Un joueur de tennis à la probabilité p de marquer un point, quelle est la probabilité qu'il remporte le match ?

Écrit par Gaël COULON

30 mars 2023

Dans l'ensemble de l'exercice, on notera G l'évènement "le joueur gagne" et P "le joueur perd", ce qu'il perd ou gagne dépend de l'étape de calcul : d'abord le point, puis le jeu et enfin le set.

La probabilité que le joueur gagne est notée $\mathrm{P}(G)$ (réciproquement $\mathrm{P}(P)$ s'il perd). Par simplicité de notation un enchainement de lettres correspond au ET logique $\cap$ (ex : $\mathrm{P}(GPG)$ $=\mathrm{P}(G \cap P \cap G)$). La suite de plusieurs évènements peut aussi être abrégée en utilisant des chiffres, le nombre de combinaisons pour arriver à cet évènement est sous entendu (ex : $\mathrm{P}(4G1P) \equiv$ Somme des combinaisons menant à $\mathrm{P}(4G1P)$).

Comme l'obtention d'un point ou d'un jeu ou d'un set est indépendant des autres, la probabilité d'une intersection est le produit des probabilités (ex : $\mathrm{P}(G \cap P \cap G) = \mathrm{P}(G) \cdot \mathrm{P}(P) \cdot \mathrm{P}(G)$).

Rappel du comptage de points

D'après la Fédération Française de Tennis

Au tennis, un jeu se compose de 4 points.

- Pas de point : "0"
- Premier point : "15"
- Deuxième point : "30"
- Troisième point : "40"
- Quatrième point : "jeu"

Pour remporter un jeu, il faut gagner au moins 4 points, avec une avance de 2 points. Si les 2 joueurs ont marqué 3 points, alors on compte "40A". Après "40A", le point suivant se note "Avantage" pour le joueur qui le gagne, si le même joueur gagne un autre point alors il gagne le "jeu". Sinon les deux joueurs repartent à égalité (soit "40A").

Un set, correspond à 6 jeux. Lorsqu'il y a "5-5", il faut aller jusqu'à 7 jeux. S'il y a "6-6" on réalise alors un "tie-break". Celui-ci" se compte différemment des autres jeux. En effet, la marque des points est compté "0", "1", "2", "3", … jusqu'à "7". Le premier joueur allant à 7 points remporte le "tie-break" et le set, à condition d'avoir 2 points d'écart sur son adversaire. S'il y a "6-6", alors le "tie-break" continuera jusqu'à ce qu'il y ait 2 points d'écart. Pour remporter un set sans "tie-break", il faut gagner au moins 6 jeux, avec deux points d'écart.

Un match se joue en 3 sets gagnants, si le score est de 2 sets partout alors le dernier set est joué sans "tie-break". Une partie comporte donc 5 sets joués au maximum.

Etape 1 : gagner le jeu

On désigne par $p_{jeu} = p_j$ la probabilité que le joueur gagne le jeu. L'évènement G correspond au point gagné et P au point perdu.

$$\begin{aligned} p_j &= \mathrm{P}(4G0P) + \mathrm{P}(4G1P) + \mathrm{P}(4G2P) \\ &\quad + \mathrm{P}(3G3P)\,[\mathrm{P}(GG) + \mathrm{P}(GPGG) + \mathrm{P}(PGGG) + ...] \end{aligned} \tag{1}$$

Il reste désormais à faire le dénombrement possible des scénarios qui mènent à chaque valeurs de P :

- $\mathrm{P}(4G0P)$: 1 façon de gagner le jeu par 4 points marqués, $\mathrm{P}(4G0P) = p^4$.
- $\mathrm{P}(4G1P)$: $\binom{5}{1} - 1 = 4$ façons de gagner le jeu par 4 points marqués en en ayant perdu un (il faut en effet enlever le cas "GGGGP" qui est équivalent au premier cas) : $\mathrm{P}(4G1P) = 4 \cdot p^4(1-p)$.
- $\mathrm{P}(4G2P)$: $\binom{6}{2} - 5 = 10$ façons de gagner le jeu par 4 points marqués en en ayant perdu deux (il faut en effet enlever les cas ou l'on gagne le jeu avant que l'adversaire ait marqué ses points : "GGGGPP", "GGGPGP", "GGPGGP", "GPGGGP", "PGGGGP") : $\mathrm{P}(4G2P) = 10 \cdot p^4(1-p)^2$.
- $\mathrm{P}(3G3P)$: $\binom{6}{3} = 20$ façons d'arriver à cette égalité, $\mathrm{P}(3G3P) = 20 \cdot p^3(1-p)^3$.

Le terme entre crochet dans l'expression (1) comprend tous les scénarios possible pour que le joueur gagne face à son adversaire lorsque le score est de 3 points chacun. On montre par récurrence que ce terme vaut :

$$p^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^k p^k (1-p)^k = \frac{p^2}{1-2p(1-p)} \tag{2}$$

En effet pour que le scénario d'égalité se prolonge il faut que l'adveraire ait marqué puis le joueur ensuite ou le scénario inverse, soit donc deux moyens pour y parvenir. Il faut donc sommer tous ces cas d'égalité en tenant compte des produits $p^k(1-p)^k$. Enfin, pour que le joueur gagne il faut emporter le point deux fois de suite, d'où la multiplication par p^2.

Ainsi la probabilité p_j pour que le joueur gagne le jeu est :

$$\begin{aligned} p_{jeu} = p_j &= p^4 + 4 \cdot p^4(1-p) + 10 \cdot p^4(1-p)^2 + 20 \cdot p^3(1-p)^3 \cdot \frac{p^2}{1-2p(1-p)} && (3) \\ &= p^4 + 4 \cdot p^4(1-p) + 10 \cdot \frac{p^4(1-p)^2}{1-2p(1-p)} && (4) \end{aligned}$$

Remarque : Le décompte des trois premiers cas revient en fait à utiliser la propriété du triangle de Pascal (5) : le nombre de cas conduisant au même scénario de probabilité $\mathrm{P}((n-k)GkP)$ est $\binom{n-1}{k}$, qui est en fait le nombre de totale de combinaisons de jeux moins celles défavorables (les cas où le joueur l'emporte ou perd face à son adversaire avant que la suite des combinaisons n'ait lieu).

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{5}$$

Etape 2 : gagner le set

On désigne par $p_{set} = p_s$ la probabilité que le joueur gagne le set avec "tie-break" et p'_s celle de gagner un set sans "tie-break". L'évènement G correspond au jeu gagné et P au jeu perdu.

Avec tie-break

$$\begin{aligned} p_s = &\ \mathrm{P}(6G0P) + \mathrm{P}(6G1P) + \mathrm{P}(6G2P) + \mathrm{P}(6G3P) + \mathrm{P}(6G4P) \\ &+ (7G5P) + \mathrm{P}(\text{"tie-break"}) \end{aligned} \tag{6}$$

De la même manière que pour les points il faut maintenant dénombrer combien de cas mènent au même scénario. En utilisant la remarque notée ci-dessus :

— $\mathrm{P}(6G0P)$: 1 façon de gagner le set par 6 jeu à 0 : $\mathrm{P}(6G0P)$=p_j^6.
— $\mathrm{P}(6G1P) = \binom{6+1-1}{1} \cdot p_j^6(1-p_j) = 6 \cdot p_j^6(1-p_j)$.
— $\mathrm{P}(6G2P) = \binom{6+2-1}{2} \cdot p_j^6(1-p_j)^2 = 21 \cdot p_j^6(1-p_j)^2$.
— $\mathrm{P}(6G3P) = \binom{6+3-1}{3} \cdot p_j^6(1-p_j)^3 = 56 \cdot p_j^6(1-p_j)^3$.
— $\mathrm{P}(6G4P) = \binom{6+4-1}{4} \cdot p_j^6(1-p_j)^4 = 126 \cdot p_j^6(1-p_j)^4$.

Les deux autres scénarios sont un peu plus délicat :

— $\mathrm{P}(7G5P)$: Il faut déjà au préalable qu'il y ait eu 5-5 puis gagner deux fois de suite ensuite, or il y a $\binom{5+5}{5} = 252$ façons d'arriver à ce scénario, ainsi : $\mathrm{P}(7G5P) = 252 \cdot p_j^5(1-p_j)^5 p_j^2$.
— $\mathrm{P}(\text{"tie-break"})$: Il faut déjà au préalable qu'il y ait eu 6-6 et donc qu'il y ait eu 5-5 avant, soit dans un premier temps $\binom{5+5}{5} = 252$ scénarios possibles. Puis il a fallu gagner puis perdre ou perdre puis gagner soit donc $2 \cdot 252 = 504$ scénarios possibles au total. Il faut ensuite gagner le "tie-break" en 7 points avec 2 points d'écarts minimum, notons p_{tb} cette probabilité : $\mathrm{P}(\text{"tie-break"})$=$504 \cdot p_j^6(1-p_j)^6 p_{tb}$.

Le calcul de p_{tb} est assez similaire de celui vu pour p_j, cette fois-ci le jeu est en 7 points au lieu de 4 :

$$\begin{aligned}
p_{tb} &= \mathrm{P}(7G0P) + \mathrm{P}(7G1P) + ... + \mathrm{P}(7G5P)\\
&\quad + \mathrm{P}(6G6P)\left[\mathrm{P}(GG) + \mathrm{P}(GPGG) + \mathrm{P}(PGGG) + ...\right]\\
&= \binom{7+0\ -1}{0} \cdot p^7 + \binom{7+1\ -1}{1} \cdot p^7(1-p) + ... + \binom{7+5\ -1}{5} \cdot p^7(1-p)^5\\
&\quad + \binom{6+6}{6} \cdot p^6(1-p)^6 \left[p^2 + p(1-p)p^2 + (1-p)pp^2 + ...\right]\\
&= p^7 + 7 \cdot p^7(1-p) + ... + 462 \cdot p^7(1-p)^5 + 924 \cdot p^6(1-p)^6 \cdot \frac{p^2}{1-2p(1-p)}\\
&= p^7 + 7 \cdot p^7(1-p) + 28 \cdot p^7(1-p)2 + 84 \cdot p^7(1-p)^3 + 210 \cdot p^7(1-p)^4\\
&\quad + 462 \cdot \frac{p^7(1-p)^5}{1-2p(1-p)}
\end{aligned} \tag{7}$$

Ainsi la probabilité p_s pour que le joueur gagne le set avec "tie-break" est :

$$\begin{aligned}
p_{set} = p_s = p_j^6 &+ 6 \cdot p_j^6(1-p_j) + 21 \cdot p_j^6(1-p_j)^2 + 56 \cdot p_j^6(1-p_j)^3 + 126 \cdot p_j^6(1-p_j)^4\\
&+ 252 \cdot p_j^7(1-p_j)^5 + 504 \cdot p_j^6(1-p_j)^6 p_{tb}
\end{aligned} \tag{8}$$

Remarque : Le calcul du dénombrement des scénarios de P("tie-break") peut aussi se faire en utilisant la formule citée à la remarque précédente, il faut néanmoins ajouter les scénarios manquants. On désigne par #P le nombre de scénarios conduisant à cette probabilité.

$$\begin{aligned}
\#\text{Scénarios} &= \binom{6+6\ -1}{6} + \text{Scénarios manquants}\\
&= 462 + 2 \cdot [\#\mathrm{P}(5G0P \text{ puis l'adversaire marque 6 points et enfin}\\
&\quad \text{le joueur égalise}) + \#\mathrm{P}(5G1P \text{ puis l'adversaire marque 5 points}\\
&\quad \text{et enfin le joueur égalise}) + ... + \#\mathrm{P}(5G5P \text{ puis l'adversaire marque}\\
&\quad \text{1 point et enfin le joueur égalise})]
\end{aligned} \tag{9}$$

Le facteur 2 vient du fait que le même scénario peut se produire pour l'adversaire (il emporte d'abord les points avant que le joueur remonte le score). Il reste désormais à dénombrer chaque probabilité :

$$
\begin{aligned}
\#\text{Scénarios} = 462 + 2 \cdot [&\text{1 façon d'avoir 5-0 au début puis que l'adversaire}\\
&\text{marque 6 points et enfin que le joueur égalise} + \text{6 façons d'avoir}\\
&\text{5-1 au début puis que l'adversaire marque 5 points et enfin que}\\
&\text{le joueur égalise} + ... + \text{2 façons d'avoir 5-4 au début puis que}\\
&\text{l'adversaire marque 2 points et enfin que le joueur égalise}]\\
= 462 + 2 \cdot [&1 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2]\\
= 462 + 2 \cdot &21\\
= 504&
\end{aligned} \tag{10}
$$

On retrouve le même résultat que celui dénombré plus haut, néanmoins il est moins difficile d'y parvenir en se concentrant davantage sur les règles du tennis plutôt que sur le dénombrement brut.

Sans tie-break

Le raisonnement reste similaire à celui vu précédemment pour les calculs de P hormis le dernier terme qui est entre crochet, dont le résultat est donné par la formule (2).

$$
\begin{aligned}
p'_s &= \mathrm{P}(6G0P) + \mathrm{P}(6G1P) + \mathrm{P}(6G2P) + \mathrm{P}(6G3P) + \mathrm{P}(6G4P)\\
&\quad + \mathrm{P}(7G5P) + \mathrm{P}(6G6P)\,[\mathrm{P}(GG) + \mathrm{P}(GPGG) + \mathrm{P}(PGGG) + ...]\\
&= p_j^6 + 6 \cdot p_j^6(1-p_j) + 21 \cdot p_j^6(1-p_j)^2 + 56 \cdot p_j^6(1-p_j)^3 + 126 \cdot p_j^6(1-p_j)^4\\
&\quad + 252 \cdot p_j^7(1-p_j)^5 + 504 \cdot p_j^6(1-p_j)^6 \cdot \frac{p_j^2}{1-2p_j(1-p_j)}\\
&= p_j^6 + 6 \cdot p_j^6(1-p_j) + 21 \cdot p_j^6(1-p_j)^2 + 56 \cdot p_j^6(1-p_j)^3 + 126 \cdot \frac{p_j^6(1-p_j)^4}{1-2p_j(1-p_j)}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Etape 3 : gagner le match

On désigne par $p_{match} = p_m$ la probabilité que le joueur gagne le match. L'évènement G correspond au set gagné et P au set perdu. Il faut faire attention dans le cas d'un match en 5 sets que le dernier set ne se joue pas avec un tie-break.

$$
\begin{aligned}
p_m &= \mathrm{P}(3G0P) + \mathrm{P}(3G1P) + \mathrm{P}(3G2P)\\
&= p_s^3 + \binom{3+1\ -1}{1} \cdot p_s^3(1-p_s) + \binom{3+2\ -1}{2} \cdot p_s^2(1-p_s)^2 p'_s\\
&= p_s^3 + 3 \cdot p_s^3(1-p_s) + 6 \cdot p_s^2(1-p_s)^2 p'_s
\end{aligned} \tag{12}
$$

Ce qui conclue l'exercice.

Annexe

2 sources menant à des résultats similaires :

- *Jeu, set et match - Blog de ElJj* (avec néanmoins un oubli de termes sur le calcul de p_{set} avec tie-break et une erreur sur le calcul de p_{match} : $6 \cdot p^2 q^4 p' \longrightarrow 6 \cdot p^2 q^2 p'$).
- *Mathématiques et Sports*, p.60-63, Jacques Baïr, Université de Liège, 1992 (petite faute d'impression à la p.61 : $6 \cdot s^2(1-s^2)s' \longrightarrow 6 \cdot s^2(1-s)^2 s'$).

Il est aussi intéressant de simuler ce que donnerait de telles probabilités calculées :

p	p_{set}	p_{match}
0	0	0
0.1	$2 \cdot 10^{-15}$	$7 \cdot 10^{-44}$
0.2	$2 \cdot 10^{-8}$	10^{-22}
0.3	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-11}$
0.4	0.0365	$4.4 \cdot 10^{-4}$
0.5	0.5	0.5
0.6	0.9634	0.9995
0.7	0.9998	0.9999
0.8	0.9999	~ 1
0.9	~ 1	~ 1
1	~ 1	~ 1

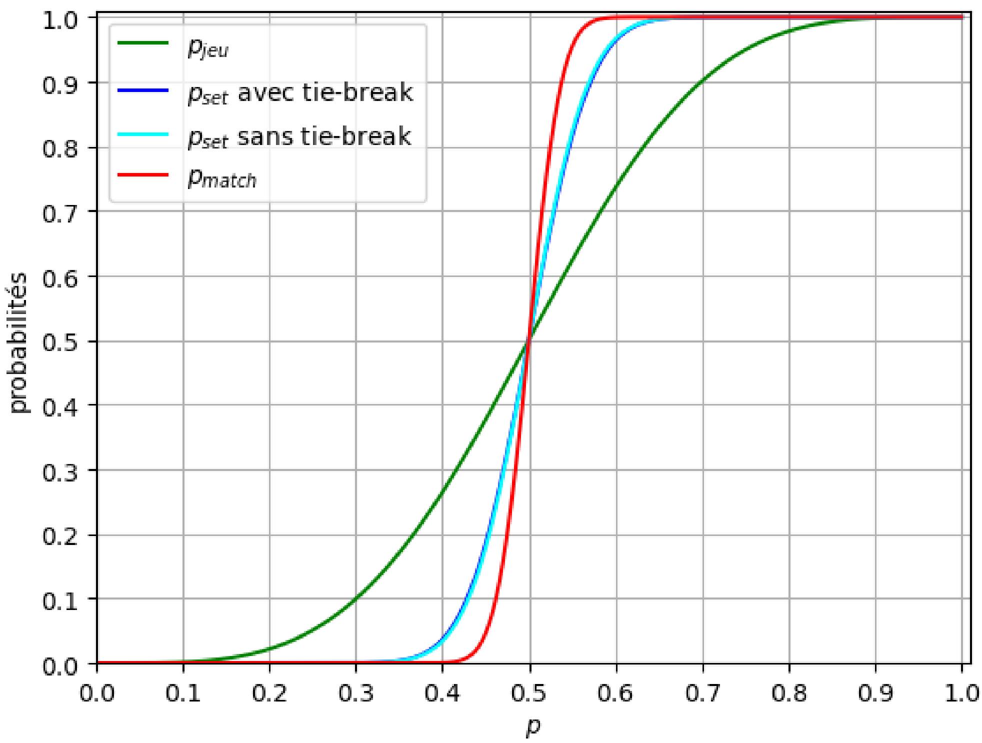

FIGURE 1 – Représentation des différentes probabilités calculées ici.