

Università degli Studi di Roma  
“La Sapienza”



Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

TESI DI LAUREA IN INFORMATICA

# MODELLO DI CRESCITA URBANA MEDIANTE AUTOMI CELLULARI E SISTEMI MULTI-AGENTE

**Relatore:**

Prof. Brunello Tirozzi

**Relatore esterno:**

Prof. Carlo Bagnasco

**Laureando:**

Giovanni Luca Ciampaglia

(mat. 688346)

Anno Accademico 2005/06

*Tra le massime scolpite sul muro del daimio Nao-shige ce n'era una che diceva: «Le questioni più gravi vanno trattate con leggerezza». Il maestro Ittei commentò: «Quelle meno gravi vanno trattate con serietà».*

*Non esistono più di due o tre problemi da considerare seriamente e, se sono esaminati in tempi ordinari, possono essere compresi. Per risolverli immediatamente è necessario solo pensarci in anticipo, e poi trattarli con leggerezza quando giunge il momento. Tuttavia non è facile fronteggiare un evento e risolverlo con leggerezza se non ci si è preparati prima, perché non si sa prendere la decisione giusta. Quindi la massima «Le questioni più gravi vanno trattate con leggerezza» può essere pensata come fondamento dell'agire.*

*Hagakure (I,45)*

# Indice

Introduzione	6
<b>1 I processi di Poisson</b>	<b>11</b>
1.1 La distribuzione di Poisson . . . . .	11
1.2 Processi stocastici . . . . .	14
1.3 Simulazione dei processi di Poisson . . . . .	18
<b>2 L'analisi delle componenti principali</b>	<b>21</b>
2.1 Trasformazioni lineari . . . . .	22
2.2 Approssimazione dei dati . . . . .	23
2.3 Decomposizione ai valori singolari . . . . .	28
2.3.1 Risoluzione di sistemi di equazioni lineari . . . . .	30
2.3.2 Fattorizzazione spettrale e decomposizione ai valori singolari . . . . .	36
2.4 Calcolo delle componenti principali . . . . .	38
<b>3 Il sistema urbano come un'automa cellulare</b>	<b>41</b>
3.1 Suddivisione cellulare del sistema urbano . . . . .	41
3.2 Stato del sistema . . . . .	45
3.2.1 Stato dinamico di una cella . . . . .	45
3.2.2 Parametri locali esogeni di una cella . . . . .	46
3.2.3 Parametri globali del sistema e stato globale . . . . .	47
3.3 Aggiornamento dello stato del sistema . . . . .	48
3.3.1 Processi di trasformazione urbana di una cella . . . . .	50
3.3.2 Produzione di beni e sfruttamento di risorse . . . . .	56
3.3.3 Eventi di trasformazione esogeni di una cella . . . . .	57

<b>4</b>	<b>Processi di decisione per popolazioni di agenti</b>	<b>58</b>
4.1	Agenti urbani e processi decisionali . . . . .	59
4.1.1	Le popolazioni degli agenti . . . . .	60
4.1.2	Il ciclo di vita di un agente . . . . .	61
4.1.3	Dinamica del processo decisionale . . . . .	63
4.2	Intensità dei processi di Poisson . . . . .	69
4.3	Algoritmo di simulazione del processo di poisson composto	76
<b>5</b>	<b>Lo studio della periferia orientale di Roma</b>	<b>83</b>
5.1	Il reticolo cellulare . . . . .	84
5.2	Le variabili statistiche . . . . .	85
5.2.1	Descrizione preliminare . . . . .	85
5.2.2	Osservazioni . . . . .	99
5.2.2.1	Distanze da centri di livello urbano . . . . .	99
5.2.2.2	Grado di urbanizzazione . . . . .	100
5.2.2.3	Edifici residenziali . . . . .	101
5.2.3	Stato dinamico . . . . .	101
5.2.4	Parametri locali esogeni . . . . .	102
5.3	I Processi di trasformazione urbana . . . . .	103
5.3.1	Descrizione preliminare . . . . .	103
5.3.2	Osservazioni . . . . .	104
5.3.3	Regole di aggiornamento dello stato . . . . .	105
5.4	Beni e risorse . . . . .	108
5.4.1	Descrizione preliminare . . . . .	108
5.4.2	Edificio residenziale e mercato immobiliare . . . . .	109
5.4.3	Centro commerciale . . . . .	117
5.4.4	Abbandono e occupazione di una residenza . . . . .	120
5.4.5	Conversione di suolo agricolo . . . . .	120
5.4.6	Attività commerciale locale . . . . .	124
5.4.7	Attività di terziario . . . . .	125
5.5	Intensità dei processi di Poisson . . . . .	125
5.5.1	Integrazione nella rete di trasporti . . . . .	125

## *INDICE*

---

<b>6 Implementazione e test</b>	<b>128</b>
6.1 Implementazione . . . . .	129
6.1.1 Bootstrap dell'algoritmo di simulazione . . . . .	129
6.1.2 Parametri di classificazione . . . . .	130
6.1.3 Organizzazione del codice . . . . .	131
6.2 Scenari di espansione urbana . . . . .	135
 <b>Conclusioni</b>	 <b>156</b>
 <b>Bibliografia</b>	 <b>158</b>
 <b>Ringraziamenti</b>	 <b>161</b>

# Introduzione

Il processo di crescita urbana è un meccanismo poco prevedibile, non lineare e che spesso sfugge ai tentativi di pianificazione degli esperti. I parametri che influenzano la crescita di una città sono innumerevoli e coinvolgono i più disparati ambiti, come quelli storici, economici, politici ai quali si innestano gli schemi pianificatori. Alcuni fattori che modellano lo spazio urbano sono noti: le vie di comunicazione influenzano la posizione e lo sviluppo di insediamenti industriali che a loro volta determinano lo spostamento di persone e il posizionamento di nuove abitazioni per i lavoratori. Di conseguenza vengono costruiti nuovi edifici, altri sono abbandonati, interi quartieri dapprima adibiti a residenza ospitano poi uffici o aree commerciali. Ad influenzare i cambiamenti entrano in linea di conto anche i costi degli affitti e dei terreni e i tassi ipotecari. Nel tempo, si osserva l'edificazione e la trasformazione di interi quartieri con il conseguente movimento di attività e persone. In poche parole la città è un sistema complesso capace di organizzarsi e di evolvere secondo leggi proprie.

Lo scopo di questa tesi è di presentare una tecnica di modellazione di tale processo di crescita, dal punto di vista matematico. Verrà presentato un

modello di un sistema complesso urbano, la cui principale caratteristica è quella di fare uso dello strumento matematico degli automi cellulari, congiuntamente a quello dei processi stocastici di Poisson. L'applicazione più interessante per i modelli di sistemi complessi – di qualsiasi tipo – è certamente la possibilità di utilizzare tali modelli per effettuare previsioni, sull'andamento di crescita di una città reale. Per il pianificatore, si apre la possibilità di studiare gli effetti e le ripercussioni, sul medio periodo, degli interventi infrastrutturali che intende eseguire, come i cambiamenti del piano regolatore, la creazione di nuovi collegamenti nella rete di trasporto cittadina *et cetera*.

Il lavoro presentato in questa tesi si basa su quello originale del gruppo di ricerca del prof. Sergio Albeverio, presso l'Accademia di Architettura dell'Università della Svizzera Italiana, che prende il nome di ACME<sup>1</sup>. Il modello ACME è stato applicato con successo a vari casi di studio di insediamenti reali, come la zona dei comuni di Capriasca e Valcolla, nel Canton Ticino; il lavoro presentato in questa tesi intende portare un contributo innovativo a tale ricerca con l'applicazione del modello alla periferia orientale di Roma.

La tesi è suddivisa in tre parti, ciascuna costituita da due capitoli. Nella **Parte Prima** vengono passati in rassegna i due principali elementi di teoria utilizzati; nel **Capitolo 1** vengono introdotti i processi di Poisson e le relative proprietà di cui faremo uso nel corso della definizione del modello; nel **Capitolo 2** viene introdotta l'analisi delle componenti principali e

---

<sup>1</sup>Dall'acronimo Automi Cellulari - Master Equation. L'homepage del progetto ACME è reperibile all'URL <http://www.mate.arch.unisi.ch/ACME>.

si parla della tecnica numerica di cui si è fatto uso per la sua implementazione, la decomposizione ai valori singolari. L'analisi delle componenti principali viene utilizzata per definire la tecnica di classificazione di cui fa uso il modello. Nella **Parte Seconda** viene descritto il modello vero e proprio; nel **Capitolo 3** viene spiegato in che modo esso sfrutti il formalismo degli automi cellulari, e quali siano gli aspetti di tale formalismo da cui ci si diparte, nello sforzo di giustificare al meglio le meccaniche di trasformazione della città simulata. Nel **Capitolo 4** vengono definite le leggi probabilistiche che governano la dinamica stocastica del sistema: viene spiegato come i processi di trasformazione urbanistica possano essere riprodotti sotto forma di processi decisionali di un certo numero di popolazioni di agenti virtuali; l'analisi delle componenti principali ci permette di definire due famiglie di funzioni sullo spazio cellulare<sup>2</sup>, a valori reali positivi, che descrivono quanto ciascuna cella sia favorevole all'attuazione degli eventi di trasformazione urbana: dal punto di vista intuitivo, maggiore sarà il valore di tali funzioni su una data cella, maggiore sarà il numero di agenti che visiterà tale cella, e che la sceglierà come sede di un evento urbanistico (come la costruzione di case, centri commerciali, *et cetera*). Nella **Parte Terza** si parla di come il modello sia stato applicato al caso di studio di Roma EST; le questioni relative all'adattamento dei dati statistici<sup>3</sup> al modello sono discusse nel **Capitolo 5**, mentre nel **Capitolo**

---

<sup>2</sup>la superficie della città viene suddivisa in un insieme di celle bidimensionali. Ciascuna cella rappresenta una precisa zona della città. Tale insieme prende il nome di spazio cellulare.

<sup>3</sup>forniti dall'Istituto Nazionale di Statistica. La raccolta di questi dati fa parte di un altro studio sulla periferia orientale di Roma a cura del prof. C. Bagnasco e della prof.ssa I. Arcidiacono del dipartimento di Urbanistica, dell'Università degli Studi di Roma "La Sapienza".



6 è discussa l'implementazione delle leggi del modello in un simulatore software, assieme ad uno studio preliminare degli scenari di espansione urbana del caso di studio.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>questo documento è stato redatto in  $\text{\LaTeX}$  per mezzo del software opensource  $\text{\LaTeX}$ ; l'homepage del progetto  $\text{\LaTeX}$  è reperibile all'URL <http://www.lyx.org>.

## **Elementi di teoria**

# Capitolo 1

## I processi di Poisson

### 1.1 La distribuzione di Poisson

I processi di Poisson sono dei processi stocastici che hanno un ruolo fondamentale nel nostro modello. La definizione di tali processi si basa sulla distribuzione di probabilità di Poisson.

**Definizione 1.1.** *Si dice che una variabile aleatoria  $X$  ha distribuzione di Poisson se  $X$  assume valori interi e*

$$\Pr\{X = n\} = \pi_n(\mu) = \mu^n \frac{e^{-\mu}}{n!} \quad (1.1)$$

dove  $\mu > 0$  e  $n \geq 0$ . In simboli:  $X \sim \mathcal{P}(\mu)$ .

La media di una variabile aleatoria con distribuzione  $\mathcal{P}(\mu)$  è

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \Pr\{X = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n(\mu) = \mu \quad (1.2)$$

I casi estremi per  $\mu = 0$  e  $\mu = +\infty$  sono definiti nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \Pr\{X = 0\} &= 1 \\ \Pr\{X = +\infty\} &= 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Sia  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \leq 1$ ; la funzione generatrice di  $X$  è

$$E(z^X) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mu) z^n = e^{-\mu(1-z)} \quad (1.4)$$

da cui derivando e ponendo  $z = 1$ ,

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu \\ E(X(X-1)) &= \mu^2 \\ \Rightarrow E(X^2 - X) &= E(X^2) - E(X) \\ \Rightarrow E(X^2) &= E(X(X-1)) + E(X) = \mu + \mu^2 \\ \Rightarrow V(X) &= E(X^2) - E^2(X) = \mu \end{aligned} \quad (1.5)$$

La distribuzione di Poisson ha l'importante proprietà dell'additività.

**Proposizione 1.2** (Additività della distribuzione di Poisson). *Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie con distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda$  e  $\mu$ , rispettivamente. Se  $X$  e  $Y$  sono indipendenti allora la variabile aleatoria  $X + Y$  ha distribuzione  $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .*

*Dimostrazione.*  $X \sim \mathcal{P}(\lambda), Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ , per indipendenza:

$$\begin{aligned} \Pr\{X = r, Y = s\} &= \Pr\{X = r\} \Pr\{Y = s\} = \\ \pi_r(\lambda) \cdot \pi_s(\mu) &= \lambda^r \frac{e^{-\lambda}}{r!} \cdot \mu^s \frac{e^{-\mu}}{s!} \end{aligned}$$

allora sommando sulle possibili coppie  $(r, s)$  aventi somma fissa  $r + s = n$  è possibile ottenere la probabilità che la variabile  $X + Y$  prenda il valore  $n$ :

$$\begin{aligned} \Pr\{X + Y = n\} &= \sum_{r=0}^n \Pr\{X = r, Y = n - r\} = \\ &= \sum_{r=0}^n \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!} \cdot \mu^{n-r} \cdot \frac{e^{-\mu}}{(n-r)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{r=0}^n \frac{\lambda^r \mu^{n-r}}{r!(n-r)!} = \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \lambda^r \mu^{n-r} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} (\lambda + \mu)^n \\ &\Rightarrow X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu) \end{aligned}$$

□

Per induzione è possibile estendere la proposizione 1.2 a somme di un qualsiasi numero finito di variabili aleatorie indipendenti.

Una proprietà importante della distribuzione di Poisson è che da essa è possibile ottenere le distribuzioni binomiale e multinomiale condizionando questa all'evento che un fissato numero di successi sia avvenuto.

**Proposizione 1.3.** *Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.v.a.a. indipendenti e sia  $\forall j : j = 1, 2, \dots, n$   $X_j \sim \mathcal{P}(\mu_j)$ . Allora  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  ha distribuzione  $\mathcal{P}(\sigma)$*

con  $\sigma = \sum_{j=1}^n \mu_j$  e fissati  $r_1, r_2, \dots, r_n$  t.c.  $r_1 + r_2 + \dots + r_n = s$ ,

$$\begin{aligned} \Pr\{X_1 = r_1, X_2 = r_2, \dots, X_n = r_n \mid S = s\} &= \prod_{j=1}^n \frac{\mu_j^{r_j} e^{-\mu_j}}{r_j!} \bigg/ \frac{\sigma^s e^{-\sigma}}{s!} \\ &= \frac{s!}{r_1! r_2! \dots r_n!} \cdot \left(\frac{\mu_1}{\sigma}\right)^{r_1} \left(\frac{\mu_2}{\sigma}\right)^{r_2} \dots \left(\frac{\mu_n}{\sigma}\right)^{r_n} \quad (1.6) \end{aligned}$$

se  $\forall j \ p_j = \frac{\mu_j}{\sigma}$  allora otteniamo le probabilità della distribuzione multinomiale  $\mathcal{M}(p_1, \dots, p_n; s)$

## 1.2 Processi stocastici

Consideriamo un fenomeno stocastico che avviene ripetutamente durante un certo lasso di tempo; consideriamo inizialmente un intervallo finito  $[0, 1)$  e supponiamo che il numero di volte che questo fenomeno ha luogo durante questo intervallo, sia modellato dalla variabile aleatoria  $N(1)$ , avente distribuzione di Poisson:  $N(1) \in \mathbb{Z}^+$ ,  $N(1) \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$ .

$$\Pr\{N(1) = k\} = \pi_k(\lambda) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} \quad (1.7)$$

Assumiamo inoltre che  $N(0) = 0$ ; ci chiediamo quale sia la probabilità di ottenere  $k$  eventi nell'intervallo  $[0, t)$ , per un generico  $t \geq 0$ . In altre parole ci chiediamo quale siano i valori della distribuzione di probabilità

$$\Pr\{N(t) - N(0) = k\} = \Pr\{N(t) = k\} \quad (1.8)$$

In effetti anche  $N(t)$  ha distribuzione di Poisson;

$$\Pr\{N(t) = k\} = (\lambda t)^k \frac{e^{-\lambda t}}{k!} \quad (1.9)$$

In effetti per descrivere il processo stocastico nel suo complesso, anziché considerare solo  $N(1)$  dobbiamo considerare la successione

$$N(1), N(2), N(3), \dots \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (1.10)$$

se stiamo considerando una variabile di tempo discreta, altrimenti

$$\{N(t), t \geq 0\} \quad (1.11)$$

se consideriamo un processo continuo, e.g.  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definizione 1.4** (Processo stocastico). *Un processo stocastico è una famiglia di variabili aleatorie ed è definito da tutti i possibili valori delle distribuzioni di probabilità congiunta.*

**Definizione 1.5** (Distribuzione di probabilità congiunta).  *$\forall k$ , la distribuzione di probabilità congiunta di  $k$  variabili aleatorie di Poisson è*

$$\Pr\{N(t_1) \in A_1, N(t_2) \in A_2, \dots, N(t_k) \in A_k\} = p_{t_1 \dots t_k}(A_1, \dots, A_k) \quad (1.12)$$

*ed è definita  $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_k$  e  $\forall A_1, A_2, \dots, A_k \subset \mathbb{Z}^+$*

I processi ad incrementi indipendenti, come quelli di Poisson, permettono

di calcolare tali distribuzioni di probabilità congiunta in maniera piuttosto semplice. La definizione di processo di Poisson è la seguente:

**Definizione 1.6** (Processo di Poisson). *Un processo di Poisson  $N(t)$  è una famiglia di variabili aleatorie per  $t \geq 0$  che prendono valori interi non negativi, tali che*

$$(i). N(0) = 0$$

$$(ii). \Pr\{N(t+s) - N(t) = k\} = \frac{e^{-\lambda s}}{k!} (\lambda s)^k$$

(iii). *Gli incrementi in intervalli di tempo disgiunti sono indipendenti*

$\lambda$  è detto tasso di attività del processo.

Si noti che al punto (ii) la probabilità di  $\{N(t+s) - N(t) = k\}$  dipende solo da  $s$  e non da  $t$ , in altre parole il processo è stazionario. Facciamo vedere che da (i), (ii) e (iii) si ricavano tutte le probabilità congiunte 1.12. Mostriamo il procedimento per  $k = 3$ . Consideriamo tre istanti di tempo  $t, t_1, t_2, t < t_1 < t_2$ ; il punto (iii) implica che

$$\begin{aligned} \Pr\{N(t_1) - N(t) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2\} = \\ \Pr\{N(t_1) - N(t) = k_1\} \cdot \Pr\{N(t_2) - N(t_1) = k_2\} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Per quale motivo (i), (ii) e (iii) sono sufficienti per definire le distribuzioni congiunte? Supponiamo di voler calcolare:

$$\Pr\{N(t_2) = k_2, N(t_1) = k_1, N(t) = k\} \quad (1.14)$$



dove  $t_2 > t_1 > t$  e  $k_2 > k_1 > k$ . Possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned} \Pr\{N(t_2) = k_2, N(t_1) = k_1, N(t) = k\} = \\ \Pr\{N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1, N(t_1) - N(t) = k_1 - k, N(t) - N(0) = k\} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Per l'indipendenza degli incrementi otteniamo:

$$\begin{aligned} \Pr\{N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1, N(t_1) - N(t) = k_1 - k, N(t) - N(0) = k\} = \\ \Pr\{N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\} \cdot \Pr\{N(t_1) - N(t) = k_1 - k\} \cdot \Pr\{N(t) = k\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Si noti che in effetti la proprietà di indipendenza non vale solo per le coppie di incrementi ma per qualsiasi insieme di incrementi, purché avvengano in intervalli di tempo disgiunti. A questo punto la probabilità congiunta è facilmente calcolabile applicando il punto (ii) (si noti anche che abbiamo usato il punto (i) per riscrivere il terzo fattore a secondo membro di 1.16). In definitiva abbiamo che

$$\begin{aligned} \Pr\{N(t_2) = k_2, N(t_1) = k_1, N(t) = k\} = \\ \Pr\{N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\} \cdot \Pr\{N(t_1) - N(t) = k_1 - k\} \cdot \Pr\{N(t) = k\} = \\ \frac{e^{-\lambda(t_2-t_1)}}{(k_2 - k_1)!} [\lambda(t_2 - t_1)]^{(k_2-k_1)} \cdot \frac{e^{-\lambda(t_1-t)}}{(k_1 - k)!} [\lambda(t_1 - t)]^{(k_1-k)} \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{k!} (\lambda t)^k = \\ e^{-\lambda((t_2-t_1)+(t_1-t)+t)} \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^{(k_2-k_1)}}{(k_2 - k_1)!} \frac{[\lambda(t_1 - t)]^{(k_1-k)}}{(k_1 - k)!} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \end{aligned}$$

$$= e^{-\lambda t_2} \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^{(k_2 - k_1)}}{(k_2 - k_1)!} \frac{[\lambda(t_1 - t)]^{(k_1 - k)}}{(k_1 - k)!} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (1.17)$$

allora la 1.12 è ottenibile dalla 1.17 sommando su tutti gli elementi di  $A_1, A_2, A_3$ , ovvero:

$$\begin{aligned} \Pr\{N(t_1) \in A_1, N(t_2) \in A_2, N(t_3) \in A_3\} &= \\ &= \sum_{k_1 \in A_1} \sum_{k_2 \in A_2} \sum_{k_3 \in A_3} \Pr\{N(t_2) = k_2, N(t_1) = k_1, N(t) = k\} = \\ &= \sum_{k_1 \in A_1} \sum_{k_2 \in A_2} \sum_{k_3 \in A_3} e^{-\lambda t_2} \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^{(k_2 - k_1)}}{(k_2 - k_1)!} \frac{[\lambda(t_1 - t)]^{(k_1 - k)}}{(k_1 - k)!} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad (1.18) \end{aligned}$$

### 1.3 Simulazione dei processi di Poisson

Consideriamo un processo di Poisson sul semiasse positivo di  $\mathbb{R}$  avente tasso di attività  $\lambda$  costante; per definizione il numero di incrementi del processo in un intervallo  $A = (a, b)$  è una variabile aleatoria di distribuzione  $\mathcal{P}(\lambda(b - a))$ . In particolare vale:

$$\mathbb{E}[N(a, b)] = \lambda(b - a) \quad (1.19)$$

Anche gli istanti di tempo  $X_1, X_2, \dots$  in cui avvengono i singoli incrementi sono delle variabili aleatorie, ordinate in senso crescente:

$$0 < X_1 < X_2 < X_3 < \dots \quad (1.20)$$

Vale il seguente teorema.

**Proposizione 1.7** (Tempi di inter-arrivo di un processo di Poisson). *Consideriamo un processo di Poisson di tasso costante  $\lambda$  sul semiasse positivo di  $\mathbb{R}$  e consideriamo le variabili  $X_1, X_2, X_3, \dots$  in ordine crescente come in 1.20. Allora le variabili aleatorie*

$$Y_1 = X_1 \quad Y_n = X_n - X_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad (1.21)$$

*sono indipendenti ed ognuna ha densità di probabilità*

$$g(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad (y > 0) \quad (1.22)$$

In base a questo teorema, il tempo  $X_n$  in cui avviene l'evento  $n$ -esimo del processo può essere scritto come somma di  $n$  variabili aleatorie indipendenti distribuite esponenzialmente:

$$X_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \quad (1.23)$$

Questa osservazione è utile dal punto di vista applicativo. Per simulare al calcolatore un processo di Poisson stazionario nell'intervallo  $(t, t + \Delta t)$  basterà estrarre ripetutamente un numero con distribuzione esponenziale. Le estrazioni sono indipendenti e tutte con parametro  $\lambda$  fissato e ciascuna rappresenta la lunghezza di un intervallo di tempo tra due incrementi successivi del processo. Applicando la formula 1.23 si ottengono le realizzazioni del processo. La procedura termina non appena si estrae un

intervallo che, sommato ai precedenti, determina un istante di tempo al di fuori di  $(t, t + \Delta t)$ .

## Capitolo 2

# L'analisi delle componenti principali

L'analisi delle componenti principali<sup>1</sup> è una nota tecnica utilizzata nelle applicazioni di analisi dei dati multivariati. Essa è altrimenti nota come *trasformata di Karhunen-Loève*<sup>2</sup>, o *trasformata di Hotelling*<sup>3</sup> e già nel 1901 era stata trattata da K. Pearson [11]. L'applicazione della PCA ad un insieme di  $n$  osservazioni di un campione multivariato, formato da  $d$  variabili statistiche, permette di ridurre la dimensionalità dell'insieme di dati, al tempo stesso conservando buona parte del suo contenuto informativo. Nel capitolo vedremo che questa tecnica è essenzialmente un problema di calcolo degli autovalori e autovettori di una matrice e che per tale motivo può es-

---

<sup>1</sup>dall'inglese *principal component analysis*, da cui l'acronimo PCA.

<sup>2</sup>in onore di Kari Karhunen e Michel Loève, da cui l'acronimo inglese KLT.

<sup>3</sup>in onore di Harold Hotelling.

sere implementata al calcolatore, in maniera numericamente stabile, per mezzo dell'algoritmo SVD.

## 2.1 Trasformazioni lineari

Consideriamo una matrice di dati  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ : ciascuna delle  $n$  righe costituisce una serie di  $d$  osservazioni, mentre ciascuna delle  $d$  colonne della matrice è un campione di  $n$  variabili aleatorie. Ci poniamo il problema di come meglio rappresentare i dati contenuti in  $\mathbf{X}$ . Per  $d \geq 3$  una rappresentazione grafica di  $\mathbf{X}$  richiede l'uso di un certo numero di proiezioni nel piano a 2 o 3 dimensioni, approccio poco agevole. Inoltre nulla assicura che tali proiezioni siano significative e permettano di cogliere facilmente il contenuto informativo di  $\mathbf{X}$ .

L'idea è dunque quella di ridurre la dimensionalità dell'insieme di dati, considerando un numero  $r \leq d$  di combinazioni lineari delle  $d$  colonne<sup>4</sup> originali. Nel caso della PCA, quello che viene calcolato è un insieme contenente  $r$  componenti principali, le quali non sono altro che combinazioni lineari standardizzate (SLC) [8] delle colonne di  $\mathbf{X}$ .

**Definizione 2.1** (Combinazione lineare standardizzata). Sia  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ,

---

<sup>4</sup>in statistica ed in particolar modo nel campo della pattern recognition, le colonne di  $\mathbf{X}$  sono dette *features*, per indicare in generale anche dati costituiti da stringhe alfanumeriche o oggetti matematici più complessi (e.g. grafi). In questa tesi avremo a che fare con dati numerici: ciononostante manterremo questa terminologia.

$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ ; Il vettore  $\mathbf{X}\mathbf{a}$  è detto *combinazione lineare standardizzata*<sup>5</sup> se

$$\mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1 \quad (2.1)$$

Geometricamente una trasformazione  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  composta da sole SLC, corrisponde ad una rotazione del sistema di riferimento in cui giacciono gli  $n$  punti osservazione<sup>6</sup>. La PCA è ottima tra le possibili trasformazioni lineari poiché il criterio di rotazione fa sì che i punti proiettati lungo la prima componente calcolata, abbiano varianza massima<sup>7</sup>. In effetti vedremo che la massimizzazione della varianza è conseguenza del fatto che la PCA è la trasformazione ottima nel senso dei minimi quadrati: essa risolve il problema dell'approssimazione di un insieme di dati, fornendo la soluzione che minimizza l'errore quadratico medio di approssimazione.

## 2.2 Approssimazione dei dati

Consideriamo il problema dell'approssimazione di  $n$  vettori  $d$ -dimensionali  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  per mezzo di un unico vettore  $\mathbf{x}_0$ ; ad esempio,  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  possono essere le righe della matrice  $\mathbf{X}$ . Più precisamente, supponiamo di voler trovare il vettore  $\mathbf{x}_0$  tale che la somma delle distanze al quadrato fra  $\mathbf{x}_0$  e i vari  $\mathbf{x}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , sia la più piccola possibile. Definiamo la funzione

---

<sup>5</sup>dall'inglese *standardized linear combination*, da cui l'acronimo SLC.

<sup>6</sup>ovvero le  $n$  righe di  $\mathbf{X}$ .

<sup>7</sup>tale strategia di rotazione prende il nome di rotazione *varimax*.

decisionale d'errore quadratico  $J_0(\mathbf{x}_0)$ :

$$J_0(\mathbf{x}_0) = \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_k\|^2 \quad (2.2)$$

chiaramente la soluzione che andiamo cercando è quella che minimizza la funzione  $J_0$ . È facile vedere che la soluzione è data  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{m}$ , la media campionaria degli  $n$  vettori:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k \quad (2.3)$$

Infatti si può notare che:

$$\begin{aligned} J_0(\mathbf{x}_0) &= \sum_{k=1}^n \|(\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}) - (\mathbf{x}_k - \mathbf{m})\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_0 - \mathbf{m})^t (\mathbf{x}_k - \mathbf{m}) + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{m}\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}\|^2 - 2 (\mathbf{x}_0 - \mathbf{m})^t \underbrace{\sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_k - \mathbf{m})}_{=0} + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{m}\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{m}\|^2 + \underbrace{\sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{m}\|^2}_{\text{indipendente da } \mathbf{x}_0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

poiché il secondo addendo è indipendente da  $\mathbf{x}_0$ , tale espressione è chiaramente minimizzata dalla scelta di  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{m}$ .

La media campionaria è dunque una rappresentazione zero-dimensionale dell'insieme dei dati, ma ciò non rivela nulla sulla variabilità dei dati. Possiamo ottenere una rappresentazione unidimensionale più interes-



te proiettando i dati su una retta passante attraverso la media. Sia  $e$  il versore di  $m$ . Allora l'equazione della retta può essere scritta come

$$x = m + a \cdot e \quad (2.5)$$

dove lo scalare  $a$  (che assume qualsiasi valore reale) corrisponde alla distanza di un qualsiasi punto  $x$  dalla media  $m$ . Se scegliamo di rappresentare  $x_k$  per mezzo di  $m + a_k \cdot e$ , possiamo trovare un insieme “ottimale” di coefficienti  $a_k$  minimizzando la nuova funzione decisionale d'errore

$$\begin{aligned} J_1(a_1, \dots, a_n, e) &= \sum_{k=1}^n \| (m + a_k \cdot e) - x_k \|^2 = \sum_{k=1}^n \| a_k e - (x_k - m) \|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \|e\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k e^t (x_k - m) + \sum_{k=1}^n \|x_k - m\|^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Considerando che  $\|e\| = 1$ , derivando parzialmente rispetto ad  $a_k$ , e ponendo la derivata uguale a zero, otteniamo

$$a_k = e^t (x_k - m) \quad (2.7)$$

Dal punto di vista geometrico questo risultato dice semplicemente che otteniamo una soluzione quadratica media proiettando il vettore  $x_k$  sulla retta nella direzione di  $e$  che passa attraverso la media campionaria.

Ciò ci porta al più interessante problema di trovare la *migliore* direzione  $e$  per la retta. La soluzione a tale problema coinvolge la cosiddetta matrice

degli scarti  $S$  definita da

$$S = \sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_k - \mathbf{m})(\mathbf{x}_k - \mathbf{m})^t \quad (2.8)$$

Essa è semplicemente la matrice di covarianza dei dati moltiplicata per  $n - 1$ :

$$(S)_{ij} = (n - 1) \cdot \text{Cov}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad (2.9)$$

In questo contesto essa compare quando sostituiamo l'espressione di  $a_k$  ottenuta nell'equazione 2.7 dentro l'equazione 2.6, ottenendo:

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{e}) &= \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{m}\|^2 \\ &= - \sum_{k=1}^n [e^t (\mathbf{x}_k - \mathbf{m})]^2 + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{m}\|^2 \\ &= - \sum_{k=1}^n e^t (\mathbf{x}_k - \mathbf{m})(\mathbf{x}_k - \mathbf{m})^t \mathbf{e} + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{m}\|^2 \\ &= -e^t S \mathbf{e} + \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}_k - \mathbf{m}\|^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Chiaramente, il vettore  $\mathbf{e}$  che minimizza  $J_1$  massimizza  $e^t S \mathbf{e}$ . Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (si veda l'appendice A di [4]) per massimizzare  $e^t S \mathbf{e}$  soggetto al vincolo  $\|\mathbf{e}\| = 1$ . Sia  $\lambda$  il moltiplicatore incognito, deriviamo

$$u = e^t S \mathbf{e} - \lambda(e^t \mathbf{e} - 1) \quad (2.11)$$

rispetto ad  $e$  in modo da ottenere

$$\frac{\partial u}{\partial e} = 2Se - 2\lambda e \quad (2.12)$$

ponendo tale gradiente vettoriale uguale a zero, notiamo che  $e$  deve essere un autovettore della matrice degli scarti:

$$Se = \lambda e \quad (2.13)$$

In particolare, poiché  $e^t Se = \lambda e^t e = \lambda$ , ne segue che al fine di massimizzare  $e^t Se$ , dobbiamo selezionare l'autovettore corrispondente al più grande autovalore della matrice degli scarti. In altre parole, per trovare la migliore proiezione unidimensionale dei dati (migliore nel senso dei minimi quadrati), proiettiamo i dati sulla retta passante per la media campionaria nella direzione dell'autovettore di norma unitaria, della matrice degli scarti, corrispondente al più grande autovalore di quest'ultima.

Questo risultato può essere facilmente esteso da una proiezione unidimensionale ad una proiezione a  $r$  dimensioni. Al posto dell'equazione 2.5, scriviamo

$$\mathbf{x} = \mathbf{m} + \sum_{i=1}^r a_i \mathbf{e}_i \quad (2.14)$$

dove  $r \leq d$ . Non è difficile mostrare che la funzione di decisione

$$J_r = \sum_{k=1}^n \left\| \left( \mathbf{m} + \sum_{i=1}^r a_{ki} \mathbf{e}_i \right) - \mathbf{x}_k \right\|^2 \quad (2.15)$$

è minimizzata quando i vettori  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$  sono gli  $r$  autovettori della ma-

trice degli scarti aventi gli autovalori più grandi. Poiché la matrice degli scarti è simmetrica ed a valori reali, tali autovettori sono ortogonali. Essi formano perciò una base per rappresentare un qualsiasi *feature vector*<sup>8</sup>  $\mathbf{x}$ . I coefficienti  $a_i$  dell'equazione 2.14 sono le coordinate di  $\mathbf{x}$  in tale base, e sono chiamati *componenti principali*. Geometricamente, se raffiguriamo i punti  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  come una nuvola a  $d$  dimensioni dalla forma di un iper-ellissoide, allora gli autovettori della matrice degli scarti sono gli assi principali di quell'iper-ellissoide. L'analisi delle componenti principali riduce la dimensionalità dello spazio delle *feature* restringendo l'attenzione a quelle direzioni lungo le quali la dispersione della nuvola dei punti è massima.

### 2.3 Decomposizione ai valori singolari

Nella precedente sezione abbiamo visto come l'analisi delle componenti principali sia essenzialmente un problema di approssimazione, quale sia la sua interpretazione dal punto di vista geometrico ed abbiamo accennato alle proprietà che lo rendono uno strumento utile in campo statistico. Affrontiamo il problema della sua implementazione. Abbiamo visto che la PCA di una matrice  $\mathbf{X}$  è un problema di approssimazione ai minimi quadrati; nella precedente sezione abbiamo visto che applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange questo si risolve con la decomposizione

---

<sup>8</sup>un *feature vector* è un punto del *feature space*, la cui dimensione è il numero delle features che si sta considerando. Si veda l'introduzione di [4] per una spiegazione più approfondita di questi concetti.

agli autovalori della matrice degli scarti  $S$ . Essendo un problema di approssimazione ai minimi quadrati, nella pratica la PCA viene implementata facendo ricorso alla decomposizione ai valori singolari<sup>9</sup> della matrice dei dati, centrati attorno alla media campionaria; questo approccio è numericamente più stabile del calcolo diretto delle soluzioni delle cosiddette *equazioni normali* (per una spiegazione più dettagliata si veda [12]). In questa sezione vedremo le proprietà che rendono la decomposizione ai valori singolari così utile per la risoluzione di problemi di approssimazione.

**Definizione 2.2** (Decomposizione ai valori singolari). *La SVD decompone una matrice  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$  nel prodotto di due matrici ortonormali,  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  e di una matrice pseudo-diagonale  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ,  $\mathbf{D} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_\rho)$  dove  $\rho = \min(n, d)$  e i restanti elementi sono uguali a zero,  $i = j \Rightarrow (\mathbf{D})_{ij} = \sigma_i$ , mentre  $i \neq j \Rightarrow (\mathbf{D})_{ij} = 0$ . Tale diagonalizzazione è della forma*

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^t \quad (2.16)$$

Si noti innanzitutto che questa decomposizione esiste sempre. Inoltre, se denotiamo con  $\mathbf{u}_i$  e con  $\mathbf{v}_i$  le colonne di  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  rispettivamente, possiamo riscrivere la 2.16 come una somma pesata dei corrispondenti prodotti riga per colonna:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{\rho} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^t \quad (2.17)$$

Gli elementi diagonali di  $\mathbf{D}$  sono detti *valori singolari* e per convenzione sono sempre resi non negativi (all'occorrenza moltiplicando per -1 la cor-

---

<sup>9</sup>in inglese: *singular value decomposition*, da cui l'acronimo SVD.

rispondente colonna di  $U$  oppure di  $V$ ) e ordinati in ordine decrescente. Grazie a questa convenzione la SVD di una matrice è unica a meno che uno o più valori singolari non compaiano con molteplicità maggiore di uno. Denotiamo inoltre con  $\rho_0$  l'indice dell'ultimo valore singolare non nullo, ovvero  $i > \rho_0 \Rightarrow \sigma_i = 0$ . Se  $n > d^{10}$ , allora  $D$  possiede più righe che colonne, e le ultime  $n - d$  righe sono tutte nulle: dunque assieme ad esse possiamo omettere le ultime  $n - d$  colonne di  $U$  per ottenere una decomposizione “*economy sized*”; La matrice  $U \in \mathbb{R}^{n \times d}$  è comunque ancora ortogonale per colonne (e.g.  $U^t U = I$  è ancora valido) e  $D \in \mathbb{R}^{d \times d}$  sarà una matrice diagonale.

### 2.3.1 Risoluzione di sistemi di equazioni lineari

Una proprietà interessante della decomposizione ai valori singolari è che essa costruisce esplicitamente delle basi per il nucleo e per l'immagine di  $X$ .

**Proposizione 2.3.** *L'insieme di vettori  $\{u_1, \dots, u_{\rho_0}\}$  è una base ortonormale di  $\text{Imm}(X)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $b \in \text{Imm}(X)$ , allora in virtù di 2.17,  $b$  deve giacere nello spazio generato dalle prime  $\rho_0$  colonne di  $U$ , poiché queste corrispondono a valori singolari non nulli. D'altra parte ognuna delle prime  $\rho_0$  colonne di  $U$  giace nell'immagine di  $X$  poiché per  $1 \leq i \leq \rho_0$ ,  $u_i = \frac{1}{\sigma_i} X v_i$ . Dunque  $\{u_1, \dots, u_{\rho_0}\}$  è una base ortonormale dell'immagine di  $X$ . □

---

<sup>10</sup>come nel caso nostro caso di una matrice di dati multivariati.

**Proposizione 2.4.** *L'insieme di vettori  $\{\mathbf{v}_{\rho_0+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$  è una base ortonormale di  $\ker(\mathbf{X})$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{w} \in \ker(\mathbf{X})$ , allora  $\mathbf{X}\mathbf{w} = \mathbf{0}$ :  $\mathbf{w}$  deve essere ortogonale alle prime  $\rho_0$  colonne di  $\mathbf{V}$  (che sono le righe di  $\mathbf{X}^t$  corrispondenti ad un valore singolare non nullo); se così non fosse, si avrebbe  $\sigma_i \mathbf{u}_i(\mathbf{v}_i^t \mathbf{w}) \neq 0$  per qualche  $1 \leq i \leq \rho_0$ ; assieme all'ortogonalità di  $\mathbf{u}_i$  ciò implicherebbe  $\mathbf{X}\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ , contro l'ipotesi che  $\mathbf{w}$  appartiene al nucleo di  $\mathbf{X}$ . Ne segue che  $\mathbf{w}$  deve appartenere allo spazio generato dalle ultime  $n - \rho_0$  colonne di  $\mathbf{V}$ , le quali a loro volta giacciono nel nucleo di  $\mathbf{X}$ , da cui la tesi.  $\square$

Questi due risultati fanno sì che la decomposizioni ai valori singolari sia particolarmente utile per la risoluzione di sistemi di equazioni lineari. Poniamoci d'ora in avanti, nel caso in cui si abbia a che fare con un sistema quadratico (i.e., la cui matrice dei coefficienti è quadrata,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ) e si voglia trovare la soluzione, se esiste, di  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ; sappiamo che  $\mathbf{A}$  ammette inversa sse essa è non-singolare, ovvero se:

$$\dim \ker(\mathbf{A}) = 0 \tag{2.18}$$

che nel caso di una matrice quadrata è equivalente a dire che<sup>11</sup>:

$$\text{rk}(\mathbf{A}) = \dim \text{Imm}(\mathbf{A}) = m \tag{2.19}$$

---

<sup>11</sup>in virtù del fatto che  $m = \dim \ker(\mathbf{X}) + \text{rk}(\mathbf{X})$  e che l'invertibilità per i sistemi quadratici è equivalente all'iniettività. In realtà ci stiamo riferendo all'applicazione lineare associata ad  $\mathbf{X}$ . Si veda [13].

Ma questo è facilmente controllabile calcolando la SVD di  $\mathbf{A}$ : se  $\rho_0 = \rho$  allora in virtù di 2.3 vale 2.19 e  $\mathbf{A}$  è non-singolare<sup>12</sup>. Dunque se vogliamo sapere se una matrice quadrata è invertibile o meno basta calcolarne la SVD. Se i valori singolari sono tutti non nulli essa è invertibile e il sistema lineare  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ammette soluzione:

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}\mathbf{A}^{-1} \quad (2.20)$$

Ma non solo, la SVD ci permette di calcolare l'inversione vera e propria; Poiché  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono entrambe matrici quadrate ortonormali, le loro inverse sono facilmente calcolabili,  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^t$  e  $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^t$ , per cui:

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{V}^t)^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V} \cdot \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_1}, \dots, \frac{1}{\sigma_\rho} \right) \cdot \mathbf{U}^t \quad (2.21)$$

Possono sorgere problemi nel calcolo di  $\mathbf{A}^{-1}$ , se alcuni valori singolari sono talmente piccoli<sup>13</sup> da generare dei valori pari a infinito, nelle corrispondenti componenti diagonale di  $\mathbf{D}^{-1}$ . Questa è una situazione patologica e porta agli stessi effetti che si avrebbero se  $\mathbf{A}$  fosse singolare (in tal caso sarebbero i valori singolari nulli, a generare delle componenti pari a infinito nella diagonale di  $\mathbf{D}^{-1}$ ) anche se  $\mathbf{A}$  non lo è! In questo caso si dice che  $\mathbf{A}$  è *mal condizionata*. Diventa utile sapere quanto una matrice sia soggetta

---

<sup>12</sup>alternativamente vale 2.18 in virtù di 2.4

<sup>13</sup>per la precisione, se tali valori sono talmente piccoli da essere soggetti a cancellazione numerica, quando rappresentati nel formato binario *floating point* all'interno del calcolatore. Riguardo al fenomeno degli errori di cancellazione numerica – detti anche errori di round-off, si veda [12].



a tale patologia, al quale scopo è definito l'indice di condizionamento di una matrice.

**Definizione 2.5** (Indice di condizionamento). *Sia  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  una matrice quadrata e siano  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  i valori singolari di  $\mathbf{A}$  scritti in ordine decrescente. L'indice di condizionamento di  $\mathbf{A}$  è pari al rapporto tra il massimo ed il minimo valore singolare:*

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_\rho} \quad (2.22)$$

Si noti che per matrici singolari l'indice di condizionamento è infinito, mentre le matrici non singolari soffrono di mal condizionamento se il reciproco di  $\kappa(\mathbf{A})$  è raffrontabile con la costante precisione  $\epsilon$  dei numeri in virgola mobile<sup>14</sup>. Nella pratica le routine di calcolo calcolano il rango effettivo della matrice  $\rho_e \leq \rho_0$  rispetto ad una soglia  $\epsilon_e$  dipendente da  $\epsilon$  per determinare se la matrice è mal condizionata.

Se  $\rho_0 < \rho = m$ ,  $\mathbf{A}$  è singolare e quindi non invertibile. Il sistema di equazioni  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$  potrebbe non avere una soluzione univoca, oppure se  $\mathbf{b} \notin \text{Imm}(\mathbf{A})$ , non averne affatto. Dal punto di vista numerico la singolarità si manifesta anche a causa dell'eccessivo mal condizionamento della matrice, cioè quando la disuguaglianza tra il rango ed il rango effettivo è stretta,  $\rho_e < \rho_0 \leq m$ . In entrambi i casi l'inversione non è eseguibile al calcolatore, tuttavia la decomposizione ai valori singolari permette di eseguire una *pseudo-inversione* della matrice.

---

<sup>14</sup>nella maggior parte delle CPU e delle FPU in commercio l'aritmetica *floating point* è implementata secondo lo "standard ANSI/IEEE std. 754/1985 per l'aritmetica binaria in virgola mobile".

L'idea è quella di scartare i valori singolari nulli o quelli che rendono il sistema mal condizionato: vengono scartati semplicemente non calcolando la componente corrispondente sulla diagonale di  $\mathbf{D}^{-1}$ . Sia  $\rho_e$  il rango effettivo della matrice, allora rimpiazziamo i quozienti  $1/\sigma_i$ , con 0, per  $i > \rho_e$ , in modo da ottenere una matrice pseudo-inversa:

$$\hat{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{V} \cdot \text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_{\rho_e}, 0, \dots, 0) \cdot \mathbf{U}^t \quad (2.23)$$

per mezzo della quale possiamo calcolare una “soluzione”:

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{b} \quad (2.24)$$

da cui è possibile ricostruire il vettore dei termini noti del sistema lineare:

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (2.25)$$

**Proposizione 2.6** (Pseudo-inversione nel senso dei minimi quadrati). *Se  $\rho_e \leq \rho_0 < m$ , scartando i valori singolari nulli di indice  $i > \rho_0$  la ricostruzione  $\hat{\mathbf{b}}$  è la proiezione di  $\mathbf{b}$  nel sottospazio lineare generato dalle prime  $\rho_0$  colonne di  $\mathbf{U}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $c_i$  la proiezione di  $\mathbf{b}$  sull' $i$ -esima colonna di  $\mathbf{U}$ , ovvero  $c_i = \mathbf{u}_i^t \mathbf{b}$ . Allora in virtù di 2.23 e 2.24 abbiamo che:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\rho_0} \mathbf{v}_i \frac{c_i}{\sigma_i} \quad (2.26)$$

e per ortonormalità dei  $v_i$ ,

$$\hat{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{\rho_0} \mathbf{u}_i c_i \quad (2.27)$$

□

Analiticamente questo approccio ha la proprietà che l'errore di ricostruzione  $\|\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}\|$  è minimo nel senso dei minimi quadrati. Nella pratica scartare ulteriormente anche quei valori singolari con indice  $i > \rho_e$  la soluzione sarà numericamente più robusta e connotata da un errore ancora minore.

Se  $\mathbf{A}$  è singolare, in generale la soluzione non sarà unica. Infatti ad una soluzione particolare del sistema omogeneo associato sarà possibile sommare un qualsiasi vettore del nucleo. Per una dimostrazione della seguente proposizione si veda [12].

**Proposizione 2.7.** *Se  $\mathbf{x}$  è una soluzione data da 2.24, essa avrà norma minima tra tutte le possibili soluzioni al sistema lineare associato alla matrice singolare  $\mathbf{A}$ .*

Quanto visto in questa sezione si può applicare senza alcuna modifica alle matrici rettangolari. In particolare, se  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$  è la matrice associata ad un sistema di equazioni lineari sovra-determinato, possiamo sfruttare la SVD di  $\mathbf{X}$  per ottenere una soluzione approssimante nel senso dei minimi quadrati, in maniera stabile dal punto di vista numerico (si veda l'appendice di [9] a questo scopo).

### 2.3.2 Fattorizzazione spettrale e decomposizione ai valori singolari

Sia  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e sia  $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  la matrice le cui colonne sono autovettori di  $\mathbf{X}$ , ovvero  $\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m]$ ; sia  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  la matrice diagonale contenente gli autovalori di  $\mathbf{X}$ . Allora poiché per  $i = 1, \dots, m$  vale  $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$ ,

$$\mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda} \quad (2.28)$$

Assumiamo inoltre che  $\mathbf{A}$  abbia  $m$  autovettori linearmente indipendenti. In tal caso  $\mathbf{E}$  è invertibile e, moltiplicando a destra ambo i lati di 2.28, otteniamo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^{-1} \quad (2.29)$$

L'equazione 2.29 si chiama decomposizione agli autovalori<sup>15</sup> (EVD) o fattorizzazione spettrale. Ovviamente non tutte le matrici quadrate possiedono una tale decomposizione.

Consideriamo adesso il caso in cui  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , oltre che una matrice quadrate, sia simmetrica. Le matrici reali simmetriche hanno le seguenti proprietà importanti per quanto riguarda la decomposizione agli autovalori:

**Proposizione 2.8.** *Valgono i seguenti:*

---

<sup>15</sup>in inglese: *eigenvalue decomposition*, da cui l'acronimo EVD.

## 2. L'ANALISI DELLE COMPONENTI PRINCIPALI

---

- (i). Gli autovalori di una matrice reale simmetrica  $\mathbf{A}$  sono tutti reali.
- (ii). Ciascuna matrice reale simmetrica  $\mathbf{A}$  ammette una fattorizzazione spettrale 2.29.
- (iii). Gli autovettori di una matrice reale simmetrica  $\mathbf{A}$  appartenenti a differenti autovalori sono ortogonali. È possibile trovare un insieme di  $m$  autovettori ortogonali anche per autovalori che presentano molteplicità maggiore di uno.
- (iv). L'inversa di una matrice reale simmetrica  $\mathbf{A}$  è ancora una matrice reale simmetrica.  $\mathbf{A}^{-1}$  possiede gli stessi autovettori di  $\mathbf{A}$ , ma con autovalori reciproci di quelli di  $\mathbf{A}$ .
- (v). La EVD di una matrice reale simmetrica equivale alla sua SVD.

*Dimostrazione.* Dimostriamo il punto (v), l'equivalenza tra EVD e SVD di una matrice reale simmetrica. Una volta dimostrato, i punti (i)-(iv) discendono dalle proprietà della SVD viste nella precedente sezione.

Consideriamo la SVD di  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{V}^t \quad (2.30)$$

Poiché  $\mathbf{A}$  è simmetrica, allora  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono identiche, da cui riscriviamo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^t \quad (2.31)$$

La 2.17 viene riscritta come:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{\rho} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^t \quad (2.32)$$

Si noti che data l'ortonormalità di  $\mathbf{U}$ , la 2.31 è effettivamente una riformulazione di 2.29 in cui l'operazione di inversione è sostituita con la trasposizione. Da 2.32 e dall'ortonormalità di ciascuna colonna  $\mathbf{u}_i$  segue che  $\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$  per  $1 \leq i \leq m$ . Poiché gli  $\mathbf{u}_i$  sono mutualmente ortonormali, e quindi linearmente indipendenti, e visto che una matrice  $m \times m$  ammette al più  $m$  autovettori linearmente indipendenti questo implica l'equivalenza dell'EVD con la SVD di  $\mathbf{A}$ . □

## 2.4 Calcolo delle componenti principali

Torniamo a considerare una matrice  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$  di dati multivariati, costituita cioè da  $n$  pattern  $\mathbf{x}_i$  a  $d$  dimensioni. Applichiamo la SVD a  $\mathbf{X}$  e alla sua trasposta rispettivamente; per ortonormalità di  $\mathbf{V}$ , otteniamo:

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^t = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^t\mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{U}^t = \mathbf{U}\mathbf{D}^2\mathbf{U}^t = \mathbf{U} \cdot \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2) \cdot \mathbf{U}^t \quad (2.33)$$

dunque calcolando la decomposizione ai valori singolari<sup>16</sup> della sola matrice dei dati è possibile ottenere la decomposizione agli autovalori della

---

<sup>16</sup>si noti che in questo caso è possibile utilizzare la versione “economy size” dell'algoritmo SVD.

matrice di correlazione:

$$(\mathbf{X}\mathbf{X}^t)\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{D}^2 \quad (2.34)$$

Infatti siano  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{\Lambda}$  una matrice di autovettori ortonormali e di corrispondenti autovettori di  $\mathbf{X}\mathbf{X}^t$ . Raffrontando 2.34 con la fattorizzazione spettrale 2.28:

$$(\mathbf{X}\mathbf{X}^t)\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda} \quad (2.35)$$

si vede che le colonne di  $\mathbf{U}$  sono gli autovettori di  $\mathbf{X}\mathbf{X}^t$  e che i rispettivi autovalori sono i valori singolari elevati al quadrato, i.e.  $\lambda_i = \sigma_i^2$ , cosa che peraltro mostra che gli autovalori sono tutti  $\geq 0$ .

In effetti avevamo visto che le componenti principali sono autovettori della matrice degli scarti: è possibile applicare il procedimento appena illustrato con la sola accortezza di calcolare la SVD di  $(\mathbf{X} - \mathbf{1}\mathbf{m}^t)$ ;  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^d$  è il vettore colonna le cui componenti sono tutte pari a 1, mentre  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^d$  il vettore colonna le cui componenti sono la media di ciascuna colonna della matrice di dati, per cui stiamo effettivamente centrando la matrice di dati attorno alla media, ottenendo la matrice degli scarti definita da 2.8.

## **Il modello**



## Capitolo 3

# Il sistema urbano come un'automata cellulare

### 3.1 Suddivisione cellulare del sistema urbano

Il modello presentato in questa tesi fa uso di un automa cellulare<sup>1</sup> per rappresentare l'infrastruttura del sistema urbano. I più semplici automi cellulari[18] sono composti da un reticolo regolare finito di celle identiche, ad ognuna delle quali è associata una variabile di stato discreta. La dinamica di evoluzione di un tale automa è costituita da un certo numero di aggiornamenti sincroni di tutto il reticolo, scanditi ad intervalli di tempo discreti. Lo stato di una generica cella al tempo  $t + 1$  è determinato da una funzione di transizione in base allo stato della cella al tempo  $t$ , nonché allo

---

<sup>1</sup>dall'inglese *cellular automaton*, da cui l'acronimo CA.

### 3. IL SISTEMA URBANO COME UN'AUTOMA CELLULARE

---

stato al tempo  $t$  delle celle ad essa *vicine*. Assistiamo alla più semplice nozione di vicinato, quando la relazione tra le celle che prendiamo in esame è quella di adiacenza su una griglia<sup>2</sup>: i concetti di adiacenza secondo Moore e secondo Von Neumann sono due esempi di questo tipo di relazione.

Sebbene il campo di applicazione degli automi cellulari sia vastissimo, è ampiamente riconosciuto[10] che l'applicazione ai sistemi urbani richieda una sostanziale dipartita dalla semplice struttura formale appena definita. Sostanzialmente bisogna chiedersi quale sia il significato – al livello urbanistico – della cella, dello stato di essa e della relativa funzione<sup>3</sup> di transizione, prima di affrontare la modellazione di un sistema urbano mediante CA. Per quanto riguarda le celle, l'approccio più semplice è quello di considerare una zona territoriale omogenea, solitamente già definita dal piano regolatore della città, e tutti gli elementi statici che in essa risiedono: manufatti architettonici quali edifici, parchi e palazzi; infrastrutture quali strade, autostrade e ferrovie; elementi geografici come fiumi, boschi e dislivelli; campi coltivati e terreno non urbanizzato, *et cetera*.

La prima sostanziale differenza da un automa cellulare classico riguarda dunque l'insieme delle celle. Nel nostro modello consideriamo un insieme finito  $\Gamma$ , detto *spazio cellulare*. Poiché le celle sono a tutti gli effetti delle entità geografiche, esse in generale non saranno identiche come in un CA classico, ma saranno connotate ciascuna da una propria forma. Il modello è essenzialmente bidimensionale (e.g. non consideriamo dati relativi al-

---

<sup>2</sup>in questo caso stiamo implicitamente considerando una griglia quadrata. Nulla vieta di considerare griglie composte da triangoli, esagoni, etc.

<sup>3</sup>altrimenti detta *regola di aggiornamento*.

### 3. IL SISTEMA URBANO COME UN'AUTOMA CELLULARE

---

le altitudini del terreno), per cui basterà considerare una polilinea chiusa, rappresentata dalla successione dei suoi vertici  $(x, y)$ . L'unica condizione che imponiamo è che all'interno di una cella sia possibile supporre leggi urbane omogenee. Nella pratica per far sì che questa assunzione sia soddisfatta, l'approccio varia a seconda del fattore di scala che stiamo considerando. Per quanto riguarda una suddivisione ad una scala *microscopica* (e.g. celle quadrate con un lato dell'ordine al più del centinaio di metri), è possibile scegliere lotti di terreno contigui, su cui gli indici del piano regolatore vigente<sup>4</sup> hanno lo stesso valore. A livello *macroscopico* (e.g. quartieri o aree metropolitane con diametro dell'ordine dei chilometri) è possibile considerare le unità catastali o in generale le suddivisioni amministrative comunali. Uno degli obiettivi del presente lavoro è quello di verificare la validità di quest'ultimo approccio, applicando il modello alla periferia orientale della metropoli di Roma.

Sempre a causa della natura geografica del sistema che intendiamo modellare, si pone il problema della definizioni dei confini di  $\Gamma$ . Solitamente, per quanto riguarda gli automi classici ad una dimensione, l'evoluzione viene rappresentata disegnando una copia del reticolo cellulare – per semplicità, lo si prende come un segmento – ad ogni istante di aggiornamento  $t$ , disponendo le versioni successive del reticolo l'una al di sopra dell'altra; le celle vengono riprodotte in bianco e nero (se gli stati ammissibili per una cella sono due – 0 od 1, acceso o spento, vivo o morto) o in scala di grigi (se lo stato è descritto da una stringa di bit). Le rappresentazioni che

---

<sup>4</sup>in realtà viene considerato solo un sottoinsieme di indici del piano regolatore in base all'effettiva disponibilità di dati presso le amministrazioni comunali.

### *3. IL SISTEMA URBANO COME UN'AUTOMA CELLULARE*

---

si ottengono permettono di mostrare visivamente la presenza di pattern regolari, comportamenti caotici, stazionari, a seconda della particolare regola che governa i passi d'aggiornamento. Passando alle due dimensioni l'evoluzione viene solitamente rappresentata per mezzo di immagini digitali animate, ma il reticolo sottostante è considerato non limitato (e.g. un pattern può uscire fuori dall'animazione durante l'evoluzione e rientrarvi successivamente), oppure, come è desiderabile nel nostro caso, il reticolo rappresentato è abbastanza grande da far sì che l'evoluzione sia sempre circoscritta all'interno dei fotogrammi che compongono l'animazione.

Nel caso di automi cellulari applicati ai sistemi urbani si devono dunque considerare dei confini geografici, entro i quali circoscrivere l'insieme di zone territoriali che intendiamo modellare come distinte celle dell'automa. Non esiste una ricetta univoca: la scelta dei confini dipende dal particolare caso di studio su cui si sta lavorando, sulle assunzioni di natura urbanistica che si prendono per vere e sugli scenari che si intendono simulare. L'idea di base è che i confini che si scelgono, debbano essere grandi abbastanza, perlomeno rispetto alla massima espansione territoriale che si è in grado prevedere inizialmente. Tuttavia questo rimane un approccio euristico: ad esempio, se si intende simulare la dinamica di un centro abitato, soggetto a fenomeni di riconversione degli edifici e degli usi del suolo, avrà poco senso comprendere vaste zone libere circostanti.

Per quanto riguarda le scelte effettuate nel caso di studio, si rimanda alla parte della tesi ad esso relativa.

## 3.2 Stato del sistema

Come già accennato, la definizione classica di automa cellulare prevede che lo spazio degli stati delle celle sia discreto. A differenza della maggior parte degli automi cellulari di sistemi urbani esistenti, i quali essenzialmente etichettano ciascuna cella con una o più variabili qualitative<sup>5</sup>, il nostro modello utilizza delle grandezze continue, per descrivere lo stato di una cella.

### 3.2.1 Stato dinamico di una cella

Sia  $c \in \Gamma$  una cella dell'automa. Lo stato di una cella è il vettore:

$$\mathbf{v}(c, t) = (v_1(c; t), v_2(c; t), \dots, v_p(c; t)) \in \mathbb{R}^p \quad (3.1)$$

dove le singole componenti  $v_i(c, t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  sono opportune grandezze estensive misurate sulla cella  $c$  e dipendenti dal tempo discreto  $t$ . Un classico esempio di tali grandezze è la superficie dedicata, nell'ambito della cella, ad uso del suolo residenziale, produttivo, per servizi, *et cetera*. In prima istanza, questa scelta permette di descrivere in maniera più precisa le caratteristiche di rilevanza urbanistica della cella, come ad esempio gli usi del suolo, di una mera etichetta qualitativa. Ancora più importante è

---

<sup>5</sup>la scelta più comune è quella di descrivere una cella dall'uso del suolo prevalente in essa. Tali classificazioni ricalcano quelle adottate in Urbanistica, e.g. "zona residenziale", "zona industriale", "zona agricola".

Più formalmente si considera un certo numero di classificatori, ciascuno dei quali assume valori su un insieme finito e discreto. A ciascun valore discreto corrisponde una classificazione urbanistica.

la possibilità di poter descrivere il sistema urbano come un vero e proprio sistema dinamico, provando che vale un sistema di equazioni differenziali per i valori medi delle variabili dinamiche (si veda [16]). Nella formula 3.1 abbiamo esplicitato la dipendenza dal tempo  $t$ . Per semplicità, nel resto del documento daremo per implicita questa dipendenza denotando lo stato della cella  $c$  semplicemente con  $v(c)$  a meno che il contesto non renda necessaria la notazione esplicita.

#### 3.2.2 Parametri locali esogeni di una cella

Nel nostro modello la descrizione dello stato di una cella non si esaurisce al solo vettore  $v(c)$ . In effetti esistono altre grandezze quantitative poco adatte ad essere incluse nel vettore di stato dinamico, le quali tuttavia descrivono aspetti interessanti della cella. Questo può accadere per quelle grandezze la cui evoluzione non è sempre chiara, oppure per grandezze immutabili che misurano caratteristiche fondamentali della cella (e.g. la sua superficie complessiva). È in effetti conveniente raccogliere tali grandezze in un ulteriore vettore:

$$\mathbf{w}(c, t) = (w_1(c; t), \dots, w_q(c; t)) \in \mathbb{R}^q \quad (3.2)$$

dove in generale  $p \neq q$ . Il vettore  $\mathbf{w}(c, t)$  prende il nome di vettore dei parametri di  $c$  o vettore dello stato *esogeno* di  $c$ .

L'idea alla base di questa distinzione tra i vettori  $v(c)$  e  $\mathbf{w}(c)$  riguarda le grandezze urbanistiche che vengono scelte per rappresentare il sistema

urbano. Alcune potranno essere modificate, a seguito delle decisioni di quegli attori di cui effettivamente siamo interessati a modellare la dinamica decisionale (e della quale parleremo più dettagliatamente in seguito): dall'esterno il complesso di tale decisioni sarà visto come la dinamica del sistema. Altre grandezze invece saranno modificabili solo da certi attori dei processi di trasformazione urbana, dei quali non siamo interessati a descrivere la dinamica. Un chiaro esempio di queste ultime grandezze sono le quantità che descrivono gli indici del piano regolatore<sup>6</sup>, oppure le distanze dai nodi del sistema di trasporto e di comunicazione cittadino o regionale.

Il vettore  $w(c)$  è perciò particolarmente importante, poiché contiene i parametri di controllo su cui andare ad agire, per studiare in che modo il sistema dinamico stocastico reagisce agli stimoli esogeni. In base a queste considerazioni, va anche notato che questa distinzione potrebbe risultare particolarmente utile, in prospettiva dell'adattamento del modello alla creazione di uno strumento di supporto alle decisioni, da impiegare per la pianificazione urbanistica.

#### 3.2.3 Parametri globali del sistema e stato globale

Il nostro modello fa uso di ulteriori grandezze di livello globale, che non si riferiscono ad alcuna cella di  $\Gamma$  in particolare. In particolare abbiamo utilizzato un semplice modello *stock/flow* di mercati immobiliari ([7],[3])

---

<sup>6</sup>il cui relativo attore, in questo caso, sarà l'amministrazione cittadina o regionale.

per valutare il numero di abitazioni  $HS_0(t)$  costruibili con profitto all'interno del sistema urbano, a partire dal livello di stock complessivo  $SH(t)$ . Esporremo in dettaglio tale modello nella parte relativa al caso di studio di Roma.

Lo spazio degli stati di una cella verrà denotato con  $E_c = \mathbb{R}^p$ . Lo stato globale del sistema è dato dalla concatenazione dei vettori di stato di tutte le celle di  $\Gamma$ ; di conseguenza lo spazio degli stati del sistema sarà la somma diretta su tutto  $\Gamma$  dello spazio degli stati di ciascuna cella:

$$\mathbf{v}(\Gamma) = \mathbf{v}(c_1)\mathbf{v}(c_2) \dots \mathbf{v}(c_{|\Gamma|}) \quad (3.3)$$

$$E = \mathbb{R}^D = \bigoplus_{c \in \Gamma} E_c \quad (3.4)$$

dove  $D = |\Gamma| \cdot p$ .

### 3.3 Aggiornamento dello stato del sistema

Considerate le scelte appena viste, di modellare le celle come zone omogenee su scala macroscopica e di descrivere il loro stato per mezzo di grandezze multivariate continue, è quasi superfluo dire che la regola di aggiornamento del nostro modello non è una semplice funzione di transizione deterministica, come nel caso di un automa cellulare classico. In effetti i molteplici processi di trasformazione urbana, come già accennato in precedenza, sono opera di determinati attori attivi sul territorio<sup>7</sup>, i quali

---

<sup>7</sup>una possibile tassonomia non dovrebbe distinguere semplicemente tra cittadini privati e organizzazioni pubbliche e private, ma anche considerare i ruoli che essi ricoprono



### 3. IL SISTEMA URBANO COME UN'AUTOMA CELLULARE

---

agiscono in base ai propri processi cognitivi. D'altra parte il paradigma classico degli automi cellulari riduce il processo di aggiornamento di una cella ad una dipendenza dallo stato della cella stessa, e di quelle del suo vicinato. Per fare un esempio, gli usi del terreno non mutano spontaneamente: piuttosto la causa del cambiamento d'uso di un terreno va ricercata tra le attività umane che hanno luogo nella cella durante un certo lasso di tempo  $\Delta t$  di osservazione.

Per quanto riguarda la relazione di vicinanza tra celle, utilizzare una unica nozione di adiacenza tra celle, allo scopo di descrivere tutti i processi di trasformazione urbana, sembra sicuramente restrittivo. Data una particolare trasformazione e considerata una generica cella, bisogna invece chiedersi quali siano le altre celle del sistema che rivestono una qualche importanza per la trasformazione che si sta prendendo in esame. Questa metodologia porta inevitabilmente a compiere un'analisi di ciascuna trasformazione: nel caso estremo si può anche arrivare a sviluppare un intero sotto-modello empirico in grado di spiegare le relazioni di interdipendenza tra le zone della città, per ciascun processo di trasformazione. Più semplicemente, l'idea è quella di considerare sottoinsiemi qualsiasi di  $\Gamma$ , detti intorni *estesi*, anziché intorni basati sull'adiacenza topologica definita su di un reticolo.

Per quanto riguarda gli intervalli di aggiornamento, considereremo intervalli di lunghezza  $\Delta t$ , anziché di lunghezza unitaria. L' $n$ -esimo passo di

---

rispetto ad un particolare processo di trasformazione urbana (e.g. affittuari, proprietari di case, agenzie di mediazione, costruttori, per citare alcuni partecipanti del mercato di compravendita immobiliare).

aggiornamento ( $n = 1, 2, \dots$ ) sarà dunque relativo all'intervallo di tempo  $[t_n, t_n + \Delta t)$ , dove  $t_n = (n - 1) \cdot \Delta t$ .

### 3.3.1 Processi di trasformazione urbana di una cella

La differenza più radicale tra il nostro modello ed il paradigma classico degli automi cellulari, dunque, risiede nella natura del processo di aggiornamento dello stato delle celle. Consideriamo un insieme finito  $A$  di processi stocastici, che chiameremo *processi urbani* o  $\alpha$ -processi. Per ciascun  $\alpha \in A$ , una realizzazione del processo  $\alpha$  sarà connotata da un certo numero di eventi di aggiornamento, anch'essi di natura stocastica e detti  $\alpha$ -eventi (useremo anche la dicitura "evento di classe  $\alpha$ " o "evento di tipo"  $\alpha$ , per distinguere un processo di trasformazione dai singoli eventi che lo istanziano). Ciascuno di questi  $\alpha$ -eventi modifica lo stato di una singola cella dell'automa. Un  $\alpha$ -evento modifica il vettore  $v(c)$  della cella  $c$  in cui avviene, secondo una regola di aggiornamento generalmente definita per un sottoinsieme delle componenti di  $v(c)$ <sup>8</sup> (si veda il capitolo 5 per la definizione delle regole di aggiornamento di  $\alpha \in A$ ). Siamo interessati a conteggiare il numero di questi eventi, e a questo scopo il modello fa uso dei processi stocastici di Poisson introdotti nel capitolo 1.

Le uniche operazioni che ammettiamo per costruire le regole di aggiornamento degli  $\alpha$ -eventi sono l'addizione e la sottrazione. Consideriamo un

---

<sup>8</sup>una regola che modifichi il vettore  $v(c)$  in tutte le sue componenti, qualora il numero di grandezze che fanno parte dello stato dinamico di una cella sia elevato (nel caso di studio consideriamo 19 variabili, ad es.), difficilmente avrebbe un significato urbanistico preciso.

processo urbano  $\alpha \in A$ , e supponiamo che gli eventi di aggiornamento di tale classe vadano a modificare  $n(\alpha) \leq d$  componenti del vettore di stato  $v$  delle celle cui questi avvengono. In altre parole consideriamo un sottoinsieme di indici  $\{i_1, i_2, \dots, i_{n(\alpha)}\} \subseteq [d] = \{1, 2, \dots, d\}$ , delle componenti effettivamente aggiornate da  $\alpha$ , in modo tale che la regola di aggiornamento associata ad  $\alpha$  sia la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} t & \rightarrow t + \tau \\ v_{i_1}(c, t) & \rightarrow v_{i_1}(c, t + \tau) + \pi_1(\alpha) \\ v_{i_2}(c, t) & \rightarrow v_{i_2}(c, t + \tau) + \pi_2(\alpha) \\ \dots & \\ v_{i_{n(\alpha)}}(c, t) & \rightarrow v_{i_{n(\alpha)}}(c, t + \tau) + \pi_{n(\alpha)}(\alpha) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

dove  $\tau > 0$  è il tempo tra due eventi di aggiornamento successivi su  $c$  e

$$\pi(\alpha) = (\pi_1(\alpha), \pi_2(\alpha), \dots, \pi_{n(\alpha)}(\alpha)) \in \mathbb{V}_\alpha \subseteq \mathbb{R}^{n(\alpha)} \quad (3.6)$$

è un vettore aleatorio, la cui distribuzione verrà definita più avanti. Il vettore  $\pi$  è detto vettore dei beni prodotti e delle risorse sfruttate dall'evento  $\alpha$  e similmente  $\mathbb{V}_\alpha$  è detto spazio dei beni e delle risorse. Con questa terminologia intendiamo che un processo  $\alpha$  può essere visto come la produzione di un certo numero di beni presenti nella cella (e.g. le componenti del vettore  $\pi$  positive che si sommano alle componenti corrispondenti del vettore di stato  $v(c)$ ), per mezzo dello sfruttamento delle risorse ivi presenti (e.g. le componenti che vengono sottratte a quelle di  $v(c)$ ). Ad esempio

### 3. IL SISTEMA URBANO COME UN'AUTOMA CELLULARE

---

la costruzione di un edificio residenziale produrrà un certo numero di appartamenti sfitti che andranno ad aumentare lo stock corrente del mercato immobiliare, al costo dello sfruttamento di una certa quantità di spazio edificabile, ed in generale di altre quantità spaziali o volumetriche che caratterizzano la cella. Possiamo riformulare la regola di aggiornamento 3.5 come una somma tra vettori se consideriamo il vettore:

$$\gamma_\alpha(\boldsymbol{\pi}(\alpha)) = \gamma_\alpha(0, \dots, 0, \pi_1(\alpha), 0, \dots, 0, \pi_{n(\alpha)}(\alpha), 0, \dots, 0) \quad (3.7)$$

$$\gamma_\alpha(\boldsymbol{\pi}(\alpha)) \in \mathbb{R}^d \quad (3.8)$$

Dove  $\pi_1(\alpha)$  occupa la posizione  $i_1$ ,  $\pi_2(\alpha)$  occupa la posizione  $i_2$ , e così via. Il vettore  $\gamma_\alpha$  prende il nome di vettore di variazione dello stato, associato al processo  $\alpha$ . Allora 3.5 diventa:

$$\begin{cases} t & \rightarrow & t + \tau \\ \mathbf{v}(c, t) & \rightarrow & \mathbf{v}(c, t + \tau) + \gamma_\alpha(\boldsymbol{\pi}(\alpha)) \end{cases} \quad (3.9)$$

Si noti che il bene prodotto da un processo  $\alpha_1$  potrebbe essere la risorsa che un altro processo  $\alpha_2$  sfrutta per avere luogo (nell'esempio di prima, gli appartamenti sfitti costruiti potranno andare in locazione o acquistati), il che suggerisce che la completa regola di evoluzione stocastica per una generica componente  $i$  del vettore di stato  $\mathbf{v}(c)$ , durante un intervallo temporale di durata  $\tau > 0$ , possa essere ottenuta<sup>9</sup> sovrapponendo tutte le

---

<sup>9</sup>per semplicità, stiamo assumendo che durante l'intervallo di tempo  $[t, t + \tau)$  avvenga in  $c$  esattamente un  $\alpha$ -evento,  $\forall \alpha \in A$ .

regole 3.5,  $\forall \alpha \in A$ , e selezionando la componente  $i$ -esima:

$$v_i(c, t + \tau) = v_i(c, t) + \left[ \sum_{\alpha \in A} \gamma_\alpha(\boldsymbol{\pi}(\alpha)) \right]_i \quad (3.10)$$

dove  $[v]_i = v_i$  se  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ . Si noti che  $\boldsymbol{\pi}(\alpha)$  dipende dal tempo per cui effettivamente è possibile ottenere una equazione differenziale per  $v_i(c, t)$ ,  $i = 1, \dots, d$ , quando  $\tau \rightarrow 0$ .

Abbiamo accennato al fatto che il modello faccia uso di processi di Poisson per descrivere i processi di trasformazione urbana dell'insieme  $A$ . Intuitivamente vorremo, dato un processo  $\alpha$  ed una cella  $c$  dell'automa, che più fosse favorevole lo stato di  $c$  (e delle celle nel suo intorno) alla realizzazione di  $\alpha$ , più fosse grande l'intensità con cui gli  $\alpha$ -eventi si succedono in  $c$ . In particolare, maggiore dovrebbe essere il tasso di produzione dei beni associati ad  $\alpha$ . Per poter applicare la definizione 1.6 dobbiamo formalizzare opportunamente queste assunzioni.

Se consideriamo un intervallo di tempo piccolo  $[t, t + \Delta t)$ , è possibile che durante tale intervallo nella cella  $c$  non avvenga nulla, o che uno o più eventi di tipo  $\alpha$  abbiano luogo.

**Definizione 3.1.** *Sia  $c \in \Gamma$  una cella dell'automa;  $p_t^\alpha(\boldsymbol{\pi}, n)$  è la densità di probabilità che  $n$  eventi di tipo  $\alpha \in A$  con beni  $\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^{n(\alpha)}$  avvengano in  $c$  durante l'intervallo di tempo  $[t, t + \Delta t)$ .*

In base a questa definizione, la probabilità che  $n$  eventi di tipo  $\alpha$ , associati a vettori dei beni appartenenti al sottoinsieme misurabile  $B \subseteq \mathbb{V}^\alpha$ ,

avvengano durante l'intervallo  $[t, t + \Delta t)$ , è data dalla formula:

$$p_{n,B}^\alpha(t) = \int_B p_t^\alpha(\pi, n) d\pi \quad (3.11)$$

Secondo la nostra idea intuitiva, queste probabilità devono dipendere dallo stato dell'intorno di  $c$  dato dal suo insieme di vicini. La prima assunzione è che le probabilità  $p_{n,B}^\alpha(t)$  appartengano ad una distribuzione di Poisson (condizione (ii) della 1.6). Denoteremo con  $N_{\alpha,B}(c, t)$  la variabile aleatoria a valori interi non negativi che conta il numero degli  $\alpha$ -eventi, aventi parametri in  $B$ , che avvengono durante  $[t, t + \Delta t)$ . Per quanto riguarda la condizione (iii) di 1.6, assumeremo che durante  $[t, t + \Delta t)$  gli incrementi in sotto-intervalli disgiunti siano indipendenti. Inoltre assumeremo che per piccoli valori di  $\Delta t$  la probabilità di più di un evento sia trascurabile (condizione (i)). I processi che utilizziamo sono stazionari, per cui l'intensità (intesa come numero di eventi di tipo  $\alpha$  per unità di tempo) sarà finita e costante per tutto l'intervallo di tempo  $\Delta t$ <sup>10</sup>.

**Definizione 3.2** (Processo di trasformazione urbano). *Sia  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{|A|}\}$  un insieme finito di processi di Poisson. Un processo  $\alpha \in A$  è detto processo (di trasformazione) urbano, o  $\alpha$ -processo. Sia  $B \subseteq \mathbb{V}^{n(\alpha)}$  un sottoinsieme misurabile dello spazio dei beni e delle risorse di  $\alpha$ . Per ciascuna cella  $c \in \Gamma$  la variabile aleatoria  $N_{\alpha,B}(c, t)$  = "numero di eventi di tipo  $\alpha$  con vettore dei beni e delle risorse*

---

<sup>10</sup>assieme all'assunzione di indipendenza, questo significa che nel sistema, durante il tempo  $\Delta t$ , l'informazione sugli eventi di trasformazione non si diffonde se non in misura trascurabile.

$\pi \in B''$  ha distribuzione di Poisson di intensità  $\lambda_{\alpha,B}(c, t)$ :

$$\Pr\{N_{\alpha,B}(c, t) = n\} = \frac{\exp(-\lambda_{\alpha,B}(c, t))}{n!} (\lambda_{\alpha,B}(c, t))^n \quad (3.12)$$

va osservato che:

- Le intensità  $\lambda_{\alpha,B}(c, t)$  sono funzioni definite non negative; la dipendenza dalla cella  $c \in \Gamma$  significa che nella loro definizione deve comparire lo stato di  $c$  e delle celle nel suo intorno esteso relativo ad  $\alpha$ .
- Durante ciascun passo discreto di aggiornamento dell'automa, relativo all'intervallo di tempo  $[t_n, t_n + \Delta t)$ , le intensità  $\lambda_{\alpha,B}(c, t)$  sono costanti, e.g. durante ciascun passo di aggiornamento simuliamo solamente un processo stazionario, per ciascun  $\alpha \in A$ . Al termine dell'intervallo effettuiamo l'aggiornamento di ciascuna componente  $i$  del vettore di stato, e.g. applichiamo la regola di aggiornamento 3.5 per ciascun  $\alpha$ -evento avvenuto in  $c$ . Tale variazione dello stato di  $c$  e delle celle nel suo intorno implica la variazione di  $\lambda_{\alpha,B}(c, t) \rightarrow \lambda_{\alpha,B}(c, t + \Delta t)$ . Al passo di aggiornamento  $n + 1$  il processo di tipo  $\alpha$  che simuleremo sarà perciò diverso.

Resta da spiegare come sono definite le intensità  $\lambda_{\alpha,B}(c, t)$  dei processi di trasformazione urbana. Ciascuna intensità sarà definita per mezzo di una

opportuna densità:

$$\lambda_{\alpha,B}(c, t) = \int_B \lambda^\alpha(c, \boldsymbol{\pi}, t) d\boldsymbol{\pi} \quad (3.13)$$

Per definire la densità in 3.13, il modello usa dei processi decisionali di popolazioni di agenti, che descriveremo formalmente nel capitolo ??.

### 3.3.2 Produzione di beni e sfruttamento di risorse

Consideriamo un evento di tipo  $\alpha$  nella cella  $c$ . Abbiamo visto che l'aggiornamento della cella  $c$  avviene per mezzo del vettore di variazione  $\gamma_\alpha(\boldsymbol{\pi}(\alpha))$ , il cui argomento è il vettore aleatorio  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}(\alpha) \in \mathbb{V}^\alpha$ . Dobbiamo dunque specificare la distribuzione di probabilità con cui estrarre il vettore  $\boldsymbol{\pi}$ , al fine di completare la descrizione della dinamica di aggiornamento del sistema. Chiameremo<sup>11</sup>  $\beta^\alpha(c, \boldsymbol{\pi}, t)$  tale distribuzione. Se consideriamo un intervallo di tempo piccolo, il fatto che stiamo considerando un processo di Poisson implica che  $\lambda^\alpha(c, \boldsymbol{\pi})$  è la probabilità che, durante tale intervallo, un  $\alpha$ -evento sia avvenuto in  $c$ , con parametri  $\boldsymbol{\pi}$ . La probabilità che un  $\alpha$ -evento sia avvenuto in  $c$  è data da:

$$\lambda^\alpha(c) = \int_{\mathbb{V}^\alpha} \lambda^\alpha(c, \boldsymbol{\pi}) d\boldsymbol{\pi} \quad (3.14)$$

La distribuzione di  $\boldsymbol{\pi}$  è definita come la distribuzione condizionale che un

---

<sup>11</sup>fuorché dove il contesto non lo permetta, daremo per implicita la dipendenza dal tempo, denotando tali distribuzione con  $\beta^\alpha(c, \boldsymbol{\pi})$ , per non appesantire la notazione.



$\alpha$ -evento produca i beni (e consumi le risorse)  $\pi$  nella cella  $c$ , dato che un evento di tipo  $\alpha$  è avvenuto in  $c$ :

$$\lambda^\alpha(c, \pi) = \lambda^\alpha(c) \cdot \beta^\alpha(c, \pi) \quad (3.15)$$

Nel nostro modello definiremo separatamente le densità  $\lambda^\alpha(c)$  (per mezzo di processi decisionali di popolazioni di agenti) e  $\beta^\alpha(c, \pi)$  (usando delle definizioni *ad hoc* per ciascun  $\alpha \in A$ ), ed useremo la relazione 3.15 per definire la densità  $\lambda^\alpha(c, \pi)$ .

#### 3.3.3 Eventi di trasformazione esogeni di una cella

Come già accennato, nel nostro modello il vettore  $w(c, t)$  non possiede una dinamica stocastica propria. Piuttosto il suo ruolo è quello di contenere i parametri su cui intervenire, per studiare le risposte del sistema in determinati scenari di evoluzione. Per questo motivo gli  $\alpha$ -eventi di trasformazione urbana non possono modificare il vettore  $w$  (e.g. nelle regole di aggiornamento 3.5 non possono comparire componenti di  $w$ ). I processi di trasformazione urbana in grado di modificare tale vettore devono essere prestabiliti esogenamente: l'algoritmo di simulazione degli  $\alpha$ -processi dovrà essere progettato in modo da interrompersi ad un certo numero di istanti di tempo, bloccare la simulazione della dinamica, aggiornare i vettori dei parametri delle celle coinvolte in ciascuna trasformazione ed infine riprendere la simulazione.

## Capitolo 4

# Processi di decisione per popolazioni di agenti

Nel capitolo 3 abbiamo presentato le componenti fondamentali del nostro sistema urbano. Abbiamo visto che il nostro modello di automa cellulare si discosta nettamente dal classico paradigma di automa cellulare, come del resto avviene per la maggior parte dei sistemi urbani esistenti. Un altro tipo di modelli di automi viene utilizzato<sup>1</sup>, allo scopo di modellare sistemi urbani per applicazioni di pianificazione territoriale: i sistemi multi-agente<sup>2</sup> (MAS). A differenza di una cella un agente è – a livello più astratto – una unità di elaborazione dotata della capacità di muoversi nello spazio circostante. Effettivamente risultati recenti (ad esempio [10, 14]) propongono un approccio unificato tra sistemi multi-agente ed automi cel-

---

<sup>1</sup>si veda ad esempio [2].

<sup>2</sup>dall'inglese *multi-agent system*, da cui l'acronimo MAS.

lulare. Il ruolo degli agenti è ovviamente quello di ricreare la popolazione della città e in generale di simulare le azioni dei vari attori rilevanti per i processi di trasformazione urbana; questa scelta è concettualmente più plausibile, rispetto al considerare le transizioni di stato di una cella unicamente seguendo il paradigma classico degli automi cellulari<sup>3</sup>.

Il modello utilizza un approccio orientato alle popolazioni di agenti per descrivere dei processi decisionali. Tali processi decisionali sono modellati come processi stocastici di Poisson e sono utilizzati allo scopo di calcolare l'intensità  $\lambda^\alpha(c, t)$  del processo  $\alpha \in A, \forall c \in \Gamma$ .

## 4.1 Agenti urbani e processi decisionali

Va precisato che nel nostro modello non è presente un sistema multi-agente vero e proprio: avremo a che fare, per ciascun processo  $\alpha \in A$ , con una popolazione di agenti virtuali e descriveremo il ciclo di vita di un generico agente, come un processo decisionale che può - eventualmente - portare al compimento di uno o più eventi di trasformazione per il processo  $\alpha$ . La differenza concettuale tra un MAS ed il nostro modello risiede nel fatto che le leggi probabilistiche, che governano il processo di decisione, si riferiranno alla popolazione nella sua interezza, e non a ciascun singolo agente. La conseguenza immediata di questa differenza è che all'interno di una popolazione, ciascun agente è indipendente dagli altri e non ha ca-

---

<sup>3</sup>avevamo accennato a questo problema, da un punto di vista intuitivo, nella sezione 3.3.

ratteristiche specifiche. Siamo dunque interessati a descrivere il comportamento statistico della popolazione, mentre trattiamo un singolo agente alla stregua di una particella. Va comunque notato che questa idea può essere considerata una generalizzazione dei classici sistemi multi-agente<sup>4</sup>.

#### 4.1.1 Le popolazioni degli agenti

**Definizione 4.1** (Popolazione di agenti). *Sia  $\alpha \in A$  un processo di trasformazione dell'automa cellulare. Associamo ad  $\alpha$  un insieme discreto e finito di agenti virtuali, detto  $\mathfrak{B}^\alpha$ , che chiameremo popolazione del processo  $\alpha$ .*

All'interno di  $\mathfrak{B}^\alpha$ , ciascun agente è indistinguibile dagli altri, il che significa che il nostro modello non prende in considerazione caratteristiche o proprietà peculiari dei singoli agenti (e.g. non attribuiamo loro una identità), per cui una definizione del concetto di “agente” in questa sede risulta superflua. Ciononostante, un agente sarà caratterizzato da un processo cognitivo che lo può eventualmente portare a formulare la decisione di intraprendere un  $\alpha$ -evento, in una particolare cella  $c \in \Gamma$  dell'automa, con parametri dati dal vettore dei beni  $\pi$ . Ci concentreremo quindi sulla descrizione di questo processo decisionale.

---

<sup>4</sup>e.g. considerando esclusivamente popolazioni formate ciascuna da un singolo agente si riottiene un MAS, [15].

### 4.1.2 Il ciclo di vita di un agente

Per quanto non si faccia uso, nel nostro modello, del formalismo della teoria degli automi a stati finiti, diremo che un agente può trovarsi, in un istante di tempo qualsiasi, nello stato attivo, oppure in quello passivo<sup>5</sup>. Il processo di decisione è una sequenza di eventi elementari; tali eventi sono di natura stocastica e quindi definiremo le distribuzioni che governano la probabilità del loro avverarsi. Lo stato iniziale in cui si trova un agente è quello passivo<sup>6</sup>; un agente permane nello stato passivo finché non avviene la sua *attivazione*. L'attivazione comporta la localizzazione dell'agente in una certa cella  $c \in \Gamma$ : gli agenti passivi non sono associati ad alcuna cella dell'automa; diremo che essi formano un *pool* di agenti.

In un qualsiasi istante un agente attivo può decidere di spostarsi da  $c$  in una cella  $c' \in \Gamma$ . Tale evento prende il nome di *diffusione*. La cella di destinazione può essere scelta secondo diversi criteri. Nel caso più semplice gli agenti sono liberi di "saltare" in una qualsiasi cella dell'automa. Strategie più raffinate potrebbero simulare un passeggiata aleatoria (e.g. la cella di destinazione deve essere adiacente a quella di partenza, oppure appartenere ad un intorno con raggio fissato<sup>7</sup>), oppure prendere in considerazione

---

<sup>5</sup>ovviamente in quest'ultima affermazione, attribuiamo alla disgiunzione "oppure" il comune significato esclusivo e non quello formale della logica matematica.

<sup>6</sup>sebbene ciò non valga necessariamente per l'intera popolazione. In effetti determinare il numero di agenti attivi all'inizio di ciascuna simulazione è un problema che si risolve facendo ricorso alla cosiddetta tecnica del *bootstrap* del sistema. Nell'ambito dei sistemi complessi tale tecnica ha generalmente a che fare col problema della ricerca dei parametri del sistema.

<sup>7</sup>minore o uguale del diametro dello spazio cellulare  $\Gamma$ : questa euristica è una generalizzazione di quella adottata nel modello.

la rete di trasporto cittadina. Il modello impiega la strategia base, in cui un agente è libero di saltare in qualsiasi cella di  $\Gamma$ .

In un qualsiasi istante un agente attivo può *abbandonare* il processo di decisione; in tal caso ritorna nello stato passivo e viene de-localizzato dalla cella in cui si trovava per rientrare nel pool di agenti passivi. Il processo di decisione può riprendere successivamente, nel caso in cui avvenga un nuovo evento di attivazione.

Infine, in qualsiasi istante un agente può *aggiornare* lo stato della cella  $c$  in cui si trova, facendo avvenire un evento di trasformazione urbana – un  $\alpha$ -evento – in  $c$ ; il vettore di stato  $v(c)$  viene sottoposto alla regola 3.5 (o alla 3.9) di aggiornamento, utilizzando un vettore dei beni  $\pi$  estratto con distribuzione  $\beta^\alpha(c, \pi)$ ; in questo caso si dice che l'agente ha portato a termine la decisione con un  $(\alpha, c, \pi)$ -evento. Questo evento termina il processo di decisione; l'agente decade nello stato passivo, come se abbandonasse il processo di decisione. La vita dell'agente in seguito all'evento di aggiornamento non è terminata, tuttavia. Poiché gli agenti sono privi di identità, è perfettamente sensato ammettere che possano intraprendere altri processi di decisione<sup>8</sup>, durante il resto della dinamica di evoluzione.

---

<sup>8</sup>in effetti non si capisce la validità concettuale di un approccio differente, almeno in questo contesto. Se accettassimo l'euristica per cui alcuni agenti non possano compiere ulteriori processi di decisione, una volta compiuto un aggiornamento, staremmo implicitamente attribuendo loro una identità o un ruolo.

Si pensi al processo di acquisto/affitto di un'abitazione: ad un'agente che acquista casa si potrebbe vietare di cercarne un'altra, supponendo che non abbia bisogno di ulteriori abitazioni (ovviamente stiamo facendo una semplificazione della realtà). Ma con questo ragionamento stiamo attribuendo all'agente un ruolo (e.g. affittuario) e di conseguenza un'identità. Inoltre non si capisce bene in che relazione si dovrebbe trovare tale agente con l' $\alpha$ -processo di vendita/abbandono di un'abitazione, rendendo poco chiaro il significato della dinamica complessiva.

Dinamiche più avanzate potrebbero ammettere una “evoluzione” dell’agente, ad esempio con un cambio di popolazione, ma questo richiederebbe una attenta analisi delle dipendenze tra i processi  $\alpha \in A$ , nell’ambito del dominio concettuale dell’urbanistica.

### 4.1.3 Dinamica del processo decisionale

A questo punto dobbiamo descrivere formalmente la dinamica del processo decisionale della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$ , per un generico  $\alpha \in A$ . Nella sotto-sezione precedente abbiamo descritto gli eventi elementari che costellano il ciclo di vita di un agente; poiché gli eventi appena descritti sono di natura stocastica, dobbiamo definire secondo che probabilità si realizzano. In realtà il processo stocastico che vogliamo descrivere riguarda la popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$  complessiva, e non un singolo agente. Inoltre stiamo considerando dei processi di Poisson, per cui sappiamo che in un intervallo di tempo  $\tau > 0$  molto piccolo valgono le seguenti relazioni<sup>9</sup>:

- $p_A^\alpha(c, t, \tau) = \lambda_A^\alpha(c, t) \cdot \tau + o(\tau)$  è la probabilità che un agente passivo della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$  si attivi nella cella  $c \in \Gamma$  durante l’intervallo  $[t, t + \tau)$ .
- $p_L^\alpha(c, t, \tau) = \lambda_L^\alpha(c, t) \cdot \tau + o(\tau)$  è la probabilità che un agente attivo della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$ , localizzato nella cella  $c \in \Gamma$ , abbandoni lo sta-

---

<sup>9</sup>trattasi dell’espansione di Taylor al primo ordine della probabilità di avere un evento nell’intervallo temporale di lunghezza  $\tau$ , per ciascuno dei quattro processi di attivazione, abbandono, diffusione e aggiornamento (indicati rispettivamente con i simboli  $A, L, D, U$ ). Si veda [5].

to attivo durante l'intervallo  $[t, t + \tau)$ , per tornare nel pool di agenti passivi.

- $p_D^\alpha(c, c', t, \tau) = \lambda_D^\alpha(c, c', t) \cdot \tau + o(\tau)$  è la probabilità che un agente attivo della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$  salti dalla cella  $c \in \Gamma$  alla cella  $c' \in \Gamma$  durante l'intervallo  $[t, t + \tau)$ .
- $p_U^\alpha(c, t, \tau) = \lambda_U^\alpha(c, t) \cdot \tau + o(\tau)$  è la probabilità che un agente attivo della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$ , localizzato nella cella  $c \in \Gamma$ , esegua un evento di  $(\alpha, c, \pi)$ , per qualche  $\pi \in \mathbb{V}^\alpha$  durante l'intervallo  $[t, t + \tau)$ .

Consideriamo un passo di aggiornamento dell'automa di durata  $\Delta t$ ; avendo a che fare con un processo di Poisson, sappiamo che il numero atteso di eventi che avvengono in un intervallo di tempo di lunghezza  $\Delta t$ , è pari all'intensità del processo moltiplicata per  $\Delta t$ <sup>10</sup>; inoltre abbiamo assunto che gli eventi elementari che avvengono in celle distinte – durante  $\Delta t$  – sono incrementi indipendenti, in altre parole vale l'additività 1.2; allora per definire in ciascuna cella le intensità  $\lambda_X^\alpha(c, t)$  e  $\lambda_D(c, c', t)$ , dove  $X \in \{A, L, U\}$ , possiamo trattare come parametro del modello l'intensità “globale”<sup>11</sup> del processo  $X$  per la popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$ , associata alla trasformazione  $\alpha$  – chiameremo tale intensità  $\Lambda_X^\alpha(t)$ , dove  $X \in \{A, L, D, U\}$  – e poi “ripartire” tale intensità tra tutte le celle di  $\Gamma$  utilizzando la proprietà di additività. Le intensità globali si prestano bene ad essere utilizzate come parametri del modello, proprio in virtù della loro interpretazione di valore atteso del numero di incrementi in  $\Delta t$ .

---

<sup>10</sup>questa proprietà è a sua volta una conseguenza della proprietà 1.2 della distribuzione di Poisson.

<sup>11</sup>riferita cioè all'intero automa.



Assumeremo, per semplificare la dinamica, che l'intensità globale di attivazione  $\Lambda_A^\alpha(t)$  sia determinata solamente da fattori globali, dipendenti dallo stato del sistema complessivo.

**Definizione 4.2** (Intensità di attivazione). *L'intensità di attivazione per agenti della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$ , nella generica cella  $c$  al tempo  $t$  è:*

$$\lambda_A^\alpha(c, t) = \Lambda_A^\alpha(t) \cdot \frac{F^\alpha(c, t)}{\sum_{c' \in \Gamma} F^\alpha(c', t)} \quad (4.1)$$

dove  $F^\alpha : \Gamma \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$  è una funzione definita non negativa e limitata, e  $\Lambda_A^\alpha(t)$  è l'intensità globale, ottenuta sommando i processi di attivazione di agenti di  $\mathfrak{B}^\alpha$  su tutto  $\Gamma$ ,

$$\Lambda_A^\alpha(t) = \sum_{c \in \Gamma} \lambda_A^\alpha(c, t) \quad (4.2)$$

Il tasso di abbandono viene assunto indipendente dalla cella e dallo stato del sistema.

**Definizione 4.3** (Intensità di abbandono). *L'intensità di abbandono per agenti della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$ , nella generica cella  $c$  e al tempo  $t$  non dipende da  $c$ , né da  $t$ :*

$$\lambda_L^\alpha(c, t) = \frac{\Lambda_L^\alpha}{|\Gamma|} \quad (4.3)$$

dove  $\Lambda_L^\alpha = \sum_{c \in \Gamma} \lambda_L^\alpha(c, t)$  è l'intensità globale di abbandono ed è una costante.

Questo vuol dire che il tempo di vita medio di un agente attivo è pari a  $|\Gamma|/\Lambda_L^\alpha$ .

Per quanto riguarda l'intensità di diffusione, assumeremo per semplicità che essa dipenda solamente dalla cella di destinazione e che l'intensità globale del processo di diffusione sia una costante.

**Definizione 4.4** (Intensità di diffusione). *Per la generica coppia di celle  $(s, c) \in \Gamma \times \Gamma$ , l'intensità di diffusione di agenti della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$  al tempo  $t$ , dalla cella  $s$  alla cella  $c$ , non dipende dalla cella di partenza  $s$  ed è pari a:*

$$\lambda_D^\alpha(s, c, t) = \lambda_D^\alpha(c, t) = \Lambda_D^\alpha \cdot \frac{F^\alpha(c, t)}{\sum_{c' \in \Gamma} F^\alpha(c', t)} \quad (4.4)$$

dove  $F^\alpha(c, t)$  è definita nella 4.2.

**Definizione 4.5** (Intensità di aggiornamento). *L'intensità di aggiornamento per agenti della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$ , nella generica cella  $c$  al tempo  $t$  è:*

$$\lambda_U^\alpha(c, t) = \Lambda_U^\alpha \cdot G^\alpha(c, t) \quad (4.5)$$

dove  $G^\alpha : \Gamma \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$  è una funzione definita non negativa e limitata.

Le due funzioni  $F^\alpha$  e  $G^\alpha$  sono dette forze di attrazione urbana e servono a guidare gli agenti durante il loro processo cognitivo di esplorazione dello spazio cellulare. Per ora possiamo dire – a livello intuitivo – che maggiore è il valore che  $F^\alpha$  o  $G^\alpha$  attribuiscono alla cella  $c$ , maggiore sarà il numero di agenti che sceglieranno  $c$  come luogo in cui attivarsi; verso cui saltare; in cui compiere  $\alpha$ -eventi. Nella sezione 4.2 cercheremo di dare una giustificazione formale a questa intuizione.

Adesso mostriamo come calcolare l'intensità  $\lambda^\alpha(c, t)$  di  $\alpha$ -eventi nella cella  $c$ . Sia  $P(c, t)$  la probabilità che un agente della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$  sia nella cella  $c$  – nello stato attivo – e indichiamo con  $P(\bar{\Gamma}, t) = 1 - \sum_{c \in \Gamma} P(c, t)$  la probabilità di trovarsi nel pool di agenti passivi. In base alle definizioni 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 e in base alla descrizione dei quattro eventi elementari, l'evoluzione temporale delle probabilità  $P(c, t)$  è data dalla seguente equazione differenziale al primo ordine:

$$\begin{aligned} \frac{dP^\alpha(c, t)}{dt} &= \lambda_A^\alpha(c, t) \cdot P^\alpha(\bar{\Gamma}, t) + \sum_{c' \in \Gamma} \lambda_D^\alpha(c, t) \cdot P^\alpha(c', t) + \\ &\quad - \sum_{c' \in \Gamma} \lambda_D^\alpha(c', t) \cdot P^\alpha(c, t) - \lambda_L^\alpha(c, t) \cdot P^\alpha(c, t) - \lambda_U^\alpha(c, t) \cdot P^\alpha(c, t) = \\ &\quad = \Lambda_A^\alpha(t) \cdot \frac{F^\alpha(c, t)}{T^\alpha(t)} \cdot P(\bar{\Gamma}, t) + \sum_{c' \in \Gamma} \Lambda_D^\alpha \cdot \frac{F^\alpha(c, t)}{T^\alpha(t)} \cdot P^\alpha(c', t) + \\ &\quad - \sum_{c' \in \Gamma} \Lambda_D^\alpha \cdot \frac{F^\alpha(c', t)}{T^\alpha(t)} \cdot P^\alpha(c, t) + \frac{\Lambda_L^\alpha}{|\Gamma|} \cdot P^\alpha(c, t) - \Lambda_U^\alpha \cdot G^\alpha(c, t) \cdot P^\alpha(c, t) \quad (4.6) \end{aligned}$$

Dove  $T^\alpha(t) = \sum_{c \in \Gamma} F^\alpha(c, t)$  è il fattore di normalizzazione usato in 4.1 e 4.4. Riscriviamo la 4.6 semplificandola:

$$\begin{aligned} \frac{dP^\alpha(c, t)}{dt} &= \frac{F^\alpha(c, t)}{T^\alpha(t)} \cdot (P^\alpha(\bar{\Gamma}, t) \cdot \Lambda_A^\alpha(t) + (1 - P^\alpha(\bar{\Gamma}, t)) \cdot \Lambda_D^\alpha) + \\ &\quad - P^\alpha(c, t) \cdot \left( \Lambda_D^\alpha + \frac{\Lambda_L^\alpha}{|\Gamma|} + \Lambda_U^\alpha \cdot G^\alpha(c, t) \right) \quad (4.7) \end{aligned}$$

Supponiamo che le variabili che descrivano lo stato del sistema siano delle variabili lente rispetto a  $P^\alpha(c, t)$ . Possiamo allora ricavare la soluzione stazionaria per la distribuzione  $P^\alpha(., t)$ , ovvero nel caso in cui sia  $\frac{dP^\alpha(c, t)}{dt} = 0$ ;

tale soluzione è la seguente:

$$P^\alpha(c, t) = \frac{F^\alpha(c, t) \cdot (P^\alpha(\bar{\Gamma}, t) \cdot \Lambda_A^\alpha(t) + (1 - P^\alpha(\bar{\Gamma}, t)) \cdot \Lambda_D^\alpha)}{T^\alpha(t) \cdot \left( \Lambda_D^\alpha + \frac{\Lambda_L^\alpha}{|\Gamma|} + \Lambda_U^\alpha \cdot G^\alpha(c, t) \right)} \quad (4.8)$$

A questo punto possiamo usare la soluzione 4.8 per calcolare  $\lambda^\alpha(c, t)$ . Denotiamo con  $\lambda_1^\alpha(c, t)$  l'intensità con cui un dato agente esegue uno ed un solo  $(\alpha, c)$ -evento. Tale intensità è il prodotto dell'intensità  $\lambda_U^\alpha(c, t)$  di aggiornamento e della probabilità 4.8 che l'agente si trovi nella cella  $c$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1^\alpha(c, t) &= \lambda_U^\alpha(c, t) \cdot P^\alpha(c, t) = \\ &= \Lambda_U^\alpha \cdot G^\alpha(c, t) \cdot \frac{F^\alpha(c, t) \cdot (P^\alpha(\bar{\Gamma}, t) \cdot \Lambda_A^\alpha(t) + (1 - P^\alpha(\bar{\Gamma}, t)) \cdot \Lambda_D^\alpha)}{T^\alpha(t) \cdot \left( \Lambda_D^\alpha + \frac{\Lambda_L^\alpha}{|\Gamma|} + \Lambda_U^\alpha \cdot G^\alpha(c, t) \right)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

L'intensità  $\lambda^\alpha(c, t)$  è ottenuta per additività su tutti gli agenti di  $\mathfrak{B}^\alpha$ ; sia  $M^\alpha = |\mathfrak{B}^\alpha|$  e denotiamo con  $M_A^\alpha$  il numero di agenti attivi in  $\Gamma$ : per  $M^\alpha \gg 0$  le fluttuazioni di  $M_A^\alpha$  attorno al valor medio  $M^\alpha \cdot (1 - P^\alpha(\bar{\Gamma}, t))$  sono piccole; allora ha senso operare la sostituzione  $M_A^\alpha = M^\alpha \cdot (1 - P^\alpha(\bar{\Gamma}, t))$ . La 4.9 diviene:

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha(c, t) &= \lambda_1^\alpha(c, t) \cdot M = \\ &= \Lambda_U^\alpha \cdot G^\alpha(c, t) \cdot \frac{F^\alpha(c, t) \cdot ((M^\alpha - M_A^\alpha) \cdot \Lambda_A^\alpha(t) + M_A^\alpha \cdot \Lambda_D^\alpha)}{T^\alpha(t) \cdot \left( \Lambda_D^\alpha + \frac{\Lambda_L^\alpha}{|\Gamma|} + \Lambda_U^\alpha \cdot G^\alpha(c, t) \right)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

## 4.2 Intensità dei processi di Poisson

Il processo di decisione di un agente, che nel nostro modello è un processo stocastico di Poisson, contempla una sequenza di scelte tra le varie celle che compongono lo spazio cellulare  $\Gamma$ . Essendo un processo cognitivo, dobbiamo fornire agli agenti una descrizione della città, per mezzo della quale esso sia in grado di discernere le zone in cui è più “attraente” compiere i vari eventi di attivazione, diffusione *et cetera*.

Le funzioni  $F^\alpha$  e  $G^\alpha$  servono a classificare le celle dell'automa, fornendo due differenti descrizioni dello spazio cellulare. Consideriamo le definizioni 4.2 e 4.4: intuitivamente più una cella è attraente (e.g. maggiore è il valore di  $F^\alpha$ ) più alte saranno le intensità  $\lambda_A^\alpha(c, t)$  e  $\lambda_D^\alpha(c, t)$ , maggiore sarà il valore atteso degli eventi di attivazione e diffusione, eseguiti da agenti della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$  nella cella  $c$ . Si può fare un discorso simile per l'intensità del processo di aggiornamento  $U$ , riguardo alla funzione  $G^\alpha$ .

Per quale motivo consideriamo due classificazione distinte? Per rispondere a questa domanda bisogna analizzare il processo decisionale; nella prima parte (in cui avviene l'evento di attivazione e successivamente la sequenza di salti di diffusione), l'insieme di alternative tra cui un agente deve scegliere è tutto lo spazio cellulare<sup>12</sup>. Nella seconda parte (in cui avvengono l'aggiornamento o l'abbandono), la scelta è tra due alternative, compiere un  $\alpha$ -evento oppure no. Intuitivamente, la qualità dell'informazione che un agente dovrebbe avere a disposizione, dovrebbe essere mi-

---

<sup>12</sup>o più in generale, un suo sottoinsieme; si veda la sottosezione 4.1.2 ed in particolare la discussione relativa alle euristiche di diffusione.

nore nel primo caso, rispetto a quella disponibile nel secondo. L'idea è che l'agente, dovendo scegliere tra più alternative, non può farsi un quadro della situazione ad un grande livello di dettaglio: piuttosto egli dovrebbe classificare le celle rispetto al contesto in cui queste si trovano. A questo livello potrebbero avere un ruolo non trascurabile le informazioni relative all'integrazione di una zona rispetto al sistema di trasporti (e.g. la zona è ben collegata?), oppure rispetto al grado di "centralità" o di "urbanizzazione"<sup>13</sup> del contesto in cui essa è situata. Nella seconda parte il livello di dettaglio dovrebbe invece tralasciare informazioni sul contesto della zona, per concentrarsi sulla tipologia della cella, rispetto alla particolare trasformazione  $\alpha$  che l'agente è in grado di compiere. Per fare un esempio, un agente che intende acquistare casa per prima cosa individuerà le zone della città meglio collegate. Una volta soffermatosi su una particolare cella  $c$ , esso dovrà valutare la tipologia urbana di  $c$  e chiedersi se  $c$  è una cella in cui andare ad abitare (e.g. potrebbe essere capitato in una zona classificata come "industriale"; a quel punto dovrebbe – ma non è detto – desistere e abbandonare il processo di decisione)

Per definire le due funzioni di attrazione  $F^\alpha$  e  $G^\alpha$  il nostro modello fa uso dell'analisi delle componenti principali, descritta nel capitolo 2. A questo

---

<sup>13</sup>preferiamo dare a questi termini una connotazione informale, e non fare ricorso a nessuna particolare teoria Urbanistica.

scopo consideriamo la matrice  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ,  $d = p + q$ ,  $n = |\Gamma|$ , così definita<sup>14</sup>:

$$\mathbf{X} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} v_1(c_1) & \dots & v_p(c_1) & w_1(c_1) & \dots & w_q(c_1) \\ v_1(c_2) & \dots & v_p(c_2) & w_1(c_2) & \dots & w_q(c_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1(c_n) & \dots & v_p(c_n) & w_1(c_n) & \dots & w_q(c_n) \end{array} \right] \quad (4.11)$$

Sia  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  la matrice di covarianza di  $\mathbf{X}$ ,  $V(\mathbf{X}) = \mathbf{S}$ , e consideriamo la decomposizione agli autovalori di  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S}\mathbf{E} = \mathbf{E}\mathbf{D} \quad (4.12)$$

dove  $\mathbf{E}$  è la matrice delle componenti principali di  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{E} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_d \end{array} \right] \quad (4.13)$$

e  $\mathbf{D} = \text{diag}(a_1, \dots, a_d)$  è la matrice diagonale formata dai corrispondenti  $d$  autovalori di  $\mathbf{S}$ , scritti in ordine decrescente,  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_d$ . Prendono il nome di *scores* o *fattori* di  $\mathbf{X}$  le  $d$  combinazioni lineari standardizzate delle colonne di  $\mathbf{X}$ , centrata attorno alla sua media  $\mathbf{m}$ :

$$\mathbf{y}_i = (\mathbf{X} - \mathbf{1} \cdot \mathbf{m}^t) \cdot \mathbf{e}_i \quad (4.14)$$

dove la matrice di centraggio  $\mathbf{1} \cdot \mathbf{m}^t$  è ottenuta dal prodotto righe per colonne di  $\mathbf{m} = [m_1, \dots, m_d]^t$  trasposto in vettore riga e del vettore colonna

---

<sup>14</sup>in effetti possiamo considerare un ordinamento qualsiasi delle righe e delle colonne, purché sulla stessa riga ci siano i vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  associati a  $c$ .

formato da sole componenti pari a 1:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (4.15)$$

La trasformata di  $\mathbf{X}$  è dunque la matrice  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ,  $\mathbf{X} \xrightarrow{\text{pca}} \mathbf{Y}$  ed è formata dai  $d$  scores 4.14:

$$\mathbf{Y} = \left[ \mathbf{y}_1 \mid \dots \mid \mathbf{y}_d \right] \quad (4.16)$$

Le nuove variabili espresse dalle colonne di  $\mathbf{Y}$  sono tra loro non correlate, infatti:

$$\mathbf{V}(\mathbf{Y}) = \mathbf{E}^t \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}^t \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{D} \quad (4.17)$$

Quindi  $i \neq j \Rightarrow \text{Cov}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) = (\mathbf{D})_{ij} = 0$ . Inoltre  $\forall i = 1, \dots, d$ ,  $\mathbf{V}(\mathbf{y}_i) = a_{ii}$ , cioè gli autovalori di  $\mathbf{S}$  sono le varianze delle nuove variabili, per cui  $\text{tr}(\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^d a_{ii}$  è la varianza totale della trasformata. Ciascuna nuova variabile quindi “spiega” una percentuale di varianza  $\frac{a_{ii}}{\text{tr}(\mathbf{D})}$ . In virtù dell’ordinamento decrescente degli autovalori di  $\mathbf{S}$ , allora  $\mathbf{y}_1$  spiega la massima percentuale di varianza complessiva,  $\mathbf{y}_2$  la massima percentuale di varianza residua e via dicendo.

L’idea alla base dell’utilizzo della PCA come tecnica di compressione dei dati, sta nel considerare solo  $r \leq d$  fattori, la cui varianza complessiva, e.g.  $\sum_{i=1}^r a_{ii}$  ammonti almeno al 50% del totale<sup>15</sup>. Per quanto riguarda la

---

<sup>15</sup>Altre euristiche popolari per la determinazione di  $r$  sono il criterio di Kaiser, secondo



classificazione, è interessante calcolare la covarianza di ciascuna variabile originale con ciascun fattore:

$$l_{ij} = \text{Cov}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j) = e_{ij} \cdot \frac{\sqrt{a_{jj}}}{\sigma_{ii}} \quad (4.18)$$

dove  $\sigma_{ii} = (\mathbf{S})_{ii}$  è la varianza della variabile  $i$ -esima,  $V(\mathbf{x}_i) = \sigma_{ii}$ . Tali covarianze prendono il nome di *loadings*. Nel caso in cui i dati siano standardizzati, i loadings diventano delle correlazioni e possono essere usati per interpretare le componenti principali. La tecnica di classificazione più semplice in questo caso contempla  $2^r$  classi distinte, formate dai quadranti dello spazio fattoriale  $r$ -dimensionale, i cui assi – che prendono il nome di assi fattoriali – sono individuati<sup>16</sup> delle prime  $r$  componenti principali  $e_1, \dots, e_r$ . La  $k$ -esima osservazione, per  $k = 1, \dots, n$ , appartiene alla  $j$ -esima classe se la  $k$ -esima riga di  $\mathbf{Y}$ , proiettata sugli assi fattoriali, ricade nel  $j$ -esimo quadrante. I loading sono importanti poiché permettono di individuare un sottoinsieme delle variabili originarie, maggiormente correlate con ciascun asse fattoriale, e quindi di darne una “interpretazione” (si veda ad esempio lo studio in [1]).

A questo punto  $G^\alpha(c_i, t)$  potrebbe essere definita come la somma delle  $r$  componenti che formano lo score della cella  $c$ , e.g. la somma per righe della matrice  $\mathbf{Y}$ :  $G^\alpha(c_i, t) = \sum_{j=1}^r y_{ij}$ . Tuttavia dobbiamo connettere la descrizione del processo  $\alpha$  con tale classificazione, pena l’uguaglianza di

---

il quale si devono considerare solo le componenti con autovalore maggiore di 1, e lo *scree test* (“scree” è un termine Inglese proveniente dalla geologia che indica i detriti alla base delle pendenze rocciose), un criterio grafico che analizza il grafico degli autovalori rispetto ai loro valori ordinali.

<sup>16</sup>ricordiamo che le colonne  $\mathbf{E}$  sono ortonormali.

$G^\alpha(c_i, t)$  per tutti gli  $\alpha \in A$ . Aniché sommare le componenti dell' $i$ -esima riga, possiamo considerare un contributo dato da ciascuna variabile originaria, tra quelle che vengono effettivamente aggiornate dalla regola di aggiornamento 3.5 di  $\alpha$ . Per diversificare ulteriormente i contributi dovuti alle diverse variabili presenti in  $\pi(\alpha)$ , prendiamo una somma pesata dai loading di ciascuna variabile.

**Definizione 4.6** (Forza di Attrazione  $G^\alpha$ ). *Sia  $\Gamma = \{c_1, \dots, c_n\}$ , sia  $\mathbf{X}$  come nella 4.11, sia  $\mathbf{Y}$  la trasformata di Hotelling di  $\mathbf{X}$  nel senso della 4.16 e sia  $\mathbf{L}$  la matrice dei loading delle variabili di  $\mathbf{X}$  rispetto a quelle di  $\mathbf{Y}$ , e.g.  $(\mathbf{L})_{ij} = l_{ij}$ , dove  $l_{ij}$  è definito come nella 4.18. Sia infine  $\alpha \in A$  un processo di trasformazione urbana, e sia  $\pi(\alpha) \subseteq \{1, \dots, d\}$ . Allora:*

$$g^\alpha(c_i, t) = \sum_{j \in \pi(\alpha)} l_{ij} \cdot \sum_{k=1}^r y_{ik} \quad i = 1, \dots, n, \quad r \leq d \quad (4.19)$$

la funzione  $G^\alpha$  viene aggiornata nel seguente modo:

$$\begin{cases} G^\alpha(c_i, t + \Delta T) = G^\alpha(c_i, t) + \epsilon (g^\alpha(c_i, t + \Delta T) - G^\alpha(c_i, t)) & t > 0 \\ G^\alpha(c_i, 0) = g^\alpha(c_i, 0) \end{cases} \quad (4.20)$$

dove  $0 < \epsilon \leq 1$  è un parametro di calibrazione del modello, e.g.  $\epsilon = 1 \Rightarrow G^\alpha(c_i, t + \Delta T) = g^\alpha(c_i, t + \Delta T)$ .

Per semplicità di notazione abbiamo considerato implicita la dipendenza di  $\mathbf{X}$  – e quindi anche della sua trasformata e della matrice dei loading – da  $t$ .

Nella sotto-sezione 4.1.3 avevamo accennato le assunzioni riguardanti la dinamica dei processi decisionali degli agenti; l'ipotesi è che le quantità  $F^\alpha$  e  $G^\alpha$  siano soggette ad una dinamica lenta rispetto a  $P^\alpha(c, t)$  e  $\lambda^\alpha$ . Affinché questa ipotesi sia rispettata,  $\Delta T$  della 4.20 dovrebbe essere maggiore di  $\Delta t$  del processo di decisione delle popolazioni di agenti per almeno un ordine di grandezza,  $\Delta T \geq 10 \cdot \Delta t$ .

La funzione  $F^\alpha$  fornisce agli agenti di una forza di attrazione per l'attivazione e la diffusione; essa dovrebbe fornire agli agenti una descrizione di una cella basata sul contesto in cui essa si trova. Nella maggior parte dei sistemi urbani il sistema di trasporto è modellato con un grafo, su cui è perciò possibile definire una qualche misura di integrazione o centralità. La seguente definizione presuppone quindi la presenza di un insieme di finito vertici  $V$  del grafo della rete di trasporto cittadina e di una funzione limitata  $i : V \mapsto \mathbb{R}^+$  che esprime l'integrazione di un generico nodo  $d \in V$  del sistema di trasporto. Nel capitolo 5 vedremo la definizione formale della funzione di integrazione  $i$  adottata nel caso di studio della città di Roma. Assumeremo che ad ogni cella sia associato un nodo rappresentativo  $d_c$  di  $V$ , le cui coordinate spaziali siano comprese entro i confini di  $c$ , in modo tale da associare a  $c$  il valore  $i(d_c)$ . Diremo che  $i(d_c)$  è il valore dell'indice di integrazione della cella  $c$  nel sistema di trasporto metropolitano.

**Definizione 4.7** (Forza di Attrazione  $F^\alpha$ ). *Siano  $c \in \Gamma$ ,  $G^\alpha(c, t)$  definita come in 4.20 e  $i(d_c)$  l'indice di integrazione di  $c$ . Sia inoltre  $d : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $(c_1, c_2) \mapsto d(c_1, c_2)$  la distanza euclidea tra i centri geometrici di  $c_1$  e  $c_2$  e sia  $U_c \subseteq \Gamma$  un*

intorno opportuno di  $c$ . Allora  $F^\alpha(c, t)$  è definita nel seguente modo:

$$F^\alpha(c, t) = \sum_{d \in U_c} i(d_c) \cdot f(d(c, d)) \cdot G^\alpha(d, t) \quad (4.21)$$

dove  $f$  è una opportuna funzione monotóna decrescente.

Questa definizione sembra rispondere alla nostra idea intuitiva, secondo la quale l'attivazione e la diffusione dovrebbero corrispondere ad un processo cognitivo basato su un livello di informazione più grezzo, rispetto a quello della fase di decisione relativa all'aggiornamento. In un certo senso la somma "distrugge" il contenuto informativo più ricco dato dalla collezione di valori di  $G^\alpha(c, t)$ ,  $\forall c \in U_c$ . Si noti infine che il contributo di  $f$  serve a mitigare l'effetto dei centri di attrazione che sono distanti dalla cella che stiamo considerando.

### 4.3 Algoritmo di simulazione del processo di poisson composto

Descriviamo ora l'algoritmo utilizzato nel modello, allo scopo di simulare i processi di decisione descritti nelle precedenti sezioni; esso si basa sull'osservazione che le variabili aleatorie 1.21, sono distribuite secondo la densità esponenziale 1.22.

1. Consideriamo l'automa durante l' $n$ -esimo passo di evoluzione, e denotiamo con  $[t, t_n + \Delta t)$  l'intervallo di tempo che ci resta da simulare,

dove  $t_n = (n - 1) \cdot \Delta t$ . Per ciascuna cella  $c \in \Gamma$  e per ciascuna trasformazione  $\alpha \in A$  consideriamo la v.a.  $N^{\alpha,X}(c, t)$ , che esprime il numero di eventi elementari di tipo  $X$ , con  $X \in K = \{A, L, D, U\}$ , che accadono in  $c$  e che coinvolgono agenti della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$ . Sia  $\lambda^{\alpha,X}(c, t)$  l'intensità del processo di Poisson relativo. Siamo in grado di calcolare queste intensità al tempo  $t$ , infatti:

$$\begin{cases} \lambda^{\alpha,A}(c, t) = \lambda_A^\alpha(c, t_n) \cdot M_P^\alpha(t) \\ \lambda^{\alpha,X}(c, t) = \lambda_X^\alpha(c, t_n) \cdot M_A^\alpha(c, t) \quad X \in \{L, D, U\} \end{cases} \quad (4.22)$$

dove  $M^\alpha = |\mathfrak{B}^\alpha|$ ,  $M_A^\alpha(c, t)$  è il numero di agenti attivi nella cella  $c$  e  $M_P^\alpha(t) = M^\alpha - \sum_{c \in \Gamma} M_A^\alpha(c, t)$  il numero di agenti passivi. In base alle relazioni 4.1, 4.3, 4.4 e 4.5 i lati destri sono determinati al tempo  $t$  e dunque lo sono anche i lati sinistri della 4.22;

2. Durante l'intervallo rimanente  $[t, t_n + \Delta t) \subseteq [t_n, t_n + \Delta t)$  (e.g.  $t \geq t_n$ ) le variabili  $N^{\alpha,X}(c, t)$ ,  $\forall \alpha \in A$ ,  $\forall c \in \Gamma$  e  $\forall X \in \{A, L, D, U\}$ , sono supposte indipendenti, per cui la loro somma

$$N(t) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{X \in K} \sum_{c \in \Gamma} N^{\alpha,X}(c, t) \quad (4.23)$$

è ancora una variabile aleatoria con distribuzione di Poisson di parametro:

$$\lambda(t) = \sum_{\alpha \in A} \sum_{X \in K} \sum_{c \in \Gamma} \lambda^{\alpha,X}(c, t) \quad (4.24)$$

il significato di  $N(t)$  è di contare il numero di eventi elementari di

qualsiasi tipo, per qualsiasi trasformazione e in qualsiasi cella dell'automa.

3. A questo punto possiamo simulare il prossimo evento, estraendo per prima cosa un tempo  $\tau$  con distribuzione esponenziale 1.22 di parametro 4.24. Se  $\tau + t > t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , il processo per l' $n$ -esimo passo di aggiornamento corrente termina, poiché stiamo estraendo un evento che cade al di fuori dell'intervallo di aggiornamento e per cui non valgono le assunzioni di indipendenza. Se al contrario  $\tau + t \leq t_{n+1}$ , possiamo determinare tutte le caratteristiche dell'evento che ha luogo al tempo  $t + \tau \in [t, t_n + \Delta t)$ , ed aggiornare l'automa. Consideriamo quest'ultima possibilità: dobbiamo determinare la cella, il tipo di evento elementare (e.g.,  $X \in \{A, L, D, U\}$ ) e la popolazione cui appartiene l'agente coinvolto.
4. La cella in cui avviene l'evento elementare viene estratta con distribuzione di probabilità discreta:

$$p_{\Gamma}(c) = \frac{\sum_{\alpha \in A} \sum_{X \in K} \lambda^{\alpha, X}(c, t)}{\lambda(t)} \quad (4.25)$$

5. Il tipo di evento elementare può essere scelto con distribuzione di probabilità discreta:

$$p_K(X) = \frac{\sum_{\alpha \in A} \lambda^{\alpha, X}(c, t)}{\sum_{\alpha \in A} \sum_{X \in K} \lambda^{\alpha, X}(c, t)} \quad (4.26)$$

6. Il tipo di trasformazione  $\alpha \in A$  e di conseguenza la popolazione di

agenti coinvolta può essere scelta con distribuzione discreta:

$$p_A(\alpha) = \frac{\lambda^{\alpha,X}(c, t)}{\sum_{\alpha \in A} \lambda^{\alpha,X}(c, t)} \quad (4.27)$$

7. A questo punto, a seconda del tipo  $X$  di evento elementare estratto, procediamo ad aggiornare le strutture dati.

- (a) Se  $X = A$ , allora  $M_A^\alpha(c, t + \tau) = M_A^\alpha(c, t) + 1$  e  $M_P^\alpha(t + \tau) = M_P^\alpha(t) - 1$ ;
- (b) Se  $X = L$ , allora  $M_A^\alpha(c, t + \tau) = M_A^\alpha(c, t) - 1$  e  $M_P^\alpha(t + \tau) = M_P^\alpha(t) + 1$ ;
- (c) Se  $X = D$ , allora estraiamo la cella di destinazione con la seguente distribuzione discreta:

$$\left( \frac{F^\alpha(c', t)}{\sum_{d \in \Gamma} F^\alpha(d, t)} \right)_{c' \in \Gamma} \quad (4.28)$$

ed aggiorniamo  $M_A^\alpha(c, t + \tau) = M_A^\alpha(c, t) - 1$  e  $M_A^\alpha(c', t + \tau) = M_A^\alpha(c', t) + 1$ .

- (d) Se  $X = U$ , allora dobbiamo estrarre un vettore di parametri per l' $(\alpha, c, \pi)$ -evento che l'agente ha deciso di effettuare. Aggiorniamo il vettore  $v(c)$  usando la regola 3.9.

8. Aggiorniamo la variabile contenente l'istante di tempo corrente  $t \leftarrow t + \tau$  e riprendiamo l'iterazione dal punto 1.

9. Se invece, al punto 3 abbiamo estratto un tempo  $\tau$  t.c.  $t + \tau > t_{n+1} = n \cdot \Delta t$ , dobbiamo terminare la simulazione relativa all'intervallo  $[t_n, t_n + \Delta t)$  e procedere con quella per il successivo intervallo  $[t_{n+1}, t_{n+1} + \Delta t)$ . Aggiorniamo la variabile discreta che tiene traccia del passo di aggiornamento a cui siamo arrivati, e.g.  $n \leftarrow n + 1$ . Se l'intervallo di aggiornamento per la dinamica lenta è  $\Delta T = k \cdot \Delta t$ , dove  $k \in \mathbb{N}$  e  $k \mid n$ , allora  $\exists a \in \mathbb{N} : k \cdot a = n$ ; Allora  $t_{n+1} = n \cdot \Delta t = k \cdot a \cdot \Delta t = a \cdot \Delta T$  e quindi ci troviamo anche all' $a$ -esimo passo di aggiornamento delle variabili  $F^\alpha$ ,  $G^\alpha$  e  $\lambda_X^\alpha$ , per  $X \in \{A, L, D, U\}$ :

- (a) Aggiorniamo  $G^\alpha(c, a \cdot \Delta T)$  con la formula

$$G^\alpha(c, a \cdot \Delta T) = G^\alpha(c, (a-1) \cdot \Delta T) + \epsilon(g^\alpha(c, a \cdot \Delta T) - G^\alpha(c, (a-1) \cdot \Delta T)) \quad (4.29)$$

Si noti che  $g^\alpha(c, a \cdot \Delta T) = g^\alpha(c, t_{n+1})$  è calcolato a partire dalla trasformata di Hotelling  $\mathbf{Y}(t_{n+1})$  della matrice di dati multivariati  $\mathbf{X}(t_{n+1})$ , che a sua volta è formata dei vettori  $\mathbf{v}(c, t_{n+1})$  e  $\mathbf{w}(c, t_{n+1})$  secondo la definizione 4.11.

- (b) Aggiorniamo  $F^\alpha(c, a \cdot \Delta T)$  con la formula 4.21.
- (c) Aggiorniamo il parametro dell'intensità globale  $\Lambda_A^\alpha(a \cdot \Delta T)$ ,  $\forall \alpha \in A$ .
- (d) A questo punto possiamo aggiornare le intensità dei processi



decisionali dei singoli agenti,  $\forall \alpha \in A, \forall c \in \Gamma$ :

$$\lambda_A^\alpha(c, a \cdot \Delta T) = \Lambda_A^\alpha(a \cdot \Delta T) \cdot \frac{F^\alpha(c, a \cdot \Delta T)}{T^\alpha(a \cdot \Delta T)} \quad (4.30)$$

$$\lambda_D^\alpha(c, a \cdot \Delta T) = \Lambda_D^\alpha \cdot \frac{F^\alpha(c, a \cdot \Delta T)}{T^\alpha(a \cdot \Delta T)} \quad (4.31)$$

$$\lambda_U^\alpha(c, a \cdot \Delta T) = \Lambda_U^\alpha \cdot G^\alpha(c, a \cdot \Delta T) \quad (4.32)$$

Vale la pena notare che  $\lambda_{A,L,U}(c, a \cdot \Delta T) = \lambda_{A,L,U}(c, t_{n+1})$ , in maniera consistente con la relazione 4.23 del punto 1 del presente algoritmo. Si rammenti infine che l'intensità del processo di abbandono è una costante  $\lambda_L^\alpha = \Lambda_L^\alpha / |\Gamma|$ .

- (e) A questo punto possiamo riprendere la simulazione tornando al punto 1 dell'algoritmo.

# **L'applicazione**

## Capitolo 5

# Lo studio della periferia orientale di Roma

In questo capitolo affrontiamo l'applicazione del modello descritto, nella precedente parte del presente documento, alla periferia orientale di Roma. Il motivo principale della scelta di Roma risiede – come spesso avviene per questo genere di modelli – nella disponibilità di dati statistici<sup>1</sup> della suddetta area di studio. Non da sottovalutare tuttavia, è l'opportunità di poter adattare un modello di questo tipo, sinora applicato a sistemi urbani di dimensioni medio-piccole<sup>2</sup>, ad una grande metropoli contemporanea.

---

<sup>1</sup>lo studio riguardante la raccolta e l'elaborazione di questi dati ai fini dell'analisi statistica del territorio, è stato pubblicato in [1].

<sup>2</sup>si fa riferimento in questo caso ai lavori del progetto ACME, portato avanti dal gruppo di Matematica dell'Accademia di Architettura dell'Università della Svizzera Italiana. La pagina del progetto sul WWW è raggiungibile all'indirizzo <http://www.mate.arch.unisi.ch/ACME>

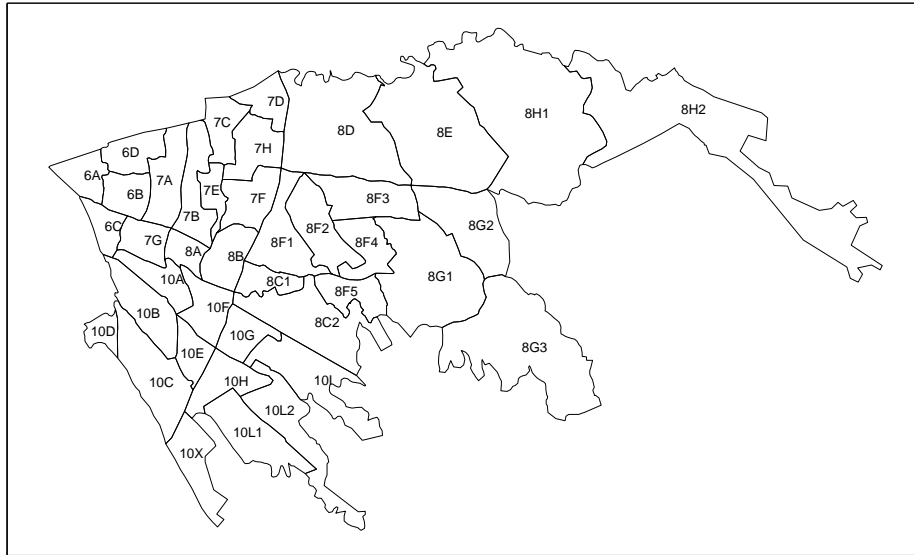


Figura 5.1: Suddivisione cellulare della zona di studio

## 5.1 Il reticolo cellulare

La suddivisione in celle omogenee è riportata nella figura 5.1 e fa riferimento a quella del Comune di Roma in “Zone Urbanistiche”. È stata scelta in maniera obbligata, per rispettare la conformità con le unità statistiche dei censimenti ISTAT da cui sono stati tratti i dati delle variabili urbanistiche. Ciascuna cella è identificata da un codice alfanumero il cui primo carattere è un numero. Tale numero indica il Municipio di appartenenza della cella.

## 5.2 Le variabili statistiche

### 5.2.1 Descrizione preliminare

Le variabili a nostra disposizione sono tutte di natura quantitativa. Esse si riferiscono al periodo del 1991. Nella seguente tabella è riportato il codice identificativo, costituito da tre lettere maiuscole, ed il nome di ciascuna variabile.

Tabella 5.1: Variabili urbanistiche

Gruppo	Codice	Descrizione
1	POP	Popolazione residente
1	ABO	Abitazioni occupate
1	ABN	Abitazioni non occupate
2	DCO	Distanza da grandi poli commerciali urbani
2	DUN	Distanza da università
2	DHO	Distanza da distretti sanitari ospedalieri
2	DTL	Distanza da poli culturali e del tempo libero
2	DFM	Distanza da linee ferroviarie e metropolitane
4a	CON	Tessuto urbano consolidato
4a	SEM	Tessuto urbano semi-consolidato
4a	FOR	Tessuto urbano in formazione
4a	URB	Suolo urbanizzato non costruito
4b	RES	Uso del suolo residenziale

*continua alla pagina seguente...*

Tabella 5.1: Continua dalla pagina precedente

Gruppo	Codice	Descrizione
4b	PRO	Uso del suolo produttivo
4b	SUR	Uso del suolo per servizi di livello urbano
4b	SLO	Uso del suolo per servizi di livello locale
4c	PAG	Aree agricole e di valore paesaggistico
4c	VUO	Aree vuote o utilizzate per usi precari
4d	VER	Verde pubblico ed attrezzato (fruibile)
1	COM	Addetti al commercio
1	TCO	Addetti ai trasporti e alle comunicazioni
1	IND	Addetti all'industria estrattiva e manifatturiera e al settore energetico
1	COS	Addetti alle costruzioni
1	CAS	Addetti al credito, assicurazioni e servizi a imprese
1	PAS	Addetti a pubblica amministrazione e servizi
3	PAC	Costruzioni per usi produttivi ultimate
3	TAC	Costruzioni per usi terziari ultimate

Le variabili statistiche sopra presentate si possono suddividere in quattro categorie principali:

1. Grandezze discrete che misurano il numero di individui facenti parte di una popolazione o di una categoria di cittadini (POP, ABO, ABN, COM, TCO, IND, COS, CAS, PAS).

## 5. LO STUDIO DELLA PERIFERIA ORIENTALE DI ROMA

---

2. Grandezze continue che misurano distanze tra un punto rappresentativo della zona urbanistica e qualche entità di rilevanza urbana (DCO, DUN, DTL, DFM, DHO).
3. Grandezze continue che misurano volumi di edifici costruiti (PAC, TAC).
4. Grandezze continue che misurano superfici, categoria a sua volta suddivisa in:
  - (a) superfici urbanizzate caratterizzate dallo stesso grado di compiutezza o urbanizzazione (CON, SEM, FOR, URB);
  - (b) superfici urbanizzate caratterizzate dallo stesso uso o sfruttamento (RES, SLO, SUR, PRO);
  - (c) superfici residue e/o non urbanizzate (VUO, PAG);
  - (d) superfici urbanizzate ma non sfruttabili in senso edilizio (VER).

Segue una tabella descrittiva di ciascuna variabile.

Tabella 5.2: Descrizione delle variabili urbanistiche

Codice	Descrizione	Tipo	Note
POP	Popolazione residente	Discreta	Indica il numero di cittadini residenti all'interno della cella.

*continua* alla pagina seguente..

Tabella 5.2: continua dalla pagina precedente

Codice	Descrizione	Tipo	Note
ABO	Abitazioni occupate	Discreta	Vengono conteggiati separatamente i singoli appartamenti di cui sono composti i condomini, le villette unifamiliari e tutte le tipologie per cui si possa individuare un unico nucleo abitativo (ad es. una singola famiglia, o più d'una, in co-abitazione). Con il termine "occupate" si intende sia la proprietà che l'affitto. (Si veda inoltre la discussione relativa alle attività commerciali collocate all'interno di edifici prevalentemente residenziali, nell'ambito della definizione della variabile RES).

*continua alla pagina seguente..*



## 5. LO STUDIO DELLA PERIFERIA ORIENTALE DI ROMA

Tabella 5.2: continua dalla pagina precedente

Codice	Descrizione	Tipo	Note
ABN	Abitazioni non occupate	Discreta	Misura anch'essa delle abitazioni (nel senso della variabile ABO), con la differenza che vengono prese in esame le abitazioni presenti sul mercato immobiliare, sia in vendita che in affitto e che non siano ancora state acquistate.
DCO	Distanza da grandi poli commerciali urbani	Continua	Distanza misurata su mappa dal "centroide" della cella al centro geometrico del più vicino complesso commerciale urbano <sup>3</sup> (ad esempio Ikea Group stores).
DUN	Distanza da università	Continua	Distanza misurata su mappa dal "centroide" della cella al centro geometrico del più vicino campus o complesso universitario.

*continua alla pagina seguente..*

<sup>3</sup>anche situati al di fuori dell'area di studio

## 5. LO STUDIO DELLA PERIFERIA ORIENTALE DI ROMA

Tabella 5.2: continua dalla pagina precedente

Codice	Descrizione	Tipo	Note
DHO	Distanza da distretti sanitari ospedalieri	Continua	Distanza misurata su mappa dal “centroide” della cella al centro geometrico del più vicino ospedale o complesso ospedaliero.
DTL	Distanza da poli culturali e del tempo libero	Continua	Distanza misurata su mappa dal “centroide” della cella al centro geometrico del più vicino luogo di attività culturali e di incontro sociale (se- di di spettacoli, musei, aree ed edifi- ci di primario interesse storico ed ar- cheologico, ecc. ed anche ville stori- che e grandi parchi urbani) di grande richiamo su scala urbana.
DFM	Distanza da linee ferroviarie e metropolitane	Continua	Distanza misurata su mappa dal “centroide” della cella al centro geo- metrico della più vicina fermata della metropolitana o ferroviaria.
URB	Suolo urbanizzato non costruito	Continua	Classificazione quantitativa del gra- do di “urbanizzazione”. Misura di superficie eseguita su mappa.

*continua* alla pagina seguente..

Tabella 5.2: continua dalla pagina precedente

Codice	Descrizione	Tipo	Note
CON	Tessuto consolidato	Continuo	Classificazione quantitativa del grado di "urbanizzazione". Misura di superficie eseguita su mappa.
SEM	Tessuto semi-consolidato	Continuo	Classificazione quantitativa del grado di "urbanizzazione". Misura di superficie eseguita su mappa.
FOR	Tessuto in formazione	Continuo	Classificazione quantitativa del grado di "urbanizzazione". Misura di superficie eseguita su mappa.
RES	Uso del suolo residenziale	Continuo	Superficie territoriale delle zone urbane a carattere residenziale. Misura di superficie su mappa. Edifici in cui siano presenti appartamenti adibiti ad uso terziario (e.g. uffici, negozi, studi di professionisti), vengono inclusi in tale categoria.

*continua alla pagina seguente..*

Tabella 5.2: continua dalla pagina precedente

Codice	Descrizione	Tipo	Note
PRO	Uso del suolo produttivo	Continua	Superficie dei lotti comprendenti edifici destinati ad usi di carattere produttivo. Misura di superficie su mappa. Ricadono in questa categoria i capannoni industriali, i magazzini di merci e materiali per la distribuzione commerciale gli uffici amministrativi e i servizi locali alle imprese strettamente connessi al ciclo produttivo, etc. Nel caso di complessi di edifici viene misurata l'intera superficie territoriale comprensiva di strade di distribuzione locale e parcheggi interni.

*continua* alla pagina seguente..

Tabella 5.2: continua dalla pagina precedente

Codice	Descrizione	Tipo	Note
SUR	Uso del suolo per servizi di livello urbano	Continua	Superficie dei lotti comprendenti edifici utilizzati per lo svolgimento, in sede propria, delle attività connesse ai servizi di rango urbano e metropolitano, pubblici e privati. Misura di superficie su mappa. In questa categoria rientrano centri direzionali e complessi di uffici, servizi amministrativi e per la sicurezza urbana, grandi centri commerciali, distretti sanitari ospedalieri, università, strutture urbane per la cultura e il tempo libero (auditorium, musei, sale congressi), ecc. Nel caso di complessi di edifici viene misurata l'intera superficie territoriale comprensiva di strade di distribuzione locale e parcheggi interni.

*continua* alla pagina seguente..

Tabella 5.2: continua dalla pagina precedente

Codice	Descrizione	Tipo	Note
SLO	Uso del suolo per servizi di livello locale	Continua	Superficie dei lotti comprendenti edifici utilizzati per lo svolgimento, in sede propria, delle attività connesse ai servizi locali alla popolazione insediata nella cella (servizi di quartiere), pubblici e privati. Misura di superficie su mappa. In questa categoria rientrano scuole, servizi sociali, sanitari e assistenziali locali, servizi per il tempo libero, chiese, ma anche servizi commerciali locali (mercati rionali, assi ed aree commerciali al servizio prevalente dell'utenza locale, ecc.). Si noti che gli elementi di arredo urbano (marciapiedi, parcheggi, piazze, etc.) non vengono conteggiati in questa misurazione.

*continua* alla pagina seguente..

Tabella 5.2: continua dalla pagina precedente

Codice	Descrizione	Tipo	Note
PAG	Aree agricole e di valore paesaggistico	Continua	Misurazione su mappa della superficie del suolo agricolo o allo stato naturale, non ancora toccato dalle trasformazioni connesse alla costruzione urbana.
VUO	Aree vuote o utilizzate per usi precari	Continua	Superficie effettiva dei suoli non utilizzati oppure utilizzati per usi precari e marginali di transizione che non sono più agricoli o naturali, ma non sono neppure usi pienamente e stabilmente urbani. Misura di superficie su mappa.
VER	Verde pubblico ed attrezzato (fruibile)	Continua	Misurazione della superficie occupata dai giardini pubblici comunali, dal verde pubblico attrezzato e dai grandi parchi urbani ricadenti nella cella (purchè non presentino i caratteri agricoli o di valore paesistico e naturalistico dei suoli misurati dalla variabile PAG).

*continua alla pagina seguente..*

Tabella 5.2: continua dalla pagina precedente

Codice	Descrizione	Tipo	Note
COM	Addetti al commercio	Discreta	Numero di addetti al commercio all'ingrosso e al dettaglio, alle riparazioni di autoveicoli, beni per la casa e del settore ricettivo (alberghi e ristoranti). Tali categorie sono individuate dal "Censimento dell'industria e dei servizi", a cura dell'ISTAT.
TCO	Addetti ai trasporti e alle comunicazioni	Discreta	Comprende tutti gli addetti ai trasporti (terrestri, marittimi e aerei), alle attività di supporto e ausiliarie dei trasporti (magazzinaggio, movimentazione merci, agenzie di viaggio e di trasporto) e alle poste e telecomunicazioni, pubblici e privati; gli addetti (impiegati, autisti, ecc.), sono censiti presso l'unità locale di cui fanno parte. Tali categorie sono individuate dal "Censimento dell'industria e dei servizi", a cura dell'ISTAT.

*continua alla pagina seguente..*



Tabella 5.2: continua dalla pagina precedente

Codice	Descrizione	Tipo	Note
IND	Addetti all'industria estrattiva e manifatturiera e al settore energetico	Discreta	Numero di addetti in industrie per l'estrazione e la lavorazione della materie prime, produzione di beni di consumo (abbigliamento, automobilismo) e di prima necessità (alimentare, farmaceutica), nonché produzione e distribuzione di energia (centrale elettriche, impianti di smaltimento e riciclaggio rifiuti). Tali categorie sono individuate dal "Censimento dell'industria e dei servizi", a cura dell'ISTAT.
COS	Addetti alle costruzioni	Discreta	Numero di addetti nel settore dell'edilizia pubblica e privata. Vengono censiti gli addetti per unità locale, per cui consideriamo i cantieri aperti ed in corso compresi nella cella. Tali categorie sono individuate dal "Censimento dell'industria e dei servizi", a cura dell'ISTAT.

*continua* alla pagina seguente..

## 5. LO STUDIO DELLA PERIFERIA ORIENTALE DI ROMA

---

Tabella 5.2: continua dalla pagina precedente

Codice	Descrizione	Tipo	Note
CAS	Addetti al credito, assicurazioni e servizi a imprese	Discreta	Numero di addetti nel settore del terziario nell'ambito dei servizi legali, assicurativi, finanziari e di consulenza in generale.
PAS	Addetti a pubblica amministrazione e servizi	Discreta	Numero di addetti nel settore del terziario nell'ambito della pubblica amministrazione e di altri servizi pubblici e privati.
PAC	Costruzioni per usi produttivi ultimate	Continua	Misurazione del volume occupato da costruzioni ultimate a supporto di attività produttive.
TAC	Costruzioni per usi terziari ultimate	Continua	Misurazione del volume occupato da costruzioni adibite ad attività di terziario.

## 5.2.2 Osservazioni

### 5.2.2.1 Distanze da centri di livello urbano

Per quanto riguarda le variabili DCO, DTL, DUN, DFM e DHO, l'individuazione del "centroide" della cella segue queste linee guida:

- il centroide è il centro geometrico della cella, se questa è uniformemente edificata;
- il centroide è il centro geometrico del nucleo insediativo, nel caso in cui la cella sia solo parzialmente occupata da un solo nucleo insediativo;
- il centroide è il punto risultante dalla composizione dei baricentri dei nuclei insediativi presenti nella cella, nel caso in cui la cella sia parzialmente occupata e siano individuabili diversi nuclei insediativi.

La distanza è quella metrica, misurata su mappa seguendo il più breve percorso lungo la rete stradale. C'è da notare che la rete di trasporto è stata assunta omogenea, in modo tale da considerare identiche le caratteristiche dei diversi tratti stradali. Questa semplificazione ha certamente senso su una scala urbanistica come quella del nostro caso di studio, mentre avrebbe meno fondamento ad un livello di dettaglio maggiore.

#### 5.2.2.2 Grado di urbanizzazione

La classificazione delle aree rispetto alle quattro variabili CON, SEM, FOR e URB, che rappresentano diversi gradi di completamento dei tessuti insediativi urbani, fa riferimento al grado di definizione o compiutezza percentuale di tre fattori:

- A. il disegno di suolo (strade, piazze, elementi ordinatori della struttura urbana, servizi);
- B. la maglia fondiaria (lottizzazione);
- C. il tessuto edilizio (percentuale di lotti edificati).

Tale valutazione ha significato soprattutto a scala urbanistica, di un intero quartiere o una sua larga parte, mentre perde significato se applicata a un ambito ristretto a pochi lotti ed edifici o ad uno solo.

Si noti che il grado di compiutezza dei diversi tessuti insediativi prescinde dall'uso che li caratterizza; l'unica relazione fra i due ordini di variabili è quella per cui, globalmente:

$$URB + CON + SEM + FOR = RES + PRO + SUR + SLO \quad (5.1)$$

Le superfici di una cella, eterogenee per destinazioni d'uso, vengono attribuite all'una o all'altra delle quattro variabili URB, CON, SEM, FOR se superano o meno determinate soglie percentuali per ciascuno dei tre fattori

A, B, C individuati:

$$\text{URB} \leftarrow (A < 50\%) \wedge (B < 50\%) \wedge (C < 25\%) \quad (5.2)$$

$$\text{FOR} \leftarrow (50\% \leq A < 75\%) \wedge (50\% \leq B < 75\%) \wedge (25 \leq C < 50\%) \quad (5.3)$$

$$\text{SEM} \leftarrow (75\% \leq A < 100\%) \wedge (75\% \leq B < 100\%) \wedge (50 \leq C < 75\%) \quad (5.4)$$

$$\text{CON} \leftarrow (A = 100\%) \wedge (B = 100\%) \wedge (75\% \leq C < 100\%) \quad (5.5)$$

### 5.2.2.3 Edifici residenziali

Riguardo agli edifici facenti parti di zone la cui superficie territoriale viene attribuita alla variabile RES, va precisato che le unità immobiliari destinate ad usi non residenziali (e.g. appartamenti dedicati ad uffici, negozi o studi di professionisti) non vengono conteggiate nelle variabili ABO e ABN.

## 5.2.3 Stato dinamico

In base a queste osservazioni, le variabili che possono far parte del vettore di stato appartengono alle categorie<sup>4</sup> 1, 3, 4b e 4c (con l'eccezione di VER), per cui:

$$\begin{aligned} v(c) = & (\text{POP}, \text{ABO}, \text{ABN}, \text{RES}, \text{PRO}, \text{SUR}, \text{SLO}, \text{VUO}, \dots \\ & \dots, \text{PAG}, \text{COM}, \text{TCO}, \text{CAS}, \text{PAS}, \text{PAC}, \text{TAC}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

---

<sup>4</sup>si veda l'elenco presentato nella sezione 5.2.1.

Ad una prima indagine le variabili della categoria 4a sarebbero egualmente idonee per l'inserimento in  $v(c)$ , ma la loro definizione non sembra abbastanza chiara, dovendosi questa rifare a concetti come il disegno del suolo, la maglia fondiaria ed il tessuto edilizio. Tali concetti hanno una chiara definizione nell'ambito del dominio concettuale dell'urbanistica, ma in questa sede sono difficilmente manipolabili, avendo a disposizione solo dati aggregati privi di ogni informazione riguardante la distribuzione spaziali degli usi del suolo. Questa situazione porterebbe a delle regole di aggiornamento poco chiare, con tutte le conseguenze che ne potrebbero derivare nella fase di interpretazione della dinamica del sistema.

#### 5.2.4 Parametri locali esogeni

Le variabili adatte a far parte del vettore  $w(c)$  sono quelle appartenenti alla categoria 2 assieme alla variabile VER facente parte dalla categoria 4c:

$$w(c) = (DCO, DUN, DHO, DTL, DFM, VER) \quad (5.7)$$

La scelta è motivata dal fatto che grandezze di questo tipo hanno un ruolo più plausibile, all'interno del modello, se si ammette che la loro dinamica sia esogena. Ovviamente questa scelta andrebbe fatta in un secondo tempo, in funzione della tipologia di processi di trasformazione urbana che si intendono modellare, in modo da rendere la seconda scelta propedeutica alla prima. Tuttavia, nel nostro caso possiamo sin da ora osservare che

tali distanze hanno a che fare con grandi poli di rilevanza urbana, oggetti la cui dinamica è oggettivamente esogena, dal punto di visto meramente urbanistico. Stesso discorso può applicarsi alla variabile VER, dato che la maggior parte del verde attrezzato è di competenza dell'Amministrazione Comunale, un attore – o agente, volendo usare una definizione che sottende una sua possibile modellazione – dai comportamenti (e.g. processi decisionali) troppo complicati, per trovare spazio nel progetto realizzato dalla presente tesi.

## **5.3 I Processi di trasformazione urbana**

### **5.3.1 Descrizione preliminare**

L'insieme dei processi di trasformazione che intendiamo inserire nel modello è il seguente:

1. Costruzione di un edificio residenziale
2. Costruzione di un centro commerciale
3. Occupazione di una residenza
4. Abbandono di una residenza
5. Conversione d'uso di un terreno agricolo in edificabile
6. Creazione di una attività commerciale

7. Creazione di una attività di terziario

Per cui diremo che  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7\}$  ed identificheremo i processi secondo l'ordine appena esposto.

**5.3.2 Osservazioni**

Per quanto riguarda la trasformazione  $\alpha_2$ , con “centro commerciale” si intende un complesso commerciale di rilevanza urbana, composto da una o più attività di vendita al pubblico la cui utenza provenga da più di un cella del sistema oltre quella di appartenenza. La trasformazione comprende anche l'occupazione dell'edificio e la creazione dell'attività commerciale o del complesso di attività che in tale sede si svolgono, in quanto questo genere di complessi solitamente viene costruito per conto della compagnia che intende utilizzarlo commercialmente e non per offrirlo in locazione o vendita.

Per quanto riguarda  $\alpha_3$ , con il termina “occupazione” si intende sia l'affitto che l'acquisto di una residenza (e.g. un appartamento all'interno di un condominio).

A differenza di quanto avviene in  $\alpha_2$ , la “creazione di una attività commerciale locale” relativa alla trasformazione  $\alpha_6$  comprende sia la fase di acquisto/locazione dello spazio entro cui sorgerà l'attività (e.g. gli spazi situati al pian terreno di un edificio residenziale costruito a seguito di un



evento di tipo  $\alpha_1$ ), che la creazione dell'attività commerciale vera e propria. In ogni caso non modelliamo l'acquisizione dello spazio, ad esempio prevedendo una regola che modifichi il numero di appartamenti disponibili ABN, dato che in tale variabile non sono stati originariamente conteggiati, durante la raccolta dei dati, gli appartamenti per usi non prettamente residenziali; lo stesso discorso si applica peraltro alle attività di terziario del processo  $\alpha_7$  (e.g. studi medici privati, servizi creditizi e notarili, ecc.).

### 5.3.3 Regole di aggiornamento dello stato

**Definizione 5.1** (Costruzione di un edificio residenziale). *La regola di aggiornamento per la costruzione di un edificio residenziale (processo  $\alpha_1 \in A$ ) è la seguente:*

$$ABN \rightarrow ABN + \Delta n \quad (5.8)$$

$$VUO \rightarrow VUO - (\Delta s_1 + \Delta s_2) \quad (5.9)$$

$$RES \rightarrow RES + \Delta s_1 \quad (5.10)$$

$$SLO \rightarrow SLO + \Delta s_2 \quad (5.11)$$

*un edificio o complesso di edifici comprendente un numero complessivo di abitazioni ed occupante una certa superficie  $(\Delta s_1 + \Delta s_2) \leq VUO$  viene costruito. Le residenze sono disponibili per essere occupate tramite vendita o locazione per uso residenziale, commerciale o uffici (eventi di tipo  $\alpha_3$ ,  $\alpha_6$  e  $\alpha_7$ ).*

**Definizione 5.2** (Costruzione di un centro commerciale). *La regola di ag-*

## 5. LO STUDIO DELLA PERIFERIA ORIENTALE DI ROMA

---

*giornamento per la costruzione di un centro commerciale di livello urbano (processo  $\alpha_2 \in A$ ) è la seguente:*

$$VUO \rightarrow VUO - (\Delta s_1 + \Delta s_2) \quad (5.12)$$

$$SUR \rightarrow SUR + \Delta s_1 \quad (5.13)$$

$$SLO \rightarrow SLO + \Delta s_2 \quad (5.14)$$

$$TAC \rightarrow TAC + \Delta V \quad (5.15)$$

$$COM \rightarrow COM + \Delta n \quad (5.16)$$

*un edificio o complesso di edifici occupante una superficie complessiva  $(\Delta s_1 + \Delta s_2) \leq VUO$  ed un volume  $\Delta V$  viene costruito per ospitare una o più attività commerciali che danno impiego ad un totale di  $\Delta N$  individui.*

**Definizione 5.3** (Occupazione di una residenza). *La regola di aggiornamento per l'occupazione di una residenza è la seguente (processo  $\alpha_3 \in A$ ):*

$$ABN \rightarrow ABN - 1 \quad (5.17)$$

$$ABO \rightarrow ABO + 1 \quad (5.18)$$

$$POP \rightarrow POP + \Delta n \quad (5.19)$$

*una residenza in un condominio o villetta unifamiliare non occupata ( $ABN > 0$ ) viene venduta o data in locazione per un nucleo di  $\Delta n$  abitanti.*

**Definizione 5.4** (Abbandono di una residenza). *La regola di aggiornamento*

## 5. LO STUDIO DELLA PERIFERIA ORIENTALE DI ROMA

---

per l'abbandono di una residenza è la seguente (processo  $\alpha_4 \in A$ ):

$$ABN \rightarrow ABN + 1 \quad (5.20)$$

$$ABO \rightarrow ABO - 1 \quad (5.21)$$

$$POP \rightarrow POP - \Delta n \quad (5.22)$$

un nucleo abitativo occupato composto da  $\Delta n$  membri abbandona la propria residenza. La residenza viene messa in vendita oppure offerta in locazione.

**Definizione 5.5** (Conversione d'uso di un terreno agricolo). *La regola di aggiornamento per la conversione d'uso di un lotto di terreno agricolo (processo  $\alpha_5 \in A$ ) è la seguente:*

$$VUO \rightarrow VUO + \Delta s \quad (5.23)$$

$$PAG \rightarrow PAG - \Delta s \quad (5.24)$$

un appezzamento di terreno di superficie  $\Delta s \leq PAG$  viene convertito per uso edificabile.

**Definizione 5.6** (Creazione di una attività commerciale). *La regola di aggiornamento per la creazione di una attività di commercio di rilevanza locale (processo  $\alpha_6 \in A$ ) è la seguente:*

$$COM \rightarrow COM + \Delta N \quad (5.25)$$

$$TAC \rightarrow TAC + \Delta V \quad (5.26)$$

*una attività di commercio al dettaglio viene creata in uno spazio ricavato all'interno di un edificio residenziale o in un fabbricato ex-novo, per un volume complessivo pari a  $\Delta V$ .  $\Delta N$  individui vengono impiegati nell'attività in qualità di addetti.*

**Definizione 5.7** (Creazione di una attività di terziario). *La regola di aggiornamento per la creazione di una attività di terziario (processo  $\alpha_7 \in A$ ) è la seguente:*

$$\text{CAS} \rightarrow \text{CAS} + \Delta N \quad (5.27)$$

$$\text{TAC} \rightarrow \text{TAC} + \Delta V \quad (5.28)$$

*una attività di terziario viene creata in uno spazio ricavato all'interno di un edificio residenziale o in un fabbricato ex-novo, per un volume complessivo pari a  $\Delta V$ .  $\Delta N$  individui vengono impiegati nell'attività in qualità di addetti.*

## 5.4 Beni e risorse

### 5.4.1 Descrizione preliminare

Nel modello ciascuna distribuzione  $\beta^\alpha(c, \pi, t)$  è definita ad hoc, utilizzando opportune distribuzioni di probabilità empiriche per l'estrazione delle componenti  $\pi_i(\alpha)$  del vettore  $\pi(\alpha) = (\pi_1(\alpha), \dots, \pi_{n(\alpha)}(\alpha))$ . Nel caso del processo di trasformazione  $\alpha_1$  abbiamo introdotto un modello stock-flow<sup>5</sup> per

---

<sup>5</sup>preferiamo mantenere il neologismo inglese per adeguarci alla prassi del gergo accademico dell'Economia.

la domanda e l'offerta nel mercato immobiliare; altri processi seguono delle meccaniche più semplici. L'aver diversificato gli approcci in questo caso è una diretta conseguenza della volontà di porre il focus del caso di studio sul fenomeno di espansione immobiliare, dalla connotazione prettamente residenziale, che ha coinvolto la periferia orientale di Roma a partire negli ultimi anni.

### 5.4.2 Edificio residenziale e mercato immobiliare

Vediamo il metodo di generazione punto per punto.

1. Consideriamo l'automa durante l' $n$ -esimo passo di aggiornamento; l'intervallo di tempo in questione è  $[t_n, t_n + \Delta t)$ , dove  $t_n = (n - 1) \cdot \Delta t$ , e  $n = 1, 2, \dots$
2. Consideriamo il numero complessivo  $SH$  di abitazioni disponibili nell'automa, ovvero:

$$SH = \sum_{c \in \Gamma} v_{ABN}(c, t_n) \quad (5.29)$$

abbiamo abusato della notazione, denotando l'indice numerico della componente corrispondente –  $inv(c)$  – alla variabile del numero di abitazioni non occupate ABN, con il suo identificativo (e.g. avremmo dovuto scrivere, coerentemente con la definizione 5.6,  $v_3(c, t_n)$ ). Poiché lo stock esistente, in un mercato immobiliare, è costituito al

98% da abitazioni preesistenti, si approssima il livello di stock corrente con SH (ovvero le case in costruzione non concorrono, *nel breve periodo*, a modificare il prezzo di equilibrio della domanda - è una assunzione ragionevole in microeconomia).

3. Il prezzo di equilibrio del mercato è il valore  $R_0 = D(SH)$ . La funzione  $D$  è nota come *curva della domanda*, ed esprime la dipendenza fra il livello di stock del mercato (cioè il numero di prodotti disponibili sul mercato) ed il prezzo teorico a cui i consumatori sono disposti ad acquistare tali prodotti. Nel nostro caso esprime dunque il prezzo di una abitazione tipo. Analiticamente essa deve soddisfare la proprietà che  $\frac{dD(x)}{dx}$  sia crescente e a valori negativi. Ad esempio si potrebbe definire  $D$  nel seguente modo<sup>6</sup>:

$$D(x) = \begin{cases} (b - ax)^n & 0 \leq x \leq \frac{b}{a}, \text{ } n \text{ pari} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (5.30)$$

per  $b = a = 1$  e  $n = 2$  la forma della curva  $D$  è riportata nella figura 5.2.

4. Sia  $z$  il numero di abitazioni che un costruttore vuole edificare;  $z$  deve soddisfare l'equazione

$$CC(z) = R_0 \quad (5.31)$$

---

<sup>6</sup>  $a$  e  $b$  sono parametri da impostare: fissato il massimo livello di stock  $\frac{b}{a}$ ,  $b$  determina l'altezza della curva, per cui può essere considerato come il parametro collegato al livello della domanda e potrebbe essere controllato facendolo dipendere all'intensità di attivazione globale degli agenti della popolazione  $\mathfrak{B}^{\alpha_3}$ , dove  $\alpha_3$  = "occupazione di una residenza"

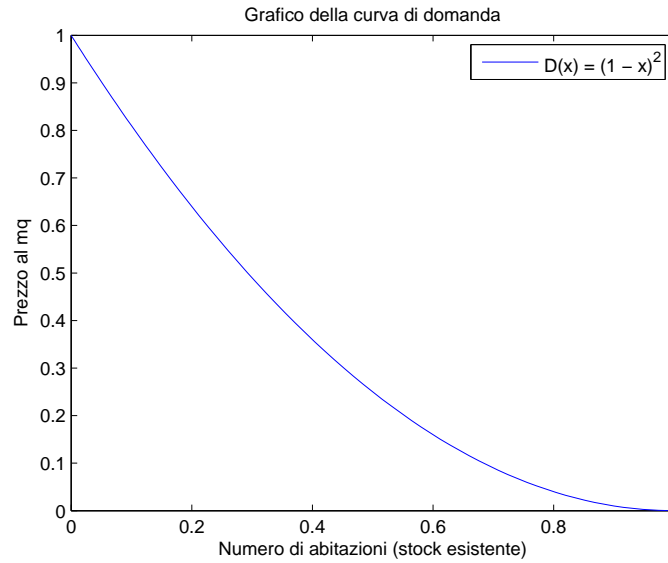


Figura 5.2: Curva della domanda  $D(x)$  (esempio)

.  $CC$  è detta funzione marginale dei costi di costruzione ed è definita come

$$CC(z) = \frac{dCT(z)}{dz} \quad (5.32)$$

dove  $CT$  è la *curva dei costi di costruzione totali*. L'andamento classico (dal punto di vista economico) per tali curve è riportato in figura 5.3. Possiamo ricavare la loro forma analitica utilizzando un set di punti come parametro da calibrare (ad esempio usando dati ISTAT relativi ai costi di costruzione totale di una edificio residenziale in funzione del numero di abitazioni), quindi ricavare  $CC$  mediante approssimazione polinomiale (ad es. con il metodo dei minimi quadrati), ed infine ricavare  $CT$  derivando  $CC$ . Nella figura i datapoints sono i parametri da calibrare.

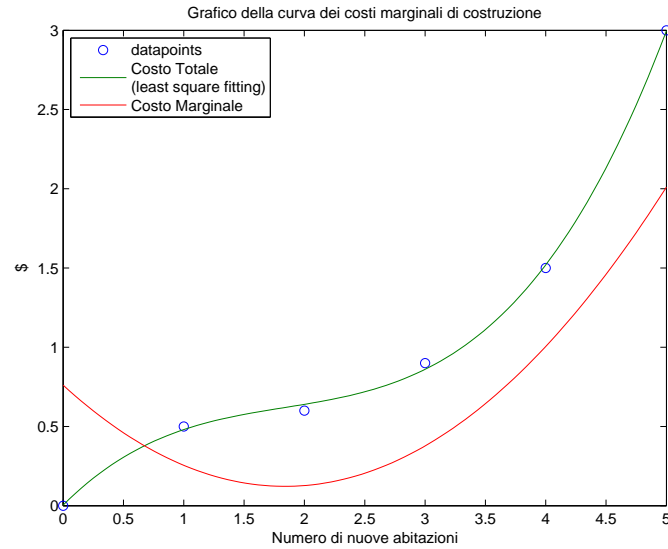


Figura 5.3: Curve dei costi  $CC(x)$  e  $CT(x)$  (esempio)

5. Se il sistema 5.31 ammette soluzione, sia  $z = HS_0$  la soluzione, e.g. tale che  $CC(HS_0) = R_0$ , allora possiamo dire che  $HS_0$  è il numero massimo di nuove abitazioni costruibili con profitto durante l'intervallo di tempo corrente da agenti costruttori, *all'interno dell'automa*.
6. Se la soluzione non è unica, posso scegliere con probabilità uniforme pari a  $\frac{1}{2}$  una delle due soluzioni. Adottare questa euristica è ragionevole fintanto che  $HS_0$  assume valori piccoli. In tal caso infatti non c'è molta differenza tra le due soluzioni in termini di grandezza relativa.
7. Se infine non vi sono soluzioni, poniamo  $HS_0 = 0$ . In tal caso eventuali agenti che decidano di costruire un edificio residenziale *abortiscono* tale decisione: il mercato impone un prezzo troppo basso per ottenere profitti e quindi tale attività non è redditizia. Secondo la legge della domanda e dell'offerta, in questo caso il mercato tenderà



ad aggiustare il prezzo di equilibrio  $R_0$ , per cui tale situazione non è patologica.

8. Consideriamo un agente della popolazione  $\mathfrak{B}^\alpha$  che decide di costruire un edificio residenziale nella generica cella  $c \in \Gamma$  nell'intervallo di tempo corrente. Il vettore di aggiornamento dello stato dinamico  $\mathbf{v}(c, t)$  è:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\boldsymbol{\pi}(\alpha_1)) = \\ = (0, 0, \underbrace{\Delta n}_{ABN}, 0, \dots, 0, \underbrace{\Delta s_1}_{RES}, \underbrace{\Delta s_2}_{SLO}, 0, \dots, 0, \underbrace{-(\Delta s_1 + \Delta s_2)}_{VVO}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

e contiene i valori che descrivono l'edificio che l'agente intende costruire. Facciamo le seguenti assunzioni di carattere urbanistico (in corsivo i nomi delle grandezze urbanistiche<sup>7</sup>):

- (a) La *superficie territoriale* dell'isolato in cui verrà costruito il palazzo è detta  $S_T$ .
- (b) I servizi locali che vengono costruiti all'interno dell'isolato sono esclusivamente parcheggi. La superficie dei servizi locali equivale alla quantità  $\Delta s_2$  che aggiorna la variabile della superficie per servizi di livello locale, SLO.
- (c) La *superficie fondiaria* che occupa il solo edificio residenziale è detta SF ed equivale alla quantità  $\Delta s_1$  che aggiorna la variabile della superficie ad uso residenziale RES.

---

<sup>7</sup>si veda [17], Titolo I, capo 2°, pp. 4-6.

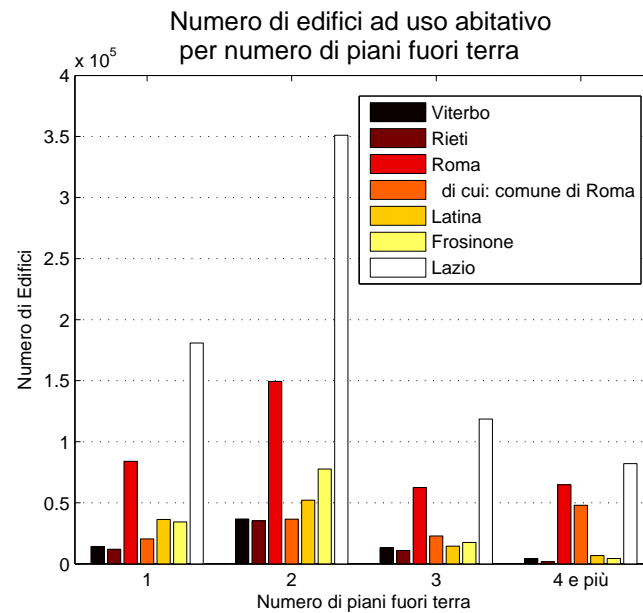


Figura 5.4: Istogramma della distribuzione empirica degli edifici residenziali per numero di piani fuori terra

- (d) La *superficie utile lorda* dell'edificio è la superficie complessiva di tutte le abitazioni dell'edificio, per tutti i piani dell'edificio (vengono quindi escluse dal conteggio le superfici di androni, cantine ecc.), ed è detta SUL.
- (e) Il costruttore segue la prescrizione del piano regolatore di destinare una superficie pari a metà della SUL dell'edificio ai parcheggi (e quindi ai servizi di livello locale).
- (f) La superficie media di una abitazione a Roma è ca. 80 mq.
- (g) Il numero di piani di un edificio residenziale a Roma segue la seguente distribuzione empirica riportata nell'istogramma in figura 5.4

9. Sia  $N$  il numero di abitazioni del nuovo edificio. Assumendo che

ciascuna abitazione sia grande 80 mq, calcoliamo  $SUL = 80 \cdot N$ .

10. Sia  $p$  il numero di piani del nuovo edificio. Allora il numero di abitazioni per piano  $\frac{SUL}{p} = \frac{80 \cdot N}{p}$ , in particolare per il pian terreno. Allora  $RES = \frac{80 \cdot N}{p}$ .

11. La superficie per servizi di livello locale è quindi<sup>8</sup>  $SLO = SUL/2 = 40 \cdot N$

12. A questo punto aggiungiamo il vincolo che  $RES + SLO \leq VUO$ , cioè

$$\begin{aligned} 40 \cdot \left( \frac{2 \cdot N}{p} + N \right) &\leq v_{VUO}(c, t) \\ 40 \cdot N \cdot \left( \frac{2}{p} + 1 \right) &\leq v_{VUO}(c, t) \\ 40 \cdot \frac{N \cdot (2 + p)}{p} &\leq v_{VUO}(c, t) \end{aligned} \quad (5.33)$$

da cui otteniamo la relazione

$$N \leq v_{VUO}(c, t) \cdot \frac{p}{40 \cdot (p + 2)} \quad (5.34)$$

13. A questo punto applichiamo il principio che il costruttore voglia massimizzare il profitto dalla costruzione del nuovo edificio. Il valore  $HS_0$  rappresenta il massimo numero di abitazioni costruibili con

---

<sup>8</sup>il coefficiente con cui moltiplichiamo la SUL per ottenere il valore di SLO è detto *carico urbanistico*; esso "esprime l'impegno indotto sui parcheggi dalle diverse destinazioni d'uso, distinto e classificato in: basso (CU/b), medio (CU/m), alto (CU/a)", *ibidem*, p. 4. Si noti che ci riferiamo alla tabella per le destinazioni d'uso a carico urbanistico basso, dato che la destinazione d'uso "Abitativa", secondo la classificazione vigente nel PRG, prevede al più tale classe.

profitto su tutto l'automa. Possiamo ricavare il massimo numero di abitazioni costruibili (con profitto) nella sola cella  $c$ , distribuendo il valore medio  $HS_0(t)$  tra tutte le celle per mezzo della funzione  $F^\alpha(c, t)$ . Definiamo

$$N_{max}(c, t) = HS_0(t) \cdot \frac{F^{\alpha_1}(c, t)}{T^{\alpha_1}(t)} \quad (5.35)$$

Utilizziamo una distribuzione di probabilità di Poisson di parametro  $N_{max}(c, t)$  per estrarre il valore di  $N$ :

$$\Pr\{N = k\} = e^{-N_{max}(c, t)} \cdot \frac{(N_{max}(c, t))^k}{k!} \quad (5.36)$$

14. A questo punto abbiamo due alternative:

- (a) Se il vincolo 5.34 viene rispettato dal valore che estraiamo, allora l'agente può costruire l'edificio ed i valori per aggiornare RES e SLO sono definiti ai punti 10 e 11.
- (b) Se il valore di  $N$  che estraiamo non rispetta 5.34 allora l'agente non può costruire l'edificio senza violare il vincolo. Possiamo adottare un euristica, ad es. far abortire all'agente la decisione di costruire (si trova in una cella in cui sarebbe profittevole costruire ma in cui non v'è più spazio edificabile a sufficienza), oppure fargli costruire al più un numero di abitazioni pari a  $\left\lfloor v_{VVO}(c, t) \cdot \frac{p}{p+2} \right\rfloor$ . L'euristica adottata nel modello prevede la prima delle due opzioni, quella del far abortire l'evento all'agente. L'informazione riguardante gli eventi abortiti di questo

tipo ci sarà utile per “stimare” la domanda di terreno edificabile; si veda la sottosezione 5.4.5 al riguardo.

### 5.4.3 Centro commerciale

Illustriamo un metodo per generare i valori di aggiornamento delle variabili: spazio vuoto (VUO); superficie per servizi di livello urbano (SUR); superficie per servizi di livello locale (SLO); volume di costruzioni commerciali (TAC); addetti al commercio (COM), nel caso un agente intraprenda la decisione di costruire un centro commerciale.

1. L'edificio che viene modellato in questo caso è un centro commerciale di livello urbano, così denominato poichè dotato di una certa rilevanza per la zona urbanistica (e.g. cella dell'automa) in cui viene costruito e per quelle ad essa vicine. Per tale motivo assumiamo che la destinazione d'uso del PRG<sup>9</sup> più adeguata per descrivere tale trasformazione sia quella delle "Grandi strutture di vendita" commerciali (dotate di una superficie di vendita di oltre 2500 mq.): il valore della superficie da destinare a parcheggi per tale classe di destinazione d'uso è allora pari a  $16mq./10mq.$  di SUL dell'edificio. Anche in questo caso considereremo valida l'assunzione per cui la superficie destinata ad uso di servizi di livello locale, contemplata dalla trasformazione urbanistica in atto, sia esclusivamente formata da par-

---

<sup>9</sup>si faccia riferimento a *ibidem*, p. 4.

cheggi. In tal modo potremo stimare il valore con cui aggiornare la variabile SLO a partire da una stima della SUL dell'edificio.

2. La SUL viene estratta con distribuzione normale. I parametri della media e deviazione standard relativi sono tratti dai dati dei negozi Ikea<sup>10</sup>.
3. Il numero di addetti viene estratto con distribuzione normale, centrata attorno all'indicatore del numero medio di addetti per unità locale; abbiamo fatto riferimento ai dati del censimento ISTAT riportati nella tabella 5.3; la distribuzione è quella relativa alla classe di addetti "250 e più" e all'attività economica "Commercio e riparazioni"<sup>11</sup>. Il valore di questo indicatore è pari a  $6617/15 = 441$  (con arrotondamento intero). Come varianza assumiamo un valore di pari a 441 – un ordine di grandezza inferiore – in modo tale da concentrare le estrazioni attorno al valore dell'indicatore<sup>12</sup>.
4. Il valore di  $100mc$ , utilizzato nell'ambito della definizione degli standard urbanistici, e noto come "Stanza", viene moltiplicato per il numero di addetti generati al punto 3. Tale valore va ad aggiornare la variabile TAC.
5. Estraiamo con distribuzione uniforme il numero  $p$  dei livelli dell'edificio destinati ad uso commerciale (non consideriamo quindi even-

---

<sup>10</sup>Si veda [6] a tal proposito.

<sup>11</sup>Per quanto riguarda l'associazione tra le classi di attività economica usate nel censimento dell'ISTAT e le effettive variabili urbanistiche che utilizziamo in questo caso di studio – individuate originariamente in [1], si veda ...

<sup>12</sup>eventuali *outliers* negativi vengono scartati, in questa e nelle altre estrazioni Gaussiane.

Classi di addetti	1 – 9	10 – 19	20 – 49	50 – 249	250 e più	Totale
Attività economiche						
	UNITÀ LOCALI					
Agricoltura e pesca (a)	450	8	5	5	-	468
Industria estrattiva	91	17	15	5	-	128
Industria manifatturiera	18611	1186	572	254	54	20677
Energia, gas e acqua	88	28	59	30	13	218
Costruzioni	9393	827	410	111	3	10744
Commercio e riparazioni	78114	1427	479	153	15	80188
Alberghi e pubblici esercizi	12157	513	156	84	5	12915
Trasporti e comunicazioni	4336	514	340	188	90	5468
Credito e assicurazioni	3934	530	247	116	44	4871
Altri servizi	42460	1213	570	356	66	44665
<b>TOTALE</b>	<b>169634</b>	<b>6263</b>	<b>2853</b>	<b>1302</b>	<b>290</b>	<b>180342</b>
	ADDETTI					
Agricoltura e pesca (a)	958	105	142	461	-	1666
Industria estrattiva	408	232	381	625	-	1646
Industria manifatturiera	44845	15784	16897	26305	36588	140419
Energia, gas e acqua	382	392	1976	3351	9791	15892
Costruzioni	24942	10985	12066	11294	925	60212
Commercio e riparazioni	161798	18448	13973	13827	6617	214663
Alberghi e pubblici esercizi	35059	6543	4595	7582	1760	55539
Trasporti e comunicazioni	12339	6799	10410	18424	89661	137633
Credito e assicurazioni	10958	7365	6908	13007	27577	65815
Altri servizi	87529	16126	17269	36105	30110	187139
<b>TOTALE</b>	<b>379218</b>	<b>82779</b>	<b>84617</b>	<b>130981</b>	<b>203029</b>	<b>880624</b>

Tabella 5.3: Unità locali e addetti per classe di addetti e settore di attività economica

tuali parcheggi entro o fuori terra inglobati nella struttura). Dividendo la SUL per  $p$  otteniamo il valore per aggiornare la variabile SUR

6. Se il vincolo  $SUR + SLO \leq VUO$  è rispettato dai valori estratti, l'evento ha effettivamente luogo, altrimenti esso abortisce. Anche in questo caso è preferibile questa euristica, in modo tale da avvalerci dell'informazione del numero di eventi abortiti per "stimare" la domanda di terreno edificabile: si veda la generazione dei valori di aggiornamento per il processo  $\alpha_5$  in 5.4.5.

#### 5.4.4 Abbandono e occupazione di una residenza

Per entrambi i processi  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$ , l'unica quantità che dobbiamo generare in maniera casuale è il numero di componenti del nucleo familiare che occupa o abbandona una abitazione. Eseguiamo una estrazione casuale avvalendoci della distribuzione empirica tratta dai dati riportati nella tabella 5.4.

#### 5.4.5 Conversione di suolo agricolo

Consideriamo le trasformazioni relative alla costruzione di un edificio residenziale ( $\alpha_1$ ) e alla costruzione di un centro commerciale ( $\alpha_2$ ): abbiamo previsto la possibilità che un agente abortisca la decisione di aggiornare lo



	Numero di componenti (persone)					
	1	2	3	4	5	6 o più
Province						Totale
Viterbo	31235	31786	24744	21690	4833	1025
Rieti	17869	15692	11030	10991	3048	768
Roma	389269	411622	311701	274657	65532	13777
di cui: comune di Roma	292692	301153	218198	179233	39979	7897
Latina	34380	43852	38023	42735	12349	3347
Frosinone	38388	43958	35132	41061	12723	3619
Lazio	511141	546910	420630	391134	98485	22536
						1990836

Tabella 5.4: Famiglie per numero di componenti - Lazio (dettaglio provinciale) - Censimento 2001.

stato della cella in cui si trova con un  $(\alpha, \pi, c)$ -evento, nel caso in cui il vettore  $\pi$  presenti dei valori che violano i vincoli di integrità delle regole di aggiornamento (in particolare, il vincolo di sfruttamento del terreno edificabile della cella VUO). Sulla base di questo fenomeno, possiamo sfruttare l'informazione contenuta nel vettore  $\pi$  di ciascuno di tali eventi, interpretando la somma di tutti le superfici territoriali estratte, come un indicatore della domanda di terreno edificabile da assoggettare all'espansione del tessuto urbano. Se  $E$  è l'insieme dei vettori  $\pi$  degli eventi abortiti per le trasformazioni  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , durante l' $n$ -esimo intervallo, cioè se

$$E_n = E(t_n, t_n + \Delta t) = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots\} \quad (5.37)$$

tale che,  $\forall i$ ,

$$\pi_i = \pi_i(\alpha_1) = (\pi_{ABN}, \pi_{RES}, \pi_{SLO}, \pi_{VUO})$$

oppure

$$\pi_i = \pi_i(\alpha_2) = (\pi_{SUR}, \pi_{SLO}, \pi_{VUO}, \pi_{COM}, \pi_{TAC})$$

allora definiamo la *domanda di terreno edificabile* come:

$$GD(t) = \sum_{\pi \in E_n} \pi_{VUO} \quad (5.38)$$

dove ricordiamo dalla 5.9 e dalla 5.12 che  $VUO = RES + SLO$  se stiamo considerando un edificio residenziale e  $VUO = SUR + SLO$  se stiamo considerando un centro commerciale urbano. A questo punto possiamo applicare la tecnica usata nel punto 13 della sottosezione 5.4.2. Il valore  $\Delta_s$  della

variabile aleatoria  $S$  che è la superficie da detrarre a PAG per aggiornare VUO viene estratto con densità esponenziale

$$p(\Delta s) = \mu e^{-\mu \Delta s} \quad (5.39)$$

dove  $0 < \mu \leq 1$  è t.c.  $\frac{1}{\mu} = GD_{max}(c, t)$ , e  $GD_{max}(c, t)$  è definito come

$$GD_{max}(c, t) = GD(t) \cdot \frac{F^{\alpha_5}(c, t)}{T^{\alpha_5}(t)} \quad (5.40)$$

se  $\Delta s \leq v_{PAG}(c, t)$ , allora l'evento di tipo  $\alpha_5$  nella cella  $c$  può avvenire.

Ci aspettiamo che questo meccanismo favorisca l'espansione verso le aree periferiche. Infatti è plausibile ipotizzare che la maggior parte degli eventi abortiti si avrà in quelle celle, in cui gli agenti valutano favorevole compiere il loro evento, ma in cui le risorse disponibili siano esaurite. Queste celle, nel caso di studio di Roma, saranno le celle consolidate vicine alla parte centrale della città. È altresì plausibile ipotizzare, che le zone in cui si concentreranno gli eventi di conversione, per contro, saranno quelle periferiche e parzialmente urbanizzate della periferia, data la disponibilità di terreno agricolo. Per poter affermare che queste ipotesi conducono ad una espansione urbana verso le zone periferiche, ci aspettiamo dunque di osservare, nelle simulazioni, un aumento dei valori di  $F^{\alpha_1}$  o  $F^{\alpha_2}$  o entrambe per tali zone.

Classi di addetti	1 – 9	10 – 19	20 – 49	Totale
Variabili urbanistiche	(valori assoluti)			
IND	45635	16408	19254	81297
COS	24942	10985	12066	47993
COM	161798	18448	13973	194219
TCO	12339	6799	10410	29548
CAS	10958	7365	6908	25231
PAS	122588	22669	21864	167121
TOTALE	378260	82674	84475	545409

Tabella 5.5: Unità locali per classe di addetti e variabile dinamica (fonte ISTAT, VIII Censimento Generale dell'industria e dei servizi)

#### 5.4.6 Attività commerciale locale

1. Per determinare il numero di addetti, determiniamo inizialmente la classe di addetti entro cui ricade l'attività commerciale che stiamo andando a generare. La classe viene determinata per mezzo di una estrazione casuale con la distribuzione empirica riportata nella tabella 5.5 (si faccia riferimento alla riga relativa alla variabile degli addetti al commercio COM). Si noti che le classi prese in considerazioni corrispondono solo al comparto delle piccole e medie imprese.
2. Il numero di addetti per l'attività commerciale viene estratto usando una distribuzione discreta di probabilità uniforme, sull'intervallo di valori individuato dalla classe di addetti individuata.
3. Per quanto riguarda il volume occupato, si moltiplica il numero di addetti per il volume di 100 mc, come già descritto in precedenza.

#### 5.4.7 Attività di terziario

Si procede come nella sottosezione precedente, con la differenza che la distribuzione empirica per estrarre la classe di addetti viene calcolata facendo riferimento alla riga di CAS, sempre nella tabella 5.5.

### 5.5 Intesità dei processi di Poisson

#### 5.5.1 Integrazione nella rete di trasporti

Non resta che completare la definizione della funzione  $F^\alpha$  data in 4.21 con la definizione dell'indice di integrazione  $i(c)$  della generica cella  $c$  nella rete di trasporti. Di norma questo genere di indice viene definito su un grafo etichettato<sup>13</sup>  $G = (V(G), E(G))$  che rappresenta la rete di trasporti metropolitana. Nel nostro caso di studio non abbiamo a disposizione sufficienti dati per definire il grafo  $G$ , pregiudicando la possibilità di definire un indicatore di questo tipo.

Possiamo ciò nonostante definire un indicatore meno raffinato, facendo riferimento alle variabili delle distanze DTL, DUN, DFM, DCO e DHO, che sono componenti del vettore  $w(c, t)$ .

---

<sup>13</sup>un grafo è etichettato quando è definita una funzione  $f : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$  che ad ogni arco  $e = (v_1, v_2) \in E(G) \cap \binom{V(G)}{2}$  associa un numero  $f(e)$ . Quando il grafo  $G$  modella una rete stradale tali numeri sono i tempi di percorrenza medi di ciascun tratto stradale, cui in  $G$  è associato un arco.

**Definizione 5.8** (Integrazione di una cella nella rete di trasporti). *Consideriamo le variabili urbanistiche*

$$\{DUN, DFM, DTL, DCO, DHO\} \quad (5.41)$$

corrispondenti alle componenti del vettore dei parametri di controllo  $\mathbf{w}(c, t)$  (si vedano la 3.2 e la 5.7):

$$(w_1(c, t), w_2(c, t), w_3(c, t), w_4(c, t), w_5(c, t))$$

La funzione  $i, i : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^+$ , che ad ogni cella  $c \in \Gamma$  associa il valore

$$i(c) = \prod_{i=1}^5 h_i^t(w_i(c, t)) \quad (5.42)$$

è detta indice di integrazione di  $c$  nella rete di trasporti, se  $\forall i = 1, \dots, 5$  la funzione  $h_i^t : \mathbb{R} \rightarrow [0, 2]$  ha le seguenti proprietà:

- (i). è una funzione decrescente;
- (ii).  $h_i^t(x) = 0$  per  $x > \max_{c \in \Gamma} \{w_i(c)\}$  e  $h(0) = 2$ ;
- (iii).  $h_i^t$  assume valore unitario nella media campionaria dei valori della  $i$ -esima variabile, su tutto l'insieme di celle  $\Gamma$ , ovvero:

$$h_i^t \left( \frac{1}{|\Gamma|} \cdot \sum_{c \in \Gamma} w_i(c, t) \right) = 1 \quad \forall i = 1, \dots, 5 \quad (5.43)$$

Intuitivamente la funzione  $h_i^t$  serve a pesare il contributo della  $i$ -esima variabile delle distanze  $\{DUN, DFM, DTL, DCO, DHO\}$ : se il valore di  $w_i(c, t)$  è inferiore alla media campionaria  $\frac{1}{|\Gamma|} \cdot \sum_{c \in \Gamma} w_i(c, t)$ , poiché abbiamo a che fare con delle distanze, vuol dire che la cella è più vicina alla destinazione considerata (ricordiamo che DUN è la distanza dalla più vicina università, DFM dalle stazioni ferroviarie, DHO dagli ospedali, e via dicendo), rispetto alla media delle altre celle. In tal caso si avrà perciò  $1 \leq h_i^t(w_i(c, t)) \leq 2$ , per cui  $h_i^t(w_i(c, t))$  contribuirà ad alzare il valore di  $i(c)$ , nella produttoria 5.42. Se invece  $w_i(c, t) > \frac{1}{|\Gamma|} \cdot \sum_{c \in \Gamma} w_i(c, t)$ , la cella deve essere “percepita” come lontana da un agente, per cui il contributo della variabile  $i$ -esima dovrà abbassare il valore complessivo di  $i(c)$  nella produttoria 5.42: a tale scopo perciò si ha  $0 \leq h_i^t(w_i(c, t)) < 1$ .

## Capitolo 6

### Implementazione e test

Illustriamo in questo capitolo alcuni semplici risultati, prodotti dalle simulazioni che abbiamo eseguito. Il modello è stato implementato al calcolatore utilizzando MATLAB®, lo standard *de-facto* per la programmazione scientifica ed ingegneristica. MATLAB è una suite prodotta dalla The MathWorks, inc., che comprende un ambiente di sviluppo interattivo, un linguaggio d'alto livello per il calcolo scientifico ed una vastissima libreria di funzioni.

La presentazione di un modello matematico per sistemi complessi richiede l'applicazione preliminare ad un caso di studio semplice, al fine di studiare la consistenza del modello stesso. A questo scopo abbiamo presentato nel capitolo 5 le variabili urbanistiche relative alla periferia orientale di Roma. Non bisogna però confondere questo capitolo con uno studio a sé stante, sui fenomeni di trasformazione avvenuti in quella zona di Roma,



negli ultimi decenni e tuttora in atto. Infatti, sebbene i risultati proposti ne mostrino la validità, l'obiettivo di lungo respiro per questo genere di modelli rimane lo studio dei fenomeni di trasformazione di un sistema urbano *reale*, cosa che sarebbe tutt'altro che priva di significato, se si disponesse di un numero sufficiente di dati per la calibrazione dei tantissimi parametri presenti nelle equazioni che governano la dinamica del sistema.

Vi sono anche altre questioni relative all'implementazione del modello, tra le quali la scelta del numero di componenti principali nello script di classificazione ed il problema del bootstrap dell'algoritmo, che per motivi di completezza meritano di essere menzionati.

## 6.1 Implementazione

### 6.1.1 Bootstrap dell'algoritmo di simulazione

L'algoritmo di simulazione descritto nella sezione 4.3 presuppone che, sin dal primo passo di simulazione, il sistema si trovi in uno stato iniziale consistente, in cui cioè il numero di agenti attivi  $M_A^\alpha(0) = \sum_{c \in \Gamma} M_A^\alpha(c, 0)$ ,  $\forall \alpha \in A$  sia approssimabile col suo valor medio  $M^\alpha \cdot (1 - P^\alpha(\bar{\Gamma}, 0))$ . Questa condizione non sarebbe rispettata se facessimo iniziare la simulazione con tutti gli agenti nello stato passivo. Sorge allora il problema della determinazione del valor medio  $M^\alpha \cdot (1 - P^\alpha(\bar{\Gamma}, 0))$ . La procedura del bootstrap dell'algoritmo risolve questa situazione; l'idea è quella di eseguire un certo numero di passi di dinamica dei processi di decisione delle popolazioni

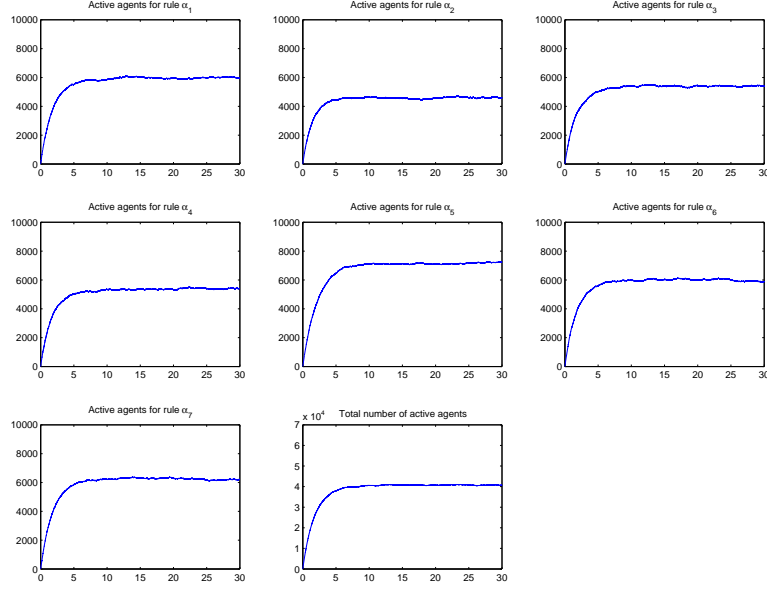


Figura 6.1: Attivazione degli agenti durante la fase di bootstrap

di agenti, senza che le decisioni di aggiornamento prese dai singoli agenti alterino lo stato della cella. Il sistema deve girare a vuoto fino a che il numero di agenti non raggiunge un'andamento stazionario, per ciascuna popolazione. Nella figura 6.1 è mostrato l'andamento delle quantità  $M_A^\alpha(t)$  durante questa dinamica: si può vedere che per  $t > 5$  il sistema si trova nelle condizioni richieste.

### 6.1.2 Parametri di classificazione

Nella formula 4.19 della forza di attrazione  $g^\alpha(c, t)$  il parametro  $r \leq d$  indica il numero di componenti principali effettivamente considerato. Abbiamo visto che la determinazione di  $r$  è eseguita con diverse euristiche,

ma la regola di base dettata dal buon senso richiede di scegliere almeno  $r$  componenti in modo tale che la trasformata  $\mathbf{Y}^r = [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_r] \in \mathbb{R}^{n,r}$ , costituita dai primi  $r$  score 4.14, abbia una varianza pari ad almeno il 50% della varianza della matrice originale  $\mathbf{X}$ . Poiché ciascun autovalore della matrice di covarianza di  $\mathbf{X}$  è la varianza del rispettivo score, allora per determinare il valore di  $r$  basta considerare la somma cumulativa degli autovalori; nel nostro caso si vede dalla tabella 6.1 che prendere  $r = 2$  basta a soddisfare questa condizione.

### 6.1.3 Organizzazione del codice

Il modello consta di più di 40 M-file, per un numero complessivo di linee di codice pari a 1036, valore tutt'altro che piccolo, considerato che MATLAB è un linguaggio d'alto livello dotato di una libreria per la manipolazione delle matrici molto potente. Il codice relativo all'algoritmo di simulazione è stato organizzato in un M-file contenente lo script di livello superiore, e 4 M-file di livello intermedio contenenti altrettante funzioni che si occupano di portare a termine uno specifico compito all'interno della simulazione; essi sono distinguibili dagli altri M-file del modello, avendo la prima lettera maiuscola:

- `Simulation.m`, lo script principale, di livello superiore nella gerarchia delle chiamate di funzione, in cui vengono dichiarate le strutture dati globali;

## 6. IMPLEMENTAZIONE E TEST

---

Autovalore	Varianza	Varianza cumulativa
9.228508e+000	34%	34%
4.325911e+000	16%	50%
2.863066e+000	10%	60%
2.164207e+000	8%	68%
1.277556e+000	4%	73%
1.104480e+000	4%	77%
9.005794e-001	3%	80%
8.735548e-001	3%	84%
8.004078e-001	2%	87%
6.508095e-001	2%	89%
6.092328e-001	2%	91%
4.630536e-001	1%	93%
3.897025e-001	1%	95%
3.113862e-001	1%	96%
2.385676e-001	0%	97%
1.786763e-001	0%	97%
1.368821e-001	0%	98%
1.218140e-001	0%	98%
1.005988e-001	0%	99%
8.152132e-002	0%	99%
7.910568e-002	0%	99%
3.613772e-002	0%	99%
3.051788e-002	0%	99%
1.778854e-002	0%	99%
1.493380e-002	0%	99%
1.000606e-003	0%	100%
1.803341e-032	0%	100%

Tabella 6.1: Varianza spiegata dalla trasformata di Hotelling di  $X$

- `Setup.m`, la funzione di livello intermedio in cui sono poste tutte le dichiarazioni ed inizializzazioni delle variabili necessarie agli altri script. Tra queste vi sono l'istanziatura dell'automa cellulare, la definizione dei parametri di controllo del modello e delle variabili necessarie al funzionamento degli altri script;
- `Bootstrap.m`, la funzione di livello intermedio in cui è implementata la fase di bootstrap del sistema. Questo script fa uso di un'altra funzione definita in uno degli M-file di livello intermedio, `Evolution.m`;
- `Evolution.m`, la funzione deputata all'implementazione dell'evoluzione vera e propria del sistema (e.g. la sequenza di passi di aggiornamento dell'automa cellulare). Essa può essere invocata in modo da simulare la sola dinamica dei processi decisionali degli agenti, ma non la dinamica del sistema (e.g. gli  $\alpha$ -eventi che hanno luogo in  $\Gamma$  non alterano lo stato del sistema), oppure nella modalità "normale" in cui viene simulata la dinamica completa di tutto l'automa. La prima modalità viene utilizzata nel bootstrap.
- `Storage.m`, la funzione deputata al salvataggio dei dati del sistema al termine della dinamica, per la successiva elaborazione.

MATLAB è fondamentalmente un linguaggio procedurale; per mettere a disposizione le variabili utilizzate da più di un M-file in maniera elegante e per gestire la grande quantità di parametri del modello in modo razionale,

si è fatto ricorso a variabili globali<sup>1</sup> in cui memorizzare i dati principali, in particolare:

- *simulation* è uno *structure array* contenente dati relativi alla simulazione corrente;
- *myCA* è un oggetto della classe *CellularAutomata* e contiene tutte le informazioni dell'automa cellulare (e.g.  $\forall c \in \Gamma$ , i vettori  $v(c)$  e  $w(c)$ );
- *param* è uno *structure array* contenente tutti i parametri del modello, tra cui le informazioni relative ai processi decisionali delle popolazioni di agenti;
- *store* è uno *structure array* in cui vengono copiati tutti i dati che si intendono salvare al termine della simulazione;
- *DEBUG* è uno *structure array* contenente le direttive relative alle istruzioni di *debug* del programma.

Per quanto riguarda l'implementazione dell'automa cellulare è stato utilizzato il supporto alla programmazione ad oggetti<sup>2</sup>. In questo modo è possibile manipolare l'oggetto *myCA* sia come uno *structure array*<sup>3</sup>, che come una matrice numerica<sup>4</sup>, che in entrambi i modi.

---

<sup>1</sup>in MATLAB una variabile viene dichiarata globale antemponendo la parola chiave *global* al suo nome, in un linea di codice apposita, all'inizio di ciascun M-file in cui si vuole utilizzare tale variabile.

<sup>2</sup>presente a partire dalla versione 5 di MATLAB.

<sup>3</sup>il codice di tre lettere di ciascuna variabile urbanistica può essere usata per referenziare la corrispondente colonna della matrice di dati multivariati *X*, utilizzando la sintassi del tipo di dato *structure*, e.g. *myCA.ABN* ritorna la colonna relativa alla variabile ABN

<sup>4</sup>e.g. *myCA(1)* referenzia la prima riga della matrice, ovvero il vettore  $v(c_1)$ .

## 6.2 Scenari di espansione urbana

Al fine di svolgere una indagine preliminare su alcuni comportamenti generali del sistema urbano studiato, il modello è stato collaudato eseguendo diverse simulazioni. La configurazione iniziale delle funzioni  $G^\alpha$  e  $F^\alpha$  è riportata nelle figure 6.2 e 6.3, rispettivamente; in ciascun grafico, l'intervallo di valori assunti dalla grandezza graficata è associato ad una scala di colori ordinati secondo la temperatura della tonalità: al minimo valore è associato un colore blu intenso, al massimo è associato il rosso scuro. È da notare che la definizione proposta per le due funzioni sembra classificare bene le zone periferiche da quelle centrali, soprattutto in merito ad alcuni processi come quelli di costruzione edile. In particolare per la trasformazione  $\alpha_5$ , la conversione da uso del suolo agricolo ad edificabile, il classificatore basato sulla PCA riesce a discriminare le zone con disponibilità di terreno interstiziale (VUO) o agricolo (PAG), dalle zone consolidate in cui non è più possibile – completamente o quasi – operare nuovi interventi di costruzione.

Nella prima serie di simulazioni i parametri di controllo dei processi di decisione assumono tutti lo stesso valore; l'intensità di attivazione di tutte le popolazioni è mantenuta costante,

$$\Lambda_A^\alpha(t) = \Lambda_L^\alpha = \Lambda_D^\alpha = \Lambda_U^\alpha = 1, \forall \alpha \in A \quad (6.1)$$

e ciascuna popolazione comprende 100 agenti. In questa prima serie di simulazioni è stato fatto variare il tempo di simulazione; le prime dinamiche

## 6. IMPLEMENTAZIONE E TEST

---

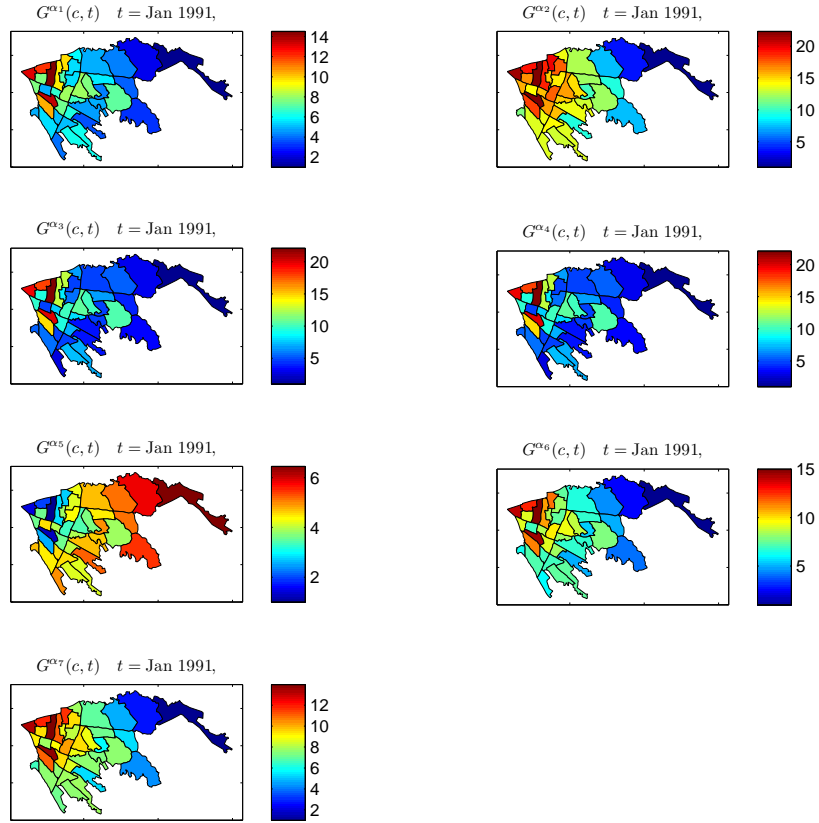


Figura 6.2: Configurazione iniziale del sistema urbano dei valori della funzione  $G^{\alpha}(c, t)$   $c \in \Gamma, \alpha \in A$ .



## 6. IMPLEMENTAZIONE E TEST

---

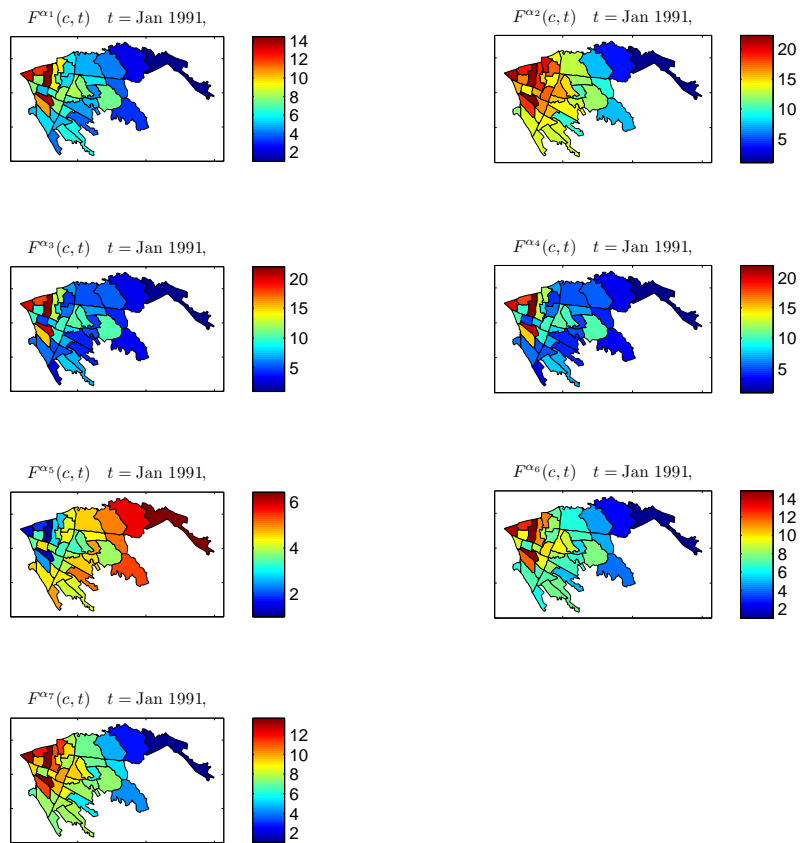


Figura 6.3: Configurazione iniziale del sistema urbano dei valori della funzione  $F^\alpha(c, t)$   $c \in \Gamma, \alpha \in A$ .

hanno durata di un mese, le seconde un anno e le ultime un anno ed un mese. Per quanto riguarda le popolazioni di agenti, una euristica soddisfacente per la scelta della cardinalità di ciascuna di esse, potrebbe essere selezionare un valore di ordine di grandezza pari alla popolazione reale, o a qualche altro dato statistico rilevante<sup>5</sup>; in seguito, abbiamo perciò deciso di aumentare il numero di agenti delle popolazioni  $\alpha_3$  ed  $\alpha_4$ , relative all'acquisto e all'abbandono di una abitazione, a  $10^4$  agenti, per avvicinarci ad un valore realistico<sup>6</sup>. Per la seconda tranches di simulazioni la durata della dinamica è stata aumentata a 3 anni; inoltre le intensità globali di attivazione, diffusione, abbandono e aggiornamento degli agenti sono state diversificate tra le varie popolazioni, in modo da dare più peso ad alcune trasformazioni.

La tabella 6.2 riassume i valori dei parametri scelti per la seconda tranches di simulazioni. Per quanto riguarda la prima serie di simulazioni, ci siamo chiesti se in un breve periodo la distribuzione di ciascuna variabile cambiasse significativamente, tra una simulazione e l'altra. Per raffrontare le distribuzioni di una variabile urbanistica ottenute nelle varie simulazioni, è stato disegnato un grafico in cui il valore medio di ciascuna distribuzione è riportato assieme alle barre d'errore, aventi ampiezza pari alla deviazione standard della distribuzione. Sono riportati di seguito i grafici relativi alle variabili ABN (numero di abitazioni non occupate) e PAG (suolo agricolo e paesaggistico). In entrambi i grafici sono confrontati i risultati

---

<sup>5</sup>e.g. numero di imprese costruttrici per le trasformazioni di tipo edilizio, e via dicendo.

<sup>6</sup>di certo un valore realistico dovrebbe essere dell'ordine di  $10^6$  agenti per tali popolazioni.

## 6. IMPLEMENTAZIONE E TEST

Processo	Descrizione	Popolazione	$\Lambda(t)$	$\Lambda_L^\alpha$	$\Lambda_D^\alpha$	$\Lambda_U^\alpha$
$\alpha_1$	Costruzione edificio residenziale	100	1/30	1/10	2	1/30
$\alpha_2$	Costruzione centro commerciale	100	1/30	1/10	2	1/120
$\alpha_3$	Occupazione abitazione	10000	1/5	1	5	1/5
$\alpha_4$	Abbandono abitazione	10000	1/5	1	5	1/5
$\alpha_5$	Conversione d'uso del suolo	100	1/15	1/2	5	1/60
$\alpha_6$	Creazione attività commerciale locale	2000	1/10	1/2	3	1/10
$\alpha_7$	Creazione attività di terziario	2000	1/10	1/2	3	1/10

Tabella 6.2: Parametri di simulazione

ottenuti da dinamiche lunghe 1 mese, 12 mesi e 25 mesi, rispettivamente. Come è prevedibile, si iniziano a notare differenze fondamentali tra i valori medi e la deviazione standard di ciascuna distribuzione, quando consideriamo le dinamiche lunghe 25 mesi; al contrario, si fatica a notare delle differenze tra le distribuzioni della stessa variabile, dopo dinamiche della durata di appena 1 mese.

Analizzando invece i risultati della seconda tranches di simulazioni, si osserva una dinamica significativa dal punto di vista urbanistico, in linea con le ipotesi fatte sull'espansione edilizia della zona oggetto di studio. Nelle prime simulazioni l'intensità di attivazione di tutte le popolazioni

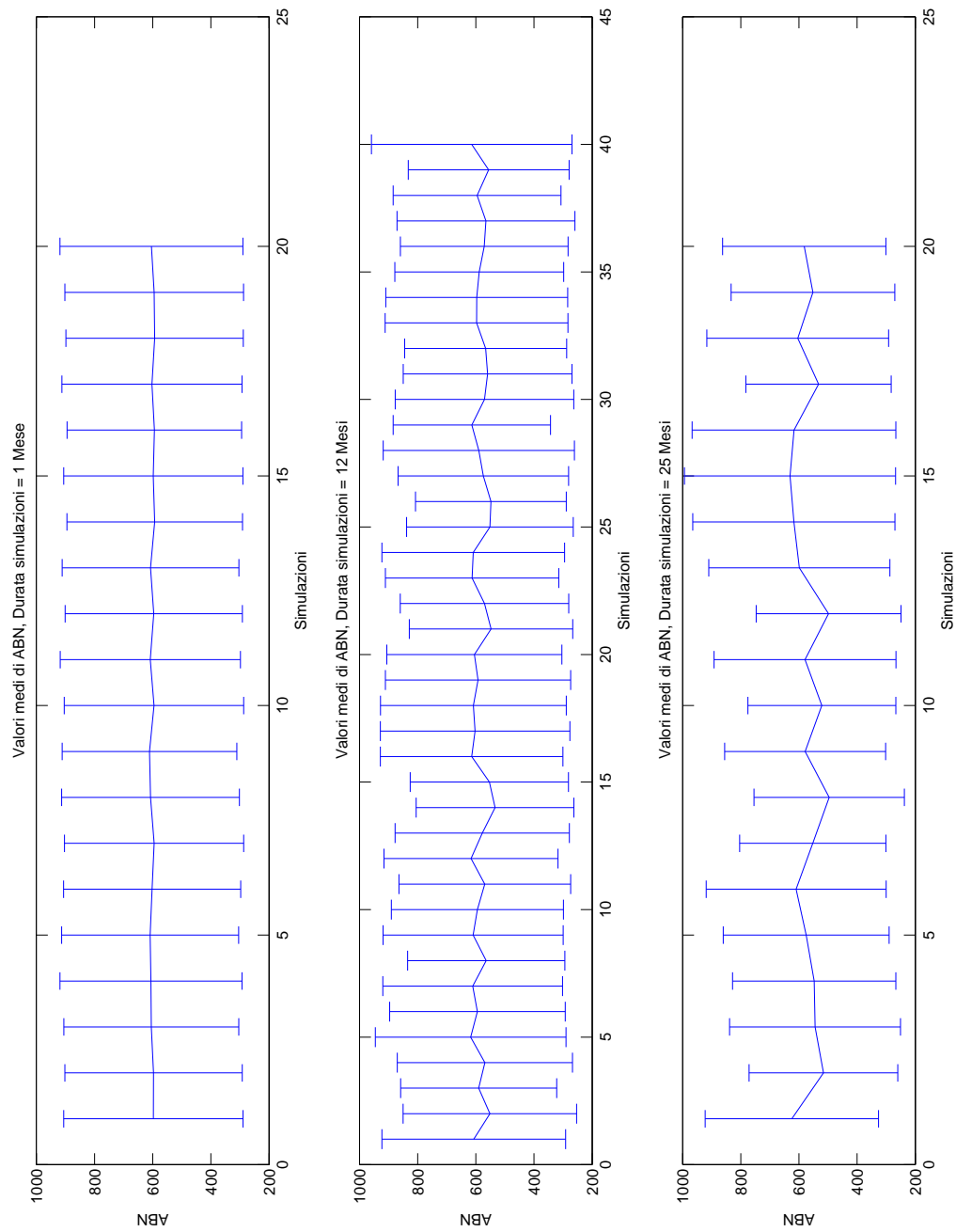


Figura 6.4: Barre d'errore dei valori medi della variabile ABN

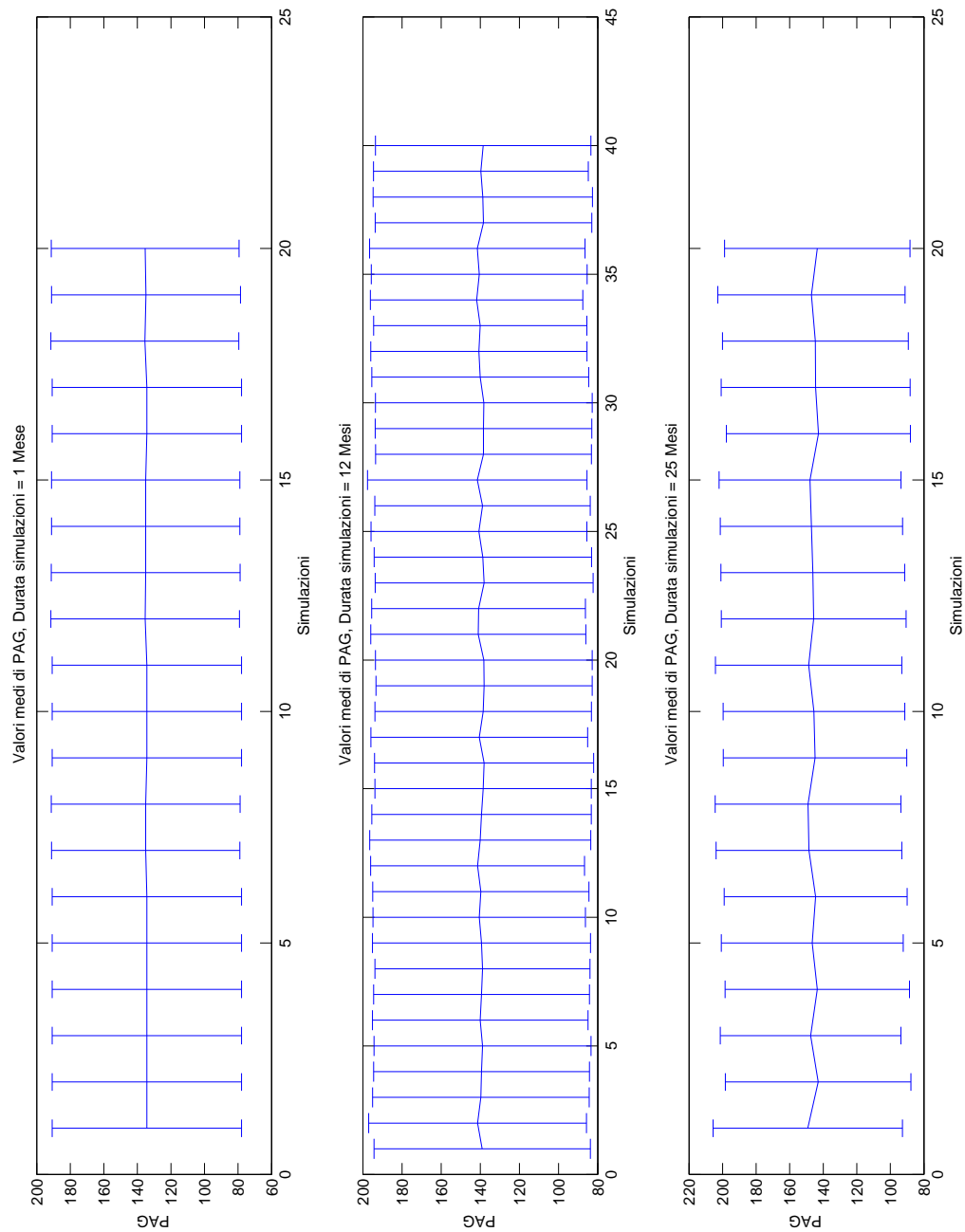


Figura 6.5: Barre d'errore dei valori medi della variabile PAG

è stata lasciata costante; complessivamente  $G^\alpha$  e  $F^\alpha$  mostrano, in queste simulazioni, di seguire un andamento costante o una crescita lineare molto lenta, dopo una prima fase di assestamento. È possibile vedere questo comportamento nella figura 6.6, dove è stato disegnato il grafico della dinamica della forza di attrazione complessiva del sistema,  $\sum_{c \in \Gamma} G^\alpha(c, t)$ ,  $\forall \alpha \in A$ .

Per il processo  $\alpha_1$  (costruzione di edifici residenziali) l'andamento delle quantità  $F^{\alpha_1}$  e  $G^{\alpha_1}$  assume la forma di una crescita esponenziale, non appena l'intensità di attivazione di alcune popolazioni viene fatta crescere durante la dinamica. In figura 6.7 è mostrato questo fenomeno, considerando la somma  $\sum_{c \in \Gamma} G^{\alpha_1}(c, t)$ : si tenga presente che i valori lungo l'asse delle  $y$  hanno scala logaritmica.

La tabella 6.3 riassume le configurazioni del parametro  $\Lambda_A^\alpha(t)$  per cui si è assistito a questo fenomeno di crescita esponenziale, durante le simulazioni. La crescita di  $\Lambda_A^\alpha(t)$  è sempre lineare, e la tabella mostra, per ciascun  $\alpha \in A$ , il rapporto  $\frac{\Lambda_A^\alpha(t_1)}{\Lambda_A^\alpha(t_0)}$ , dove  $t_0$  è il tempo iniziale della dinamica e  $t_1$  il tempo finale. Si noti che la crescita esponenziale di  $F^{\alpha_1}$  e  $G^{\alpha_1}$  avviene

	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$
$\frac{\Lambda_A^{\alpha_1}(t_1)}{\Lambda_A^{\alpha_1}(t_0)}$	1	1	3	1	1	1	1
$\frac{\Lambda_A^{\alpha_2}(t_1)}{\Lambda_A^{\alpha_2}(t_0)}$	3	1	5	1	1	1	1
$\frac{\Lambda_A^{\alpha_3}(t_1)}{\Lambda_A^{\alpha_3}(t_0)}$	3	1	5	1	3	1	1

Tabella 6.3: Configurazioni del parametro di controllo  $\Lambda_A^\alpha(t)$

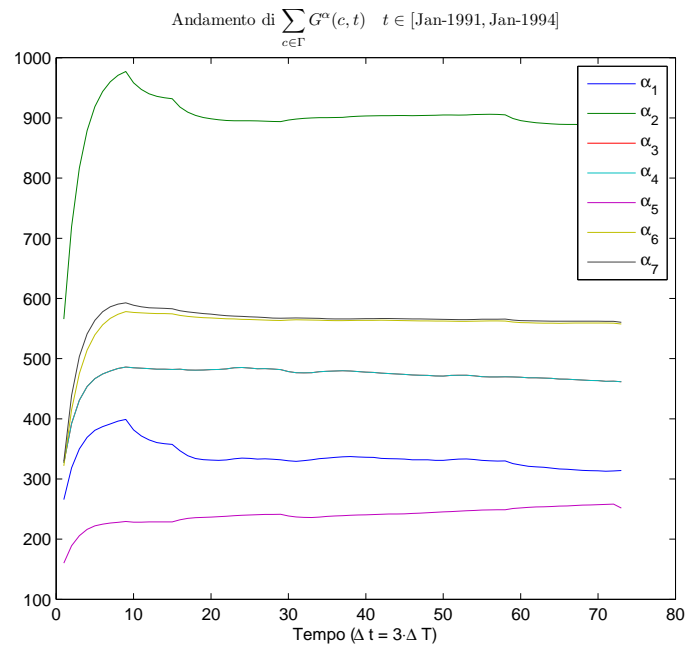


Figura 6.6: Andamento tipico della forza d'attrazione del sistema per la prima serie di simulazione ( $\Lambda_A^\alpha = \text{cost}$ ).

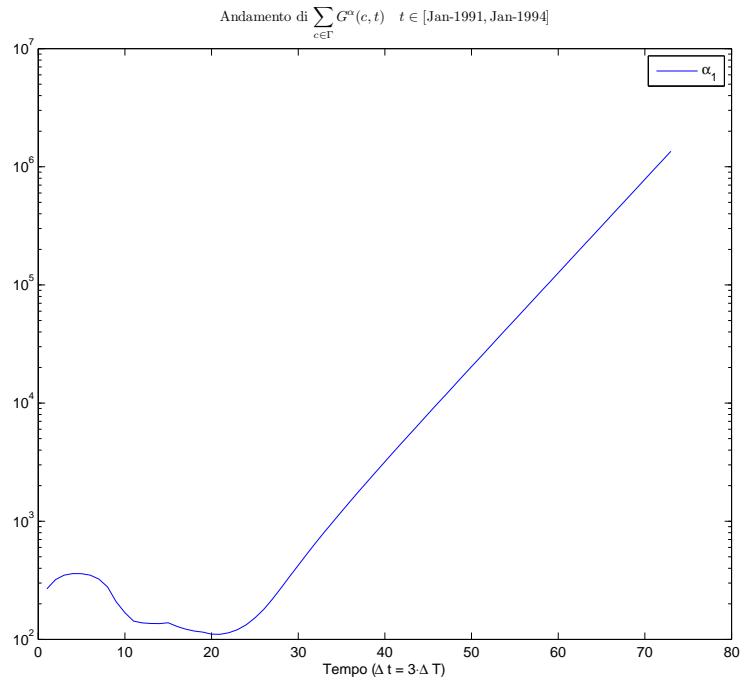


Figura 6.7: Crescita esponenziale della forza di attrazione del sistema  $\sum_{c \in \Gamma} G^{\alpha_1}(c, t)$ .



anche quando  $\Lambda_A^{\alpha_1}(t_1) = \Lambda_A^{\alpha_1}(t_0)$ , cioè quando  $\Lambda_A^{\alpha_1}(t) = \text{cost}$ , per tutta la dinamica.

Una interpretazione possibile di questo fenomeno, dal punto di vista urbanistico, è che nel sistema la disponibilità di alloggi non riesce mai a soddisfare la crescente domanda di abitazioni, dovuta al fatto che  $\Lambda_A^{\alpha_3}(t)$  aumenta nel tempo<sup>7</sup>, e di conseguenza diviene sempre più conveniente costruire case. D'altra parte il numero di case che viene costruito non riesce mai a soddisfare la domanda di abitazioni (l'offerta di alloggi non è al passo con la domanda di abitazioni), per cui il sistema "reagisce" aumentando ancora di più la forza di attrazione per gli agenti costruttori, generando così il fenomeno della crescita esponenziale.

Questa interpretazione è supportata dai seguenti fatti:  $HS_0(t)$ , ovvero il numero di nuove abitazioni costruibili con profitto, secondo il mercato immobiliare, non diminuisce mai, rimane anzi ad un livello fisso, dopo un transiente iniziale di crescita. Nelle dinamiche della figura 6.6 questo non avviene, e  $HS_0(t)$  segue – coerentemente – la dinamica della popolazione complessiva del sistema, cioè di  $\sum_{c \in \Gamma} v_{POP}(c, t)$ . In secondo luogo – e questo sembra un fatto ancora più importante – il numero di abitazioni disponibili nel sistema decresce fino a valori prossimi allo zero, segno che la domanda di abitazioni è talmente alta da esaurire continuamente lo stock disponibile sul mercato immobiliare. Le figure 6.8, 6.9 e 6.10 riportano i grafici relativi: le *run* della prima riga sono quelle in cui  $F^{\alpha_1}$  e  $G^{\alpha_1}$  cresco-

---

<sup>7</sup>intuitivamente, più agenti in cerca di casa si attivano per unità di tempo, maggiore sarà la richiesta di abitazioni non occupate.

no in maniera esponenziale, mentre le restanti sono quelle in cui ciò non avviene.

Le figure 6.11, 6.12, 6.13 e 6.14 mostrano i valori di  $G^\alpha(c, t)$  su ciascuna  $c \in \Gamma$ , al termine della dinamica in cui si osserva il fenomeno della crescita esponenziale di  $G^{\alpha_1}$  ed  $F^{\alpha_1}$ . Si può interpretare la distribuzione di  $G^{\alpha_1}$  alla luce delle osservazioni appena fatte: la disponibilità di terreno edificabile è la causa principale che rende una cella attraente per costruirvi case; questo non è contraddetto dal grafico di  $G^{\alpha_3}$  (gli eventi di tipo  $\alpha_3$ , ricordiamo, sono l'acquisto o occupazione di una residenza) 6.13; infatti è ragionevole pensare che le zone centrali consolidate risultino, anche in presenza di una scarsità cronica di abitazioni nel mercato immobiliare, quelle in cui sia più attraente, per un agente, scegliere d'andare ad abitare. L'espansione urbana verso le zone periferiche è un effetto collaterale del fatto che le zone più interessanti per acquistare casa siano sature, mentre quelle meno interessanti (e.g. poco centrali, mal collegate) abbiano disponibilità di abitazioni, non appena un agente di  $\mathfrak{B}^{\alpha_1}$  decide di costruire un edificio residenziale. In tal caso, di fondamentale importanza è calibrare correttamente il parametro di controllo dell'intensità globale del processo di diffusione degli agenti di  $\mathfrak{B}^{\alpha_3}$ , nonché quello della vita media, in modo tale che sia assicurato un flusso di agenti che, dalle zone centrali, in cui avvengono la maggior parte delle attivazioni – ed in cui non è possibile acquistare casa – si spostano sistematicamente verso le zone periferiche.

Nella figura 6.15 è possibile vedere l'andamento dei loadings fattoriali delle variabili del numero di abitazioni libere, della superficie residenziale,

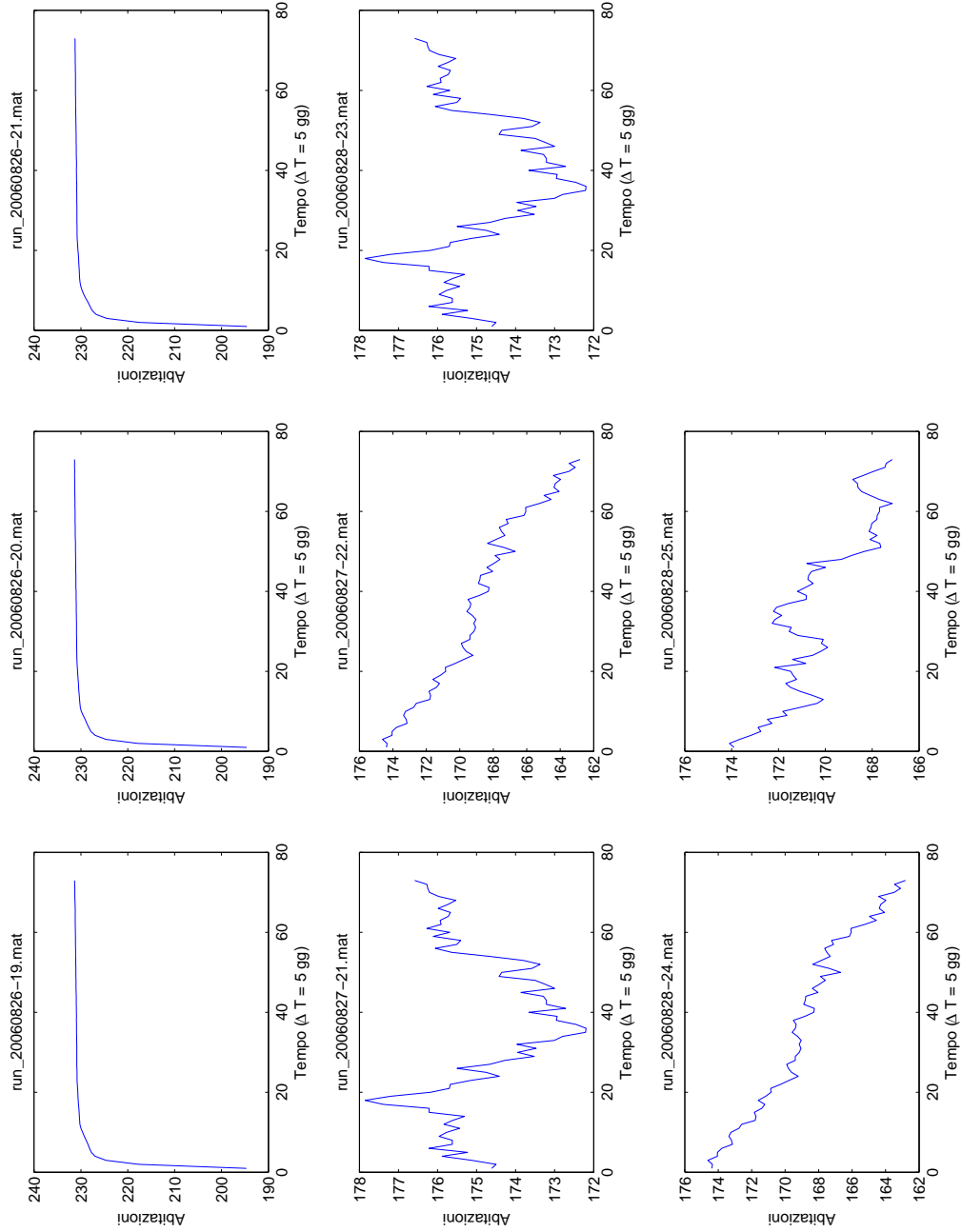


Figura 6.8: Dinamica del livello di stock del mercato immobiliare  $HS_0(t)$

## 6. IMPLEMENTAZIONE E TEST

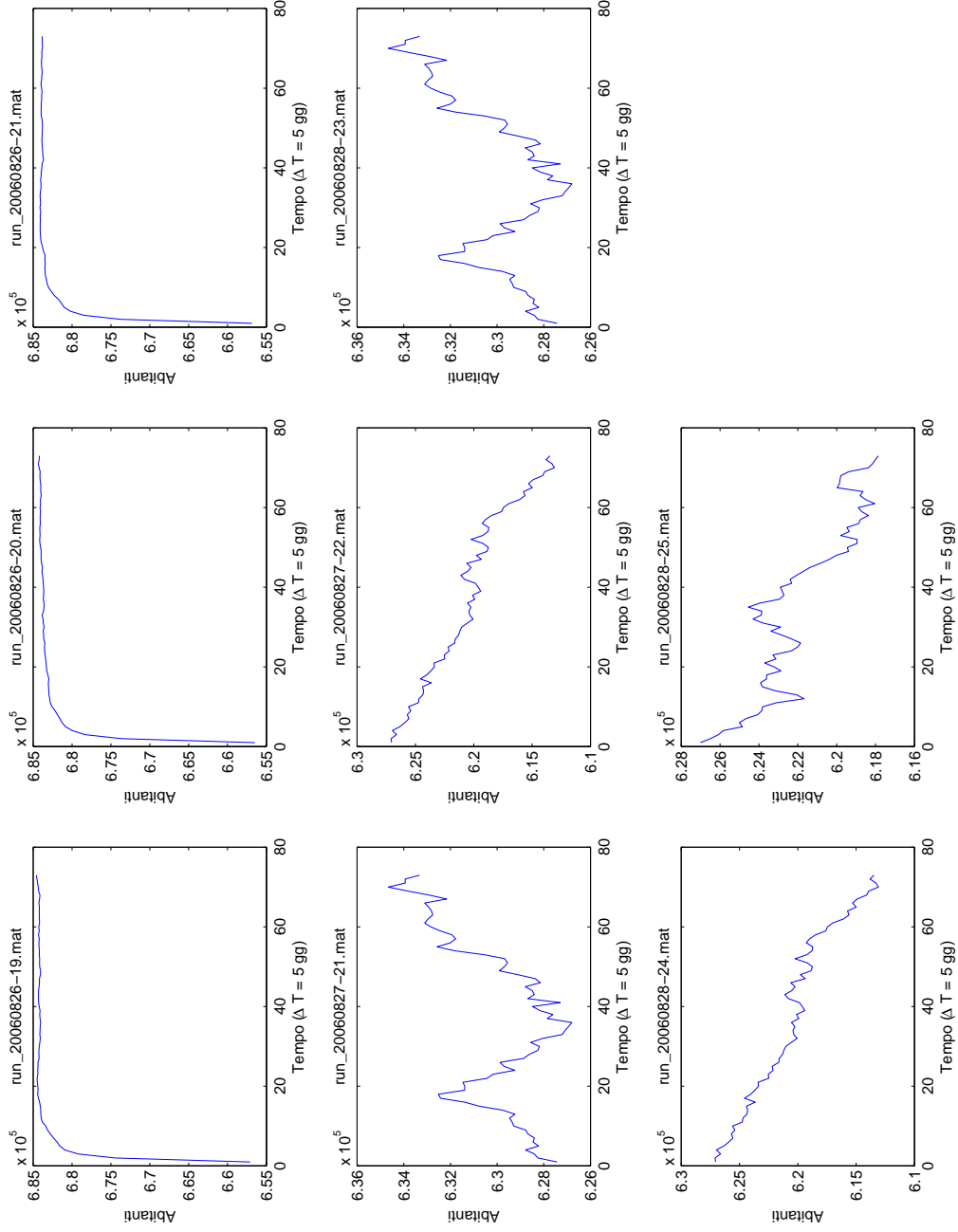


Figura 6.9: Dinamica della popolazione del sistema  $\sum_{c \in \Gamma} v_{POP}(c, t)$

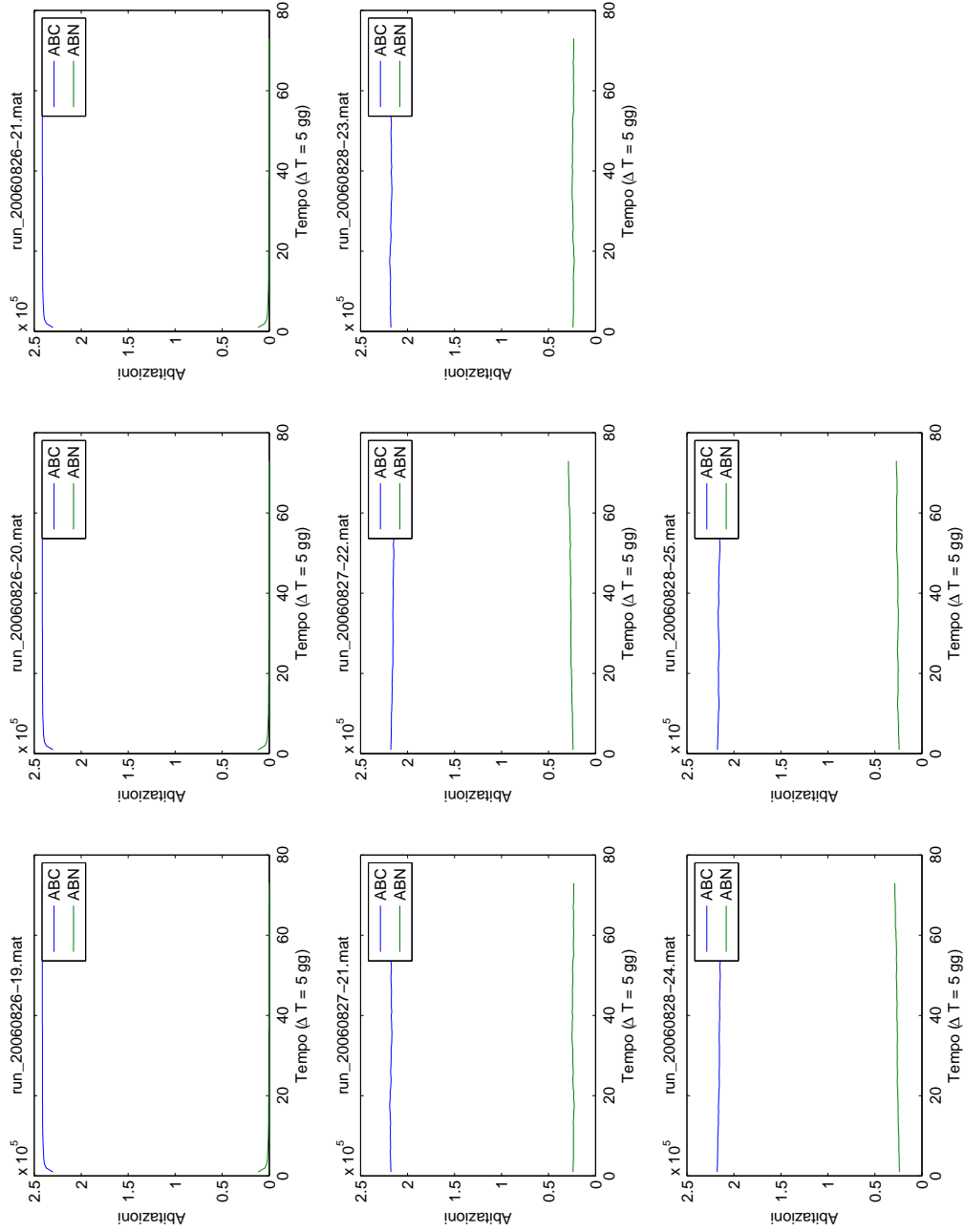


Figura 6.10: Dinamica delle mercato immobiliare del sistema

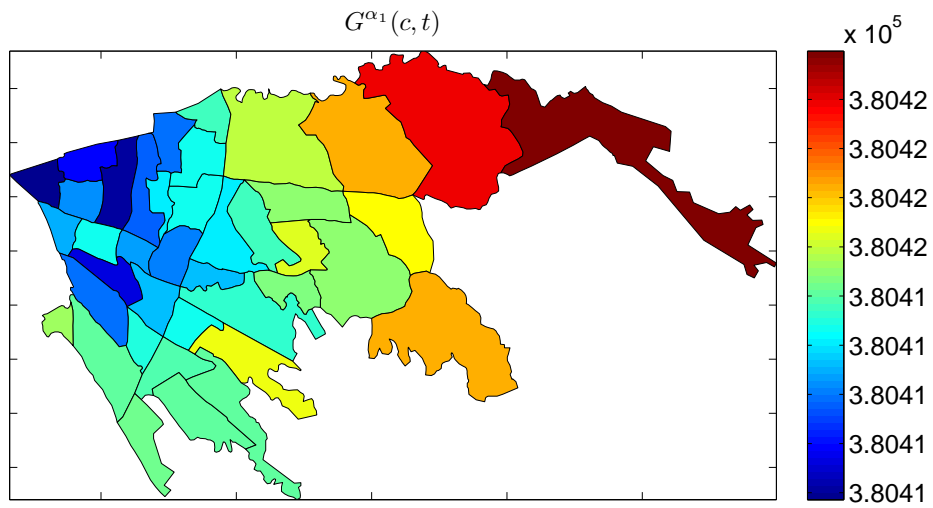


Figura 6.11: Valori finali di  $G^{\alpha_1}(c)$  (dinamica con crescita esponenziale)

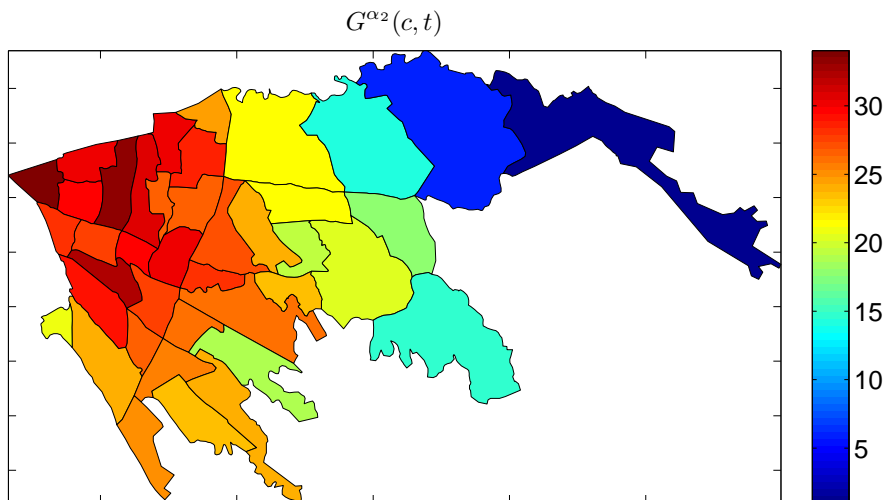


Figura 6.12: Valori finale di  $G^{\alpha_2}(c)$  (dinamica con crescita esponenziale)

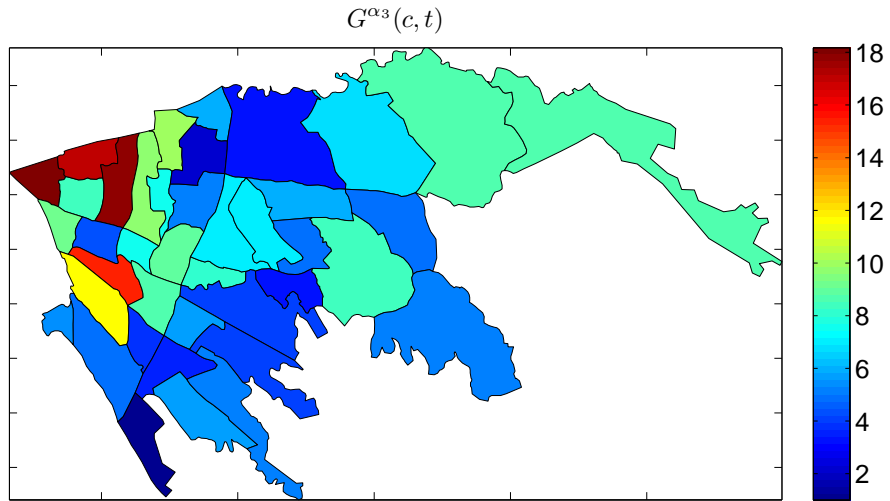


Figura 6.13: Valori finale di  $G^{\alpha_3}(c)$  (dinamica con crescita esponenziale)

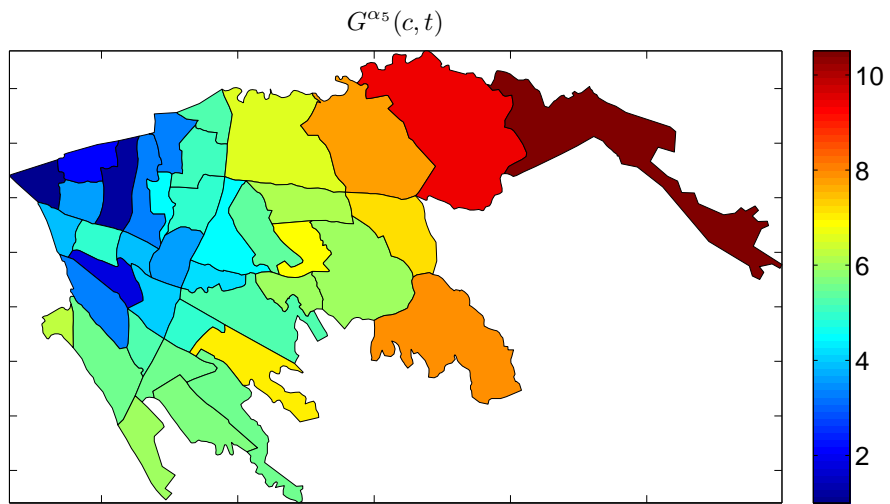


Figura 6.14: Valori finale di  $G^{\alpha_5}(c)$  (dinamica con crescita esponenziale)

della superficie per servizi di livello locale e della superficie edificabile vuota (rispettivamente, ABN, RES, SLO e VUO), rispetto ai fattori della prima e seconda componente principale. Ricordiamo che il loading di una variabile (appartenente alla matrice di dati  $X$ ) con una sua combinazione lineare standardizzata (ovvero una variabile della trasformata di Hotelling  $Y$ ) è la correlazione tra le due variabili. Le dinamiche si riferiscono a due simulazioni in cui si osserva il fenomeno sopra descritto (il nome della run è run\_20060826-19) e in cui tale fenomeno non si osserva (chiamata run\_20060828-25). Mentre le correlazioni tra ciascuna delle quattro variabili ed il secondo fattore non subiscono grandi differenze tra le due dinamiche, si può riscontrare una forte diversità tra l'andamento della correlazione di ABN e del primo fattore, nelle due dinamiche.

Infine, nelle figure 6.16 e 6.17, sono messe a confronto le dinamiche per le stesse variabili su tre celle dell'automa in cui avvengono eventi di costruzione di edifici. Si noti la sostanziale differenza nella dinamica di ABN, in linea con l'interpretazione urbanistica proposta.



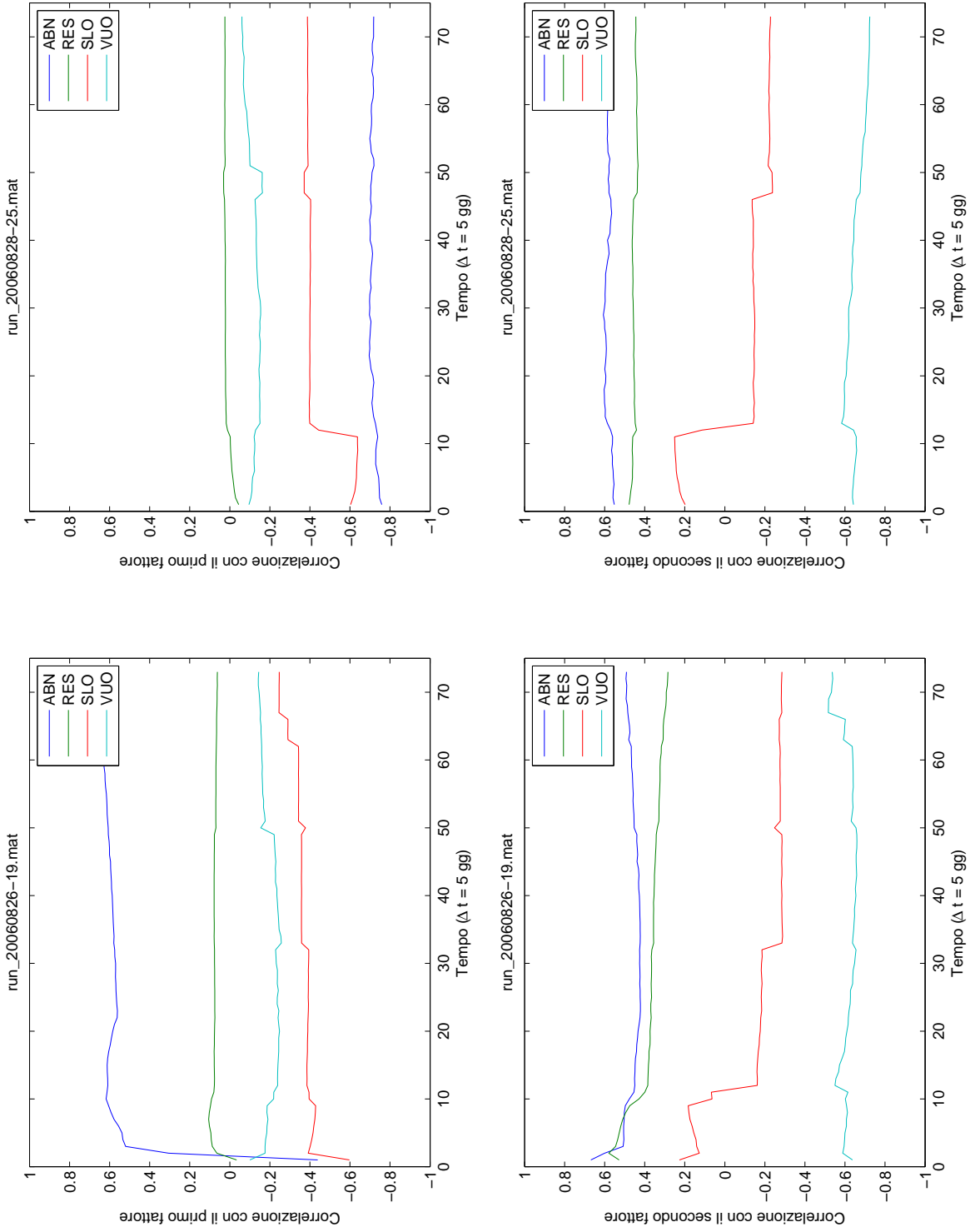


Figura 6.15: Correlazione delle variabili ABN, RES, SLO e VUO con la prima (in alto) e la seconda (in basso) componente principale (factors loading)

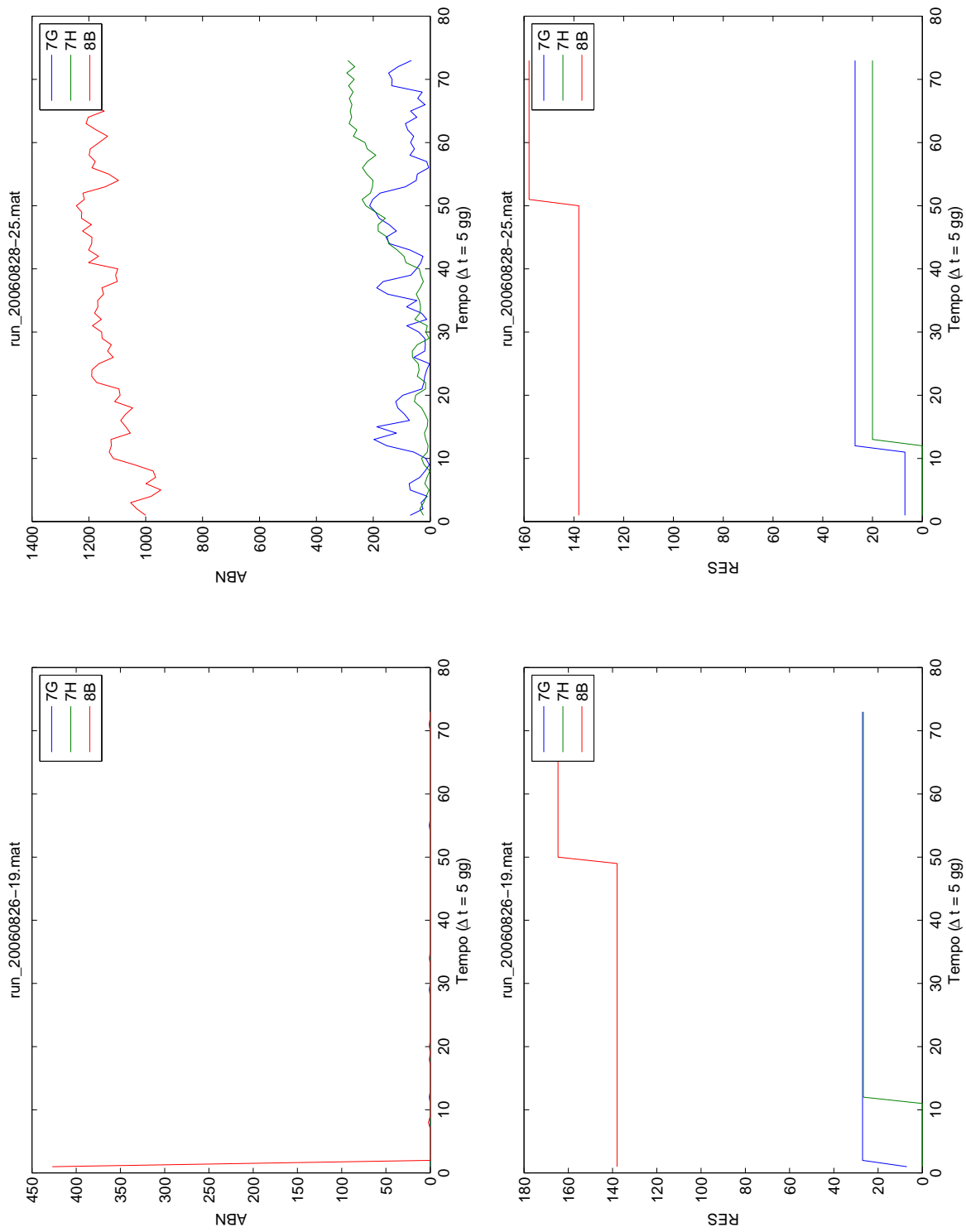


Figura 6.16: Dinamica del numero di abitazioni libere (ABN, in alto) e della superficie ad uso residenziale (RES, in basso) in tre celle dell'automa.

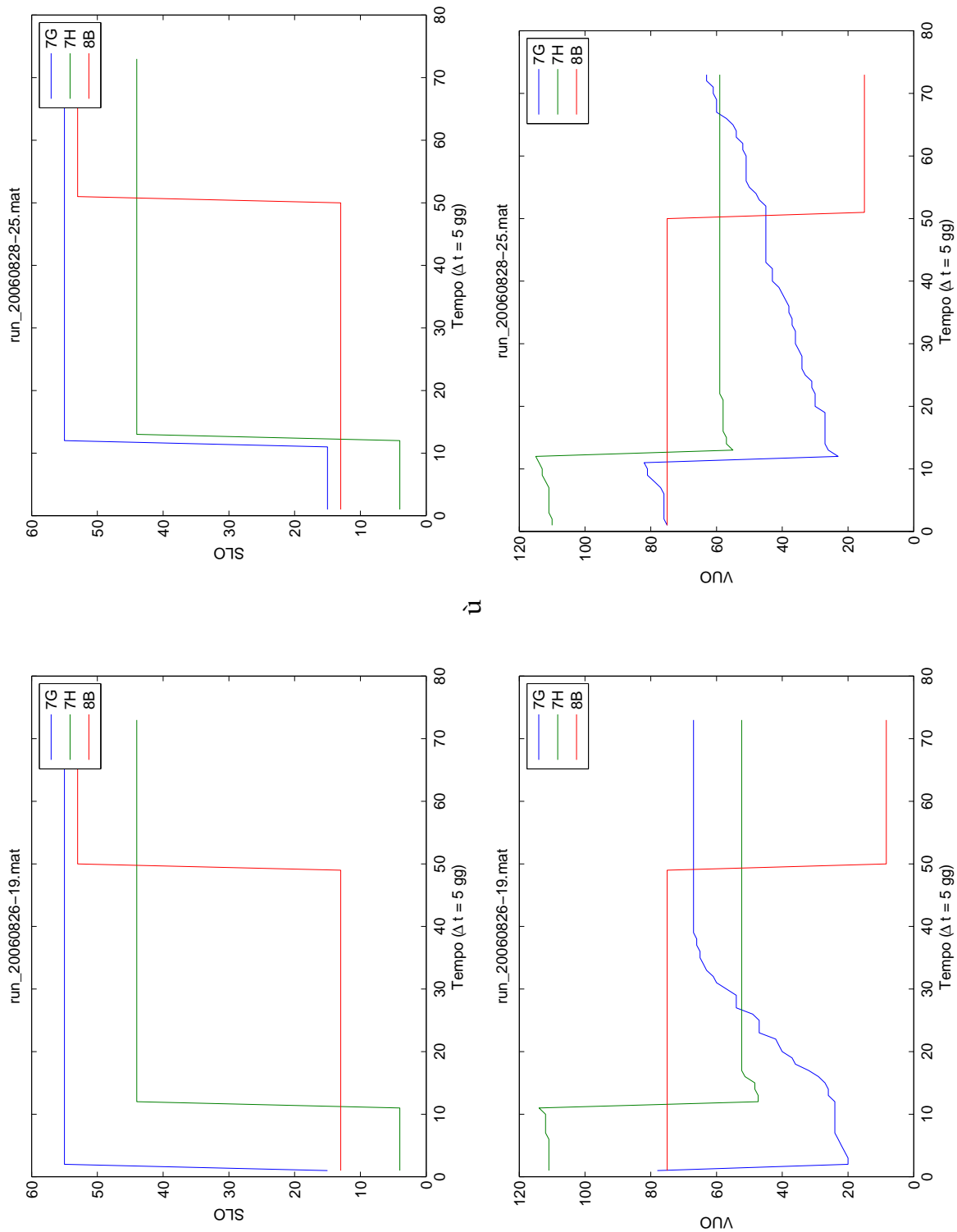


Figura 6.17: Dinamica della superficie per servizi di livello locale (SLO, in alto) e del terreno edificabile vuoto (VUO, in basso)

# Conclusioni

In questa tesi è stata proposta una nuova versione del modello ACME (si veda [16] e [15]); in questa nuova versione ci avvaliamo dell'uso della tecnica di statistica multivariata nota col nome di Analisi delle Componenti Principali (capitolo 2), o *Trasformata di Hotelling*, per la definizione della famiglie di funzioni  $F^\alpha$  e  $G^\alpha$ , che sono alla base dei processi stocastici di Poisson (capitolo 1) che governano le decisioni delle popolazioni di  $\alpha$ -agenti (capitolo 4); tali agenti virtuali sono deputati all'aggiornamento dello stato dell'automa cellulare che rappresenta il sistema urbano (capitolo 3). Questo approccio alla modellizzazione di sistemi complessi urbani, che vede l'uso congiunto di automi cellulari ed agenti virtuali, sembra godere dei vantaggi di entrambi e per questo motivo si sta diffondendo molto nella comunità scientifica. Nella seconda parte di questa tesi, Il modello viene illustrato ad un livello generale, mentre le assunzioni e le definizioni urbanistiche, che permettono di applicare il modello allo studio della zona orientale della metropoli di Roma, sono illustrate nella terza parte. La zona di studio è rappresentata per mezzo di 23 variabili dinamiche e 5 parametri di controllo (capitolo 5), che descrivono ciascuna cella della

## CONCLUSIONI

---

città sotto vari aspetti urbanistici (uso del suolo, popolazione, entità del mercato immobiliare, integrazione nella rete di trasporti cittadina, *et cetera*), mentre le 7 regole di aggiornamento dell'automa (costruzione di case, centri commerciali, imprese e servizi, solo per citarne alcune) sono definite con l'ausilio di dati ISTAT; in particolare viene proposto un semplice modello della domanda e dell'offerta per simulare l'andamento del mercato immobiliare nel sistema, con cui determinare il numero di abitazioni che gli  $\alpha$ -agenti costruttori possono immettere nel sistema durante un passo di aggiornamento dell'automa cellulare.

Il modello è stato implementato al calcolatore con MATLAB e dalle prime simulazioni ottenute (capitolo 6) è emerso che le funzioni  $F^\alpha$  e  $G^\alpha$  riescono a classificare le celle di  $\Gamma$ , rispetto a ciascun  $\alpha \in A$ , in maniera soddisfacente (e.g. discriminano tra celle con presenza di spazio agricolo e celle prive di esso, nel caso della trasformazione  $\alpha_5$  della conversione d'uso del suolo agricolo in suolo edificabile); in secondo luogo è stato possibile, con opportuna configurazione dei parametri di controllo, osservare uno scenario di espansione verosimile, della zona di studio della periferia Est di Roma.

# Bibliografia

- [1] Ilia Arcidiacono and Carlo Bagnasco. *L'analisi statistica. Aspetti teorici e applicazioni alla lettura del territorio*. Aracne, 2006.
- [2] Itzhak Benenson. Multi-agent simulations of residential dynamics in the city. *Computers, Environment and Urban Systems*, 22(1):25–42, 1998.
- [3] Rudiger Dornbusch, Stanley Fischer, and Richard Startz. *Macroeconomia*. Mc-Graw Hill libri Italia, 7a edition, 1998. edizione italiana a cura di Patrizio Tirelli.
- [4] Richard O. Duda, Peter E. Hart, and David G. Stork. *Pattern classification*. Wiley-Interscience, second edition, 2001.
- [5] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume 1. New York: Wiley, 3rd edition, 1968.
- [6] IKEA Group corporate site. IKEA Group stores. © Inter IKEA Systems B.V. 1999 - 2006. Available from: [http://www.ikea-group.ikea.com/corporate/about\\_ikea/ikea\\_group\\_stores.html](http://www.ikea-group.ikea.com/corporate/about_ikea/ikea_group_stores.html).

- [7] Michael L. Katz and Harvey S. Rosen. *Microeconomia*. McGraw-Hill libri Italia, 1996. Trad. di Claudia Costantini, rev. di P. Tedeschi.
- [8] J. T. Kent, J. M. Bibby, and K. V. Mardia. *Multivariate Analysis (Probability and Mathematical Statistics)*. Elsevier Limited, 2006.
- [9] Thomas Melzer. *Generalized Canonical Correlation Analysis for Object Recognition*. PhD thesis, Vienna University of Technology, Institute of Automation, 2002. Available from: <http://www.prip.tuwien.ac.at/~melzer/publications/thesis.ps.gz>.
- [10] David O'Sullivan and Paul M. Torrens. Cellular models of urban systems. In S. Bandini and T. Worsch, editors, *Proceedings of the Fourth International Conference on Cellular Automata for Research and Industry: Theoretical and Practical Issues on Cellular Automata*, pages 108–117, 2000. Available from: <http://www.casa.ucl.ac.uk/cellularmodels.pdf>.
- [11] Karl Pearson. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine*, 2(6):559–572, 1901.
- [12] William H. Press, Brian P. Flannery, William T. Vetterling, and Saul A. Teukosky. *Numerical recipes in C : the art of scientific computing*. Cambridge University Press, second edition, 1992.
- [13] Alessandro Silva. *Algebra Lineare*. Ed. Nuova Cultura, second edition, 1995.

- [14] Paul M. Torrens. Automata-based models of urban systems, 2003. To appear in: Longley, Paul & Batty, Michael (2003). *Advanced Spatial Analysis: the CASA Book of GIS*. Redlands, CA: ESRI Press. Available from: [http://www.geogr.ku.dk/courses/phd/gis-model/Torrens\\_automata\\_based\\_models\\_of\\_urban\\_systems.pdf](http://www.geogr.ku.dk/courses/phd/gis-model/Torrens_automata_based_models_of_urban_systems.pdf).
- [15] Alberto Vancheri, Paolo Giordano, Denise Andrey, and Sergio Alberverio. A model for urban growth processes with continuous state cellular automata, multi-agents and related differential equations. Part I Theory. Pre-print.
- [16] Alberto Vancheri, Paolo Giordano, Denise Andrey, and Sergio Alberverio. Continuous valued cellular automata and decision process of agents for urban dynamics. 2005. Submitted paper for *Computers in Urban Planning and Urban Management 2005*, London. Available from: <http://128.40.111.250/cupum/searchPapers/papers/paper293.pdf>.
- [17] Vv. aa. Norme tecniche di attuazione: delibera di adozione del consiglio comunale n. 33 del 19/20 Marzo 2003. Technical report, Comune di Roma, 2004. Available from: <http://urbanistica.comune.roma.it/sezionihtml/allegati/P1.pdf>.
- [18] Eric W. Weisstein. Cellular automaton. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. Available from: <http://mathworld.wolfram.com/CellularAutomaton.html>.



# Ringraziamenti

Desidero ringraziare Denise Andrey, Paolo e Giordano e Alberto Vancheri per l'ospitalità e gli innumerevoli consigli ricevuti durante tutto lo svolgimento di questa tesi; al prof. Tirozzi va la mia riconoscenza per avermi dato l'opportunità di lavorare ad un progetto così interessante ed in maniera autonoma.

Ringrazio Elisa Angiulli per essere stata in grado di darmi preziosi consigli di Macroeconomia, pur trovandosi a migliaia di chilometri di distanza; Alexandre Lanciani per la sana dose di dubbi che è sempre stato in grado di inculcarmi, nei momenti in cui rischiavo di adagiarmi sulle mie certezze o quando ne ero in difetto, mentre Andrea Esposito ha sempre trovato le parole adatte per rendere vane le mie angosce e le mie paure; La *crew* nella sua interezza merita di essere ringraziata per il semplice fatto di essera tale.

Infine il ringraziamento più importante va ai miei genitori, che mi hanno dato la possibilità di studiare ed arrivare fino a qui.

Roma, Settembre 2006