

Теоретический минимум для №19 от «Школково»

Содержание

1	Популярные идеи	2
1.1	Среднее арифметическое	2
1.2	Идея минимальной суммы	2
1.3	Десятичная запись числа	4
2	Основная теорема арифметики, НОД и НОК	6
2.1	Необходимые определения и ОТА	6
2.2	Задачи на ОТА	6
2.3	Важные факты про НОК и НОД	8
2.4	Формула для количества делителей числа	8
2.5	Определения НОК и НОД для произвольного количества чисел	9
3	Остатки	11
3.1	Что такое остаток?	11
3.2	«Одеваем очки по модулю»	11
3.3	Арифметика остатков	11
4	Сравнения по модулю	12
4.1	Важнейшие свойства сравнений	12
4.2	А зачем нам вообще это нужно?	12
4.3	Остатки отрицательных чисел	13
5	Признаки равноостаточности	13
5.1	Признаки равноостаточности по модулям 9 и 3	13
5.2	Признаки равноостаточности по модулям 8 и 4	14
5.3	Признак делимости на 11	14
6	Олимпиадные идеи	17
6.1	Инвариант	17
6.2	Полуинвариант	19
6.3	Принцип крайнего	20
6.4	Турниры	21
6.5	Теория игр. Симметричная стратегия	22
6.6	Раскраски	23
6.7	Соответствия и биекция	25
6.8	Принцип Дирихле	26
6.9	Графы, лемма о рукопожатиях	27
7	Уравнения	29
7.1	Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными	29
7.2	Произвольные диофантовы уравнения, решаемые через делимость	30

1 Популярные идеи

1.1 Среднее арифметическое

Определение Средним арифметическим n чисел является отношение их суммы S к их количеству.

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{S}{n}$$

Во многих задачах намного удобнее работать с суммами чисел, чем со средними арифметическими. Выразив сумму из формулы выше, получим

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n = mn,$$

то есть сумма чисел равна произведению их количества и их среднего арифметического.

Факт 1 Любой член произвольной арифметической прогрессии равен среднему арифметическому соседних членов.

Доказательство

Пусть b разность прогрессии, тогда

$$a_{k-1} = a_k - b, \quad a_{k+1} = a_k + b \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \frac{(a_k - b) + (a_k + b)}{2} = a_k$$

Факт 2 Пусть имеется набор из n чисел со средним арифметическим, равным m . Тогда после добавления в набор числа, **меньшего**, чем m , среднее арифметическое чисел набора **уменьшится**.

Доказательство

Обозначим добавленное число через a . Сумма чисел исходного набора равна mn , тогда сумма чисел набора после добавления равна $mn + a$. Нужно доказать, что неравенство

$$m > \frac{mn + a}{n + 1}$$

выполняется для любого $a < m$. Равносильными переходами получаем

$$m(n + 1) > mn + a \quad \Leftrightarrow \quad mn + m > mn + a \quad \Leftrightarrow \quad m > a$$

что является верным неравенством.

Факт 3 Пусть имеется набор из n чисел со средним арифметическим, равным m . Тогда после добавления в набор числа, **большего**, чем m , среднее арифметическое чисел набора **увеличится**.

Доказательство

Аналогично предыдущему.

1.2 Идея минимальной суммы

Задача ЕГЭ, 2017 (18)

На доске написано 100 различных натуральных чисел, причем известно, что сумма этих чисел равна 5120.

- Может ли оказаться, что на доске написано число 230?
- Может ли оказаться, что на доске нет числа 14?
- Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

Ответ

- Нет, не может
- Нет, не может
- 4

Решение

Известно, что сумма первых n последовательных натуральных чисел равна

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Когда в задаче сказано что-то о сумме некоторых чисел, можно попробовать рассмотреть наименьшую из возможных сумм этих чисел.

а) Рассмотрим наименьшую возможную сумму S , содержащую число 230. Она состоит из наименьших 99 натуральных чисел и числа 230.

$$S = S_{99} + 230 = \frac{99 \cdot 100}{2} + 230 = 5180 > 5120$$

Следовательно, получаем противоречие.

б) Допустим, число 14 не написано на доске, возьмем 100 минимальных натуральных чисел, которые еще доступны. Их сумма равна

$$S = S_{101} - 14 = \frac{101 \cdot 102}{2} - 14 = 5137$$

Очевидно, что какие бы числа ни были написаны на доске, их сумма будет не меньше S . Но $S > 5120$, следовательно, получаем противоречие.

в) В пункте б) мы доказали, что как минимум одно число, кратное 14, написано на доске. Допустим, что оно действительно ровно одно. Тогда сумма на доске не меньше, чем $S + 14$, где S — наименьшая возможная сумма 99 различных натуральных чисел, ни одно из которых не кратно 14. Фактически она равна сумме наименьших 99 различных натуральных чисел, не кратных 14. Ее легко посчитать (семь наименьших чисел, кратных 14, это 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98)

$$S = \frac{106 \cdot 107}{2} - (14 + 28 + 42 + 56 + 70 + 84 + 98) = 5279 > 5120 \Rightarrow S + 14 > 5120$$

Допустим, на доске оказалось написано ровно два числа a и 14, кратных 14. Тогда сумма на доске не меньше, чем $S + a + 14$, где S — наименьшая возможная сумма 98 различных натуральных чисел, ни одно из которых не кратно 14. Фактически она равна сумме наименьших 98 различных натуральных чисел, не кратных 14. Ее легко посчитать (семь наименьших чисел, кратных 14, это 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98)

$$S = \frac{105 \cdot 106}{2} - (14 + 28 + 42 + 56 + 70 + 84 + 98) = 5173 > 5120 \Rightarrow S + a + 14 > 5120$$

Получаем противоречие.

Допустим, на доске оказалось написано ровно три числа a , b и 14, кратных 14. Тогда сумма на доске не меньше, чем $S + a + b + 14$, где S — наименьшая возможная сумма 97 различных натуральных чисел, ни одно из которых не кратно 14. Фактически она равна сумме наименьших 97 различных натуральных чисел, не кратных 14. Ее легко посчитать (семь наименьших чисел, кратных 14, это 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98)

$$S = \frac{104 \cdot 105}{2} - (14 + 28 + 42 + 56 + 70 + 84 + 98) = 5068$$

Это на 52 меньше, чем сумма в условии, но $a + b + 14 \geq 14 + 28 + 42 = 84$. Снова получаем, что $S + a + b + 14 > 5120$. Таким образом мы доказали, что чисел, кратных 14, должно быть хотя бы 4.

Приведем пример, когда на доске написано четыре числа, кратных 14 (14, 28, 42 и 56): 1, 2, ..., 69, 71, ..., 83, 85, ..., 97, 99, 100, 101, 102, 119. Их сумма равна

$$S = \frac{102 \cdot 103}{2} - (70 + 84 + 98) + 119 = 5120$$

1.3 Десятичная запись числа

Очень часто в задачах на теорию чисел приходится работать с одной или несколькими цифрами числа. Чтобы записать число, мы используем цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — всего их десять.

Каждое число мы можем разложить на сумму разрядов, например, рассмотрим число 378:

$$378 = 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 1$$

Научимся обозначать неизвестные нам числа в такой записи. Пусть есть двузначное число \overline{ab} . Черта сверху в этой записи обозначает то, что a и b — цифры такого двузначного числа, то есть $\overline{ab} = 10a + b$.

Сразу можно заменить, что так как число \overline{ab} — двузначное, то $a \neq 0$.

Покажем, как можно представлять m -значное число n в таком виде:

$$n = \overline{a_{m-1} \dots a_1 a_0} = a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

Таким образом, a_0 обозначает количество единиц числа n , a_1 — количество десятков числа n , a_2 — количество сотен и так далее.

1. У важного бизнесмена Пети есть сейф с паролем. К сожалению, этот пароль Петя забыл. Помнит он только, что это семизначное число, три первые цифры которого одинаковые, остальные четыре цифры также одинаковые. Сумма всех цифр этого пароля — число двузначное, первая цифра которого совпадает с первой цифрой пароля, а последняя — с последней. Помогите Пете подобрать пароль и открыть сейф.

Ответ

3337777

Решение

Так как первые три цифры пароля одинаковы, как и последние четыре, то обозначим этот пароль через \overline{xxxyyy} .

Сумма цифр этого числа равна $3x + 4y$, и по условию это равно \overline{xy} . Значит, имеем равенство

$$3x + 4y = 10x + y \Leftrightarrow 3y = 7x$$

Так как 3 и 7 — взаимно простые числа, то y делится на 7. При этом цифра y равна 0 или 7.

Если $y = 0$, то x тоже равен 0, но тогда число \overline{xy} не двузначное.

Если $y = 7$, то $x = 3$ и пароль 3337777 подходит.

Задача ЕГЭ, 2022 (18)

С трехзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

- а) Может ли в результате такой операции получиться число 201?
- б) Может ли в результате такой операции получиться число 251?
- в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 600 до 999 включительно?

Ответ

- а) Да, может
- б) Нет, не может
- в) 40

Решение

Пусть взяли число \overline{abc} . Тогда из него получилось

$$\frac{\overline{abc} - (a + b + c)}{3} = \frac{100a + 10b + c - a - b - c}{3} = \frac{99a + 9b}{3} = 33a + 3b$$

а) Если в результате получилось число 201, то имеет место равенство

$$33a + 3b = 201 \mid : 3$$

$$11a + b = 67$$

Достаточно подобрать такие цифры a и b , чтобы равенство $11a + b = 67$ выполнялось. Пусть $a = 6$ и $b = 1$, тогда

$$11 \cdot 6 + 1 = 66 + 1 = 67$$

Цифра c ни на что не влияет, пусть $c = 0$, тогда $\overline{abc} = 610$:

$$\frac{610 - (6 + 1 + 0)}{3} = \frac{610 - 7}{3} = \frac{603}{3} = 201$$

б) Мы доказали, что результат будет равен $33a + 3b$, если изначальное число равнялось \overline{abc} . Таким образом, должно выполняться равенство

$$33a + 3b = 251$$

$$3 \cdot (11a + b) = 251$$

Заметим, что число 251 не делится на 3 по признаку делимости, так как сумма цифр этого числа равна $2 + 5 + 1 = 8$, а 8 не кратно 3.

Таким образом, левая часть равенства делится на 3, а правая — не делится, следовательно, в результате не могло получиться 251.

в) Заметим, что получившееся число не зависит от последней цифры исходного числа, поэтому достаточно найти количество различных чисел, получающихся из чисел, делящихся на 10. Рассмотрим числа

$$100a + 10b \quad \text{и} \quad 100x + 10y,$$

где a, b, x и y — цифры и $a \neq 0, x \neq 0$. В результате операции из них получатся числа

$$33a + 3b \quad \text{и} \quad 33x + 3y$$

Разность этих чисел равна

$$33(a - x) + 3(b - y)$$

Если $a \neq x$, то эта разность не может быть равной нулю, поскольку $|3(b - y)| \leq 27$.

Если $a = x$, то разность может быть равной нулю только при $b = y$, то есть если исходные числа совпадают.

Значит, в результате операции из различных трехзначных чисел, делящихся на 10, получаются различные числа.

Среди чисел от 600 до 999 ровно 40 чисел делятся на 10. Следовательно, в результате операции из чисел от 600 до 999 может получиться 40 различных чисел.

2 Основная теорема арифметики, НОД и НОК

2.1 Необходимые определения и ОТА

Определение Натуральное число p является *простым*, если оно имеет ровно два различных делителя: 1 и p .

NB Заметим, из данного определения следует, что число 1 **не является** простым. К тому же число 2 является **единственным четным простым** числом.

Определение *Наибольшим общим делителем* (НОД) двух чисел m и n называется наибольшее натуральное число, на которое делятся и m , и n . Допустимые обозначения: $\text{НОД}(m, n)$; (m, n) .

Аналогом слова «делится» является значок \div , то есть запись $a \div b$ означает, что a делится на b . Например, из определения выше очевидно, что $m \div (m, n)$ и $n \div (m, n)$.

Определение *Наименьшим общим кратным* (НОК) двух чисел m и n называется наименьшее натуральное число, которое делится и на m , и на n . Допустимые обозначения: $\text{НОК}(m, n)$; $[m, n]$.

Иными словами НОК — это наименьшее натуральное k такое, что $k \div m$ и $k \div n$.

Теорема (*Основная теорема арифметики или ОТА*)

Любое натуральное число $n > 1$ единственным образом представимо в виде произведения степеней простых множителей, то есть

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}, \text{ где } p_1 < p_2 < \dots < p_k \text{ — простые числа, } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \text{ — натуральные.}$$

Например, число 60 раскладывается так:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Менее формально можно сказать, что по ОТА любое натуральное число, кроме 1, раскладывается на простые множители единственным образом.

NB Разложение числа по ОТА, записанное выше, также называют *каноническим*.

Определение Два числа a и b называются *взаимно простыми*, если в их разложениях нет ни одного общего простого множителя. Очевидно, что данное определение взаимно простых эквивалентно следующему:

Определение Два числа a и b называются *взаимно простыми*, если их НОД равен 1.

2.2 Задачи на ОТА

2. Существует ли натуральное число с произведением цифр 2310?

Ответ

Не существует

Решение

Разложим число 2310 на простые множители, получим $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Допустим, что существует некоторое простое число, произведение цифр которого равно 2310, тогда, как видно по разложению на простые множители, произведение цифр должно делиться на 11. Однако ни одна ненулевая цифра не делится на 11, значит, такое невозможно.

NB Заметим, что нам было важно, что 11 является простым и не может быть разложено на более мелкие множители, следовательно, одна из цифр должна быть кратна 11, что приводит к противоречию.

3. Сколько существует пар простых чисел, которые отличаются друг от друга на 15?

Ответ

Единственная пара 2 и 17

Решение

Уже было замечено, что 2 — единственное четное простое число. Воспользуемся этим.

Пусть мы имеем $p_1 + 15 = p_2$. Допустим, p_1 нечетно, тогда левая часть равенства четна, следовательно, p_2 — некоторое четное простое, большее 15. Получаем противоречие. Остается случай, когда p_1 четно, то есть фактически равно 2. Получаем пару 2 и 17.

4. Разделите числа 2, 4, 6, 10, 22, 25, 40, 66 на две группы так, чтобы произведения в двух группах были равны. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ

Единственный допустимый способ:

I : $22 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 4$

II : $66 \cdot 10 \cdot 40$

Решение

Разложим каждое из чисел на простые множители:

$$\begin{aligned} 2 &= 2, & 4 &= 2^2 & 6 &= 2 \cdot 3, & 10 &= 2 \cdot 5 \\ 22 &= 2 \cdot 11, & 25 &= 5^2 & 40 &= 2^3 \cdot 5, & 66 &= 2 \cdot 3 \cdot 11 \end{aligned}$$

Заметим, что равенство произведений чисел в группах равносильно тому, что наборы простых множителей в них одинаковые. Будем постепенно формировать группы.

Числа 22 и 66 — единственные, содержащие в разложении множитель 11, следовательно, они должны быть помещены в разные группы. Для удобства назовем I группу с числом 22 и II группу с числом 66.

$$\text{I : } 2 \cdot 11$$

$$\text{II : } 2 \cdot 3 \cdot 11$$

Заметим, что из оставшихся чисел только 6 содержит в разложении 3, причем группа II уже содержит 3, а I не содержит. Значит, число 6 должно оказаться в I группе.

$$\text{I : } (2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 3)$$

$$\text{II : } 2 \cdot 3 \cdot 11$$

Посмотрим на множитель 5. 10 и 40 содержат его в первой степени, 25 — во второй, следовательно, в одной из групп должно оказаться число 25, а в другой — пара чисел 10 и 40. Чтобы понять, что в какой группе, рассмотрим простой множитель 2. Во все числа в совокупности 2 входит в 10 степени, значит, итоговая степень 2 в каждой из групп должны быть равна 5. Пара 10 и 40 содержит 2 в 4 степени, если мы поместим ее в первую группу, степень двойки в ней составит уже $2 + 4 = 6$, то есть превысит 5. Остается единственный допустимый способ расположения по группам чисел, кратных 5.

$$\text{I : } (2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (5^2)$$

$$\text{II : } (2 \cdot 3 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2^3 \cdot 5)$$

Остались числа 2 и 4, их располагаем единственным подходящим способом в группу I, получаем итоговое разбиение. Заметим, что нигде не было альтернатив, мы просто «восстанавливали» ситуацию, то есть способ является единственным по построению.

$$\text{I : } (2 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (5^2) \cdot 2 \cdot (2^2) = 22 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 4$$

$$\text{II : } (2 \cdot 3 \cdot 11) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2^3 \cdot 5) = 66 \cdot 10 \cdot 40$$

5. Прямоугольник с целыми длинами сторон разбит на двенадцать квадратов со следующими длинами сторон: 2, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 8, 9, 9. Каков периметр прямоугольника?

Ответ

90

Решение

Найдем площадь S прямоугольника, она равна сумме площадей квадратов, на которые он разбит

$$S = 2 \cdot (2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2) = 2 \cdot (4 + 9 + 25 + 49 + 64 + 81) = 464$$

Разложим на простые, получим $464 = 2^4 \cdot 29$. Площадь равна произведению сторон, рассмотрим все возможные способы представления числа 464 в виде произведения двух множителей, пользуясь его разложением: $1 \cdot 464$; $2 \cdot 232$; $4 \cdot 116$; $8 \cdot 58$; $16 \cdot 29$. Заметим, что в каждом представлении, кроме последнего, один из множителей меньше 9, то есть одна из сторон такого прямоугольника меньше 9. Это противоречит тому, что такой прямоугольник в своем разбиении содержит квадрат со стороной 9, значит, единственный возможный вариант достигается при длинах сторон 16 и 29. Периметр в таком случае равен 90.

2.3 Важные факты про НОК и НОД

Факт 1 a и b — натуральные числа. Их НОД обозначим (a, b) , НОК обозначим $[a, b]$. Тогда выполняется соотношение

$$a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b],$$

то есть произведение НОК и НОД равно произведению чисел.

Доказательство

Возьмем произвольное простое число p и докажем, что оно содержится в разложениях на простые левой и правой частей в одинаковой степени. Из этого будет сразу следовать равенство.

Пусть степень вхождения p в разложение на простые множители числа a равна α , в разложение b — β (α и β могут быть равны нулю). Тогда степень вхождения p в левую часть равна $\alpha + \beta$.

Степень вхождения p в (a, b) равна $\min(\alpha, \beta)$. Действительно, больше она быть не может, так как в этом случае одно из чисел не будет делиться на НОД, что противоречит определению, меньше она быть не может, так как возникает противоречие с максимальной НОД. По аналогичным соображениям степень вхождения p в $[a, b]$ равна $\max(\alpha, \beta)$.

Итого имеем, что в левую часть p входит в степени $\alpha + \beta$, а в правую в степени $\min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta)$, но очевидно, что $\alpha + \beta = \min(\alpha, \beta) + \max(\alpha, \beta)$ для любых α и β . Следовательно для любого простого p верно, что оно входит в разложения обеих частей в равной степени, значит, равенство выполняется.

Факт 2 a и b — натуральные числа, их НОД равен d . Тогда $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$, то есть такие числа взаимно просты.

Доказательство

Допустим противное, пусть $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$ делится на некоторое простое p . Тогда $\frac{a}{d} : p$ и $\frac{b}{d} : p$. Положим $d_1 = p \cdot d$. Тогда $a : d_1$, $b : d_1$, $d_1 > d$, получили противоречие с тем, что d — НОД a и b .

2.4 Формула для количества делителей числа

Лемма Пусть натуральное число n имеет канонический вид

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}, \text{ где } p_1 < p_2 < \dots < p_k \text{ — простые числа, } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \text{ — натуральные.}$$

Тогда общее количество D_n различных делителей числа n выражается формулой

$$D_n = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1)$$

Доказательство

Определим произвольный делитель d числа n как некоторое число, в разложение которого каждый простой множитель входит в степени не большей, чем степень вхождения этого простого множителя в разложение числа n . Это можно записать так

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}, \text{ где } 0 \leq \beta_1 \leq \alpha_1, 0 \leq \beta_2 \leq \alpha_2, \dots, 0 \leq \beta_k \leq \alpha_k$$

Таким образом, набор соответствующих β единственным образом задает делитель. Посчитаем количество таких наборов. Есть $\alpha_i + 1$ способов выбрать b_i из набора $0, 1, \dots, \alpha_i$, каждое b_i выбирается независимо, перемножив, получаем нужную формулу.

Пример. Рассмотрим число

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1.$$

Его количество делителей будет равно $D_{60} = (2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Проверим полученный ответ, выписав все делители числа 60:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$$

2.5 Определения НОК и НОД для произвольного количества чисел

Определение Наибольшим общим делителем для набора из n чисел называется наибольшее натуральное число, на которое делится каждое число из набора.

Определение Наименьшим общим кратным для набора из n чисел называется наименьшее натуральное число, которое делится на каждое число из набора.

Задача формата ЕГЭ (18)

а) Приведите пример 5 различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно 105.

б) Можно ли расставить по кругу 8 различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равнялось 300, а наибольший общий делитель любых трех подряд идущих чисел равнялся 1?

в) Какое наибольшее количество различных чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно 60?

Ответ

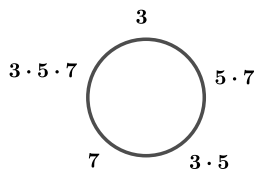
а) 3, 35, 15, 7, 105

б) Нет

в) 8

Решение

а) Разложим 105 на простые множители: $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Зная разложение, несложно подобрать нужные 5 чисел, например



б) Допустим, это возможно.

Возьмем произвольные соседние числа a и b , тогда $[a, b] = 300$. По определению $[a, b] : a \Rightarrow 300 : a$, аналогично для b . Значит, каждое число в кругу является делителем числа 300.

Разложим 300 на простые множители, получим $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Попробуем выделить среди делителей числа 300 те, которые точно не могут быть использованы.

Сразу можем исключить 1, так как с обеих сторон от нее должно стоять число 300, чтобы не нарушать условие про НОК соседей. Однако числа не могут повторяться.

Далее, рассмотрим делители 300, которые содержат 2 ровно в первой степени. Допустим, некоторое число $2t$, где t нечетно, стоит в кругу. Рассмотрим соседа s числа $2t$. По условию $[s, 2t] = 300 : 4$, причем $2t$ не делится на 4, следовательно, $s : 4$. Аналогично и второй сосед r числа $2t$ также делится на 4. По условию должно выполняться $(s, 2t, r) = 1$, однако $s : 4$, $2t : 2$, $r : 4$, то есть их НОД должен быть четным. Получаем противоречие, значит, ни один из делителей числа 300 вида $2t$, где t нечетно, не мог быть использован.

Выпишем все оставшиеся делители, их 11

$$3, \underline{5}, 2^2, 5^2, \underline{3 \cdot 5}, 2^2 \cdot 3, \underline{2^2 \cdot 5}, 3 \cdot 5^2, 2^2 \cdot 5^2, \underline{2^2 \cdot 3 \cdot 5}, 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Выделены те делители, которые содержат 5 ровно в первой степени. Их мы можем исключить по соображениям, аналогичным приведенным выше. Заметим, что нам было совершенно несущественно, что именно 2 входит в первой степени, и при замене 2 на произвольное простое число ничего не изменится. Итого, неисключенными остались $11 - 4 = 7$ чисел, а по кругу должны быть расставлены 8. Противоречие.

в) Допустим, мы имеем корректную расстановку на некоторое количество чисел. Возьмем произвольные соседние числа a и b , тогда $[a, b] = 60$. По определению $[a, b] : a \Rightarrow 60 : a$, аналогично для b . Значит, каждое число в кругу является делителем числа 60.

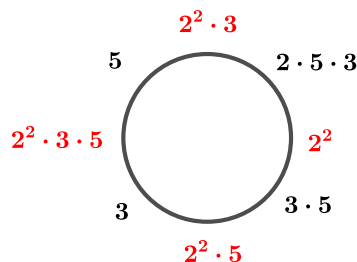
Разложим 60 на простые множители, получим $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Выпишем все его делители

$$1, 2, 3, 5, 2^2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Получили 12 различных делителей. Проверить себя можно, посчитав количество делителей по формуле: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

В каждой паре соседей НОК должен быть равен 60, а значит, кратен 4, следовательно, в каждой паре соседних хотя бы одно из чисел должно быть кратно 4, значит, не должно быть такого, что два числа подряд по кругу не делятся на 4. Получили, что хотя бы половина чисел в кругу кратна 4. Всего в нашем списке 4 числа, кратных 4, а значит общее количество чисел в кругу не превосходит 8.

Построим пример на 8 (красным для удобства восприятия обозначены числа, кратные 4).



3 Остатки

3.1 Что такое остаток?

Рассмотрим на примере остатка при делении на 3. Найдем остаток от 7 при делении на 3. Мы можем вычесть 3 из 7 два раза, таким образом, $7 - 3 - 3 = 1$, то есть 1 — остаток от 7 при делении на 3.

Из этого следует, что остатками при делении на 3 могут являться только числа 0, 1 и 2.

Определение *Остатком* числа a при делении на b называют такое число r , что $0 \leq r < b$ и $a - r$ делится на b . Имеет место представление $a = kb + r$, где k — *неполное частное*.

Из определения остатка следует, что это целое неотрицательное число, меньшее делителя, то есть при делении, например, на 5 числа могут давать только остатки, равные 0, 1, 2, 3 или 4.

3.2 «Одеваем очки по модулю»

Итак, пусть на доске выписаны числа 0, 1, 2, 3 и так далее. Давайте «оденем очки по модулю» (именно «оденем»). Представим, что такие очки позволяют вместо числа видеть его остаток при делении на определенное число. Тогда если мы «оденем очки по модулю 3», то мы увидим следующее:

Без очков:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
В очках по модулю 3:	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	...

Таким образом, на числовой оси остатки располагаются циклично: 0, 1, 2 и так далее.

3.3 Арифметика остатков

Мы знаем, что числа можно складывать, вычитать и умножать. Эти же действия можно делать и с остатками. Важно: делить остатки нельзя!

То есть вместо того, чтобы работать с числами, можно проделывать арифметические операции с их остатками по определенному модулю.

Пример: найдем остаток числа $7 \cdot 5 + 10$ при делении на 3.

Конечно, можно честно посчитать:

$$7 \cdot 5 + 10 = 35 + 10 = 45 = 15 \cdot 3 \Rightarrow 45 : 3 \Rightarrow \text{остаток} = 0$$

Но если бы числа были большими, то считать не очень хотелось бы. Вместо этого мы можем «одеть очки по модулю 3» и смотреть на остатки чисел: 7 дает остаток 1 при делении на 3, 5 дает остаток 2, 10 дает остаток 1. Тогда

$$1 \cdot 2 + 1 = 3 : 3 \Rightarrow \text{остаток} = 0$$

4 Сравнения по модулю

4.1 Важнейшие свойства сравнений

Определение Целые числа a и b , разность которых делится на натуральное число m , называют *сравними по модулю m* . Записывают так: $a \equiv b \pmod{m}$.

NB Для неотрицательных чисел определение можно интерпретировать так, что a и b дают равные остатки при делении на m .

Свойства сравнений

Везде ниже все числа целые, модуль m — натуральный.

- Сравнения можно умножать на число

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow ak \equiv bk \pmod{m}$$

- Сравнения можно складывать

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{array} \right\} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$$

- Сравнения можно перемножать

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv b \pmod{m} \\ c \equiv d \pmod{m} \end{array} \right\} \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$$

- Сравнения можно возводить в степень

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^k \equiv b^k \pmod{m}$$

4.2 А зачем нам вообще это нужно?

Фактически вышеперечисленные свойства позволяют нам удобнее работать с остатками и делимостью. К примеру, раньше, если нам нужно было вычислить остаток, который дает какое-то сложное выражения (содержащее операции умножения, сложения, вычитания и возведения в степень, скобки, все это в произвольном порядке) при делении на некоторое число, мы бы стали вычислять значение этого выражения и лишь в конце искать остаток результата. Теперь же мы можем заменить все числа на их остатки, что может существенно упростить вычисления, а также заменять результат на его остаток по ходу вычисления. Следующая задача иллюстрирует, что здесь имеется в виду.

6. Докажите, что число $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ делится на 999.

Решение

По сути, нам нужно доказать, что

$$1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24 \equiv 0 \pmod{999}$$

Мы можем заменить любое число на сравнимое с ним по модулю 999, значит,

$$1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 24 \equiv 0 \pmod{999}$$

4.3 Остатки отрицательных чисел

Остановимся чуть подробнее на остатках отрицательных чисел, потому что иногда на первый взгляд то, как они устроены, может показаться неинтуитивным.

Определение Определим *остаток* числа a по модулю m как наименьшее целое неотрицательное число, которое нужно **вычесть** из a , чтобы разность делилась на m .

Можно заметить связь этого определения с [определением сравнимых по модулю чисел](#). По данному только что определению -7 дает остаток 3 по модулю 10, так как из -7 нужно вычесть минимум 3, чтобы разность делилась на 10; -99 дает остаток 1 по модулю 100, а -1 дает остаток $m - 1$ по любому модулю m .

7. На какую цифру оканчивается число $9^{2015} + 7^{2016}$?

Ответ

0

Решение

Нам нужно найти, с чем сравнима данная сумма по модулю 10.

$$\begin{aligned}9 &\equiv -1 \pmod{10} &\Rightarrow & 9^{2015} \equiv (-1)^{2015} \equiv -1 \pmod{10} \\7 &\equiv -3 \pmod{10} &\Rightarrow & 7^{2016} \equiv (-3)^{2016} \equiv 9^{1008} \equiv (-1)^{1008} \equiv 1 \pmod{10}\end{aligned}$$

Получили что сумма сравнима с $-1 + 1 = 0$ по модулю 10, а значит, оканчивается нулем. Если какие-то сравнения в цепочках не до конца понятны, рекомендуется обратиться к [основным свойствам](#) и проверить по определению.

5 Признаки равноостаточности

5.1 Признаки равноостаточности по модулям 9 и 3

Формулировка: Число и его сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 3/на 9. В частности, число делится на 3/на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3/на 9.

8. Дано число 237581. Найдите его остаток при делении на 3.

Ответ

2

Решение

Можно начать делить это число в столбик, но это не очень удобно. Вместо этого можно посчитать сумму цифр этого числа и найти ее остаток при делении на 3:

$$2 + 3 + 7 + 5 + 8 + 1 = (2 + 8) + (3 + 7) + (5 + 1) = 10 + 10 + 6 = 26 = 8 \cdot 3 + 2 \quad \Rightarrow \quad \text{остаток} = 2$$

Почему это работает? Рассмотрим число 7581 и рассмотрим его десятичную запись:

$$7581 = 7 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 1$$

Теперь «оденем очки по модулю 3» и посмотрим только на числа 1000, 100 и 10. Тогда

$$\begin{aligned}10 &= 9 + 1 &\Rightarrow & \text{остаток} = 1 \\100 &= 99 + 1 &\Rightarrow & \text{остаток} = 1 \\1000 &= 999 + 1 &\Rightarrow & \text{остаток} = 1\end{aligned}$$

Тогда мы увидим

$$7 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 1 = 7 + 5 + 8 + 1$$

Значит, само число и его сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 3. Для 9 тоже справедливо данное рассуждение, так как 9, 99 и 999 делятся на 9. Даже если число будет состоять из большего количества цифр, то числа 10000, 100000 и далее дают остаток 1 и при делении на 3, и при делении на 9.

Доказательство

Представим число в виде его десятичной записи $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$. Хотим доказать, что

$$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_0 \pmod{9} \quad \text{и} \quad \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_0 \pmod{3}$$

Распишем

$$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_0 \cdot 10^0$$

Несложно понять, что для любого целого неотрицательного i верно, что $10^i \equiv 1 \pmod{9}$ и $10^i \equiv 1 \pmod{3}$. Это следует, например, из свойства сравнений про возведение в степень. Тогда

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_0 \cdot 10^0 \equiv a_k \cdot 1 + a_{k-1} \cdot 1 + \dots + a_0 \cdot 1 \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_0 \pmod{9}$$

$$a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_0 \cdot 10^0 \equiv a_k \cdot 1 + a_{k-1} \cdot 1 + \dots + a_0 \cdot 1 \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_0 \pmod{3}$$

5.2 Признаки равноостаточности по модулям 8 и 4

Формулировка: Любое натуральное число сравнимо с числом, образованным его последними тремя цифрами, по модулю 8.

Доказательство

Представим число в виде его десятичной записи $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$. Хотим доказать, что

$$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_0} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0} \pmod{8}$$

Это равносильно следующему

$$\overline{a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0} - \overline{a_2 a_1 a_0} \equiv 0 \pmod{8} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a_k a_{k-1} \dots a_3 000} \equiv 0 \pmod{8}$$

Последнее сравнение верно, так как любое число с тремя нулями на конце делится на 1000, а значит, и на 8.

Формулировка: Любое натуральное число сравнимо с числом, образованным его последними двумя цифрами, по модулю 4.

Доказательство этого признака аналогично предыдущему.

5.3 Признак делимости на 11

Формулировка: Число и его знакопеременная сумма цифр, посчитанная справа налево, дают одинаковые остатки при делении на 11.

Пусть дано число 7851. Тогда знакопеременная сумма справа налево равна

$$1 - 5 + 8 - 7 = (1 + 8) - (5 + 7) = -3$$

Почему работает признак? Рассмотрим десятичную запись числа 7851:

$$7851 = 7 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 1$$

Теперь поймем, что в «очках по модулю 3» мы можем видеть не только остатки по модулю 3. Например, если мы захотим, то вместо 7 мы можем видеть 4, так как 7 и 4 дают одинаковые остатки при делении на 3.

Таким образом, вместо числа 7 мы можем увидеть любое число, дающее такой же остаток при делении на 3, что и 7. Поймем, что такие числа располагаются на расстоянии, кратном 3, друг от друга. Тогда если к числу 7 мы прибавим или вычтем что-то, что делится на 3, мы получим число с таким же остатком.

Теперь посмотрим на число 10 в «очках по модулю 11». Если мы захотим видеть остатки, то увидим 10, но это неудобно. Поэтому мы вычтем 11 из 10, тогда мы увидим число -1 , которое дает такой же остаток при делении на 11, что и 10.

Посмотрим на число 100. Так как $100 = 99 + 1$, то 100 дает остаток 1 при делении на 11.

Посмотрим на число 1000. Заметим, что $1000 = 990 + 10$, значит, 1000 дает остаток 10 при делении на 11, следовательно, вместо него мы можем увидеть -1 . Тогда

$$7 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 1 \equiv 7 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + 1 = -7 + 8 - 5 + 1$$

Таким образом, если нас просят найти остаток от числа при делении на 11, мы можем искать остаток знакопеременной суммы цифр, записанной справа налево, то есть, например, для числа 7851 нужно вычислить сумму $1 - 5 + 8 - 7$.

Если же у нас спрашивают, делится ли число на 11, то можно просто посчитать разность суммы цифр на четных местах и суммы цифр на нечетных, то есть, например, для числа 27851 можно посчитать либо разность $(1 + 8 + 2) - (5 + 7)$, либо разность $(5 + 7) - (1 + 8 + 2)$.

Задача формата ЕГЭ (18)

Назовем натуральное число хорошим, если в нем можно переставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на 11.

- а) Является ли число 1234 хорошим?
- б) Является ли число 12345 хорошим?
- в) Найти наибольшее хорошее число, состоящее из различных нечетных цифр.

Ответ

- а) Да
- б) Нет
- в) 9753

Решение

Число делится на 11, если разность суммы цифр в нечетных разрядах и суммы цифр в четных делится на 11.

а) Чтобы число являлось хорошим, нам нужно переставить в нем цифры так, чтобы оно делилось на 11, то есть чтобы разность его суммы цифр в нечетных разрядах и суммы цифр в четных была кратна 11.

Попробуем сделать так, чтобы такая разность была равна 0. Заметим, что

$$(2 + 3) - (1 + 4) = 0 : 11$$

Тогда можем составить число 1243, которое по признаку делимости будет кратно 11. Проверим: $1243 = 11 \cdot 113$.

б) Проверим изначальное число 12345:

$$(1 + 3 + 5) - (2 + 4) = 9 - 6 = 3 \not\div 11$$

Рассмотрим, какое значение может принимать разность суммы цифр в нечетных разрядах и суммы цифр в четных, если мы можем переставлять только цифры 1, 2, 3, 4 и 5. Пусть a, b, c, d и e — цифры 1, 2, 3, 4 и 5 в каком-то порядке. Тогда число \overline{abcde} делится на 11, если

$$(a + c + e) - (b + d) \div 11$$

Оценим значение этого выражения. Оно максимально, если на нечетных местах стоят три наибольшие цифры, а на четных — две наименьшие, то есть

$$\max = (5 + 4 + 3) - (2 + 1) = 12 - 3 = 9$$

Аналогично оценим минимальное значение. Если на нечетных местах стоят три наименьшие цифры, а на четных — две наибольшие, то разность минимальна, то есть

$$\min = (1 + 2 + 3) - (4 + 5) = 6 - 9 = -3$$

Значит, если из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 можно составить число, которое делится на 11, то разность суммы цифр в нечетных разрядах и суммы цифр в четных должна быть равна 0.

Заметим, что среди цифр 1, 2, 3, 4 и 5 три нечетные цифры (1, 3 и 5) и две четные (2 и 4), значит, как бы мы ни складывали или как бы мы ни вычитали нечетные и четные цифры, главное то, что в нашем наборе нечетное количество нечетных цифр. Следовательно, в итоге

$$(a + c + e) - (b + d) \neq 0$$

Значит, 12345 не является хорошим числом.

в) Докажем, что число, составленное из всех пяти нечетных цифр, не будет делиться на 11. Предположим обратное, пусть такое число можно составить. Тогда оно состоит из пяти различных нечетных цифр, то есть это число является некоторой перестановкой цифр 1, 3, 5, 7 и 9.

Пусть это число \overline{abcde} . Тогда воспользуемся идеей из предыдущего пункта и оценим значение этого выражения:

$$\begin{aligned}\max &= (9 + 7 + 5) - (3 + 1) = 17 \\ \min &= (1 + 3 + 5) - (7 + 9) = -7\end{aligned}$$

Таким образом, если число \overline{abcde} делится на 11, то разность суммы его цифр на нечетных местах и суммы цифр на четных равна либо 0, либо 11.

Так как в этой разности участвуют только 5 нечетных цифр, то она всегда будет нечетной. Значит, если число \overline{abcde} делится на 11, то разность суммы его цифр на нечетных местах и суммы цифр на четных местах должна быть равна 11.

Пусть $x = a + c + e$, а $y = b + d$. Тогда $x - y = 11$, а $x + y = a + b + c + d + e = 25$. Значит, можем составить систему:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 7 \end{cases}$$

Заметим, что y никогда не может быть равно 7, так как y должно быть четным как сумма двух нечетных цифр. Тогда не существует числа, состоящего из всех пяти нечетных цифр, которое делится на 11.

Рассмотрим наибольшее четырехзначное число, состоящее из различных нечетных цифр. Это число 9753. Заметим, что

$$(9 + 3) - (7 + 5) = 0 \Rightarrow 9537 : 11$$

Значит, число 9753 является хорошим, так как число 9537 кратно 11.

6 Олимпиадные идеи

6.1 Инвариант

Инвариант — это некоторая величина или свойство, которое не меняется при каких-то преобразованиях или действиях, то есть что-то, что постоянно сохраняется.

В качестве инварианта часто выступает *четность*. Если речь заходит о числах, то полезно обратить внимание на общую *сумму* и *произведение*. Также инвариантом может служить *делимость*. Зачастую инвариантами являются такие геометрические понятия, как *периметр* или *площадь*.

Решим несколько вспомогательных задач.

9. Дана таблица 2×2 . Изначально в ней записаны числа 1, 2, 3 и 4, как показано на картинке. Разрешается к любым двум числам, расположенным в соседних по стороне клетках, прибавить по единице. Может ли после некоторых действий сумма чисел в таблице стать равной 101?

1	2
4	3

Ответ

Нет, не может

Решение

Изначально сумма чисел в таблице равна $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. После любого разрешенного действия сумма чисел в таблице увеличивается на 2, так как за одно действие мы можем прибавить по единице ровно к двум числам.

Таким образом, сумма чисел в таблице всегда будет четна, то есть никогда не будет нечетной, в том числе никогда не будет равна 101.

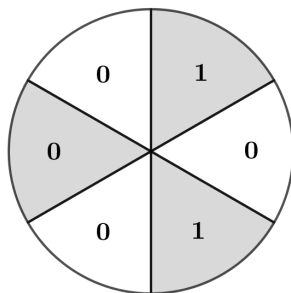
10. Круг разделен на 6 секторов, в которых по часовой стрелке стоят числа 1, 0, 1, 0, 0, 0. Разрешается прибавлять по единице к любым числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли сделать все числа равными?

Ответ

Нет, нельзя

Решение

Закрасим в черный цвет сектора, которые расположены через один, начиная с сектора с числом 1. Получим такую раскраску:



Тогда сумма чисел, стоящих в черных секторах, изначально равна 2, а в белых секторах — 0. Следовательно, разность между суммами чисел в черных секторах и белых секторах равна 2.

Так как за один ход мы добавляем по единице одновременно в два соседних сектора, то есть по единице в черный и белый сектора, то разность между этими суммами по-прежнему будет равна 2.

Заметим, что если в какой-то момент окажется, что все числа стали равными, то разность между суммами чисел в черных и белых секторах должна равняться 0. Но мы доказали, что эта разность всегда равна 2, следовательно, числа во всех секторах нельзя сделать равными.

11. На острове живут 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. При встрече два хамелеона разного цвета одновременно меняют свой цвет на третий. Может ли случиться, что через некоторое время все хамелеоны станут одного цвета?

Ответ

Нет, не может

Решение

Предположим, что может, тогда распределение по цветам будет таким в некотором порядке: 45, 0, 0.

Тогда будем следить за разностью между количеством бурых и количеством серых хамелеонов. Изначально она равна 2, то есть не кратна 3, а в конце равна 0, 45 или -45 , то есть кратна 3.

Заметим, что за каждую операцию разность либо не меняется (если встретились серый и бурый), либо увеличивается на 3 (если встретились серый и малиновый), либо уменьшается на 3 (если встретились бурый и малиновый).

Тогда остаток при делении на 3 нашей разности не меняется и не может стать нулем. Следовательно, все хамелеоны не могут стать одного цвета.

Задача ЕГЭ, 2022 (18)

Есть три коробки: в первой коробке 64 камня, во второй — 77 камней, а в третьей коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

- а) Может ли в первой коробке оказаться 64 камня, во второй — 59 камней, а в третьей — 18 камней?
- б) Может ли в третьей коробке оказаться 141 камень?
- в) В первой коробке оказался 1 камень. Какое наибольшее число камней может оказаться в третьей коробке?

Ответ

- а) Да, может
- б) Нет, не может
- в) 138

Решение

Заметим, что пункт б) этой задачи очень сильно похож на предыдущую задачу про хамелеонов, поэтому начнем с него.

б) Рассмотрим разность чисел камней во второй и первой коробках. Пусть в первой сейчас a камней, во второй b камней. Тогда разность равна $b - a$.

Если мы переложим два камня в первую коробку, то разность будет равна

$$(b - 1) - (a + 2) = b - a - 3$$

Если мы переложим два камня во вторую коробку, то разность будет равна

$$(b + 2) - (a - 1) = b - a + 3$$

Если мы переложим два камня в третью коробку, то разность будет равна

$$(b - 1) - (a - 1) = b - a$$

Мы получили, что после любой операции разность либо изменяется на 3, либо остается прежней, то есть после любых операций разность должна измениться на число, кратное 3.

Тогда если в третьей коробке после некоторых операций могли оказаться все $64 + 77 + 0 = 141$ камень, то в конце разность между количеством камней во второй и в первой коробках должна быть равна $0 - 0 = 0$.

Изначально разность была равна $77 - 64 = 13$, значит, она изменилась на $13 - 0 = 13$. Однако 13 не делится на 3, значит, в третьей коробке не мог оказаться 141 камень.

а) Покажем, как переместить ровно три камня из второй коробки в третью:

$$(64; 77; 0) \rightarrow (63; 76; 2) \rightarrow (62; 75; 4) \rightarrow (64; 74; 3)$$

За 6 раз такими операциями мы можем переместить 18 камней из второй коробки в третью. Значит, могло оказаться так, что в первой коробке лежат 64 камня, во второй — 59 камней, а в третьей — 18 камней.

в) Аналогично пункту б) мы можем доказать, что разность между любыми двумя коробками может измениться только на число, кратное 3.

Тогда посмотрим на изначальную разность между второй и первой коробками. Она равна $77 - 64 = 13$. По условию в первой коробке оказался 1 камень.

Найдем наименьшее количество $b \geq 0$ камней, которое могло оказаться во второй коробке. Так как разность изменяется на число, кратное 3, то имеем:

$$b - 1 = 13 + 3k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad b = 14 + 3k \quad \xRightarrow{b \geq 0} \quad b \geq 2$$

Тогда в третьей коробке может быть не более $141 - 1 - 2 = 138$ камней.

Покажем, как можно добиться 138 камней ровно. Сначала научимся перемещать по 3 камня в третью коробку из каждой другой:

$$(64; 77; 0) \rightarrow (63; 76; 2) \rightarrow (62; 75; 4) \rightarrow (64; 74; 3) \rightarrow (63; 73; 5) \rightarrow (62; 72; 7) \rightarrow (61; 74; 6)$$

Заметим, что для того, чтобы можно было проделать такие операции, в первых двух коробках должно быть хотя бы 3 и 5 камней. Тогда мы можем делать такие операции, пока не дойдем до ситуации $(4; 17; 120)$.

Теперь будем перекладывать по 3 камня из второй коробки в третью:

$$(4; 17; 120) \rightarrow (4; 14; 123) \rightarrow (4; 11; 126) \rightarrow (4; 8; 129) \rightarrow (4; 5; 132)$$

Окончательно имеем:

$$(4; 5; 132) \rightarrow (3; 4; 134) \rightarrow (2; 3; 136) \rightarrow (4; 2; 135) \rightarrow (3; 1; 137) \rightarrow (2; 0; 139) \rightarrow (1; 2; 138)$$

6.2 Полуинвариант

Напомним, что *инвариантом* называется величина, не меняющаяся при некотором процессе.

Теперь скажем, что *полуинвариант* — величина, которая при некотором процессе может меняться только в одну сторону: она либо всегда уменьшается, либо всегда увеличивается.

Рассмотрим несколько примеров.

12. В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше чем плюсов, разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время и во всех строках, и во всех столбцах плюсов будет больше чем минусов.

Решение

Рассмотрим общее количество плюсов. Заметим, что при указанной в условии операции это количество постоянно увеличивается хотя бы на 1.

Так не может продолжаться бесконечно, так как всего клеток в таблице $99^2 = 9801$. Значит, рано или поздно нельзя будет сделать ход, то есть в каждой линии плюсов будет больше, чем минусов.

В этой задаче полуинвариант напрашивался сам собой: речь шла про количество плюсов и минусов в линиях, нужно было лишь обобщить его на всю доску.

13. На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.

Решение

Посмотрим, что происходит с периметром всей клетчатой фигуры, заросшей бурьяном. Когда новая клетка заполняется бурьяном, она имеет хотя бы две заросшие соседние клетки, а значит хотя бы две ее стороны уже до ее заполнения посчитаны в общем периметре всей фигуры. Тогда после ее заполнения она сможет добавить в периметр не более двух новых сторон, то есть увеличить периметр не более, чем на 2. При этом все ее стороны, которыми она примыкает к соседним заросшим клеткам, «удаляются» из периметра, то есть больше не будут на границе фигуры. Значит, периметр уменьшится хотя бы на 2. Итого, после одной операции периметр не увеличится.

Тогда периметр на протяжении всего процесса будет не более $4 \cdot 9$ — изначального периметра девяти клеток, а значит не сможет стать равным $4 \cdot 10$, то есть периметру всего поля.

6.3 Принцип крайнего

Под *принципом крайнего* в математике принято понимать рассуждения, в которых фигурируют объекты с экстремальными свойствами: самый большой, самый длинный, самый правый, и так далее. Эти свойства выбираются исходя из задачи. Собственно, именно в искусстве выбора таких свойств и состоит основная сложность таких задач.

Для начала рассмотрим следующую задачу.

14. На шахматной доске 8×8 стоит несколько ладей. Докажите, что какая-то из ладей бьет не более двух других.

Решение

Рассмотрим самую левую ладью, а если таких несколько — из них самую нижнюю. Рассматриваемая ладья, во-первых, не бьет ни одной фигуры слева от себя, иначе была бы более левая ладья, а также не бьет ни одной фигуры снизу, иначе мы бы выбрали ладью ниже. Поэтому такая ладья бьет не более двух других: сверху и справа.

Как видим, существование ладьи, бьющей не более двух других, вызывает вопросы, а вот существование самой левой ладьи, а из левых ладей — самой нижней, не вызывает никакого удивления. Тем самым мы искусно подменяем понятия и доказываем, что описанная выше ладья подходит под условие задачи.

А вот другой пример, где крайний объект выбирается по-другому. Общее правило выбора крайнего свойства такое: надо понять, где с большими шансами может находиться подходящий объект, а затем аккуратно сформулировать свойства такого объекта.

15. По кругу выписаны несколько чисел, каждое равно полусумме двух соседних. Докажите, что все числа равны.

Решение

Рассмотрим самое большое из выписанных чисел. Если таких несколько, то рассмотрим любое. Обозначим это число через b , а его соседей — через a и c . Тогда по условию $2b = a + c$. Но в силу выбора b мы имеем два неравенства: $b \geq a$ и $b \geq c$. Поэтому равенство $2b = a + c$ возможно только в случае, когда $a = b = c$. Продолжая рассуждения для числа c и его соседей b и d получаем, что следующее число d также равно наибольшему числу. Таким образом мы получим, что все числа равны между собой.

Разумеется, в данном случае отлично подходит и самое маленькое из чисел.

В следующем примере можно воспользоваться полуинвариантом, а можно решить задачу короче с помощью принципа крайнего. Рассмотрим именно второе решение.

16. Новая футбольная схема тренера Г. предлагает игрокам всегда при получении мяча делать пас ближайшему, а самим не двигаться с места. Докажите, что если изначально все попарные расстояния между игроками различны, то рано или поздно какие-то двое будут передавать мяч друг другу.

Решение

Из всех игроков, до которых дошел мяч, выберем двух человек A и B , между которыми расстояние наименьшее. Тогда рано или поздно до кого-то из этих двух, в силу их выбора, дойдет мяч. В этот момент мяч будет переходить только от A к B и обратно: ведь из всех, до кого доходит мяч, у игрока A минимальное расстояние именно до B , и то же верно для игрока B по отношению к A . Значит, именно эти двое и будут передавать мяч друг другу.

Вот так можно выбирать объекты с экстремальными свойствами и за счет этого решать задачи. При этом следует помнить, что здесь очень важно четко формулировать свойства рассматриваемого объекта, тогда решение будет следовать буквально из этих свойств.

6.4 Турниры

Однокруговой турнир — турнир, в котором каждый участник сыграл с каждым ровно по одному разу.

Обычно в условии описаны особенности турнира: количество кругов, участников и турнирных очков за победу, ничью и поражение. Рассмотрим пример турнира.

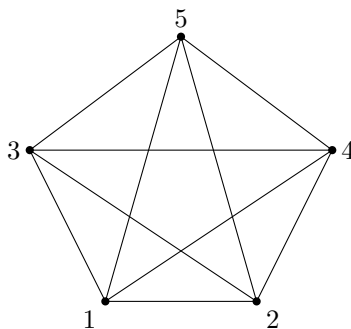
Пусть состоялся однокруговой турнир, в котором за победу начислялось 2 очка, за поражение — 0, а за ничью — 1 очко. В нем участвовало 5 команд.

Найдем общее количество игр на турнире. Всего на турнире 5 команд. Турнир был однокруговой, то есть каждая команда сыграла с каждой. Значит, любая команда сыграла ровно 4 игры, так как сама с собой команда играть не может. Таким образом, мы получили $5 \cdot 4 = 20$ игр. Но это еще не всё.

Рассмотрим одну игру, например, между первой и третьей командами. Эту игру мы посчитали дважды: когда брали первую команду и считали ее четыре игры и когда брали третью команду и считали ее четыре игры. Таким образом, каждую из игр мы посчитали у обеих команд, которые в ней участвовали. Следовательно, полученный результат мы должны поделить на 2. Тогда всего на турнире было сыграно

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ игр.}$$

Правильность подсчетов легко проверить, нарисовав картинку турнира:



Наши рассуждения не зависели от количества команд, поэтому можем написать формулу количества игр в однокруговом турнире, в котором участвовали n команд. В таком турнире каждая команда сыграла $n - 1$ игру, поэтому игр всего в турнире было

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2}.$$

Теперь задумаемся о результатах турнира. Какое наибольшее количество турнирных очков могла набрать команда?

Посмотрим на команду, которая набрала наибольшее количество очков. В нашем случае она сыграла 4 игры, значит, выиграла не более четырех игр. Тогда и набрать она могла не более $4 \cdot 2 = 8$ турнирных очков.

А какое общее количество турнирных очков в сумме набрали все команды?

Исходя из описания турнира, мы можем понять, что в каждой игре разыгрывалось по 2 очка. Игр всего было 10, значит, общее количество очков равно $10 \cdot 2 = 20$.

Важно! Не всегда бывает так, что сумма очков, разыгранных в партии, не зависит от результата матча. Например, если за ничью дают по 1 очку, за победу — 3 очка, а за поражение — 0 очков, то чтобы посчитать общее количество очков, нам нужно знать количество ничьих.

Наложим на наш пример дополнительное условие: все команды набрали различное количество очков. Тогда мы можем оценить максимальное количество очков проигравшей команды.

Пусть команда, набравшая наименьшее количество очков, набрала хотя бы 3 очка. Тогда следующая по количеству очков команда набрала хотя бы 4, следующая — хотя бы 5 и так далее. Получаем, что общее количество очков не меньше чем

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25 > 20.$$

Такого быть не могло, так как в турнире разыгрывалось всего 20 очков. Тогда пусть команда, набравшая наименьшее количество очков, набрала хотя бы 2 очка. Значит, общее количество очков не меньше чем

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20.$$

Теперь противоречия нет, значит, команда, набравшая наименьшее количество очков, набрала не более 2 очков.

Сейчас может показаться, что мы ответили на вопрос: «Какое наибольшее количество очков может быть у команды, которая набрала наименьшее количество очков?» Заметим, что мы еще не доказали, что 2 — наибольшее количество очков. Мы показали, что теоретически такое возможно, но на практике может оказаться, что комбинации игр, в которой такая команда набирает 2 очка, нет. Чтобы окончательно ответить на этот вопрос, нужно привести пример: турнирную таблицу или другое описание результатов матчей, в которых проигравшая команда набрала ровно 2 очка.

Приведем такой пример — турнирную таблицу:

	1	2	3	4	5	Итог
1		0	2	2	2	6
2	2		0	1	2	5
3	0	2		0	2	4
4	0	1	2		0	3
5	0	0	0	2		2

6.5 Теория игр. Симметричная стратегия

Определение Будем говорить, что у игрока есть *выигрышная стратегия*, если он может выиграть, как бы ни играл соперник. Собственно, сама стратегия будет заключаться в последовательности ответов на все возможные действия соперника.

Определение *Правильной игрой* называют игру, в которой каждый из игроков при наличии у него выигрышной стратегии действует согласно этой стратегии.

Рассмотрим эту стратегию на примере задачи.

17. В двух кучах лежит по 20 конфет. Двое игроков, Крош и Ёжик, по очереди берут любое количество конфет, но только из одной кучи. Начинает Крош. Выигрывает тот, кто берет последнюю конфету. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ

Ёжик

Решение

Приведем стратегию за Ёжика, позволяющую ему победить. Будем играть за Ёжика симметрично, то есть брать то же количество конфет, что и Крош, но из другой кучи. Покажем, почему у Ёжика всегда есть ход согласно этой стратегии.

Заметим, что после хода Ёжика, если он смог сходить, в кучках находится поровну конфет, то есть картинка симметрична. Значит, сколько бы конфет ни взял Крош из одной кучи, Ёжик всегда сможет взять столько же из другой.

Итак, мы доказали, что у Ёжика всегда есть ход согласно стратегии. Значит, Ёжик не может проиграть. Но игра когда-то закончится (например, не позже, чем через 40 ходов, ведь конфет в сумме всего 40, а каждым ходом берется хотя бы одна конфета). Поэтому кто-то все-таки проиграет. Это точно не Ёжик, поэтому проиграет Крош.

Самый главный момент, на который нужно обращать внимание, это независимость действий двух игроков. Играя за Ёжика, мы не можем предполагать, как будет действовать Крош, и ни в коем случае мы не должны оперировать понятиями «выгодно»-«не выгодно», так как этими словами мы обманываем сами себя, не приводя существенную часть доказательства.

Каждый абзац решения последовательно отвечает на свой вопрос: в первом мы привели стратегию, во втором — доказали, что всегда можно сделать ход согласно этой стратегии, в третьем — объяснили, почему в итоге данная стратегия приведет Ёжика к выигрышу. При этом мы **никак** не пытались предугадывать, как же будет играть Крош, так как нам нужно доказать, что Ёжик может выиграть при **любых** действиях его соперника.

В этой задаче мы воспользовались *симметричной стратегией*, то есть стратегией, которая опирается на предыдущий ход оппонента, и в некотором смысле «повторяет» его. Симметрия бывает очень разной, и совсем не обязательно, что симметричной стратегией пользуется второй игрок. Иногда бывает, что на месте первого игрока нужно сначала «подготовиться», а уже начиная со своего второго хода действовать симметрично. Об этом следующая задача.

18. Двое игроков, Крош и Ёжик, по очереди ставят шахматные ладьи на клетки доски 11×11 , начинает Крош. Запрещено ставить ладью, если ее бьет одна из ранее поставленных. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

Ответ

Крош

Решение

Приведем за Кроша стратегию, позволяющую ему победить. Первым ходом поставим ладью в центральную клетку доски, а дальше будем ходить симметрично относительно этой клетки. Покажем, почему у Кроша всегда есть ход согласно этой стратегии.

Пусть до некоторого момента Крош мог ходить симметрично. Тогда перед ходом Ёжика картинка была симметрична относительно центральной клетки. Если Крош смог поставить ладью, то это значит, что и симметричная клетка до хода Ёжика была свободна и не побита ладьей. Осталось заметить, что ладья не может бить ладью, симметричную себе относительно центра, если она не стоит в центральном столбце или центральной строке. Значит, Крош сможет всегда сходить согласно своей стратегии.

Заметим при этом, что игра закончится не позже, чем через 121 ход, то есть когда все клетки будут заняты. Это значит, что кто-то все-таки проиграет. Мы доказали, что это не Крош, значит, проиграет Ёжик.

Важно обратить внимание на последний абзац. На самом деле мы чаще всего доказываем, что согласно стратегии у игрока, за которого мы играем, всегда будет ход. Это означает, что он **не проиграет**. Чтобы доказать, что он все-таки **выиграет**, нужно еще объяснять, почему игра закончится.

6.6 Раскраски

Наверняка вы уже встречались с задачами на разрезания. В некоторых из них нужно было догадаться, как строить примеры разрезания шахматных досок и других фигур. Но что делать, если разрезать нельзя? Есть ли какой-то способ доказательства этого факта? На самом деле такой метод есть — это метод раскраски. Давайте посмотрим на примере, как его применять.

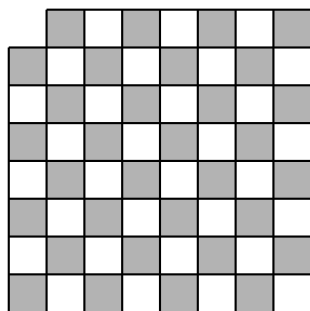
19. Из шахматной доски 8×8 вырезали две противоположные угловые клетки. Можно ли оставшуюся доску разрезать на доминошки, то есть прямоугольнички 1×2 ?

Ответ

Нет, нельзя

Решение

Раскрасим доску в шахматном порядке.



Заметим, что обе вырезанные клетки одного цвета — белого. Тогда в оставшейся доске остается 32 черных клетки и 30 белых. Но как бы мы не положили доминошку на доску, она будет занимать одну белую и одну черную клетки, значит, больше 30 доминошек из оставшейся доски мы не вырежем. А так как клеток осталось 62, то доминошек при разрезании должно получиться 31, чего не может быть.

Самая простая и распространенная раскраска — шахматная, а другую популярную раскраску мы рассмотрим в следующей задаче.

20. Можно ли выложить шахматную доску 32 доминошками так, чтобы 17 из них были расположены горизонтально, а 15 — вертикально?

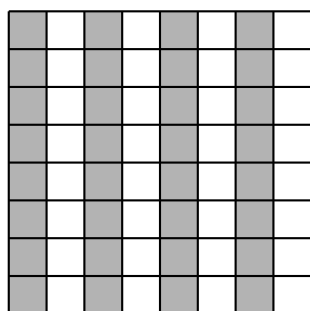
Ответ

Нет, нельзя

Решение

Сначала отметим, что шахматная раскраска здесь вряд ли поможет: она не различает вертикальные и горизонтальные доминошки, ведь и в тех, и в других одна белая и одна черная клетки. Поэтому поищем раскраску, при которой вертикальные и горизонтальные доминошки все же различаются.

Раскрасим шахматную доску вертикальным «матрасиком» в два цвета:



При такой раскраске любая горизонтальная доминошка содержит по одной белой и черной клетке, а вертикальная — либо 2 белых и 0 черных, либо наоборот, 0 белых и 2 черных. Поэтому 17 горизонтальных доминошек покроют 17 черных клеток, а 15 вертикальных — еще некоторое четное количество черных клеток. Значит, всего будет покрыто нечетное количество черных клеток. А при данной раскраске на доске 32 черные клетки, противоречие.

Существует множество других раскрасок — полосками в несколько цветов, диагональные и другие. В первой задаче можно было догадаться, какая нужна раскраска, попробовав построить пример — у вас будут оставаться две клеточки одного цвета. Во второй же сразу было ясно, что такая раскраска уже не подойдет. Ваша задача — догадаться, где какая раскраска сможет помочь. Возможно, для этого нужно будет попробовать построить примеры. Тогда, если разрезать можно, вы найдете это разрезание, а если нет — догадаетесь в чем возникает противоречие.

6.7 Соответствия и биекция

Иногда честно сосчитать количество каких-то объектов очень сложно. Но если мы хотим узнать, каких объектов больше, необязательно их считать: можно сравнить и по-другому. Для этого нужно построить *соответствие*: если так получится, что каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого множества, и наоборот, то в этих двух множествах поровну объектов. Такое соответствие еще называют *взаимно однозначным*, или *биекцией*.

Поясним на примерах.

21. В классе трансфигурации нарисована окружность. На ней отмечены 20 синих точек и 1 красная точка. Гарри посчитал количество треугольников с вершинами в синих точках, а Рон посчитал количество четырехугольников с вершинами в этих точках, у которых одна из вершин красная. У кого получилось больше фигурок?

Ответ

Поровну

Решение

Сопоставим каждой четверке точек, одна из которых красная, тройку, в которой присутствуют те же самые 3 синие точки, что и в этой четверке. Наоборот, каждой тройке синих точек сопоставим ту четверку, в которой присутствуют те же синие точки и добавляется красная точка.

Тогда мы получим соответствие между четырехугольниками, которые считал Рон, и треугольниками, которые считал Гарри. Причем каждому четырехугольнику будет соответствовать один треугольник, а каждому треугольнику — ровно один четырехугольник. Значит, фигурок у ребят поровну.

22. Усидчивый Невилл выписал все 101-значные числа, состоящие только из цифр «1» и «2». Каких чисел больше: в которых четное число единиц или в которых нечетное число единиц?

Ответ

Поровну

Решение

Вновь сопоставим числам одной группы числа другой группы. На этот раз рассмотрим произвольное число, например, 11212...211. Поменяв в нем все единицы на двойки и наоборот, мы получим число 22121...122. Заметим, что если в числе было k единиц, то после замены их будет $101 - k$. При этом числа k и $101 - k$ разной четности, так как их сумма нечетна. Поэтому из числа одной группы, то есть с четным числом единиц, мы получили число другой группы, то есть с нечетным числом единиц, и наоборот.

Мы снова получили соответствие, в котором каждому числу одного множества соответствует ровно одно число другого множества. При этом никаких чисел без пары не осталось. Значит, чисел в двух множествах поровну.

Если же однозначное соответствие построилось, но некоторые объекты остались без пары, то можно сделать вывод, что то множество, в котором остались лишние, больше.

23. У каждой домашней собаки только один хозяин. Есть люди, которые держат сразу несколько собак. Кого на Земле больше: собак или их хозяев?

Ответ

Собак

Решение

Сопоставим каждому хозяину одну из имеющихся у него собак. При этом останутся «лишние» собаки, ведь по условию у некоторых хозяев несколько собак. При этом разным хозяевам сопоставлены разные собаки. Значит, у нас получилось однозначное соответствие, каждому хозяину сопоставлена собака, но остались и лишние собаки. Значит, собак больше.

6.8 Принцип Дирихле

Поговорим об очень известном принципе Дирихле. По сути это по-другому сформулированный метод доказательства от противного.

Очень популярна такая формулировка: если нужно поселить 5 котиков в 4 домика, то в каком-то домике окажется по крайней мере 2 котика. Доказывается от противного: предположим, что это неверно, тогда *ни в каком домике не окажется 2 или более котиков*. Значит, в каждом домике не более одного котика, и тогда всего котиков не больше, чем клеток, то есть не больше 4, противоречие.

Посмотрим, как этот принцип работает в конкретных задачах.

24. Можно ли написать на доску 11 натуральных чисел так, чтобы никакая разность между выписанными числами не делилась на 10?

Ответ

Нет, нельзя

Решение

Отметим, что разность двух чисел делится на 10 в том случае, если числа оканчиваются на одну и ту же цифру.

Всего существует 10 цифр. Число может оканчиваться на каждую из них. Тогда скажем, что цифры, на которые могут оканчиваться числа — это домики, а 11 выписанных на доску чисел — это котики. Таким образом, два котика попадут в один домик, а значит какие-то два числа будут оканчиваться на одну и ту же цифру.

Следовательно, разность этих чисел будет делиться на 10. Значит, нельзя написать на доску 11 натуральных чисел так, чтобы никакая разность между выписанными числами не делилась на 10.

Рассмотрим пару утверждений:

- Если нужно поселить 21 котика в 4 домика, то в каком-то домике окажется по крайней мере 6 котиков.

Предположим противное. Пусть в каждом домике не более 5 котиков, тогда суммарно во всех домиках не более $5 \cdot 4 = 20$ котиков. Противоречие.

- Если нужно поселить 57 котиков в 7 домиков, то в каком-то домике окажется по крайней мере 9 котиков.

Действительно, если в каждом домике не более 8 котиков, то суммарно во всех домиках не более $8 \cdot 7 = 56$ котиков. Противоречие.

Тогда можем сформулировать **обобщенный принцип Дирихле**:

Если нужно поселить $nk + 1$ котика в k домиков, то в каком-то домике окажется по крайней мере $n + 1$ котик.

Доказательство

Предположим противное. Пусть в каждом домике не более n котиков, тогда суммарно во всех домиках не более $n \cdot k = nk$ котиков. А у нас всего $nk + 1$ котик. Противоречие. Значит, в каком-то домике окажется по крайней мере $n + 1$ котик.

Посмотрим, как обобщенный принцип работает в задачах.

25. Скитаясь по космосу, Пин встретил 50 инопланетян. Докажите, что среди них есть либо 8 существ, у которых ног поровну, либо 8 существ, у всех из которых разное число ног.

Решение

Предположим, что второе условие не выполнилось. Тогда количество ног у этих инопланетян принимает не больше 7 различных значений.

Заметим, что $50 = 7 \cdot 7 + 1$. Значит, по принципу Дирихле найдется такое значение количества ног у этих инопланетян, которое встречается хотя бы $7 + 1 = 8$ раз. Тогда задача решена.

Если же среди инопланетян есть 8 существ с разным числом ног, то задача тоже решена.

6.9 Графы, лемма о рукопожатиях

Граф — набор точек (*вершин*), некоторые из которых соединены линиями (*ребрами*).

В задачах часто формулируют условие без графов: например, говорят про компанию знакомых, где люди — вершины графа, а знакомства — его ребра, или про города и дороги, где города — вершины графа, а дороги между ними — ребра.

Связный граф — граф, в котором от каждой вершины можно добраться по ребрам до любой другой его вершины.

Полный граф — граф, в котором каждая вершина соединена с каждой.

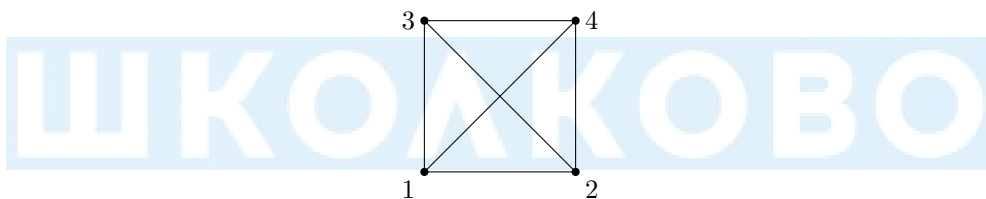
Как связаны между собой вершины и ребра? Оказывается, если дано число вершин в полном графе, то можно легко посчитать количество ребер в нем.

Рассмотрим полный граф на 4 вершинах и найдем количество ребер в нем. Всего в полном графе 4 вершины, при этом каждая вершина соединена с каждой. Значит, из любой вершины выходит ровно 3 ребра, так как сама с собой вершина не соединена. Таким образом, мы получили $4 \cdot 3 = 12$ ребер. Но это еще не всё.

Рассмотрим одно ребро, например, между первой и третьей вершинами. Это ребро мы посчитали дважды: когда брали первую вершину и считали ее три ребра и когда брали третью вершину и считали ее три ребра. Таким образом, каждое ребро мы посчитали у обеих вершин, которые оно соединяет. Следовательно, полученный результат мы должны поделить на 2. Тогда всего в полном графе на 4 вершинах проведено

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ ребер.}$$

Правильность подсчетов легко проверить, нарисовав такой граф:

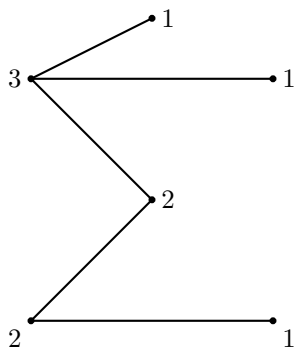


Наши рассуждения не зависели от количества вершин, поэтому можем написать формулу количества ребер в полном графе на n вершинах. В таком графе каждая вершина соединена с $n - 1$ другой вершиной, поэтому в графе всего

$$\frac{n \cdot (n - 1)}{2} \text{ ребер.}$$

Степень вершины — количество ребер, выходящих из этой вершины.

Приведем пример. Нарисуем граф и расставим около его вершин их степени.



Рассмотрим сумму степеней вершин этого графа:

$$1 + 2 + 2 + 3 + 1 + 1 = 10$$

Мы получили четное число. Докажем, что в любом графе сумма степеней вершин четна. Для этого поймем, что складывая степени вершин, мы считаем ребра, выходящие из этих вершин. Таким образом, в этой сумме мы считаем оба конца каждого ребра, то есть сумма степеней вершин — это удвоенное количество ребер графа. Следовательно, сумма степеней вершин четна.

Из этого факта следует очень важная лемма.

Лемма о рукопожатиях

В любом графе количество вершин нечетной степени четно.

Доказательство

Мы знаем, что сумма степеней вершин графа четна. Разделим вершины на две группы: вершины четной степени и вершины нечетной степени.

Очевидно, что сумма степеней вершин четной степени четна. Тогда и сумма степеней вершин нечетной степени четна, так как сумма всех степеней вершин четна.

Итак, мы знаем, что сумма степеней вершин нечетной степени четна. Пусть в графе всего n вершин нечетной степени. Тогда эта сумма есть ни что иное как сумма n нечетных чисел:

$$\underbrace{H + H + \dots + H}_{n \text{ чисел}} = Ч$$

Такое возможно только при четном n . Значит, в любом графе количество вершин нечетной степени четно. Решим несколько задач на графы.

26. В стране 96 городов, из которых 24 — «областные». Некоторые пары городов соединены между собой дорогами (но не более чем одной), причём любой путь по дорогам между двумя обычными городами, если он есть, проходит хотя бы через один «областной» город. Какое наибольшее количество дорог могло быть в этой стране?

Ответ

2004

Решение

Обычные города не соединены дорогами, иначе бы существовал путь, не проходящий через областной город. Значит, максимальное число дорог будет в том случае, когда каждый обычный город соединен с каждым областным и все областные соединены между собой.

Таким образом, ребер вида «областной-областной» будет ровно $\frac{24 \cdot 23}{2}$, а ребер вида «обычный-областной» — ровно $24 \cdot (96 - 24)$. Тогда всего дорог

$$\frac{24 \cdot 23}{2} + 24 \cdot (96 - 24) = 276 + 1728 = 2004.$$

7 Уравнения

7.1 Линейные диофантовы уравнения с двумя неизвестными

Определение Однородным линейным диофантовым уравнением с двумя неизвестными называется уравнение вида $ax + by = 0$, где $a, b \in \mathbb{Z}$ и $(a, b) = 1$.

Теорема

Если a и b — взаимно простые числа, то уравнение $ax + by = 0$ имеет бесконечно много решений в целых числах, а именно каждая пара чисел $x = bu$ и $y = -au$ для любого $u \in \mathbb{Z}$ является решением этого уравнения.

27. Решите в целых числах уравнение $40x = 63y$.

Решение

Заметим, что числа 40 и 63 взаимно просты. Следовательно, так как левая часть, то есть выражение $40x$, делится на 40, то и правая часть должна делиться на 40. Отсюда следует, что y делится на 40. Следовательно, можно представить $y = 40u$, $u \in \mathbb{Z}$. Тогда уравнение примет вид $40x = 63 \cdot 40u$, откуда $x = 63u$. Получаем, что любая пара $(63u; 40u)$, где $u \in \mathbb{Z}$, является решением данного уравнения.

Определение Неоднородным линейным диофантовым уравнением с двумя неизвестными называется уравнение вида $ax + by = c$, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Теорема

Если $(a, b) = d > 1$ и число c не делится на d , то уравнение $ax + by = c$ не имеет решений в целых числах.

Доказательство

Действительно, если $d > 1$ — НОД чисел a и b , то сумма $ax + by$ делится на d . Следовательно, так как левая часть уравнения $ax + by = c$ делится на d , то и правая часть должна делиться на d . Но c не делится на d , значит, не существует таких значений для неизвестных x и y , которые будут удовлетворять этому уравнению.

Теорема

Любое уравнение вида $ax + by = c$, где $(a, b) = 1$ и $a, b, c \in \mathbb{Z}$, имеет решения в целых числах, которые описываются формулой $x = x_0 + bu$ и $y = y_0 - au$, $u \in \mathbb{Z}$, где $(x_0; y_0)$ — некоторое частное решение этого уравнения.

Рассмотрим на примере, как находить решение подобного рода уравнений.

28. Решите в целых числах уравнение $3x + 5y = 7$.

Решение

Найдем частное решение этого уравнения: $x_0 = 4$ и $y_0 = -1$. Действительно, $3 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) = 7$. Тогда общее решение этого уравнения записывается как $x = 4 + 5u$ и $y = -1 - 3u$, $u \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим еще одно неоднородное линейное диофантово уравнение, в котором решения будут найдены несколько другим способом.

29. Фирма продавала чай в центре города по 7 рублей, а кофе по 10 рублей стакан, на вокзале по 4 рубля и 9 рублей соответственно. Всего было продано за час 20 стаканов чая и 20 стаканов кофе, при этом выручка в центре и на вокзале оказалась одинаковой. Сколько стаканов кофе было продано в центре?

Решение

Пусть x и y — число стаканов чая и кофе соответственно, проданных в центре города. Тогда на вокзале продано $20 - x$ и $20 - y$ стаканов чая и кофе соответственно. Следовательно, $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причем $x \leq 20$, $y \leq 20$.

Выручка в центре города составила $7x + 10y$, а на вокзале $4(20 - x) + 9(20 - y)$. По условию выручка в центре города и на вокзале оказалась одинаковой, следовательно, получаем уравнение

$$7x + 10y = 4(20 - x) + 9(20 - y) \Leftrightarrow 11x + 19y = 260.$$

Получили неоднородное уравнение первой степени, которое необходимо решить в целых числах.

В данном уравнении подбором сложно определить частное решение, поэтому мы поступим другим образом. Выразим из этого уравнения ту неизвестную, коэффициент перед которой наименьший, то есть x :

$$x = \frac{260 - 19y}{11} = 23 - y + \frac{7 - 8y}{11}.$$

Так как $x \in \mathbb{Z}$, то правая часть должна представлять собой целое число. Так как $y \in \mathbb{Z}$, то $23 - y \in \mathbb{Z}$, следовательно, дробь $\frac{7-8y}{11}$ также должна быть целым числом. Рассмотрим остатки при делении на 11 числа y . Мы имеем 11 различных остатков: $0, 1, 2, \dots, 9, 10$. Определим, какой остаток при делении на 11 должно иметь число y , чтобы дробь $\frac{7-8y}{11}$ была целым числом.

Если $y \equiv 0 \pmod{11}$, то $y = 11k$, $k \in \mathbb{Z}$, следовательно, $\frac{7-8y}{11} = \frac{7}{11} - 8k$ — нецелое число.

Если $y \equiv 1 \pmod{11}$, то $y = 1 + 11k$, $k \in \mathbb{Z}$, и тогда $\frac{7-8y}{11} = \frac{7-8-8 \cdot 11k}{11} = -\frac{1}{11} - 8k$ — нецелое число.

Продолжая аналогично, находим, что если $y \equiv 5 \pmod{11}$, то есть $y = 5 + 11k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $\frac{7-8y}{11} = \frac{7-40-8 \cdot 11k}{11} = -3 - 8k$ — целое число. Значит, $y = 5 + 11k$, $k \in \mathbb{Z}$. Но тогда

$$x = 23 - y + \frac{7 - 8y}{11} = 23 - 5 - 11k - 3 - 8k = 15 - 19k.$$

Так как $x, y \in \{0; 1; 2; \dots; 19; 20\}$, то k может быть только равен нулю. Следовательно, из $k = 0$ получаем $x = 15$ и $y = 5$.

Ответ: в центре было продано 5 стаканов кофе.

7.2 Произвольные диофантовы уравнения, решаемые через делимость

30. Решить в целых числах уравнение $xy + 3x - 5y = -3$.

Решение

Перепишем уравнение в виде

$$x(y + 3) - 5(y + 3) = -3 - 15 \Leftrightarrow (x - 5)(y + 3) = -18.$$

Пусть $x - 5 = a$, $y + 3 = b$. Тогда $a, b \in \mathbb{Z}$ и уравнение примет вид

$$ab = -18.$$

Делители числа 18 — это числа 1, 2, 3, 6, 9, 18. Следовательно, в качестве пар $(a; b)$ нам подходят пары $(1; -18)$, $(-1; 18)$, $(2; -9)$, $(-2; 9)$, $(3; -6)$, $(-3; 6)$, $(6; -3)$, $(-6; 3)$, $(9; -2)$, $(-9; 2)$, $(18; -1)$ и $(-18; 1)$. Следовательно, так как $x = a + 5$, $y = b - 3$, то для $(x; y)$ получаем пары $(6; -21)$, $(4; 15)$, $(7; -12)$, $(3; 6)$, $(8; -9)$, $(2; 3)$, $(11; -6)$, $(-1; 0)$, $(14; -5)$, $(-4; -1)$, $(23; -4)$ и $(-13; -2)$.