ТВМС, Экзамен, Билет 1 (номер в ИСУ: 10)

Ковешников Глеб, M3238
kovg16@gmail.com

22 июня 2020 г.

Вопрос 1

Вопрос: Функции потерь и функции риска, состоятельность оценки характеристики, достаточное условие для состоятельности оценки. Вид квадратичного риска в случае одномерной характеристики.

Оценка $\hat{g}(\theta)$ – статистика вида: $\hat{g}\colon \mathcal{X} \to g(\Theta)$.

Функция потерь $l(\hat{g}, g(\theta))$ – неотрицательная функция, характеризующая близость оценки к реальному значению.

Принято считать функцию потерь неотрицательной монотонной функцией:
$l(\hat{g}, g(\theta)) = \omega(\|\hat{g}, g(\theta)\|)$, где $\omega(0) = 0$.

Риск – функция: $R(\hat{g}, \theta) \overset{def}{=} E_\theta(l(\hat{g}, g(\theta)))$

При асимптотическом подходе оценка называется состоятельной, если:
$\hat{g}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P_{n,\theta}} g(\theta)$

Квадратичная функция потерь: $l_2(\hat{g}, g(\theta)) = \|\hat{g}, g(\theta)\|^2$

Квадратичный риск: $R_2(\hat{g}, \theta) = E_\theta(\|\hat{g}, g(\theta)\|^2)$

Определим функцию потерь индикатором отклонений:
$l^\delta(\hat{g}, g(\theta)) = \omega^\delta(\|\hat{g}, g(\theta)\|)$

$$\omega(t) = 1_\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < \delta \\ 1, & t \geqslant \delta \end{cases}$$

Соответствующий риск будет вероятностью отклонения:
$R^\delta(\hat{g}, \theta) = E_\theta(l(\hat{g}, g(\theta))) = 0 \cdot P_\theta(\|\hat{g}, g(\theta)\| < \delta) + 1 \cdot P_\theta(\|\hat{g}, g(\theta)\| \geqslant \delta) = P_\theta(\|\hat{g}, g(\theta)\| \geqslant \delta)$

Теорема (достаточное условие для состоятельности оценки):
В случае одномерной оценки $R_2(\hat{g}_n, \theta) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow$ оценка состоятельна.
Доказательство:
$\forall \delta > 0\ R^\delta(\hat{g}_n, \theta) = P(\|\hat{g}_n - g(\theta)\| \geqslant \delta) = P(\|\hat{g}_n - g(\theta)^2\| \geqslant \delta^2)$
$\leqslant \frac{E_\theta(\|\hat{g}_n - g(\theta)^2\|)}{\delta^2} = \frac{R_2(\hat{g}_n, \theta)}{\delta^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
Ч.Т.Д.

Смещение оценки – величина: $b(\hat{g}, \theta) = g(\theta) - E_\theta(\hat{g})$

Оценка несмещенная, если смещение равно 0.

Теорема (вид квадратичного риска):
$R_2(\hat{g}, \theta) = D_\theta(\hat{g}) + b^2(\hat{g}, \theta)$

Доказательство:
$R_2(\hat{g},\theta) = E_\theta(\|\hat{g} - g(\theta)^2\|)$
$= E_\theta(\hat{g} - E_\theta(\hat{g}) - (g(\theta) - E_\theta(\hat{g})))^2$
$= E_\theta(\hat{g} - E_\theta(\hat{g}))^2 + (g(\theta) - E_\theta(\hat{g}))^2 - 2(g(\theta) - E_\theta(\hat{g}))(E_\theta\hat{g} - E_\theta\hat{g})$
$= D_\theta(\hat{g}) + b^2(\hat{g},\theta)$
Ч.Т.Д.

Для несмещенных оценок квадратичный риск равен дисперсии.

Вопрос 2

Вопрос: Гистограмма как оценка плотности распределения. Статистические свойства гистограммы.

Зададим плотность распределения в точке t как $f(t) \approx \frac{P(\Delta)}{|\Delta|}$, где $\Delta = [t_1, t_2) \ni t$; t_1, t_2 – соседние точки разбиения отрезка $[a, b]$; $|\Delta| = t_2 - t_1$.

Интервалы группировки – разбиение $\{\Delta_0, \Delta_{\pm1}, \Delta_{\pm2}, \dots\}$ отрезка $[a, b]$ на дизъюнктные интервалы фиксированной длины > 0.

Гистограмма – функция $f_n(t)$, принимающая постоянные значения на заданных интервалах группировки: $t \in \Delta_m \Longrightarrow f_n(t) = f_{n,m} = \frac{k(\Delta_m)}{nh}$,
где $k(\Delta)$ – количество элементов выборки, лежащих в отрезке Δ.

Гистограмма является кусочно-постоянной функцией.

Теорема. Гистограмма является плотностью распределения.
Доказательство:
1. $f_n(t) \geqslant 0$
2. $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(t)dt = \sum_m \int\limits_{\Delta_m} f_n(t)dt = \sum_m hf_{n,m} = n^{-1}\sum_m k(\Delta_m) = 1.$
Ч.Т.Д.

Теорема. Пусть задано абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f(x)$, отрезок $[a, b]$ и его разбиение с длинами интервалов h_n такими, чтобы выполнялись условия:
$h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\ nh_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$,
тогда соответствующая гистограмма является состоятельной оценкой плотности распределения.

Задача

Формулировка: найти ОМП параметра u показательного распределения.
Решение:

$$f(t,u) = \begin{cases} 1, t < 0 \\ \frac{1}{u} \cdot \exp\frac{-t}{u}, t >= 0 \end{cases}$$

$L(u, x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i, u) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{u}\exp\frac{-x_i}{u} = \frac{1}{u^n}\exp\frac{-\sum_{i=1}^n x_i}{u}$
$l(u, x_1, ..., x_n) = \ln\prod_{i=1}^n f(x_i, u) = -n\ln(u) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{u}$
$\frac{dl}{du} = \frac{-n}{u} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{u^2}$
$\frac{dl}{du} = 0 \Longrightarrow un = \sum_{i=1}^n x_i \Longrightarrow u_n^* = \overline{X_n}$, где u_n^* – стационарная точка логарифмической функции правдоподобия.

Проверим достаточное условие максимума (вторая производная < 0):
$\frac{d^2l}{du^2}(\overline{X_n}) = \frac{n}{u^2} - \frac{2un}{u^3} = \frac{-n}{u^2} < 0$.
$\Longrightarrow u_n^* = \overline{X_n}$ – точка максимума функции правдоподобия.
Ответ: ОМП параметра u имеет вид $u_n^* = \overline{X_n}$.