sen} x^3\cdot\cos\left(\cos x^3\right)\right]' \\
&= (-6x)\cdot\left(\operatorname{sen} x^3\cdot\cos\left(\cos x^3\right)\right)+\left(-3x^2\right)\cdot\left\{\left[\operatorname{sen} x^3\right]'\cdot\left(\cos\left(\cos x^3\right)\right)+\left(\operatorname{sen} x^3\right)\cdot\left[\cos\left(\cos x^3\right)\right]'\right\}
\end{aligned}
$$

$$= -6x \cdot \operatorname{sen} x^3 \cdot \cos\left(\cos x^3\right) - 3x^2 \cdot \left\{\cos\ x^3 \cdot \left[x^3\right]' \cdot \cos\left(\cos x^3\right) + \operatorname{sen} x^3 \cdot \left(-\operatorname{sen}\ \left(\cos x^3\right) \cdot \left[\cos x^3\right]'\right)\right\}$$

$$= -6x \cdot \operatorname{sen} x^3 \cdot \cos\left(\cos x^3\right) - 3x^2 \cdot \left\{\cos\ x^3 \cdot \left(3x^2\right) \cdot \cos\left(\cos x^3\right) - \operatorname{sen} x^3 \cdot \operatorname{sen}\ \left(\cos x^3\right) \cdot \left[\cos x^3\right]'\right\}$$

$$= -6x \cdot \operatorname{sen} x^3 \cdot \cos\left(\cos x^3\right) - 3x^2 \cdot \left\{\cos\ x^3 \cdot \left(3x^2\right) \cdot \cos\left(\cos x^3\right) - \operatorname{sen} x^3 \cdot \operatorname{sen}\ \left(\cos x^3\right) \cdot \left(-\operatorname{sen} x^3\right) \cdot \left[x^3\right]'\right\}$$

$$= -6x \cdot \operatorname{sen} x^3 \cdot \cos\left(\cos x^3\right) - 3x^2 \cdot \left\{3x^2 \cdot \cos\ x^3 \cdot \cos\left(\cos x^3\right) + \operatorname{sen} x^3 \cdot \operatorname{sen}\ \left(\cos x^3\right) \cdot \left(\operatorname{sen} x^3\right) \cdot \left(3x^2\right)\right\}$$

$$= -6x \cdot \operatorname{sen} x^3 \cdot \cos\left(\cos x^3\right) - 3x^2 \cdot \left\{3x^2 \cdot \cos\ x^3 \cdot \cos\left(\cos x^3\right) + 3x^2 \cdot \operatorname{sen}^2 x^3 \cdot \operatorname{sen}\ \left(\cos x^3\right)\right\}$$

$$= -6x \cdot \operatorname{sen} x^3 \cdot \cos\left(\cos x^3\right) - 9x^4 \cdot \left\{\cos\ x^3 \cdot \cos\left(\cos x^3\right) + \operatorname{sen}^2 x^3 \cdot \operatorname{sen}\ \left(\cos x^3\right)\right\}$$