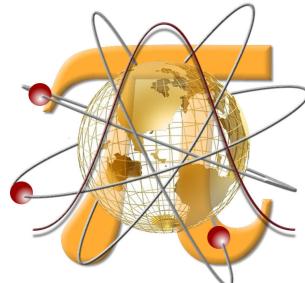
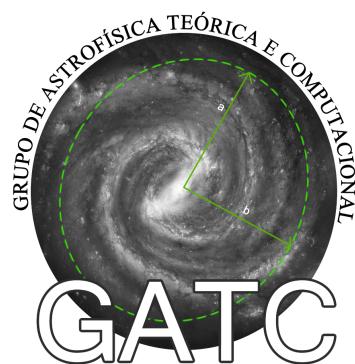


UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E FÍSICA

GRUPO DE ASTROFÍSICA TEÓRICA E COMPUTACIONAL

Determinação de Períodos de Pulsão Estelar Através da Entropia de Shannon Condisional



Autor:

Gabriel Lauffer Ramos

Orientador:

Prof. Dr. Fabricio Ferrari

Rio Grande, RS.

**Determinação de Períodos de Pulsação Estelar Através da Entropia de
Shannon Condisional**

*Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Física
Bacharelado da Universidade Federal do Rio Grande como requisito
parcial para obtenção do título de bacharel em Física.*

Discente: Gabriel Lauffer Ramos

Orientador: Prof. Dr. Fabricio Ferrari

Prof. Dr. Fabricio Ferrari

Orientador

Profa. Dra. Dinalva A. Sales

Banca Examinadora

Prof. Dr. Cristian G. Bernal

Banca Examinadora

Rio Grande, ____ de _____ de _____.

*“The Road goes ever on and on
Down from the door where it began.
Now far ahead the Road has gone,
And I must follow, if I can,
Pursuing it with eager feet,
Until it joins some larger way
Where many paths and errands meet.
And whither then? I cannot say.”*

J.R.R Tolkien, *The Fellowship of the Ring*.

**Determinação de Períodos de Pulsação Estelar Através da Entropia de
Shannon Condicional**

por Gabriel Lauffer Ramos

The Thesis Abstract is written here (and usually kept to just this page). The page is kept centered vertically so can expand into the blank space above the title too...

**Conditional Shannon Entropy Method to Detect Periods on Variable
Stars**

by Gabriel Lauffer Ramos

abstract in english

Agradecimentos

colocar os agradecimentos...

Sumário

Resumo	ii
Abstract	iii
Agradecimentos	iv
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	viii
1 Introdução	1
1.1 Conceitos de astrofísica estelar	3
1.1.1 Fluxo	3
1.1.2 Magnitude	3
1.1.3 Magnitude absoluta e o módulo de distância	4
1.1.4 Sistemas de magnitudes	6
1.1.5 Magnitude bolométrica	6
1.1.6 Extinção atmosférica	7
1.1.7 Extinção interestelar	8
1.1.8 Data Juliana	8
1.1.9 Curva de luz	8
1.1.10 Fase e o Espaço de Fase	9
1.1.11 Classificação Espectral	10
1.1.12 Diagrama H-R	11
1.1.13 Pulsação Estelar	13
1.1.13.1 Oscilação em uma corda	14
1.1.13.2 Oscilação em uma corda com uma extremidade fixa	15
1.1.13.3 Oscilação bidimensional	15
1.1.13.4 Oscilações em 3 dimensões	17
1.1.13.5 Modo radial	18
1.1.13.6 Modos não-radiais	19
1.2 Introdução Histórica	20
1.2.1 Estrelas Variáveis	20
1.2.2 Técnicas de Observação	21
1.2.2.1 Métodos fotográficos	21
1.2.2.2 Métodos fotoelétricos	22
1.2.2.3 Detectores em área	23
1.3 Detecção de Períodos	24

2 Estrelas Variáveis	26
2.1 Variáveis Extrínsecas	26
2.1.1 Variáveis eclipsantes	27
2.1.2 Variáveis rotacionais	28
2.2 Variáveis Intrínsecas	28
2.2.1 Variáveis eruptivas	29
2.2.2 Variáveis cataclísmicas	29
2.2.3 Variáveis pulsantes	30
2.2.3.1 Cefeidas	31
2.2.3.2 RR Lyrae	32
2.3 Relações com o Período	32
2.3.1 Período - Luminosidade (<i>Lei de Leavitt</i>)	32
2.3.2 Período - Densidade	34
3 Metodologia	37
3.1 Entropia de Shannon	37
3.1.1 Entropia de Shannon condicional	39
3.2 Catálogo OGLE	40
3.3 Algoritmo	41
3.4 Análise Teórica	43
4 Resultados e Discussão	44
4.1 Dados do Catálogo OGLE	44
4.2 Dados Sintéticos	45
4.3 Conclusão	49
A Algoritmo	51
Bibliografia	56

Listas de Figuras

1.1	Exemplo de curva de luz	9
1.2	Exemplos de espaço de fase	10
1.3	Diagrama H-R.	12
1.4	Diagrama H-R para estrelas variáveis.	13
1.5	Oscilação em uma corda com extremidades fixas	15
1.6	Oscilação em uma corda.	16
1.7	Oscilação radial em um disco.	16
1.8	Oscilação não-radial em um disco.	17
1.9	Oscilação radial e não-radial em um disco.	17
1.10	Oscilação não-radial em uma esfera.	19
2.1	Árvore da Variabilidade	27
2.2	Curva de variáveis eclipsantes.	28
2.3	Curva de luz da Supernova KSN 2011a	30
2.4	Curva de luz de Cefeidas	31
2.5	Curva de luz de RR Lyrae	33
3.1	Exemplos de entropia	38
3.2	Efeito de <i>Aliasing</i> com período de 1 dia.	39
3.3	Pseudo-código do algoritmo.	42
4.1	Histogramas sobre tempo inicial e final.	45
4.2	Histograma sobre quantidade de pontos.	46
4.3	Curva de luz sintética.	47
4.4	Resultados obtidos em escala de cinza. O eixo das abscissas representa o parâmetro de escala k da amostragem e o eixo das ordenadas representa a variação do parâmetro de escala B para o ruído. Quanto mais escura a cor do quadrado mais correto o valor calculado pela entropia de Shannon condicional.	48

Lista de Tabelas

1.1	Exemplo de magnitudes aparentes.	4
1.2	Filtros, comprimento de onda efetivo e largura da banda.	6
1.3	Classificação Espectral.	11
3.1	Exemplo de dados do catálogo OGLE	41
4.1	Quantidade de dados analisados e resultados corretos.	44

*Dedico este trabalho aos meus pais, por todo o incentivo e
esforço deles para me garantirem uma educação de
qualidade.*

Capítulo 1

Introdução

Na astronomia, especialmente no campo das estrelas variáveis, geralmente é necessário analisar dados com períodos desconhecidos. Existem métodos desenvolvidos para lidar com dados que possuem intervalos espaciais uniformes, porém as observações geralmente são limitadas para o período da noite e possuem limitações devido ao clima e disponibilidade do telescópio, o que faz com que os dados sejam espaçados por uma ordem de horas, dias ou até mesmo meses (Ferraz-Mello, 1981). Assim, os dados obtidos raramente possuem um espaçamento constante entre os pontos de observação e lidar com este tipo de série temporal não é um trabalho fácil (Lomb, 1976).

Estrelas variáveis são objetos em que seu brilho aparente oscila em função do tempo. A partir desta variação do brilho, podemos obter o período de variação na magnitude da estrela analisando a sua curva de luz, ou seja, examinando os dados observacionais obtidos pelo telescópio. A obtenção deste período de oscilação da luz de uma estrela variável é fundamental para descrever a estrela, pois podemos relacionar este período com luminosidade (Leavitt e Pickering, 1912), densidade (Payne, 1930) e cor (Kraft, 1960). Também, as estrelas variáveis são utilizadas como velas padrões e através da relação entre período-luminosidade podemos estimar distâncias astronômicas, que é um dos problemas fundamentais da astronomia.

Existem diversos algoritmos para a determinação de períodos em dados astronômicos. Cada um possui um método diferente ou alguma pequena modificação em relação aos demais. Mesmo com uma grande quantidade de métodos, nenhum deles parece se sobressair de uma forma geral (Graham et al., 2013a). Alguns métodos são melhores para lidar com dados que sejam igualmente espaçados, enquanto que outros são adaptados para lidar com espaçamento variável. Os algoritmos mais utilizados para determinação de períodos em séries temporais astronômicas fazem um ajuste de curva utilizando o método dos mínimos quadrados (Lomb, 1976) ou utilizam análise de Fourier (Ferraz-Mello, 1981). Outros métodos tentam minimizar alguma grandeza na dispersão da série temporal no espaço de fase, como é o caso da análise de variância (Schwarzenberg-Czerny, 1989) e da entropia (Cincotta, Mendez e Nunez, 1995).

O objetivo deste trabalho é testar um algoritmo que seja confiável para trabalhar com séries temporais astronômicas e que não seja dependente do espaçamento entre os dados observacionais. Este algoritmo trabalha com a entropia de Shannon condicional (Graham et al., 2013b; Cincotta et al., 1999), um método que utiliza a dispersão no espaço de fase para obter o período da série temporal através da minimização da entropia.

Neste capítulo de introdução será feita uma revisão de alguns tópicos de astrofísica estelar importantes para a compreensão do trabalho e uma revisão histórica e bibliográfica sobre as estrelas variáveis, técnicas de observação e métodos e detecção de períodos. No capítulo 2 será abordado o tópico sobre estrelas variáveis, explicando a sua classificação, importância e as principais relações com o período. A explicação do método utilizado neste trabalho será abordado no capítulo 3. Finalmente, os resultados obtidos e exemplo de aplicação do método será discutida no capítulo 4.

1.1 Conceitos de astrofísica estelar

1.1.1 Fluxo

O Fluxo (F) é a medida de energia por unidade de área e por unidade de tempo, ou seja, é a potência emitida através de uma superfície. O fluxo a uma distância r de uma estrela é obtido pela expressão,

$$F(r) = \frac{L}{4\pi r^2} \quad [\text{W m}^{-2}] \text{ ou } [\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}] \quad (1.1)$$

em que L é a luminosidade da estrela ou a energia total emitida por unidade de tempo em todas as direções. Pela expressão do fluxo, podemos perceber que esta quantidade diminui com o quadrado da distância.

1.1.2 Magnitude

O sistema de magnitude foi criado pelo Grego Hiparco (160-125 a.C.) há mais de 2000 anos. Ele dividiu as estrelas visíveis a olho nu de acordo com o seu brilho aparente, classificando as estrelas mais brilhantes como magnitude 1 ($m = 1$) e as mais fracas como magnitude 6 ($m = 6$). Como a percepção de brilho do olho humano é logarítmica, o fluxo de uma estrela com $m = 1$ é 100 vezes mais brilhante que uma estrela com $m = 6$. Por definição, a magnitude aparente (m) ou brilho aparente, é a medida do brilho de um objeto observado na Terra que é dado por,

$$m = -2,5 \log \frac{F}{F_0} \quad (1.2)$$

em que F_0 é fluxo para magnitude $m = 0$. Para duas estrelas com magnitudes m_1 e m_2 , e fluxos F_1 e F_2 , a sua diferença é expressa pela relação,

$$m_2 - m_1 = -2,5 \log \frac{F_2}{F_1}. \quad (1.3)$$

A tabela 1.1 possui uma comparação entre as magnitudes aparentes de alguns objetos celestes.

TABELA 1.1: Exemplo de magnitudes aparentes.

Objeto	Magnitude
Vega	0
Sírius	-1,46
Marte	-2,0
Júpiter	-2,7
Lua Cheia	-12,8
Sol	-26,74

Fonte: Extraído de Kepler e Saraiva (2013).

1.1.3 Magnitude absoluta e o módulo de distância

A magnitude aparente é uma medida de brilho que depende da distância e por isso não representa exatamente o brilho real de uma estrela. Para podermos comparar o brilho de duas estrelas, precisamos de uma medida que seja independente da distância. Assim, a magnitude absoluta (M) representa o brilho da estrela a uma distância de 10 parsecs da Terra.

$$M = -2,5 \log \frac{F(10\text{pc})}{F_0} \quad (1.4)$$

A diferença entre a magnitude aparente e absoluta é dada por,

$$m - M = -2,5 \log \frac{F}{F_0} + 2,5 \log \frac{F(10\text{pc})}{F_0} \quad (1.5)$$

$$= -2,5 \left[\log \frac{F}{F_0} - \log \frac{F(10\text{pc})}{F_0} \right] \quad (1.6)$$

$$= -2,5 \log \left[\frac{F}{F_0} \frac{F_0}{F(10\text{pc})} \right] \quad (1.7)$$

$$= -2,5 \log \frac{F}{F(10\text{pc})} \quad (1.8)$$

mas de acordo com a expressão (1.1) para o fluxo,

$$\frac{F}{F(10\text{pc})} = \frac{L}{4\pi r^2} \frac{4\pi (10\text{pc})^2}{L} = \frac{100\text{pc}^2}{r^2} \quad (1.9)$$

em que r é a distância da estrela. Substituindo este resultado na equação (1.8),

$$m - M = -2,5 \log \frac{100\text{pc}^2}{r^2} \quad (1.10)$$

$$= -2,5 \log 100\text{pc}^2 + 2,5 \log r^2 \quad (1.11)$$

$$= 5 \log r - 5 \quad (1.12)$$

e definindo o módulo de distância μ como,

$$\mu = m - M \quad (1.13)$$

obtemos a expressão,

$$\mu = m - M = 5 \log r - 5 \quad (1.14)$$

lembmando que a distância r deve ser medida em parsecs. Evidenciando r , obtemos uma expressão para calcular a distância,

$$r = 10^{0,2(m-M+5)} \quad \text{ou} \quad r = 10^{0,2(\mu+5)} \quad [\text{pc}] . \quad (1.15)$$

Este método de calcular distâncias é conhecido como *Vela Padrão* e utiliza o fato de o fluxo ser inversamente proporcional com a distância. Desta forma, sabendo a relação entre distância e fluxo (ou magnitude) e sabendo as magnitudes aparentes e absolutas podemos calcular a distância pela fórmula (1.15).

1.1.4 Sistemas de magnitudes

A magnitude aparente m que observamos nos telescópios depende do detector utilizado, do filtro aplicado e das configurações do telescópio. Geralmente a sensibilidade de um detector não é a mesma para diferentes comprimentos de onda. Assim, o fluxo medido pelo equipamento é uma parcela do fluxo total da estrela. Portanto, sistemas de magnitudes foram desenvolvidos. Estes sistemas são conjuntos de filtros que permitem o equipamento coletar apenas uma determinada faixa de comprimento de onda. Um dos sistemas mais utilizados é o conjunto UBV (ultravioleta, azul e visível) desenvolvido por Johnson e Morgan (1953). Alguns anos mais tarde, Cousins (1973) adaptou o trabalho de Johnson para o hemisfério sul. Outro conjunto comumente utilizado é o sistema UBVRIJKL (Johnson, 1966). A tabela 1.2 mostra o comprimento de onda efetivo λ_{eff} e a largura de banda $\Delta\lambda$ de alguns filtros utilizados na detecção de fluxo.

TABELA 1.2: Filtros, comprimento de onda efetivo e largura da banda.

Cor	λ_{eff} (nm)	$\Delta\lambda$ (nm)
U	366	65
B	436	89
V	545	84
R	641	158
I	798	154

Fonte: Extraído de Catelan (2015).

1.1.5 Magnitude bolométrica

Em um caso ideal, seria possível medir todo o espectro magnético em um único aparelho. Essa medida seria a *magnitude bolométrica*. Infelizmente, é difícil realizar esta medida pois a nossa atmosfera absorve parte da radiação e também precisamos de diferentes detectores para determinadas frequências.

A magnitude bolométrica (m_{bol}) pode ser obtida pela magnitude visual (m_V),

$$m_{\text{bol}} = m_V - BC \quad (1.16)$$

em que BC é a correção bolométrica. Por definição, esta correção possui valor zero para estrelas parecidas com o nosso Sol e possui valores maiores para estrelas mais quentes ou mais frias do que o Sol.

1.1.6 Extinção atmosférica

A nossa atmosfera não é inteiramente transparente. Embora permita a passagem de luz visível, a atmosfera absorve radiação ultravioleta e várias bandas do infravermelho. Também, existem diversas moléculas que desviam a luz em todas as direções e absorvem parte da radiação reemitindo em praticamente todos os comprimentos de onda. Toda essa perda em radiação devida aos constituintes da atmosfera é chamada de *extinção atmosférica*. Quanto maior a quantidade de ar atravessada pela luz, maior a extinção. Este é um dos motivos que os telescópios terrestres são localizados em lugares altos como montanhas.

Para corrigir este efeito, a magnitude observada em um determinado comprimento de onda pode ser escrita como,

$$m_\lambda = m_{\lambda_0} + K_\lambda \cdot X \quad (1.17)$$

em que m_{λ_0} é a magnitude em um determinado comprimento de onda no alto da atmosfera, K_λ é o coeficiente de extinção e X é a massa de ar, que depende do ângulo de observação.

1.1.7 Extinção interestelar

Devido a presença de poeira no meio interestelar, parte da radiação emitida por alguma fonte é absorvida, desviada e geralmente reemitida em outro comprimento de onda. Toda a perda de radiação devido ao meio interestelar é chamada de *extinção interestelar*. Este desvio que ocorre na radiação causa um desvio para o vermelho no espectro de frequência da luz. Por causa disto, devemos fazer uma correção na formula (1.14) da magnitude aparente observada.

Sendo a extinção interestelar representada pela letra A_λ com um subscrito indicando a banda espectral, a correção na magnitude absoluta para um determinado comprimento de onda a uma distância r será,

$$m_\lambda - M_\lambda - A_\lambda = 5 \log r - 5 \quad (1.18)$$

$$M_\lambda = m_\lambda - A_\lambda - 5 \log r + 5. \quad (1.19)$$

e da mesma forma, a correção para o calculo da distância será,

$$r = 10^{0.2(m-M+5-A_\lambda)}. \quad (1.20)$$

1.1.8 Data Juliana

A data Juliana (sigla JD) foi proposta por Josephus Justus Scalinger em 1583. Com esta data é possível calcular facilmente o intervalo de tempo entre um evento astronômico e outro, pois este formato de medir tempo não possui meses e nem anos, apenas mede a quantidade de dias solares médios decorridos desde 1 de Janeiro de 4713 a.C. (início da era Juliana).

1.1.9 Curva de luz

A curva de luz de uma estrela é simplesmente o gráfico de sua magnitude aparente versus tempo, ou seja, um gráfico dos dados obtidos pelo telescópio,

como mostra a figura 1.1. A partir desses dados que os métodos de detecção de período operam e, no momento em que se define o período da estrela, é possível construir a curva de luz no espaço de fase, como será visto a seguir.

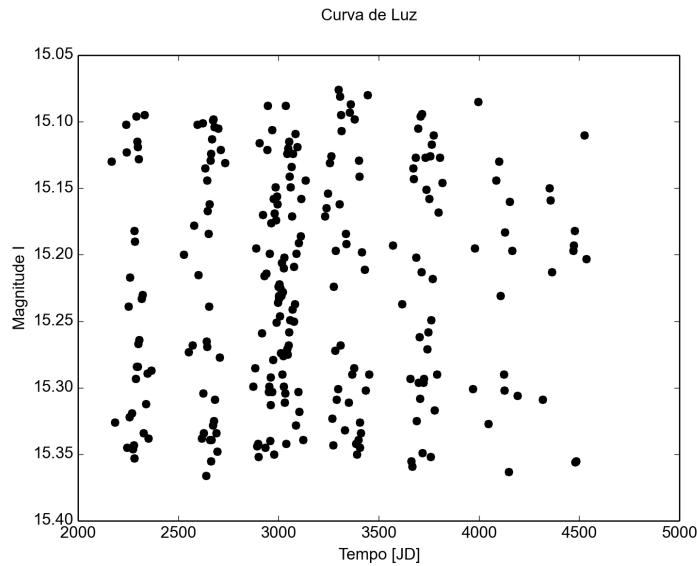


FIGURA 1.1: Exemplo de curva de luz utilizando a Cefeida OGLE-LMC-CEP-0018 do catálogo OGLE. Podemos perceber o espaçamento entre os conjuntos de pontos.

1.1.10 Fase e o Espaço de Fase

Quando uma estrela possui um comportamento periódico, a variação em sua magnitude é representada em ciclos iguais. Cada ciclo é uma fase. Se os ciclos são iguais, não importa qual ciclo nós estamos observando, apenas onde nós estamos no ciclo. Com isso, o espaço de fase é uma representação de todos os ciclos observados em apenas uma fase, ou em apenas um ciclo. Desta forma, os pontos de sobrepõem e formam uma oscilação geral da estrela. A fase é calculada pela seguinte expressão,

$$\phi_i = \frac{t_i}{P} - \left[\frac{t_i}{P} \right] \quad (1.21)$$

em que t_i é o i-ésimo dado do tempo, P é o período de oscilação da magnitude e a quantidade entre colchetes representa apenas o numero inteiro da divisão. O

espaço de fase é o gráfico da magnitude aparente versus a fase.

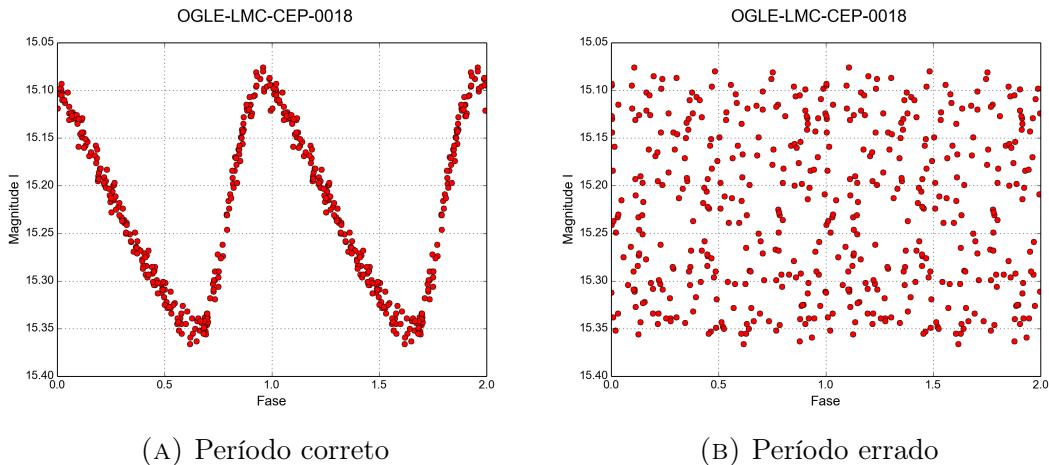


FIGURA 1.2: Exemplos de espaço de fase para a Cefeida OGLE-LMC-CEP-0018 do catálogo OGLE. O espaço de fase da imagem na esquerda foi construído utilizando o período correto da estrela ($P = 4,0478$) e na imagem da direita foi utilizado um período aleatório ($P = 3,0123$).

Quando a série temporal de uma estrela periódica é dividida pelo período correto, será gerado uma dispersão com característica oscilante, como é o caso da figura 1.2a. Se o período utilizado na transformação não for o correto, será gerado uma dispersão aleatória, sem forma definida, como mostra a figura 1.2b.

1.1.11 Classificação Espectral

A classificação espectral é uma forma de dividir as estrelas em relação aos elementos observados em seu espectro e em relação a sua temperatura. Esse método de classificação foi desenvolvido no laboratório de Harvard, nos Estados Unidos, no início do século XX.

A classificação foi desenvolvida por Williamina Fleming (1857-1911), Antonia Caetana de Paiva Pereira Maury (1886-1952) e Annie Jump Cannon (1863-1941) que classificaram 225000 estrelas até magnitude 9. Esse trabalho foi publicado no *Henry Draper Catalogue*. A classificação espectral assim como a cor correspondente das estrelas, temperatura efetiva e as características das linhas espetrais podem ser vista na tabela 1.3.

TABELA 1.3: Classificação Espectral.

Tipo Espectral	Cor	T_{eff} K	Linhas no Espectro
O	Azul	20000 a 40000	HeII e HI
B	Branca-azulada	15000	HeI e HI
A	Branca	9000	HI
F	Branca-amarelada	7000	HI e CaII
G	Amarela	5500	HI e CaII
K	Laranja	4000	Linhas Metálicas
M	Vermelha	3000	CaI

Fonte: Extraído de Kepler e Saraiva (2013).

1.1.12 Diagrama H-R

O Diagrama H-R foi descoberto por Ejnar Hertzsprung (1873-1967) e Henry Russell (1877-1957) em 1913. Esse diagrama apresenta uma relação entre a luminosidade de uma estrela e a sua temperatura superficial. Hertzsprung descobriu que estrelas com uma mesma cor podiam ser divididas pela sua luminosidade, chamando as mais luminosas de gigantes e as menos luminosas de anãs.

No diagrama H-R (figura 1.3) o eixo das abscissas representa a temperatura que cresce para à esquerda e o eixo das ordenadas representa a luminosidade. Podemos dividir o diagrama em algumas seções. Uma dessas seções é a *Sequência Principal*, que cobre a faixa na diagonal que vai do extremo direito inferior (estrelas frias e pouco luminosas) até o extremo esquerdo superior (estrelas quentes e muito luminosas). Na região superior direita acima da sequência principal há uma região chamada *Gigantes Vermelhas* pois é onde esses tipos de estrelas se localizam. Essas estrelas são frias porém luminosas, o que indica um tamanho maior. Acima das Gigantes Vermelhas há a região das *Supergigantes* que apresentam grande luminosidade. Por fim, no canto inferior esquerdo há a região das *Anãs Brancas*, estrelas quentes e pouco luminosas, o que indica o seu tamanho reduzido.

Um fator que determina a posição de uma estrela no digrama H-R é a sua massa. Quanto mais massiva a estrela, mais quente e luminosa ela se torna.

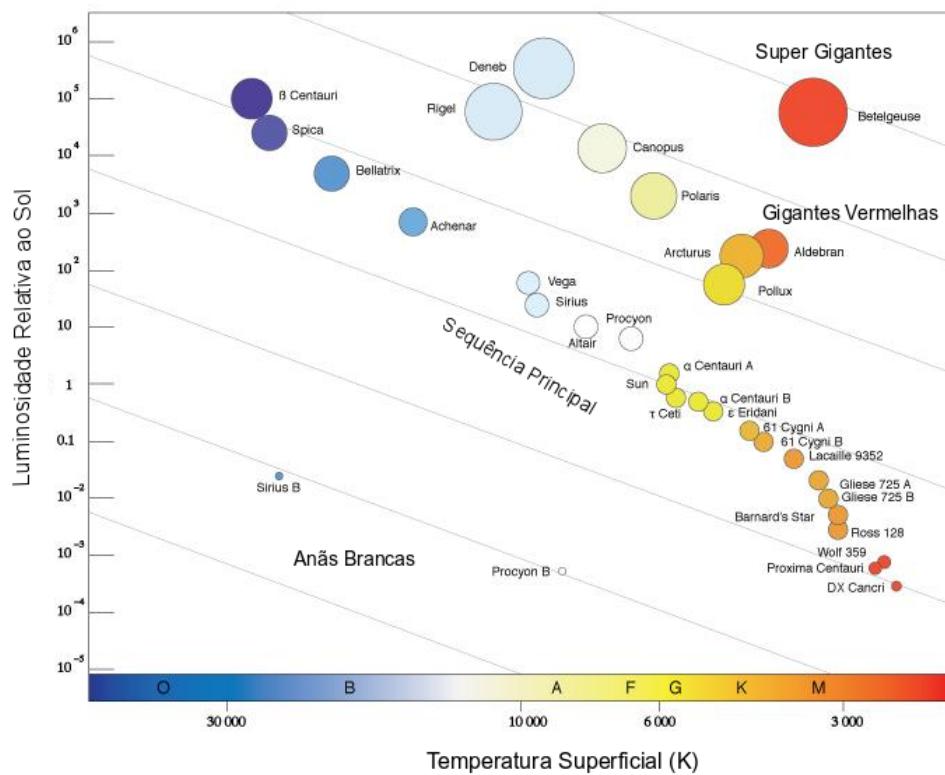


FIGURA 1.3: Diagrama H-R. O eixo das abscissas representa a temperatura superficial da estrela e por convenção cresce para à esquerda. Nesse mesmo eixo podemos ver a classificação espectral. O eixo das ordenadas representa a luminosidade das estrelas relativa com a luminosidade do Sol. As linhas diagonais no diagrama representam o tamanho do raio da estrela, quanto mais para o topo do diagrama, maior o raio. Disponível em <<http://henrietta.iaa.es/el-harén-de-pickering-antonio-c-maury>>. Acessado e adaptado em maio de 2016.

Também é possível interpretar o diagrama como uma relação entre massa e temperatura, pois a luminosidade é proporcional a massa da estrela.

Existe uma versão do diagrama H-R para estrelas variáveis. Nele é possível ver a localização de diversos tipos dessas estrelas. Essa versão do diagrama pode ser visto na figura 1.4. Nesse diagrama uma região importante é a chamada *faixa de instabilidade* onde se localizam a maioria das estrelas variáveis pulsantes. Essa região é localizada entre as linhas tracejadas da figura 1.4.

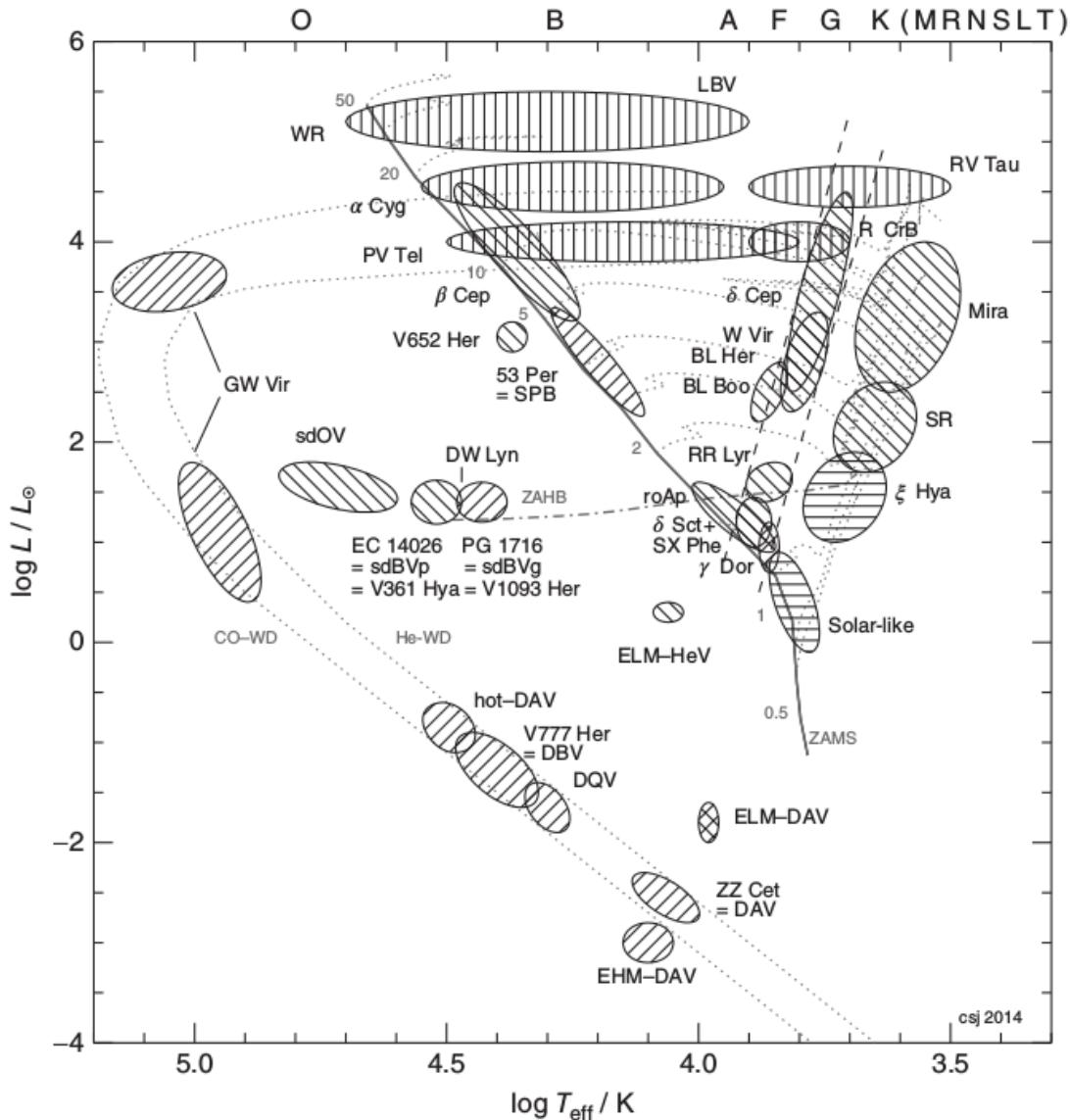


FIGURA 1.4: Diagrama H-R para estrelas variáveis. A sequência principal é representada pela linha sólida. A região entre as linhas tracejadas representa a faixa de instabilidade onde estão localizadas diversas estrelas pulsantes. Adaptado de Catelan (2015).

1.1.13 Pulsação Estelar

Estrelas pulsam ou vibram de forma análoga a instrumentos de corda ou de sopro. Cada instrumento possui uma frequência fundamental e o formato do objeto determina a sua frequência natural de vibração e seus harmônicos, que são múltiplos inteiros da frequência natural. A combinação destas frequências, amplitudes e fases dos harmônicos definem o timbre do instrumento, ou seja,

o seu som característico. Logo, o formato interno do instrumento gera um som característico e, a partir das frequências emitidas podemos inferir o formato interno do instrumento.

De forma análoga, através da pulsação nós podemos determinar o formato interno da estrela. Porém, as estrelas não possuem harmônicos de vibração, elas possuem sobretons. Um sobreton é qualquer frequência acima da frequência natural de pulsação. Tecnicamente, os harmônicos são sobretons, mas nem todos sobretons são harmônicos. Dentro da astrofísica há um ramo chamado de astrosismologia que tem como objetivo medir a velocidade do som dentro das estrelas e determinar os parâmetros da estrutura interna destes corpos celestes. Portanto, a pulsação das camadas externas das estrelas nos dão informação a respeito dos processos que ocorrem no seu interior.

Porém, diferente de instrumentos onde há apenas ondas sonora se propagando, nas estrelas ocorrem os modos P (ondas sonoras) e modos G de pulsação. Estes modos também são chamados respectivamente de modos de pressão e modos de gravidade. Para entender melhor como ocorre a pulsação nas estrelas, vamos analisar alguns casos mais simples.

1.1.13.1 Oscilação em uma corda

No caso de oscilação mais simples, temos uma corda oscilando unidimensionalmente com as suas extremidades fixas. As frequências de oscilação dependem do comprimento L , da tensão T e do material com o qual a corda é feita. Geralmente, a composição da corda e sua tensão são uniformes ao longo de seu comprimento. Assim, o primeiro harmônico (ou sobreton) é duas vezes a frequência fundamental ($2\omega_0$) o segundo harmônico é três vezes frequência fundamental ($3\omega_0$) e assim por diante. Um exemplo de pulsação em corda fixa pode ser visto na figura 1.5.

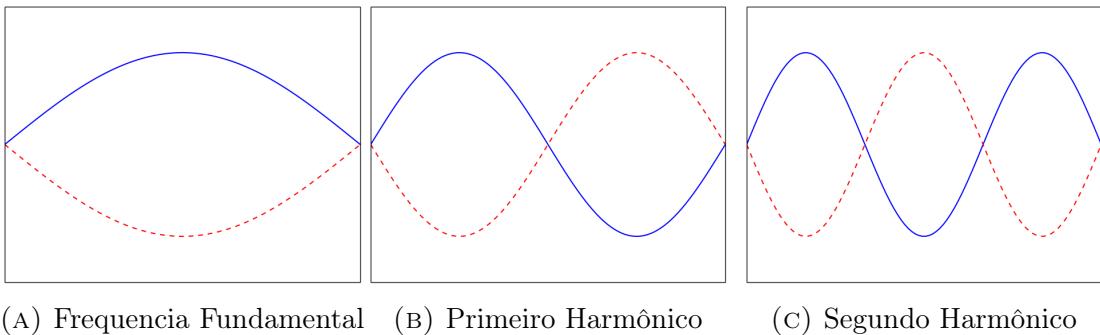


FIGURA 1.5: Exemplos de oscilação em uma corda com as extremidades fixas. A imagem da esquerda (a) representa a oscilação na frequência natural. A figura do meio (b) representa a pulsação no primeiro harmônico. Por ultimo, a imagem da direita (c) representa oscilação no segundo harmônico.

1.1.13.2 Oscilação em uma corda com uma extremidade fixa

Neste caso, temos uma corda que oscila de forma unidimensional e possui uma de suas extremidades fixa e a outra solta. Este exemplo é semelhante a um instrumento de sopro que possui uma extremidade fechada. A parte fixa da corda, ou fechada do instrumento de sopro, atua como um nó (ponto onde a amplitude é zero) e na extremidade fixa a amplitude é máxima (ou mínima). No caso do instrumento de sopro, como a temperatura e composição do gás são uniformes na parte interna do instrumento, a velocidade do som é constante nessa região. Para este caso, os harmônicos são múltiplos ímpares da frequência fundamental, por exemplo, $3\omega_0$, $5\omega_0$, etc.. Um exemplo deste comportamento pode ser visto na figura 1.6.

1.1.13.3 Oscilação bidimensional

Para o caso bidimensional vamos utilizar um disco como exemplo. Existem dois tipos de nós no caso bidimensional. Estes nós são ortogonais e podem ser classificados como radiais (modo radial) e não-radiais.

Os nós radiais são círculos concêntricos ao disco. A frequência fundamental de vibração para o modo radial é semelhante à frequência fundamental da corda

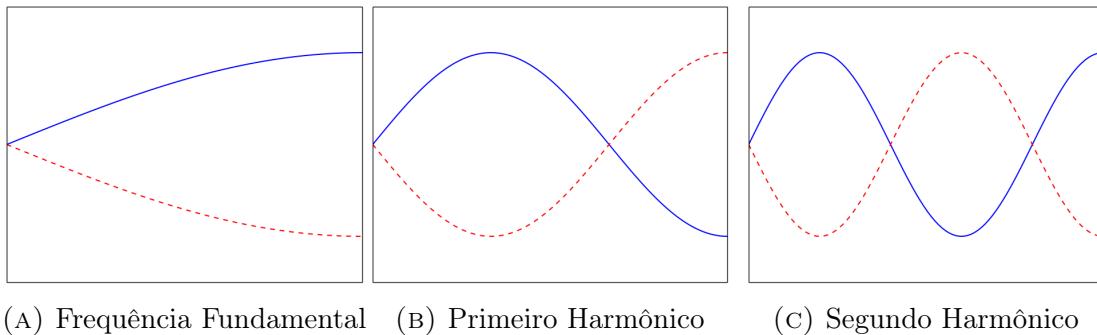


FIGURA 1.6: Exemplo de oscilação em uma corda com uma extremidade fixa e outra solta. A imagem (a) representa o modo fundamental, a imagem (b) representa o primeiro harmônico e a imagem (c) representa o segundo harmônico.

com as extremidades fixas, o centro do disco terá amplitude máxima e mínima enquanto que a borda possui amplitude zero (nó). O primeiro sobretono radial possui um nó com formato de um círculo concêntrico onde o disco interno possui amplitude máxima e o disco externo amplitude mínima e vice e versa. O segundo sobretono radial possui dois nós, ou seja, dois círculos concêntricos e portanto há três áreas onde a amplitude varia de máxima a mínima.

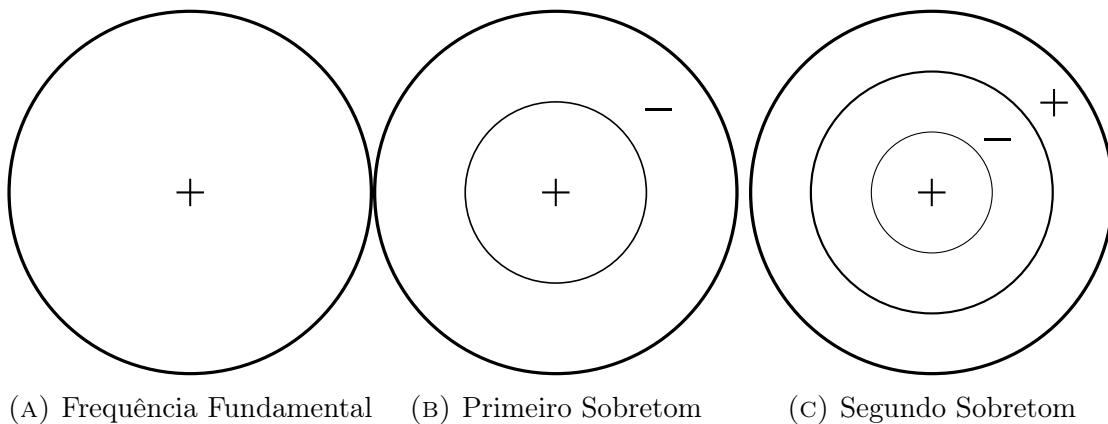


FIGURA 1.7: Exemplo de oscilação radial em um disco. Os sinais + e - significam os pontos de máximo e mínimo. A imagem (a) representa o a frequência fundamental, a imagem (b) representa o primeiro sobretono e a imagem (c) representa o segundo sobretono.

A segunda forma de nós são os nós não-radiais. O primeiro nó não-radial é uma linha que divide o disco ao meio. Com isto, as duas metades do disco oscilam de forma oposta, enquanto uma possui o máximo de amplitude a outra metade

possui o mínimo. O segundo nó não-radial são duas linhas ortogonais que dividem o disco em quatro partes com cada parte oscilando de forma contraria a outra.

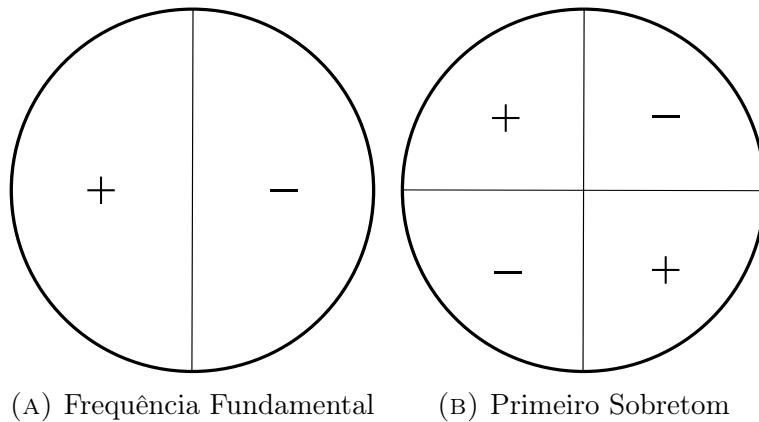


FIGURA 1.8: Exemplo de oscilação não-radial em um disco. A imagem (a) representa a frequência fundamental e a imagem (b) representa o primeiro sobretom.

Porém, essas duas formas de oscilação não ocorrem isoladamente pois, geralmente há combinações dos sobretons radiais e não radiais nas estrelas.

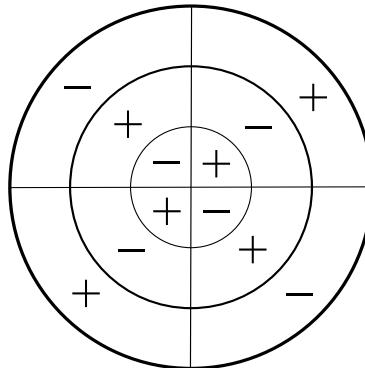


FIGURA 1.9: Oscilação radial e não-radial em um disco.

1.1.13.4 Oscilações em 3 dimensões

Estrelas possuem um formato esférico e suas pulsações obedecem os modos de oscilações em 3 dimensões. De forma análoga ao disco que possui dois modos de pulsação em direções ortogonais, as oscilações em uma esfera possuem três modos em direções ortogonais. Estas direções são a distância do centro r , latitude θ e

longitude ϕ . Os nós serão compostos por cascas esféricas de tamanho r , cones de tamanho θ e planos de dimensão ϕ .

Para uma estrela simétrica, as soluções das equações de movimento ondulatório são as seguintes,

$$\xi_r(r, \theta, \phi, t) = a(r) Y_l^m(\theta, \phi) \exp(-i2\pi\nu t) \quad (1.22)$$

$$\xi_\theta(r, \theta, \phi, t) = b(r) \frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} \exp(-i2\pi\nu t) \quad (1.23)$$

$$\xi_\phi(r, \theta, \phi, t) = \frac{b(r)}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\partial \phi} \exp(-i2\pi\nu t) \quad (1.24)$$

em que $a(r)$ e $b(r)$ são amplitudes, ν é a frequência de oscilação e $Y_l^m(\theta, \phi)$ são esféricos harmônicos que são calculados da seguinte forma,

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (1.25)$$

onde $P_l^m(\cos \theta)$ são polinômios de Legendre dados por,

$$P_l^m(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} (1 - \cos^2 \theta)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{d \cos^{l+m} \theta} (\cos^2 \theta - 1)^l. \quad (1.26)$$

As letras l e m são números quânticos que caracterizam os modos de pulsação. A variação destes números indicam se haverá pulsação radial ou não-radial.

1.1.13.5 Modo radial

Na pulsação radial o número quântico l é igual a zero. O modo mais simples de pulsação radial é chamado de modo fundamental radial. Neste modo, a estrela se contrai e expande como um todo de forma simétrica. Este é o principal modo de pulsação de estrelas Cefeidas e RR Lyrae.

O primeiro sobretom do modo radial possui um nó no interior da estrela. Este nó é uma casca esférica onde a amplitude é sempre zero. As camadas da estrela

antes e depois deste modo se movem de forma oposta, ou seja, enquanto uma contrai a outra expande.

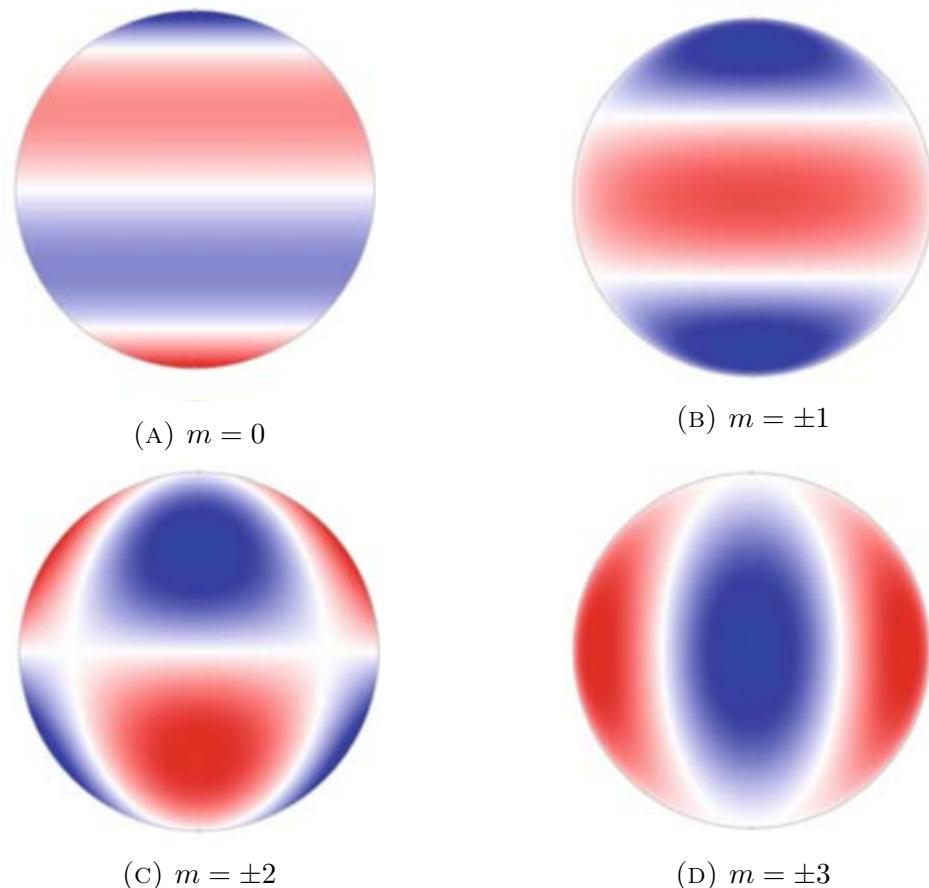


FIGURA 1.10: Oscilação não-radial em uma esfera com $l = 3$ e m variando de 0 a 2. As figuras mostram uma estrela vista de lado, com os polos sendo no topo e na região mais baixa. O equador seria exatamente no meio das esferas. As linhas brancas são os nós e a regiões em azul e vermelho estão contraindo e expandindo

1.1.13.6 Modos não-radiais

O modelo mais simples de pulsação não-radial possui $l = 1$ e $m = 0$. Neste modo, o equador da estrela é um nó, então um hemisfério expande enquanto o outro contrai. Este modelo também é chamado de modo de dipolo. O modo de pulsação com $l = 2$ possui dois nós na sua superfície e é chamado de modo de quadrupolo. Neste modo, os polos se expandem enquanto o equador contrai e vice

e versa. Na figura 1.10 temos a representação de um modo de pulsação com $l = 3$ e m variando de 0 a 2.

1.2 Introdução Histórica

1.2.1 Estrelas Variáveis

No século 16, acreditava-se que as estrelas eram fixas em posição e com brilho constante. Em 1572, foi observada uma supernova na constelação de Cassiopeia que atingiu magnitude -4 . Este evento, que foi estudado por Tycho Brahe (1546-1601), fez com que a comunidade astronômica da época voltasse a se interessar pela descobertas de novas estrelas. Alguns anos mais tarde, em 1596, o holandês David Fabricius (1564-1617) fez o primeiro registro de variação em brilho de uma estrela na constelação da Baleia (Cetus). Essa estrela foi observada em agosto e em outubro havia desaparecido. Em 1603, Johann Bayer observou a mesma estrela e deu o nome de omicron (Ω) Ceti, porém não sabia que era a mesma estrela que Fabricius havia observado, pois achava que se tratava de uma supernova. Em 1638, Johannes Holwarda (1618-1651) observou novamente Ω Ceti. Em 1662, Johannes Hevelius (1611-1687) fez um estudo detalhado da estrela e a renomeou, chamando-a de Mira Ceti (a Maravilhosa). Ismael Bullialdus (1605-1694) percebeu que o pico de magnitude da estrela ocorria sempre um mês mais cedo a cada ano, descobrindo a natureza cíclica de sua variação de brilho. Bullialdus publicou em 1667 que o período de oscilação era de 333 dias. Essa estrela foi a primeira variável a ter o período conhecido e virou referência para as estrelas variáveis de períodos longos, conhecidas hoje em dia como as *variáveis Mira*.

Em 1784, o inglês John Goodricke (1764-1786) descobriu a variação no brilho da estrela δ Cephei. Ele mediou o período 5d8h. No mesmo ano, o inglês Edward Pigott (1753-1825) descobriu a variabilidade de η Aquilae. Ambas estrelas se tornaram os protótipos da classe de *variáveis Cefeidas*.

Em 1912, a americana Henrietta Swan Leavitt (1868-1921) derivou uma relação entre o período e a luminosidade (também conhecida como lei de Leavitt) para as estrelas Cefeidas localizadas na Pequena Nuvem de Magalhães (Leavitt e Pickering, 1912). Graças a essa relação que em 1913 Hertzsprung foi capaz de calcular a primeira determinação de distância da Pequena Nuvem (Hertzsprung, 1913). Utilizando a mesma relação, Hubble determinou a distância de Andrômeda em 1923.

1.2.2 Técnicas de Observação

O primeiro dispositivo utilizado na observação de estrelas variáveis foi o olho humano. Embora este dispositivo nos seja muito útil no dia a dia, para a observações de estrelas não seria o mais adequado, pois a sua precisão para captar brilho é baixa (≈ 0.1), o que faz com que apenas estrelas com variação de algumas unidades de magnitude nos chamaria a atenção. Da mesma forma, a percepção de mudanças no céu noturno não é possível com observações feitas em telescópios. Apenas com a introdução da placas fotográficas é que foi possível ter um controle mais efetivo desta variações.

1.2.2.1 Métodos fotográficos

As primeiras fotografias astronômicas foram obtidas em torno de 1850 e 1860 utilizando o Daguerreótipo (ou método de Daguerre), que consistia em fixar a imagem em uma placa de cobre com uma fina camada de prata. Devido a sua limitação para variações em luminosidade, apenas fotos da Lua, Sol e estrelas mais brilhantes foram obtidas por este método. Apenas com o advento do método de placa seca em 1871 foi possível melhorar as observações de estrelas variáveis. Porém, identificar estrelas variáveis em placas fotográficas era um trabalho tedioso. Uma única imagem do céu noturno poderia conter milhares de estrelas. Uma forma utilizada para tentar identificar as variações de brilho seria utilizar uma série de

10 ou mais fotografias da mesma porção do céu, fazer divisões nas fotografias e comparar todas elas para perceber variações nos brilhos das estrelas. Através desta técnica aplicada em clusters globulares, o astrônomo Solon Bailey detectou mais de 500 variáveis (Bailey, 1902).

Outros métodos surgiram para aprimorar a identificação da estrelas variáveis. Um desses métodos seria a sobreposição dos negativos e positivos da mesma fotografia. No positivo, as estrelas seriam brancas em um fundo escuro enquanto que no negativo seria o oposto. Se o brilho de uma estrela variasse, a imagem negativa seria menor ou maior do que a imagem positiva.

Uma das principais ferramentas utilizadas para analisar as fotografias de estrelas era o dispositivo chamado *Comparador Blink* (do inglês, *Blink Comparator*). Nesse dispositivo, duas placas fotográficas eram analisadas, uma por cada olho do observador. Se as imagens fossem iguais, não seria identificado variação, porém alguma variação no brilho de uma imagem para a outra seria percebida pela mudança de tamanho da estrela entre as imagens.

Embora a quantidade de estrelas variáveis descobertas a partir de 1880 aumentou drasticamente devido aos métodos fotográficos, essa técnica não consegue identificar pequenas variações no brilho, apenas variações em torno de um terço da magnitude máxima da estrela, fazendo com que uma parcela das estrelas não fossem identificadas. Assim, surgiu a necessidade de algum método mais efetivo.

1.2.2.2 Métodos fotoelétricos

O desenvolvimento da fotometria fotoelétrica ocorreu na década de 40. Esses métodos captam a luz em uma célula fotossensível que converte o fluxo de fôtons recebido em sinal elétrico através do efeito fotoelétrico. Os sistemas de magnitudes (filtros) foram desenvolvidos para estes tipos de equipamentos.

Os primeiros dispositivos desta época utilizavam placas de selênio e eram capazes de captar o brilho de apenas um objeto por vez. A magnitude de uma estrela

era obtido fazendo a leitura do brilho da estrela e do céu noturno a sua volta, após era feita a leitura apenas de uma porção do céu e subtraído da leitura da estrela.

Uma das revoluções nesta área de observação ocorreu com a utilização das células fotomultiplicadoras na astronomia em 1936 pela Radio Corporation of America (RCA) (Miles, 2007). As vantagens dessas células são a amplificação do sinal observado, o que melhorou a precisão das medidas, maior faixa de detecção (640nm até a faixa do vermelho) e menor ruído. Embora a célula fotomultiplicadora tenha trazido grandes avanços na astronomia observacional, essa tecnologia ainda era limitada a observar objetos individuais. A grande revolução ocorreu com a utilização dos detectores em área.

1.2.2.3 Detectores em área

Em 1969 as placas CCD (do inglês, *Charged Coupled Device*) foram criadas no Bell Laboratories nos Estados Unidos. Esse dispositivo apresenta alta sensibilidade espectral, podendo ser utilizado em faixas de 350 a 1000nm. Também, possui a habilidade de detectar luz em área quando dispostas em conjunto (chamado de *CCD Array*) e habilidade de transformar a observação em sinal digital sendo possível analisar as imagens em computadores, facilitando o trabalho de detecção de periodicidades através dos métodos de detecção de períodos.

Atualmente, as placas CCD são os dispositivos utilizados no grandes projetos de levantamento de dados astronômicos (*Surveys*). Um destes projetos é o OGLE que atualmente está atuando em sua quarta fase. A terceira fase (Udalski et al., 2008) que já está completa e possui seus dados públicos e utilizados nesse trabalho, monitorou mais de 200 milhões de estrelas nas Nuvens de Magalhães e se espera detectar em torno de um milhão de estrelas variáveis .

1.3 Detecção de Períodos

A busca por periodicidades na curva de luz de uma estrela variável é um dos mais importantes processos na análise de dados observacionais. A importância desse processo é devido as grandezas físicas que podemos derivar a partir do período. Dentro dessas grandezas, a distância é sem dúvida uma das mais importantes, pois a determinação de distâncias astronômicas é um dos problemas fundamentais da astronomia.

Devido a importância na determinação de períodos, diversos métodos surgiram ao longo dos anos. Uma técnica comum para demonstrar os períodos em um dado seria o *Periodograma* ou *Espectro de Potência*. Neste método, a intensidade do sinal gerado através dos dados é mostrado em um gráfico versus o período. Os picos desse gráfico seriam o período principal com os seus harmônicos. Alguns desses métodos utilizam o método dos mínimos quadrados para ajustar uma função com período conhecido à curva de luz da estrela (Lomb, 1976). Outros determinam o período através dos picos no espectro de Fourier (Ferraz-Mello, 1981) ou fazem análise de variância nesses picos (Schwarzenberg-Czerny, 1989). Ou também, calculam a minimização da dispersão dos pontos observacionais no espaço de fase (Cincotta et al., 1999; Cincotta, Mendez e Nunez, 1995; Graham et al., 2013b).

Um dos principais problemas na determinação de períodos está nos dados observacionais. Dados que contêm uma semana de observação são impróprios para objetos que possuem período na ordem de anos. Para calcularmos o período com confiança, precisamos que o tempo de observação seja de pelo menos o dobro do tempo do período, de acordo com o *Teorema de Nyquist*. Se esta condição não é satisfeita, podemos obter mais de um período ou o período errado para o nosso dado (este efeito é conhecido como *Aliasing*). Outro motivo de erro nos dados são os espaçamentos entre as observações. Devido a estes espaçamento, as técnicas de detecção de períodos podem identificar períodos que aparentemente produzem uma curva de luz adequada, mas que não são os períodos corretos, sendo uma

fonte de Aliasing. Alguns motivos para espaçamento entre os dados são a disponibilidade do telescópio, a limitação de observação para o turno da noite e a posição da lua nos telescópios terrestres, o que pode fazer com que as observações sejam espaçadas por até um mês. Por esses motivos apresentados, seria interessante aprimorar técnicas que sejam independentes deste espaçamento entre os dados, como as técnicas que utilizam a dispersão da curva de luz no espaço de fase, técnica utilizado pelo método aplicado neste trabalho.

Capítulo 2

Estrelas Variáveis

As estrelas variáveis são uma classificação de estrelas que apresentam alguma variação na sua magnitude aparente. Elas são classificadas devido aos motivos dessa variação em dois grandes grupos: variáveis extrínsecas e variáveis intrínsecas. A figura 2.1 mostra todas as subclassificações existentes para as estrelas variáveis. Essa família de estrelas possui grande importância, pois são utilizadas como velas padrões e através da relação período-luminosidade são utilizadas para determinar distâncias astronômicas. Ao longo deste capítulo será abordada a classificação desses objetos dando ênfase para as variáveis pulsantes, que são os objetos em estudo deste trabalho, e será visto duas relações importantes envolvendo os períodos de pulsação.

2.1 Variáveis Extrínsecas

A classificação de variáveis extrínsecas inclui todos os exemplo de estrelas em que a variação da luminosidade é causada por algum processo externo a estrela. Dois exemplos desta classificação são as variáveis eclipsantes e rotacionais.

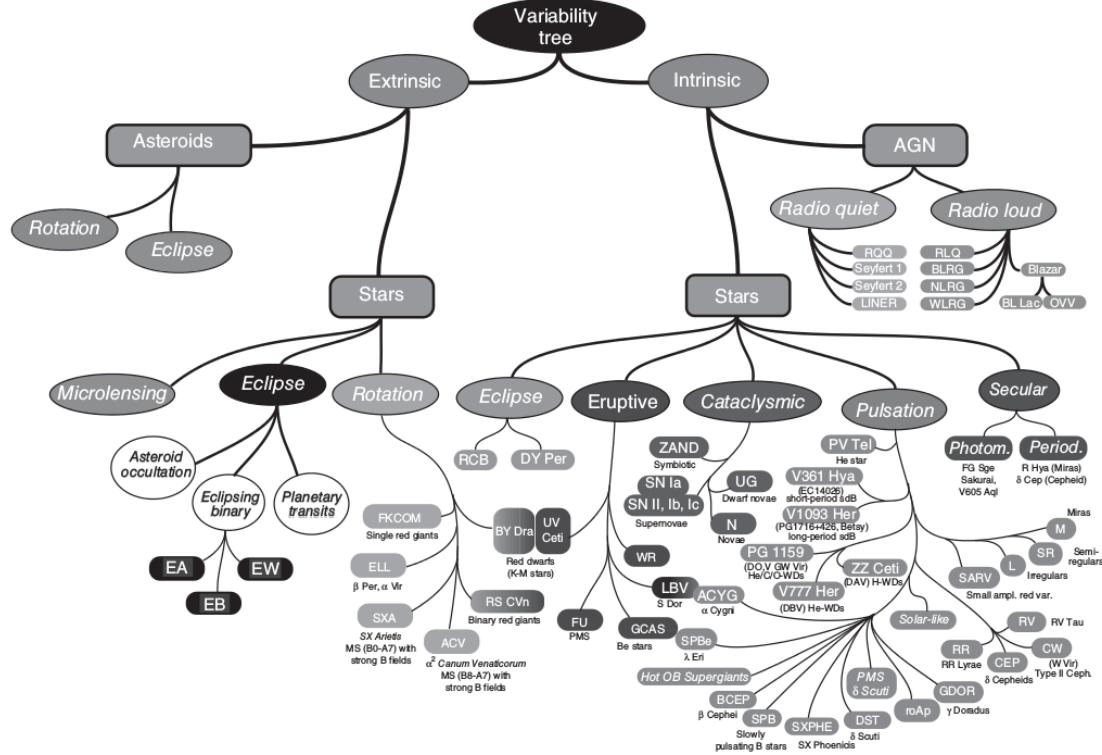


FIGURA 2.1: “Árvore da Variabilidade”. A figura mostra todos as possíveis causas de variação no brilho de objetos astronômicos divididas em duas grandes famílias, as variáveis Extrínsecas (*Extrinsic*) e as variáveis Intrínsecas (*Intrinsic*). Adaptado de Catelan (2015).

2.1.1 Variáveis eclipsantes

Esta subclassificação inclui os sistemas binários de estrelas e variações na magnitude devido a asteroides ou exoplanetas. No sistemas binários eclipsantes a variação ocorre devido ao bloqueio da luz causada pela órbita de uma estrela do sistema em torno de sua companheira, ou seja, o movimento de translação de uma estrela em torno da outra faz com que parte da luz seja bloqueada quando as estrelas estão uma atrás da outra em relação ao nosso campo de visão. O período desta variação nos informa o tempo da órbita das estrelas.

Outro motivo externo de variação na magnitude de uma estrela são asteroides ou exoplanetas que estão orbitando alguma estrela. Neste exemplo, a curva de luz é caracterizada por picos de mínimos na magnitude da estrela espaçadas por um valor fixo. Este valor corresponde ao período de translação do exoplaneta ou

asteroide.

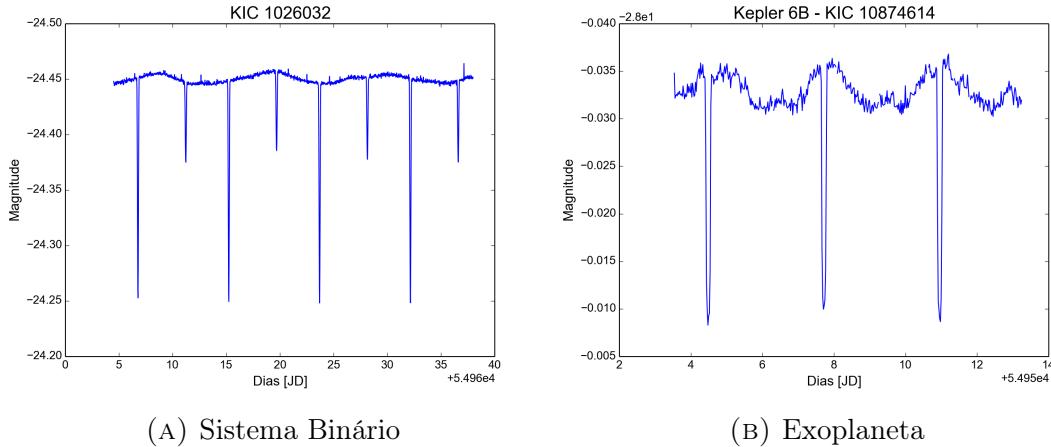


FIGURA 2.2: Exemplos de curvas de luz de variáveis eclipsantes para dados obtidos do Telescópio Kepler. A imagem (a) é um sistema binário de estrelas. Podemos perceber os picos de mínimos quando uma estrela bloqueia a luz da outra. A imagem (b) é a curva de luz para o exoplaneta Kepler 6B descoberto em 4 de janeiro de 2010.

2.1.2 Variáveis rotacionais

Neste caso, a variação ocorre devido a estrela não ser perfeitamente esférica ou possuir manchas em sua superfície. Se a estrela possui um formato mais elíptico e o seu eixo de rotação não está alinhado com o nosso campo de visão, observamos uma oscilação na magnitude devida a variação no raio da estrela. Por outro lado, no caso das manchas na superfície a oscilação ocorre pois estas manchas podem ser ocasionadas por diferença em temperatura ou por um campo magnético local mais intenso, o que interfere na emissão de luminosidade.

2.2 Variáveis Intrínsecas

As variáveis intrínsecas são uma classificação de estrelas em que o motivo da variação da magnitude está relacionada com processos internos da estrela. Essa classificação é dividida em variáveis pulsantes, eruptivas e cataclísmicas.

2.2.1 Variáveis eruptivas

Esta classificação representa estrelas em que ocorrem erupções nas suas cromosferas e coroas devido a atividade magnética, da mesma forma que ocorre ejeções na coroa solar devido ao campo magnético. Essas erupções de massas são chamadas de ventos solares.

2.2.2 Variáveis cataclísmicas

Essa classe de estrelas também é conhecida como *Explosivas* e podem ser subdivididas em quatro categorias: *supernovas*, *novas*, *novas anãs* e *simbióticas*.

As novas e novas anãs são sistemas binários em que a estrela primária seria uma anã branca e a secundária seria uma estrela de baixa massa com tipo espectral M que transfere matéria para a estrela primária. A diferença entre as novas e novas anãs seria o disco de acreção que se forma em torno da novas anãs. Nestes sistemas, a anã branca que normalmente por ser fria não mantém reações termonucleares, começa a receber matéria da sua estrela companheira até um certo ponto em que atinge densidade e temperatura suficientes para queimar o hidrogênio acretado em uma de suas camadas. Este processo é chamado de *nova* e em muitas vezes é recorrente. A curva de luz das novas apresenta um rápido aumento de brilho na ordem de 9 magnitudes seguido de um declínio de 3 a 4 magnitudes em algumas semanas e de uma diminuição lenta que pode durar até 10 anos.

Os sistemas simbióticos são compostos por uma anã branca como estrela primária e uma estrela gigante do tipo espectral M ou N como secundária. Esse sistema possui o comportamento semelhante com as novas e novas anãs, porém ocorrendo em período de tempo maior.

As supernovas são um dos eventos mais energéticos e mais brilhantes que existem no universo. As energias envolvidas na explosão são da ordem de 10^{45} J ou 10^{47} J no caso em ocorre colapso do núcleo. Esses eventos são responsáveis pela síntese dos elementos mais pesados do que hidrogênio e hélio e são muito utilizados

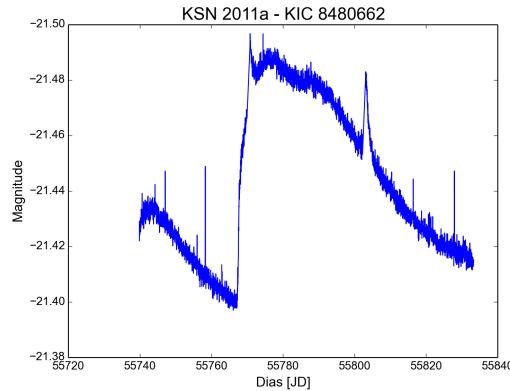


FIGURA 2.3: Curva de luz da Supernova *KSN 2011a* observada pelo Telescópio Kepler em março de 2016. Há um aumento brusco na magnitude seguido de um decaimento mais lento. Esse aumento é o momento da explosão da estrela.

para determinação de distâncias cosmológicas. Um exemplo de curva de luz para a supernova *KSN – 2011a* é mostrado na figura 2.3.

2.2.3 Variáveis pulsantes

As variáveis pulsantes são uma classe de estrelas que sofrem pulsações radiais ou não-radiais ou até mesmo esses dois tipos de pulsação. Elas podem ser classificadas entre a forma de pulsação, principal mecanismo que causa a pulsação ou estágio de evolução da Estrela. Por exemplo, podemos utilizar a forma de pulsação para classificar as estrelas *Cefeidas*, *RR Lyrae* e *Miras* como as que sofrem pulsação radial. Por outro lado, as estrelas *Beta Cep*, *Gamma Doradus*, *Gamma Virginis* e *ZZ Ceti* são exemplos de estrelas com pulsação não-radial. Por fim, um dos principais exemplo de estrela com os dois tipos de pulsação seria as *Delta Scuti*. Embora existam diversas subclassificações de variáveis pulsantes, será dada ênfase para as denominadas *pulsantes clássicas* em que as Cefeidas e RR Lyrae fazem parte pois estes objetos são os principais alvos do estudo apresentado neste trabalho.

2.2.3.1 Cefeidas

As Cefeidas são estrelas que pulsam de forma radial e estão se deslocando em direção das Gigantes Vermelhas, sendo localizadas na faixa de instabilidade do diagrama H-R. Podem ser divididas em Cefeidas Clássicas e Cefeidas Tipo II. As Clássicas possuem períodos entre 1 a 100 dias e são estágios evoluídos de estrelas mais massivas do que o Sol, geralmente possuindo massa entre 2 a $20M_{\odot}$ e sendo estrelas de população I (maior metalicidade). Por outro lado, as Cefeidas Tipo II são estrelas mais velhas, população II, sendo o estágio mais desenvolvido de estrelas de baixa massa ($0,5$ - $0,6 M_{\odot}$) e possuindo períodos na faixa de 1 a 25 dias. Um exemplo de curva de luz para esses dois tipos de Cefeidas pode ser visto na figura 2.4.

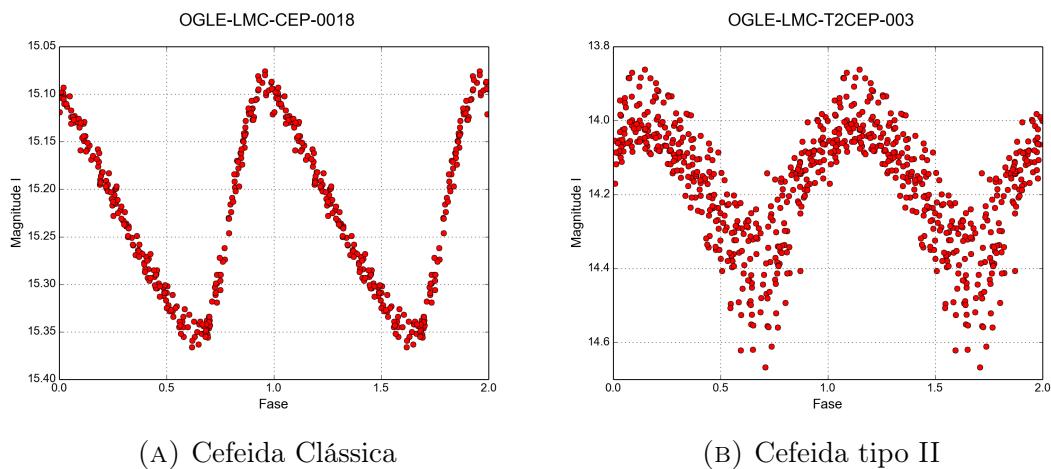


FIGURA 2.4: Exemplos de curvas de luz no espaço de fase para uma Cefeida clássica (a) e uma tipo II (b) do catálogo OGLE. O espaço de fase da imagem na esquerda foi construído utilizando o período $P = 4,0478$ e na imagem da direita foi utilizado o período $P = 35,6599$.

As cefeidas podem ser subdivididas de acordo com o seu modo de pulsação. As estrelas que pulsam no modo radial fundamental são denominadas FU (do inglês *Fundamental Mode*) e as que pulsam no primeiro sobre tom do modo radial são chamadas de FO (do inglês *First Overtone*).

A grande importância deste tipo de estrela está na descoberta da relação entre período e luminosidade derivada por Henrietta Leavitt (Leavitt e Pickering, 1912) que possibilitou a determinação de distâncias astronômicas em uma escala superior do que a paralaxe trigonométrica, que era a técnica utilizada na época.

2.2.3.2 RR Lyrae

As RR Lyrae são uma das estrelas utilizadas para determinação de distâncias e determinação de propriedades de populações estelares mais antigas. No diagrama H-R elas são localizadas dentro da faixa de instabilidade e possuem magnitude absoluta em torno de +0,6 (na faixa do visível), temperaturas entre 6000 e 7250K e massa entre 0,6 e 0,8 M_{\odot} . Essas estrelas possuem períodos entre 0,2 e 1,0 dias e são achadas e sistemas com idades superiores a 10 giga-ano, sendo ótimas velas padrões para determinação de distância de sistemas mais antigos.

Essas estrelas são classificadas como tipos *AB* ou *C* dependendo da sua forma de pulsação o que modifica o formato da sua curva de luz. As RR Lyrae do tipo *AB* pulsam no modo radial fundamental, enquanto que as do tipo *c* pulsam no primeiro sobre tom do modo radial. Um exemplo de curva de luz pode ser visto na figura 2.5.

Como a figura 2.5 mostra, a curva de luz das RR Lyrae do tipo *AB* possuem um aumento brusco da luminosidade seguido de um decaimento mas lento. Por outro lado, as RR Lyraes do tipo *C* apresentam um comportamento mais senoidal.

2.3 Relações com o Período

2.3.1 Período - Luminosidade (*Lei de Leavitt*)

A relação entre o período e a luminosidade foi descoberta por Henrietta Leavitt, que era uma astrônoma que trabalhava no observatório de Harvard catalogando

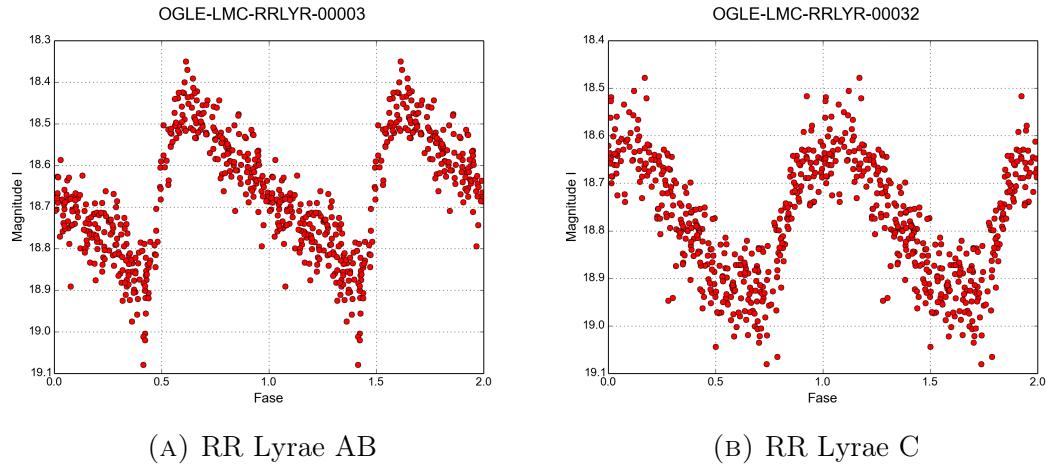


FIGURA 2.5: Exemplos de curvas de luz no espaço de fase para uma RR Lyrae tipo *AB* (a) e uma tipo *C* (b) do catálogo OGLE. O espaço de fase da imagem na esquerda foi construído utilizando o período $P = 0,6565$ e na imagem da direita foi utilizado o período $P = 0,3535$.

estrelas em placas fotométricas. Em 1912, ela derivou uma relação entre a luminosidade e o período de pulsação de 25 estrelas na Pequena Nuvem de Magalhães, estrelas que mais tarde foram identificadas como Cefeidas. Essa relação possui a forma

$$m = a + b \log P \quad (2.1)$$

em que m é a magnitude aparente, P é o período de pulsação e a e b são constantes. Essas constantes podem ser obtidas pelo método dos mínimos quadrados.

Como as 25 estrelas analisadas pela Henrietta pertenciam a Pequena Nuvem de Magalhães, ela inferiu que essas estrelas possuíam as mesmas propriedades e assim a relação entre a magnitude aparente e o período implicaria na relação entre a magnitude absoluta e o período da seguinte forma,

$$M = a' + b \log P \quad (2.2)$$

em que M é a magnitude absoluta e a' é a constante a deslocada por um determinado valor. Esse valor que desloca a constante foi identificado mais tarde como modulo de distância. Desta forma, obtendo as constantes a e b e tendo calculado o período, podemos estimar o valor da magnitude absoluta e obter as distâncias das estrelas. Essa relação ficou conhecida como *Lei de Leavitt* ou relação Período - Luminosidade.

2.3.2 Período - Densidade

As oscilações radiais são causadas pelas ondas sonoras que ressoam no interior da estrela. Podemos estimar o valor do período de pulsação Π apenas considerando quanto tempo uma onda sonora deveria levar para atravessar o diâmetro total de uma estrela de raio R e densidade constante ρ , ou seja

$$\Pi = \frac{2R}{v_s}. \quad (2.3)$$

Para isto, vamos partir da equação da velocidade do som em um gás adiabático,

$$v_s = \frac{\gamma P}{\rho} \quad (2.4)$$

em que P é a pressão e γ é a razão entre os calores específicos à pressão constantes e à volume constante,

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}. \quad (2.5)$$

Para um gás monoatômico, $\gamma = 5/3$, e a pressão pode ser calculada através da condição do equilíbrio hidrostático,

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M\rho}{r^2} \quad (2.6)$$

em que M é a massa dentro da esfera de raio r e G é a constante gravitacional. Considerando uma esfera perfeita, podemos reescrever a massa como

$$M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho. \quad (2.7)$$

Substituindo na equação da pressão,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2 r \quad (2.8)$$

e fazendo a separação de variáveis e integrando a pressão de 0 a P e o raio de r a R ficamos com,

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho^2(R^2 - r^2) \quad (2.9)$$

agora, substituindo a pressão na equação da velocidade do som,

$$v_s = \frac{\gamma P}{\rho} = \frac{2}{3}\gamma\pi G\rho(R^2 - r^2) \quad (2.10)$$

obtemos uma relação para a velocidade do som no interior da estrela. Por fim, substituindo essa relação de velocidade na equação (2.3),

$$\Pi \approx 2 \int_0^R \frac{dr}{v_s} \approx 2 \int_0^R \frac{dr}{\frac{2}{3}\gamma\pi G\rho(R^2 - r^2)} \quad (2.11)$$

calculando a integral, obtemos que o período de pulsação é igual a

$$\Pi \approx \sqrt{\frac{3\pi}{2\gamma G\rho}}. \quad (2.12)$$

Esse resultado, chamado de relação Período-Densidade, nos mostra que período de pulsação é inversamente proporcional à raiz quadrada da densidade média da estrela, ou seja, estrelas mais densas possuem períodos de pulsação menores do

que estrelas menos densas.

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo será abordado o método utilizado para a determinação de períodos de estrelas variáveis pulsantes assim como a metodologia aplicada para a análise do método e criação do algoritmo, cobrindo o catálogo utilizado para obtenção dos dados e o formato dos mesmos.

3.1 Entropia de Shannon

Na teoria de informação, a entropia ou entropia de Shannon (Claude E Shannon, 1998), é a medida de incerteza de uma variável. Em outras palavras, essa grandeza mede o grau de desordem para um sinal periódico. Este sinal periódico pode ser uma curva de luz de estrela ou até mesmo observações de velocidade radial de estrelas (Cincotta, Mendez e Nunez, 1995).

A ideia deste método aplicado para a curva de luz de estrelas pulsantes se baseia na seguinte ideia: Sendo sinais periódicos as curvas de luz das variáveis pulsantes, ao fazer a transformação para o espaço de fase, a curva de luz construída com o período correto possui um certo grau de ordem, enquanto que a curva de luz construída com um período errôneo não possui ordem, gerando uma dispersão de pontos em todo o espaço de fase. Desta forma, a entropia de Shannon calculada para um sinal totalmente disperso em seu espaço de fase possui um valor maior do que essa mesma grandeza calculada para um sinal mais ordenado. Portanto, a

entropia nos informa esse grau de desordem ou incerteza da variável em estudo, que neste caso é o período, e para um conjunto de períodos que queremos analisar a entropia de Shannon deve ser mínima para o período que produz a dispersão mais ordenada no espaço de fase. Um exemplo de espaço de fase com diferentes períodos é mostrado na figura 3.1.

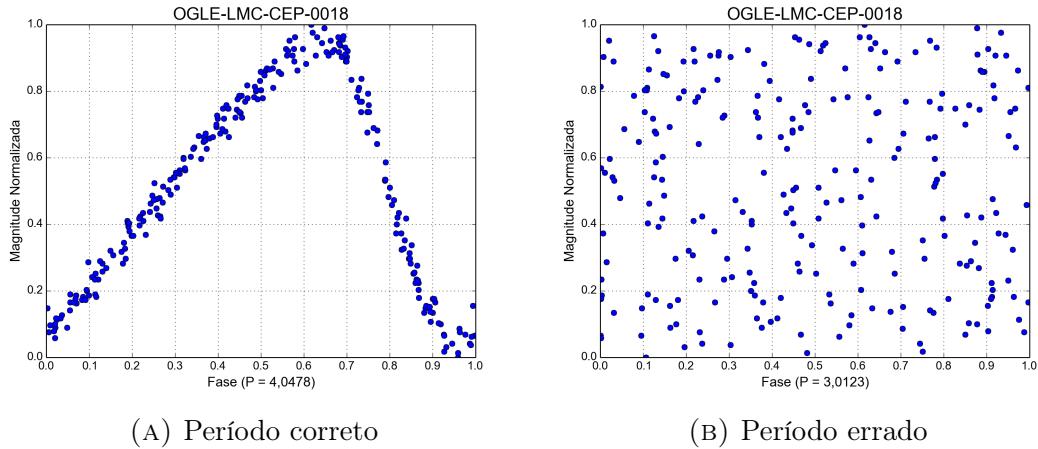


FIGURA 3.1: Exemplos da distribuição de pontos espaço de fase para a Cefeida OGLE-LMC-CEP-0018 do catálogo OGLE. O espaço de fase da imagem na esquerda foi construído utilizando o período correto ($P = 4,0478$) e possui um valor para entropia de $H_c = 1,0762$. A imagem da direita foi utilizado um período aleatório ($P = 3,0123$) e o valor de entropia calculado é $H_c = 1,5943$.

A entropia de Shannon foi aplicada pela primeira vez em curvas de luz por Cincotta, Mendez e Nunez (1995). Eles normalizaram a magnitude das curvas de luz, transformaram para o espaço de fase e fizeram m repartições nesse espaço. Desta forma, a entropia que é definida por:

$$H = - \sum_i^m \mu_i \ln \mu_i \quad (3.1)$$

foi calculada. Nessa expressão, μ_i representa a probabilidade de ocupação da repartição i . Numericamente, a probabilidade de ocupação é calculada simplesmente contando os pontos de observação dentro da repartição e dividindo pela quantidade total de pontos. As vantagens desse método são a facilidade para lidar com sinais que possuam espaçamento variável entre os seus pontos, a simplicidade de

aplicar e possui um embasamento matemático e estatístico bem definido dentro da teoria de informação, sendo que nem todos os métodos de detecção de períodos possuem esse ultimo item bem definido (Cincotta, Mendez e Nunez, 1995).

3.1.1 Entropia de Shannon condicional

A entropia de Shannon condicional surgiu da necessidade de contornar um problema bem conhecido da analise de curvas de luz: o efeito de *Aliasing* causado pelo período $P = 1$ dia. Este efeito ocorre devido as observações serem efetuadas sempre à noite, o que ocasiona um espaçamento de um dia entre os conjuntos de observação. A figura 3.2 mostra a distribuição de pontos no espaço de fase normalizado utilizando o período $P = 1$ dia. A entropia de Shannon calculada para uma distribuição desta forma retorna um valor pequeno pois os pontos estão localizado em uma determinada parte do espaço. Para lidar com esse problema,

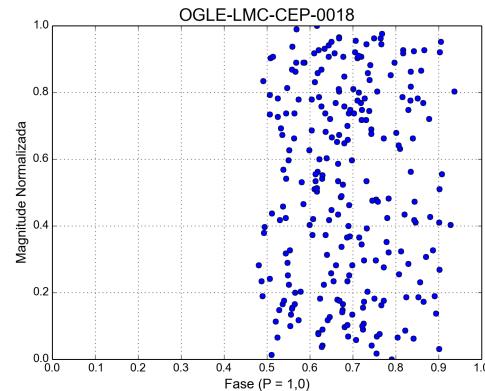


FIGURA 3.2: Efeito de *Aliasing* devido ao período de 1 dia para a Cefeida OGLE-LMC-CEP-0018 do catálogo OGLE. Os pontos se localizam em uma determinada região do espaço de fase (menos da metade) deixando o que faz com que a entropia calculada seja pequena. A entropia condicional foi proposta para lidar com este problema e para este caso o seu valor é $H_c = 1,5542$.

Graham et al. (2013b) propuseram a entropia de Shannon condicional. Nesta variação do método o espaço de fase é dividido em i repartições na magnitude e j

repartições na fase e a entropia é calculada da seguinte forma:

$$H_c = \sum_{i,j} p(m_i, \phi_j) \ln \left(\frac{p(\phi_j)}{p(m_i, \phi_j)} \right) \quad (3.2)$$

em que $p(m_i, \phi_j)$ é a probabilidade de ocupação na i -ésima repartição da magnitude e na j -ésima repartição da fase e $p(\phi_j)$ é a probabilidade de ocupação na j -ésima repartição da fase. Como estamos lidando com repartições retangulares:

$$p(\phi_j) = \sum_i p(m_i, \phi_j) \quad (3.3)$$

ou seja, $p(\phi_j)$ é a soma das probabilidades na i -ésima coluna.

Graham et al. (2013b) analisaram o impacto no resultado da entropia causado pela quantidade de repartições e estimaram que 5 repartições na magnitude ($\Delta m = 0, 2$) e 10 repartições na fase ($\Delta\phi = 0, 1$) seriam ideais pois, quanto maior a quantidade dessas repartições mais recursos computacionais são necessários e com essa escolha a entropia continua retornando bons resultados em pouco tempo.

Desta forma, a entropia de Shannon condicional será utilizada considerando 5 repartições para a magnitude e 10 para fase. Este método será aplicado para o espaço de fase normalizado para um conjunto de períodos que se quer analisar, calculando a entropia de Shannon condicional para cada espaço de fase criado para esse conjunto de períodos. O menor valor de entropia corresponde ao conjunto de pontos mais ordenado que seria o período correto da estrela (Graham et al., 2013b). Porém, antes de entrar em detalhes no algoritmo criado é necessário entender os dados utilizado no trabalho.

3.2 Catálogo OGLE

O catálogo OGLE (*The Optical Gravitational Lensing Experiment*) consiste em 8 anos de dados observacionais cobrindo uma área de 40 graus quadrados na

TABELA 3.1: Exemplo de dados do catálogo OGLE

Tempo	Magnitude	Erro
2165,85271	15,130	0,007
2183,83450	15,326	0,008
2238,62899	15,102	0,007
:	:	:

direção das Nuvens de Magalhães. Esse catálogo busca por estrelas variáveis tendo monitorado mais de 200 milhões de estrelas. As observações foram feitas utilizando os filtros Cousins I e V (Cousins, 1973). Na banda I, as observações possuem um tempo de 180s de exposição tendo em média 400 medidas de observação. Por outro lado, a banda V possuem em média apenas 30 medidas de observação. Os dados da sua terceira fase (Udalski et al., 2008), chamado de OGLE-III, são públicos¹ e foram utilizados nesse trabalho, dando prioridade para as observações na banda I devido a maior quantidade de medidas em relação a banda V.

Os dados de observação disponíveis são obtidos no formato .dat e possuem três colunas que significam tempo em dias Julianos, magnitude e erro na magnitude. Um exemplo de dado pode ser visto na tabela 3.1.

Nesse trabalho foram utilizados os dados de dois tipos de estrelas variáveis pulsantes localizadas na Grande Nuvem de Magalhães, as Cefeidas Clássicas e as RR Lyraes, sendo utilizados 3056 Cefeidas classificadas entre modo fundamental (FU) e primeiro sobretom (FO) e 22651 RR Lyraes também classificadas entre modo fundamental (AB) e primeiro sobretom (C), totalizando 25707 estrelas.

3.3 Algoritmo

Foi desenvolvido um algoritmo em Python3 para calcular a entropia condicional de dados de estrelas variáveis pulsantes pertencentes ao Catálogo OGLE-III.

¹<http://ogledb.astrouw.edu.pl/~ogle/CVS/>

A figura 3.3 apresenta um pseudo-código do algoritmo. O código completo é apresentado no apêndice A.

Entrada: Tempo e Magnitude
Saída: Período P que minimiza a entropia

```

1 Início
2   Leitura dos dados de entrada como vetores;
3   Cria um vetor com  $n$  períodos sendo  $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ;
4   Normalização da magnitude;
5   para cada  $p_i$  em  $P$  faça
6     Transformar o tempo para o espaço de fase;
7     Faz as repartições e contabiliza os pontos;
8     Calcula a entropia de Shannon condicional;
9     Armazena a entropia calculada para o período  $p_i$ 
10  fim
11  Achar o valor mínimo de entropia:  $E_{min} = \min(\text{Entropia})$ 
12  Achar o período que minimiza a entropia:  $P_{E_{min}} = P[\min(\text{entropia})]$ 
13 Fim
14 retorna  $P_{E_{min}}$ 
```

FIGURA 3.3: Pseudo-código do algoritmo em português estruturado.

Para cada um dos dados das estrelas que serão analisadas, o programa faz a leitura das informações de tempo e magnitude da estrela e cria um vetor de períodos que serão analisados. Para uma Cefeida, esse vetor de períodos é criado com período inicial $p_1 = 0,1$ dias e período final $p_n = 32$ dias com um intervalo entre os períodos de 0,001 dia. Então, para cada um dos elementos do vetor período o algoritmo faz as seguintes ações: o tempo é transformado em fase, são feitas as repartições no espaço de fase e são contabilizados a quantidade de pontos em cada repartição, a entropia de Shannon condicional é calculada e o valor armazenado em um vetor entropia. No fim, o algoritmo indica o menor valor do vetor entropia e qual período esta relacionado com este valor.

3.4 Análise Teórica

Ao utilizar o algoritmo para os dados do catálogo podemos analisar como o método responde para dados reais. Porém, se quisermos analisar qual a abrangência de atuação desta técnica, é possível calcular a entropia de Shannon para um conjunto de dados teóricos em que seja conhecido o período. Desta forma, podemos entender como o formato de um sinal influencia nos resultados finais.

De acordo com Graham et al. (2013b) e Cincotta, Mendez e Nunez (1995), um sinal periódico sintético que se assemelhe com os dados observacionais da maioria dos Surveys de estrelas variáveis pode ser construído utilizando a expressão:

$$m(t) = A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i \sin\left(\frac{2k\pi t}{P}\right) + B\eta \quad (3.4)$$

em que $m(t)$ é a magnitude sintética, A_0 é termo de deslocamento linear, os termos A_i são termos de escala para as funções senos, k é um parâmetro de escala para a amostragem do sinal, t é o vetor tempo, P é o período de oscilação do sinal, η é uma distribuição gaussiana com média zero e desvio unitário que tem como função introduzir ruído no sinal e B é um parâmetro de escala para esse ruído.

A amostragem, f_s , de um sinal representa a frequência de pontos de observação. Essa quantidade afeta diretamente a construção do vetor tempo pois, a amostragem é definida como:

$$f_s = \frac{1}{dt} \quad \rightarrow \quad dt = \frac{1}{f_s} \quad (3.5)$$

ou seja, o intervalo de tempo depende do valor da amostragem. Desta forma, assim que for definida a nossa amostragem, podemos variar essa grandeza para construir os vetores tempos e com isso construir o sinal sintético para calcular a entropia de Shannon condicional e analisar os resultados. A análise de todos os dados, sintéticos e reais, será discutida no capítulo 4.

Capítulo 4

Resultados e Discussão

4.1 Dados do Catálogo OGLE

Em um total foram calculados os períodos de 25707 estrelas variáveis localizadas na Grande Nuvem de Magalhães e pertencentes ao catálogo OGLE. Deste numero total, 3056 eram Cefeidas clássicas tipo FO e FU, e 22651 eram RR Lyraes tipo AB e C. Os resultado obtidos foram comparados com os resultados do catálogo e o percentual de acertos pode ser visto na tabela 4.1.

De acordo com os resultados da tabela 4.1 podemos perceber que para as Cefeidas o método apresenta um resultado um pouco melhor se comparado com as RR Lyraes. Uma explicação para este resultado seria que o método de entropia de Shannon condicional funciona melhor para magnitude mais brilhantes (Graham et al., 2013a) e sendo as Cefeidas ($m \approx 15$) mais brilhantes do que as RR Lyraes ($m \approx 19$), essa afirmação é coerente com os resultados.

TABELA 4.1: Quantidade de dados analisados e resultados corretos.

Estrelas	Quantidade	Acertos	Porcentagem
Cefeidas FU	1818	1817	99, 94%
Cefeidas FO	1238	1231	99, 43%
RRLyraes AB	17693	17540	99, 14%
RRLyraes C	4958	4535	91, 47%
Total	25707	25123	97,73 %

A alta taxa de acerto do método no informa que com estes resultados podemos confiar no método de entropia de Shannon condicional, porém para entender melhor o comportamento desse método será analisado os resultados para dados sintéticos.

4.2 Dados Sintéticos

Dados sintéticos foram criados a fim de explorar o método e entender até onde podemos utilizá-lo. De acordo com a tabela 4.1, as RRLyraes apresentaram uma taxa menor de acerto então elas foram utilizadas como referência para construir os dados sintéticos. Para isto, é necessário entender os dados das RR Lyraes do catálogo OGLE para obter os parâmetros sobre o tempo e amostragem para enfim utilizar a expressão 3.4 e construir os dados.

Analizando os dados das 22651 estrelas, foram criados histogramas sobre os dados iniciais e finais do tempo e a quantidade de pontos de observação. As figuras 4.1 e 4.2 nos mostram esses histogramas.

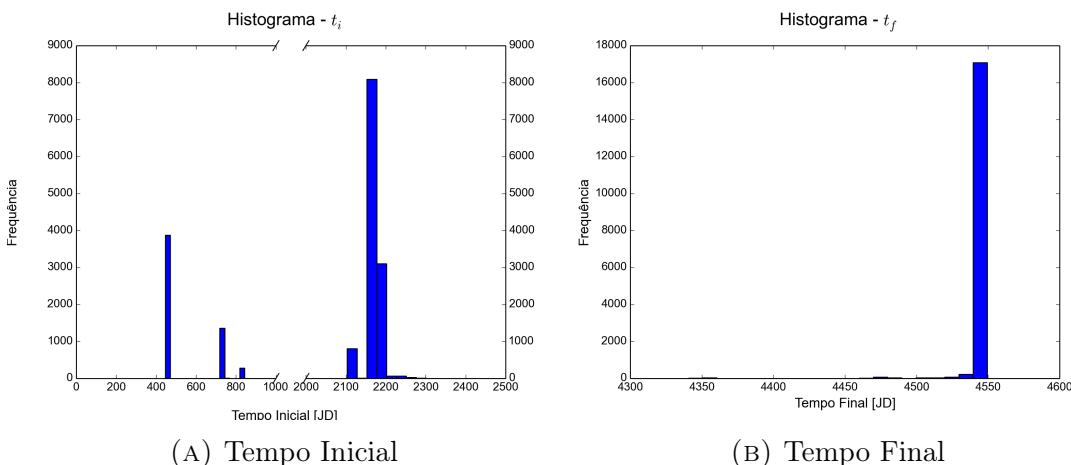


FIGURA 4.1: Histogramas sobre o tempo inicial e final das RR Lyraes. As imagens representam (a) tempo inicial e (b) tempo final. A partir dessa análise foram obtidos os valores $t_i = 2152, 5019$ e $t_f = 4539, 4593$.

A partir dessa análise foram obtidos os valores $t_i = 2152, 5019$ e $t_f = 4539, 4593$ e $n = 352$ como os valores de tempo inicial, final e quantidade de pontos mais

frequentes nos dados das RR Lyraes. Desta forma, utilizando esses valores é possível construir um sinal sintético que se assemelhe com os dados do catálogo. Então, a amostragem é calculada pela expressão 3.5 em que a variação do tempo é obtida da seguinte forma:

$$dt = \frac{t_f - t_i}{n} = \frac{4539,4593 - 2152,5019}{352} = 6,7888 \quad (4.1)$$

e substituindo este resultado na equação 3.5 nos obtemos:

$$f_s = 0,1473. \quad (4.2)$$

Desta forma foi determinado a partir dos dados do catálogo qual a variação média entre os pontos de observação e foi calculada a amostragem média dos dados.

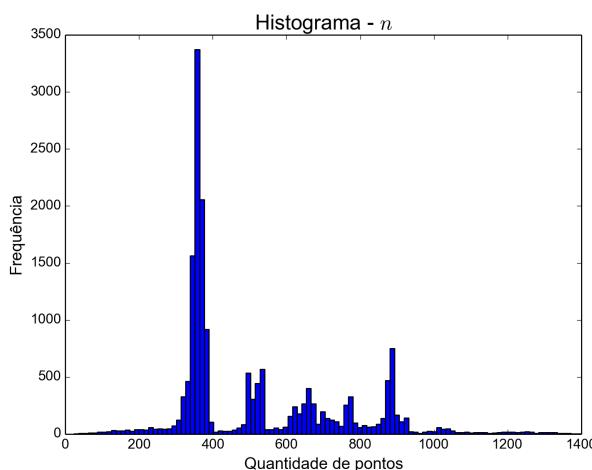


FIGURA 4.2: Histograma sobre a quantidade de pontos nos dados das RR Lyraes. A quantidade com maior frequência é $k = 352$.

Tendo obtido a amostragem, podemos construir dados sintéticos variando a frequência de pontos e o nível de ruído para estudar como o método se comporta com esses sinais. O sinal sintético é construído pela expressão 3.4 em que os termos A_i são dados por Graham et al. (2013b) e Cincotta, Mendez e Nunez (1995) como sendo $A_0 = 15$, $A_1 = -0.5$, $A_2 = 0.15$ e $A_3 = -0.05$. O período utilizado para

criar o sinal será $P = 0.576$ dias pois, de acordo com Soszyński et al. (2009) esse é o valor de período médio das RR Lyraes do catálogo.

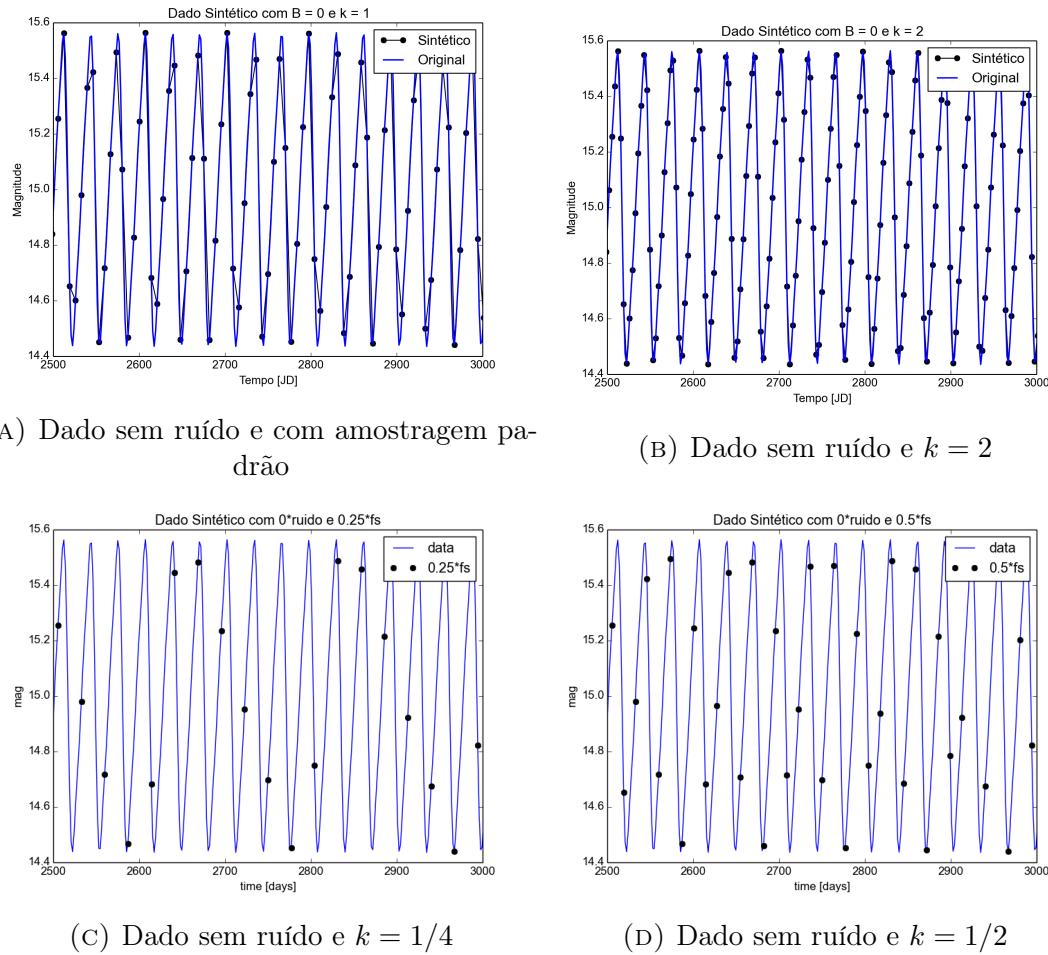


FIGURA 4.3: Exemplos de curvas de luz sintética. Os exemplos foram criados sem ruído, $B = 0$, e variando k . A linha azul representa o sinal original completo e os pontos e linha preta correspondem a observação com a amostragem k .

Para estudar a influência da amostragem nos dados, o vetor t será criado utilizando os valores obtidos pelos histogramas de tempo inicial ($t_i = 2152, 5019$) e final ($t_f = 4539, 4593$) e a variação de pontos dt será construindo pela relação:

$$dt = \frac{1}{f} \quad (4.3)$$

em que $f = k \times f_s$, ou seja, a frequência de pontos f será um parâmetro de escala k vezes a amostragem f_s dos dados. Desta forma, variando o parâmetro k de 0, 25

a 4,0 com um intervalo de 0,25 e variando o parâmetro de escala para o ruído B de 0,0 até 1,0 com intervalo de 0,05, forma criadas 300 curvas de luz para serem analisadas. Quatro exemplos de curva de luz sintética gerada pelo método acima podem ser vistas na figura 4.3.

Na figura 4.3, os pontos e linha preta correspondem aos pontos de observação e a linha contínua azul seria o sinal original completo. Podemos perceber que quanto maior a amostragem, maior a quantidade de pontos.

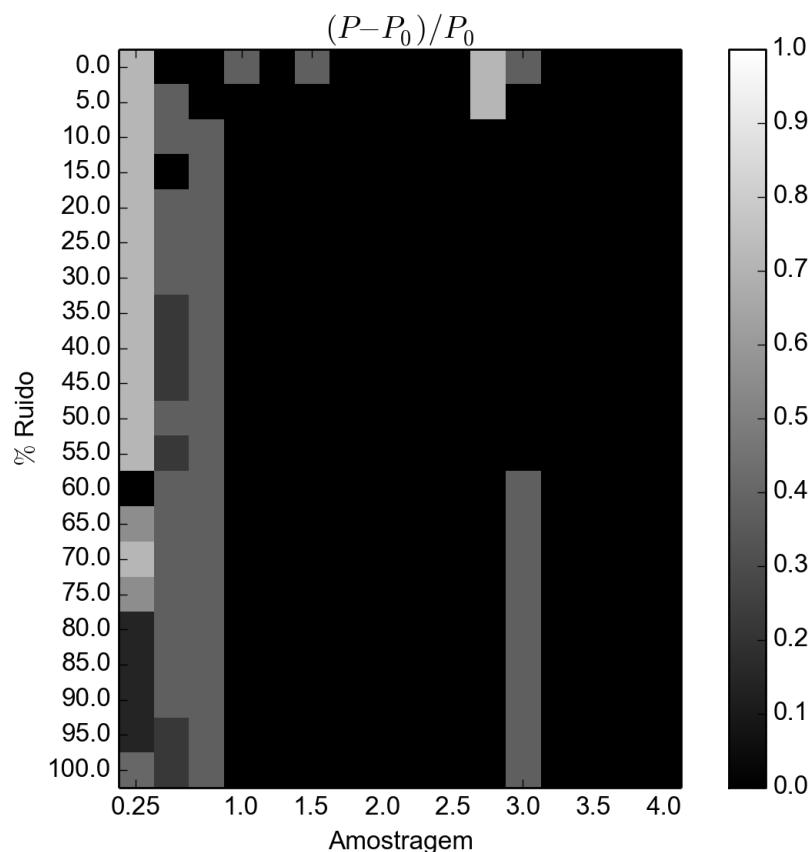


FIGURA 4.4: Resultados obtidos em escala de cinza. O eixo das abscissas representa o parâmetro de escala k da amostragem e o eixo das ordenadas representa a variação do parâmetro de escala B para o ruído. Quanto mais escura a cor do quadrado mais correto o valor calculado pela entropia de Shannon condicional.

A figura 4.4 nos mostra um mapa de cor em escala de cinza entre parâmetro de escala B do ruído e o parâmetro de escala k da amostragem. A cor representa

o valor $|(P - P_0)/P_0|$, ou seja, quanto que o período calculado está variando em relação ao período original. A cor mais escura representa o valor 0 (período calculado = período real) e quanto mais clara a cor, maior o desvio do período.

Podemos observar que a partir do parâmetro de escala $k = 1,0$ para a amostragem, todos os resultados calculados foram corretos não importando o nível de ruído, com exceção da faixa entre os ruídos 60% e 100% para $k = 3$ que apresentam um resultado $\approx 0,4$. Essa exceção significa que o resultado obtido é aproximadamente a metade do período real.

4.3 Conclusão

A observação e detecção de períodos de estrelas variáveis é fundamental para descrição desses objetos astronômicos e para a determinação de distâncias. Embora existam diversos métodos para o cálculo de período, o desenvolvimento de técnicas que sejam confiáveis e possam ser aplicadas para dados com espaçamento variável entre os pontos de observação é de grande importância em uma realidade em que há dificuldades para observação dos telescópios, sendo essas dificuldades devido ao tempo disponível de observação e as condições climáticas. O método apresentado neste trabalho, a entropia de Shannon condicional, é uma técnica simples de ser entendida e aplicada, possuindo um embasamento matemático dentro da teoria da informação o que faz com que a sua análise estatística seja conhecida, fato que não é verdade para alguns métodos de detecção de períodos. Além disso, o método apresenta um desempenho mais do que satisfatório com uma taxa de acerto maior do que 97% para as 25707 estrelas pulsantes do catálogo OGLE-III. Além disso, a análise dos dados sintéticos afirma que o método é confiável para qualquer nível de ruído desde que a frequência de pontos dos dados seja maior do que $f_s = 0,1473$. Por fim, com a figura 4.4 foi possível construir uma ferramenta

que nos indica como os dados influenciam no resultado do método, ou ainda, partindo do resultado que se espera obter, é possível determinar como a observação nos telescópios devem ser conduzidas. Parte dos resultados obtidos nesse trabalho foram apresentados em Ramos, Bellinger e Kanbur (2014) e Ramos, Ferrari e Kanbur (2015).

Apêndice A

Algoritmo

O código utilizado no trabalho foi criado na linguagem Python3 utilizando as bibliotecas Numpy, Argparse e os. O Algoritmo é apresentado a seguir:

```
from argparse import ArgumentParser, FileType
import os
import numpy as np

def get_args():
    parser = ArgumentParser(description='Program to calculate \
                                    the period of a star \
                                    using the Conditional \
                                    Entropy method')
    parser.add_argument('-i', type=str, default=None,
                        help='Location or file of stellar data')
    parser.add_argument('-o', type=str, default=None,
                        help='Location for output files')
    parser.add_argument('--minp', '--min-period', type=float,
                        default= 0.1,
                        help='Minimun Period to search'
                            '(default = 0.1)')
    parser.add_argument('--maxp', '--max-period', type=float,
                        default= 32.0,
                        help='Maximum Period to search'
                            '(default = 32.0)')
```

```

parser.add_argument( '-precision' , type=float ,
                     default=0.0001 ,
                     help='Step between periods'
                           '( default = 0.0001 )')

parser.add_argument( '-p_bins' , '--phase-bins' , type=int ,
                     default=10 ,
                     help='Quantity of phase bins'
                           '( default = 10 )')

parser.add_argument( '-m_bins' , '--mag-bins' , type=int ,
                     default=5 ,
                     help='Quantity of magnitude bins'
                           '( default = 5 )')

args = parser.parse_args()

return args


def get_files(data):
    """
    Get the correct path of file or files inside a directory
    """

    if os.path.isfile(data):
        return [data]

    elif os.path.isdir(os.path.abspath(data)):
        path = os.path.abspath(data)
        os.chdir(path)
        list_of_files = os.listdir(path)
        return sorted(list_of_files)

def out_dir(out):
    """
    check if the output path is relative or not
    and return the absolute path
    """

    if out == None:

```

```
        return os.getcwd()

    elif os.path.isdir(out):
        return os.path.abspath(out)

def rephase(data, period, col=0, copy=True):
    """
    transform the time of observations to the phase space
    """

    rephased = np.ma.array(data, copy=copy)
    rephased[:, col] = get_phase(rephased[:, col], period)
    return rephased

def get_phase(time, period):
    """
    divide the time of observations by the period
    """

    return (time / period) % 1

def normalization(data):
    """
    Normalize the magnitude of the star
    """

    norm = np.ma.copy(data)
    norm[:, 1] = (norm[:, 1] - np.min(norm[:, 1])) \
        / (np.max(norm[:, 1]) - np.min(norm[:, 1]))

    return norm

def periods_array(min_period, max_period, step):
    """
    Creates a period array from min_period to max_period with a
    step equals to the third argument
    """

    period = np.arange(min_period, max_period+step, step)
```

```

return period

def cond_entropy(period , data , p_bins=10, m_bins=5):
    ,
    ,
    Compute the conditional entropy for the
    normalized observations
    ,
    ,
    if period <= 0:
        return np.PINF
    r = rephase(data , period)
    bins , *_ = np.histogram2d(r[:,0] , r[:,1] , [p_bins , m_bins] ,
                               [[0,1] , [0,1]])
    size = r.shape[0]
    if size > 0:
        divided_bins = bins / size
        arg_positive = divided_bins > 0
        column_sums = np.sum(divided_bins , axis=1)
        column_sums = np.repeat(np.reshape(column_sums ,
                                         (p_bins,1)) , m_bins , axis=1)

        select_divided_bins = divided_bins[arg_positive]
        select_column_sums = column_sums[arg_positive]

        A = np.empty((p_bins , m_bins) , dtype=float)
        A[arg_positive] = select_divided_bins \
            * np.log(select_column_sums \
            / select_divided_bins)
        A[~arg_positive] = 0

        return np.sum(A)
    else:
        return np.PINF

def main():

```

```

args = get_args()
files = get_files(args.i)
out = out_dir(args.o)
ce = []
periods = periods_array(args.min_period, args.max_period,
                        args.precision)

for star in files:
    ent_data = []
    ce_period = []
    data = np.ma.array(np.loadtxt(star), mask=None,
                       dtype=float)
    norm = normalization(data)

    for p in periods:
        ent_data.append(cond_entropy(p, norm,
                                      args.phase_bins,
                                      args.mag_bins))
    ce_period.append(p)

    np.savetxt(os.path.join(out,
                           'entropies_' + os.path.basename(star) + '.txt'),
               np.vstack((ce_period, ent_data))[0],
               fmt='%s')

    right_period = star, ce_period[np.argmin(ent_data)]
    ce.append(right_period)

np.savetxt(os.path.join(out, 'results.dat'),
          ce, fmt='%s')

if __name__ == '__main__':
    exit(main())

```

Bibliografia

- Bailey, Solon Irving (1902). “A discussion of variable stars in the cluster ω Centauri”. Em: *Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College* ; v. 38. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1902AnHar..38....1B>.
- C. Aerts J. Christensen-Dalsgaard, D. W. Kurtz (2010). *Asteroseismology*. 1^a ed. Astronomy and Astrophysics Library. Springer Netherlands.
- Catelan Márcio; Smith, Horace A. (2015). *Pulsating Stars*. Jonh Wiley & Sons. ISBN: 9783527655205.
- Cincotta, P. M., M. Mendez e J. A. Nunez (1995). “Astronomical Time Series Analysis. I. A Search for Periodicity Using Information Entropy”. Em: *The Astrophysical Journal* 449, p. 231. DOI: [10.1086/176050](https://doi.org/10.1086/176050).
- Cincotta, Pablo M. et al. (1999). “Astronomical time-series analysis – II. A search for periodicity using the Shannon entropy”. Em: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 302.3, pp. 582–586. ISSN: 0035-8711. DOI: [10.1046/j.1365-8711.1999.02128.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.1999.02128.x). URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1999MNRAS.302..582C>.
- Claude E Shannon Warren Weaver, Shannon (1998). *Mathematical theory of communication*. First Edition. University of Illinois Press. ISBN: 9780252725463.
- Cousins, A. W. J. (1973). “Revised zero points and UBV photometry of stars in the Harvard E and F regions.” Em: *Mem. R. Astron. Soc.* 77. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1973MmRAS..77..223C>.
- Ferraz-Mello, S. (1981). “Estimation of Periods from Unequally Spaced Observations”. Em: *The Astronomical Journal* 86, p. 619. DOI: [10.1086/112924](https://doi.org/10.1086/112924).

- Graham, M. J. et al. (2013a). “A comparison of period finding algorithms”. Em: *Monthly Notices of the RAS* 434, pp. 3423–3444. DOI: [10.1093/mnras/stt1264](https://doi.org/10.1093/mnras/stt1264). arXiv: [1307.2209 \[astro-ph.IM\]](https://arxiv.org/abs/1307.2209).
- Graham, M. J. et al. (2013b). “Using conditional entropy to identify periodicity”. Em: *Monthly Notices of RAS* 434, pp. 2629–2635. DOI: [10.1093/mnras/stt1206](https://doi.org/10.1093/mnras/stt1206). arXiv: [1306.6664 \[astro-ph.IM\]](https://arxiv.org/abs/1306.6664).
- Hertzsprung, Ejnar (1913). “Über die räumliche Verteilung der Veränderlichen vom δ Cephei-Typus”. Em: *Astronomische Nachrichten* 196. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1913AN....196..201H>.
- Johnson, Harold L (1966). “Astronomical Measurements in the Infrared”. Em: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 4.1, pp. 193–206. ISSN: 0066-4146. DOI: [10.1146/annurev.aa.04.090166.001205](https://doi.org/10.1146/annurev.aa.04.090166.001205). URL: <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.aa.04.090166.001205>.
- Johnson, Harold L. e W. W. Morgan (1953). “Fundamental stellar photometry for standards of spectral type on the revised system of the Yerkes spectral atlas”. Em: *The Astrophysical Journal* 117, p. 313. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/145697](https://doi.org/10.1086/145697). URL: <http://labs.adsabs.harvard.edu/adsabs/abs/1953ApJ...117..313J>.
- Karttunen, H. et al. (2007). *Fundamental Astronomy*. 5^a ed. Springer.
- Kepler, S.O. e M. F. Saraiva (2013). *Astronomia & Astrofísica*. Livraria da Física.
- Kraft, Robert P. (1960). “Color Excesses for Supergiants and Classical Cepheids. II . The Period-Color Relation for Classical Cepheids.” Em: *The Astrophysical Journal* 132, p. 404. ISSN: 0004-637X. DOI: [10.1086/146938](https://doi.org/10.1086/146938). URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1960ApJ...132..404K>.
- Leavitt, Henrietta S. e Edward C. Pickering (1912). “Periods of 25 Variable Stars in the Small Magellanic Cloud.” Em: *Harvard College Observatory Circular* 173. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1912HarCi.173....1L>.

- Lomb, N. R. (1976). “Least-squares frequency analysis of unequally spaced data”. Em: *Astrophysics and Space Science* 39, pp. 447–462. DOI: [10.1007/BF00648343](https://doi.org/10.1007/BF00648343).
- Miles, R. (2007). “A light history of photometry: from Hipparchus to the Hubble Space Telescope”. Em: *Journal of the British Astronomical Association*. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007JBAA..117..172M>.
- Payne, Cecilia H. (1930). “On the Relation of Period to Mean Density for Cepheid Variables”. Em: *Harvard College Observatory Bulletin No. 876*. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/1930BHar0.876...28P>.
- Ramos, G.L., E. Bellinger e S.M. Kanbur (2014). “Conditional Entropy Method to Detect Periods on Variable Stars”. Em: *Rochester Academy of Science 41st Annual Fall Scientific Paper Session*. Poster.
- Ramos, G.L., F. Ferrari e S.M. Kanbur (2015). “Conditional Entropy Method to Detect Period on Variable Stars”. Em: *I Escola de Física do Extremo Sul - EFESUL*.
- Schwarzenberg-Czerny, A. (1989). “On the advantage of using analysis of variance for period search”. Em: *Monthly Notices of the RAS* 241, pp. 153–165.
- Soszyński, I. et al. (2009). “The Optical Gravitational Lensing Experiment. The OGLE-III Catalog of Variable Stars. III. RR Lyrae Stars in the Large Magellanic Cloud”. Em: *Acta Astronomica* 59, pp. 1–18. arXiv: [0903.2482](https://arxiv.org/abs/0903.2482).
- Udalski, A. et al. (2008). “The Optical Gravitational Lensing Experiment. Final Reductions of the OGLE-III Data”. Em: p. 13. arXiv: [0807.3884](https://arxiv.org/abs/0807.3884). URL: <http://arxiv.org/abs/0807.3884>.