**Определение 1.** *Рассмотрим следующие примитивы.*

1. $Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $Z(x) = 0$
2. $N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $N(x) = x'$
3. *Проекция.* $U_i^n : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, $U_i^n(x_1, ...x_n) = x_i$
4. *Подстановка. Если* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g_1, ...g_n : \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{N}_0$, *то* $S\langle f, g_1, ...g_n\rangle : \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{N}_0$. *При этом* $S\langle f, g_1, ...g_n\rangle(x_1, ...x_m) = f(g_1(x_1, ...x_m), ...g_n(x_1, ...x_m))$
5. *Примитивная рекурсия. Если* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$, *то* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *при этом*

$$R\langle f, g\rangle(x_1, ...x_n, y) = \begin{cases} f(x_1, ...x_n) & , y = 0 \\ g(x_1, ...x_n, y-1, R\langle f, g\rangle(x_1, ...x_n, y-1)) & , y > 0 \end{cases}$$

6. *Минимизация. Если* $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *то* $\mu\langle f\rangle : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, *при этом* $\mu\langle f\rangle(x_1, ...x_n)$ *— такое минимальное число* $y$, *что* $f(x_1, ...x_n, y) \neq 0$. *Если такого* $y$ *нет, результат данного примитива неопределен.*

*Первые три из них — обычные функции на натуральных числах. Оставшиеся три подобны шаблонам в C++ или функциям высшего порядка в Хаскеле/Окамле.*

Например, функция $f(x) = x + 2$ может быть выражена через данные примитивы так: $f(x) = S\langle N, N\rangle(x)$.

**Определение 2.** *Функция называется примитивно-рекурсивной, если возможно построить выражение только из первых пяти примитивов, такое, что оно при всех аргументах возвращает значение, равное значению требуемой функции.*

*Если функция может быть выражена с помощью всех шести примитивов, она называется рекурсивной.*

Данное задание в целом сводится к демонстрации того, что различные функции являются примитивно-рекурсивными (рекурсивными). В отличие от предыдущих заданий, в данном задании это необходимо показывать при помощи демонстрации соответствующей программы на языке примитивно-рекурсивных (рекурсивных) функций. Данный язык, например, легко эмулируется языком шаблонов C++ (как подсказывает синтаксис рекурсивных выражений), также возможно использовать любой другой интерпретатор. *Важно!* Функции должны работать — демонстрация решения должна включать запуск программы на тестах, предложенных преподавателем и/или товарищами.

1. Покажите, что следующие функции — примитивно-рекурсивные:
   (a) сложение;
   (b) умножение;
   (c) ограниченное вычитание 1 (0 для 0, для остальных натуральных чисел совпадает с обычным вычитанием 1);
   (d) ограниченное вычитание (0, если $a < b$, и $a - b$, если $a \geq b$);
   (e) меньше: $m(a, b) = 1$, если $a < b$, иначе 0.
   (f) побитовая конъюнкция (операция `&` в языке Си);
   (g) побитовое «исключающее или»;
   (h) конструкция $\mathrm{first}\langle f\rangle(x_1, \dots, x_k, n)$: возвращает минимальный $t < n$, что $f(x_1, \dots, x_k, t) \neq 0$, либо $n$, если функция равна 0 при всех $t \in 0 \dots n-1$;
   (i) деление нацело (деление с округлением вниз);
   (j) остаток от деления нацело;
   (k) возведение в степень;
   (l) *частичный логарифм* $\mathrm{plog}_k(n)$ — максимальное $p$, что $k^p$ делит $n$. Например, $\mathrm{plog}_6(72) = 2$;
   (m) факториал;
   (n) упорядоченную пару, т.е. набор из трёх функций (одно задание, на подпункты не делится):

   i. левая проекция: $\pi_l(\langle a, b\rangle) = a$;
   ii. правая проекция: $\pi_r(\langle a, b\rangle) = a$;
   iii. построение пары: $\langle\rangle(a, b) = \langle a, b\rangle$;
   (o) проверку числа на простоту;
   (p) простое число номер $k$.

2. Будем называть гёделевой нумерацией списка следующую конструкцию. Пусть $\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle$ — некоторый список натуральных чисел. Пусть $p_i$ — это простое число номер $i$ (естественно, $p_0 = 2$). Тогда гёделева нумерация этого списка $\ulcorner\langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\rangle\urcorner = 2^{a_0} \cdot 3^{a_1} \cdot \dots \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}}$. Например, $\ulcorner\langle 7, 1, 4\rangle\urcorner = 2^7 \cdot 3^1 \cdot 5^4 = 240000$.

   Покажите, что следующие функции являются примитивно-рекурсивными:

   (a) nil: гёделев номер пустого списка;
   (b) $\text{cons}(x, \ulcorner\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle\urcorner) = \ulcorner\langle x, a_0, \dots, a_{n-1}\rangle\urcorner$;
   (c) head: функция, возвращающая голову списка;
   (d) tail: функция, возвращающая хвост списка;
   (e) получение элемента списка с номером $k$: $(\ulcorner\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle\urcorner)_k = a_k$
   (f) len: длина списка;
   (g) (@): конкатенация списков;

3. Назовём функцией Аккермана следующую функцию:

   **Определение 3.** *Функцией* Аккермана *мы назовем так определенную функцию:*

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, & \textit{если } m = 0 \\ A(m-1, 1), & \textit{если } m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)), & \textit{если } m > 0, n > 0 \end{cases}$$

   Покажите, что функция Аккермана — рекурсивная (8 баллов). К сожалению, примитивно-рекурсивной данная функция не является.