В.Е. ГМУРМАН

Теория

вероятностей и математическая статистика

Издание девятое, стереотипное

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вузов



Москва «Высшая школа» 2003

УДК 519.2 ББК 22.171

Г 55

Гмурман, В. £.

Г 55 Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов/В. Е. Гмурман. — 9-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2003. — 479 с.: ил.

ISBN 5-06-004214-6

Книга (8-е изд. 2002г.) содержит в основном весь материал програм­мы по теории вероятностей и математической статистике.Большое внима­ние уделено статистическим методам обработки экспериментальных дан­ных. В конце каждой главы помешены задачи с ответами.

Предназначается для студентов вузов и лиц, использующих вероят­ностные и статистические методы при решении практических задач.

УДК 519.2 ББК 22.171

ISBN 5-06-004214-6 © ФГУТ1 «Издательство «Высшая школа», 2003

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 14

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ Глава первая. Основные понятна теория вероятностен 17

§ 1. Испытания и события 17

§ 2. Виды случайных событий 17

[§ 3. Классическое определение вероятности 18](#bookmark3)

§ 4. Основные формуяы комбинаторики 22

[§ 5. Примеры непосредственного вычисления вероятностей 23](#bookmark5)

[§ 6. Относительная частота. Устойчивость относительной часто­ты 24](#bookmark7)

§ 7. Ограниченность классического определения вероятности.

Статистическая вероятность 26

§ 8. Геометрические вероятности 27

Задачи 30

[Глава вторая. Теорема сложения вероятностей 31](#bookmark10)

[§ 1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий 31](#bookmark11)

[§ 2. Полная группа событий 33](#bookmark12)

[§ 3. Противоположные события 34](#bookmark16)

§ 4. Принцип практической невозможности маловероятных

событий 35

Задачи 36

[Глава третья. Теорема умножения вероятностей 37](#bookmark22)

[§ 1. Произведение событий 37](#bookmark20)

3

[§ 2 Условная вероятность 37](#bookmark21)

§ 3 Теорема умножения вероятностей 38

[§ 4 Независимые события Теорема умножения для независимых событий 40](#bookmark29)

[§ 5 Вероятность появления хотя бы одного события 44](#bookmark31)

[Задачи 47](#bookmark35)

Глава четвертая Следствия теорем сложения и умножения 48

[§ 1 Теорема сложения вероятностей совместных событий 48](#bookmark37)

§ 2 Формула полной вероятности 50

[§ 3 Вероятность гипотез Формулы Бейеса 52](#bookmark57)

Задачи 53

Глава пятая Повторение испытаний 55

§ 1 Формула Бернулли 55

§ 2 Локальная теорема Лапласа 57

§ 3 Интегральная теорема Лапласа 59

§ 4 Вероятность отклонения относительной частоты от постоян­ной вероятности в независимых испытаниях 61

Задачи 63

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Глава шестая Вицы случайных величин. Задание дискретной случай­ной величины 64

§ 1 Случайная величина 64

§ 2 Дискретные и непрерывные случайные величины 65

[§ 3 Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины 65](#bookmark115)

[§ 4 Биномиальное распределение 66](#bookmark70)

§ 5 Распределение Пуассона 68

§ 6 Простейший поток событий 69

[§ 7 Геометрическое распределение 72](#bookmark74)

[§ 8 Гипергеометрическое распределение 73](#bookmark77)

Задачи 74

Глава седьмая Математическое ожидание дискретной случайной величины 75

§ 1 Числовые характеристики дискретных случайных величин 75

§ 2 Математическое ожидание дискретной случайной величины 76

§ 3 Вероятностный смысл математического ожидания 77

4

§ 4 Свойства математического ожидания 78

§ 5 Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях S3

Задачи 84

Глава восьмая Дисперсна дискретной случайной величины 85

§ 1 Целесообразность введения числовой характеристики рассе­яния случайной величины 85

§ 2 Отклонение случайной величины от ее математического ожидания 86

§ 3 Дисперсия дискретной случайной величины 87

§ 4 Формула для вычисления дисперсии 89

§ 5 Свойства дисперсии 90

§ 6 Дисперсия числа появлений события в независимых испы­таниях 92

§ 7 Среднее квадратическое отклонение 94

§ 8 Среднее квадратическое отклонение суммы взаимно независимых случайных величин 95

§ 9 Одинаково распределенные взаимно независимые случайные величины 95

[§ 10 Начальные и центральные теоретические моменты 98](#bookmark88)

Задачи 100

Глава девятая Закон больших чисел 101

§ 1 Предварительные замечания 101

§ 2 Неравенство Чебышева 101

[§3 Теорема Чебышева 103](#bookmark91)

§ 4 Сущность теоремы Чебышева 106

§ 5 Значение теоремы Чебышева для практики 107

§ 6 Теорема Бернулли 108

Задачи 110

Глава десятая Функция расиределеиия вероятностей случайной величины 111

[§ 1 Определение функции распределения 111](#bookmark94)

§ 2 Свойства функции распределения 112

[§3 График функции распределения 114](#bookmark151)

Задачи 115

Глава одиннадцатая Плотность распределения вероятностей непре­рывной случайной величины 116

§ 1 Определение плотности распределения 116

§ 2 Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал 116

5

$ 3. Нахождение функции распределения по известной плотности

распределения 118

§ 4. Свойства плотности распределения 119

$ 5. Вероятностный смысл плотности распределения 121

$ 6. Закон равномерного распределения вероятностей 122

Задачи 124

Глава двенадцатая. Норма иное рипредгвгм i 124

$ I. Числовые характеристики непрерывных случайных величин 124

5 2. Нормальное распределение 127

§ 3. Нормальная кривая 130

§ 4. Влияние параметров нормального распределения на форму

нормальной кривой 131

$ S. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной

случайной величины 132

§ 6. Вычисление вероятности заданного отклонения 133

§ 7. Правило трех сигм 134

§ 8. Понятие о теореме Ляпунова. Формулировка центральной

предельной теоремы 135

§ 9. Оценка отклонения теоретического распределения от нор­мального. Асимметрия и эксцесс 137

§ 10. Функция одного случайного аргумента и ее распределение 139 § 11. Математическое ожидание функции одного случайного

аргумента 141

§ 12. Функция двух случайных аргументов. Распределение суммы независимых слагаемых. Устойчивость нормального распреде­ления 143

§ 13. Распределение «хи квадрат\* 145

§ 14. Распределение Стьюдента 146

5 15. Распределение /\*Фишера—Снедекора 147

Задачи 147

Глава тринадцатая. Показательное распределение 149

§ 1. Определение показательного распределения 149

§ 2. Вероятность попадания в заданный интервал показательно

распределенной случайной величины 150

$ 3. Числовые характеристики показательного распределения.... 151

[§ 4. Функция надежности 152](#bookmark113)

§ 5. Показательный закон надежности 153

[$ 6. Характеристическое свойство показательного закона надеж­ности 154](#bookmark114)

Задачи 155

Глава четырнадцатая. Система двух случайных капп 155

§ 1. Понятие о системе нескольких случайных величин 155

6

§ 2. Закон распределения вероятностей дискретной двумерной

случайной величины 156

[§ 3. Функция распределения двумерной случайной величины ... 158](#bookmark117)

§ 4. Свойства функции распределения двумерной случайной

величины 159

§ 5. Вероятность попадания случайной точки в полуполосу 161

§ 6. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник. 162

§ 7. Плотность совместного распределения вероятностей непре­рывной двумерной случайной величины (двумерная плотность

вероятности) 163

§ 8. Нахождение функции распределения системы по известной

плотности распределения 163

§ 9. Вероятностный смысл двумерной плотности вероятности... 164

§ 10. Вероятность попадания случайной точки в произвольную

область 165

§11. Свойства двумерной плотности вероятности 167

§ 12. Отыскание плотностей вероятности составляющих двумер­ной случайной величины 168

§ 13. Условные законы распределения составляющих системы

дискретных случайных величин 169

§ 14. Условные законы распределения составляющих системы

непрерывных случайных величин 171

§ 15. Условное математическое ожидание 173

§ 16. Зависимые и независимые случайные величины 174

§ 17. Числовые характеристики систем двух случайных величин.

Корреляционный момент. Коэффициент корреляции 176

§ 18. Коррелированность и зависимость случайных величин 179

§ 19. Нормальный закон распределения на плоскости 181

§ 20. Линейная регрессия. Прямые линии среднеквадратической

регрессии 182

§ 21. Линейная корреляция. Нормальная корреляция 184

Задачи 185

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ Глава пятнадцатая. Выборочный метод 187

§ 1. Задачи математической статистики 187

§ 2. Краткая историческая справка 188

[§ 3. Генеральная и выборочная совокупности 188](#bookmark150)

§ 4. Повторная и бес повторная выборки. Репрезентативная вы­борка 189

7

§ 5 Способы отбора

§ 6 Статистическое распределение выборки § 7 Эмпирическая функция распределения § 8 Полигон и гистограмма Задачи

Глава шестнадцатая Стттнстичесаие оц енка параметров распреде­ления

§ 1 Статистические оценки параметров распределения § 2 Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки § 3 Генеральная средняя $ 4 Выборочная средняя

§ 5 Оценка генеральной средней по выборочной средней Ус­тойчивость выборочных средних § 6 Групповая и общая средние § 7 Отклонение от общей средней и его свойство § 8 Генеральная дисперсия § 9 Выборочная дисперсия § 10 Формула для вычисления дисперсии

§ 11 Групповая, внутригрупповая, межгрупповая и общая дисперсии

§ 12 Сложение дисперсий

§ 13 Оценка генеральной дисперсии по исправленной выбороч­ной

$ 14 Точность оценки, доверительная вероятность (надежность) Доверительный интервал

§ 15 Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном о § 16 Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном о § 17 Оценка истинного значения измеряемой величины $ 18 Доверительные интервалы для оценки среднего квад­ратического отклонения о нормального распределения $ 19 Оценка точности измерений

§ 20 Оценка вероятности (биномиального распределения) по относительной частоте

$ 21 Метод моментов для точечной оценки параметров распре­деления

$ 22 Метод наибольшего правдоподобия

§ 23 Другие характеристики вариационного ряда

Задачи

Глава семнадцатая Методы расчета саодаых характеристик выборки

§ 1 Условные варианты

8

190

192

192

194

1%

I9-1

197

198

199

200

201

203

204

205

206

207

207

210

211

213

214

216

219

220

223

224

226

229

234

235

237

237

§2 Обычные, начальные и центральные эмпирические моменты 238 § 3 Условные эмпирические моменты Отыскание центральных моментов по условным 239

[§ 4 Метоп произведений для вычисления выборочных средней и дисперсии 241](#bookmark196)

§ 5 Сведение первоначальных вариантов к равноотстоящим 243

§ 6 Эмпирические и выравнивающие (теоретические) частоты 245

§ 7 Построение нормальной кривой по опытным данным 249

§ 8 Оценка отклонения эмпирического распределения от нор­мального Асимметрия и эксцесс 250

Задачи 252

Глава восемнадцатая Элементы теории корреляции 253

§ 1 Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости 253

§ 2 Условные средние 254

§ 3 Выборочные уравнения регрессии 254

§ 4 Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии среднеквадратичной регрессии по несгруппированиым данным 255

§ 5 Корреляционная таблица 257

§ 6 Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным 259

§ 7 Выборочный коэффициент корреляции 261

§ 8 Методика вычисления выборочного коэффициента корре­ляции 262

§ 9 Пример на отыскание выборочного уравнения прямой линии регрессии 267

§ 10 Предварительные соображения к введению меры любой корреляционной связи 268

§ 11 Выборочное корреляционное отношение 270

§12 Свойства выборочного корреляционного отношения 272

§ 13 Корреляционное отношение как мера корреляционной связи Достоинства и недостатки этой меры 274

§ 14 Простейшие случаи криволинейной корреляции 275

§ 15 Понятие о множественной корреляции 276

Задачи 278

Глава девятнадцатая Статистическая проверка статистических

гипотез 281

§ 1 Статистическая гипотеза Нулевая и конкурирующая, прос­тая и сложная гипотезы 281

§ 2 Ошибки первого и второго рода 282

[§ 3 Статистический критерий проверки нулевой гипотезы На­блюдаемое значение критерия 283](#bookmark217)

9

§ 4 Критическая область Область принятия гипотезы Критические точки

§ S Отыскание правосторонней критической области

§ 6 Отыскание левосторонней и двусторонней критических

областей

§ 7 Дополнительные сведения о выборе критической области Мощность критерия

§ 8 Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных сово­купностей

§ 9 Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокуп­ности

§ 10 Сравнение двух средних нормальных генеральных совокуп­ностей, дисперсии которых известны (независимые выборки)

§ 11 Сравнение двух средних произвольно распределенных ге­неральных совокупностей (большие независимые выборки)

§ 12 Сравнение двух средних нормальных генеральных совокуп­ностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы (малые независимые выборки)

§ 13 Сравнение выборочной средней с гипотетической генераль­ной средней нормальной совокупности

§ 14 Связь между двусторонней критической областью и доверительным интервалом

§ 1S Определение минимального объема выборки при сравнении выборочной и гипотетической генеральной средних § 16 Пример на отыскание мощности критерия § 17 Сравнение двух средних нормальных генеральных совокуп­ностей с неизвестными дисперсиями (зависимые выборки)

§ 18 Сравнение наблюдаемой относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события § 19 Сравнение двух вероятностей биномиальных распределений § 20 Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам различного объема Критерий Бар­тлетта

§ 21 Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам одинакового объема Критерий Коч- рена

§ 22 Проверка гипотезы в значимости выборочного коэффициента корреляции

§ 23 Проверка гипотезы о нормальном распределении генераль­ной совокупности Критерий согласия Пирсона § 24 Методика вычисления теоретических частот нормального распределения

§ 25 Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена и проверка гипотезы о его значимости

284

285

286

287

288

293

297

303

305

308

312

313

313

314

317

319

322

325

327

329

333

335

10

§ 26 Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла и проверка гипотезы о его значимости 341

§ 27 Критерий Вилкоксона и проверка гипотезы об однород­ности двух выборок 343

Задачи 346

Глава двадцатая Однофакторный дисперсионный анализ 349

§ I Сравнение нескольких средних Понятие о дисперсионном анализе 349

§ 2 Обшая, факторная и остаточная суммы квадратов откло­нений 350

§ 3 Связь между обшей, факторной и остаточной суммами 354

§ 4 Обшая, факторная и остаточная дисперсии 355

§ 5 Сравнение нескольких средних методом дисперсионного анализа 355

§ 6 Неодинаковое число испытаний на различных уровнях 358

Задачи 361

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО. ЦЕПИ МАРКОВА

Глава двадцать первая Моделирование (разыгрывание) случайных

■елпнн методом Монте-Карло 363

§ 1 Предмет метода Монте-Карло 363

§ 2 Оценка погрешности метода Монте-Карло 364

§ 3 Случайные числа 366

§ 4 Разыгрывание дискретной случайной величины 366

§ 5 Разыгрывание противоположных событий 368

§ 6 Разыгрывание полной группы событий 369

[§ 7 Разыгрывание непрерывной случайной величины Метод обратных функций 371](#bookmark243)

§ 8 Метод суперпозиции 375

§ 9 Приближенное разыгрывание нормальной случайной величины 377

Задачи 379

Глава двадцать вторая Первоначальные сведения о цепях Маркова. 380

§ 1 Цепь Маркова 380

§ 2 Однородная цепь Маркова Переходные вероятности Матрица перехода 381

§ Равенство Маркова 383

Задачи 385

II

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава двадцать третья Случайные функции 386

§ 1 Основные задачи 386

§ 2 Определение случайной функции 386

[§ 3 Корреляционная теория случайных функций 388](#bookmark260)

§ 4 Математическое ожидание случайной функции 390

§ 5 Свойства математического ожидания случайной функции 390

[§ 6 Дисперсия случайной функции 391](#bookmark257)

§ 7 Свойства дисперсии случайной функции 392

§ 8 Целесообразность введения корреляционной функции 393

§ 9 Корреляционная функция случайной функции 394

[§ 10 Свойства корреляционной функции 395](#bookmark263)

[§ 11 Нормированная корреляционная функция 398](#bookmark272)

§ 12 Взаимная корреляционная функция 399

§ 13 Свойства взаимной корреляционной функции 400

§ 14 Нормированная взаимная корреляционная функция 401

§ 15 Характеристики суммы случайных функций 402

§ 16 Производная случайной функции и ее характеристики 405

§ 17 Интеграл от случайной функции и его характеристики 409

[§ 18 Комплексные случайные величины и их числовые харак­теристики 413](#bookmark298)

§ 19 Комплексные случайные функции и их характеристики 415 Задачи 417

Глава двадцать четвертая Стационарные случайные функции 419

§1 Определение стационарной случайной функции 419

[§ 2 Свойства корреляционной функции стационарной случай­ной функции 421](#bookmark310)

§ 3 Нормированная корреляционная функция стационарной случайной функции 421

§ 4 Стационарно связанные случайные функции 423

§ 5 Корреляционная функция производной стационарной слу­чайной функции 424

§ 6 Взаимная корреляционная функция стационарной случай­ной функции и ее производной 425

§ 7 Корреляционная функция интеграла от стационарной слу­чайной функции 426

§ 8 Определение характеристик эргодических стационарных случайных функций из опьгга 428

Задачи 430

Глава двадцать пятая Элементы спектральной теории стационарных

случайных функций 431

12

§ 1 Представление стационарной случайной функции в виде гармонических колебаний со случайными амплитудами и случай­ными фазами 431

§ 2 Дискретный спектр стационарной случайной функции 435

§ 3 Непрерывный спектр стационарной случайной функции Спектральная плотность 437

§ 4 Нормированная спектральная плотность 441

§ 5 Взаимная спектральная плотность стационарных и стационарно связанных случайных функций 442

§ 6 Дельта-функция 443

§ 7 Стационарный белый шум 444

§ 8 Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой 446

[Задачи 449](#bookmark347)

Дополнение 451

Приложения 461

Предметный указатель 474

ВВЕДЕНИЕ

Предмет теории вероятностей. Наблюдаемые нами события (явления) можно подразделить на следую­щие три вида: достоверные, невозможные и случайные.

**Достоверным** называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная сово­купность условий S. Например, если в сосуде содержится вода при нормальном атмосферном давлении и темпера­туре 20°, то событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» есть достоверное. В этом примере заданные атмосферное давление и температура воды составляют совокупность условий S.

**Невозможным** называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность усло­вий **S.** Например, событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» заведомо не произойдет, если будет осуществлена совокупность условий предыдущего примера.

**Случайным** называют событие, которое при осуществле­нии совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти. Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо над­пись. Поэтому событие «при бросании монеты выпал «герб»—случайное. Каждое случайное событие, в частно­сти выпадение «герба», есть следствие действия очень многих случайных причин (в нашем примере: сила, с которой брошена монета, форма монеты и многие другие). Невозможно учесть влияние на результат всех этих при­чин, поскольку число их очень велико и законы их действия неизвестны. Поэтому теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет еди­ничное событие или нет,—она просто не в силах это сделать.

По-иному обстоит дело, если рассматриваются случай­ные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий **S,** т. е. если

14

речь идет о массовых однородных случайных событиях. Оказывается, что достаточно большое число однородных случайных событий независимо от их конкретной природы подчиняется определенным закономерностям, а именно вероятностным закономерностям. Установлением этих за­кономерностей и занимается теория вероятностей.

**Итак,** предметом теории вероятностей является изу­чение вероятностных закономерностей массовых однород­ных случайных событий.

Знание закономерностей, которым подчиняются массо­вые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать. Например, хотя, как было уже сказано, нельзя наперед определить результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с не­большой погрешностью, число появлений «герба», если монета будет брошена достаточно большое число раз. При этом предполагается, конечно, что монету бросают в одних и тех же условиях.

Методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теорети­ческой физике, геодезии, астрономии, теории стрельбы, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управ­ления, общей теории связи и во многих других теорети­ческих и прикладных науках. Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая в свою очередь используется при планировании и организации производства, при анализе технологических процессов, предупредительном и прие­мочном контроле качества продукции и для многих дру­гих целей.

В последние годы методы теории вероятностей все шире и шире проникают в различные области науки и техники, способствуя их прогрессу.

Краткая историческая справка. Первые работы, в ко­торых зарождались основные понятия теории вероятно­стей, представляли собой попытки создания теории азартных игр (Кардано, Гюйгенс, Паскаль, Ферма и дру­гие в **XVI—XVII** вв.).

Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Якоба Бернулли (1654—1705). Доказанная им теорема, получившая впоследствии название «Закона больших чисел», была первым теоретическим обоснова­нием накопленных ранее фактов.

15

Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону и др.

Новый, наиболее плодотворный период связан с име­нами П. Л. Чебышева (1821—1894) и его учеников А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпунова (1857—1918). В этот период теория вероятностей становится стройной математической наукой. Ее последующее развитие обязано в первую очередь русским и советским математикам (С. Н. Бернштейн, В. И. Романовский, А. Н. Колмогоров, А. Я. Хинчин, Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирнов и **др.).** В настоящее время ведущая роль в создании новых вет­вей теории вероятностей также принадлежит советским математикам.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Глава первая

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Испытания и события

Выше событие названо случайным, если при осуществлении определенной совокупности условий S оно может либо произойти, либо не произойти. В дальней­шем, вместо того чтобы говорить «совокупность условий S осуществлена», будем говорить кратко: «произведено испытание». Таким образом, событие будет рассматри­ваться как результат испытания.

Пример 1. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на четыре области. Выстрел—это испытание. Попадание в определенную область мишени—событие.

Пример 2. В урне имеются цнетные шары. Из урны наудачу берут один шар. Извлечение шара из урны есть испытание. Появле­ние шара определенного цвета — событие.

§ 2. Виды случайных событий

События называют **несовместными**, если появле­ние одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример 1. Из ящика с д« /алямн наудачу извлечена деталь. Появление стандартной детали исключает появление нестандартной детали. События «появилась стандартная деталь» и «появилась не­стандартная деталь» — несовместные.

Пример 2. Брошена монета. Появление «герба» исключает по­явление надписи. События «появился герб» и «появилась надпись» — несовместные.

Несколько событий образуют **полную группу,** если в результате испытания появится хотя бы одно из них. Другими словами, появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие. В частности,

2 — 2730 \7

если события, образующие полную группу, попарно несов­местны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий. **Этот частный случай представляет для нас наибольший интерес, поскольку используется далее.**

Пример 3. Приобретены два билета денежно-вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий: «выигрыш выпал на первый билет и не выпал на второй», «выигрыш не выпал на первый билет и выпал на второй», «выигрыш выпал на оба билета», «на оба билета выигрыш не выпал». Эти события обра­зуют полную группу попарно несовместных событий.

Пример 4. Стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно прои­зойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

События называют **равновозможными,** если есть осно­вания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример 5. Появление «герба» н появление надписи при бросании монеты — равновозможные события. Действительно, предполагается, что монета изготовлена из однородного материала, имеет правильную цилиндрическую форму и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты.

Пример в. Появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости—равиовозможные события. Действительно, предпо­лагается, что игральная кость изготовлена из однородного материала, имеет фэрму правильного многогранника и наличие очков не оказы­вает влияния на выпадение любой грани.

§ 3. Классическое определение вероятности

Вероятность—одно из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Приведем определение, которое называют клас­сическим. Далее укажем слабые стороны этого определе­ния и приведем другие определения, позволяющие пре­одолеть недостатки классического определения.

Рассмотрим пример. Пусть в урне содержится 6 оди­наковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них — красные, 3 — синие и 1—белый. Очевидно, возмож­ность вынуть наудачу из урны цветной (т. е. красный или синий) шар больше, чем возможность извлечь белый шар. Можно ли охарактеризовать эту возможность числом? Оказывается, можно. Это число и называют вероятностью события (появления цветного шара). Таким образом, вероятность есть число, характеризующее степень воз­можности появления события.

18

Поставим перед собой задачу дать количественную оценку возможности того, что взятый наудачу шар цвет­ной. Появление цветного шара будем рассматривать в качестве события **А.** Каждый из возможных результатов испытания (испытание состоит в извлечении шара из уриы) назовем **элементарным исходом** **(элементарным событием).** Элементарные исходы обозначим через **a>lt а>г,** й>8 и т. д. В нашем примере возможны следующие 6 эле­ментарных исходов: ю1 — появился белый шар; «>,, <о8 — появился красный шар; а>4, (о5, (о,—появился синий шар. Легко видеть, что эти исходы образуют полную группу попарно несовместных событий (обязательно появится только один шар) и они равновозможны (шар вынимают наудачу, шары одинаковы и тщательно перемешаны).

Те элементарные исходы, в которых интересующее нас событие наступает, назовем **благоприятствующими** этому событию. В нашем примере благоприятствуют со­бытию **А** (появлению цветного шара) следующие 5 исхо­дов: Ю|, (1)3, (04, (Oj, (Од.

Таким образом, событие **А** наблюдается, если в испы­тании наступает один, безразлично какой, из элементар­ных исходов, благоприятствующих **А\** в нашем примере **А** наблюдается, если наступит или со„ или w4, или cos, или (Од. В этом смысле событие **А** подразделяется на несколько элементарных событий (юа, (os, ю4, (os, ю0); элементарное же событие не подразделяется иа другие события. В это.м состоит различие между событием **А** и элементарным событием (элементарным исходом).

Отношение числа благоприятствующих событию **А** эле­ментарных исходов к нх общему числу называют вероят­ностью события **А** и обозначают через **Р{А).** В рассмат­риваемом примере всего элементарных исходов 6; из них 5 благоприятствуют событию **А.** Следовательно, вероят­ность того, что взятый шар окажется цветным, равна Р (Л) — 5/6. Это число и дает ту количественную оценку степени возможности появления цветного шара, которую мы хотели найти. Дадим теперь определение вероятности.

**Вероятностью события А** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу. Итак, вероятность события **А** определяется формулой

Р (Л) — **т/п,**

*2*\*

19

где **т** — число элементарных исходов, благоприятствую­щих **А; п** — число всех возможных элементарных исходов испытания.

Здесь предполагается, что элементарные исходы не­совместны, равновозможны и образуют полную группу. Из определения вероятности вытекают следующие ее свойства:

**Свойство 1.** Вероятность достоверного события расна единице.

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует собы­тию. В этом случае **т — п,** следовательно,

**Р** (Л) — **т/п — п/п** = 1.

**Свойство 2.** Вероятность невозможного события равна нулю.

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае **т =** 0, следовательно,

***Р(А)* = *т/п*** — **0 */п*** = **0.**

**Свойство 3.** Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и еди­ницей.

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испы­тания. В этом случае 0 < **т** < **п,** значит, **0<т/я<1,** следовательно,

**0<Р(Л)<** **1.**

Итак, вероятность любого гобытия удовлетворяет двой­ному неравенству

0< **Р(Л)<** 1.

Далее приведены теоремы, которые позволяют по из­вестным вероятностям одних событий находить вероятно­сти других событий.

Замечание. Современные строгие курсы теории вероятностей построены на теоретико-множественной основе. Ограничимся изложе­нием на языке теории множеств тех понятий, которые рассмотрены выше.

Пусть в результате испытания наступает одно и только одно из событий со,- (<=1, 2, ..., п). События со,- называют элементарными событиями (элементарными исходами). Уже отсюда следует, что элементарные события попарно несовместны. Множество всех элемен­

20

тарных событий, которые могут появиться в испытании, называют пространством элементарных событий Q, а сами элементарные собы\* тия — точками пространства Q.

Событие А отождествляют с подмножеством (пространства Q), элементы которого есть элементарные исходы, благоприятствующие Л; событие В есть подмножество Q, элементы которого есть исходы, благоприятствующие В, н т. д. Таким образом, множество всех со­бытий, которые могут наступить в испытании, есть множество всех подмножеств Q. Само Q наступает при любом исходе испытания, поэтому Q — достоверное событие; пустое подмножество пространства Q — невозможное событие (оно не наступает ни при каком исходе испытания).

Заметим, что элементарные события выделяются из числа всех событий тем, что каждое из них содержит только одни элемент Q.

Каждому элементарному исходу са,- ставят в соответствие поло­жительное число pi — вероятность этого исхода, причем У р, = 1.

i

По определению, вероятность Р (А) события А равна сумме вероят­ностей элементарных исходов, благоприятствующих А. Отсюда легко получить, что вероятность события достоверного равна единице, не­возможного— нулю, произвольного — заключена между нулем и еди­ницей.

Рассмотрим важный частный случай, когда все исходы равновоз­можны. Число исходов равно л, сумма вероятностей всех исходов

Й

авна единице; следовательно, вероятность каждого исхода равна 1/л.  
1усть событию А благоприятствует т исходов. Вероятность события

Л равна сумме вероятностей исходов, благоприятствующих А:

Р (Л) = 1 /л 1/л . .-f-1/л.

Учитывая, что число слагаемых равно т, имеем

*Р(А)* = т/п.

Получено классическое определение вероятности.

Построение логически полноценной теории вероятностей основано на аксиоматическом определении случайного события и его вероятно­сти. В системе аксиом, предложенной А. Н. Колмогоровым \*>, неопре­деляемыми понятиями являются элементарное событие и вероятность. Приведем аксиомы, определяющие вероятность:

1. Каждому событию Л поставлено в соответствие неотрицатель­ное действительное число Р (Л). Это число называется вероятностью события Л:
2. Вероятность достоверного события равна единице:

P(Q) = 1.

1. Вероятность наступления хотя бы одного из попарно несов­местных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Исходя из этих аксиом, свойства вероятностей и зависимости между ними выводят в качестве теорем.

•> Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М., «Наука», 1974.

21

§ 4. Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно со­ставить из элементов, безразлично какой природы, задан­ного конечного множества. При непосредственном вычис­лении вероятностей часто используют формулы комбина­торики. Приведем наиболее употребительные из них.

**Перестановками** называют комбинации, состоящие из одних и тех же **п** различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возмож­ных перестановок

где **п\** = 1 -2**-3..** **.п.**

Заметим, что удобно рассматривать 0!, полагая, по определению, 01 = 1.

Пример 1. Сколько трехзначных чнсел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзиачных чнсел Р8 = 31 = 1.2-3 = 6.

**Размещениями** называют комбинации, составленные из **п** различных элементов по **т** элементов, которые от­личаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

Ап=п(п—1 )(п — 2) ... (п—/п+1).

Пример 2. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

А\ =6-5 = 30.

б

**Сочетаниями** называют комбинации, составленные из **п** различных элементов по **т** элементов, которые отли­чаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

С„ **=■** п\/(т\ (п **— *т)\).***

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать две детали нз ящика, содержащего 10 деталей?

Решение. Искомое число способов

С^0= 101/(2! 8!) = 45.

Подчеркнем, что числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством

Л т р Пт

/1п \* X fflV/l •

22

Замечание. Выше предполагалось, что все л элементов раз­личны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае комбинации с повторениями вычисляют по другим формулам. Напри­мер, если среди п элементов есть пг элементов одного вида, л2 эле­ментов другого вида и т. д., то число перестановок с повторениями

Рп(П1, «г. ...) = «!/(rtil где ni-t-n\*-}-... = л.

При решении задач комбинаторики используют сле­дующие правила:

**Правило суммы.** Если некоторый объект Л может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект **В** может быть выбран **п** способами, то выбрать либо Л, либо **В** можно m + n способами.

**Правило произведения.** Если объект Л можно выбрать из совокупности объектов **т** способами и после каждого такого выбора объект **В** можно выбрать **п** спо­собами, то пара объектов **(А, В)** в указанном порядке может быть выбрана **тп** способами.

§ 5. Примеры непосредственного вычисления вероятностей

Пример 1. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Обозначим через А событие — набрана нужная цифра. Абонент мог набрать любую из 10 цифр, поэтому общее число возможных элементарных исходов равно 10. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует собы­тию А лишь один исход (нужная цифра лишь одна). Искомая веро­ятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих со­бытию, к числу всех элементарных исходов:

Р (А) — 1/10.

Пример 2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помия лишь, что эти цифры ' различны, набрал их на­удачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Обозначим через В событие — набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т. е. А®0 = 10-9 = 90. Таким образом, общее число возможных элементар­ных исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятствует событию В лишь один исход. Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благо­приятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

Р (В) = 1/90.

Пример 3. Указать ошибку «решения» задачи: «Брошены две игральные косги. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 4 (событие А)».

23

Решение. Всего возможны 2 исхода испытания: сумма выпав­ших очков равна 4, сумма выпавших очков не равна 4. Событию А благоприятствует один исход; общее число исходов равно двум. Сле- Д( вателыю, искомая вероятность

V (Л) = 1/2.

Ошибка этого решения состоит в том, что рассматриваемые ис­ходы не являются равновозможнымн.

Правильное решение. Общее число равновозможных ис­ходов испытания ранно 6.6 = 3G (каждое число выпавших очков на одной кости может сочетаться со всеми числами очков другой кости). Среди этих исходов благоприятствуют событию А только 3 исхода: (I; 3), (3; I), (2; 2) (в скобках указаны числа выпавших очков). Следовательно, искомая вероятность

Р (А) = 3/36 =1/12.

Пример 4. В партии из 10 детален 7 стандартных. Найти вероят­ность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь G деталей из 10, т. е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов (С®0).

Определим число исходов, благоприятствующих интересующему иас событию А (среди шести взятых деталей 4 стандартных). Четыре стандартные детали можно взять из семи стандартных деталей С\* спо­собами; при этом остальные 6—4 = 2 детали должны быть нестан­дартными; взять же 2 нестандартные детали из 10—7 = 3 нестандарт­ных детален можно Cjj способами. Следовательно, число благоприя­тствующих исходов равно С®. С®.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благо­приятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

Р(Л) = (С®.С\*)/С«0=1/2.

§ 6. Относительная частота. Устойчивость относительной частоты

Относительная частота наряду с вероятностью принадлежит к основным понятиям теории вероятностей. **Относительной частотой** события называют отноше­ние числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом, относительная частота события **А** опре­деляется формулой **W (Л) = тЩ, т** — число появлений события, **п** — общее число испы­тании.

24

Сопоставляя определения вероятности н относитель­ной частоты, заключаем: определение вероятности не требует, чтобы испытания производились в действитель­ности; определение же относительной частоты предпола­гает, что испытания были произведены фактически. Дру­гими словами, **вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту—после опыта.**

Пршкр 1. Отдел технического контроля обнаружил 3 нестан­дартных детали в партии из 80 случайно отобранных деталей. Отно­сительная частота появления нестандартных деталей

W (Л) = 3/80.

Пример 2. По цели .произвели 24 выстрела, причем было зареги­стрировано 19 попаданий. Относительная частота поражения цели

W (Д) = 19/24.

Длительные наблюдения показали, что если в одина­ковых условиях производят опыты, в каждом нз которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Эго свой­ство состоит в том, **что в различных опытах относитель­ная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого по­стоянного числа.** Оказалось, что это постоянное число есть вероятность появления события.

Таким образом, если опытным путем установлена от­носительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Подробнее и точнее связь между относительной часто­той и вероятностью будет изложена далее. Теперь же проиллюстрируем свойство устойчивости на примерах.

Промер 3. По данным шведской статистики, относительная час­тота рождения девочек за 1935 г. по месяцам характеризуется сле­дующими числами (числа расположены в порядке следования меся­цев, начиная с января): 0,486; 0,489; 0.490; 0,471; 0,478; 0,482; 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,473

Относительная частота колеблется около числа 0,482, которое можно принять за приближенное значение вероятности рождения девочек.

Заметим, что статистические данные различных стран дают при­мерно то же значение относительной частоты.

Пример 4. Многократно проводились опыты бросания монеты, в которых подсчитывали число появления «герба». Результаты не­скольких опытов приведены в табл. 1.

Здесь относительные частоты незначительно отклоняются от чис­ла 0,5, причем тем меньше, чем больше число испытаний. Напри­мер, при 4040 испытаниях отклонение равно 0, 0069, а при 24 000

25

Таблица I

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Число  бросаний | Число появлений «герба» | Относительная  частота |
| 4 040 | 2048 | 0,5069 |
| 12 000 | 6019 | 0,5016 |
| 24 000 | 12012 | 0,5005 |

испытаний—лишь 0,0005. Приняв во внимание, что вероятность по­явления «герба» прн бросании монеты равна 0,5, мы вновь убеж­даемся, что относительная частота колеблется около вероятности.

§ 7. Ограниченность классического определения

вероятности. Статистическая вероятность

Классическое определение вероятности предпо­лагает, что число элементарных исходов испытания ко­нечно. На практике же весьма часто встречаются испы­тания, число возможных исходов которых бесконечно. В таких случаях классическое определение неприменимо. Уже это обстоятельство указывает на ограниченность классического определения. Отмеченный недостаток может быть преодолен, в частности, введением геометрических вероятностей (см. § 8) и, конечно, использованием аксио­матической вероятности (см. § 3, замечание).

Наиболее слабая сторона классического определения состоит в том, что очень часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. Еще труднее указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. Обычно о равновозможности элементарных исходов испытания говорят из соображений симметрии. Так, например, пред­полагают, что игральная кость имеет форму правильного многогранника (куба) и изготовлена из однородного мате­риала. Однако задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются весьма редко. По этой причине наряду с классическим опреде­лением вероятности используют и другие определения, в частности статистическое определение: **в качестве ста­тистической вероятности события принимают относи­тельную частоту или число, близкое к ней.** Например, если в результате достаточно большого числа испытаний оказалось, что относительная частота весьма близка

26

к числу 0,4, то это число можно принять за статистиче­скую вероятность события.

Легко проверить, что свойства вероятности, вытекаю­щие из классического определения (см. § 3), сохраняются и при статистическом определении вероятности. Действи­тельно, если событие достоверно, то **т = п** и относитель­ная частота

т/п — п/п **— 1,**

т. е. статистическая вероятность достоверного события (так же как и в случае классического определения) равна единице.

Если событие невозможно, то **т —** 0 и, следовательно, относительная частота

0**/п** = 0,

т. е. статистическая вероятность невозможного события равна нулю.

Для любого события 0**^.т^п** и, следовательно, от­носительная частота

0 ^ **т/п** ^ 1,

т. е. статистическая вероятность любого события заклю­чена между нулем и единицей.

Для существования статистической вероятности собы­тия Л требуется:

а) возможность, хотя бы принципиально, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие **А** наступает или не наступает;

б) устойчивость относительных частот появления **А** в различных сериях достаточно большого числа испыта­ний.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности; так, в при­веденном примере в качестве вероятности события можно принять не только 0,4, но и 0,39; 0,41 и т. д.

§ 8. Геометрические вероятности

Чтобы преодолеть недостаток классического опре­деления вероятности, состоящий в том, что оно непри­менимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят **геометрические вероятности** — вероятности попа­дания точки в область (отрезок, часть плоскости и т. д.).

Пусть отрезок **I** составляет часть отрезка **L.** На отре­зок L наудачу поставлена точка. Это означает выполне-

27

ние следующих предположений: поставленная точка

может оказаться в любой точке отрезка L, вероятность попадания точки на отрезок **I** пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относи­тельно отрезка **L.** В этих предположениях вероятность попадания точки на отрезок **I** определяется равенством

**Р** = Длина //Длина **L.**

Пример 1. На отрезок ОА длины L числовой оси Ох наудачу поставлена точка В(х). Найти вероятность того, что меньший нз отрезков ОВ и ВА имеет длину, большую L/3. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине от­резка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Решение. Разобьем отрезок О А точками С и D иа 3 равные части. Требование задачи будет выполнено, если точка В (х) попа­дет на отрезок CD длины L/3. Искрмая вероятность

P — *(L/3)/L* = 1/3.

Пусть плоская фигура **g** составляет часть плоской фигуры **G.** На фигуру **G** наудачу брошена точка. Это означает выполнение следующих предположений: брошен­ная точка может оказаться в любой точке фигуры **G,** вероятность попадания брошенной точки на фигуру **g** пропорциональна площади этой фигуры и не зависит ни от ее расположения относительно **G,** ни от формы **g.** В этих предположениях вероятность попадания точки в фигуру **g** определяется равенством

**Р** = Площадь g/Площадь **G.**

Пример 2. На плоскости начерчены две концентрические окруж­ности, радиусы которых 5 и 10 см соответственно. Найти вероят­ность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно большого круга.

Решение. Площадь кольца (фигуры g)

Sg = n(\№ — 5\*) = 75я.

Площадь большого круга (фигуры G)

So = «102= ЮОя.

Искомая вероятность

Я = 75л/(100л) = 0,75.

Пример 3. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени длительностью Т. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше

28

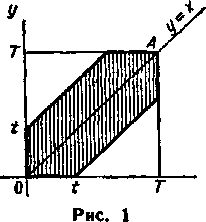
t (t < T). Найтн вероятность того, что сигнализатор сработает за  
время Т, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

Решение. Обозначим моменты поступления сигналов первого  
и второго устройств соответственно через х и у. В силу условия

задачи должны выполняться двойные  
неравенства: 0Вве-  
дем в рассмотрение прямоугольную си-  
стему координат хОу. В этой системе  
двойным неравенствам удовлетворяют ко-  
ординаты любой точки квадрата ОТ АТ  
(рис. 1). Таким образом, этот квадрат  
можно рассматривать как фигуру G, ко-  
ординаты точек которой представляют  
все возможные значения моментов по-  
ступления сигналов.

Сигнализатор срабатывает, если раз-  
ность между моментами поступления си-  
гналов меньше t, т. е. если у — х < t

при у > х и х — у < t при лг> у, или, что то же,



у < x-\-t при у > х,  
у > x—t при у < х.

<\*)

(\*\*)

Неравенство (\*) выполняется для тех точек фигуры О, которые лежат выше прямой у=х и ниже прямой y — x-\-t, неравенство (\*\*) имеет место для точек, расположенных ниже прямой у = х и выше прямой у = х—t.

Как видно из рис. 1, все точки, координаты которых удовлет­воряют неравенствам (\*) и (\*s), принадлежат заштрихованному шестиугольнику. Таким образом, этот шестиугольник можно рассма­тривать как фигуру g, координаты точек которой являются благо­приятствующими моментами времени х и у.

Искомая вероятность

Р = Пл. g/Пл. G = (T2— (Т —*i)2)/T2 — {t* (2*T — t))/TK*

Замечание 1. Приведенные определения являются частными случаями общего определения геометрической вероятности. Если обозначить меру (длину, площадь, объем) области через mes, то вероятность попадания точки, брошенной наудачу (в указанном выше смысле) в область g—часть области G, равна

Р = mes gfmes G.

Замечание 2. В случае классического определения вероят­ность достоверного (невозможного) события равна единице (нулю); справедливы и обратные утверждения (например, если вероятность события равна нулю, то событие невозможно). В случае геометри­ческого определения вероятности обратные утверждения не имеют места. Например, вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области G равна нулю, однако это событие может произойти, и, следовательно, не является невозможным.

29

Задачи

1. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окра­шенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.

Отв. р — 0,1.

1. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что выпа­дет четное число очков.

Отв. р — 0,5.

1. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

Отв. р = 0,81.

1. В мешочке имеется 5 одинаковых кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из следующих букв: о, п, р, с, т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположен­ных «в одну линию» кубиков можно будет прочесть слово «спорт».

Отв. р=\* 1/120.

1. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: а, т, м, р, с, о. Карточки тщательно переме­шаны. Найти вероятность того, что иа четырех, вынутых по одной и расположенных «в одну линию» карточках можно будет прочесть слово «трос».

Отв. р= \/А\= 1/360.

1. Куб, все грани которого окрашены, распилен иа тысячу куби­ков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

Отв. а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008.

1. Из тщательно перемешанного полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость: а) оказалась дублем; б) не есть дубль.

Отв. а) 2/9; б) 4/9.

1. В замке иа общей оси пять дисков. Каждый диск разделен на шесть секторов, иа которых иаписаиы различные буквы. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Найти вероят­ность того, что при произвольной установке дисков замок можно будет открыть.

Отв. р= 1/6\*.

1. Восемь различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги ока­жутся поставленными рядом.

Отв. р = 7-21.61/8! ==1/4.

1. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем пять книг стоят по 4 рубля каждая, три книги — по одному рублю и две книги — по 3 рубля. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят 5 рублей.

Отв. р=Св • С\/ Cia — 1 /3.

И. В партии из 100 деталей отдел технического контроля обна­ружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартных деталей?

Отв. и» = 0,05.

30

1. При стрельбе из виитовки относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

Отв. 102 попадания.

1. На отрезок ОА длины L числовой оси Ох наудачу постав­лена точка В (х). Найти вероятность того, что меньший из отрезков ОВ н ВА имеет длину, меньшую, чем L/3. Предполагается, что веро­ятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Отв. р= 2/3.

1. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в квад­рат пропорциональна площади квадрата и не зависит от его распо­ложения относительно круга.

Отв. р= 2/я.

1. Задача о встрече. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший пер­вым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти веро­ятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

Указание. Ввести в рассмотрение прямоугольную систему координат хОу н принять для простоты, что встреча должна состо­яться между 0 и 1 часами.

Отв. Возможные значенйя координат: 0<х<1, 0<«/<1;

благоприятствующие встрече значения координат: | у — jc | < 1/4;

Р = 7/16.

Глава вторая

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

**Суммой А** + **В двух событий А** и **В** называют событие, состоящее в появлении события **А,** или собы­тия **В,** или обоих этих событий. Например, если из ору­дия произведены два выстрела и **А**—попадание при пер­вом выстреле, **В** — попадание при втором выстреле, то Л + **В** — попадание при первом выстреле, или при вто­ром, или в обоих выстрелах.

В частности, если два события **А** и **В** — несовместные, то **А-\- В**—событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

**Суммой нескольких событий** называют событие, кото­рое состоит в появлении хотя бы одного из этих собы- Т4Й. Например, событие **А + В + С** состоит в появлении

31

**одного из следующих событий:** А, В, С, А и В, А я С, В я С, А я В я С.

Пусть события **А** и **В**—несовместные, причем вероят­ности этих событий известны. Как найти вероятность того, что наступит либо событие **А,** либо событие **В**? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения.

**Теорема.** Вероятность появления одного из двух несов­местных событий, безразлично какого, равна сумме веро­ятностей этих событий:

Р(А + В) = ***Р(А) + Р(В).***

**Доказательство.** Введем обозначения: **п**—общее число возможных элементарных исходов испытания; **т^** — число исходов, благоприятствующих .событию **А; тг** — число исходов, благоприятствующих событию **В.**

Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события **А,** либо события **В,** равно **mt + ma.** Следовательно,

***Р (А + В) =* (т, + *тл)/п* = *mjn* + *mjn.***

Приняв во внимание, что **т1/п = Р (А) я mjn — Р (В),** окончательно получим

***Р(А + В) = Р(А) + Р(В).***

**Следствие.** Вероятность появления одного из не­скольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

**Р + j4, + ... 4- АЛ) = Р (Л4) + Р (А,) + — + Р (Ат).**

**Доказательство.** Рассмотрим три события: **А, В** и С. Так как рассматриваемые события попарно несов­местны, то появление одного из трех событий, **А, В я С,** равносильно наступлению одного из двух событий, **А-\-В** и С, поэтому в силу указанной теоремы

Р(А + В + ***0=Р[(А + В) + С\ = Р{А + В) + Р(С) =***

= Л(Л) + /> (\*) + /> (С).

**Для** произвольного числа попарно несовместных собы­тий доказательство проводится методом математической индукции.

Пример I. В урне 30 шаров: 10 красных, S снинх я 15 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

32

Вероятность появления красного шара (событие А)

Р (А) = 10/30= 1/3.

Вероятность появления синего шара (событие В)

Р (8) = 5/30 = 1/6.

События А и В несовместны (появление шара одного цвета исклю­чает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения при­менима.

Искомая вероятность

Р(Д + 8) = Р(Д) + Р(8) = 1/3+1/6 = 1/2.

Пример 2. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 об­ласти. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую—0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.

Решение. События А — «стрелок попал в первую область» и В — «стрелок попал во вторую область» — несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима.

Искомая бероятность

р (А + В) = Р (А) + Р (8) = 0,45 + 0,35 = 0,80.

§ 2. Полная группа событий

Теорема. **Сумма вероятностей событий Аг, А2, ..., Ап, образующих полную группу, равна единице: Р(Ах) + Р{Аг) + ...+Р(Ал)= 1. Доказательство.** Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность досто­верного события равна единице, то

Р(Л1 + Л1+...+Ля)=1. (\*)

Любые два события полной группы несовместны, поэтому можно применить теорему сложения: **Р** (Лх + **Аг** + ... **Ап) = Р** (Лх) + **Р** (Л2) + ... +Р (Л„). (\*\*) Сравнивая (\*) и (\*\*), получим

Р(Л1) + Р(Л1)+...+Р(Л„) = 1.

Пример. Консультационный пункт института получает пакеты с контрольными работами из городов А, В и С. Вероятность полу­чения пакета из города А равна 0,7, из города В — 0,2. Найти веро­ятность того, что очередной пакет будет получен из города С.

Решение. События «пакет получен из города у4», «пакет получен из города 8», «пакет получен нз города С» образуют полную группу,

3 — 2730 33

поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице;

0,7 -f- 0,2-f- р == 1.

Отсюда искомая вероятность

р-= 1 — 0,9 = 0,1.

§ 3. Противоположные события

**Противоположными** называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через **А,** то другое принято обозначать **А.**

Пример I. Попадание и промах при выстреле по цели — противо­положные события. Если А— попадание, то А — промах.

Пример 2. Из ящика наудачу взята деталь. События «появилась стандартная деталь» и «появилась нестандартная деталь» — противо­положные.

**Теорема.** Сумма вероятностей противоположных собы­тий равна единице'.

**Р(Л) + Р(Л) = 1.**

**Доказат ельство.** Противоположные события об­разуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице (см. § 2).

Замечание 1. Если вероятность одного из двух противопо­ложных событий обозначена через р, то вероятность другого события обозначают через q. Таким сибраэом, в силу предыдущей теоремы

р + ?= 1.

Пример 3. Вероятность того, что день будет дождливым, р— 0,7. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день дождливый» и «день ясный» — про­тивоположные, поэтому искомая вероятность

9=1 —/7 = 1 — 0,7 = 0,3.

Замечание 2. При решении задач на отыскание вероятности события А часто выгодно сначала вычислить вероятность события А, а затем найти искомую вероятность по формуле

*Р(А)=1— Р(А).*

Пример 4. В ящике имеется п деталей, из которых т стандарт­ных. Найти вероятность того, что среди к наудачу извлеченных дета­лей есть хотя бы одна стандартная.

Решение. События «среди извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная» и «среди извлеченных деталей нет ни одной стан­дартной»'—противоположные. Обозначим первое событие через А, а второе'-через А,

34

Очевидно,

*Р{А) = \-Р(Л).*

Найдем Р (Л). Общее число способов, которыми можно извлечь к деталей из п деталей, равно с£. Число нестандартных деталей равно я—т; нз этого числа деталей можно Сп-т способами извлечь к не­стандартных деталей. Поэтому вероятность того, что^среди извлечен­ных к деталей нет ни одной стандартной, равна Р

Искомая вероятность

Р (А) = 1 - Р <А) = 1 -dUt/ck

§ 4. Принцип практической невозможности маловероятных событий

При решении многих практических задач прихо­дится иметь дело с событиями, вероятность которых весьма мала, т. е. близка к нулю. Можно ли считать, что маловероятное событие **А** в единичном испытании не произойдет? Такого заключения сделать нельзя, так как не исключено, хотя и мало вероятно, что событие **А** наступит.

Казалось бы, появление или непоявление маловероят­ного события в единичном испытании предсказать невоз­можно. Однако длительный опыт показывает, что мало­вероятное событие в единичном испытании в подавляющем большинстве случаев не наступает. На основании этого факта принимают следующий «принцип практической невозможности маловероятных событий»: **если случайное событие имеет очень малую вероятность, то практически можно считать, что в единичном испытании это собы­тие не наступит.**

Естественно возникает вопрос: насколько малой

должна быть вероятность события, чтобы можно было считать невозможным его появление в одном испытании? На этот вопрос нельзя ответить однозначно. Для задач, различных -по существу, ответы разные. Например, если вероятность того, что парашют при прыжке не раскроется, равна 0,01, то было бы недопустимым применять такие парашюты. Если же вероятность того, что поезд даль­него следования прибудет с опозданием, равна 0,01, то можно практически быть уверенным, что поезд прибудет вовремя.

Достаточно малую вероятность, при которой (в дан­ной определенной задаче) событие можно считать драк-

з\*

85

тически невозможным, называют **уровнем значимости.** На практике обычно принимают уровни значимости, заклю­ченные между **0,01** и **0,05.** Уровень значимости, равный 0,01, называют однопроцентным; уровень значимости, равный 0,02, называют двухпроцентным, и т. д.

Подчеркнем, что рассмотренный здесь принцип позво­ляет делать предсказания не только о событиях, имею­щих малую вероятность, но и о событиях, вероятность которых близка к единице. Действительно, если событие **А** имеет вероятность, близкую к нулю, то вероятность противоположного события **А** близка к единице. С другой стороны, непоявление события **А** означает наступление противоположного события **А.** Таким образом, из прин­ципа невозможности маловероятных событий вытекает следующее важное для приложений следствие: **если слу­чайное событие имеет вероятность, очень близкую к еди­нице, то практически можно считать, что в единичном испытании это событие наступит.** Разумеется, и здесь ответ на вопрос о том, какую вероятность считать близ­кой к единице, зависит от существа задачи.

Задачи

1. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10 000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, безразлично денежного илн вещевого, для владельца одного лотерейного билета?

Отв. р = 0,02.

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероят­ность выбить 8 илн меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

Отв. р = 0,4.

1. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна стандартная.

Отв. р — 44/45.

1. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали.

Отв. р — 2/3.

У казани е. Если А — нет ни одной нестандартной детали, В — есть одна нестандартная деталь, то

Р (А + В) = Р (А) + Р (В) = Cl/Clo + Cj • cS/Cle.

1. События А, В, С и D образуют полную группу. Вероятности событий таковы: Р(А)—0,\; Р(Д) = 0,4; Р(С)=0,3. Чему равна вероятность события D?

Отв. *P(D) =* 0,2.

36

1. По статистическим данным ремонтной мастерской, в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10—для смены резца;
2. из-за неисправности привода; 2—из-за несвоевременной подачи заготовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

Отв. р = 0,26.

Глава третья

ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Произведение событий

**Произведением двух событий А** и **В** называют событие **АВ,** состоящее в совместном появлении (совме­щении) этих событий. Например, если Л—деталь годная, **В**—деталь окрашенная, то **АВ**—деталь годна и окрашена.

**Произведением нескольких событий** называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Например, если Л, **В, С**—появление «герба» соответственно в первом, втором и третьем бросаниях монеты, то **ABC** — выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

§ 2. Условная вероятность

Во введении случайное событие определено как событие, которое при осуществлении совокупности усло­вий S может произойти или не произойти. Если при вы­числении вероятности события никаких других ограни­чений, кроме условий S, не налагается, то такую вероят­ность называют **безусловной**; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют **условной.** Например, часто вычисляют вероятность собы­тия **В** при дополнительном условии, что произошло со­бытие Л. Заметим, что и безусловная вероятность, строго говоря, является условной, поскольку предполагается осуществление условий S.

**Условной вероятностью РА** (В) называют вероятность события В, вычисленную в предположении, что событие Л уже наступило.

Пример. В урие 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно, Найти вероят­ность появления белого шара при втором испытании (событие В), если при первом Испытании был извлечен черный шар (событие А).

37

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, нз них 3 белых. Искомая условная вероятность

Ра (S) = 3/5.

Этот же результат можно получить по формуле

*Рл* *(В)* *=Р* (ЛВ)1Р (А) (Р (А) > 0). (\*)

Действительно, вероятность появления белого шара при первом ис­пытании

Р (А) = 3/6= 1/2.

Найдем вероятность Р (АВ) того, что в первом испытании по­явится черный шар, а во втором — белый. Общее число исходов — совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений =6 • 5=30. Из этого числа исходов событию АВ

благоприятствуют 3-3=9 исходов. Следовательно,

Р(АВ) = 9/30 = 3/10.

Искомая условная вероятность

Рл (В) - В (АВ)/Р (А) = (3/10)/( 1 /2) = 3/5.

Как видим, получен прежний результат.

Исходя нз классического определения вероятности, формулу (•) можно доказать. Это обстоятельство и служит основанием для следующего общего (применимого не только для классической вероятности) определения.

**Условная вероятность** события **В** при условии, что событие **А** уже наступило, по определению, равна

***Ра(В) = Р(АВ)1Р(А) (Р(А)>* 0).**

§ 3. Теорема умножения вероятностей

Рассмотрим два события: **А** и **В**; пусть вероят­ности **Р (А)** и **РА (В)** известны. Как найти вероятность совмещения этих событий, т. е. вероятность того, что появится н событие **А** и событие **В**? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения.

**Теорема.** Вероятность совместного появления двух со­бытий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого**,** вычисленную в предпо­ложении, что первое событие уже наступило:

***Р(АВ) = Р(А)РЛ(В).***

**Доказательство.** По определению условной веро­ятности,

***РЛ(В)^Р(АВ)/Р(А).***

3»

Отсюда

[***Р(АВ) = Р{А)Ра{В).* <•)**](#bookmark23)

Замечание. Применив формулу (\*) к событию В А, получим Р(ВА)=Р(В) Ра (А), или, поскольку событие ВА не отличается от события АВ,

[*Р(АВ)=Р(В)Рв(А).* (\*\*)](#bookmark41)

Сравнивая формулы (\*) и (\*\*)> заключаем о справедливости ра­венства

*Р(А)Ра(В)=Р(В)Рв(А).* (\*\*\*)

**Следствие.** Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных**,** причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появи­лись: ***Р* (Л^И\*... *Аа)* = *Р* (ЛЛ *РА,* (Л,) *PAlAt* (Л,)...**

• • ■ Ра,л,. . ■ а*п\_1* (Л„),

где Ра,а,. . .лп\_1(Л„) — вероятность события **Ап,** вычислен­ная в предположении, что события **Аг, At, ...,Ап^1** на­

ступили. В частности, для трех событий **Р{АВС) = Р(А)РЛ** (**В)РАВ(С**). Заметим, что порядок, в котором расположены собы­тия, может быть выбран любым, т. е. безразлично какое событие считать первым, вторым н т. д.

Пример 1. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероят­ность того, что первый из взятых валиков—коиусиый, а второй — эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется ко­нусным (событие А),

Р{А) = 3/10.

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие В), вычисленная в предположении, что первый валик — конусный, т. е. условная вероятность

*РА (В) = 7/9.*

По теореме умножения, искомая вероятность

Р (АВ) = Р {А) Р а (В) =(3/10)-(7/9) = 7/30.

Заметим, что, сохранив обозначения, легко найдем: Р (В) =7/10, Рв(А) = 3/9, Р (В)Рв (А) = 7/30, что наглядно иллюстрирует спра­ведливость равенства (\*\*\*).

39

Пример 2. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не воз­вращая его обратно. Найти вероятность того, что при первом испы­тании появится белый шар (событие А), при втором — черный (собы­тие В) и при третьем—синий (событие С).

Решение. Вероятность появления белого шара в первом испытании

Р (Л) =5/12.

Вероятность появления черного шара во втором испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, т. е. условная вероятность

Рл(В) = 4/11.

Вероятность появления синего шара в третьем испытании, вы­численная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, а во втором — черный, т. е. условная вероятность

РАВ (С) =3/10.

Искомая вероятность Р (АВС) = Р (А) 1\*>л (В) РАВ (С) = (5/12) (4/11)-(3/10) = 1/22.

§ 4. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий

Пусть вероятность события **В** не зависит от по­явления события **А.**

**Событие В называют независимым от события А,** если появление события **А** не изменяет вероятности события **В,** т. е. если условная вероятность события **В** равна его безусловной вероятности:

***РА(В)^Р(В).* (\*)**

Подставив (\*) в соотношение (\*\*\*) предыдущего па­раграфа, получим

***Р(А)Р(В) = Р(В) Рв (А).***

Отсюда

***РВ{А) = Р{А),***

т. е. условная вероятность события **А** в предположении, что наступило событие **В,** равна его безусловной вероят­ности. Другими словами, событие **А** не зависит от со­бытия **В.**

Итак, если событие **В** не зависит от события Л, то и событие **А** не зависит от события **В\** это означает, что **свойство независимости событий взаимно.**

40

Для независимых событий теорема умножения **Р** (**АВ)** = **Р (А) РА (В)** имеет вид

***Р(АВ)^Р(А)Р(В),* (\*\*)**

т. е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Равенство (\*\*) принимают в качестве определения не­зависимых событий.

**Два события называют независимыми,** если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий; в противном случае события называют **зависи­мыми.**

На практике о независимости событий заключают по смыслу задачи. Например, вероятности поражения цели каждым из двух орудий не зависят от того, поразило ли цель другое орудие, поэтому события «первое орудие поразило цель» и «второе орудие поразило цель» неза­висимы.

Пример 1. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (собы­тие Л) равна 0,8, а вторым (событие В)— 0,7.

**Решение.** События **А** и **В** независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность

Р ***(АВ)*** — Р ***(А)*** Р ***(В)* = 0,7 -0,8 = 0,56.**

Замечание 1. Если события А и В независимы, то незави­симы также события А и В, А и В, А и В. Действительно,

А = ЛВ + ЛВ.

Следовательно,

Р(Л)=Р(ЛВ) + Р(ЛВ), или Р(Л) = Р(ЛВ) + Р(Л)Р(В). Отсюда

Р (ЛВ)=Р(Л)[1 — Р(В)], или Р(ЛВ)=Р (Л)Р(В),

т. е. события Л и В независимы. \_

Независимость событий Л и В, Л и В — следствие доказанного утверждения.

**Несколько событий называют попарно независимыми,** если каждые два из них независимы. Например, события **А, В, С** попарно независимы, если независимы события **А** и **В, А** и **С, В** и С.

Для того чтобы обобщить теорему умножения на не­сколько событий, введем понятие независимости событий в совокупности.

41

**Несколько событий называют независимыми в совокуп­ности** (или просто **независимыми),** если независимы ка­ждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных. Например, если со­бытия **At, At, А,** независимы в совокупности, то неза­висимы события **А,** и **A., At** и **At, At** и **А,; Ах** и **АгАг, А%** и **AtAt, At** и **AxAt.** Из сказанного следует, что если события независимы в совокупности, то условная вероят­ность появления любого события нз них, вычисленная в предположении, что наступили какие-либо другие собы­тия из числа остальных, равна его безусловной вероят­ности.

Подчеркнем, что если несколько событий независимы попарно, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности. В этом смысле требование независимости событий в совокупности сильнее требования их попарной независимости.

Поясним сказанное на примере. Пусть в урне имеется 4 шара, окрашенные: один — в красный цвет **(А),** один — в синий цвет **(В),** один — в черный цвет **(С)** и один—во все эти три цвета **(ABC).** Чему равна вероятность того, что извлеченный из урны шар имеет красный цвет?

Так как из четырех шаров два имеют красный цвет, то **Р (А)** = 2/4 = 1/2. Рассуждая аналогично, найдем **Р (В)** = 1/2, **Р (С)** = 1/2. Допустим теперь, что взятый шар имеет синий цвет, т. е. событие **В** уже произошло. Изме­нится ли вероятность того, что извлеченный шар имеет красный цвет, т. е. изменится ли вероятность события **А?** Из двух шаров, имеющих синий цвет, один шар имеет и красный цвет, поэтому вероятность события **А** по-преж­нему равна 1/2. Другими словами, условная вероятность события **А,** вычисленная в предположении, что наступило событие **В,** равна его безусловной вероятности. Следова­тельно, события **А** и **В** независимы. Аналогично придем к выводу, что события **А** и С, **В** и С независимы. Итак, события **А, В** и С попарно независимы.

Независимы ли эти события в совокупности? Оказы­вается, нет. Действительно, пусть извлеченный шар имеет два цвета, например синий и черный. Чему равна вероят­ность того, что этот шар имеет и красный цвет? Лишь один шар окрашен во все три цвета, поэтому взятый шар имеет и красный цвет. Таким образом, допустив, что события **В я С** произошли, приходим к выводу, что событие **А** обязательно наступит. Следовательно, это

42

событие достоверное и вероятность его равна единице. Другими словами, условная вероятность **Рве** (Л) = 1 собы­тия **А** не равна его безусловной вероятности **Р (А) =** 1/2. Итак, попарно независимые события Л, В, С не являются независимыми в совокупности.

Приведем теперь следствие из теоремы умножения.

**Следствие.** Вероятность совместного появления нескольких событий, независимых в совокупности**,** равна произведению вероятностей атих событий:

**Р [А А...** Л„) = **Р** (Л,) **Р** **(Л,)...** **Р** (Л„).

**Доказательство.** Рассмотрим три события; Л, **В и С.** Совмещение событий Л, В и С равносильно сов­мещению событий **АВ** и С, поэтому

***Р(АВС) = Р(АВ-С).***

Так как события Л, В и С независимы в совокуп­ности, то независимы, в частности, события **АВ** и С, а также Л и В. По теореме умножения для двух неза­висимых событий имеем:

***Р(АВ-С)=\*Р{АВ)Р(С)* и *Р(АВ)\*\*Р(А)Р(В).***

Итак, окончательно получим

Р (ЛВС) = Р (Л) Р (В) Р (С).

Для произвольного **п** доказательство проводится ме­тодом математической индукции.

Замечание. Если события А±, А„ ...,А„ независимы в со­вокупности, то и противоположные им события At, At,.... А„ также независимы в совокупности.

Пример 2. Найти вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет.

Решение. Вероятность появления герба первой монеты (со­бытие А)

Р (А) = 1/2.

Вероятность появления герба второй монеты (событие В)

Р (В) = 1 /2.

События А и В независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна

Р (ЛВ) -Р (Л) Р (В) -1/2-1/2-1/4.

Пример 3. Имеется 3 ящика, содержащих по 10 деталей. В пер­вом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого шцика наудачу вынимают по одной детали. Найти веро­ятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.

43

Решение. Вероятность того, что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие А),

Р (А) =8/10 = 0,8.

Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие В),

Р (В) = 7/10 = 0,7.

Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие С),

Р (С) = 9/10 = 0,9.

Так как события А, В и С независимые в совокупности, то ис­комая вероятность (по теореме умножения) равна

Р (АВС) = Р(А)Р (В)Р (С) = 0,8-0,7-0,9 = 0,504.

Приведем пример совместного применения теорем сложения и умножения.

Пример 4. Вероятности появления каждого из трех независимых событий Аг, Аг, А3 соответственно равны Рх, рг, Ра- Найти вероят­ность появления только одного из этих событий.

Решение. Заметим, что, например, появление только первого события Ах равносильно появлению события АхАгАз (появилось пер­вое и не появились второе и третье события). Введем обозначения:

Вг—появилось только событие Лх, т. е. Вх = АхАгА3;

В2— появилось только событие А3, т. е. В2 = А2АхА3;

В3—появилось только событие А3, т. е. В3 = А3АхАг.

Таким образом, чтобы найти вероятность появления только

одного из событий Ах, Ая, А3, будем искать вероятность P(Bx + B2-f-

1. В„) появления одного, безразлично какого из событий Вх, В2, В3.

Так как события Вх, В2, В\* несовместны, то применима теорема сложения

Р (Вх + В2 + Ва) = Р (Вх) + Р (В2) + Р (В8). (•)

Остается найти вероятности каждого из событий Вх, В2, В3.

События Ах, А2, А3 независимы, следовательно, независимы события Ах, А2, А3, поэтому к ним применима теорема умножения Р (Вх) = Р (АхАгА3) =Р (Лх) Р (А2) Р (Л3) = Plq2q3.

Аналогично,

Р *(В2)* — Р (*А2Ах~А3) = Р* (Л2) Р (Ах) Р *(A3)=p2qxqa-*

*P (В3)* =Р *(А3АхА2) = Р(А3) Р (Ах) Р (A2)* = p3qxq2.

Подставив эти вероятности в (\*), найдем искомую вероятность появ­ления только одного из событий Ах, А2, А3:

Р *(^1* + + В3) — Pxq3q3 + Pa<7i<7s + РаЯ^г-

§ 5. Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания могут появиться **п** событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем

44

вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

**Теорема.** Вероятность появления хотя бы одного из

событий **Л1( Л2 Л„,** независимых в совокупности,

равна разности между единицей и произведением вероят­ностей противоположных событий Alt **Л2, ...,** ЖЛ:

Р {А) **= 1 —** q1q% ... qn. **(\*)**

**Доказательство.** Обозначим через **А** событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий **Аг,** Л2, **..., Ап.** События **А** и **AtA2 ... Ап** (ни одно из событий не наступило) противоположны, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:

***Р(А)*** + Р(А1'А2 ... **Л„) = 1.**

Отсюда, пользуясь теоремой умножения, получим

**Р(А)^1-Р(А1А2 ...** **Л„)=1-Р(Л1)Р(ЛЯ)** **...** **Р** (Л„), или

***Р(А)= 1—Я&* ...** qn-

**Частный случай.** Если события ***Ait* Л2, ..., Л„** имеют одинаковую вероятность, равную р, то вероят­ность появления хотя бы одного из этих событий

**Р(Л)=1** — **qn.** (\*\*)

Пример 1. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: р1~0,8; р2 — 0,7; /?я = 0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рас­сматриваемые события Аг (попадание первого орудия), А2 (попадание второго орудия) и Аа (попадание третьего орудия) независимы в со­вокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям At, А2 и Аа (т. е. вероятности промахов), соответственно равны:

<7i = 1 —Pi— 1 —0,8 = 0,2; q2 = 1 —Ра— 1 —0,7 = 0,3;

<7s=l— Ps=l— 0,9 = 0,1.

Искомая вероятность

Р (А) = 1 — qiq2q3 = 1 — 0,2 0,3 0,1= 0,994.

45

Пример 2. В типографии имеется 4 плоскопечатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие А).

Решение. События «машина работает» и «машина не рабо­тает» (в данный момент) — противоположные, поэтому сумма их веро­ятностей равна единице:

***p + q=* 1.**

Отсюда вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна

<7= 1 —р = 1 —0,9 = 0,1.

Искомая вероятность

Р (А)— I —1 —0,1 \* = 0,9999.

Так как полученная вероятность весьма близка к единице, то иа основании следствия из принципа практической невозможности мало­вероятных событий мы вправе заключить, что в данный момент работает хотя бы одна из машин.

Пример 3. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы одни раз?

Решение. Обозначим через А событие «при п выстрелах стрелок попадает в цель хотя бы един раз». События, состоящие в попадании в цель при первом, втором выстрелах и т. д., независимы в совокупности, поэтому применима формула (\*\*)

*P(A)=l — qn.*

Приняв во внимание, что, по условию, Р (4) 3\*0,9, р— 0,4 (следова­тельно, q— 1—0,4 = 0,6), получим

1—0,6“ 3\*0,9; отсюда 0,6" <0,1.

Прологарифмируем это неравенство по основанию 10:

nig 0,6 < lg 0,1.

Отсюда, учитывая, что lg0,6 < 0, имеем

п 3» lg 0,1 /lg 0,6 = — 1 /1,7782 = — 1 /(—0,22 Г8) = 4,5.

Итак, п 3s 5, т. е. стрелок должен произвести не менее 5 вы­стрелов.

Пример 4. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых в совокупности испытаниях, равна 0,936. Найти вероятность появления события в одном испытании (предпо­лагается, что во всех испытаниях вероятность появления события одна и та же).

Решение. Так как рассматриваемые события независимы в совокупности, то применима формула (\*\*)

Р(4) = 1 — 9».

46

По условию, Р {А) =0,936; п — 3. Следовательно,

0,936= 1 — q3, или 9»= 1—0,936 = 0,064.

Отсюда q = 0,064 = 0,4.

Искомая вероятность

р=1—<7=1—0,4 = 0,6.

Задачи

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле по­падает в мишень, равна р = 0,9. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти

вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание.

Отв. 0,729.

1. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность сов­мещения событий: «появился «герб», «появилось 6 очков».

Отв. 1/12.

1. В двух ящиках находятся детали: в первом—10 (из них 3 стандартных), во втором—15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

Отв. 0,12.

1. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна р = 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие А).

Отв. 0,936.

1. Чему равна вероятность того, что при бросании трех играль­ных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие А)?

Отв. 91/216.

1. Предприятие изготовляет 95% изделий стандартных, причем из них 86% — первого сорта. Найти вероятность того, что взятое наудачу изделие, изготовленное на этом предприятии, окажется пер­вого сорта.

Отв. 0,817.

1. Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не вы­падет одной и той же стороной. Найти вероятности следующих собы­тий: а) опыт окончится до шестого бросания; б) потребуется четное число бросаний.

Отв. а) 15/16; б) 2/3.

1. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, а затем из оставшихся четырех — вторая цифра. Предполагается, что все 20 воз­можных исходов равновероятны. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза.

Отв. а) 3/5; б) 3/5; в) 3/10.

1. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

Отв. п5-2.

1. Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6. Найти вероят­ность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

Отв. 0,936.

47

1. Вероятность того, что событие А появится хотя бы один раз при двух независимых испытаниях, равна 0,75. Найти вероятность появления события в одном испытании (предполагается, что вероят­ность появления события в обоих испытаниях одна и та же).

Отв. 0,5.

1. Три команды Аг, А2, А3 спортивного общества А состязаются соответственно с тремя командами общества В. Вероятности того, что команды общества А выиграют матчи у команд общества В, таковы: при встрече At с Вг — 0,8; А2 с В2 — 0,4; Аа с В3 — 0,4. Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех (ничьи во вни­мание не принимаются). Победа какого из обществ вероятнее?

Отв. Общества А (Ра — 0,544 > 1/2).

1. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком — 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

Отв. 0,44.

1. Из последовательности чисел 1, 2, ..., п наудачу одно за другим выбираются два числа. Найти вероятность того, чго одно из них меньше целого положительного числа ft, а другое больше к, где 1 < k < п.

Отв. (2 [ft— 1) (п— к)У[п(п— 1)].

Указание. Сделать допущения: а) первое число <ft, а второе > ft; б) первое число > ft, а второе < ft.

^15. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандарт­ность. Вероятность того, что изделие нестандартно, раз на 0,1. Найти вероятность того, что: а) из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным; б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие.

Отв. а) 0,243; б) 0,0729.

Глава четвертая

СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

§ 1. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Была рассмотрена теорема сложения для несов­местных событий. Здесь будет изложена теорема сложения для совместных событий.

Два события называют **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

ПрВмер 1. А — появление четырех очков при бросании играль­ной кости; В — появление четного числа очков. События А и В — совместные.

Пусть события **А** и **В** совместны, причем даны веро­ятности этих событий и вероятность их совместного по­явления. Как найти вероятность события **А + В,** состоя­щего в том, что ^появится хотя бы одно из событий **А** и **В**? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения вероят­ностей совместных событий.

48

**Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления: Р (А** + **В)** = **Р** (А) + **Р {В) — Р (АВ**). **Доказательство.** Поскольку события **А** и **В,** по условию, совместны, то событие **А** + **В** наступит, если наступит одно из следующих трех несовместных событий: **АВ, АВ** или **АВ.** По теореме сложения вероятностей несовместных событий,

Р(Л +В) = **Р(ЛВ) + Р(ЛВ)** + Р(Л5). (\*)

Событие **А** произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: **А В** или **АВ.** По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем

***Р(А)=Р(АВ) + Р(АВ).***

Отсюда

***Р(АВ)^Р(А) — Р (АВ).* (\*\*)**

Аналогично имеем

Р(В) = Р(ЛВ) + Р(ЛВ).

Отсюда

***Р(АВ) = Р(В) — Р(АВ)***

Подставив (\*\*) и (\*\*\*) в (\*), окончательно получим

Р(Л + В) = **Р(Л)** + **Р(В) — Р(АВ).** (\*\*\*\*)

Замечание 1. При использовании полученной формулы сле­дует иметь в виду, что события А п В могут быть как независимыми, так и зависимыми.

Для независимых событий

Р (А + В) = Р (А) + Р (В) - Р (А) Р (В);

для зависимых событий

*Р(А+В) = Р(А) -Р(В)-Р(А)Ра(В).*

Замечание 2. Если события А к В несовместны, то их сов­мещение есть невозможное событие и, следовательно, Р(АВ)=0. Формула (\*\*\*\*) для несовместных событий принимает вид

*Р(А + В) = Р(А)+Р(В).*

Мы вновь получили теорему сложения для несовместных собы­тий. Таким образом, формула (\*\*\*\*) справедлива как для совмест­ных, так и для несовместных событий.

Пример 2. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: pi — 0,7; р2 = 0,8. Найти

4 — 2730 49

вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результата стрельбы из другого орудия, поэтому собы­тия А (попадание первого орудия) и В (попадание второго орудия) независимы.

Вероятность события АВ (оба орудия дали попадание)

Р {АВ) = Р (А) Р (В) = 0,7 0,8 = 0.56.

Искомая вероятность Р (А + В) = Р (Л) + Р{В)—Р (АВ) = 0,7 -f 0,8 - 0,56 = 0,94.

Замечание 3. Так как в настоящем примере события А и В независимые, то можно было воспользоваться формулой Р = 1 — — 9i?2 (см. гл. III, § 5). В самом деле, вероятности событий, про­тивоположных событиям А и В, г. е. вероятности промахов, таковы:

9i=l— щ = 1—0,7 = 0,3; <?2=1— р2=1— 0,8 = 0,2.

Искомая вероятность того, что при одном залпе хотя бы одно орудие даст попадание, равна

р = | — qiqt = 1 \_ 0,3 -0.2 = 0,94.

Как и следовало ожидать, получен тот же результат.

§ 2. Формула полной вероятности

Пусть событие **А** может наступить при условии появления одного из несовместных событий **Blf Bt,'..** **.,** **Вп,** которые образуют полную группу. Пусть известны веро­ятности этих событий и условные вероятности **Рв,** (Л), **Рвг{А), Рвп{А)** события **А.** Как найти вероятность

события Л? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

**Теорема.** Вероятность события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несо­вместных событий Blt В2, **...,** Вп, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероят­ность события А:

**Р** (Л) = **Р (В,) Рв**, **(Л)** + **Р** (В,) **Рв,** (Л) + • • • ... + /,(В„) **РВп(А).**

Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

**Доказательство.** По условию, событие Л может наступить, если наступит одно из несовместных событий Вх, **Вг,** **...,** В„. Другими словами, появление события **А** означает осуществление одного, безразлично какого, из несовместных событий ВХЛ, **BtA, В„А.** Пользуясь

50

для вычисления вероятности события **А** теоремой сложе­ния, получим

Остается вычислить каждое из слагаемых. По теореме умножения вероятностей зависимых событий имеем

Подставив правые части этих равенств в соотноше­ние (•), получим формулу полной вероятности

Пример 1. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что  
деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго—0,9. Найти  
вероятность того, что взятая наудачу деталь (из наудачу взятого  
набора) — стандартная.

Решение. Обозначим через А событие «извлеченная деталь  
стандартна».

Деталь может бы+ь извлечена либо из первого набора (собы-  
тие ВЦ, либо из второго (событие Bt).

Вероятность того, что деталь вынута из первого набора,

ероятиость того, что деталь вынута из второго набора.

словиая вероятность того, что из первого набора будет извле­чена стандартная деталь, PBi (А) — 0,8.

Условная вероятность того, что из второго набора будет извле­чена стандартная деталь, PBt(A)=f),9.

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь — стандартная, по формуле полной вероятности равна

Пример 2. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из них 18 стандартных; во второй коробке—10 ламп, из них 9 стандарт­ных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в пер­вую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартной.

Решение. Обозначим через А событие «из первой коробки извлечена стандартная лампа».

Из второй коробки могла быть извлечена либо стандартная лампа (событие Вх), либо нестандартная (событие В2).

Вероятность того, что из второй коробки извлечена стандартная лампа, Р (Вг) =9/10.

Вероятность того, что из второй коробки извлечена нестандарт­ная лампа, Р(В\*) = 1/10.

**Р(А) = Р** (ВгЛ) + **Р** (**В,А**) + ... + **Р** **(.В „А**). (.)

Р **(ВХЛ) =** Р(В,) ***PBi {А); Р* (В2Л) = *Р {В») Рв*. *(А);* ... ; *Р(ВпА) = Р(Вв)РВп(А).***

***Р (А)* = *Р* (Вх) *PBl (А*) + *Р* (В.) *РВш (А) +  
..- + Р(Ва)РВп(А).***

• • •



Р (А) = Р (Bt) PBl (А) + Р (В,) РВг (А) = = 0,5 • 0,8 + 0,5 ■ 0,9 = 0,85.

51

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена стандартная лампа, равна (-^) = 19/21.

Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная лампа, при условии, что из второй коробки в первую была переложена нестандартная лампа, равна Рд, (А) = 18/21.

Искомая вероятность того, что из первой коробки будет извле­чена стандартная лампа, по формуле полной вероятности равна

Р(А) = Р(В1) Рд, (Л) + Р (В2)Рд,(Л) = (9/10).(19/21) +

+ (1/10).(18/21) = 0,9.

§ 3. Вероятность гипотез. Формулы Бейеса

Пусть событие **А** может наступить при условии появления одного из несовместных событий **Ви Вг, ...,** **Вп,** образующих полную группу. Поскольку заранее не из­вестно, какое из этих событий наступит, их называют **гипотезами.** Вероятность появления события **А** опреде­ляется по формуле полной вероятности (см. § 2):

***Р(А) = Р (Вг) Рв*, *(А) + Р (В,) РвЛА)+...***

***...+Р(Вп)РВп(А).* (\*)**

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие **А.** Поставим своей задачей определить, как изменились (в связи с тем, что собы­тие **А** уже наступило) вероятности гипотез. Другими словами, будем искать условные вероятности

***Р a (B2)f* •••» *Р а (В„).***

Найдем сначала условную вероятность **РА (Вг).** По теореме умножения имеем

***Р* (*ABt*) = *Р (А) РА* (Вх) = *Р (В,) РВ*, (Л).**

Отсюда

***Г IB* 1**

f'jl'».)- Р(Л)

Заменив здесь **Р** (Л) по формуле (\*), получим

*р* ,Bv *РЫРв^А)*

rA W - р (Bi) Pgt (Л) + р (Ва) РдАА)+... +Р {Ва) рНп (А) •

Аналогично выводятся формулы, определяющие услов­**ные** вероятности остальных гипотез, т. е. условная веро­ятность любой гипотезы **Вt** **((=1,2, ...,** л) может быть

52

вычислена по формуле

***р №i)pBi(A)***

*?А* “ *Р* (Bi) *PBl (Л)+Р (Вг) Рв, (А)+...+Р(Вп) РдпНА)* •

**Полученные формулы называют** формулами Бейеса **(по имени английского математика, который их вывел; опубликованы в 1764 г.).** Формулы Бейеса позволяют переоценить вероятности гипотез после того, как ста­новится известным результат испытания, в итоге кото­рого появилось событие А.

Пример. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Веро­ятность того, что деталь попадает к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму — 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет приз­нана стандартной первым контролером, равна 0,94, а вторым—0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

Решение. Обозначим через А событие, состоящее в том, что годная деталь признана стандартной. Можно сделать два предполо­жения:

1. деталь проверил первый контролер (гипотеза Z?i);
2. деталь проверил второй контролер (гипотеза В2).

Искомую вероятность того, что деталь проверил первый контро­лер, найдем по формуле Бейеса:

Р и, р(«,)'■»,И)

По условию задачи имеем: р (5,3 = 0,6 (вероятность того, что деталь попадает к первому конт­ролеру);

Р (В2) =0,4 (вероятность того, что деталь попадет ко второму конт­ролеру);

PBi (Л) = 0,94 (вероятность того, что годная деталь будет признана первым контролером стандартной);

PBi (А) =0,98 (вероятность того, что годная деталь будет признана вторым контролером стандартной).

Искомая вероятность

Ра (Bi) = (0,6-0,94)/(0,6-0,94+ 0,4-0,98) « 0,59.

Как видно, до испытания вероятность гипотезы Вх равнялась 0,6, а после того, как стал известен результат испытания, вероятность этой гипотезы (точнее, условная вероятность) изменилась и стала рав­ной 0,59. Таким образом, использование формулы Бейеса позволило переоценить вероятность рассматриваемой гипотезы.

Задачи

1. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероят­ность попадания в мишень первым стрелком равна С,7, а вторым—• 0,6. Найти вероятность того, что Хотя бы один из стрелков попал в мишень.

Отв. 0,88.

53

1. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1, и 4 детали завода № 2. Наудачу взяты 2 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

Отв. 92/95.

1. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бе­гуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника—0,9, для велосипедиста—0,8 и для бегуна—0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

Отв. 0,86.

1. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заво­дом № 1, и 2 коробки деталей, изготовленных зародом №2. Вероят­ность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,8, а завода № 2 — 0,9, Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой ко­робки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

Отв. 0,84.

1. В первом ящике содержится 20 деталей, из них . 15 стандарт­ных; во втором — 30 деталей, из них 24 стандартных; в третьем—. 10 деталей, из них 6 стандартных. Найтн вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящнка—стандартная.

Отв. 43/60.

в. В телевизионном ателье имеется 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, соответст­венно равны 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

Отв. 0,875.

1. В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содер­жится 12 ламп, нз них 1 нестандартная; во втором 10 ламп, из них 1 нестандартная. Из первого ящика наудачу взята лампа и перело­жена во второй. Найтн вероятность того, что наудачу извлеченная из второго ящика лампа будет нестандартной.

Отв. 13/132.

1. Из полного набора 28 костей домино наудачу извлечена кость. Найти вероятность того, что вторую извлеченную наудачу кость можно приставить к первой.

Отв. 7/18.

1. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком слу­чае вероятность вытащить неизвестный билет будет для иего наимень­шей: когда он берет билет первым или последним?

Отв. Вероятности одинаковы в обоих случаях.

1. В ящик, содержащий 3 одинаковых детали, брошена стан­дартная деталь, а затем наудачу извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь, если равноверо­ятны все возможные предположения о числе стандартных деталей, первоначально находящихся в ящике.

Отв. 0,625.

1. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор С-1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор С-11 срабатывает с вероятностью 1. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-11, соответственно равны 0,6 и 0,4. Получен сигнал о разделке автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором С-1 или С-11?

Отв. Вероятность того, что автомат снабжен сигнализатором С-1, равна 6/11, а С-11—5/11.

54

1. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревно­ваниях выделено из первой группы курса 4, из второй —6, нз третьей группы—5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадает в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревно­вания попал в сборную. К какой из групп вероятнее всего принад­лежал этот студент?

Отв. Вероятности того, что выбран студент первой, второй, тре­тьей групп, соответственно равны: 18/59, 21/59, 20/59.

1. Вероятность для изделий некоторого производства удовлетво­рять стандарту равна 0,96. Предлагается упрощенная система про­верки на стандартность, дающая положительный результат с вероят­ностью 0,98 для изделий, удовлетворяющих стандарту, а для изде­лий, которые ие удовлетворяют стандарту,— с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что изделие, признанное при проверке стандартным, действительно удовлетворяет стандарту.

Отв. 0,998.

Глава пятая

ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

§ 1. Формула Бернулли

Если производится несколько испытаний, при­чем вероятность события **А** в каждом испытании не за­висит от исходов других испытаний, то такие испытания называют **независимыми относительно события А.**

В разных независимых испытаниях событие **А** может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие **А** имеет одну и ту же вероятность.

Ниже воспользуемся понятием **сложного события**, по­нимая под ним совмещение нескольких отдельных собы­тий, которые называют **простыми.**

Пусть производится л независимых испытаний, в каж­дом из которых событие **А** может появиться либо не появиться. Условимся считать, что вероятность собы­тия **А** в каждом испытании одна и та же, а именно равна **р.** Следовательно, вероятность ненаступления со­бытия **А** в каждом испытании также постоянна и равна 9 = 1— Р-

Поставим перед собой задачу вычислить вероятность того, что при л испытаниях событие **А** осуществится ровно k раз и, следовательно, не осуществится л—k раз. Важно подчеркнуть, что не требуется, чтобы событие **А** повторилось ровно **k** раз в определенной последователь­

65

ности. Например, если речь идет о появлении события **А** три раза в четырех испытаниях, то возможны следующие сложные события: **АААА, АААА, АААА, АААА.** Запись **АААА** означает, что в первом, втором и третьем испы­таниях событие **А** наступило, а в четвертом испытании оно не появилось, т. е. наступило противоположное со­бытие **А;** соответственный смысл имеют и другие записи.

Искомую вероятность обозначим **Р„** (**k**). Например, символ **Рй** (3) означает вероятность того, что в пяти испытаниях событие появится ровно 3 раза и, следова­тельно, не наступит 2 раза.

Поставленную задачу можно решить с помощью так называемой формулы Бернулли.

Вывод формулы Бернулли. Вероятность одного слож­ного события, состоящего в том, что в **п** испытаниях событие **А** наступит **k** раз и не наступит **п** — **k** раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий равна **pkqn~k.** Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из **п** эле­ментов по **k** элементов, т. е. **С%.** Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятно­стей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Поскольку же вероятности всех этих сложных событий одинаковы, то искомая вероятность (появления **k** раз со­бытия **А** в **п** испытаниях) равна вероятности одного сложного события, умноженной на их число:

P„(A)==C^V-a

или

Полученную формулу называют **формулой Бернулли.**

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продол­жение одних суток не превысит установленной нормы, равна р = 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электро­энергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение. Вероятность нормального расхода электроэнергии в продолжение каждых из 6 суток постоянна н равна р = 0,75. Сле­довательно, вероятность перерасхода электроэнергии в каждые сутки также постоянна и равна д = 1—р— 1—0,75 = 0,25.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

Pt (4) =CjPy =CSpV (0,75)\*-(0,25)\* =0,30.

56

§ 2. Локальная теорема Лапласа

Выше была выведена формула Бернулли, позво­ляющая вычислить вероятность того, что событие появится в **п** испытаниях ровно **k** раз. При выводе мы предпола­гали, что вероятность появления события в каждом испытании постоянна. Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли при больших значениях **п** достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. Например, если п = 50, **k** = 30, р **=0,1,** то для отыскания вероятности **Рьо** (30) надо вычислить выражение Рбо(30) =50!/(30!20!)-(0,1)зо-(0,9)20, где 50! =30 414 093-10«, 30! =26 525 286-102»,20! =

= 24 329020-1011. Правда, можно несколько упростить вычисления, пользуясь специальными таблицами лога­рифмов факториалов. Однако и этот путь остается громоздким и к тому же имеет существенный недостаток: таблицы содержат приближенные значения логарифмов, поэтому в процессе вычислений накапливаются погреш­ности; в итоге окончательный результат может значи­тельно отличаться от истинного.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. Локальная теорема Лапласа и дает асимптотическую \*\* формулу, которая позволяет приближенно найти вероятность появления события ровно **k** раз в **п** испытаниях, если число испы­таний достаточно велико.

Заметим, что для частного случая, а именно для **р=1/2,** асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром; в 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного р, отличного от 0 и 1. Поэтому тео­рему, о которой здесь идет речь, иногда называют **теоремой Муавра**—**Лапласа.**

Доказательство локальной теоремы Лапласа довольно сложно, поэтому мы приведем лишь формулировку тео­ремы и примеры, иллюстрирующие ее использование.

**Локальная теорема Лапласа.** Если вероятность р появ­ления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность Рп (k) того,

\*' Функцию ф (\*) называют асимптотическим приближением

функции /(\*), если lim JS^L — 1.

ж ® Ф (\*)

57

что событие А появится в п испытаниях ровно k раз, приближенно равна(тем точнее, чем больше п) значению функции

**,—- *е~х\*/г*** — **• ф *(х)***

Y 2я Y ПРЯ

**при x = (k— np)lYnpq.** Имеются таблицы, в которых помещены значения

функции ф **(jc)** = ■ е-\*' \*, соответствующие положитель-

У 2п

ным значениям аргумента **х** (см. приложение 1). **Для** отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, так как функция ф(х) четна, т. е. ф (—х)=ф(х). Итак, вероятность того, что событие **А** появится в **п** независимых испытаниях ровно **k** раз, приближенно равна рп (\*)» -Тг= • Ф (\*), **у npq** где **x — (k—пр)1У npq.**

Пример 1. Найти вероятность того, что событие А наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию, п = 400; Л = 80; р = 0,2; <7 = 0,8. Вос­пользуемся асимптотической формулой Лапласа:

<80>” гЬ.о,2.о,8 • \*<\*>=т«•

Вычислим определяемое данными задачи значение х:

x—{k— пр)1 У пря = (80— 400• 0,2)/8 = 0.

По таблице приложения 1 находим <р (0) = 0,3989.

Искомая вероятность

Р\*оо (80) = (1/8) 0,3989 = 0,04986.

Формула Бернулли приводит примерно к такому же результату (выкладки ввиду их громоздкости опущены):

Р\*оо (80) =0,0498.

Пример 2. Вероятность поражения мишеин стрелком при одном выстреле р =0,75. Найти вероятность того, что при 10 выстрелах стрелок поразит мишень 8 раз.

Решение. По условию, л = 10; k = 8; р = 0,75; 0 = 0,25. Воспользуемся асимптотической формулой Лапласа:

Р10 (8) а. \* =- • <р [х) =0,7301 ф (х).

У 10 0,75 0,25

58

Вычислим определяемое данными задачи значение х:

k — np 8—100,75

/ npq V 10-0,75-0,25

.0,36.

По таблице приложения 1 находим <р (0,36) = 0,3739.

Искомая вероятность

Р10 (8) =0,7301 -0,3739 = 0,273.

Формула Бернулли приводит к иному результату, а. именно р10 (8) =0,282. Столь значительное расхождение ответов объясняется тем, что в настоящем примере п имеет малое значение (формула Лапласа дает достаточно хорошие приближения лишь при достаточно больших значениях л).

§ 3. Интегральная теорема Лапласа

Вновь предположим, что производится **п** испы­таний, в каждом1 из которых вероятность появления события **А** постоянна и равна р (0 < **р** < 1). Как вычис­лить вероятность **Pn(kи** Л2) того, что событие **А** появится в **п** испытаниях не менее **kt** и не более **kt** раз (для крат­кости будем говорить «от до **ka** раз»)? На этот вопрос отвечает интегральная теорема Лапласа, которую мы приводим ниже, опустив доказательство.

**Теорема.** Если вероятность р наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность Рп **(**kx, kt) того, что событие А появится в п испытаниях от kl до **/г2** раз, приближенно равна определенному интегралу

ж"

***P»(h,* <\*)**

***г***

**где —*np)lVnpq* и *xf = {kt*—*np)/Vnpq.***

При решении задач, требующих применения интеграль­ной теоремы Лапласа, пользуются специальными табли­цами, так как неопределенный интеграл **§e~zt/,dz** не выражается через элементарные функции. Таблица для

***X***

интеграла Ф (дс) =-р==- J**®-\*\*7\*dz** пРивеДена в конце книги

(см. приложение 2). В таблице даны значения функции Ф(х) для положительных значений **х** и для **х —** 0; для \* < 0 пользуются той же таблицей [функция Ф **(х)** не-

59

четна, т. е. Ф (— **х) —** — Ф (\*)]. В таблице приведены значения интеграла лишь до **х — Ъ,** так как для **х** > 5 можно принять Ф (х) = 0,5. Функцию Ф(х) часто называют **функцией Лапласа.** Для того чтобы можно было пользоваться таблицей функции Лапласа, преобразуем соотношение (\*) так:

о хГ

Р (Ь Ь \ (v . Г р—г\*/г Л^ \_| ' Г р-г’/я Л? =

х' о

- тш “г~~т 1 e“'ft <1г=ф <\*'>•

[о о](#bookmark327)

Итак, вероятность того, что событие **А** появится в **п** независимых испытаниях от **kt** до ft2 раз, **Pn(klt** 62)~Ф(х")—Ф(х'),

**где = —*np)l\f npq* и *x" = (k2*—*np)j\fnpq.***

Приведем примеры, иллюстрирующие применение ин­тегральной теоремы Лапласа.

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна р = 0,2. Найтн вероятность того, что среди 400 случайно ото­бранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию, р = 0,2; q = 0,8; п = 400; Лх = 70; ft2=100. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

Р40о(70, 100) иФ(\*")-Ф(\*').

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования: х,\_ ki — ПР \_\_ ?0— 400-0,2 t 9Я.

Vnpq ~\f400-0,2-0,8 ’ ’

r, .. К — пр 100-400-0,2 „

V~npq ~\f400-0,2.0,8

Таким образом, имеем

Р400 (70. 100) = Ф (2,5) - Ф (—1,25) = Ф (2,5) +Ф (1,25).

По таблице приложения 2 находим:

Ф (2,5) =0,4938; Ф (1,25) = 0,3944.

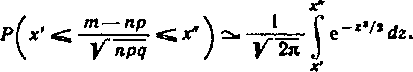
Искомая вероятность

Р4оо (70, 100) =0,4938 + 0,3944 = 0,8882.

Замечание. Обозначим через т число появлений события А при п независимых испытаниях, в каждом нз которых вероятность наступления события А постоянна и равна р. Если число т изме­няется от fcx до ft2, то дробь (т—яр)/ Ynpq изменяется от (йх — np)(Ynpq — хе до (k2 — np)l\rnpq = x". Следовательно, интег-

60

ральную теорему Лапласа можно записать и так:



Эта форма записи используется ниже.

**§ 4. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях**

**Вновь будем считать, что производится п неза**

**вислмых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна р (0 < р < 1). Поставим перед собой задачу найти вероятность того, что отклонение относительной частоты т/п от постоянной вероятности р по абсолютной величине не превышает заданного числа е > 0. Другими словами, найдем веро­ятность осуществления неравенства**

**Эту вероятность будем обозначать так: Р(\т/п — р|^е). Заменим неравенство (\*) ему равносильными:**

**— г^/т/п— р<**1**е или —е^(т—пр)/п ^ е.**

**Умножая эти неравенства на положительный множитель У n/{pq), получим неравенства, равносильные исходному:**

**— е** V***п/(РЯ)*** < ("I **—** np)!Vnpq **<81/"**n/(pq).

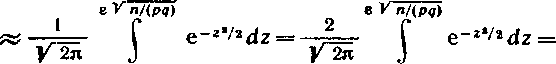
**Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа в фор­ме, указанной в замечании (см. § 3). Положив х' = = — е Vn/(pq)** **и** x" **=** e]/V?/(P<7). **имеем**

**Р (—е Vn/(pq) < (m —■ np)IV npq < e ]/“n/(nq)) «**

**Наконец, заменив неравенства, заключенные в скобках, равносильным им исходным неравенством, окончательно получим**

**| т/п — р | ^ е.**

**(\*)**



-eV **пДрд)**

0

**= 2Ф *(гУп/(рд)).***

**Р (| т/п —р | <; е) ~ 2Ф (е У n/(pq)).**

61

**Итак, вероятность осуществления неравенства |т/п — р|^е приближенно равна значению удвоенной функции Лапласа 2Ф (х) при х = е}/ n/(pq).**

Пример 1. Вероятность того, что деталь не стандартна, р — 0,1. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности р = 0,1 по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. По условию, л = 400; р = 0,1; д = 0,9; е = 0,03. Тре­буется найти вероятность Р (| т/400—0,1 | < 0,03). Пользуясь форму­лой Р(|т/л—р|<е)»2Ф(е /n/(pq)), имеем

Р (| т/400— 0,1 ] < 0,03) » 2Ф (0,03 /400/(0,1 0,9)) = 2Ф (2).

По таблице приложения 2 находим Ф (2) = 0,4772. Следовательно, 2Ф (2) = 0,9544.

Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,9544.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44% этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероят­ности р=0,1 по абсолютной величине не превысит 0,03.

Пример 2. Вероятность того, что деталь не стандартна, р = 0,1. Найти, сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью, равной 0,9544, можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от постоянной вероятности р по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. По условию, р = 0,1; д — 0,9; е = 0,03; Я(|т/я— 0,11< <0,03) —0,9544. Требуется найти п.

Воспользуемся формулой

Р (| т/п — р |<е) « 2Ф (е /я/(рд)).

В силу условия

2Ф (0,03 /«/(0,1-0,9)) =2Ф (0,1 /я) =,0,9544.

Следовательно, Ф (0,1 /л) = 0,4772.

По таблице приложения 2 находим Ф (2) = 0,4772.

Для отыскания числа л получаем уравнение 0,1 /~л=2. Отсюда искомое число деталей л = 400.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей, то в 95,44% этих проб относи­тельная частота появления нестандартных деталей будет отличаться от постоянной вероятности р = 0,1 по абсолютной величине не более чем на 0,03, т. е. относительная частота заключена в границах от 0,07(0,1—0,03 = 0,07) до 0,13(0,1-)-0,03 = 0,13). Другими словами, число нестандартных деталей в 95,44% проб будет заключено между 28(7% от 400) н 52(13% от 400).

Если взять лишь одну пробу из 400 деталей, то с большой уверенностью можно ожидать, что в этой пробе будет нестандартных деталей не менее 28 и не более 52. Возможно, хотя и маловероятно, что нестандартных деталей окажется меньше 28 либо больше 52.

62

Задачи

1. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найтн вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.

Отв. а) Рв (4) = 0,246; б) Рв (6) = 0,26; в) Р, (0) = 0,000064.

1. Найти вероятность того, что событие А появится в пяти не­зависимых испытаниях не менее двух раз, если в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,3.

Отв. Р=1-[Рв(0) + Рв(1)] = 0,472.

1. Событие В появится в случае, если событие А появится не менее двух раз. Найти вероятность того, что наступит событие В, если будет произведено 6 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,4.

Отв. Р=1 — [Рв(0) + Рв (1)]=0,767.

1. Произведено 8 независимых испытаний, в каждом Из которых вероятность появления события А равна 0,1. Найтн вероятность того, что событие А появится хотя бы 2 раза.

Отв. Р=1— [Р8(0) + Р8 (1)] = 0,19.

1. Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что герб вы­падет: а) менее двух раз; б) не менее двух раз.

Отв. а) Р = Рв (0) -f Pe (1) = 7/64; б) Q = 1 -[Р\* (0) +Рв (1)] = 57/64.

в. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия р = 0,9. Вероятность поражения цели при k попаданиях (&^1) равна 1 — <7\*. Найтн вероятность того, что цель будет поражена, если сде­лано два выстрела.

Указание. Воспользоваться формулами Бернулли и полной вероятности.

Отв. 0,9639.

1. Найти приближенно вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Отв. Р400 (104) =0,0006.

1. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень, будет поражена: а) не менее 70 и не более 80 раз; б) не более 70 раз.

Отв. а) Р10„(70,80) = 2Ф(1,15) = 0,7498;

б) Рхоо(0; 70)=—Ф(1,15) + 0,5 = 0,1251.

1. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независи­мых испытаний р = 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсо­лютной величине не более чем на 0,001.

Отв. Р = 2Ф (0,23) = 0,182.

1. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности можно ожидать с вероятностью 0,9128 при 5000 испытаниях.

Отв. е = 0,00967.

1. Сколько рдз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 Можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появле­ний герба от вероятности р = 0,5 окажется по абсолютной величине не более 0,01?

Отв. л = 1764.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ **СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ**

**Глава шестая**

ВИДЫ СЛУЧАЙНЫX ВЕЛИЧИН. ЗАДАНИЕ

ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

**§ 1. Случайная величина**

**Уже в первой части приводились события, со­стоящие в появлении того или иного числа. Например, при бросании игральной кости могли появиться числа** 1**, 2, 3, 4, 5 и** 6**. Наперед определить число выпавших очков невозможно, поскольку оно зависит от многих случайных причин, которые полностью не могут быть учтены. В этом смысле число очков есть величина случайная; числа** 1**, 2, 3, 4, 5 и** 6 **есть возможные значения этой величины.**

**Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значе­ние, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.**

Пример 1. Число родившихся мальчиков среди ста новорожден­ных есть случайная величина, которая имеет следующие возможные значения: 0, 1, 2, ..., 100.

Пример 2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, есть случайная величина. Действительно, расстояние зависит не только от установки прицела, но н от многих других причин (силы н направления ветра, температуры и т. д.), которые не могут быть полностью учтены. Возможные значения этой величины принад­лежат некоторому промежутку (а, Ь).

**Будем далее обозначать случайные величины пропис­ными буквами X, Y, Z, а их возможные значения—соот­ветствующими строчными буквами х, у, г. Например, если случайная величина X имеет три возможных значе­ния, то они будут обозначены так: хх, х2, ха.**

64

**§ 2. Дискретные н непрерывные случайные величины**

**Вернемся к примерам, приведенным выше. В пер­вом из них случайная величина X могла принять одно из следующих возможных значений:** 0**,** 1**,** 2**, . . .,** 100**.**

**Эти значения отделены одно от другого промежутками, в которых нет возможных значений X. Таким образом, в этом примере случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения. Во втором примере случайная величина могла принять любое из значений промежутка (а, Ь). Здесь нельзя отделить одно возможное значение от другого промежутком, не содержащим воз­можных значений случайной величины.**

**Уже из сказанного можно заключить о целесообразно­сти различать случайные величины, принимающие лишь отдельные, изолированные значения, и случайные вели­чины, возможные значения которых сплошь заполняют некоторый промежуток.**

**Дискретной (прерывной) называют случайную вели­чину, которая принимает отдельные, изолированные воз­можные значения с определенными вероятностями. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.**

**Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возмож­ных значений непрерывной случайной величины беско­нечно.**

Замечание. Настоящее определение непрерывной случайной величины не является точным. Более строгое определение будет дано позднее.

**§ 3. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины**

**На первый взгляд может показаться, что для задания дискретной случайной величины достаточно пере­числить все ее возможные значения. В действительности это не так: случайные величины могут иметь одинако­вые. перечни возможных значений, а вероятности их — различные. Поэтому для задания дискретной случайной величины недостаточно перечислить все возможные ее значения, нужно еще указать их вероятности.**

5 — 2730 65

**Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями; его можно задать таблично, аналити­чески (в виде формулы) и графически.**

**При табличном задании закона распределения дискрет­ной случайной величины первая строка таблицы содержит возможные значения, а вторая — их вероятности:**

***X х% ... хп***

Р Pi Pt ••• Рп

**Приняв во внимание, что в одном испытании случайная величина принимает- одно и только одно возможное зна­чение, заключаем, что события Х = xlt X — xt, X =хп образуют полную группу; следовательно, сумма вероят­ностей этих событий, т. е. сумма вероятностен второй строки таблицы, равна единице:**

Р1 + Р2+••• +РЛ=1-

**Если множество возможных значений X бесконечно (счетно), то ряд px + pg+... сходится и его сумма равна единице.**

Пример. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгры­вается один выигрыш в 50 руб. и десять выигрышей по 1 руб. Найти закон распределения случайной величины X— стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета'.

Решение. Напишем возможные значения X: \*i = 50, х\*= 1, xt = 0. Вероятности этих возможных значений таковы: рх = 0,01, Pt = 0.01, Ря=1—(рх + р\*) =0,89.

Напишем искомый закон распределения:

X 50 10 0

р 0,01 0,1 0,89

Контроль: 0,01+0,1-1-0,89=1.

**Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить и графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки (х{, pi), а затем соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют многоугольником распре­деления.**

§ 4. Биномиальное распределение

**Пусть производится п независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться либо не появиться. Вероятность наступления события во всех**

66

**испытаниях постоянна и равна р (следовательно, вероят­ность непоявления <**7**=**1**—р). Рассмотрим в качестве дискретной случайной величины X число появлений со­бытия** А **в этих испытаниях.**

**Поставим перед собой задачу: найти закон распреде­ления величины X. Для ее решения требуется определить возможные значения X и их вероятности. Очевидно, событие А в п испытаниях может либо не появиться,**

**либо появиться** 1 **раз, либо** 2 **раза либо п раз.**

**Таким образом, возможные значения X таковы: хг — 0, дс\*=1, х**3 **= 2, хп+1 — п. Остается найти вероятности этих возможных значений, для чего достаточно восполь­зоваться формулой Бернулли:**

***Pu(k) = C\*pkq\*-k,* (\*)**

**где й =** 0**,** 1**,** 2**, . . ., п.**

**Формула (\*•) и является аналитическим выражением искомого закона распределения.**

**Биномиальным называют распределение вероятностей, определяемое формулой Бернулли. Закон назван «бино­миальным» потому, что правую часть равенства (\*) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:**

(p *+* q)n = *Сппрп* + Cn~1pn~1q *+ ...* + C\*pV\*+ *•..* +C$q\

**Таким образом, первый член разложения рп опреде­ляет вероятность наступления рассматриваемого события п раз в п независимых испытаниях; второй член npn~1q определяет вероятность наступления события п—**1 **раз; ...; последний член q" определяет вероятность того, что событие не появится ни разу.**

**Напишем биномиальный закон в виде таблицы:**

**X п п—** 1 **... k ... О**

Р рп npn~1q .. . CnPkqn~h • • • qn

Пример. Монета брошена 2 раэа. Написать в виде таблицы закон распределения случайной величины X — числа выпадений «герба».

Решение. Вероятность появления «герба» в каждом бросании Монеты р—1/2, следовательно, вероятность непоявления «герба» <7=1 —1/2= 1/2.

Прн двух бросаниях монеты «герб» может появиться либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: \*1 = 2, xt = l, х3—0. Найдем вероятности этих

5\*

67

возможных значений по формуле Бернулли:

Рг (2) =Clp2 = (1/2)3 = 0,25,

Ра(1) = С^ = 2.(1/2)(1/2) = 0,5,

Pi (0) = C\q2 = (1 /2)2 = 0,25.

Напишем искомый закон распределения:

X 2 1 0

р 0,25 0,5 0,25

Контроль: 0,25 + 0,5+0,25=1.

**§ 5. Распределение Пуассона**

**Пусть производится п независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна р. Для определения вероятности** k **появлений со­бытия в этих испытаниях используют формулу Бернулли. Если же п велико, то пользуются асимптотической фор­мулой Лапласа. Однако эта формула непригодна, если вероятность события мала (р^0,1). В этих случаях (п велико, р мало) прибегают к асимптотической формуле Пуассона.**

**Итак, поставим перед собой задачу найти вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно** k **раз. Сделаем важное допущение: про­изведение пр сохраняет постоянное значение, а именно пр = к. Как будет следовать из дальнейшего (см. гл. VII, § 5), это означает, что среднее число появлений события в различных сериях испытаний, т. е. при различных значениях п, остается неизменным.**

**Воспользуемся формулой Бернулли для вычисления интересующей нас вероятности:**

Рп(k) = **«**,**(«- Б (\*-2).** Лп-(к-**1)1** р\*

**Так как р/г = Х, то р — к/п. Следовательно,**

**(£)\*(!—А)-\*.**

**Приняв во внимание, что п имеет очень большое значе­ние, вместо Pn{k) найдем lim Рп (k). При этом будет най-**

Л —► 00

**дено лишь приближенное значение отыскиваемой вероят­ности: п хотя и велико, но конечно, а при отыскании**

68

**предела мы устремим п к бесконечности. Заметим, что поскольку произведение пр сохраняет постоянное значе­ние, то при п—>-оо вероятность р—>-**0**.**

**Итак,**

**п** /и, п{п **— I)** (п **— 2).. .[п —** (к **—1)1** кк { **.** Х\п~к

-ifii\*. [‘-(‘Ч) («-4П-

**Таким образом (для простоты записи знак приближен­ного равенства опущен),**

*Рп (k)* = *№e~x/k\*

**Эта формула выражает закон распределения Пуассона вероятностей массовых (п велико) и редких (р мало) событий.**

Замечание. Имеются специальные таблицы, пользуясь кото­рыми можно найти Pn(k), зная k и X.

Пример. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изде­лий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

Решение. По условию, п = 5000, р — 0,0002, k = 3. Найдем X:

X = пр = 5000-0,0002= 1.

По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна Рьооо (3) = Л\*е\_Х/А! = е- \*/3! = 1 /6е =>. 0.06.

**§** 6**. Простейший поток событий**

**Рассмотрим события, которые наступают в слу­чайные моменты времени.**

**Потоком событий называют последовательность со­бытий, которые наступают в случайные моменты времени. Примерами потоков служат: поступление вызовов на**

**АТС, на пункт неотложной медицинской помощи, при­бытие самолетов в аэропорт, клиентов на предприятие бытового обслуживания, последовательность отказов эле­ментов и многие другие.**

**Среди свойств, которыми могут обладать потоки, вы­делим свойства стационарности, отсутствия последействия и ординарности.**

**Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления** k **событий на любом промежутке**

69

**времени зависит только от числа ft и от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчета; при этом различные промежутки времени предполагаются непере- секакмцимися. Например, вероятности появления ft собы­тий на промежутках времени (1; 7), (10; 16), (Т; Г +** 6**) одинаковой длительности t =** 6 **ед. времени равны между собой.**

**Итак, *если поток обладает свойством стационарности, то вероятность появления k событий за промежуток времени длительности t есть функция, зависящая только от k и t.***

**Свойство отсутствия последействия характеризуется тем, что вероятность появления ft событий на любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествую­щие началу рассматриваемого промежутка. Другими сло­вами, условная вероятность появления ft событий на любом промежутке времени, вычисленная при любых предположениях о том, что происходило до начала рас­сматриваемого промежутка (сколько событий появилось, в какой последовательности), равна безусловной вероят­ности. Таким образом, предыстория потока не сказывается на вероятности появления событий в ближайшем будущем.**

**Итак, *если поток обладает свойством отсутствия последействия, то имеет место взаимная независимость появлений того или иного числа событий в непересекаю- щиеся промежутки времени.***

**Свойство ординарности характеризуется тем, что по­явление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно. Другими словами, вероятность появления более одного события пренебре­жимо мала по сравнению с вероятностью появления толь­ко одного события.**

**Итак, *если поток обладает свойством ординарности, то за бесконечно малый промежуток времени может появиться не более одного события.***

**Простейшим (пуассоновским) называют поток собы­тий, который обладает свойствами стационарности, отсут­ствия последействия и ординарности.**

Замечание. Часто на практике трудно установить, обладает ли поток перечисленными выше свойствами. Поэтому были найдены и другие условия, при соблюдении которых поток можно считать простейшим нли близким к простейшему. В частности, установлено, что если поток представляет собой сумму очень большого числа неза­

70

*висимых стационарных потоков, влияние каждого из которых на всю сумму (суммарный поток) ничтожно мало, то суммарный поток (при условии его ординарности) близок к простейшему.*

**Интенсивностью потока К называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.**

**Можно доказать, что если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления k событий про­стейшего потока за время длительностью / определяется формулой Пуассона**

**Pt (fc) = (M)\*\*e-w//N.**

**Эта формула отражает все свойства простейшего потока.**

**Действительно, из формулы видно, что вероятность появления k событий за время t, при заданной интен­сивности является функцией k и t, что характеризует свойство стационарности.**

**Формула не использует информации о появлении собы­тий до начала рассматриваемого промежутка, что харак­теризует свойство отсутствия последействия.**

**Убедимся, что формула отражает свойство ординар­ности. Положив й = 0 и** k—l, **найдем соответственно вероятности непоявления событий и появления одного события:**

**Pt(**0**)=e-w, *Pt(\) = Ue-M.***

**Следовательно, вероятность появления более одного со­бытия**

**Pt (k > 1) = 1 ~[Pt (0) + Pt (1)] = 1 — [е-м + Me-"]. Пользуясь разложением**

**e-w = l— %t + (Xt)\*/2l— .. после элементарных преобразований получим**

**Pt(k > 1) = (М)\*/2+... •**

**Сравнивая Pt(l) и Pt (й > 1), заключаем, что при малых значениях t вероятность появления более одного события пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью наступления одного события, что характеризует свойство ординарности.**

**Итак, формулу Пуассона можно считать математи­ческой моделью простейшего потока событий.**

Пример. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятности того, что за 5 мин посту­пит: а) 2 вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов. Поток вызовов предполагается простейшим.

71

Решение. По условию, Я = 2, / = 5, k — 2. Воспользуемся фор­мулой Пуассона

Р\*(Л) = (Я/)\*.е-:Kt/k\

а) Искомая вероятность того, что за 5 мин поступит 2 вызова,

Рь (2)=102 е-10/21 —100-0,000045/2 = 0,00225.

Эго событие практически невозможно.

б) События «не поступило ни одного вызова» и «поступил один вызов» несовместны, поэтому по теореме сложения искомая вероят­ность того, что за 5 мин поступит менее двух вызовов, равна

Рь (к < 2) = P§(0)-fP&(l) = e-io + (10 e-10)/i: = 0,000495.

Это событие практически невозможно.

в) События «поступило менее двух вызовов» и «поступило не менее двух вызовов» противоположны, поэтому искомая вероятность того, что за 5 мин поступит не менее двух вызовов,

Р\* (к За 2) = 1 — Р, (Л < 2) = 1 — 0,000495 = 0,999505.

Эго событие практически достоверно.

§ 7. Геометрическое распределение

**Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события** А **равна р** (0 **< р <** 1**) и, следовательно, вероятность его непоявления q=\—р. Испытания заканчиваются, как только появится событие** А. **Таким образом, если собы­тие** А **появилось в fe-м испытании, то в предшествующих k —** 1 **испытаниях оно не появлялось.**

**Обозначим через X дискретную случайную величину — число испытаний, которые нужно провести до первого появления события** А. **Очевидно, возможными значе­ниями X являются натуральные числа: хг —** 1**, х2 — 2, ...**

**Пусть в первых** k**—1 испытаниях событие** А **не насту­пило, а в fe-м испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме умножения вероятностей независимых событий,**

***P(X = k) = q\*-'p.* (\*)**

**Полагая k=\, 2, ... в формуле (\*), получим геометри­ческую прогрессию с первым членом р и знаменателем q** (0 **< </ <** 1**):**

р, ***qp,*** q\*p, **...,** qk~1p, **... (\*\*)**

**По этой причине распределение (\*) называют геометри­ческим.**

72

**Легко убедиться, что ряд (\*•\*) сходится и сумма его равна единице. Действительно, сумма ряда (\*•\*)**

Р/(1 — q) = P/P= 1.

Пример. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель р = 0,6. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Решение. По условию, р = 0,6, (/ = 0,4, к = Ъ. Искомая вероят­ность по формуле (\*)

P = 9\*-i.p = 0,42 0,6 = 0,096.

§ 8. Гипергеометрическое распределение

**Прежде чем дать определение гипергеометричес- кого распределения, рассмотрим задачу. Пусть в партии из N изделий имеется М стандартных (М < N). Из пар­тии случайно отбирают п изделий (каждое изделие может быть извлечено с одинаковой вероятностью), причем отобранное изделие перед отбором следующего не воз­вращается в партию (поэтому формула Бернулли здесь неприменима). Обозначим через X случайную вели­чину— число т "‘стандартных изделий среди п отобран­ных. Очевидно, возможные значения X таковы: 0, 1, 2,**

**..., min (М, п).**

**Найдем вероятность того, что Х — т, т. е. что среди п отобранных изделий ровно т стандартных. Используем для этого классическое определение вероятности.**

**Общее число возможных элементарных исходов испы­тания равно числу способов, которыми можно извлечь п изделий из N изделий, т. е. числу сочетаний С&.**

**Найдем число исходов, благоприятствующих событию Х — т (среди взятых п изделий ровно т стандартных); т стандартных изделий можно извлечь из М стандарт­ных изделий См способами; при этом остальные п—т изделий должны быть нестандартными; взять же п—т нестандартных изделий из N — т нестандартных изделий можно СЯг\_тм способами. Следовательно, число благоприят­ствующих исходов равно СмСУгИм (см. гл. I, § 4, правило умножения).**

**Искомая вероятность равна отношению числа исхо­дов, благоприятствующих событию Х — т, к числу всех элементарных исходов**

*f-rn f^n—m*

***Pi<X=m) = —M-J^.* (\*)**

***Cn***

73

**Формула (\*•) определяет распределение вероятностей, которое называют гипергеометрическим.**

**Учитывая, что т — случайная величина, заключаем, что гипергеометрическое распределение определяется тремя параметрами: N, М, п. Иногда в качестве пара­метров этого распределения рассматривают N, п и p — M/N, где р — вероятность того, что первое извлеченное изделие стандартное.**

**Заметим, что если п значительно меньше N (практи­чески если п<**0**,Ш), то гипергеометрическое распреде­ление дает вероятности, близкие к вероятностям, найден­ным по биномиальному закону.**

Пример. Среди 50 изделий 20 окрашенных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных 5 изделий окажется ровно 3 окрашенных.

Решение. По условию, У = 50, М = 20, п = 5, т — 3. Иско­мая вероятность

Р (X = 3) = С20С30/С50 = 0.234.

Задачи

1. Возможные значения случайной величины таковы: Xi = 2, х, = 5, ха = 8. Известны вероятности первых двух возможных зна­чений: Pi = 0,4, р^ = 0,15. Найти вероятность ха.

Отв. р8 = 0,45.

1. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распреде­ления числа появлений шестерки.

Отв. X 3 2 1 0

р 1/216 15/216 75/216 125/216

1. Составить закон распределения вероятностей числа появлений события А в трех независимых испытаниях, если вероятность появ­ления события в каждом испытании равна 0,6.

Отв. k 0 1 2 3

р 0,064 0,288 0,432 0,216

1. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероят­ность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на пяти веретенах.

Отв. Р 10оо (5)= 0,1562.

б. Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95. Предполагается, что число опечаток распре­делено по закону Пуассона.

Указание. Задача сводится к отысканию параметра X из уравнения е-х = 0,05.

*Отв.* 3.

1. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероят­ность того, что в течение 1 мин абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какое из двух событий вероятнее: в течение 1 мин позвонят 3 абонента; позвонят 4 абонента?

Отв. Р10о (3) = 0,18; Р100 (4) =0.09.

74

1. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содер­жит 1000 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит: а) хотя бы одну опечатку; б) ровно 2 опечатки;

в) не менее двух опечаток. Предполагается, что число опечаток рас­пределено по закону Пуассона.

Отв. а) />=1—е-\* = 0,6321; б) Р1000 (2) =0,18395; в) Р = 0,2642.

1. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в 1 мнн, равно 5. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит: а) два вызова;

б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов.

Указание, е-10 = 0,000045.

Отв. а) 0,00225; б) 0,000495; в) 0,999505.

1. Производится бросание игральной кости до первого выпадения шести очков. Найти вероятность того, что первое выпадение «шес­терки» произойдет при втором бросании игральной кости.

Отв. Р{Х = 2) =5/36.

1. В партии из 12 деталей имеется 8 стандартных. Найти вероят­ность того, что среди 5 взятых наудачу деталей окажется 3 стан­дартных.

Отв. Р(Х = 3)= 14/33.

**Глава седьмая**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

**§ 1. Числовые характеристики дискретных случайных величин**

**Как уже известно, закон распределения пол­ностью характеризует случайную величину. Однако часто закон распределения неизвестен и приходится ограничи­ваться меньшими сведениями. Иногда даже выгоднее пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называют числовыми характеристиками случайной величины. К числу важных числовых характеристик относится математическое ожи­дание.**

**Математическое ожидание, как будет показано далее, приближенно равно среднему значению случайной вели­чины. Для решения многих задач достаточно знать мате­матическое ожидание. Например, если известно, что мате­матическое ожидание числа выбиваемых очков у первого стрелка больше, чем у второго, то первый стрелок в сред­нем выбивает больше очков, чем второй, и, следова­тельно, стреляет лучше второго. Хотя математическое ожидание дает о случайной величине значительно меньше**

75

**сведений, чем закон ее распределения, но для решения задач, подобных приведенной и многих других, знание математического ожидания оказывается достаточным.**

**§ 2. Математическое ожидание дискретной случайной величины**

**Математическим ожиданием дискретной слу­чайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.**

**Пусть случайная величина X может принимать только значения xlt хг, х„, вероятности которых соответ­**

**ственно равны ри р2, . . ., рп. Тогда математическое ожи­дание М (X) случайной величины X определяется равен­ством**

***М (X) = x,pt* + *x2pa* + • • ■ + *хпрп.***

**Если дискретная случайная величина X принимает счетное множество возможных значений, то**

**М(Х)= 2\*,р„**

**i=l**

**причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.**

Замечание. Из определения следует, что математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина. Рекомендуем запомнить это утверждение, так как далее оно используется многократно. В дальнейшем будет пока­зано, что математическое ожидание непрерывной случайной величины также есть постоянная величина.

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной вели­чины X, зная закон ее распределения:

X 3 5 2

р 0,1 0,6 0,3

Решение. Искомое математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности:

М (Х) = 3-0,1+5-0,6 + 2-0,3 = 3,9.

Пример 2. Найти математическое ожидание числа появлений события А в одном испытании, если вероятность события А равна р.

Решение. Случайная величина X — число появлений события А в одном испытании — может принимать только два значения: хх=1 (событие А наступило) с вероятностью р и х8 = 0 (событие А не наступило) с вероятностью q = 1 — р. Искомое математическое ожидание

*M(X)=l-p + 0q = p.*

76

**Итак, *математическое ожидание числа появлений собы­тия в одном испытании равно вероятности этого собы­тия.* Этот результат будет использован ниже.**

**§ 3. Вероятностный смысл математического ожидания**

**Пусть произведено п испытаний, в которых слу­чайная величина X приняла mt раз значение xlt mt раз значение х2, . . ., mk ра:- значение xk, причем тх-\-т3-{-...**

**= Тогда сумма всех значений, принятых X,**

**равна**

**хгтг + х**2**/л**2 **+ ... + х\*тЛ.**

**Найдем среднее арифметическое X всех значений, при­нятых случайной величиной, для чего разделим найден­ную сумму на общее число испытаний:**

***Л* = *(xtm 1 + xtmi +* ... *+xkmk)/n,***

**или**

**Л = xl (mjn) + х**2 **(т3/п) + ... + xft (mk/n). (\*)**

**Заметив, что отношение mjn — относительная частота ТРХ значения хх, mjn — относительная частота W3 значе­ния х**2 **и т. д., запишем соотношение (\*) так:**

**Л = x^W х + х**2**НР,+ ...+ xkW I,. (\*\*•)**

**Допустим, что число испытаний достаточно велико. Тогда относительная частота приближенно равна вероят­ности появления события (это будет доказано в гл. IX, § 6):**

**Й**?1 **~рх, *Wt~p3* *Wh~ph.***

**Заменив в соотношении (\*\*•) относительные частоты соответствующими вероятностями, получим**

**X ~ ххрх + х3рг + ... + хкрк.**

**Правая часть этого приближенного равенства есть М (X). Итак,**

***Х~М {X).***

**Вероятностный смысл полученного результата таков: математическое ожидание приближенно равно (тем точ­**

77

**нее, чем больше число испытаний) *среднему арифмети­ческому наблюдаемых значений случайной величины.***

Замечание 1. Легко сообразить, что математическое ожида­ние больше наименьшего н меньше наибольшего возможных значе­ний. Другими словами, на числовой оси возможные значения распо­ложены слева и справа от математического ожидания. В этом смысле математическое ожидание характеризует расположение рас­пределения и поэтому его часто называют центром распреде­ления.

Этот термин заимствован из механики: если массы plt Рз, ..., р„

расположены в точках с абсциссами xlf хя хп, причем 7,Р, — 1.

то абсцисса центра тяжести

Учитывая, что У х.-р,- = М (X) н У) р; = 1. получим М (Х) — хс.

Итак, математическое ожидание есть абсцисса центра тяжести системы материальных точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы — их вероятностям.

Замечание 2. Происхождение термина «математическое ожи­дание» связано с начальным периодом возникновения теории вероят­ностей (XVI — XVII вв.), когда область ее применения ограничива­лась азартаЬшн играми. Игрока интересовало среднее значение ожи­даемого выигрыша, или, иными словами, математическое ожидание выигрыша.

**Доказательство. Будем рассматривать постоян­ную С как дискретную случайную величину, которая имеет одно возможное значение С и принимает его с вероятностью р=** 1**. Следовательно,**

Замечание 1. Определим произведение постоянной величины С на дискретную случайную величину X как дискретную случайную СХ, возможные значения которой равны произведениям постоянной С на возможные значения X; вероятности возможных значений СХ равны вероятностям соответствующих возможных значений X. Напри­мер, если вероятность возможного значения хг равна р1г то вероят­ность того, что величина СХ примет значение Cxlt также равна рг.

**Свойство 2. *Постоянный множитель можно выно­сить за знак математического ожидания-.***



**§ 4. Свойства математического ожидания**

**Свойство** 1**. *Математическое ожидание по­стоянной величины равно самой постоянной:***

**М (С) = С.**

***М(С) = СЛ=С.***

***М (СХ) = СМ* (Х).**

78

**Доказательство. Пусть случайная величина X задана законом распределения вероятностей:**

***X хх хг ... хп***

Р Pi Pi • • • Рп

**Учитывая замечание 1, напишем закон распределения случайной величины СХ:**

***СХ Cxt Cxt ... Схп***

Р Pi Pi • • • Ptt

**Математическое ожидание случайной величины СХ:**

**М (СХ) = Сх1р1 + Схарг + • • • + Схпрп =**

**= С (х1р1 + х2ра + ... + хпрп) = CM (X).**

**Итак,**

***М(СХ) = СМ(Х).***

Замечание 2. Прежде чем перейти к следующему свойству, укажем, что две случайные величины называют независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие воз­можные значения приняла другая величина. В противном случае случайные величины зависимы. Несколько случайных величин назы­вают взаимно независимыми, если законы распределения любого числа Из них не зависят от того, какие возможные значения приняли остальные величины.

Замечание 3. Определим произведение независимых случай­ных величин X и Y как случайную величину XY, возможные зна­чения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y; вероятности возможных значе­ний произведения XY равны произведениям вероятностей возможных значений сомножителей. Например, если вероятность возможного значения хг равна рг, вероятность возможного значения ух равна gj, то вероятность возможного значения ххУ\ равна P\g\.

Заметим, что некоторые произведения x,-yj могут оказаться рав­ными между собой. В этом случае вероятность возможного значения произведения равна сумме соответствующих вероятностей. Например, если х1у2 = х3у6, то вероятность хху2 (или, что то же, х3у6) равна Plgi + Рзёь-

**Свойство 3. *Математическое ожидание произведе­ния двух независимых случайных величин равно произведе­нию их математических ожиданий:***

**М (ХУ) = М (X) М (У).**

**Доказательство. Пусть независимые случайные величины X и Y заданы своими законами распределения**

79

**вероятностей \*>:**

***X xtx2 У yty2***

***Р PiPi ё g\gi***

**Составим все значения, которые может принимать случайная величина XY. Для этого перемножим все воз­можные значения X на каждое возможное значение Y; в итоге получим xly1, x2yt, хху2 и х2у2. Учитывая заме­чание 3, напишем закон распределения XY, предполагая для простоты, что все возможные значения произведения различны (если это не так, то доказательство проводится аналогично):**

***XY Х\У 1 х^у i хху*** *2* ***х 2У %***

***Р Plgx Pigi Pig***1 ***Ptg,***

**Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений на их вероятности:**

***М (XY)* = *xly1* • *pxgx* Ч\* *х2ух - p2gi* Ч~ *хху2 • pxg2* Ч\* *Х****2****У****2* **■ *Pig%>* или**

***М-* (*XY)* = *ylgl* (*Xlpx* + *х2р2)* + *y2g2 (ххрх* + *х2р2)* =**

***= (XiP1 + x2p2)(y1g1 + y2g2) = M{X)-M* (У).**

**Итак, *M(XY) = M(X)-M(Y).***

**Следствие. *Математическое ожидание произведе­ния нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий.* Например, для трех случайных величин имеем:**

***М* (*XYZ*) = *М* *(XY* •*Z) = M* (ЛГ) *M(Z) = M (X) М* (У) *М (Z).***

**Для произвольного числа случайных величин дока­зательство проводится методом математической индукции.**

Пример 1. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

X 5 2 4 У 7 9

р 0,6 0,1 0,3 р 0,8 0,2

Найти математическое ожидание случайной величины ХУ.

Решение. Найдем математические ожидания каждой из данных величин:

М (X) = 5■ 0,6 + 2 • 0,1 + 4• 0,3 == 4,4;

М (К) = 7 0.8 + 9-0,9 = 7,4.

\*> Для упрощения выкладок мы ограничились малым числом возможных значений. В общем случае доказательство аналогичное.

80

Случайные величины X и Y независимые, поэтому искомое ма­тематическое ожидание

М (XY) — M (X) М (Уг) = 4,4-7,4 = 32,56.

Замечание 4. Определим сумму случайных величин X и Y как случайную величину X-\-Y, возможные значения которой равны суммам каждого возможного значения X с каждым возможным зна­чением К; вероятности возможных значений X-f-Y для независимых величин X и Y равны произведениям вероятностей слагаемых; для зависимых величин — произведениям вероятности одного слагаемого на условную вероятность второго.

Заметим, что некоторые суммы х-\-у могут оказаться равными между собой. В этом случае вероятность возможного значения суммы равна сумме соответствующих вероятностей. Например, если х1 + у2 = = хгЛ-у& и вероятности этих возможных значений соответственно равны р12 и р84, то вероятность х1-\-х2 (или, что то же, х3 + у6) равна Р12 + РЗБ-

**Следующее ниже свойство справедливо как для неза­висимых, так и для зависимых случайных величин.**

**Свойство 4. *Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:***

***М (X* + *Y)* = *М (X)* + *М (Y).***

**Доказательство. Пусть случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения \*>:**

***X хг х2 Y уг у2***

Р Pi Р\* 8 gi 8\*

**Составим все возможные значения величины X + F. Для этого к каждому возможному значению X прибавим каждое возможное значение К; получим х1 + у1, х1 + у2,**

**х2 4~ уг и х2-\-у2. Предположим для простоты, что эти**

**возможные значения различны (если это не так, то дока­зательство проводится аналогично), и обозначим их ве­роятности соответственно через р11г р12, р21 и р22.**

**Математическое ожидание величины X + F равно сумме произведений возможных значений на их вероятности:**

**^ (X У) = (х1 -Н i/j)** рг1 **(хг 4" ya) Pi**2 **4"** (-\*-2 **“Ъ** У\) Рг**i “Ь** “I- С**^2** “I- Ул) Р22\*

\*> Чтобы упростить вывод, мы ограничились лишь двумя возмож­ными значениями каждой из величин. В общем случае доказатель­ство аналогичное.

6 — 2730

81

**или**

М- {X + К) =» хг (р1г + р1г) 4“ Х2 (Рп "Ь Р22) ~Ь Ул. (Ри ~Ь Рг 1) +

+ Уг(Рл2 + Р22)- (\*)

**Докажем, что р**Х1 **+ р1я \*= рх. Событие, состоящее в том, что X примет значение х, (вероятность этого события равна р2), влечет за собой событие, которое состоит в том, что X** 4**- У примет значение хг + уг или хг + у, (вероятность этого события по теореме сложения равна /»„-{-р12), и обратно. Отсюда и следует, что р11 + р1% = р1. Аналогично доказываются равенства**

Р21 Р22 ~ Pi' Pll ~Ь Р21 = 81 И Рл.2 Р22 ~ §2"

**Подставляя правые части этих равенств в соотноше­ние (\*), получим**

**М {X + Y) = {х1р1 + х2р2) + {у&г + y2g2), или окончательно**

**М (X + У) = М (X) + М (У).**

**Следствие. *Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математичес­ких ожиданий слагаемых.***

**Например, для трех слагаемых величин имеем**

***M(X + Y + Z) = M[(X + Y) + Z] =***

**= *М (X* + *Y)* + *М* (Z) = *М (X)* + *М (Y)* + *М (Z).***

**Для произвольного числа слагаемых величин доказа­тельство проводится методом математической индукции.**

Пример 2. Производится 3 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными pi = 0,4; р2 = 0,3 и р3 = 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Решение. Число попаданий при первом выстреле есть слу­чайная величина Xlt которая может принимать только два значения: 1 (попадание) с вероятностью р! = 0,4 и 0 (промах) с вероятностью q — 1—0,4 = 0,6.

Математическое ожидание числа попаданий при первом выстреле равно вероятности попадания (см. § 2, пример 2), т. е. М (Xi) = 0,4. Аналогично найдем математические ожидания числа попаданий прн втором и третьем выстрелах: М(Х2) = 0,3, Л1(Х3)=0,6.

Общее число попаданий есть также случайная величина, состоя­щая из суммы попаданий в каждом из трех выстрелов:

82

Искомое математическое ожидание находим по теореме о мате­матическом. ожидании суммы:

М (X) = М(Хг + Xt + Xs) = М (X,) + М (X,) + М (Х3) =

= 0,4 + 0,3+0,6 =1,3 (попаданий).

Пример 3. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при бросании двух игральных костей.

Решение. Обозначим число очков, которое может выпасть на первой кости, через X и на второй — через Y. Возможные значения этих величин одинаковы и равны 1, 2, 3, 4, 5 и б, причем вероят­ность каждого из этих значений равна 1/6.

Найдем математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой костн:

М(Х)= 1 • (1/6) + 2-(1/6) +3 (1/6) + 4• (1/6) + 5-(1/6) + 6-(1/6) =7/2.

Очевидно, что и М (К) = 7/2.

Искомое математическое ожидание

М (Х + К) = М (Х) + М (К) = 7/2 + 7/2 =7.

**§ 5. Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях**

**Пусть производится п независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна и равна р. Чему равно среднее число появле­ний события А в этих испытаниях? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.**

**Теорема. *Математическое ожидание М* (X) *числа по­явлений события А в п независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании:***

**М (X) = пр.**

**Доказательство. Будем рассматривать в качестве случайной величины X число наступления события А в п независимых испытаниях. Очевидно, общее число X появ­лений события А в этих испытаниях складывается из чисел появлений события в отдельных испытаниях. Поэ­тому если X, — число появлений события в первом испы­тании, Х2— во втором, ..., Хп— в n-м, то общее число появлений события Х= Xt + Х2+. .. + Хп.**

**По третьему свойству математического ожидания,**

**М (X) == М (Xj) + М (Х2>) М (Хп). (\*)**

**Каждое из слагаемых правой части равенства есть математическое ожидание числа появлений события в одном испытании: М(Хг) — в первом, М (Х2) — во вто­**

6\*

83

**ром и т. д. Так как математическое ожидание числа появ­лений события в одном испытании равно вероятности события (см. § 2, пример 2), то М (Х1) = М (Х2)=.М (Хп)=р. Подставляя в правую часть равенства (\*) вместо каждого слагаемого р, получим**

**М (X) = пр. (\*\*)**

Замечание. Так как величина X распределена по биноми­альному закону, то доказанную теорему можно сформулировать и так: математическое ожидание биномиального распределения с па­раметрами пир равно произведению пр.

Пример. Вероятность попадания в цель при стрельбе нз орудия р—= 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

Решение. Попадание при каждом выстреле не зависит от ис­ходов других выстрелов, поэтому рассматриваемые события незави­симы и, следовательно, искомое математическое ожидание

М (Х) = пр = 10-0,6 = 6 (попаданий).

Задачи

1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, зная закон ее распределения:

**А:** 6 **3** 1

р 0,2 0,3 0,5

Отв. 2,6.

1. Производится 4 выстрела с вероятностью попадания в цель рг = 0,6, р2 = 0,4, ря = 0,5 и р4 = 0,7. Найти математическое ожидание общего числа попаданий.

Отв. 2,2 попадания.

1. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения:

Л 1 2 К 0,5 1

р 0,2 0,8 р 0,3 0,7

Найтн математическое ожидание произведения ХУ двумя способами:

а) составив закон распределения ХУ; б) пользуясь свойством 3.

Отв. 1,53.

1. Дискретные случайные величины X и У заданы законами распределения, указанными в задаче 3. Найтн математическое ожи­дание суммы Х + К двумя способами: а) составив закон распределения

Х-\-У; б) пользуясь свойством 4.

Отв. 2,65.

1. Вероятность отказа детали за время испытания на надежность равна 0,2. Найти математическое ожидание числа отказавших деталей, если испытанию будут подвергнуты 10 деталей.

Отв. 2 детали.

1. Найти математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

Отв. 12,25 очка.

84

1. Найти математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

Отв. 6 билетов.

**Глава восьмая**

**ДИСПЕРСИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ**

**ВЕЛИЧИНЫ**

**§** 1**. Целесообразность введения числовой**

**характеристики рассеяния случайной величины**

**Легко указать такие случайные величины, кото­рые имеют одинаковые математические ожидания, но раз­личные возможные значения. Рассмотрим, например, дискретные случайные величины X и Y, заданные сле­дующими законами распределения:**

**X —0,01 0,01 Y —100 100**

**р 0,5 0,5 р 0,5 0,5**

**Найдем математические ожидания этих величин:**

**М(Х) = -0,01 -0,5 + 0,01 -0,5 = 0,**

**М (У) = -100-0,5+ 100.0,5 = 0.**

**Здесь математические ожидания обеих величин одинаковы, а возможные значения различны, причем X имеет воз­можные значения, близкие к математическому ожиданию, а У—далекие от своего математического ожидания. Таким образом, зная лишь математическое ожидание случайной величины, еще нельзя судить ни о том, какие возможные значения она может принимать, ни о том, как они рас­сеяны вокруг математического ожидания. Другими сло­вами, математическое ожидание полностью случайную величину не характеризует.**

**По этой причине наряду с математическим ожиданием вводят и другие числовые характеристики. Так, например, для того чтобы оценить, как рассеяны возможные зна­чения случайной величины вокруг ее математического ожидания, пользуются, в частности, числовой характе­ристикой, которую называют дисперсией.**

**Прежде чем перейти к определению и свойствам дис­персии, введем понятие отклонения случайной величины от ее математического ожидания.**

85

§ 2. Отклонение случайной величины от ее математического ожидания

**Пусть X — случайная величина и М (X)—ее ма­тематическое ожидание. Рассмотрим в качестве новой случайной величины разность X—М (X).**

**Отклонением называют разность между случайной ве­личиной и ее математическим ожиданиям.**

**Пусть закон распределения X известен:**

***X хг xt* ... *хп***

Р Pi Pi • • • Рп

**Напишем закон распределения отклонения. Для того чтобы отклонение приняло значение хг — М (X), доста­точно, чтобы случайная величина приняла значение хх. Вероятность же этого события равна рг\ следовательно, и вероятность того, что отклонение примет значение хг—М (X), также равна рг. Аналогично обстоит дело и для остальных возможных значений отклонения.**

**Таким образом, отклонение имеет следующий закон распределения:**

***Х — М(Х) хг—М(Х) хг—М{Х)...хп—М(Х)***

Р Pi Pi Рп

**Приведем важное свойство отклонения, которое исполь­зуется далее.**

**Теорема. *Математическое ожидание отклонения равно нулю:***

**М [X — М** (Х)] = 0.

**Доказательство. Пользуясь свойствами матема­тического ожидания (математическое ожидание разности равно разности математических ожиданий, математическое ожидание постоянной равно самой постоянной) и приняв во внимание, что М (X) — постоянная величина, имеем**

**М [Х—М (А)] = М (X) — М [М (X)] = М (X) — М (X) = 0.**

Пример. Задан закон распределения дискретной случайной вели­чины X:

***X I 2***

р 0,2 0,8

Убедиться, что математическое ожидание отклонения равно нулю. Решение. Найдем математическое ожидание X:

М {X) = 1 • 0,2-f-2-0,8 = 1,8.

86

Найдем возможные значения отклонения, для чего из возможных значений X вычтем математическое ожидание М (X): 1 — 1,8 = —0,8; 2—1,8 = 0,2.

Напишем закон распределения отклонения:

X — М(Х) -0,8 0,2 р 0,2 0,8

Найдем математическое ожидание отклонения:

**М [X — М (Х)] = (—**0**,**8**)-**0,2 **+** 0**,**2**-**0,8 **=** 0**.**

Итак, математическое ожидание отклонения равно нулю, как и должно быть.

Замечание. Наряду с термином «отклонение» используют термин «центрированная величина». Центрированной случайной вели­чиной X называют разность между случайной величиной и ее мате­матическим ожиданием:

к = Х — М (X).

Название «центрированная величина» связано с тем, что математиче­ское ожидание есть центр распределения (см. гл. VII, § 3, замечание).

**§ 3. Дисперсия дискретной случайной величины**

**На практике часто требуется оценить рассеяние возможных значений случайной величины вокруг ее сред­него значения. Например, в артиллерии важно знать, насколько кучно лягут снаряды вблизи цели, которая должна быть поражена.**

**На первый взгляд может показаться, что для оценки рассеяния проще всего вычислить все возможные значения отклонения случайной величины и затем найти их сред­нее значение. Однако такой путь ничего не даст, так как среднее значение отклонения, т. е. М [X — М (X)], для любой случайной величины равно нулю. Это свойство уже было доказано в предыдущем параграфе и объясняется тем, что одни возможные отклонения положительны, а другие — отрицательны; в результате их взаимного пога­шения среднее значение отклонения равно нулю. Эти со­ображения говорят о целесообразности заменить возмож­ные отклонения их абсолютными значениями или их квадратами. Так и поступают на деле. Правда, в случае, когда возможные отклонения заменяют их абсолютными значениями, приходится оперировать с абсолютными ве­личинами, что приводит иногда к серьезным затруднениям. Поэтому чаще всего идут по другому пути, т. е. вычисляют среднее значение квадрата отклонения, которое и назы­вают дисперсией.**

87

**Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной вели­чины называют математическое ожидание квадрата откло­нения случайной величины от ее математического ожидания:**

D(X) = M[X — М(Х)]2.

**Пусть случайная величина задана законом распреде­ления**

**X хг х% ... хп** Р Pi Рг \* • • Рп **Тогда квадрат отклонения имеет следующий закон рас­пределения:**

[X — М (X)]4 [х, —М (X)]2 [х2 — М (X)]2. .. [х„-М(Х)р Р Pi Рг Рп

**По определению дисперсии,**

**D (X) = М [X—М (X**)]2 **=**

**=[\*i — М (X**)]2 **р1-\- [х2 — М (X**)]2 **рг + ... +[хя — М (Х)]**2**р„.**

**Таким образом, для того чтобы найти дисперсию, до­**

**статочно вычислить сумму произведений возможных зна­чений квадрата отклонения на их вероятности.**

Замечание. Из определения следует, что дисперсия дискрет­ной случайной величины есть неслучайная (постоянная) величина. В дальнейшем читатель узнает, что дисперсия непрерывной случайной величины также есть постоянная величина.

Пример. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X 1 2 5

р 0,3 0,5 0,2

Решение. Найдем математическое ожидание:

М (Х) = 1 ■0,3+2.0,5+5.0,2 = 2,3.

Найдем все возможные значения квадрата отклонения:

[Xl-M (X)]2 = (1 —2,3)2 = 1,69; lx2-M (X)]2 = (2 — 2,3)2 = 0,09;

[х„-М (Х)]2 = (5—2,3)2 = 7,29.

Напишем закон распределения квадрата отклонения:

[X — М(Х)]2 1,69 0,09 7,29

р 0,3 0,5 0,2

По определению,

D (Х)= 1,69-0,3 + 0,09 0,5 + 7,29-0,2 = 2,01.

Вычисление, основанное на определении дисперсии, оказалось относительно громоздким. Далее будет указана формула, которая приводит к цели значительно быстрее.

88

**§ 4. Формула для вычисления дисперсии**

**Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой.**

**Теорема. *Дисперсия равна разности между математи­ческим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:***

***D(X) = M* (X*2)—[М* (X)]2.**

**Доказательство. Математическое ожидание М (X) есть постоянная величина, следовательно, 2М (X) и М\*(Х) есть также постоянные величины. Приняв это во внима­ние и пользуясь свойствами математического ожидания (постоянный множитель можно вынести за знак матема­тического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), упро­стим формулу, выражающую определение дисперсии:**

**D (X) = М [X — М (X**)]2 **= М [Х\*^2ХМ (X) + М2 (Х)]=**

**= м (X\*)—2М (X) М (X) + М2 (X) =**

**= М (X2) —2М2 (X) + М2 (X) = М (X2) — М2 (X).**

**Итэк**

**D (Х) = М (X2)—[М (X)]2.**

**Квадратная скобка введена в запись формулы для удоб­ства ее запоминания.**

Пример 1. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

X 2 3 5

р 0,1 0,6 0,3

Решение. Найдем математическое ожидание М (X):

М (Х) = 2-0,1+3-0,6 + 5-0,3 = 3,5.

Напишем закон распределения случайной величины X2:

X2 4 9 25

р 0,1 0,6 0,3

Найдем математические ожидания М (X2):

М (X2) = 4-0,1+9-0,6 + 25-0,3=13,3.

Искомая дисперсия

0(Х) = Л\* (X2)—[Л4 (Х)]2 = 13,3 —(3,5)2= 1,05.

Замечание. Казалось бы, если X и Y имеют одинаковые воз­можные значения и одно и то же математическое ожидание, то и Дисперсии этих величин равны (ведь возможные значения обеих ве-

89

личин одинаково рассеяны вокруг своих математических ожиданий!)\* Однако в общем случае это не так. Дело в том, что одинаковые воз­можные значения рассматриваемых величин имеют, вообще говоря, различные вероятности, а величина дисперсии определяется не только самими возможными значениями, но и их вероятностями. Например, если вероятности «далеких» от математического ожидания возможных значений X больше, чем вероятности этих же значений У, н вероят­ности «близких» значений X меньше, чем вероятности тех же значе­ний У, то, очевидно, дисперсия X больше дисперсии У.

Приведем иллюстрирующий пример.

Пример 2. Сравнить дисперсии случайных величин, заданных законами распределения:

X —1 12 3 У —112 3

р 0,48 0,01 0,09 0,42 р 0,19 0,51 0,25 0,05

Решение. Легко убедиться, что

М (Х) = М (К) = 0,97; D(X)=\* 3,69, D (К) =\*1,21.

Таким образом, возможные значения н математические ожидания X и У одинаковы, а дисперсии различны, причем D (X) > D (У). Этот результат можно было предвидеть без вычислений, глядя лишь на законы распределений.

**§ 5. Свойства дисперсии**

**Свойство 1. *Дисперсия постоянной величины С равна нулю;***

**D (С) = 0.**

**Доказательство. По определению дисперсии, D(C) = M {[С—М (С)]2}.**

**Пользуясь первым свойством математического ожида­ния (математическое ожидание постоянной равно самой постоянной), получим**

**D (С) = М [(С—С)2] = М (0) = 0.**

**Итак,**

**D (С) = 0.**

**Свойство становится ясным, если учесть, что постоян­ная величина сохраняет одно и то же значение и рассея­ния, конечно, не имеет.**

**Свойство 2. *Постоянный множитель можно выно­сить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:***

***D (СХ) = C2D (X).***

90

**Доказательство. По определению дисперсии имеем**

**D (СХ) = М {[СХ— М (СХ)]2).**

**Пользуясь вторым свойством математического ожида­ния (постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания), получим**

**D (СХ) = М. \\CX-CM (X)]2) = М {С**2 **[X — М (X)]2} =**

**= С2М {[X — М (X)]2) = C2D (X).**

**Итак,**

**D(CX) = C2D (X).**

**Свойство становится ясным, если принять во внима­ние, что при | С | > 1 величина СХ имеет возможные зна­чения (по абсолютной величине), большие, чем величина X. Отсюда следует, что эти значения рассеяны вокруг математического ожидания М (СХ) больше, чем возмож­ные значения X вокруг М(Х), т. е. D (СХ) > D (X). На­против, если 0 < | С | < 1, то D (СХ) < D (X).**

**Свойство 3. *Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:***

***D(X + Y) = D{X) + D(Y).***

**Доказательство. По формуле для вычисления дисперсии имеем**

**D(X-\-Y) = M [(X + F)2] —[М (X + F)]2.**

**Раскрыв скобки и пользуясь свойствами математиче­ского ожидания суммы нескольких величин и произведе­ния двух независимых случайных величин, получим**

**D (X + Y) = М [X**2 **+ 2XF + F2] — [М (X) + М (F)]2=**

**= м** **(X2) +** 2**М (X) •M(Y) + M (F2) — М2 (X) —**

**— 2М (Х)-М (F) — М2 (F) = {М (X2) — [М (X)]2} +**

**+ {М (F2) — [М (F)]2} = D (X) +D (F).**

**Итак,**

**Z?(X + F) = D(X) + D(F).**

**Следствие 1. *Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.***

91

**Например, для трех слагаемых имеем D(X + F + Z) = D[X + (F + Z)] = D(X) + D(y+Z) =**

***= D(X)+D(Y) + D(Z).***

**Для произвольного числа слагаемых доказательство проводится методом математической индукции.**

**Следствие 2. *Дисперсия суммы постоянной вели­чины и случайной равна дисперсии случайной величины:***

**D(C + X) = D(X).**

**Доказательство. Величины С и X независимы, поэтому, по третьему свойству,**

***D(C+X) = D(C) + D(X).***

**В силу первого свойства D (С) = 0. Следовательно,**

**D(C + X) = D(X).**

**Свойство становится понятным, если учесть, что ве­личины X и Х + С отличаются лишь началом отсчетам, значит, рассеяны вокруг своих математических ожиданий одинаково.**

**Свойство 4. *Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий:***

***D(X — Y) = D{X) + D(Y).***

**Доказательство. В силу третьего свойства D (X — Y) = D (X) + D (— Y).**

**По второму свойству,**

**D (X —Y) = D(X) + (— l)2D (Y),**

**или**

***D{X — Y) = D(X) + D(X).***

**§ 6. Дисперсия числа появлений события в независимых испытаниях**

**Пусть производится п независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А постоянна. Чему равна дисперсия числа появлений со­бытия в этих испытаниях? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.**

**Теорема. *Дисперсия числа появлений события А в п не­зависимых испытаниях, в каждом из которых вероятность***

92

***р появления события постоянна, равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления со­бытия в одном испытании:***

**D (X) = npq.**

**Доказательство. Рассмотрим случайную вели­чину X— число появлений события А в п независимых испытаниях. Очевидно, общее число появлений события в этих испытаниях равно сумме появлений события в от­дельных испытаниях:**

**Х = Х**1 **+ Х**2 **+ ... + Х„,**

**где Xj—число наступлений события в первом испытании, Х2 — во втором, ..., Х„— в п-м.**

**Величины Xlf Х2, .. ., Х„ взаимно независимы, так как исход каждого испытания не зависит от исходов осталь­ных, поэтому мы вправе воспользоваться следствием** 1 **(см. § 5):**

**£>(X) = D(X1) + D(X**2**)+...+D(X„). (\*)**

**Вычислим дисперсию Xt по формуле**

**D (X,) =- М (X?) —[М (Xj)]2. (\*\*)**

**Величина Xj — число появлений события А в первом испытании, поэтому (см. гл. VII, § 2, пример 2) М (Х1)=р.**

**Найдем математическое ожидание величины X?, кото­рая может принимать только два значения, а именно:** 1**® с вероятностью р и О**2 **с вероятностью q:**

**М (X?) = I**2 **• р + О**2 **• q = р.**

**Подставляя найденные результаты в соотношение (\*\*), имеем**

***D (XJ = р — р\* = р (I — р) = pq.***

**Очевидно, дисперсия каждой из остальных случайных величин также равна pq. Заменив каждое слагаемое пра­вой части (\*) через pq, окончательно получим**

***D (X)* = *npq.***

Замечание. Так как величинах распределена по биномиаль­ному закону, то доказанную теорему можно сформулировать и так: дисперсия биномиального распределения с параметрами пир равна произведению npq.

Пример. Производятся 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найтн дисперсию случайной величины X — числа появлений события в этих испытаниях.

93

Решение. По условию, п= 10, р = 0,6. Очевидно, вероятность непоявления события

<7 = 1—0,6 = 0,4.

Искомая дисперсия

D (Х) = npq= 10-0,6-0,4 = 2,4.

**§ 7. Среднее квадратическое отклонение**

**Для оценки рассеяния возможных значений слу­чайной величины вокруг ее среднего значения кроме дис­персии служат и некоторые другие характеристики. К их числу относится среднее квадратическое отклонение.**

**Средним квадратическим отклонением случайной ве­личины X называют квадратный корень из дисперсии:**

**а(Х) = КЩХ).**

**Легко показать, что дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности случайной величины. Так как среднее квадратическое отклонение равно квадратному корню из дисперсии, то размерность о(Х) совпадает с размерностью X. Поэтому в тех случаях, когда жела­тельно, чтобы оценка рассеяния имела размерность слу­чайной величины, вычисляют среднее квадратическое от­клонение, а не дисперсию. Например, если X выражается в линейных метрах, то о (X) будет выражаться также в линейных метрах, a D(X) — в квадратных метрах.**

Пример. Случайная величина X задана законом распределения X 2 3 10

р 0,1 0,4 0,5

Найти среднее квадратическое отклонение а (X),

Решение. Найдем математическое ожидание X:

М (Х) = 2-0,1 -(-3-0,410-0,5 = 6,4.

Найдем математическое ожидание Xя:

М (Xя) = 2\*• 0,1 + 3я• 0,4 + 10я• 0,5 = 54.

Найдем дисперсию:

D (X) = М (Xя) — [Л4 (X)]2 =54 — 6,42 = 13,04.

Искомое среднее квадратическое отклонение

о (X) = УЩХ)= V 13,04=» 3,61.

94

**§** 8**. Среднее квадратическое отклонение суммы взаимно независимых случайных величин**

**Пусть известны средние квадратические откло­нения нескольких взаимно независимых случайных вели­чин. Как найти среднее квадратическое отклонение суммы этих величин? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.**

**Теорема. *Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно квадратному корню из суммы квадратов средних квадратических отклонений этих величин:***

**a(Xj + Х**2 **+ ... + Хп) = У a**2 **(Xt) + о**2 **(Х2) + ... +а**2 **(Хп).**

**Доказательство. Обозначим через X сумму рас­сматриваемых взаимно независимых величин:**

**Х= Xj + Xjj-f- ... + Х„.**

**Дисперсия суммы нескольких взаимно независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых (см. § 5, следствие 1), поэтому**

**D{X) = D (X,) + D (Х2) +...+D (Х„).**

**Отсюда**

**УЩХу = VD (ХО + D (Х2) + ... + D (Х„), или окончательно**

**^ (X) = Ka**2 **(XJ + aMXJ+.-.+a**2 **(Х„).**

**§ 9. Одинаково распределенные взаимно независимые случайные величины**

**Уже известно, что по закону распределения можно найти числовые характеристики случайной величины. Отсюда следует, что если несколько случайных величин имеют одинаковые распределения, то их числовые харак­теристики одинаковы.**

**Рассмотрим п взаимно независимых случайных величин**

**Xlt Х**2 **Х„, которые имеют одинаковые распределения,**

**а следовательно, и одинаковые характеристики (матема­тическое ожидание, дисперсию и др.). Наибольший ин­терес представляет изучение числовых характеристик**

95

**среднего арифметического этих величин, чем мы и зай­мемся в настоящем параграфе.**

**Обозначим среднее арифметическое рассматриваемых случайных величин через X:**

**X — (Xj -f- X, + • • • + Хп)/п.**

**Следующие ниже три положения устанавливают связь между числовыми характеристиками среднего арифмети­ческого X и соответствующими характеристиками каждой отдельной величины.**

1. ***Математическое ожидание среднего арифметического одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равно математическому ожиданию а каждой из величин:***

***М* (X) *= а.***

**Доказательство. Пользуясь свойствами матема­тического ожидания (постоянный множитель можно вы­нести за знак математического ожидания; математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых), имеем**

**М (X) = М (\*\* + \*»+••• +х») =**

***M(X1) + M(XS)+ ...+М(Хп)*** ***п***

**Приняв во внимание, что математическое ожидание каждой из величин по условию равно а, получим**

***М(Х) = па/п = а.***

1. ***Дисперсия среднего арифметического п одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин в п раз меньше дисперсии D каждой из величин:***

**D (X) = D/n. (\*)**

**Доказательство. Пользуясь свойствами диспер­сии (постоянный множитель можно вынести за знак дис­персии, возведя его в квадрат; дисперсия суммы незави­симых величин равна сумме дисперсий слагаемых), имеем**

**D (X) = D** -1 **+ \*\*+ •••+\*" ^ \_**

\_ ***Р(Х1) + Р(Хй)+...+Р(Хп)***

96

**Приняв во внимание, что дисперсия каждой из вели­чин по условию равна D, получим**

***D* (X) = *tiD/n***2 **= *D/ti.***

1. ***Среднее квадратическое отклонение среднего ариф­метического п одинаково распределенных взаимно незави­симых случайных величин в\^п раз меньше среднего квадра­тического отклонения о каждой из величин:***

<J (X) = ст/|/7г. (\*\*)

**Доказательство. Так как D(X)=D/n, то сред­нее квадратическое отклонение X равно**

с (X) = *Vd(X)* = VWn = VD'lVn = alV*п.*

**Общий вывод из формул (\*) и (\*\*): вспоминая, что дисперсия и среднее квадратическое отклонение служат мерами рассеяния случайной величины, заключаем, что среднее арифметическое достаточно большого числа вза­имно независимых случайных величин имеет значительно меньшее рассеяние, чем каждая отдельная величина.**

**Поясним на примере значение этого вывода для прак­тики.**

Пример. Обычно для измерения некоторой физической величины производят несколько измерений, а затем находят среднее арифме­тическое полученных чисел, которое принимают за приближенное значение измеряемой величины. Предполагая, что измерения произ­водятся в одних и тех же условиях, доказать:

а) среднее арифметическое дает результат более надежный, чем отдельные измерения;

б) с увеличением числа измерений надежность этого результата возрастает.

Решение, а) Известно, что отдельные измерения дают неоди­наковые значения измеряемой величины. Результат каждого измере­ния зависит от многих случайных причин (изменение температуры, колебания прибора и т. п.), которые не могут быть заранее полностью учтены.

Поэтому мы вправе рассматривать возможные результаты п от­дельных измерений в качестве случайных величин Хг, Х2, ..., Х„ (индекс указывает номер измерения). Эти величины имеют одинако­вое распределение вероятностей (измерения производятся по одной и той же методике и теми же приборами), а следовательно, и одина­ковые числовые характеристики; кроме того, они взаимно независимы (результат каждого отдельного измерения не зависит от остальных Измерений).

Мы уже знаем, что среднее арифметическое таких величин имеет ,Меньшее рассеяние, чем каждая отдельная величина. Иначе говоря, среднее арифметическое оказывается более близким к истинному зна-

1 — 2730 97

ченню измеряемой величины, чем результат отдельного измерения. Эго и означает, что среднее арифметическое нескольких измерений дает более надежный результат, чем отдельное измерение.

б) Нам уже известно, что при возрастании числа отдельных слу­чайных величин рассеяние среднего арифметического убывает. Это значит, что с увеличением числа измерений среднее арифметическое нескольких измерений все менее отличается от истинного значения измеряемой величины. Таким образом, увеличивая число измерений, получают более надежный результат.

Например, если среднее квадратическое отклонение отдельного измерения о = 6 м, а всего произведено л = 36 измерений, то среднее квадратическое отклонение среднего арифметического этих измерений равно лишь 1 м. Действительно,

**а (X) = ст/\гп=** 6**/ у'Зб =** 1**.**

Мы видим, что среднее арифметическое нескольких измерений, как и следовало ожидать, оказалось более близким к истинному зна­чению измеряемой величины, чем результат отдельного измерения.

§ 10. Начальные и центральные теоретические моменты

**Рассмотрим дискретную случайную величину X, заданную законом распределения:**

**X 1 2 5 100**

**р 0,6 0,2 0,19 0,01**

**Найдем математическое ожидание X:**

**Л1(Х) = 1-0**,6 **+ 2-0,2 + 5-0,19 +100-0,01 =2,95. Напишем закон распределения X2:**

**X**2 **1 4 25 10 000**

**р 0,6 0,2 0,19 0,01**

**Найдем математическое ожидание X2:**

**М (Х2) =** 1**-**0,6 **+ 4-0,2 + 25 0,19+ 10000 0,01 = 106,15.**

**Видим, что М (X2) значительно больше М (X). Это объясняется тем, что после возведения в квадрат возмож­ное значение величины X2, соответствующее значению х**=100 **величины X, стало равным** 10000**, т. е. значи­тельно увеличилось; вероятность же этого значения мала (0,01).**

**Таким образом, переход от М (X) к М (X2) позволил лучше учесть влияние на математическое ожидание того возможного значения, которое велико и имеет малую ве­**

96

**роятность. Разумеется, если бы величина X имела не­сколько больших и маловероятных значений, то переход к величине X2, а тем более к величинам Xя, X\* и т. д., позволил бы еще больше «усилить роль» этих больших, но маловероятных возможных значений. Вот почему оказывается целесообразным рассматривать математичес­кое ожидание целой положительной степени случайной величины (не только дискретной, но и непрерывной).**

**Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X\*:**

**v\* = M(X\*).**

**В частности,**

**vx = M(X), v**2 **= М (X2).**

**Пользуясь этими моментами, формулу для вычисления дисперсии D(X) = M{X\*) — [Л1 (Х)За можно записать так:**

**D(X) = v,-vf. (•)**

**Кроме моментов случайной величины X целесообразно рассматривать моменты отклонениях — М (X).**

***Центральным моментом порядка k случайной вели­чины X называют математическое ожидание величины* (X — М (X))\*:**

р\*=М[(Х-М(Х))\*].

**В частности,**

рх = М [X — М(Х)] = 0, (\*\*)

**ря = М[(Х — M(X))\*]=»D(X). (\*\*\*)**

**Легко выводятся соотношения, связывающие началь­ные и центральные моменты. Например, сравнивая (\*) и (\*\*\*), получим**

**р**2 **= г, — vf.**

**Нетрудно, исходя из определения центрального мо­мента и пользуясь свойствами математического ожидания, получить формулы:**

**Р«—V, —3V.VJ +** 2**VJ,**

**р**4 **= v**4 **— 4 v**3**vx +** 6**vav? — 3vx.**

**Моменты более высоких порядков применяются редко.**

Замечание. Моменты, рассмотренные здесь, называют теоре­тическими. В отличие от теоретических моментов, моменты, которые вычисляются по данным наблюдений, называют эмпирическими. Опре­деления эмпирических моментов даны далее (см. гл. XVII, § 2).

7\*

90

Задачи

1. Известны дисперсии двух независимых случайных вели­чин: D(X) = 4, £>(К)=3. Найти дисперсию суммы этих величин.

Отв. 7.

1. Дисперсия случайной величины X равна 5. Найтн дисперсию следующих величин: а) X—1; б) —2Х\ в)ЗХ-)-6.

Отв. а) 5; б) 20; в) 45.

1. Случайная величина X принимает только два значения: + С н —С, каждое с вероятностью 0,5. Найти дисперсию этой величины.

Отв. С2.

1. Найти дисперсию случайной величины, зная закон ее распре­деления

X 0,1 2 10 20

р 0,4 0,2 0,15 0,25

Отв. 67,6404.

1. Случайная величина X может принимать два возможных зна­чения: Хх с вероятностью 0,3 и хг с вероятностью 0,7, причем х2 > х2. Найти и ха, зная, что М (Х)=2,7 и D{X) = 0,21.

Отв. \*1 = 2, х, = 3.

в. Найти дисперсию случайной величины X—числа появлений событий А в двух независимых испытаниях, если Л4(Х) = 0,8.

Указание. Написать биномиальный закон распределения ве­роятностей числа появлений события А в двух независимых испыта­ниях.

Отв. 0,48.

1. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов таковы: = 0,3; ра = 0,4; Рз = 0,5; р4 = 0,6. Найти математическое ожидание и дис­персию числа отказавших приборов.

Отв. 1,8; 0,94.

1. Найти дисперсию случайной величины X — числа появлений события в 100 независимых испытаниях, в каждом из которых вероят­ность наступления события равна 0,7.

*Отв. 2*1.

1. Дисперсия случайной величины D (X) = 6,25. Найти среднее

квадратическое отклонение о (X).

Отв. 2,5.

1. Случайная величина задана законом распределения

X 2 4 8

р 0.1 0,5 0,4

Найти среднее квадратическое отклонение этой величины.

Отв. 2,2.

1. Дисперсия каждой из 9 одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равна 36. Найти дисперсию среднего арифметического этих величин.

Отв. 4.

1. Среднее квадратическое отклонение каждой из 16 одинаково распределенных взаимно независимых случайных величин равно 10. Найти среднее квадратическое отклонение среднего арифметического этих величин.

Отв. 2,5.

100

**Глава девятая**

**ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ**

**§ 1. Предварительные замечания**

**Как уже известно, нельзя заранее уверенно пред­видеть, какое из возможных значений примет случайная величина в итоге испытания; это зависит от многих слу­чайных причин, учесть которые невозможно. Казалось бы, поскольку о каждой случайной величине мы распо­лагаем в этом смысле весьма скромными сведениями, то вряд ли можно установить закономерности поведения и суммы достаточно большого числа случайных величин. На самом деле это не так. Оказывается, что при некото­рых сравнительно широких условиях суммарное поведе­ние достаточно большого числа случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится законо­мерным.**

**Для практики очень важно знание условий, при вы­полнении которых совокупное действие очень многих слу­чайных причин приводит к результату, почти не завися­щему от случая, так как позволяет предвидеть ход явле­ний. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название закона больших чисел. К ним относятся теоремы Чебышева и Бернулли (имеются и другие теоремы, которые здесь не рассматриваются). Теорема Чебышева является наиболее общим законом больших чисел, теорема Бернулли — простейшим. Для доказательства этих теорем мы воспользуемся неравенством Чебышева.**

**§ 2. Неравенство Чебышева**

**Неравенство Чебышева справедливо для дискрет­ных и непрерывных случайных величин. Для простоты ограничимся доказательством этого неравенства для диск­ретных величин.**

**Рассмотрим дискретную случайную величину X, задан­ную таблицей распределения:**

***X* х, *х, .. . х„***

Р Pi Р2 ••• Рп

**Поставим перед собой задачу оценить вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического**

101

**ожидания не превышает по абсолютной величине поло­жительного числа е. Если е достаточно мало, то мы оце­ним, таким образом, вероятность того, что X примет значения, достаточно близкие к своему математическому ожиданию. П. Л. Чебышев доказал неравенство, позволяю­щее дать интересующую нас оценку.**

**Неравенство Чебышева. *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положитель­ного числа* в, *не меньше, чем* 1 — D(X)/e2:**

**Р(\Х—М (X) | < е)> 1 —D (Х)/е2.**

**Доказательство. Так как события, состоящие в осуществлении неравенств \Х—М (Х)\<еи\Х—М (Х)|^е, противоположны, то сумма их вероятностей равна еди­нице, т. е.**

**Р(|Х — М(Х)|<е)+Р(|Х-М(Х)|>е)=1. Отсюда интересующая нас вероятность**

**Р(|Х —Af(X)|<e)=l — *Р(\Х — М(Х)\>в). (\*)***

**Таким образом, задача сводится к вычислению вероят­ности Р (| Х—М(Х) | > е).**

**Напишем выражение дисперсии случайной величины X:**

***D (X) =1хг — М*** (X)]2 ***Pl + [хш-М*** (X)]2 р, **+** ...

• • • + **[хп—М** (X)]2 **Рп.**

**Очевидно, все слагаемые этой суммы неотрицательны.**

**Отбросим те слагаемые, у которых \xt—М (X) |<е (для оставшихся слагаемых \xj—М(Х)\^е), вследствие чего сумма может только уменьшиться. Условимся счи­тать для определенности, что отброшено k первых сла­гаемых (не нарушая общности, можно считать, что в таб­лице распределения возможные значения занумерованы именно в таком порядке). Таким образом,**

D(X)^ \хк+г — М (X)]2р\*+1 + [хл+2 — М (Х)]2рй+2+ ... ...+[х„-М(Х)]2р„.

**Заметим, что обе части неравенства \xf—М (X) |^=е (/ = fe+l, k +** 2**, ..., п) положительны, поэтому, возведя их в квадрат, получим равносильное неравенство | х} — — М (X)** |2 **^ е2. Воспользуемся этим замечанием и, заменяя в оставшейся сумме каждый из множителей | Xj—М (X)** |2 **числом е**2 **(прн этом неравенство может лишь усилиться),**

102

**получим**

D (X) ^ 62 (Pk + i + Pft + 2 + • • • +Рп)- (\*\*)

**По теореме сложения, сумма вероятностей Ра+**1**+Ра+2+. ..**

.. . + р„ **есть вероятность того, что X примет одно, без­различно какое, из значений xfe+1, xk+2, ..., хп, а при любом из них отклонение удовлетворяет неравенству \xj-M (X) \ е. Отсюда следует, что сумма Р\*+**1**+Рй+**2**д-...**

**• • •** +Рп **выражает вероятность**

***Р(\Х-М(Х)\>г).***

**Это соображение позволяет переписать неравенство (\*\*) так:**

**D {X) > е**2 **Р (| X — М (X) | ^ е),**

**или**

**Р{]Х — M(X)|>**8**)<D(X)/e3. (\*\*\*)**

**Подставляя (\*\*\*) в (\*), окончательно получим Р (| Х-М (X) | < е) ^ 1 -D (Х)/г\**

**что и требовалось доказать.**

Замечание. Неравенство Чебышева имеет для практики огра­ниченное значение, поскольку часто дает грубую, а иногда и три­виальную (не представляющую интереса) оценку. Например, если D(X)>e2 н, следовательно, D (Х)/еа > 1, то 1—D (Х)/е2 < 0; таким образом, в этом случае неравенство Чебышева указывает лишь на то, что вероятность отклонения неотрицательна, а это и без того очевидно, так как любая вероятность выражается неотрицательным числом.

Теоретическое же значение неравенства Чебышева весьма велико. Ниже мы воспользуемся этим неравенством для вывода теоремы Чебышева.

§ 3. Теорема Чебышева

**Теорема Чебышева. Если Хг, Х2, Хп, ...—**

***попарно независимые случайные величины, причем диспер­сии их равномерно ограничены (не превышают постоян­ного числа С), то, как бы мало ни было положительное число*** 8**, *вероятность неравенства***

| Хх~1-Х2... -|- Хп М (Xi)-j-М (Х2) -j- ... -j-М (Хп) \_

**I *п п*** <8

***будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.***

юз

**Другими словами, в условиях теоремы**

**Нш Р (**

П-\* 03 V п



***AUXJ+MiXJ+.-.+MlXn)***

*п*

**< е) =** 1**.**

**Таким образом, теорема Чебышева утверждает, что если рассматривается достаточно большое число незави­симых случайных величин, имеющих ограниченные ди­сперсии, то почти достоверным можно считать событие, состоящее в том, что отклонение среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их ма­тематических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым.**

**Доказательство. Введем в рассмотрение новую случайную величину — среднее арифметическое случайных величин**

**Найдем математическое ожидание X. Пользуясь свой­ствами математического ожидания (постоянный множи­тель можно вынести за знак математического ожидания, математическое ожидание суммы равно сумме математи­ческих ожиданий слагаемых), получим**

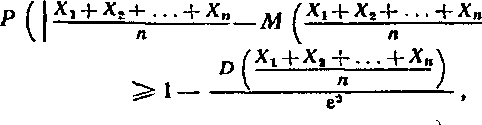
м ( *Х1* ***+ Х\*+---±Х"***) = ***М{Хг) + М(Х^+...+М{Хп)***

**Применяя к величине X неравенство Чебышева, имеем**

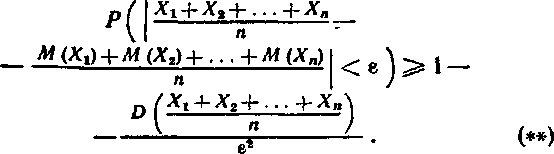
**Пользуясь свойствами дисперсии (постоянный множи­тель можно вынести за знак дисперсии, возведя его**

104

**X — (Xt + Х**2 **+ ... + Хп)/п.**



**или, учитывая соотношение (\*),**



**в квадрат; дисперсия суммы независимых случайных ве­личин равна сумме дисперсий слагаемых), получим** гь^ + Х^+.-.+Хп^ Р(Х1) + Р(Х2)+...+Р(Х„) ^

**По условию дисперсии всех случайных величин огра­ничены постоянным числом С, т. е. имеют место нера­венства: D (Хх)<1С; D(X**2**)^C; .. D(Xn)<IC, поэтому**

**(D(Xx) + D(X2) + ... + D (Х„))/н**2 **^(C + C + .. .'+C)/n'i —**

***= nC/n2 = Cjn.***

**Итак,**

**D ^ ^ £ . (\*\*\*)**

**Подставляя правую часть (\*\*\*) в неравенство (\*\*) (отчего последнее может быть лишь усилено), имеем**

*Хг + Хш+...+Хя*

'(I

***П***

. **< е) >** 1 **\***

*п \ )*

**Отсюда, переходя к пределу при п -\* оо, получим**

**X i + А**2 **ч- • • • -ь хп**

*п*

М (Хх) + M(XJ + ...+М (Хп)

**lim Р**

*м {Хх) + М* (Аг)+... *+М (Хп)*

***П***

**Наконец, учитывая, что вероятность не может пре-  
вышать единицу, окончательно можем написать**

Aj-f- А2 + . .. + Х„

**lim Р**

***П -\** О**0

***П***

М (А,) + М (А2) + ...+М (А„)

< 8

**Теорема доказана.**

**Выше, формулируя теорему Чебышева, мы предпола­гали, что случайные величины имеют различные матема­тические ожидания. На практике часто бывает, что слу­чайные величины имеют одно и то же математическое ожидание. Очевидно, что если вновь допустить, что диспер­сии этих величин ограничены, то к ним будет применима теорема Чебышева.**

**Обозначим математическое ожидание каждой из слу­чайных величин через а; в рассматриваемом случае сред­**

105

**нее арифметическое математических ожиданий, как легко  
видеть, также равно а. Мы можем сформулировать тео-  
рему Чебышева для рассматриваемого частного случая.**

***Если Xlt Х2,* ..., *Хп* ,. .. *—попарно независимые случай-  
ные величины, имеющие одно и то же математическое  
ожидание а, и если дисперсии этих величин равномерно  
ограничены, то, как бы мало ни было число* е >** 0**, *ве-  
роятность неравенства***

-\*1 **+ -У**2**+ •• *+хп\_а <Е***

***п***

***будет как угодно близка к единице, если число случай-  
ных величин достаточно велико.***

**Другими словами, в условиях теоремы будет иметь  
место равенство**

*п*

**lim Р**

**< е**

1**.**

**§ 4. Сущность теоремы Чебышева**

**Сущность доказанной теоремы такова: хотя от­дельные независимые случайные величины могут прини­мать значения, далекие от своих математических ожиданий, среднее арифметическое достаточно большого числа случай­ных величин с большой вероятностью принимает значе­ния, близкие к определенному постоянному числу, а именно к числу (М (Хх) + М (Х2) +... + М (Хп))/п (или к числу а в частном случае). Иными словами, отдельные случайные величины могут иметь значительный разброс, а их среднее арифметическое рассеянно мало.**

**Таким образом, нельзя уверенно предсказать, какое возможное значение примет каждая из случайных вели­чин, но можно предвидеть, какое значение примет их среднее арифметическое.**

**Итак, среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин (дисперсии которых равномерно ограничены) утрачивает характер случайной величины. Объясняется это тем, что отклонения каждой из величин от своих математических ожиданий могут быть как положительными, так и отрицательными, а в среднем арифметическом они взаимно погашаются.**

**Теорема Чебышева справедлива не только для дискрет­ных, но и для непрерывных случайных величин; она**

106

**является ярким примером, подтверждающим справедли­вость учения диалектического материализма о связи между случайностью и необходимостью.**

**§ 5. Значение теоремы Чебышева для практики**

**Приведем примеры применения теоремы Чебышева к решению практических задач.**

**Обычно для измерения некоторой физической величины производят несколько измерений и их среднее арифме­тическое принимают в качестве искомого размера. При каких условиях этот способ измерения можно считать правильным? Ответ на этот вопрос дает теорема Чебы­шева (ее частный случай).**

**Действительно, рассмотрим результаты каждого из­мерения как случайные величины Xlt Хг, ..., Хп. К этим величинам можно применить теорему Чебышева, если:** 1**) они попарно независимы,** 2**) имеют одно и то же ма­тематическое ожидание, 3) дисперсии их равномерно огра­ничены.**

**Первое требование выполняется, если результат каж­дого измерения не зависит от результатов остальных. Второе требование выполняется, если измерения произ­ведены без систематических (одного знака) ошибок. В этом случае математические ожидания всех случайных величин одинаковы и равны истинному размеру а. Третье требо­вание выполняется, если прибор обеспечивает определен­ную точность измерений. Хотя при этом результаты отдельных измерений различны, но рассеяние их огра­ничено.**

**Если все указанные требования выполнены, мы вправе применить к результатам измерений теорему Чебышева: при достаточно большом п вероятность неравенства**

**| (Хх + Х2 + ... + Xn)/ti — а | < е**

**как угодно близка к единице. Другими словами, при достаточно большом числе измерений почти достоверно, что их среднее арифметическое как угодно мало отли­чается от истинного значения измеряемой величины.**

**Итак, теорема Чебышева указывает условия, при ко­торых описанный способ измерения может быть приме­нен. Однако ошибочно думать, что, увеличивая число измерений, можно достичь сколь угодно большой точ­ности. Дело в том, что сам прибор дает показания лишь**

107

**с точностью ± а; поэтому каждый из результатов изме­рений, а следовательно, и их среднее арифметическое будут получены лишь с точностью, не превышающей точности прибора.**

**На теореме Чебышева основан широко применяемый в статистике выборочный метод, суть которого состоит в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке судят о всей совокупности (генеральной совокупности) исследуемых объектов. Например, о качестве кипы хлопка заключают по небольшому пучку, состоящему из волокон, наудачу отобранных из разных мест кипы. Хотя число волокон в пучке значительно меньше, чем в кипе, сам пучок содержит достаточно большое количество волокон, исчисляемое сотнями.**

**В качестве другого примера можно указать на опре­деление качества зерна по небольшой его пробе. И в этом случае число наудачу отобранных зерен мало сравни­тельно со всей массой зерна, но само по себе оно доста­точно велико.**

**Уже из приведенных примеров можно заключить, что для практики теорема Чебышева имеет неоценимое зна­чение.**

**§ в. Теорема Бернулли**

**Пусть производится п независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна р. Можно ли предвидеть, какова примерно будет относительная частота появлений события? Положитель­ный ответ на этот вопрос дает теорема, доказанная Яко­бом Бернулли (опубликована в 1713 г.), которая полу­чила название «закона больших чисел» и положила начало теории вероятностей как науке. Доказательство Бернулли было сложным; простое доказательство дано П. Л. Чебы­шевым в 1846 г.**

**Теорема Бернулли. *Если в каждом из п независимых испытаний вероятность р появления события А постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того*, *что отклонение относительной частоты от вероятности р по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико.***

**Другими словами, если е — сколь угодно малое поло­жительное число, то при соблюдении условий теоремы**

108

**имеет место равенство**

**lim Р(\т/п—р|<е) =** 1**.**

п -\* ос

**Доказательство. Обозначим через Х± дискретную случайную величину — число появлений события в первом испытании, через Х2— во втором, Х„—в п-м испы­тании. Ясно, что каждая из величин может принять лишь два значения:** 1 **(событие А наступило) с вероят­ностью р и** 0 **(событие не появилось) с вероятностью** 1 **—p = q.**

**Можно ли применить к рассматриваемым величинам теорему Чебышева? Можно, если случайные величины по­парно независимы и дисперсии их ограничены. Оба усло­вия выполняются Действительно, попарная независимость величин Х1г Хг, ..., Х„ следует из того, что испытания независимы. Дисперсия любой величины X/ (t = 1, 2, . .., п) равна произведению pq \*>; так как p-\-q —** 1**, то произве­дение pq не превышает\*\*) 1/4 и, следовательно, дисперсии всех величин ограничены, например, числом С =1/4.**

**Применяя теорему Чебышева (частный случай) к рас­сматриваемым величинам, имеем**

**lim Р (| (Х**4 **+ Х2+ . .. +Х„) (п—а|<е)=1.**

*П -\*■ яо*

**Приняв во внимание, что математическое ожидание а каждой из величин X; (т. е. математическое ожидание числа появлений события в одном испытании) равно ве­роятности р наступления события (см. гл. VII, § 2, пример** 2**), получим**

**lim />(((Х**1 **l-X.+ ...+Xj/л — р|<е)=1.**

п — 00

**Остается показать, что дробь (Х**1 **+ Х2+ . . . + X„)jn равна относительной частоте т/п появлений события А в испытаниях. Действительно, каждая из величин Xlt Х4, . . , Х„ при появлении события в соответствующем испытании принимает значение, равное единице; следо-**

\*> Это следует из § 6 гл. VIII, если принять п— I.

\*\*> Известно, что произведение двух сомножителей, сумма ко­торых есть величина постоянная, имеет наибольшее значение при .ра­венстве сомножителей. Здесь сумма р,-4-q,- = 1, т. е. постоянна, поэто­му при p,=q( = l/2 произведение ptqi имеет наибольшее значение и равно 1/4.

109

**вательно, сумма Хх + Х\*+ ... + Х„ равна числу m по­явлений события в п испытаниях, а значит,**

**(Хх + Ха + ... -f- Х„)/п = т/п.**

**Учитывая ьто равенство, окончательно получим lim** Р **(| т/п — р | < е) = 1.**

Замечание. Было бы неправильным на основании теоремы Бернулли сделать вывод, что с ростом числа испытаний относитель­ная частота неуклонно стремится к вероятности р; другими словами, из теоремы Бернулли не вытекает равенство lim (т/п)— р. В тео-

***П-\** \***

реме речь идет лишь о вероятности того, что при достаточно большом числе испытаний относительная частота будет как угодно мало отличаться от постоянной вероятности появления события в каж­дом ислытаннн.

Таким образом, сходимость относительной частоты т/п к веро­ятности р отличается от сходимости в смысле обычного анализа. Для того чтобы подчеркнуть это различие, вводят понятие «сходимости по вероятности»\*\*. Точнее, различие между указанными видами сходимости состоит в следующем: если т/п стремится при п —\*■ со к р как пределу в смысле обычного анализа, то начиная с некото­рого n = N и для всех последующих значений п неуклонно выпол­няется неравенство | т/п—р| < е; если же т/п стремится по веро­ятности к р при п—► оо, то для отдельных значений п неравенство может не выполняться.

Итак, теорема Бернулли утверждает, что при п —► оо относи­тельная частота стремится по вероятности к р. Коротко теорему Бернулли записывают так:

т вер

к р.

**ft П -►** 0**D**

Как видим, теорема Бернулли объясняет, почему относительная частота при достаточно большом числе испытаний обладает свойством устойчивости и оправдывает статистическое определение вероятности {см. гл. I, § 6—7).

Задачи

1. Сформулировать и записать теорему Чебышева, исполь­зуя понятие «сходимости по вероятности».

1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что | А: — Л1 (J4T) | < 0,1, если D(X) = 0,001.

*Отв. Р^* 0,9.

1. Дано: Р(\Х — М (X) | < е) ^ 0,9; £>(Х)=0,004. Используя неравенство Чебышева, найти е.

Отв. 0,2.

\*\* Последовательность случайных величин Хх, Х2, ... сходится по вероятности к случайной величине X, если для любого е > 0 вероятность неравенства | Х„ — Х|<е при п—\*-со стремится к единице.

110

**Г лава десятая**

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

**§ 1. Определение функции распределения**

**Вспомним, что дискретная случайная величина может быть задана' перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Такой способ задания не является общим: он неприменим, например, для непрерывных**

**случайных величин.**

**Действительно, рассмотрим случайную величину X, возможные значения которой сплошь заполняют интервал (а, Ь). Можно ли составить перечень всех возможных значений X? Очевидно, что этого сделать нельзя. Этот пример указывает на целесообразность дать общий спо­соб задания любых типов случайных величин. С этой целью и вводят функции распределения вероятностей случайной величины.**

**Пусть х—действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее х, т. е. вероятность события X < х, обозначим через F (х). Разу­меется, если х изменяется, то, вообще говоря, изменяется и /•’(х), т. е. F (х)—функция от х.**

**Функцией распределения называют функцию**/7 **(х), опре­деляющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее х, т. е.**

***F (х) = Р (X* < х).**

**Геометрически это равенство можно истолковать так: F (х) есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки х.**

**Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».**

**Теперь можно дать более точное определение непре­рывной случайной величины: случайную величину назы­вают непрерывной, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с не­прерывной производной.**

111

**§** 2**. Свойства функции распределения**

**Свойство 1. *Значения функции распределения принадлежат отрезку* [**0**,** 1**]:**

0**<F(x)<l.**

**Доказательство. Свойство вытекает из опреде­ления функции распределения как вероятности: вероят­ность всегда есть неотрицательное число, не превышающее единицы.**

**Свойство 2. *F (х*)— *неубывающая функция, т. е.***

**F (\*2) ^ F (хх), если х2 > хг.**

**Доказательство. Пусть х2 > хг. Событие, состоя­щее в том, что X примет значение, меньшее х2, можно подразделить на следующие два несовместных события:**

1. **X примет значение, меньшее хх, с вероятностью Р (X < хх); 2) X примет значение, удовлетворяющее не­равенству хгг^.Х<Сх2, с вероятностью Р{хг X < х2). По теореме сложения имеем**

***Р (X* < *xt) = Р (X* < *хх)* + *Р {xt* < *X* < \*.).**

**Отсюда**

***Р {X < х%) — Р* (X < *хг)* = *Р (хг* < *X* < *х%),***

**или**

**F{x2)—F(x1) = P(x**1**<X<x1). (\*)**

**Так как любая вероятность есть число неотрицатель­ное, то /?(х1)— F (х^^ 0, или F (х2)^ F (хг), что и тре­**

**бовалось доказать.**

**Следствие 1. *Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале* (а, *Ь), равна приращению функции распределения на этом ин­тервале:***

***Р{а^Х <b) = F{b)—F(a).* (\*\*)**

**Эго важное следствие вытекает из формулы (\*), если положить х2 — Ь и хг — а.**

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения

(

О при х<,—1;  
х/4-f-1/4 при —1<х<3;

1 при х > 3.

112

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет зна­чение, принадлежащее интервалу (0, 2):

Р(0 < X < 2) = Р (2) — F (0).

Решение. Так как на интервале (0, 2), по условию,

F (\*)=\*/4+1/4,

то

Р (2) - Р (0) = (2/4 +1/4) - (0/4 + 1/4) = 1/2.

Итак,

**Р**(0 **< X <** 2**)=** 1**/**2**.**

**Следствие 2. *Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.***

**Действительно, положив в формуле (\*\*) a — xlt Ь — х^ + Ах, имеем**

**Р (xt ^ X < хг + Ах) = F (jct + Аде) — F (xt).**

**Устремим Ах к нулю. Так как X — непрерывная случай­ная величина, то функция F (дс) непрерывна. В силу непрерывности F (х) в точке хх разность F^ + Ax)—F(xt) также стремится к нулю; следовательно, F(X=x1) =** 0**. Используя это положение, легко убедиться в справедли­вости равенств**

***Р{а^Х <Ь) = Р{а<Х <Ь) =***

**= Р(а< Х<**6**) = Р(а<Л:<Ь). (\*\*\*)**

**Например, равенство Р (а < X ^ b) = Р (а < X <Ь) доказывается так:**

**Р (а < X < b) =Р (а < X < b) + Р (X = b) = Р (а < X < Ь).**

**Таким образом, не представляет интереса говорить о вероятности того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение, но имеет смысл рас­сматривать вероятность попадания ее в интервал, пусть даже сколь угодно малый. Этот фак полностью соответ­ствует требованиям практических задач. Например, инте­ресуются вероятностью того, что размеры деталей не Выходят за дозволенные границы, но не ставят вопроса о вероятности их совпадения с проектным размером.**

**Заметим, что было бы неправильным думать, что ра­венство нулю вероятности Р {X — хх) означает, что событие X — xt невозможно (если, конечно, не ограничиваться классическим определением вероятности). Действительно, в результате испытания случайная величина обязательно**

8 — 2730

ИЗ

**примет одно из возможных значений; в частности, это значение может оказаться равным хх.**

**Свойство 3. *Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (а, Ь), то:* 1) *F (х)* — О *при* х s£C а;** 2**) *F(x) =*** 1 ***при х^Ь.***

**Доказательство. 1) Пусть Тогда событие**

**X < хх невозможно (так как значений, меньших х1г вели­чина X по условию не принимает) и, следовательно, вероятность его равна нулю.**

1. **Пусть х2Т^Ь. Тогда событие X < х**2 **достоверно (так как все возможные значения X меньше х2) и, сле­довательно, вероятность его равна единице.**

**Следствие. *Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси х, то спра­ведливы следующие предельные соотношения:***

**lim F (х) = 0; lim F (х) — 1.**

**ДС—► — оо сс**

§ 3. График функции распределения

**Доказанные свойства позволяют представить, как выглядит график функции распределения непрерывной случайной величины.**

**График расположен в полосе, ограниченной прямыми у — О, у=** 1 **(первое свойство).**

**При возрастании х в интервале (а, Ь), в котором за­ключены все возможные значения случайной величины, график «подымается вверх» (второе свойство).**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Г(х) |  | |
|  | —■ 1  1  1 | 1 |
| а о | t  Рис. 2 |  |

При хз^а ординаты графика равны нулю; при **х^Ь** ординаты графика равны единице (третье свойство).

График функции распределения непрерывной случай­ной величины изображен на рис. 2.

Замечание. График функции распределения дискретной слу­чайной величины имеет ступенчатый вид. Убедимся в этом иа примере.

1L4

Пример. Дискретная случайная величина X задана таблицей

распределения

X 1 4 8

р 0,3 0,1 0,6

Найти функцию распределения и вычертить ее график.

Решение. Если то F (дс) = 0 (третье свойство).

Если 1 < х<4, то F(x) =

Г(х)

1

= 0,3. Действительно, X может  
принять значение 1 с вероятно-  
стью 0,3.

Если 4 < х < 8, то F (х) =

= 0,4. Действительно, если хх  
удовлетворяет неравенству 4 <

< хг < 8, то F (хх) равно веро-  
ятности события X < х1г кото-  
рое может быть осуществлено,  
когда X примет значение 1 (ве-  
роятность этого события равна  
0,3) или значение 4 (вероятность

этого события равна 0,1). Поскольку эти два события несовместны,  
то по теореме сложения вероятность события X < хх равна сумме  
вероятностей 0,3+0,1 = 0,4.

Если х > 8, то F (х) = 1. Действительно, событие X < 8 досто­верно, следовательно, его вероятность равна единице.

Итак, функция распределения аналитически может быть запи­сана так:

Рис. 3

*F(x) =*

0

0,3

0,4

1

при

при

при

при

**\*<** 1**,** 1 **< дс<4,** 4 < jc<**8**, х > 8.

График этой функции приведен на рис. 3.

Задачи

1. Случайная величина X задана функцией распределения

(

0 при дс<—1,

\*/3+1/3 при —1<\*<2,

1 при х > 2.

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет зна­чение, заключенное в интервале (0, 1).

Отв. 1/3.

1. Случайная величина X задана функцией распределения

(

0 при х <2,

(х/2) — 1 при 2 < \*< 4,

1 при х > 4.

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет зна-  
чение, заключенное в интервале (2, 3).

Отв. 1/2.

115

3. Дискретная случайная величина X задана законом распре­

деления

X 2 6 10

р 0,5 0,4 0,1

Построить график функции распределения этой величины.

**Глава одиннадцатая**

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

**§ 1. Определение плотности распределения**

**Выше непрерывная случайная величина задава­лась с помощью функции распределения. Этот способ задания не является единственным. Непрерывную слу­чайную величину можно также задать, используя другую функцию, которую называют плотностью распределения или плотностью вероятности (иногда ее называют диф­ференциальной функцией).**

**Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию f (х)— первую производную от функции распределения F (х) :**

**f (х) = Г (х).**

**Из этого определения следует, что функция распре­деления является первообразной для плотности распре­деления.**

**Заметим, что для описания распределения вероятно­стей дискретной случайной величины плотность распре­деления неприменима.**

**§ 2. Вероятность попадания непрерывной**

**случайной величины в заданный интервал**

**Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее заданному интервалу. Вычисление основано на следующей теореме.**

**Теорема. *Вероятность того, что непрерывная случай­ная величина X примет значение, принадлежащее интер­валу* (а, *Ь), равна определенному интегралу от плотности***

116

***распределения, взятому в пределах от а до Ъ:***

***ь***

***Р(а < X <b)=^f (х) dx.***

*а*

**Доказательство. Используем соотношение (\*\*), (см. гл. X, §** 2**)**

***Р(а^Х <b) = F(b) —F (а).***

**По формуле Ньютона — Лейбница,**

***ь ь***

***F {Ь)* — *F* (а) = ^ *F' (x)dx =* J *f(x)dx.***

*а а*

**Таким образом,**

***ь***

**Р (а ^Х < b) = ^ / (х) dx.**

*а*

**Так как Р (а ^ X < b) = Р (а < X < Ь), то оконча­тельно получим**

***Р(а< X <b) = lf(x) dx.* (\*)**

*а*

**Геометрически полученный результат можно истолко­вать так: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (а, Ь), равна площади криволинейной трапеции, ограни­ченной осью Ох, кривой распределения / (х) и прямыми х = а и х = Ь.**

Замечание. В частности, если /(дс) — четная функция и концы интервала симметричны относительно начала координат, то

*а*

*Р* (—о < *X < а) = Р (\ X \ <* о) =2 ^ / *(х) dx.*

**о**

Пример. Задана плотность вероятности случайной величины X

**(**

**О при \*<0,**

2х при 0 < 1,

О при х > 1.

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет зна­чение, принадлежащее интервалу (О,Б; 1).

Решение. Искомая вероятность

1

Р (0,5 < а: < I) =2 ^ xdx = x2 |J,S= 1—0,25 = 0,75.

0,5

117

**§ 3. Нахождение функции распределения по известной плотности распределения**

**Зная плотность распределения** f **(**х**), можно найти функцию распределения F (х) по формуле**

***F{x)= ] f(x)dx.***

**Действительно, мы обозначили через F (х) вероятность того, что случайная величина примет значение, мень­шее х, т. е.**

***F(x) = P(X<x).***

**Очевидно, неравенство X < х можно записать в виде двойного неравенства —** оо **< X < х, следовательно,**

**F (х) = Р (— оо < X < х). (\*)**

**Полагая в формуле (\*) (см. § 2) а=—оо, Ь — х, имеем**

X

***Р(—оо<Х<х)=* J *f (х) dx.***

— во

**Наконец, заменив Р (—** оо **< X < х) на F (х), в силу (\*), окончательно получим**

X

***F(x)=* J *f(x)dx.***

— оо

**Таким образом, зная плотность распределения, можно найти функцию распределения. Разумеется, по известной функции распределения может быть найдена плотность распределения, а именно:**

**/(х) = Г (х).**

Пример. Найти функцию распределения по данной плотности распределения:

!

0 при х < а,

1 / (Ь—о) при а < \*<&,

О при х > Ь.

Построить график найденной функции.

00

Решение. Воспользуемся формулой F (х)— ^ f (\*) dx.

— 00

118

Если ж а, то/(х) = 0, следовательно, F(jc)=0. Если а<х<Ь, то f{x) = lj(b — а), следовательно,

**ос ах**

*F{x)= § f (х) dx — § 0dx + §~i~'di: =*

— со — со а

Если х > Ь, то

**f<«)\_ l<ld, + l-£z-+ 5 ОЛ»——**1**.**

а Ь

Итак, искомая функция распределения

(

О при х <а,

(х — а)/ф — а) при o<Jt<b,

1 при х > Ь.

График этой функции изображен на рис. 4.

**§ 4. Свойства плотности распределения**

**Свойство 1. *Плотность распределения*—*не-  
отрицательная функция:***

**f (х) >** 0**.**

**Доказательство. Функция распределения — не-  
убывающая функция, следовательно, ее производная**

**F' (х) = f (х)— функция не-  
отрицательная.**

**Геометрически это  
свойство означает, что точ-  
ки, принадлежащие гра-**

**фику плотности распреде**

***й Ь***

**ления, расположены либо** 0

**над осью Ох, либо на этой** Рис. 4

**оси.**

**График плотности распределения называют кривой  
распределения.**

**Свойство 2. *Несобственный интеграл от плотности  
распределения в пределах от* —оо *до оо равен единице:***

00

**$ / (х) dx —** 1**.**

— as

**Доказательство. Несобственный интеграл**

**сг>**

5 **f (х) dx выражает вероятность события, состоящего в**

оо

119

**том, что случайная величина примет значение, принад­лежащее интервалу (— оо, оо). Очевидно, такое событие достоверно, следовательно, вероятность его равна единице.**

**Геометрически это означает, что вся площадь криво­линейной трапеции, ограниченной осью Ох и кривой распределения, равна единице.**

**В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (а, Ь), то**

Пример. Плотность распределения случайной величины X задана:

Найти постоянный параметр а.

Решение. Плотность распределения должна удовлетворять ус­

ловию \ f(x)dx — l, поэтому потребуем, чтобы выполнялось ра-

***h***

**J / (х) dx = 1.**

***а***

I (х) = — .

' ' ' е-\*-}-еж

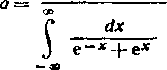
ОО

— CD

венство



Отсюда



Найдем неопределенный интеграл:



Вычислим несобственный интеграл:

**О»**

I

**О**

с

*dx*



lim (—arctge6)-f- Dm (arctg e\*) = я/2.



Таким образом, искомый параметр

2

**§ 5. Вероятностный смысл плотности распределения**

**Пусть F (х)—функция распределения непрерыв­ной случайной величины X. По определению плотности распределения, f (х) — F' (х), или в иной форме**

**' v Л\* О**

**Как уже известно, разность /^(х + Дх)— F (х) опре­деляет вероятность того, что X примет значение, при­надлежащее интервалу (х, х + Дх). Таким образом, пре­дел отношения вероятности того, что непрерывная слу­чайная величина примет значение, принадлежащее интер­валу (х, х+Дх), к длине этого интервала (при Дх—►О) равен значению плотности распределения в точке х.**

**По аналогии с определением плотности массы в точке \*\* целесообразно рассматривать значение функции f (х) в точке х как плотность вероятности в этой точке.**

**Итак, функция f (х) определяет плотность распределе­ния вероятности для каждой точки х.**

**Из дифференциального исчисления известно, что при­ращение функции приближенно равно дифференциалу функции, т. е.**

**F(x-f Лх) — F (х) ~ dF (х),**

**или**

***F (х* + *Ах)*—*F(x) ах F' (х) dx.***

**Так как *F'(x) — f(x)* и *dx — Ах,* то**

**F (х + Дх)—F (х) ~ / (х) Дх.**

**Вероятностный смысл этого равенства таков: вероят­ность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (х, х + Дх), приближенно равна (с точностью до бесконечно малых высшего порядка от­носительно Дх) произведению плотности вероятности в точке х на длину интервала Дх.**

\*> Если масса непрерывно распределена вдоль оси х по некото­рому закону, например F (х), то плотностью р (х) массы в точке х называют предел отношения массы интервала (х, х + Дх) к длине

интервала при Дх -»0, г. е. р (х) = lim ^ ^ ^ .

дх-»о Дх

121

**Геометрически этот результат можно истолковать так:  
вероятность того, что случайная величина примет значе-  
ние, принадлежащее интервалу (х, х + Ах), приближенно**

**равна площади прямоуголь-  
ника с основанием Ах и вы-  
сотой f (х).**

**На рис. 5 видно, что пло-  
щадь заштрихованного пря-  
моугольника, равная произве-  
дению f (jc) Ах, лишь прибли-  
женно равна площади криво-  
линейной трапеции (истинной  
вероятности, определяемой  
определенным интегралом**

**при этом погрешность равна**

***X***

**площади криволинейного треугольника ABC.**

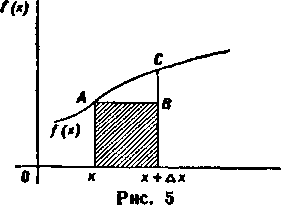
**§ в. Закон равномерного распределения вероятностей**

**При решении задач, которые выдвигает практи­ка, приходится сталкиваться с различными распределе­ниями непрерывных случайных величин. Плотности рас­пределений непрерывных случайных величин называют также законами распределений. Часто встречаются, на­пример, законы равномерного, нормального и показатель­ного распределений. В настоящем параграфе рассматри­вается закон равномерного распределения вероятностей. Нормальному и показательному законам посвящены сле­дующие две главы.**

**Распределение вероятностей называют равномерным, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.**

**Приведем пример равномерно распределенной непре­рывной случайной величины.**

Пример. Шк&ла измерительного прибора проградуирована в не­которых единицах. Ошибку при округлении отсчета до ближайшего целого деления можно рассматривать как случайную величину X, которая может принимать с постоянной плотностью вероятности лю­бое значение между двумя соседними целыми делениями. Таким об­разом, X имеет равномерное распределение.



Х + ДХ

**$ / (х) dx). Допущенная**

122

Найдем плотность равномерного распределения f (л:), считая, что все возможные значения случайной величины заключены в интерва­ле (а, Ь), на котором функция f (л:) сохраняет постоянные значения: По условию, X не принимает значений вне интервала (а, Ь), поэтому / (лс) = 0 при х < а и х > Ь.

Найдем постоянную С. Так как все возможные значения слу­чайной величины принадлежат интервалу (а, Ь), то должно выпол­няться соотношение

**$/<«>**

*dx=l,*

или

\cdK,

1**.**

Отсюда

ния

С== I/ ^ dx= 1/(6 — а).

*а*

Итак, искомая плотность вероятности равномерного распределе-

( **°**

Ж= j *\/(Ь-а)*

при

при

при

*х<^а, а < x\*£bt х > b.*

**I**

***Ь-а***

Рис. 6

График плотности равномер- .  
ного распределения изображен на

рис. 6, а график функции распре-  
деления— на рис. 4.

Замечание. Обозначим че-  
рез R непрерывную случайную ве-  
личину, распределенную равномер-  
но в интервале (0, 1), а через  
т— ее возможные значения. Ве-  
роятность попадания величины R

(в результате испытания) в интервал (с, d), принадлежащий интер­валу (0, 1), равна его длине:

*Р (с* < *R* < *d) — d*—*с.*

Действительно, плотность рассматриваемого равномерного рас­пределения

**/Чг) —** 1/(1 **—** 0**)=** 1**.**

Следовательно, вероятность попадания случайной величины R в ин­тервал (с, d) (см. гл. XI, § 2)

*Р (с* < *R* < *d)* = *^ f (г) dr —* ^ I *dr = d—c. с с*

Далее случайная величина R используется неоднократно (см. гл. XXI).

123

Задачи

1. Случайная величина задана плотностью распределения

(

О прн х < —я/2, a cos х при — я/2 < х <; я/2,

О при х > я/2.

Найти коэффициент а.

Отв. а =1/2.

1. Случайная величина задана плотностью распределения

(

О при Ж О,

(sin х)/2 при 0<х<я,

О при х > я.

Найти: а) функцию распределения; б) вероятность того, что в резуль­тате испытания случайная величина примет значение, заключенное в интервале (0, п/4).

{

О при х < О,

(1 — cosx)/2 при 0 < х«ся,

1 при х > я.

S. Случайная величина X задана функцией распределения

(

О при хСО,

х при 0 < дс< 1,

1 при X > 1.

Найти плотность распределения.

Отв. /(\*) = 1 в интервале (0, 1); вне этого интервала / (де) = 0.

1. Случайная величина X задана функцией распределения

(

О при jc = 0,

(1 — cos х)/2 при 0 < х < я,

1 при х > я.

Отв. / (ж) = (sin х)/2 в интервале (0, я); вне этого интервала

/<\*)=о.

Глава двенадцатая НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

**§ 1. Числовые характеристики непрерывных случайных величин**

**Распространим определения числовых характе­ристик дискретных величин на величины непрерывные. Начнем с математического ожидания.**

**Пусть непрерывная случайная величина X задана плот­ностью распределения / (х). Допустим, что все возможные**

124

**значения X принадлежат отрезку [а, Ь]. Разобьем этот отрезок на п частичных отрезков длиной Дхх, Дх2, ..., Дх„ и выберем в каждом из них произвольную точку х,- ( =1,2, ..., п). Нам надо определить математическое ожидание непрерывной величины по аналогии с дискрет­ной; составим сумму произведений возможных значений X/ на вероятности попадания их в интервал Дх,- (напом­ним, что произведение f (х) Дх приближенно равно вероят­ности попадания X в интервал Дх):**

2 ***xif* (\*/)*Axi-***

**Перейдя к пределу при стремлении к нулю длины наи­большего из частичных отрезков, получим определенный**

***ь***

**интеграл $ xf (х) dx.**

*а*

**Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [а,** 6**], называют определенный интеграл**

***ь***

**М (X) = J xf (х) dx. (\*)**

*а*

**Если возможные значения принадлежат всей оси Ох, то**

**СП**

**M(X)= ^ *xf (x)dx.***

— эо

**Предполагается, что несобственный интеграл сходится абсо-**

**<х>**

**лютно, т. е. существует интеграл J |x|/(x)dx. Если бы**

— 00

**это требование не выполнялось, то значение интеграла зависело бы от скорости стремления (в отдельности) ниж­него предела к** —оо, **а верхнего**—**к +** оо.

**По аналогии с дисперсией дискретной величины опре­деляется и дисперсия непрерывной величины.**

**Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения.**

**Если возможные значения X принадлежат отрезку [о, Ь], то**

***ь***

***D(X)=^[x-M(X)]\*f(x)dx;***

125

**если возможные значения принадлежат всей оси х, то**

СО

D(X)= S [x—M(X)]\*f(x)dx.

— CD

***Среднее квадратическое отклонение непрерывной слу­чайной величины* определяется, как и для величины диск­ретной, равенством**

о(Х) = КЩХ).

Замечание 1. Можно доказать, что свойства математического ожидания и дисперсии дискретных величин сохраняются и для непре­рывных величин.

Замечание 2. Легко получить для вычисления дисперсии более удобные формулы:

***ь***

D (X) = J х®/ (х) dx - [Af (X)]\*, (\*\*)

а

**о»**

D(X)= $ x\*/(x)dx-[M(X)J\*.

— *00*

Пример 1. Найти математическое ожидание и дисперсию случай­ной величины X, заданной функцией распределения

(

О при х < О,

х при 0<х<1,

1 при х > 1.

Решение. Найдем плотность распределения:

(

О при х<0,

1 при 0 < х < 1.

О при х > 1.

Найдем математическое ожидание по формуле (\*):

1 1 М (X) = ^ х. 1 • dx = х®/21 = 1 /2.

Найдем дисперсию по формуле (\*\*):

1 **I**

D (X) = ^ х\*. 1 -dx—[1/2]\* = х8/з| — 1/4=1/12.

О о

Пример 2. Найти математическое ожидание и дисперсию непре­рывной случайной величины X, распределенной равномерно в интер­вале (а, b).

Решение. Найдем математическое ожидание X по формуле (\*), учитывая, что плотность равномерного распределения f(x) — l/(b—в)

126

(см. гл. XI, § 6):

ь ь

*dx = r* \ *х dx.*

*Ь—а* J

*а а*

Выполнив элементарные выкладки, получим

*М(Х)=\*(а + Ь)1*2.

Найдем дисперсию X по формуле (\*\*): ь ь

D (X) = <\*) dx-[М (X)]\* = J dx- ]8.

a a

Выполнив элементарные выкладки, получим

*D (Х) = (Ь —* a)2/12.

Замечание 3. Математическое ожидание и дисперсия случай­ной величины /?, распределенной равномерно в интервале (0, 1),

т. е. если а — 0, 6=1, как следует из примера 2, соответственно равны M(/?)=l/2, D(/?)= 1/12. Этот же результат мы получили в примере 1 по заданной функции распределения случайной вели­чины R.

**§ 2. Нормальное распределение**

**Нормальным называют распределение вероятно­стей непрерывной случайной величины, которое описы­вается плотностью**

/(\*) = —i=e-<\*-« >V2a'. а у 2я

**Мы видим, что нормальное распределение определяется двумя параметрами: а и а. Достаточно знать эти пара­метры, чтобы задать нормальное распределение. Покажем, что вероятностный смысл этих параметров таков: а есть математическое ожидание, о — среднее квадратическое отклонение нормального распределения.**

**а) По определению математического ожидания непре­рывной случайной величины,**

00 00

М(Х)= [xf(x)dx^=—\= С xe~(x-a>t/2at dx.

*J о у* 2л. *J*

— оо — <»

**Введем новую переменную г = (х—а)/а. Отсюда x — az-\-a, dx —** adz. **Приняв во внимание, что новые пределы инте­**

**М (X) ={\*/(\*)**

127

**грирования равны старым, получим**

00

**М(Х)=—J (ст**2 **+ я) е**-г’/2 **dz =**

— 00

ао со

**— —^= С oze\_z\*/**2**dzH—-£= Ce~z\*/**2**dz.**

/2л J /2л J

— со —а»

**Первое из слагаемых равно нулю (под знаком интеграла нечетная функция; пределы интегрирования симметричны относительно начала координат). Второе из слагаемых**

**равно а ^интеграл Пуассона ^ e~z'/2dz =**

**Итак, *М* (X) = а, т. е. *математическое ожидание нор­мального распределения равно параметру а.***

**б) По определению дисперсии непрерывной случайной величины, учитывая, что М (X) = а, имеем**

00

**D(X) = -4= f (\*—*a)\*e-<\*-aW2°'dx.***

о y 2я J •\*> 00

**Введем новую переменную г — (х—а)/а. Отсюда х—a = oz, dx~odz. Приняв во внимание, что новые пределы инте­грирования равны старым, получим**

***D(X)==Sz'ze~Z‘/2dz-***

mm (D

**Интегрируя по частям, положив и = г, dv = ze~\*,/s dz, найдем**

**D (X) = о\*.**

**Следовательно,**

о (X) = **УЩХ)** = Ко5 = о.

**Итак, *среднее квадратическое отклонение нормального распределения равно параметру о.***

Замечание 1. Общим называют нормальное распределение с произвольными параметрами а и а (о > 0).

Нормированным называют нормальное распределение с парамет­рами а — О и 0=1. Например, если X — нормальная величина с пара­метрами а и о, то U=(X — а)/о — нормированная нормальная вели­чина, причем M(U)= 0, о(1/) = 1.

128

Плотность нормированного распределения

Эта функция табулирована (см. приложение 1).

Замечание 2. Функция F (ж) общего нормального распреде\* леиия (см. гл. XI, § 3)

***X***

F(x)=—±— Г е-(2-а>,/<\*0,> dz, а /**2**п J

“ QD

а функция нормированного распределения

— 00

Функция Я0 (х) табулирована. Легко проверить, что

*F (х)* = *F0* ((х—*а)/а).*

Замечание 3. Вероятность попадания нормированной нор­мальной величины X в интервал (0, х) можно найти, пользуясь

***X***

функцией Лапласа Ф (ж) е= \ е-г’/2 dz. Действительно (см.

***уйп* J**

**гл. XI, § 2),**

***X X***

Р (0 < X < х) = С q> (х) dx — \* - Г е-г\*/а dz — Ф

(х).

Замечание 4. Учитывая, что ф (х) dx — 1 (см. гл. XI, § 4,

— СО

свойство 2), и, следовательно, в силу симметрии ф (х) относительно нуля

о

J ф(х)с!х = 0,5, а значит, и Я(—оо <Х< 0)=0,5,

— 00

Аегко получить, что

Fо (х) = 0,5+Ф(х).

Действительно,

Я0 (х)=Л (—со < X < х) = Р (—оо < X < 0) + Я (0 < X <х) =

= 0,5 + Ф(х).

9 — 2730 129

§ 3. Нормальная кривая

**Г рафик плотности нормального распределения называют нормальной кривой (кривой Гаусса).**

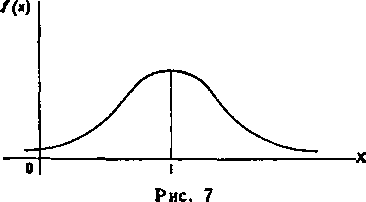
**Исследуем функцию**

***и* = *\==.***

v a Y2п

**методами дифференциального исчисления.**

1. **Очевидно, функция определена на всей оси х.**



1. **При всех значениях х функция принимает поло­жительные значения, т. е. нормальная кривая располо­жена над осью Ох.**

**3 Предел функции при неограниченном возрастании х (по абсолютной величине) равен нулю: lim у =** 0**, т. е.**

I X 1 —со

**ось Ох служит горизонтальной асимптотой графика.**

1. **Исследуем функцию на экстремум. Найдем первую производную:**

**и' — fr~g\_ e-(\*-a)V<**2**a')**

**о**3 **У^**2**п**

**Легко видеть, что у'—0 при х = а, уг>0 при х < а, у' <** 0 **при х > а.**

**Следовательно, при х — а функция имеет максимум, равный** 1**/(а** 1**/г**2**я).**

1. **Разность х—а содержится в аналитическом выра­жении функции в квадрате, т. е. график функции сим­метричен относительно прямой х = а.**
2. **Исследуем функцию на точки перегиба. Найдем вторую производную:**

и"  ! е —<\*—a)‘/(2<j\*) Г 1

**У a\*v L** °2 **j'**

130

**Легко видеть, что при jc=a + o и х — а—о вторая  
производная равна нулю, а при переходе через эти точки  
она меняет знак (в обеих этих точках значение функции  
равно** l/(g **Y2л е)). Таким образом, точки графика (а—о,**1**/(оК**2**яе)) и (а + о,** 1**/(о]/!?яе)) являются точками пе-  
региба.**

**На рис. 7 изображена нормальная кривая при а = 1  
и о =** 2**.**

§ 4. Влияние параметров нормального  
распределения на форму нормальной кривой

**Выясним, как влияют на форму и расположение  
нормальной кривой значения параметров а и о.**

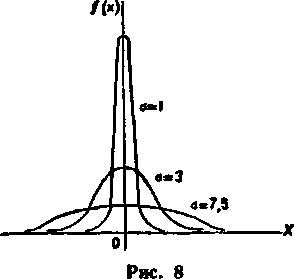
**Известно, что графики функций f (х) и f (х—а) имеют  
одинаковую форму; сдвинув график / (х) в положитель-**

**ном направлении оси х на а  
единиц масштаба при а > О  
или в отрицательном направ-  
лении при а <** 0**, получим  
график f(x—а). Отсюда сле-  
дует, что изменение величины  
параметра а (математиче-  
ского ожидания) не изменяет  
формы нормальной кривой, а  
приводит лишь к ее сдвигу  
вдоль оси Ох: вправо, если а  
возрастает, и влево, если а  
убывает.**

**По-иному обстоит дело,  
если изменяется параметр о**

**(среднее квадратическое отклонение). Как было указано  
в предыдущем параграфе, максимум дифференциальной  
функции нормального распределения равен** 1**/(о *Y***2**я).  
Отсюда следует, что *с возрастанием о максимальная орди-  
наша нормальной кривой убывает, а сама кривая стано-  
вится более пологой, т. е. сжимается к оси Ох\ при  
убывании* о *нормальная кривая становится более «остро-  
вершинной» и растягивается в положительном направле-  
нии оси Оу.***

**Подчеркнем, что при любых значениях параметров а И о площадь, ограниченная нормальной кривой и осью х, остается равной единице (см. гл. XI, § 4, второе свойство плотности распределения).**



**На рис.** 8 **изображены нормальные кривые при раз­личных значениях с и а =** 0**. Чертеж наглядно иллюстри­рует, как изменение параметра о сказывается на форме нормальной кривой.**

**Заметим, что при а = 0 и а=1 нормальную кривую**

**Ф (х) = е**-\*1''2 **называют нормированной.**

§ 5. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

**Уже известно, что если случайная величина X задана плотностью распределения f (х), то вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (а, р), такова:**

Р

**Р (а < X < Р) = ^ / (х) dx.**

а

**Пусть случайная величина X распределена по нор­мальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (а, Р), равна**

1 **г**

**Р (а < X < р) = -4= \ e-<\*-«)V(\*o\*) dx.** о у 2п J

ас

**Преобразуем эту формулу так, чтобы можно было пользоваться готовыми таблицами. Введем новую пере­менную** 2 **= (х—а)/о. Отсюда x = oz + a, dx = adz. Найдем новые пределы интегрирования. Если х=а, то г — (а— а)/а; если х = р, то** 2 **= (Р — a)ja.**

**Таким образом, имеем**

(Р***-а)/а***

Р(а<х<\*)=*77*ъ 1

(а -а)/а

**О (**0**-а)/о**

= -4= f е-2\*''2 dz-j—4= f e-2V2d2 =

УТя . J У 2п J

**(а*~а)/а '* О**

(р-а)/о (а-а)'о

= —4= Г е-2‘/2 dz 4= e\_2j/2 dz.

У1К J y2n j

132

Пользуясь функцией Лапласа

***ф(х)=7ш^‘",п d!-***

**окончательно получим**

**Р (а < X <Р) — Ф (^~) Ф (~~**5**~) • (\*)**

Пример. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое откло­нение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероят­ность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50).

Решение. Воспользуемся формулой (\*). По условию, а =10, Р = 50, а = 30, а=10, следовательно,

Р(10 < X < 50) —Ф ^®®=32)\_ф^Н^) = 2Ф(2).

По таблице приложения 2 находим Ф (2) = 0,4772. Отсюда иско­мая вероятность

Р(10 < X < 50) = 2 0,4772 = 0,9544.

**§**6**. Вычисление вероятности заданного отклонения**

**Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной вели­чины X по абсолютной величине меньше заданного по­ложительного числа б, т. е. требуется найти вероятность осуществления неравенства |Х—а\ <**6**.**

**Заменим это неравенство равносильным ему двойным неравенством**

**—** 6**<Х— а < б, или а — б<Х<а +** 6**.**

**Пользуясь формулой (\*) (см. § 5), получим**

**Р(| X — а\ < б) = Р (а— б < X <а + б) =**

**\_ф[\*±^]\_ф[<!!=й=г]\_ф(**4**)\_ф(\_±).**

**Приняв во внимание равенство**

**Ф (— б/с) = — Ф (Ь/а)**

**(функция Лапласа —нечетная), окончательно имеем Р(|Х — а \ < б) = 2Ф(б/а).**

**В частости, при а =** 0

**Р(|Х1<6) = 2Ф (б/с).**

133

**На рис. 9 наглядно показано, что если две случайные  
величины нормально распределены и а —** 0**, то вероятность  
принять значение, принадлежащее интервалу (— б, б),**

**больше у той величины, кото-  
рая имеет меньшее значение о.  
Этот факт полностью соответ-  
ствует вероятностному смыслу  
параметра о (о есть среднее  
квадратическое отклонение; оно  
характеризует рассеяние слу-  
чайной величины вокруг ее  
математического ожидания).**

Замечание. Очевидно, со-  
бытия, состоящие в осуществлении  
неравенств | Л — а|<б и |Х—а|ё=  
S\*6, — противоположные. Поэтому,

если вероятность осуществления неравенства | X — а | < б равна р, то  
вероятность неравенства |Х — а | :>• 6 равна 1 — р.

Пример. Случайная величина X распределена нормально. Мате­матическое ожидание и среднее квадратическое отклсиеиие X соот­ветственно равны 20 и 10. Найти вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше трех.

Решение. Воспользуемся формулой

Р(\Х—а\< б) — 2Ф(б/о).

По условию, 6 = 3, а = 20, о =10. Следовательно,

Р(|Х—20| < 3) = 2Ф (3/10) = 2Ф (0,3).

По таблице приложения 2 находим Ф (0,3) =0,1179.

Искомая вероятность

Р (| X — 201 < 3) =0,2358.

**§ 7. Правило трех сигм**

**Преобразуем формулу (см. §** 6**)**

**Р (I X —а | < б) = 2Ф (б/о),**

**положив б — at. В итоге получим**

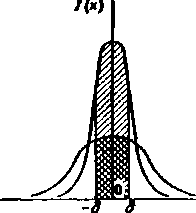
**Р(|Х—а|<а/) = 2Ф(0-**

**Если < = 3 и, следовательно, at — За, то**

**Р (| X—а | < За) = 2Ф (3) = 2 • 0,49865 = 0,9973,**

**т. е. вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше утроенного среднего квадратиче­ского отклонения, равна 0,9973.**

134



**Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027. Это означает, что лишь в 0,27% случаев так может произойти. Такие события исходя из принципа невозмож­ности маловероятных событий можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математиче­ского ожидания не превосходит утроенного среднего квад­ратического отклонения.**

**На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выпол­няется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально.**

§ 8. Понятие о теореме Ляпунова. Формулировка центральной предельной теоремы

**Известно, что нормально распределенные случай­ные величины широко распространены на практике. Чем это объясняется? Ответ на этот вопрос был дан выдаю­щимся русским математиком А. М. Ляпуновым (централь­ная предельная теорема): если случайная величина X пред­ставляет собой сумму очень большого числа взаимно неза­висимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.**

Пример. Пусть производится измерение некоторой физической величины. Любое измерение дает лишь приближенное значение изме­ряемой величины, так как на результат измерения влияют очень многие независимые случайные факторы (температура, колебания прибора, влажность и др.). Каждый из этих факторов порождает ничтожную «частную ошибку». Однако, поскольку число этих факторов очень велико, нх совокупное действие порождает уже заметную «суммар­ную ошибку».

Рассматривая суммарную ошибку как сумму очень большого числа взаимно независимых частных ошибок, мы вправе заключить, что суммарная ошибка имеет распределение, близкое к нормальному. Опыт подтверждает справедливость такого заключения.

**Приведем формулировку центральной предельной тео­ремы, которая устанавливает условия, при которых сумма**

135

**большого числа независимых слагаемых имеет распреде­ление, близкое к нормальному.**

**Пусть Хх, Х2, ..., Х„, . ■ ■— последовательность неза­висимых случайных величин, каждая из которых имеет конечные математическое ожидание и дисперсию:**

***M(Xk)=ak, D (Xk) — Ы-***

**Введем обозначения:**

**Sn = Х**1 **+ Х2+ .. . + Х„, А„— 2 аъ**

fe=i ft=i

**Обозначим функцию распределения нормированной суммы через**

***F.W = P(\*=±<x).***

**Говорят, что к последовательности Хи Х2, ... приме­нима центральная предельная теорема, если при любом хфункция распределения нормированной суммы при п** —\*-00 **стремится к нормальной функции распределения:**

***X***

lim В = \_1 Г e-zt'\*dz.

**л -»® 1\_** Вп **J )^2я J**

— СС

**В частности, если все случайные величины Xlf Х2,... одинаково распределены, то к этой последовательности применима центральная предельная теорема, если диспер­сии всех величин Х,-(\* = 1,2, ...) конечны и отличны от нуля. А. М. Ляпунов доказал, что если для б > 0 при п—>■** 00 **отношение Ляпунова**

**L„ = C„/B’+e, где Сп= S М\Хк-ал\ч-\*,**

**\*=** 1

**стремится к нулю (условие Ляпунова), то к последова­тельности Хг, Х2, ... применима центральная предельная теорема.**

**Сущность условия Ляпунова состоит в требовании, чтобы каждое слагаемое суммы (S„ — А„)/В„ оказывало на сумму ничтожное влияние.**

Замечание. Для доказательства центральной предельной тео­ремы А. М. Ляпунов использовал аппарат характеристических функ­ций. Характеристической функцией случайной величины X называют функцию q> (/) = M [e',Jf].

136

Для дискретной случайной величины X с возможными значениями хи их вероятностями рь характеристическая функция

**<Р**(0 **=**2**е‘"\* Рк-**

***к***

Для непрерывной случайной величины X с плотностью распре­деления f (х) характеристическая функция

0**D**

**Ч> (О = $ e'tx f (\*) dx.**

— ®

Можно доказать, что характеристическая функция суммы неза­висимых случайных величин равна произведению характеристических функций слагаемых.

**§ 9. Оценка отклонения теоретического**

**распределения от нормального.**

**Асимметрия и эксцесс**

**Эмпирическим называют распределение относи­тельных частот. Эмпирические распределения изучает математическая статистика.**

**Теоретическим называют распределение вероятностей. Теоретические распределения изучает теория вероятностей. В этом параграфе рассматриваются теоретические распре­деления.**

**При изучении распределений, отличных от нормаль­ного, возникает необходимость количественно оценить это различие. С этой целью вводят специальные характери­стики, в частности асимметрию и эксцесс. Для нормаль­ного распределения эти характеристики равны нулю. Поэтому если для изучаемого распределения асимметрия и эксцесс имеют небольшие значения, то можно предпо­ложить близость этого распределения к нормальному. Наоборот, большие значения асимметрии и эксцесса ука­зывают на значительное отклонение от нормального.**

**Как оценить асимметрию? Можно доказать, что для симметричного распределения (график такого распреде­ления симметричен относительно прямой х = М (X)) каждый центральный момент нечетного порядка равен нулю. Для несимметричных распределений центральные моменты не­четного порядка отличны от нуля. Поэтому любой из этих моментов (кроме момента первого порядка, который равен нулю для любого распределения) может служить для оценки асимметрии; естественно выбрать простейший из них, т. е. момент третьего порядка p3. Однако принять этот момент для оценки асимметрии неудобно потому, что**

137

**его величина зависит от единиц, в которых измеряется  
случайная величина. Чтобы устранить этот недостаток,  
р**3 **делят на а3 и таким образом получают безразмерную  
характеристику.**

**Асимметрией теоретического распределения называют  
отношение центрального момента третьего порядка к кубу  
среднего квадратического отклонения:**

**As = рз/с».**

**Асимметрия положительна, если «длинная часть» кри-  
вой распределения расположена справа от математического**

**ожидания; асимметрия отри-  
цательна, если «длинная  
часть» кривой расположена  
слева от математического  
ожидания. Практически оп-  
ределяют знак асимметрии  
по расположению кривой рас-  
пределения относительно мо-  
ды (точки максимума диффе-  
ренциальной функции): если  
«длинная часть» кривой рас-  
положена правее моды, то  
асимметрия положительна  
(рис.** 10**, а), если слева —  
отрицательна (рис.** 10**, б).**

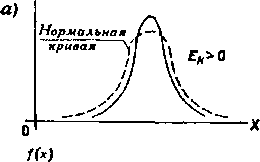
**Для оценки «крутости», т. е. большего или меньшего  
подъема кривой теоретического распределения по сравне-**

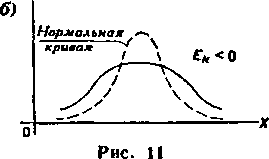
**нию с нормальной кривой,  
пользуются характеристи-  
кой — эксцессом.**

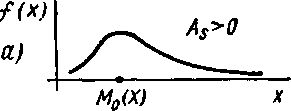
**Эксцессом теоретического  
распределения называют ха-  
рактеристику, которая опре-  
деляется равенством**

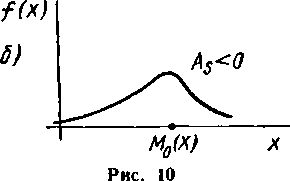
**= /о**4**)—3.**

**Для нормального рас-  
пределения р**4**/о**4 **= 3; сле-  
довательно, эксцесс равен  
нулю. Поэтому если экс-  
цесс некоторого распре-  
деления отличен от нуля,  
то кривая этого распределе-**









138

**ния отличается от нормальной кривой: если эксцесс положительный, то кривая имеет более высокую и «острую» вершину, чем нормальная кривая (рис.** 11**, а); если эксцесс отрицательный, то сравниваемая кривая имеет более низ­кую и «плоскую» вершину, чем нормальная кривая (рис. 11,6). При этом предполагается, что нормальное и теоретическое распределения имеют одинаковые матема­тические ожидания и дисперсии.**

**§ 10. Функция одного случайного аргумента и ее распределение**

**Предварительно заметим, что далее, вместо того чтобы говорить «закон распределения вероятностей», бу­дем часто говорить кратко—«распределение».**

**Если каждому возможному значению случайной вели­чины X соответствует одно возможное значение случайной величины У, то У называют функцией случайного аргу­мента X:**

**у = Ф(Х).**

**Далее показано, как найти распределение функции по известному распределению дискретного и непрерывного аргумента.**

1. **Пусть аргумент X—дискретная слу­**

**чайная величина.**

**а) Если различным возможным значениям аргумента X соответствуют различные возможные значения функции У, то вероятности соответствующих значений X и К между собой равны.**

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана распреде­лением

X 2 3

р 0,6 0,4

Найти распределение функции У = Х2.

Решение. Найдем возможные значения У :yt = 22 = 4; уг — 32= = 9. Напишем искомое распределение У:

У 4 9

р 0,6 0,4

**б) Если различным возможным значениям X соответ­ствуют значения У, среди которых есть равные между собой, то следует складывать вероятности повторяющихся значений У.**

139

Пример 2. Дискретная случайная величина X задана распреде­

лением

Л —2 2 3

р 0,4 0,5 0,1

Найти распределение функции Y = X3.

Решение. Вероятность возможного значения ух = 4 равна сумме вероятностей несовмесгных событий Х = —2, Х — 2, т. е. 0,4-|-0,5= = 0,9. Вероятность возможного значения г/2 = 9 равна 0,1. Напишем искомое распределение Y\

Y 4 9

р 0,9 0,1

1. **Пусть аргумент X — непрерывная слу­чайная величина. Как найти распределение функ­ции Н = <р(Х), зная плотность распределения случайного аргумента X? Доказано: если у — ц>(х)—дифференцируе­мая строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная функция которой х = ^{у), то плотность рас­пределения g(y) случайной величины У находится с по­мощью равенства**

**£(У) = /[Ф(У)]|Ф' (У)|-**

Пример 3. Случайная величина X распределена нормально, при­чем ее математическое ожидание а = 0. Найти распределение функ­ции Y = X3.

Решение. Так как функция у = х3 дифференцируема и строго возрастает, то можно применить формулу

g (</) = ПФ(А')] I Ф' {У) I- (\*)

Найдем функцию, обратную функции у = х3: ф(«/)=ж = у1/3.

Найдем f [ф (у)]. По условию,

а у 2п

поэтому

**/ [Ф *(y)]^f[y1,3] = ~r~ е~у2/3^о*\*. (\*\*)**

а у 2л

Найдем производную обратной функции по у.

У {у) = (у11лУ =-4тт. (\*\*\*)

3г/2/3

Найдем искомую плотность распределения, для чего подставим (\*\*) и (\*\*\*) и (\*):

Замечание. Пользуясь формулой (\*), можно доказать, что линейная функция У — АХ + В нормально распределенного аргумен­та X также распределена нормально, причем для того чтобы найти математическое ожидание Y, надо в выражение функции подставить вместо аргумента X его математическое ожидание а:

М {Y) = Ла + fi;

для того чтобы найти среднее квадратическое отклонение Y, надо среднее квадратическое отклонение аргумента X умножить на модуль коэффициента при X:

о(П = | Л|о(Х).

Пример 4. Найти плошость распределения линейной функции Y— ЗХ + 1. если аргумент распределен нормально, причем математи­ческое ожидание X равно 2 и среднее квадратическое отклонение равно 0,5.

Решение. Найдем математическое ожидание Y:

М (К) = 3-2+1 =7.

Найдем среднее квадратическое отклонение Y:

о(К) = 3-0,5=1,5 Искомая плотность распределения имеет вид

g(y)= ’ e-(,-7)V[2.(1.5>.i.

1,5 у 2л

**§ 11. Математическое ожидание функции одного случайного аргумента**

**Задана функция F = cp(X) случайного аргумента X. Требуется найти математическое ожидание этой функ­ции, зная закон распределения аргумента.**

1. **Пусть аргумент X —д искретная случай­ная величина с возможными значениями х,, х2,. .., хп, вероятности которых соответственно равны рх, рг, . .., рп< Очевидно, Y—также дискретная случайная величина с возможными значениями ух = ср (х,), у2 = ф (х2), уп = = ф (х„). Так как событие «величина X приняла значе­ние х,» влечет за собой событие «величина Y приняла значение ср (х,)», то вероятности возможных значений К со­ответственно равны рх, р2, . . ., рп. Следовательно, мате­матическое ожидание функции**

***П***

м [ф (X)] =2ф (\*;) р{. (\*)

i= I

Пример 1. Дискретная случайная величина X задана распределением

X 1 3 5

р 0,2 0,5 0,3

141

Найти математическое ожидание функции К=«р (Х) = Х2 +1. Решение. Найдем возможные значения Y:

ч>(1)=)2\_|\_1==2; ф(3) = 3\*+1=Ю;

ф (5) =5\*+1=26.

Искомое математическое ожидание функции Y равно

М [X2-f-1] =2-0,2-f-10-0,5+ 26-0,3= 13,2.

1. **Пусть аргумент X—непрерывная слу­чайная величина, заданная плотностью распределе­ния f (х). Для отыскания математического ожидания функции У = ф (X) можно сначала найти плотность рас­пределения g(y) величины У, а затем воспользоваться формулой**

**ОО**

***М*** 00**= S *yg(y)dy.***

**—•** 00

**Однако если отыскание функции g(y) является затруд­нительным, то можно непосредственно найти математиче­ское ожидание функции ф (X) по формуле**

00

М [ф (X)] = $ ф (х) / (х) dx.

— 00

**В частности, если возможные значения X принадлежат интервалу (а, Ь), то**

ь

**Л\*[ф(Х)] = $ ф (x)f(x)dx. (\*\*)**

*а*

**Опуская доказательство, заметим, что оно аналогично доказательству формулы (\*), если заменить суммирова­ние интегрированием, а вероятность — элементом вероят­ности f (х) Ах.**

Пример 2. Непрерывная случайная величина X задана плот­ностью распределения f (х) — sin х в интервале (0, я/2); вне этого интервала /(х) = 0. Найти математическое ожидание функции К=-ф(Х)=Х2.

Решение. Воспользуемся формулой (\*\*). По условию, /(\*) = >=sinx, ф(х) = х2, а = 0, 6 = я/2. Следовательно,

Я/2

М [ф (X)] = J х2 sin xdx. о

Интегрируя по частям, получим искомое математическое ожидание

Л1[Х3] = я — 2.

142

**§ 12. Функция двух случайных аргументов.**

**Распределение суммы независимых слагаемых.**

**Устойчивость нормального распределения**

**Если каждой паре возможных значений случай­ных величин X и Y соответствует одно возможное зна­чение случайной величины Z, то Z называют функцией двух случайных аргументов X и Y:**

**Z = Ф(Х, Y).**

**Далее на примерах будет показано, как найти рас­пределение функции Z = X + Y по известным распреде­лениям слагаемых. Такая задача часто встречается на практике. Например, если X — погрешность показаний измерительного прибора (распределена нормально), Y — погрешность округления показаний до ближайшего деле­ния шкалы (распределена равномерно), то возникает задача — найти закон распределения суммы погрешностей Z = X + Y.**

1. **Пусть X и Y—дискретные независимые случайные величины. Для того чтобы составить закон распределения функции Z = X + E, надо найти все возможные значения Z и их вероятности.**

Пример 1. Дискретные независимые случайные величины заданы распределениями:

X 1 2 Г 3 4

р 0,4 0,6 р 0,2 0,8

Составить распределение случайной величины Z = X Ц-У.

Решение. Возможные значения Z есть суммы каждого возмож- нбго значения X со всеми возможными значениями У'.

z 1 1 | 3 4: 22 - - 1 -; - 4 5: 2;} - 2 - \* 3' 5; 2 j - 2 - \* 4 - ■ 6.

Найдем вероятности этих возможных значений. Для того чтобы Z = 4, достаточно, чтобы величина X приняла значение \*i=I и величина У — значение гц = 3. Вероятности этих возможных значе­ний, как следует из данных законов распределения, соответственно равны 0,4 и 0,2.

Аргументы X и У независимы, поэтому события X— 1 и К = 3 независимы и, следовательно, вероятность их совместного наступле­ния (т. е. вероятность события Z= 1 + 3 = 4) по теореме умножения равна 0,4 0,2 = 0,08.

Аналогично найдем:

Р (2= I +4 = 5) =0,4 0,8 = 0,32;

Р (Z = 2+ 3 = 5) = 0,6-0,2 = 0,12;

Р (Z = 2 + 4 = 6) =0,6-0,8 = 0,48.

143

Напишем искомое распределение, сложив предварительно вероят­ности несовместных событий Z = z2, Z = za (0,32 + 0,12 = 0,44):

Z 4 5 6

р 0,08 0,44 0,48

Контроль: 0,08 + 0,44 + 0,48=1.

1. **Пусть X и Y—непрерывные случайные величины. Доказано: если X и Y независимы, то плотность распределения g(z) суммы Z = X + Y (при условии, что плотность хотя бы одного из аргументов задана на интервале (—** оо, оо) **одной формулой) может быть найдена с помощью равенства**

СО

***8*(\*) = S *fl(x)fa(z—x)dx* (\*)**

* со

**либо с помощью равносильного равенства**

со

**Я (**2**)= S *fi(z—y)fi (y)dy,* (\*\*)**

* **оо**

**где flt f2 — плотности распределения аргументов.**

**Если возможные значения аргументов неотрицательны, то g(z) находят по формуле**

***г***

***g(z)=^fi(x)f,(z—x)dx,* (\*\*\*)**

**о**

**либо по равносильной формуле**

***г***

***g{z)=\fi{z — y)fa{y)dy.* (\*\*\*\*)**

**о**

**Плотность распределения суммы независимых случай­ных величин называют композицией.**

**Закон распределения вероятностей называют устой­чивым, если композиция таких законов есть тот же закон (отличающийся, вообще говоря, параметрами). Нормаль­ный закон обладает свойством устойчивости: композиция нормальных законов также имеет нормальное распреде­ление (математическое ожидание и дисперсия этой ком­позиции равны соответственно суммам математических ожиданий и дисперсий слагаемых). Например, если X и Y — независимые случайные величины, распределенные нормально с математическими ожиданиями и диспер­**

144

**сиями, соответственно равными аг = 3, яа = 4, D**1**=l,** D2 = **0,5,** то композиция этих **величин (т. е. плотность вероятности суммы Z** **= X + Y) также распределена нор­мально, ‘причем математическое ожидание и дисперсия композиции соответственно равны а — 3 + 4 = 7; Z> = 1 -f- +0,5 =1,5.**

Пример 2. Независимые случайные величины X и К заданы плотностями распределений:

*f(x)=^t~x/3* (0<х<оо);

Ш=4е-"‘ (0\*Sy < оо).

Найти композицию этих законов, т. е. плотность распределения слу­чайной величины Z = X-\-Y.

Решение. Возможные значения аргументов неотрицательны, поэтому воспользуемся формулой (\*\*\*) г г

*g(z) = jjf* 1 *(x)h* (Z—[те\_Л/3] [т е\_(г"л>/4] *dx =*

***г***

=Ие\_г/4 *j e~x/12dx = e~\*/4* (I -е-г/12).

Заметим, что здесь г^О, так как Z = X-\-Y и, по условию, воз­можные значения X и Y неотрицательны.

Рекомендуем читателю для контроля убедиться, что

00

J *g(^)dz =* 1. о

**В следующих далее параграфах кратко описаны рас­пределения, связанные с нормальным, которые будут использованы при изложении математической статистики.**

**§ 13. Распределение «хи квадрат»**

**Пусть X, (t = 1, 2, ..., п)— нормальные незави­симые случайные величины, причем математическое ожи­дание каждой из них равно нулю, а среднее квадрати­ческое отклонение—единице. Тогда сумма квадратов этих величин**

<=1

10 — 2730 145

**распределена по закону х**2 **(<<хи квадрат») с k — ti степе-  
нями свободы; если же эти величины связаны одним ли-  
нейным соотношением, например ^Х^пХ, то число  
степеней свободы k — ti —** 1**.**

**Плотность этого распределения**

**О при х О,**

**е**~\*/2 **x(fe/S8)~x при х > О,**

**где Г (х) — § tx~\* е~\* dt — гамма-функция; в частности, о**

**Г(л+ 1) = л!.**

***f(x) =***

**Отсюда видно, что распределение «хи квадрат» опре­деляется одним параметром — числом степеней свободы k.**

**С увеличением числа степеней свободы распределение медленно приближается к нормальному.**

**§ 14. Распределение Стьюдента**

**Пусть Z—нормальная случайная величина, причем М (Z) = 0, a(Z) —1, а V — независимая от Z величина, которая распределена по закону х**2 **с k степенями сво­боды. Тогда величина**

**имеет распределение, которое называют /-распределением или распределением Стьюдента (псевдоним английского статистика В. Госсета), с k степенями свободы.**

**Итак, отношение нормированной нормальной величины к квадратному корню из независимой случайной вели­чины, распределенной по закону «хи квадрат» с k степе­нями свободы, деленной на k, распределено по закону Стьюдента с k степенями свободы.**

**С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному. Допол­нительные сведения об этом распределении приведены далее (см. гл. XVI, § 16).**

146

§ 15. Распределение F Фишера — Снедекора

**Если U и V—независимые случайные величины, распределенные по закону у2 со степенями свободы кг и kit то величина**

р \_ U!ki (\*)

**имеет распределение, которое называют распределением F Фишера—Снедекора со степенями свободы и й**8 **(иногда его обозначают через V2).**

**Плотность этого распределения**

**О при хг^О,**

**/(\*) =**

**где**

**jjfci-a)/\***

**Со ПРИ X > О,**

**(fe**2 **+ M)(fc‘** \*)/8

С°= Г (\*i/2) Г (А2/2)

**Мы видим, что распределение F определяется двумя пара­метрами— числами степеней свободы. Дополнительные сведения об этом распределении приведены далее (см. гл. XIX, §** 8**).**

Задачи

1. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, зная ее плотность распределения:

'1

а) /(\*) = т~ при —1 <дс< 1, f(x)=0 при остальных

**я у** 1 **— х**2

значениях х;

б) /(\*) = -при а — 1\*^х\*£.а-\-1, /(х)=0 при остальных зна- чениях х•

*Отв.' а) М(Х) =* О, D(X) = 1/2; б) *M(X) = a, D(X) = l2/*3.

1. Случайная' величина X распределена нормально. Математи­ческое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 6 и 2. Найти вероятность того, что в резуль­тате испытания X примет значение, заключенное в интервале (4,8).

Отв. 0,6826.

1. Случайная величина распределена нормально. Среднее квад­ратическое отклонение этой величины равно 0,4. Найти вероятность того, что отклонение случайной величины от ее математического ожи­дания по абсолютной величине будет меньше 0,3.

Отв. 0,5468.

10\*

147

1. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением а= 1 мм и математическим ожиданием а — 0. Найти вероятность того, что из двух независимых наблюдений ошибка хотя бы одного из них не превзойдет по абсо­лютной величине 1,28 мм.

Отв. 0,96.

1. Валики, изготовляемые автоматом, считаются стандартными, если отклонение диаметра валика от проектного размера не превы­шает 2 мм. Случайные отклонения диаметра валиков подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением а = 1,6 мм и математическим ожиданием а = 0. Сколько процентов стандартных валиков изготовляет автомат?

Отв. Примерно 79%.

1. Дискретная случайная величина X задана законом распреде­ления:

а) X 1 2 3 б) X —I I 2

р 0,2 0,1 0,7 р 0,1 0,2 0,7

Найти закон распределения случайной величины У —X\*.

Отв. a) Y 1 16 81 б) Y 1 16

р 0,2 0,1 0,7 р 0,3 0,7

1. Непрерывная случайная величина X задана плотностью рас­пределения f (х). Найти дифференциальную функцию g{y) случайной величины Y, если:

a) Y = X 4 I (— оо < х < оо); б) У = 2Х (— а < х < а).

Отв. a) g(y)=f(y— 1) (— оо < у < оо);

б) g (у) =\* Y f (■%)<'-2а<у <2а)-

1. Независимые дискретные случайные величины заданы следую­щими законами распределения:

*X 2 3 5 У* 14

р 0,3 0,5 0,2 р 0,2 0,8

Найти заК'.ны распределения функций: a) Z = X-{-Y; б) Z = XY.

Отв. a) Z 3 4 6 7 9

р 0,06 0,10 0,28 0,40 0,16

б) 2 2 3 5 8 12 20

р 0,06 0,10 0,04 0,24 0,40 0,16

1. Независимые случайные величины X и К заданы пло! юстями

распределении

*fi (х) = е~х/3* (0 < х < оо);

*fi(x) = ~&~yli* (0<у<оо).

Найти композицию этих законов, т. е. плотность распределения случайной величины Z = X ~YY.

( 1 „-z/b /, „-2Z/154 „„„

Глава тринадцатая ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

**§ 1. Определение показательного распределения**

**Показательным (экспоненциальным) называют  
распределение вероятностей непрерывной случайной вели-  
чины Ху которое описывается плотностью**

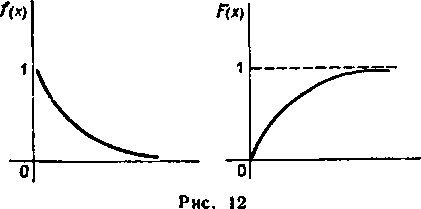
**О при х < О,**

**при *х^О,***

**где К — постоянная положительная величина.**

**Мы видим, что показательное распределение опреде­ляется одним параметром X. Эта особенность показа­тельного распределения указывает на его преимущество**

**/ *(х):***



**по сравнению с распределениями, зависящими от боль-  
шего числа параметров. Обычно параметры неизвестны  
и приходится находить их оценки (приближенные значе-  
ния); разумеется, проще оценить один параметр, чем два  
или три и т. д. Примером непрерывной случайной вели-  
чины, распределенной по показательному закону, может  
служить время между появлениями двух последователь-  
ных событий простейшего потока (см. § 5).**

**Найдем функцию распределения показательного закона  
(см. гл. XI, § 3):**

*х Ох*

***F(x) =* J *f(x)dx=* ^ *Odx* + *К* § *e~kxdx=*** 1**—*е~Хх.***

**—** 00 **— go О**

Итак,

**'»-{**1**-**

- A.JC

**при**

**при**

**х < О, х>0.**

149

**Мы определили показательный закон с помощью плот­ности распределения; ясно, что его можно определить, используя функцию распределения.**

**Графики плотности и функции распределения показа­тельного закона изображены на рис.** 12**.**

Пример. Написать плотность и функцию распределения показа­тельного закона, если параметр А, = 8.

Решение. Очевидно, искомая плотность распределения

/(х) =8e-8jc при х^О; f(x) = 0 прн х < 0.

Искомая функция распределения

F(x) = 1—e-8jc при х^О; F(x) — Q при х < 0.

**§ 2. Вероятность попадания в заданный интервал показательно распределенной случайной величины**

**Найдем вероятность попадания в интервал (а, Ь) непрерывной случайной величины X, которая распреде­лена по показательному закону, заданному функцией распределения**

**F (х) = 1 —е\_Ал (х**^5 **0).**

**Используем формулу (см. гл. X, § 2, следствие 1) Р{а<Х < b) = F (b) — F (а).**

**Учитывая, что F(a)=l—е-Ял, F(b) — 1—е~хь, получим Р (а < X < b) = е~ка—е~кь. (\*)**

**Значения функции е--\* находят по таблице.**

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

f(x) = 2е~2\* при хззО; /(х)=0 при х < 0.

Найтн вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,3, I).

Решение. По условию, А, = 2. Воспользуемся формулой (\*):

Р (0,3 < X < l) = e-<2-°-3>-e-<2-»=e-0-6-e-2 =

= 0,54881—0,13534 =-0,41.

150

**§ 3. Числовые характеристики показательного распределения**

**Пусть непрерывная случайная величина X рас­пределена по показательному закону**

**(** 0 **при х < О,**

/ (\*)= | **Хе~Кх** при **х>0.**

Найдем математическое ожидание (см. гл. **XII,** § 1):

оо оо

***М* (*X) = ^ xf (x)dx*** = ***X^*** xe-^dx. **о о**

Интегрируя по частям, получим

**М (X)** = 1 А. (\*)

**Таким образом,** математическое ожидание показатель­ного распределения равно обратной величине параметра X. **Найдем дисперсию (см. гл. XII, § 1):**

СО 00

***D(X)*** = \ x\*f ***(х)*** dx — ***[М* (X**)]2 **=** К **J** x\*e~bxdx— ***1/Х\*.* о о**

**Интегрируя по частям, получим**

со

***X I x2e~>-xdx* = 2/АЛ**

**О**

**Следовательно,**

**£>(Х)=1/?Л**

**Найдем среднее квадратическое отклонение, для чего извлечем квадратный корень из дисперсии:**

**а(Х)=1/А. (\*\*)**

**Сравнивая (\*) и (\*\*), заключаем, что**

**М (Х) = а(Х)= 1/Х,**

**т. е. *математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного распределения' равны между собой.***

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

f(x) = 5е\_5\* при х Ss 0; f(x) — 0 при х < 0.

151

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X.

Решение. По условию, Л = 5. Следовательно,

М (X) = о (X) = 1Д = 1/5 = 0,2;

D (Х)= l/X2 = I/52 = 0,04.

Замечание I. Пусть на практике изучается показательно распределенная случайная величина, причем параметр X неизвестен. Если математическое ожидание также неизвестно, то находят его оценку (приближенное значение), в качестве которой принимают выборочную среднюю х (см. гл. XVI, § 5). Тогда приближенное зна­чение параметра X находят с помощью равенства

Х\*= *1/х.*

Замечание 2. Допустим, имеются основания предположить, что изучаемая на практике случайная величина имеет показательное распределение. Для того чтсбы проверить эту гипотезу, находят оценки математического ожидания и среднего квадратического откло­нения, т. е. находят выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение (см. гл. XVI, § 5, 9). Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение показательного рас­пределения равны между собой, поэтому их оценки должны разли­чаться незначительно. Если оценки окажутся близкими одна к дру­гой, то данные наблюдений подтверждают гипотезу о показательном распределении изучаемой величины; если же оценки различаются существенно, то гипотезу следует отвергнуть.

**Показательное распределение широко применяется в приложениях, в частности в теории надежности, одним из основных понятий которой является функция надеж­ности .**

§ 4. Функция надежности

**Будем называть элементом некоторое устройство независимо от того, «простое» оно или «сложное».**

**Пусть элемент начинает работать в момент времени /„=0, а по истечении времени длительностью t происходит отказ. Обозначим через Т непрерывную случайную величину — длительность времени безотказной работы элемента. Если элемент проработал безотказно (до наступления отказа) время, меньшее /, то, следовательно, за время длитель­ностью t наступит отказ.**

**Таким образом, функция распределения F (t)=Р (Т </) определяет вероятность отказа за время длитель­ностью /. Следовательно, вероятность безотказной работы за это же время длительностью t, т. е. вероятность про­тивоположного события Т > t, равна**

**R(t)-=P(T > 0= 1 —^(0- (\*)**

152

**Функцией надежности R (t) называют функцию, опре­деляющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:**

***R(t) = P(T>t).***

**§ 5. Показательный закон надежности**

**Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого**

**F(t) =** 1**—e~w.**

**Следовательно, в силу соотношения (\*) предыдущего па­раграфа функция надежности в случае показательного распределения времени безотказной работы элемента имеет вид**

**R(t) = l—F(t)=** 1**—(1 — е-х') = е-х'.**

**Показательным законом надежности называют функ­цию надежности, определяемую равенством**

***R(t) = e~Kt,* (\*)**

**где К — интенсивность отказов.**

**Как следует из определения функции надежности (см. § 4), эта формула позволяет найти вероятность без­отказной работы элемента на интервале времени длитель­ностью t, если время безотказной работы имеет, показа­тельное распределение.**

Пример. Время безотказной работы элемента распределено по показательному закону f (<) = 0,02е-°.02\* при /^0 (1— время). Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч.

Решение. По условию, постоянная интенсивность отказов Х = 0,02. Воспользуемся формулой (\*):

R (100) =е \_0 02'100 = е~2 = 0,13534.

Искомая вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч, приближенно равна 0,14.

Замечание. Если отказы элементов в случайные моменты времени образуют простейший поток, то вероятность того, что за время длительностью t не наступит ни одного отказа (см. гл. VI, § 6),

Pt (0) = е-\*1',

что согласуется с равенством (\*), поскольку К в обеих формулах имеет один и тот же смысл (постоянная интенсивность отказов).

153

**§ в. Характеристическое свойство показательного закона надежности**

**Показательный закон надежности весьма прост и удобен для решения задач, возникающих на практике. Очень многие формулы теории надежности значительно упрощаются. Объясняется это тем, что этот закон обла­дает следующим важным свойством: вероятность безот­казной работы элемента на интервале времени длитель­ностью t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t (при заданной интенсивно­сти отказов Я).**

**Для доказательства свойства введем обозначения со­бытий:**

**А—безотказная работа элемента на интервале (**0**, /„) длительностью t0; В—безотказная работа на интервале (\*о> \*о + 0 длительностью t. Тогда АВ—безотказная ра­бота на интервале (**0**,** 0 **+ \*) длительностью t0 + t.**

**Найдем вероятности этих событий по формуле (\*) (см. § 5):**

**Р(Л) = е-\*'«, Р(Д)=е-^,**

**Р (АВ) = е-\*- = e-x<oe\_w.**

**Найдем условную вероятность того, что элемент будет работать безотказно на интервале (/0, 0 + \*) ПРИ условии, что он уже проработал безотказно на предшествующем интервале (0, t0) (см. гл. III, § 2):**

**р (В\ Р(АВ) \*-Х<,е-М ГаК°)— р(А) — е\_л/„ е •**

**Полученная формула не содержит t0, а содержит только t. Это и означает, что время работы на предшест­вующем интервале не сказывается на величине вероятно­сти безотказной работы на последующем интервале, а зависит только от длины последующего интервала, что и требовалось доказать.**

**Полученный результат можно сформулировать несколь­ко иначе. Сравнив вероятности Р (В) = е~х/ и РА(В)—е~м, заключаем: условная вероятность безотказной работы эле­мента на интервале длительностью t, вычисленная в пред­положении, что элемент проработал безотказно на пред­шествующем интервале, равна безусловной вероятности.**

154

**Итак, в случае показательного закона надежности безотказная работа элемента «в прошлом» не сказывается на величине вероятности его безотказной работы «в бли­жайшем будущем».**

Замечание. Можно доказать, что рассматриваемым свойством обладает только показательное распределение. Поэтому если на практике изучаемая случайная величина этим свойством обладает, то она распределена по показательному закону. Например, при допу­щении, что метеориты распределены равномерно в пространстве и во времени, вероятность попадания метеорита в космический корабль не зависит от того, попадали или не попадали метеориты в корабль до начала рассматриваемого интервала времени. Следовательно, слу­чайные моменты времени попадания метеоритов в космический корабль распределены по показательному закону.

Задачи

1. Написать функцию распределения F{х) и плотность вероятности /(х) непрерывной случайной величины X, распределен­ной по показательному закону с параметром Я = 5.

Отв. / (jc) =5e~6jc при JtSsO; /(\*) =0 при х < 0; F(x) = l—е-\*\*.

1. Непрерывная случайная величина X распределена по пока­зательному закону: ((x) = 5e~Sx при дсЭ\*0, f(x)=0 при \* < 0. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интер­вал (0,4, 1).

Отв. Р (0,4 < X < I) =0,13.

1. Непрерывная случайная величина X распределена по показа­тельному закону /(jc) = 4e~4jt (х > О). Найти математическое ожида­ние, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X.

Отв. М (X) = о (X) = 0,25; D (X) = 0,0625.

1. Время безотказной работы элемента распределено по показа­тельному закону /(0 = 0,01 e-°.01t (/> 0), где / — время, ч. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно 100 ч.

Отв. R (100) = 0,37.

**Глава четырнадцатая**

СИСТЕМА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

**§ 1. Понятие о системе нескольких случайных величин**

**До сих пор рассматривались случайные вели­чины, возможные значения которых определялись одним числом. Такие величины называют одномерными. Напри­мер, число очков, которое может выпасть при бросании игральной кости,— дискретная одномерная величина; рас­**

155

**стояние от орудия до места падения снаряда — непрерыв­ная одномерная случайная величина.**

**Кроме одномерных случайных величин изучают вели­чины, возможные значения которых определяются двумя, тремя, п числами. Такие величины называются соот­ветственно двумерными, трехмерными, . . ., «-мерными.**

**Будем обозначать через (X, У) двумерную случайную величину. Каждую из величин X и У называют состав­ляющей (компонентой); обе величины X и Y, рассматри­ваемые одновременно, образуют систему двух случайных величин. Аналогично «-мерную величину можно рассмат­ривать как систему « случайных величин. Например, трехмерная величина (X, У, Z) определяет систему трех случайных величин X, У и Z.**

Пример. Станок-автомат штампует стальные плитки. Если конт­ролируемыми размерами являются длина X и ширина Y, то имеем двумерную случайную величину (X, Y )\ если же контролируется и высота Z, то имеем трехмерную величину (X, Y, Z).

Двумерную случайную величину (X, К) геометрически можно истолковать либо как случайную точку М (X, Y) на плоскости (т. е. как точку со случайными координатами), либо как случайный век­тор ОМ. Трехмерную случайную величину геометрически можно ис­толковать как точку М (X, Y, Z) в трехмерном пространстве или как вектор ОМ.

Целесообразно различать дискретные (составляющие этих вели­чин дискретны) и непрерывные (составляющие этих величин непре­рывны) многомерные случайные величины.

§ 2. Закон распределения вероятностен дискретной двумерной случайной величины

**Законом распределения дискретной двумерной слу­чайной величины называют перечень возможных значений этой величины, т. е. пар чисел (ху;) и их вероятно­стей p(xh yj)(i—l, 2, ..., «; / — 1, 2, ..., m). Обычно закон распределения задают в виде таблицы с двойным входом (табл.** 2**).**

**Первая строка таблицы содержит все возможные зна­чения составляющей X, а первый столбец — все возможные значения составляющей У. В клетке, стоящей на пере­сечении «столбца х,» и «строки г/;», указана вероятность Р (х,-, У/) того, что двумерная случайная величина примет значение (х,-, уj).**

**Так как события (X=xh Y—yj){i—\, 2, ..., n; /= 1, 2, ..., m) образуют полную группу (см. гл. II, § 2),**

156

**то сумма вероятностей, помещенных во всех клетках таб­лицы, равна единице.**

Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| У | X | | | | | |
| X! | х, |  | Xi |  | хп |
| Ух | Р(ху, Ух) | Р(\*2, ^l) |  | P(\*i, Ух) |  | Р(\*п, Ух) |
|  |  |  |  |  |  |  |
| У/ | Р(ху. У/) | Р(Х2, yj) |  | P(\*i, У/) |  | Р(хУ/) |
|  |  |  |  |  |  |  |
| Ут | Р(Х 1. Ут) | Р (\*2, Ут) |  | Р (\*|. Ут) |  | Р (Хп, Ут) |

**Зная закон распределения двумерной дискретной слу­чайной величины, можно найти законы распределения каждой из составляющих. Действительно, например, со­бытия У-=Уу), {Х = Ху\ У=у2), .. (X = xt; У=ут)**

**несовместны, поэтому вероятность Р (л^) того, что X при­мет значение хх, по теореме сложения такова:**

***Р(Ху) = р(Ху,* У|) + р(\*„** *Уя)+* ***■* • ■ *+Р(хи*** *Ут).*

**Таким образом, вероятность того, что X примет зна­чение Ху, равна сумме вероятностей «столбца ХуХ». В об­щем случае, для того чтобы найти вероятность Р (X ~х,), надо просуммировать вероятности столбца xt. Аналогично сложив вероятности «строки у », получим вероятность**

***P(y = yjP***

Пример. Найти законы распределения составляющих двумерной случайной величины, заданной законом распределения (табл. 3).

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероят­ности возможных значений X :Р (хх) = 0,16; Р(хг) = 0,48; P(x3)=0,3S. Напишем закон распределения составляющей X:

**X Ху Xg Xg**

Р 0,16 0,48 0,36

157

Таблица 3

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Y | X | | |
|  |  | \*» |
| У± | 0,10 | 0,30 | 0,20 |
| Уг | 0,06 | 0,18 | 0,16 |

Контроль: 0,16+0,48 + 0,36=1.

Сложив вероятности по строкам, полупим вероятности возможных значений Y: Р (yi)=0,60; Р (у\*) =0,40. Напишем закон распределения составляющей Y:

У У\ У\*

Р 0,60 0,40

Контроль: 0,60 + 0,40=1.

§ 3. Функция распределения двумерной случайной  
величины

**Рассмотрим двумерную случайную величину  
(X, У) (безразлично, дискретную или непрерывную).**

**Пусть х, у—пара действи-  
тельных чисел. Вероятность  
события, состоящего в том,  
что X примет значение, мень-  
шее х, и при этом У примет  
значение, меньшее у, обоз-  
начим через F (х, у). Если  
х и у будут изменяться, то,  
вообще говоря, будет изме-  
няться и F (х, у), т. е.  
F (х, у) есть функция от х  
и у.**

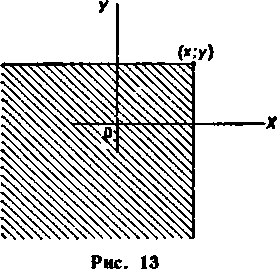
**Функцией распределения  
двумерной случайной вели-**

**чины (X, К) называют функцию F (х, у), определяющую  
для каждой пары чисел х, у вероятность того, что X  
примет значение, меньшее х, и при этом У примет зна-  
чение, меньшее у:**

***F (х, у) = Р(Х <х, У* < *у).***

**Геометрически это равенство можно истолковать так: F (х, у) есть вероятность того, что случайная точка (X, У)**

158



**попадет в бесконечный квадрант с вершиной (х, у), рас­положенный левее и ниже этой вершины (рис. 13).**

Пример. Найти вероятность того, что в результате испытания составляющая X двумерной случайной величины (X, Y) примет зна­чение X < 2 и при этом составляющая Y примет значение Y < 3, если известна функция распределения системы

f(x,y) = (-i-arctg|.+-i.) • (±arotg-|-+4-)-

Решение. По определению функции распределения двумерной случайной величины,

F (х, у) =Р (X < х, Y < у).

Положив х = 2, у — 3, получим искомую вероятность

Р (X <2, Y < 3) — Р (2, 3)=(i-arctgJ-+i-) X



**§ 4. Свойства функции распределения двумерной случайной величины**

**Свойство 1. *Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству***

**0<F(x, i/)<l.**

**Доказательство. Свойство вытекает из определе­ния функции распределения как вероятности: вероят­ность— всегда неотрицательное число, не превышающее единицу.**

**Свойство 2. *F (х, у) есть неубывающая функиия по каждому аргументу, т. е.***

**F (\*2. У) > F (хх, у), если х2 > хх;**

***F (х,*** *У,)* ***> F (х,*** *Ух),* **если *уг* > *ух.***

**Доказательство. Докажем, что F (х, у) — неубы­вающая функция по аргументу х. Событие, состоящее в том, что составляющая X примет значение, меньшее х2, и при этом составляющая Y < у, можно подразделить на следующие два несовместных события:**

1. **X примет значение, меньшее хх, и при этом Y < у с вероятностью Р (X < хх, Y < у);**
2. **X примет значение, удовлетворяющее неравенству \***1**^Х<х2, и при этом Y <С у с вероятностью Р (хх ^ <Х<х2), Y <у).**

159

**По теореме сложения,**

***Р(Х<х2, У<у)=Р(Х*<х,, *У<у) + P(xt^X <х2, У<у).***

**Отсюда**

***Р(Х<х2, Y<y)— Р(Х* <хх, *У<у) = Р(х1^;Х<х2, У <у),* или**

***Р(х2, y) — F(xx, у) = Р (хг ^ X < х2, У* < *у).***

**Любая вероятность есть число неотрицательное, поэтому Р(х2, у)— F(xlt у)^0, или F (х2, t/)> F (хх, у),**

**что и требовалось доказать.**

**Свойство становится наглядно ясным, если восполь­зоваться геометрическим истолкованием функции распре­деления как вероятности попадания случайной точки в бесконечный квадрант с вершиной (х; у) (рис. 13). При возрастании х правая граница этого квадранта сдвигается вправо; при этом вероятность попадания случайной точки в «новый» квадрант, очевидно, не может уменьшиться.**

**Аналогично доказывается, что F (х, у) есть неубыва­ющая функция по аргументу у.**

**Свойство 3. *Имеют место предельные соотношения:***

1. F ( — оо, у) — 0, 2) F (х, — оо) = 0,

**3) F (— оо, —оо) -- 0, 4) F (оо, оо)—1.**

**Доказательство. 1) F( —** оо, **у) есть вероятность события X < —** оо **и У <С у \ но такое событие невозможно (поскольку невозможно событие Х< —** оо), **следовательно, вероятность этого события равна нулю.**

**Свойство становится наглядно ясным, если прибегнуть к геометрической интерпретации: при х—►—** оо **правая граница бесконечного квадранта (рис. 13) неограниченно сдвигается влево и при этом вероятность попадания слу­чайной точки в квадрант стремится к нулю.**

1. **Событие У** < — оо **невозможно, поэтому F** (х, — оо) = 0.
2. **Событие X < —** оо **и К< —** оо **невозможно, поэтому F (— оо, — оо) — 0.**
3. **Событие X <** оо **и У <** оо **достоверно, следовательно, вероятность этого события F** (оо, оо)=**1**.

**Свойство становится наглядно ясным, если принять во внимание, что при х—►** оо **и у—»■** оо **бесконечный квад­рант (рис. 13) превращается во всю плоскость хОу и, следовательно, попадание случайной точки (X; У) в эту плоскость есть достоверное событие.**

160

**Свойство 4. а) *При у=\* оо функция распределения системы становится функцией распределения составляю­щей X:***

***F(x, oo) = F1(x).***

**б) *При х — оо функция распределения системы стано­вится функцией распределения составляющей Y:***

***у) = Ft (у).***

**Доказательство, а) Так как событие У< оо досто­верно, то F (х, оо) определяет вероятность события X < х, т. е. представляет собой функцию распределения состав­ляющей X.**

**б) Доказывается аналогично.**

**§ 5. Вероятность попадания случайной точки в полуполосу**

**Используя функцию распределения системы слу-  
величин X и Y, легко найти вероятность того,**

**результате испыта-**

**чаиных  
что в**

**ния случайная точка попа-  
дает в полуполосу х, < X <**

**<х**8 **и Y <у (рис. 14, а)  
или в полуполосу Х<х и**

**УХ<У<У\* (Рис- 14- б)-**

**Вычитая из вероятности  
попадания случайной точки  
в квадрант с вершиной  
(ха; у) вероятность попада-  
ния точки в квадрант с вер-  
шиной (х^ у) (рис. 14, а), по-  
лучим**

**Р(х**1**<Х<хг, У<у) =**

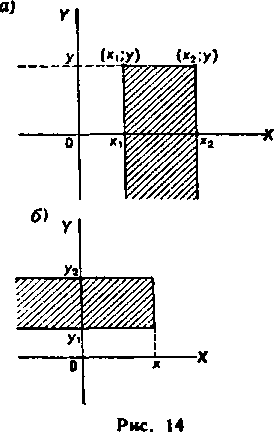
***= F(x3, y) — F{xt, у).***

**Аналогично имеем  
*Р(Х<х, y1<Y<y3) =***

***= F(x, у3)* — *F (х, уг).***

**Таким образом, вероятность попадания случайной точки в полуполосу равна приращению функции распре­деления по одному из аргументов.**

4—2730 161



§ в. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник

**Рассмотрим прямоугольник ABCD со сторонами, параллельными координатным осям (рис. 15). Пусть урав­нения сторон таковы:**

**X = xlt X — х2, К = г/Х и К=«/г.**

**у**

у3

*У,*

л р,;у3)

C(\*| iy,

**Д(«аУа)**

Я(\*зГУ|)

**= Л**

Рис. 15

**ность равна *F* (х\*, *ух) — F (xlt уг)):***

**Найдем вероятность по­падания случайной точки (X; У) в этот прямоуголь­ник. Искомую вероятность можно найти, например, так: из вероятности по­**

**падания случайной точ­ки в полуполосу АВ с вертикальной штриховкой (эта вероятность равна F(xt,yt) — F{xltyt)) вы­честь вероятность попада­ния точки в полуполосу CD с горизонтальной**

**штриховкой (эта вероят-**

***Р(хх^Х* < ха, *ух* < К < *уа)* = [F (ха, *y,) — F(xlt yt)] —***

**— [F** (\*\*. **yJ — P** (\*t, **У**1**Я** (\*)

Пример. Найти вероятность попадания случайной точки (X; Y) в прямоугольник, ограниченный прямыми х — л/6, х = л/2, у=л/4, у = л/3, если известна функция распределения

F (х, у) =sin х sin у (0 < х < л/2, 0 < у < я/2).

Решение. Положив х1=я/6, ха = я/2, У1 = я/4, уа = я/3 в формуле («•), получим

Р (я/6 < X < я/2, я/4 < К < я/3) = (F (л/2, я/3) —

— F( я/6, я/3)]-[F (я/2, я/4) — F (я/6, я/4)] =

= [sin (я/2) sin (я/3) — sin (я/6) sin (я/3)] — [sin (я/2) sin (я/4) —

— sin (я/6) sin (я/4)] =[ V 3/2— V'DAl] — [ У~2/2— К\*2/4] =

= (КЗ- К~2)/4 = 0,08.

162

**§ 7, Плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной случайной величины (двумерная плотность вероятности)**

**Двумерная случайная величина задавалась с по­мощью функции распределения. Непрерывную двумерную величину можно также задать, пользуясь плотностью распределения. Здесь и далее будем предполагать, что функция распределения F (х, у) всюду непрерывна и имеет всюду (за исключением, быть может, конечного числа кривых) непрерывную частную производную второго порядка.**

**Плотностью совместного распределения вероятностей f (х, у) двумерной непрерывной случайной величины (X, У) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:**

***fix u) = d\*F{x,y)***

I v\*» У) — дхду •

**Геометрически эту функцию можно истолковать как по­верхность, которую называют поверхностью распределения.**

Пример. Найти плотность совместного распределения f(x, у) системы случайных величин (X, К) по известной функции распреде­ления

F (\*. У) = sin х sin у (0< х С я/2, 0<у< я/2).

Решение. По определению плотности совместного распределения,

*d\*F*

*У)=дхду'*

Найдем частную производную по х от функции распределения: dF

-г— = COS х sin у. дх

Найдем от полученного результата частную производную по у, в итоге получим искомую плотность совместного распределения:

**3®F**

f (\*• У) — cos \*cosУ <я/2, О<я/2).

**§ 8. Нахождение функции распределения системы по известной плотности распределения**

**Зная плотность совместного распределения f (х, у), Можно найти функцию распределения F (х, у) по формуле**

*У х*

***Р(х,У)=1 lf(x,y)dxdy,***

— СС — CD

и\* 163

**что непосредственно следует из определения плотности распределения двумерной непрерывной случайной вели­чины (X, У).**

Пример. Найти функцию распределения двумерной случайной величины по данной плотности совместного распределения

*Пх’ У)=п\*(\+х\*)(1+у~\*)'*

Решение. Воспользуемся формулой

у х

*F(x, у)=* ^ $ *Н\*’ У)ЛхЛУ-*

**—** 00 **—** 00

Положив f(x, y) = nt (1 (i , получим

а (гтр i

— СО \ — со /

=5\* l гтр(\*role\* 4-y) \*= **\*+т)t** Ц **T+P“**

**— co — ao**

x=(larctgx + l)(larctgi,+l).

**§ 9. Вероятностный смысл двумерной плотности вероятности**

**Вероятность попадания случайной точки (X; У) в прямоугольник ABCD (рис. 16) равна (см. §** 6**)**

***Р(х г<Х<х„ ух<У < уш)* = [F (л„ *yt)* — *F (xlt* у,)] —**

**— [/\*■ (■«.• *yd — F(xlt уг)].***

**Обозначив для краткости левую часть равенства через Pabcd и применив к правой части теорему Лагранжа, получим**

*Р ABC D = Fxyijot* Л) Ал At/,

**где**

**\*i<£<\*., А\* = *Ух<г\<у„ Ьу = уш—уг-***

**Отсюда**

P’xyd, Л) = ЬхЬу \* ^

164

**или**

/(Б. ч) =

*лвср*

**(\*\*)**

**Л\* Д у**

**Приняв во внимание, что произведение ДхДу равно площади прямоугольника ABCD, заключаем: f (£, г)) есть отношение вероятности**

А(х,;у,\*лу) **Я(х,+Ах;у,+ду)**

**\*У**

**Д(х,+лх,у,)**

**попадания случайной точ-  
ки в прямоугольник ABCD Уз  
к площади этого прямо-  
угольника.**

**Перейдем теперь в ра- у,  
венстве (\*\*) к пределу при  
Ах—>-0 и Ду—«-О. Тогда—j**

**г]—\*у и, следова- Рнс** ,6

**тельно, /(£, п)—> f(x, у).**

**Итак, функцию f (х, у) можно рассматривать как пре­дел отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник (со сторонами Ах и Ду) к площади этого прямоугольника, когда обе стороны прямоугольника стре­мятся к нулю.**

**х\***

**случайной точки**

**§ 10. Вероятность попадания  
в произвольную область**

**Перепишем соотношение (\*\*) § 9 так:**

**Отсюда заключаем: про-**

**изведение /(£, г])АхАу  
есть вероятность попада-  
ния случайной точки в  
прямоугольник со сторо-  
нами Дл: и Ду.**

**Пусть в плоскости хОу  
задана произвольная об-  
ласть/5. Обозначим собы-  
тие, состоящее в попада-**

**нии случайной точки в эту область, так: (X, Y)czD.**

**Разобьем область D на п элементарных областей пря­мыми, параллельными оси Оу, находящимися на расстоя­нии Ах одна от другой, и прямыми, параллельными оси Ох, находящимися на расстоянии Ау одна от другой (рис. 17) (для простоты предполагается, что эти прямые пересекают контур области не более чем в двух точках). Так как**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V |  | | | f(t. | | т]) Дл: Д | |
|  |  |  |  |  |  | ч |  |
| ♦ |  | 1 |  | в |  | > |  |
| Ау |  | ч |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | -» | АХ | — | | | | |

Рис. 17

J65

**события, состоящие в попадании случайной точки в эле-  
ментарные области, несовместны, то вероятность попада-  
ния в область D приближенно (сумма элементарных об-  
ластей приближенно равна области D\) равна сумме  
вероятностей попаданий точки в элементарные области:**

**Р((Х, K)cD)« 2/(£,-, 4\t)bxby.**

**<=i**

**Переходя к пределу при Ах—>-0 и А у—>-0, получим  
Р ((X, У) с D) =** J J **f{x, у) dx dy. (\*)**

(О)

**Итак, для того чтобы вычислить вероятность попада-  
ния случайной точки (X; Y) в область D, достаточно**

**найти двойной интеграл по**

**области D от функции**

/(\*» У)-

**Геометрически равенство  
(\*) можно истолковать так:  
вероятность попадания слу-  
чайной точки (X; К) в область  
D равна объему тела, огра-  
ниченного сверху поверхно-  
стью z — f(x, у), основанием  
которого служит проекция**

**этой поверхности на плоскость хОу.**

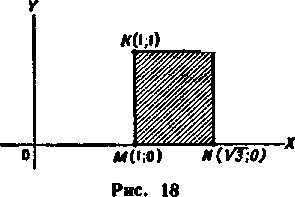
Замечание. Подынтегральное выражение f (х, у) dx dy назы­вают элементом вероятности. Как следует нз предыдущего, элемент вероятности определяет вероятность попадания случайной точки в эле­ментарный прямоугольник со сторонами dx к dy.

Пример. Плотность распределения двумерной случайной величины

ПХ’ У)^п30+х\*)(1+у\*Г Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник (рис. 18) с вершинами К (1; 1), L(V 3; l), Af (1; 0) и N {У~3 ; О).

Решение. Искомая вероятность

*Р«Х, У)* J + =



**§11. Свойства двумерной плотности вероятности**

**Свойство 1. *Двумерная плотность вероятно­сти неотрицательна:***

**f(x, у)>**0**.**

**Доказательство. Вероятность попадания случай­ной точки в прямоугольник со сторонами** Да: и Д**у есть неотрицательное число; площадь этого прямоугольника — положительное число. Следовательно, отношение этих двух чисел, а значит, и их предел (при Дх—►О и Ду—\*-0), который равен f (х, у) (см. § 9), есть неотрицательное число, т. е.**

***f(x,*** ***у)>*** 0**.**

**Заметим, что свойство непосредственно следует из того, что F (х, у) — неубывающая функция своих аргументов (§ 4).**

**Свойство 2. *Двойной несобственный интеграл с бес­конечными пределами от двумерной плотности равен единице:***

**J** 5 **/ *(х, у) dx dy* =** 1**.**

**Доказательство. Бесконечные пределы интегри­рования указывают, что областью интегрирования служит вся плоскость хОу, поскольку событие, состоящее в том, что" случайная точка попадет при испытании на плоскость хОу, достоверно, то вероятность этого события (она и определяется двойным несобственным интегралом от дву­мерной плотности) равна единице, т. е.**

**J J *f(x, у) dx dy* =** 1**.**

Пример. Задана плотность совместного распределения непрерыв­ной двумерной случайной величины (X,Y): f (х, у) =С cos х cos у в квадрате 0«^\*<я/2, 0 <у\*Ся/2; вие этого квадрата f (х, у) — 0. Найти постоянный параметр С.

Решение. Воспользуемся свойством 2, учитывая, что х и у изменяются от 0 до я/2:

С 5 5 cos х cos у dx dy = 1,

— 00—00

167

Отсюда

*г nit nit*

*ifc r* \

■=l/( V cos *xdx \ cos у dy* ].

Выполнив интегрирование, получим искомое значение парамет­ра С= 1.

**§ 12. Отыскание плотностей вероятности составляющих двумерной случайной величины**

**Пусть известна плотность совместного распреде­ления вероятностей системы двух случайных величин. Найдем плотности распределения каждой из состав­ляющих.**

**Найдем сначала плотность распределения составляю­щей X. Обозначим через Ft(x) функцию распределения составляющей X. По определению плотности распределе­ния одномерной случайной величины,**

**Приняв во внимание соотношения**

**\* U**

***F(x, у)*** =» J J ***f(x, у) dx dy*** (cm. § 8),

**—** 0**® —40**

*F1(x) = F(x,* oo) (cm. § 4),

**найдем**

***Ft(x)=* J S *fix, y) dx dy.***

**Продифференцировав обе части этого равенства по х, получим**

**или**

М^)= J **fix, у) dy.** (\*)

— оо

168

**Аналогично находится плотность распределения состав­ляющей Y:**

•D

Му)= S **f(x> y)dx.** (\*\*)

— OD

**Итак, *плотность распределения одной из составляю­щих равна несобственному интегралу с бесконечными пре­делами от плотности совместного распределения системы, причем переменная интегрирования соответствует другой составляющей.***

Пример. Двумерная случайная величина (X, У) задана плот­ностью совместного распределения

**г/\* «л —J 1/(6п) ПР" \*\*/94-у\*/4 < 1,**

**ft\*. W —^ о при хз/9 + у»/4>1.**

Найти плотности распределения составляющих X я У.

Решение. Найдем плотность распределения составляющей X по формуле (\*):

2 V 1 - \*•/» 2 У1 -х\*/9

'■M-W 5 «--k I \*-вг

— 2 УI —х\*/9 0

Итак,

, 2 У~9— х2/(9п) при | х | < 3,

'll ' \ 0 при |х|гг=3.

■Аналогично, используя формулу (\*\*), найдем плотность распре­деления составляющей У:

f (и\ = i 4—У\*/(2я) при I у I < 2,

I 0 при \у |Se2.

Рекомендуем читателю для контроля самостоятельно убедиться в том, что найденные функции удовлетворяюг соотношениям

**оо ' »**

J fx (х) dx = I и ^ f% [у) dy = I.

— 00 — во

**§ 13. Условные законы распределения составляющих системы дискретных случайных величин**

**Известно, что если события А** **и В** **зависимы, то условная вероятность события В** **отличается от его безус­ловной вероятности. В этом случае (см. гл. III, § 2)**

РЛ{8) = Р(АВ)/Р(А). (\*)

169

**Аналогичное положение имеет место и для случайных величин. Для того чтобы охарактеризовать зависимость между составляющими двумерной случайной величины, введем понятие условного распределения.**

**Рассмотрим дискретную двумерную случайную вели­чину (X, У). Пусть возможные значения составляющих таковы. xlt хг, ..., хп, Уц уг> ..., ут.**

**Допустим, что в результате испытания величина У приняла значение У — j/1; при этом X примет одно из своих возможных значений: или х2, ..., или х„. Обо­**

**значим условную вероятность того, что X примет, на­пример, значение хх при условии, что У — уг, через р (\*i 1**1**/,). Эта вероятность, вообще говоря, не будет равна безусловной вероятности р(х,).**

**В общем случае условные вероятности составляющей будем обозначать так:**

**P(xt\yj) (t= 1, 2, ..., п\ }= 1, 2, ..., т).**

**Условным распределением составляющей X при У — У/ называют совокупность условных вероятностей р{х**11 **yj), p(xAyj)i •••» Р{\*п\У/)> вычисленных в предположении, что событие У = у/ (/ имеет одно и то же значение при всех значениях X) уже наступило. Аналогично опреде­ляется условное распределение составляющей У.**

**Зная закон распределения двумерной дискретной слу­чайной величины, можно, пользуясь формулой (\*), вы­числить условные законы распределения составляющих. Например, условный закон распределения X в предпо­ложении, что событие Y — ух уже произошло, может быть найден по формуле**

p(\*fl^)=££&r **(f=1’2> •••• ")•**

**В общем случае условные законы распределения со­ставляющей X определяются соотношением**

Р (\*« I У]) = Р (Xi, y/VP(yj): (\*\*)

**Аналогично находят условные законы распределения составляющей У:**

**Р *(Уу* I *xi) — Р (х{> У/)/Р* (\*.)• (\*\*\*)**

Замечание. Сумма вероятностей условного распределения равна единице. Действительно, так как при фиксированном yj имеем

170

*n*

(см. § 2) **2 p** (\*/- **Р/) = Р(Р/).** TO **i=l**

*n n*

2 p (\*< i p/)—2 p (\*/. p/)/p (p/)=p (p/)/p to/)=i.

**<=i t~ i**

Аналогично доказывается, что при фиксированном х,- т

2 **р to/ К ) =** 1**-**

/=1

Это свойство условных распределений используют для контроля вы­числений.

Пример. Дискретная двумерная случайная величина задана табл. 4.

Таблица 4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | X | | |
| Y |  |  |  |
|  |  | Ж. | <■ |
| Pi | 0,10 | 0,30 | 0,20 |
| Ра | 0,06 | 0,18 | 0,16 |

Найти условный закон распределения составляющей X при ус­ловии, что составляющая Y приняла значение ух.

Решение. Искомый закон определяется совокупностью сле­дующих условных вероятностей:

Р toil Pi). Р tosl Pi). P(\*slpi)-

Воспользовавшись формулой (\*) и приняв во внимание, что Р toi)=0,60 (см. § 2, пример), имеем:

Р (\*i IPi) = P (\*i. Pi)/P toi) = 0,10/0,60= 1/6;

Р (\*з I Pi) = Р (\*а- Pi)/P (Pi) = 0,30/0,60 = 1/2;

Р (\*з I Pi) = Р (\*э. Pi)/P (Pi) = 0,20/0,60 = 1/3.

Сложив для контроля найденные условные вероятности, убедим­ся, что их сумма равна единице, как и должно быть, в соответствии с замечанием, помещенным выше: 1 /6-j- 1/2+ 1/3= 1.

**§ 14. Условные законы распределения составляющих системы непрерывных случайных величин**

**Пусть (X, Y) — непрерывная двумерная случай­ная величина.**

**Условной плотностью <р (х \ у) распределения состав­ляющих X при данном значении Y = у называют отно­**

171

**шение плотности совместного распределения f (х, у) си­стемы (X, У) к плотности распределения f**2**(y) состав­ляющей У:**

***<f>(x\y) = f(x, y)/f2(y).* (\*)**

**Подчеркнем, что отличие условной плотности ф (JC J \*/) от безусловной плотности /, (х) состоит в том, что функ­ция ф (х | у) дает распределение X при условии, что со­ставляющая У приняла значение У = у\ функция же /j (х) дает распределение X независимо от того, какие из возможных значений приняла составляющая У.**

**Аналогично определяется условная плотность состав­ляющей У при данном значении X —х:**

**V>(y\x) = f (х,** у)//,(х). (\*\*)

**Если известна плотность совместного распределения f (х, у), то условные плотности составляющих могут быть найдены в силу (\*) и (\*\*) (см. §** 12**) по формулам:**

00

Ф **(х** I **У)** = / **(X, y)l** S **f** (X, **у) dx,** (\*\*\*)

**—** 00 **оо**

\*) = /(\*, **y)l** S /(\*. **y)dy.** (\*\*\*\*)

— оо

**Запишем формулы (\*) и (\*\*) в виде**

***f(x, y) = f3(y)<P(x\y), f(x, y) = f1(x)$(y\x).***

**Отсюда заключаем: умножая закон распределения**

**одной из составляющих на условный закон распределе­ния другой составляющей, найдем закон распределения**

**системы случайных величин.**

**Как и любая плотность распределения, условные**

**плотности обладают следующими свойствами:**

во

**Ф (х** **I У)** > **О, J ф (х | у) dx = 1**;

— 00

00

**Ф(«/|\*)>**0**, J <t>(y\x)dy=** 1**.**

— GO

Пример. Двумерная случайная величина (X, У) задана плот­ностью совместного распределения

**ч\_ J ПРН *х\*+Уш < г\*,***

И\*’ У) \0 при ха + у» > г2.

172

Найти условные законы распределения вероятностей состав-  
ляющих.

Р е шеиие, Найдем условную плотность составляющей X при  
| х | < Yгг — у\* по формуле (\*\*\*):

. . 1 **/(лг\*)** 1

Ф (\* I у)~

***пг***

***Vr‘-y>*** 2 **V *г\* —и\****

' S\*

-*Vr\*-y*«

Так как f (х, у) —0 при > г\*, то ф(дс|у)=0 при |х| >

**> *Vr\*-y\*.***

Пользуясь формулой (\*\*•\*\*), аналогично найдем условную плот-  
ность составляющей Y:

I 1/(2 Vг\* —х\*) при \у\ < Yг\*—х\*.

Ф (У I \*)

О при | у | > Yга — \*\*•

**§ 15. Условное математическое ожидание**

**Важной характеристикой условного распределе­ния вероятностей является условное математическое ожи­дание.**

**Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при Х — х (х—определенное воз­можное значение X) называют произведение возможных значений Y на их условные вероятности:**

*т*

м (У | х=х) = 2] yjP (У/1 х). (\*)

**Для непрерывных величин**

***М***

№

**(К I X = х) = j уф {у IX) dy,**

**где ф(«/|х) — условная плотность случайной величины Y при X = х.**

**Условное математическое ожидание М (Y \х) есть функ­ция от х:**

**М(У|х) = /(х),**

**которую называют функцией регрессии У на X.**

**Аналогично определяются условное математическое ожидание случайной величины X и функция регрессии X на У:**

Af (X I £Г> = Ф (у).

173

Пример. Дискретная двумерная случайная величина задана табл. 5.

Т а б ли ц а 5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X | | | |
| У | jr,= l | jr,=3 | \*\*=\* | ж\*=8 |
| У1=з  У% = 6 | 0,15  0,30 | 0,06  0,10 | 0,25  0,03 | 0,04  0,07 |

Найти условное математическое ожидание составляющей У при Л=х1=1.

Решение. Найдем р (xt), для чего сложим вероятности, по­мещенные в первом столбце табл. 5:

р (Ж1) = 0,15 + 0,30 = 0,45.

Найдем условное распределение вероятностей величины У при \*=.\*! = 1 (см. § 13):

P(«/il\*i)=P (\*ь Уг)/Р (\*i) = 0,15/0,45== 1/3;

Р (У» I \*i)=P (\*\*. У%)!Р (\*i) — 0,30/0,45 = 2/3.

Найдем искомое условное математическое ожидание по фор­муле (\*):

М<У\Х =\*i) =42 yjp {у} | ДСг) = yjp (Pi I Jti) +Угр (У2 I \*0 =

**/= I**

= 3 (1/3)+ 6 (2/3) =5.

**§ 16. Зависимые и независимые случайные величины**

**Мы назвали две случайные величины независи­мыми, если закон распределения одной из них не зави­сит от того, какие возможные значения приняла другая величина. Из этого определения следует, что условные распределения независимых величин равны их безуслов­ным распределениям.**

**Выведем необходимые и достаточные условия незави­симости случайных величин.**

**Теорема. *Для того чтобы случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы* (X, *Y) была равна про­изведению функций распределения составляющих;***

F(x, У) = Fx (х) Ft (у).

**Доказательство, а) Необходимость. Пусть X и У независимы. Тогда события X < х и Y <у неза­**

174

**висимы, следовательно, вероятность совмещения этих  
событий равна произведению их вероятностей:**

***Р(Х<х, Y <у) = Р(Х <x)P{Y <у),***

**ИЛИ**

**F(x, у) = М\*)М«Г)-**

**б) Достаточность. Пусть F (х, у) = Ft(x) Fa(y),  
Отсюда**

***Р{Х<х, Y <у) = Р(Х <x)P(Y <у),***

**т. е. вероятность совмещения событий X < х и У < у  
равна произведению вероятностей этих событий. Следова-  
тельно, случайные величины X и Y независимы.**

**Следствие. *Для того чтобы непрерывные случайные  
величины X и Y были независимыми, необходимо и доста-  
точно, чтобы плотность совместного распределения си-  
стемы* (*X, Y) была равна произведению плотностей рас-  
пределения составляющих:***

***f(x, y) = fi(x)ft(y).***

**Доказательство, а) Необходимость. Пусть  
X и Y—независимые непрерывные случайные величины.  
Тогда (на основании предыдущей теоремы)**

***F(x, y) = FAx)Ft(y)-***

**Дифференцируя это равенство по х, затем по у, имеем**

*d\*F dFjdF,  
дхду дх ду '*

**или (по определению плотностей распределения двумер-  
ной и одномерной величин)**

***f(x, y) = fi(x)fa{y)-***

**б) Достаточность. Пусть**

***f(x, y) = fAx)fAy)-***

**Интегрируя это равенство по х и по у, получим**

*ух X у*

***f(x, у) dx dy —* J *fAx)dx* j *f*, *(y) dy,***

— CD — 00

**или (см. §** 8 **гл. XIV и § 3 гл. XI)**

**F{x, у) = Ft (x) Ft (y).**

175



**Отсюда (на основании предыдущей теоремы) заклю­чаем, что X и Y независимы.**

Замечание. Так как приведенные выше условия являются необходимыми и достаточными, то можно дать новые определения независимых случайных величин:

1. две случайные величины называют независимыми, если функ­ция распределения системы этих величин равна произведению функ­ций распределения составляющих;
2. две непрерывные случайные величины называют независимы­ми, если плотность совместного распределения системы этих величин равна произведению плотностей распределения составляющих.

Пример. Двумерная непрерывная случайная величина (X, У) задана плотностью совместного распределения fix, у) — (sin х sin у)/А

в квадрате 0<х<л, 0<у<л; вне квадрата f (х, у) —0. Доказать, что составляющие X и У независимы.

Решение. Используя формулы (\*) и (\*\*) § 12, легко найдем плотности распределения составляющих: fj (х) = sin х/2, /а (у) = sin у 12. Плотность совместного распределения рассматриваемой системы рав­на произведению плотностей распределения составляющих, поэтому X и V независимы.

Разумеегся, можно было доказать, что условные законы распре­деления составляющих равны их безусловным законам, откуда также следует независимость X и У.

**§ 17. Числовые характеристики системы двух**

**случайных величин. Корреляционный момент.**

**Коэффициент корреляции**

**Для описания системы двух случайных величин кроме математических ожиданий и дисперсий составляю­щих используют и другие характеристики; к их числу относятся корреляционный момент и коэффициент корре­ляции.**

**Корреляционным моментом рху случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин:**

***pxu = M{\X-M{X)][Y-M(Y)]}.***

**Для вычисления корреляционного момента дискрет­ных величин используют формулу**

!\*\*(,= 2 2 *[\*t — M* (ХЩУ/—М (Y)]p(\*i, У/),

i = 1 /к 1

**а для непрерывных величин—формулу**

оо оо

**Иху= j j *[x—M(X)][y — M(Y)]f(x, у) dx dy.***

**—** 00 **— оо**

176

**Корреляционный момент служит для характеристики связи между величинами X и У. Как будет показано ниже, корреляционный момент равен нулю, если X и У независимы; следовательно, если корреляционный момент не равен нулю, то X и У—зависимые случайные вели­чины.**

Замечание 1. Учитывая, что отклонения есть центрирован­ные случайные величины (см. гл. VIII, § 2), корреляционный момент можно определить как математическое ожидание произведения цент­рированных случайных величин:

цху = М **(ХУ].**

Замечание 2. Легко убедиться, что корреляционный момент можно записать в виде

цж„ = Л1 (XY) — М (X) М (Y).

**Теорема 1. *Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и* У *равен нулю.***

**Доказательство. Так как X и У — независимые случайные величины, то их отклонения X — М (X) и У — М (У) также независимы. Пользуясь свойствами ма­тематического ожидания (математическое ожидание про­изведения независимых случайных величин равно произ­ведению математических ожиданий сомножителей) и отклонения (математическое ожидание отклонения равно нулю), получим**

**цху = М ([X -М (X)] [У -М (У)]} =**

**= М[Х — M(X)]M[Y— М(У)] = 0.**

**Из определения корреляционного момента следует, что он имеет размерность, равную произведению размер­ностей величин X и У. Другими словами, величина корреляционного момента зависит от единиц измерения случайных величин. По этой причине для одних и тех же двух величин величина корреляционного момента имеет различные значения в зависимости от того, в каких еди­ницах были измерены величины.**

**Пусть, например, X и У были измерены в сантимет­рах и цху = 2 см2; если измерить X и У в миллиметрах, то ряу = 200 мм. Такая особенность корреляционного мо­мента является недостатком этой числовой характеристи­ки, поскольку сравнение корреляционных моментов различных систем случайных величин становится затруд­нительным. Для того чтобы устранить этот недостаток, вводят новую числовую характеристику—коэффициент корреляции.**

12 — 2730

177

**Коэффициентом корреляции гХу случайных величин X и У называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:**

***?ху ~ V'xyliPx^y)-* (\*)**

**Так как размерность р,ху равна произведению размер­ностей величин X и Y, ох имеет размерность величины X, оу имеет размерность величины К (см. гл. VIII, § 7), то гХу—безразмерная величина. Таким образом, величина коэффициента корреляции не зависит от выбора единиц измерения случайных величин. В этом состоит преиму­щество коэффициента корреляции перед корреляционным моментом.**

**Очевидно, коэффициент корреляции независимых слу­чайных величин равен нулю (так как р,ЛИ =** 0**).**

Замечание 3. Во многих вопросах теории вероятностей це­лесообразно вместо случайной величины X рассматривать нормиро­ванную случайную величину Х‘, которую определяют как отношение отклонения к среднему квадратическому отклонению:

***Х' = (Х-М(Х))/ах.***

Нормированная величина имеет математическое ожидание, равное нулю, и дисперсию, равную единице. Действительно, используя свойства математического ожидания и дисперсии, имеем:

М (Х')=М =^- М[Х — М(Х)] • 0 = 0;

*D(X') = D* *[\*-~М* (Х)1 *=-^D[X — M* (X)]=^£l=l.

L ах J oj

Легко убедиться, что коэффициент корреляции гху равен корре­ляционному моменту нормированных величин X' и Y :

*Г* \_***м М М*** Л1 [***Х*** *— М (X) Y* — *М* (У)1

ГхУ °х°у L <\*х Оу J-

= уИ(Х'У") = р^г.

**Теорема** 2**. *Абсолютная величина корреляционного мо­мента двух случайных величин X и Y не превышает сред­него геометрического их дисперсий:***

***\4xy\<VDxDy.***

**Доказательство. Введем в рассмотрение случай­ную величину Z1=oyX—oxY и найдем ее дисперсию D(Z1) = M[Zl—mZt]2. Выполнив выкладки, получим**

***D (Zt)* = *2o2xol—2oxoviKxy.***

178

**Любая дисперсия неотрицательна, поэтому** 2**a£aJ—2охаурху^** 0**.**

**Отсюда**

**И-ху < охау. (\*\*)**

**Введя случайную величину Z, = оуХ + охУ, аналогич­но найдем**

**<W (\*\*\*)**

**Объединим (\*\*) и (\*\*\*):**

**—охау < \\*,ху < ахау, (\*\*\*\*)**

**или**

**Итак,**

***v-xV<Vdxdv.***

**Теорема 3. *Абсолютная величина коэффициента кор­реляции не превышает единицы:***

**\гху |<**1**.**

**Доказательство: Разделим обе части двойного**

**неравенства (\*\*\*\*) на произведение положительных чисел**

***ахоу:***

— 1 1.

**Итак,**

**§ 18. Коррелированность н зависимость случайных величин**

**Две случайные величины X и У называют кор­релированными, если их корреляционный момент (или, что то же, коэффициент корреляции) отличен от нуля; X и Y называют некоррелированными величинами, если их корреляционный момент равен нулю.**

**Две коррелированные величины также и зависимы. Действительно, допустив противное, мы должны заклю­чить, что \иху=0, а это противоречит условию, так как для коррелированных величин \**1**хуф**0**.**

**Обратное предположение не всегда имеет место, т. е. если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Другими**

12\* 179

**словами, корреляционный момент двух зависимых вели-  
чин может быть не равен нулю, но может и равняться  
нулю.**

**Убедимся на примере, что две зависимые величины  
могут быть некоррелированными.**

Пример. Двумерная случайная величина (X, У) задана плот-  
ностью распределения:

М\*. У)= 1/6зт внутри эллипса х\*/9-\-у2/4= 1;

/(х, у)=0 вне этого эллипса.

Доказать, что X и У — зависимые некоррелированные величины.

Решение. Воспользуемся ранее вычисленными плотностями распределения составляющих X и У (см. § 12):

са и f1 (х) = 0, /2(у)= 0 вне его.

Так как f (х, у) ф f\(x) ft{y), то X и У — зависимые величины (см. § 16).

Для того чтобы доказать некоррелированность X и У, доста­точно убедиться в том, что рху = 0. Найдем корреляционный момент по формуле (см. § 17)

Поскольку функция fl (х) симметрична относительно оси Оу, то Л1(Х)=0; аналогично, М (У) =0 в силу симметрии /\_ (у) относи­тельно оси Ох. Следовагельно,

Выиося постоянный множитель /(\*, у) за знак интеграла, получим

Внутренний интеграл равен нулю (подынтегральная функция иечетиа, пределы интегрирования симметричны относительно начала коорди­нат), следовательно, \ixy = Q, т. е. зависимые случайные величины X и У некоррелированы.

**Итак, из коррелированное™ двух случайных величин следует их зависимость, но из зависимости еще не вы­текает коррелированность. Из независимости двух вели­чин следует их некоррелированность, но из некоррели­рованности еще нельзя заключить о независимости этих величин.**

2 **|**

^ ^ = 9п ^ 9 — \*1’ /2 (У)~2п Y 4~~У2 внутри заданного эллип-

И\*„= J J *lx-M(X))ly-M(y)]f(x, y)dxdy.*





180

**Заметим, однако, что из некоррелированности нор­мально распределенных величин вытекает их независи­мость. Это утверждение будет доказано в следующем параграфе.**

**§ 19. Нормальный закон распределения на плоскости**

**На практике часто встречаются двумерные слу­чайные величины, распределение которых нормально.**

**Нормальным законом распределения на плоскости на­зывают распределение вероятностей двумерной случайной величины (X, Y), если**

**f (\*. У) = Л r X**

**2пахоу V I — гхи 1 ги-п,)1 (р-п.)\* Х-a,** y-at**~|**

**Xе~** 2 **(1-г«) I °у\. С)**

**Мы видим, что нормальный закон на плоскости опре­деляется пятью параметрами: а,, аг, ох, оу и гХу. Можно доказать, что эти параметры имеют следующий вероят­ностный смысл: а,, а2 — математические ожидания, ох, оу — средние квадратические отклонения, гху — коэффици­ент корреляции величин X и Y.**

**Убедимся в том, что если составляющие двумерной нормально распределенной случайной величины некорре­лированны, то они и независимы. Действительно, пусть X и Y некоррелированны. Тогда, полагая в формуле (\*)гХу = 0, получим**

**f (х и)-^** 1 **с**~0,5 **[<-\*-ai>,/<J2+<i'-o.>7°2] =**

**I v » iff** 2ixo,o

1

***х”у***

**- \_ ■ e~u~e\*)\*/(«i) L\_ = t {x)f („ч**

***Ox yito oyVr2n***

**Таким образом, если составляющие нормально рас­пределенной случайной величины некоррелированны, то плотность совместного распределения системы равна произведению плотностей распределения составляющих, а отсюда и следует независимость составляющих (см. § 16). Справедливо и обратное утверждение (см. § 18).**

**Итак, для нормально распределенных составляющих двумерной случайной величины понятия независимости и некоррелированности равносильны.**

181

Замечание. Используя формулы (\*) н (\*\*) § 12, можно до\* казать, что если двумерная случайная величина распределена нор­мально с параметрами ах, аг, ах, оу, гху, то ее составляющие также распределены нормально с параметрами, соответственно равными в],

**вх Н Л|, Оу.**

§ 20. Линейная регрессия. Прямые линии среднеквадратической регрессии

**Рассмотрим двумерную случайную величину (X, У), где X и У—зависимые случайные величины. Пред­ставим одну из величин как функцию другой. Ограни­чимся приближенным представлением (точное приближе­ние, вообще говоря, невозможно) величины Y в виде линейной функции величины X:**

Y ~ g(x) = aX + P,

**где а и Р — параметры, подлежащие определению. Это можно сделать различными способами: наиболее употре­бительный из них—метод наименьших квадратов.**

**Функцию g(X) = aX-bP называют «наилучшим при­ближением» Y в смысле метода наименьших квадратов, если математическое ожидание M[Y—g(X)]\* принимает наименьшее возможное значение; функцию g(x) называют среднеквадратической регрессией Y на X.**

Теорема. ***Линейная средняя квадратическая регрессия Y на X имеет вид***

***g(X) = my + r^-(X — mx),***

***где тх — М* (X), *my = M(Y), ах = УЩХ), ay = V~D(Y), г — \ьху1(охау)—коэффициент корреляции величин X и Y.***

**Доказательство. Введем в рассмотрение функцию двух независимых аргументов аир:**

F (а, Р) = Л1 [У—а—РХ]8. (\*)

**Учитывая, что М (X**—**тх)—М (У**—**ту)** = **0**, **М [(X**—**тх)Х Х(У—ту)] = цху = га^у, и выполнив выкладки, получим**

F (a, Р) = о\* + P\*oJ—2го\*о„р + (my—ct—$mx)\

Исследуем функцию F(а, Р) на экстремум, для чего приравняем нулю частные производные:

= — 2 (ту—а—ртя) = 0,

4 *дР*

***~^ = 2$о%*—*2гохау = 0.***

182

Отсюда

\_ *Оу Gy*

**P=r—, a *= mv-r — mx.***

**Легко убедиться, что при этих значениях аир рассмат­риваемая функция принимает наименьшее значение.**

**Итак, линейная средняя квадратическая регрессия У и X имеет вид**

**g (X) = а + р X = ту - г тх + г X,**

**или**

**g(X) = mi, + r-g.(X-m\*).**

СТ„

**Коэффициент В — г — называют коэффициентом ре-**

***Ох***

***грессии Y на X,* а прямую**

***у—Щу — г -^(х*— *тх)* (\*\*)**

**называют *прямой среднеквадратической регрессии* У на X.**

**Подставив найденные значения а и р в соотношение (\*), получим минимальное значение функции F (а, Р), равное о£(1—г2). Величину о®( 1—г2) называют остаточной дис­персией случайной величины У относительно случайной величины X; она характеризует величину ошибки, кото­рую допускают при замене У линейной функцией g(X)— = а +** рх. **При r = ± 1 остаточная дисперсия равна нулю; другими словами, при этих крайних значениях коэффи- циента корреляции не возникает ошибки при представ­лении У в виде линейной функции от X.**

**Итак, если коэффициент корреляции г = ±1, то У и X связаны линейной функциональной зависимостью.**

**Аналогично можно получить прямую среднеквадрати­ческой регрессии X на У:**

***x—mx = r^(Y—mv)* (\*\*\*)**

**—коэффициент регрессии X на у| и остаточную**

**дисперсию о|(1—г2) величины X относительно У.**

**Если г = ±1, то обе прямые регрессии, как видно из (\*\*) и (\*\*\*), совпадают.**

**Из уравнений (\*\*) и (\*\*\*) следует, что обе прямые регрессии проходят через точку (тх\ ту), которую назы­вают центром совместного распределения величин X и У.**

183

§ 21. Линейная корреляция. Нормальная  
корреляция

**Рассмотрим двумерную случайную величину**

**(X, Y). Если обе функции регрессии Y на X и X на Y линейны (см. § 15), то говорят, что X и Y связаны ли­нейной корреляционной зависимостью. Очевидно, что гра­фики линейных функций регрессии — прямые линии, причем можно доказать, что они совпадают с прямыми средне­квадратической регрессии (см. § 20). Имеет место следу­ющая важная теорема.**

**Теорема. *Если двумерная случайная величина* (X, *Y) распределена нормально, то X и Y связаны линейной корреляционной зависимостью.***

**Доказательство. Двумерная плотность вероят­ности (см. § 19)**

**Плотность вероятности составляющей X (см. § 19, замечание)**

**Найдем функцию регрессии М (Е|х), для чего сначала найдем условный закон распределения величины Y при Х—х [см. § 14, формула (\*\*)]:**

**Подставив (\*) и (\*\*) в правую часть этой формулы и выполнив выкладки, имеем**

**Заменив и и v по формулам (\*\*), окончательно получим**



g-(u,+o,-»ruo)/(» (!-/•\*))^

**где**

***и = (х*—*аг)1ах, v = {y—at)/of.***







***Ъ(у\х) =***

**е**

1 **[<т\***

(о„ КТ=7\*) V 2д

184

**Полученное условное распределение нормально с ма­тематическим ожиданием (функцией регрессии Y на X)**

***M{Y\x) = a9+r ^{x—aj***

**UJC**

**и дисперсией aj(l—г3).**

**Аналогично можно получить функцию регрессии X на Y:**

***М(Х\у) = а1 + г^-(у—аг).***

**Так как обе функции регрессии линейны, то корре­ляция между величинами X и Y линейная, что и требо­валось доказать.**

**Принимая во внимание вероятностный смысл пара­метров двумерного нормального распределения (см. § 19), заключаем, что уравнения прямых регрессии**

***У—а,*** = r-^-(x—***at), x-at = r%z-(y—a%)***

**и\* UV**

**совпадают с уравнениями прямых среднеквадратической регрессии (см. §** 20**).**

Задачи

1. Найти законы распределения составляющих дискретной двумерной случайной величины, заданной законом распределения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | X |  |
| V |  |  |  |
|  |  | \*» | «1 |
| У1 | 0,12 | 0,18 | 0,10 |
| У1 | 0,10 | 0,11 | 0,39 |

Отв. X \*i х, ж, Y yt у%

р 0,22 0,29 0,49 р 0,40 0,60

1. Найти вероятность того, что составляющая X двумерной слу­чайной величины примет значение X < 1/2 и при этом составляю­щая У примет значение У < 1/3, если известна функция распреде­ления системы

Р(\*> y) = (-^arctg2r-fy^ ^JLarctg3p-fy^ .

Отв. Р(Х < 1/2, V < 1/3) =9/16.

1. Найти вероятность попадания случайной точки (X; К) в пря­моугольник, ограниченный прямыми х^л/4, х = я/2, у —п/6, у — л/3.

185

если известна функция распределения

F(х, у) = sin х sin у (0<х<я/2, 0<у< л/2).

Отв. Р (я/4 < X < я/2, к/6 < У < я/3) = 0,11,

1. Найти плотность распределения системы двух случайных ве­личии по известной функции распределения

F (\*. У) = (1 — е-'\*\*) (1 — е ■-:\*») (х 0, у ^ 0).

*Отв. f(x,*

1. Внутри прямоугольника, ограниченного прямыми х = 0, х = п/2, у = 0, у = я/2, плотность распределения системы двух слу­чайных величин /(х, у)=С sin (х + у); вне прямоугольника f (х,у)= 0. Найти: а) величину С; б) функцию распределения системы.

Отв. а) С=0,5; о) F(x, у) = 0,5 [sin x+sin у—sin (х + у)] (0<х<я/2, 0<у<я/2).

в. Система двух случайных величин распределена равномерно: в прямоугольнике, ограниченном прямыми х = 4, х = 6, у =10, у =15, функция / (х, у) сохраняет постоянное значение, а вне этого прямо­угольника она равна нулю. Найти: а) плотность f (х, у) совместного распределения; б) функцию распределения системы.

о- ■> /<\*• \*>={°о

**в) «>=■(\* |0>.**

1. Плотность совместного распределения системы двух случайных

***Q***

величин /(х, У)=^4\_|\_х,) (9^.у2) • Найти: а) величину С; б) функ­цию распределения системы.

Отв. а) С=6/я\*; б) F (х, у) = ( -i- arctg 4-1 ^ -i arctg |-+ -i-) .

1. Двумерная случайная величина задана плотностью совмест­ного распределения

/(х, у)rrz-LO-e-\*\*\*-"\*» л

Найти условные законы распределения составляющих.

2 -Гм+т») 3

Отв. ф (х| у)=-—е 4 7 ? ф (х | у)=-7=г е-(\*+\*J0 .

***уИ V*л**

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Глава пятнадцатая

ВЫБОРОЧНЫЙ МЕТОД

§ 1. Задачи математической статистики

**Установление закономерностей, которым подчи­нены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных — результатов наблюдений.**

**Первая задача математической статистики—указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате наблюдений или в результате специально поставленных экспериментов.**

**Вторая задача математической статистики — разрабо­тать методы анализа статистических данных в зависи­мости от целей исследования. Сюда относятся:**

**а) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависи­мости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и др.;**

**б) проверка статистических гипотез о виде неизвест­ного распределения или о величине параметров распре­деления, вид которого известен.**

**Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирование эксперимента), в ходе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие задачи. Современную математическую статистику определяют как науку о принятии решений в условиях неоп редел ен ности.**

**Итак, задача математической статистики состоит в со­здании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.**

187

§ 2. Краткая историческая справка

**Математическая статистика возникла (XVII в.) и развивалась параллельно с теорией вероятностей. Даль­нейшее развитие математической статистики (вторая по­ловина XIX — начало XX в.) обязано, в первую очередь, П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А. М. Ляпунову, а также К. Гауссу, А. Кетле, Ф. Гальтону, К. Пирсону и др.**

**В XX в. наиболее существенный вклад в математи­ческую статистику был сделан советскими математиками (В. И. Романовский, Е. Е. Слуцкий, А. Н. Колмогоров,**

**Н. В. Смирнов), а также английскими (Стьюдент, Р. Фи­шер, Э. Пирсон) и американскими (Ю. Нейман, А. Вальд) учеными.**

§ 3. Генеральная и выборочная совокупности

**Пусть требуется изучить совокупность однород­ных объектов относительно некоторого качествен­ного или количественного признака, характе­ризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным — контролируе­мый размер детали.**

**Иногда проводят сплошное обследование, т. е. обсле­дуют каждый из объектов совокупности относительно признака, которым интересуются. На практике, однако, сплошное обследование применяют сравнительно редко. Например, если совокупность содержит очень большое число объектов, то провести сплошное обследование фи­зически невозможно. Если обследование объекта связано с его уничтожением или требует больших материальных затрат, то проводить сплошное обследование практически не имеет смысла. В таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению.**

**Выборочной совокупностью или просто выборкой назы­вают совокупность случайно отобранных объектов.**

**Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.**

**Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности. Например, если из** 1000 **деталей отобрано для обследования** 100 **де-**

188

**талей, то объем генеральной совокупности # =** 1000**, а объем выборки п=**100**.**

Замечание. Часто генеральная совокупность содержит ко­нечное число объектов. Одиако если это число достаточно велико, то иногда в целях упрощения вычислений, или для облегчения теоре­тических выводов, Допускают, что генеральная совокупность состоит из бесчисленного множества объектов. Такое допущение оправды­вается тем, что увеличение объема генеральной совокупности (доста­точно большого объема) практически не сказывается на результатах обработки данных выборки.

§ 4. Повторная и бесповторная выборки.

Репрезентативная выборка

**При составлении выборки можно поступать двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии со сказанным выборки подразделяют на повторные и бес- повторные.**

**Повторной называют выборку, при которой отобран­ный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность.**

**Бесповторной называют выборку, при которой отобран­ный объект в генеральную совокупность не возвращается.**

**На практике обычно пользуются бесповторным слу­чайным отбором.**

**Для того чтобы по данным выборки можно было до­статочно уверенно судить об интересующем признаке генеральной совокупности, необходимо, чтобы объекты выборки правильно его представляли. Другими словами, выборка должна правильно представлять пропорции гене­ральной совокупности, с^го требование коротко формули­руют так: выборка должна быть репрезентативной (пред­ставительной ).**

**В силу закона больших чисел можно утверждать, что выборка будет репрезентативной, если ее осуществить случайно: каждый объект выборки отобран случайно из генеральной совокупности, если все объекты имеют оди­наковую вероятность попасть в выборку.**

**Если объем генеральной совокупности достаточно ве­лик, а выборка составляет лишь незначительную часть этой совокупности, то различие между повторной и бес­повторной выборками стирается; в предельном случае,**

189

**когда рассматривается бесконечная генеральная совокуп­ность, а выборка имеет конечный объем, это различие исчезает.**

**§ 5. Способы отбора**

**На практике применяются различные способы отбора. Принципиально эти способы можно подразделить на два вида:**

1. **Отбор, не требующий расчленения генеральной со­вокупности на части. Сюда относятся: а) простой слу­чайный бесповторный отбор; б) простой случайный по­вторный отбор.**
2. **Отбор, при котором генеральная совокупность раз­бивается на части. Сюда относятся: а) типический отбор; б) механический отбор; в) серийный отбор.**

**Простым случайным называют такой отбор, при ко­тором объекты извлекают по одному из всей генераль­ной совокупности. Осуществить простой отбор можно различными способами. Например, для извлечения п объ­ектов из генеральной совокупности объема N поступают так: выписывают номера от** 1 **до N на карточках, которые тщательно перемешивают, и наугад вынимают одну кар­точку; объект, имеющий одинаковый номер с извлеченной карточкой, подвергают обследованию; затем карточку возвращают в пачку и процесс повторяют, т. е. карточки перемешивают, наугад вынимают одну из них и т. д. Так поступают п раз; в итоге получают простую случайную повторную выборку объема ti.**

**Если извлеченные карточки не возвращать в пачку, то выборка является простой случайной бесповторной.**

**При большом объеме генеральной совокупности опи­санный процесс оказывается очень трудоемким. В этом случае пользуются готовыми таблицами «случайных чисел», в которых числа расположены в случайном порядке. Для того чтобы отобрать, например, 50 объектов из пронуме­рованной генеральной совокупности, открывают любую страницу таблицы случайных чисел и выписывают под­ряд 50 чисел; в выборку попадают те объекты, номера которых совпадают с выписанными случайными числами. Если бы оказалось, что случайное число таблицы пре­вышает число N, то такое случайное число пропускают. При осуществлении бесповторной выборки случайные числа таблицы, уже встречавшиеся ранее, следует также пропустить.**

190

**Типическим называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части. Например, если детали изготовляют на нескольких станках, то отбор производят не из всей совокупности деталей, произведенных всеми станками, а из продукции каждого станка в отдельности. Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности. Например, если про­дукция изготовляется на нескольких машинах, среди которых есть более и менее изношенные, то здесь типи­ческий отбор целесообразен.**

**Механическим называют отбор, при котором генераль­ную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект. Например, если нужно отобрать** 20**% изготовленных станком деталей, то отби­рают каждую пятую деталь; если требуется отобрать** 5**% деталей, то отбирают каждую двадцатую деталь, и т. д. Следует указать, что иногда механический отбор может не обеспечить репрезентативности выборки. Например, если отбирают каждый двадцатый обтачиваемый валик, причем сразу же после отбора производят замену резца, то отобранными окажутся все валики, обточенные затуплен­ными резцами. В таком случае следует устранить совпа­дение ритма отбора с ритмом замены резца, для чего надо отбирать, скажем, каждый десятый валик из двад­цати обточенных.**

**Серийным называют отбор, при котором объекты от­бирают из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследова­нию. Например, если изделия изготовляются большой группой станков-автоматов, то подвергают сплошному обследованию продукцию только нескольких станков. Серийным отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначитель­но.**

**Подчеркнем, что на практике часто применяется ком­бинированный отбор, при котором сочетаются указанные выше способы. Например, иногда разбивают генеральную совокупность на серии одинакового объема, затем простым случайным отбором выбирают несколько серий и, наконец, из каждой серии простым случайным отбором извлекают отдельные объекты.**

191

§ в. Статистическое распределение выборки

**Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем хх наблюдалось л, раз, х3—пг раз, хк—пк раз и 2 п/= п—объем выборки. Наблюдаемые значения х,- называют вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке,— вариа­ционным рядом. Числа наблюдений называют частотами, а их отношения к объему выборки rif/n — Wf**—**относи­тельными частотами.**

**Статистическим распределением выборки называют пе­речень вариант и соответствующих им частот или относи­тельных частот. Статистическое распределение можно за­дать также в виде последовательности интервалов и соответ­ствующих им частот (в качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот, попавших в этот интервал).**

**Заметим, что в теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математи­ческой статистике—соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.**

Пример. Задано распределение частот выборки объема п — 20:

**х/ 2 6 12**

щ 3 10 7

Написать распределение относительных частот.

**Решение. Найдем относительные частоты, для чего разделим** частоты на объем выборки:

1^ = 3/20=0.15, Wt =10/20 = 0,50, 1Г# = 7/20 = 0,35. Напишем распределение относительных частот:

X; 2 6 12

Wf 0,15 0,50 0,35

Контроль: 0,15-)-0,50-1-0,36=1.

**§ 7. Эмпирическая функция распределения**

**Пусть известно статистическое распределение ча­стот количественного признака X. Введем обозначения: пх—число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака, меньше\* х; п—общее число наблюдений (объем выборки). Ясно, что относительная частота события X < х равна пх/п. Если х изменяется, то, вообще говоря, из­меняется и относительная частота, т. е. относительная**

192

**частота пх/п есть функция от х. Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то ее называют эмпирической.**

**Эмпирической функцией распределения (функцией рас­пределения выборки) называют функцию F\* (х), опреде­ляющую для каждого значения х относительную частоту события X < х.**

**Итак, по определению,**

***F\** (*х) = пх/п*,**

**где пх—число вариант, меньших х; п — объем выборки.**

**Таким образом, для того чтобы найти, например, F\*(x2), надо число вариант, меньших х2, разделить на объем выборки:**

***F\* (x2) = nXi/n.***

**В отличие от эмпирической функции распределения выборки функцию распределения F (х) генеральной сово­купности называют теоретической функцией распределе­ния. Различие между эмпирической и теоретической функ­циями состоит в том, что теоретическая функция F (х) определяет вероятность события X < х, а эмпирическая функция F\*(x) определяет относительную частоту этого же события. Из теоремы Бернулли следует, что относи­тельная частота события X < х, т. е. F\* (х) стремится по вероятности к вероятности F (х) этого события. Другими словами, при больших п числа F\* (х) и F (х) мало отли­чаются одно от другого в том смысле, что lim P[|F(x)—**

П —► сю

**— F\* (х) | < е] = 1 (е > 0). Уже отсюда следует целесооб­разность использования эмпирической функции распреде­ления выборки для приближенного представления теоре­тической (интегральной) функции распределения гене­ральной совокупности.**

**Такое заключение подтверждается и тем, что F\* (х) обладает всеми свойствами F (х). Действительно, из опре­деления функции F\* (х) вытекают следующие ее свойства:**

1. **значения эмпирической функции принадлежат от­резку [**0**,** 1**];**
2. **F\* (х) — неубывающая функция;**
3. **если хг — наименьшая варианта, то F\*(x) =** 0 **при х^хг; если xk — наибольшая варианта, то F\* (х) = 1 при х>х\*.**

13 — 2730

193

**Итак, эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.**

Пример. Построить эмпирическую функцию по данному распре­делению выборки:

варианты х; частоты я,-

2

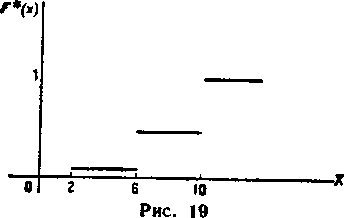
12

6

18

10

30



Решение. Найдем сбгеч выборки: 12 + 18 -)- 30 = 60.

Наименьшая варианта равна 2, следовательно,

F\*(x) = 0 при х<2.

Значение X < 6, а именно хх = 2, наблюдалось 12 раз, следовательно,

F\* (х) = 12/60 = 0,2 при 2 < х«£б.

Значения X < 10, а именно хх = 2 и х2 =

+ 18 = 30 раз, следовательно,

F\* (х) = 30/60 = 0,5 при 6 < х

Так как х=10—наибольшая варианта, то

F\* (х) = 1 при х > 10.

Искомая эмпирическая функция

1

/ 0 при х < 2,

0,2 при 2 < ха^б,

0,5 при 6 < х< 10,

1 при х > 10.

График этой функции изображен на рис. 19.

6, наблюдались 12 4-

: ю.

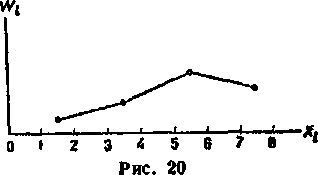
**§ 8. Полигон и гистограмма**

**Для наглядности строят различные графики ста­тистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.**

**Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (jcx; nj, (х2; п2), ..., (хк, пк). Для по­строения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты xit а на оси ординат—соответствующие им частоты п,. Точки (х,; «,) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот.**

**Полигоном относительных частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (хг; №г), (х2; ЦТ,), ...**

194



**(xk\ Wk). Для построения полигона относительных  
частот на оси абсцисс откладывают варианты xit а на  
оси ординат—соответствующие им относительные ча-  
стоты WТочки (х,-; W,) соединяют отрезками прямых**

**и получают полигон отно-  
сительных частот.**

**На рис. 20 изображен  
полигон относительных ча-  
стот следующего распре-  
деления:**

**X 1,5 3,5 5,5 7,5**

**W 0,1 0,2 0,4 0,3**

**В случае непрерывного признака целесо-  
образно строить гистограмму, для чего интервал, в ко-**

**тором заключены все наблюдаемые значения признака,  
разбивают на несколько частичных интервалов длиной h**

**и находят для каждого**

**it частичного интервала**

**пi—сумму частот вари-  
ант, попавших в t-й  
интервал.**

**Г истограммой ча-  
стот называют ступен-  
чатую фигуру, состоя-  
щую из прямоугольни-  
ков, основаниями кото-  
рых служат частичные  
интервалы длиною Л, а  
высоты равны отноше-  
нию rif/h (плотность ча-  
стоты).**

**Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии nrfh.**

**Площадь t-ro частичного прямоугольника равна /т//Л = п/—сумме частот вариант t-ro интервала; следо­вательно, площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки.**

**На рис. 21 изображена гистограмма частот распреде­ления объема п =** 100**, приведенного в табл.** 6**.**

**Гистограммой относительных частот называют сту­пенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, осно­ваниями которых служат частичные интервалы длиною h,**

**□L**

**ш**

**13 20 23 30 33 <0 Рнс. 21**

13\*

195

**а высоты равны отношению W;/h (плотность относитель­ной частоты).**

**Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над**

Таблица 6

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Частичный интервал длиною /1=5 | Сумма частот вариант частичного интер­вала П[ | Плотность частоты rtf/h |
| 5—10 | 4 | 0,8 |
| 10—15 | 6 | 1,2 |
| 15—20 | 16 | 3.2 |
| 20—25 | 36 | 7,2 |
| 25—30 | 24 | 4,8 |
| 30—35 | 10 | 2,0 |
| 35—40 | 4 | 0,8 |

**ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии W/lfi. Площадь /-го частичного прямоуголь­ника равна hWi/h—Wi — относительной частоте вариант, попавших в /-й интервал. Следовательно, площадь гисто­граммы относительных частот равна сумме всех отно­сительных частот, т. е. единице.**

Задачи

1. Построить график эмпирической функции распределения

Х( 5 7 10 15

л, 2 3 8 7

1. Построить полигоны частот и относительных частот распре­деления

х( I 3 5 7 9

п{ 10 15 30 33 12

1. Построить гистограммы частот н относительных частот рас­пределения (в первом столбце указан частичный интервал, во вто­ром— сумма частот вариант частичного интервала)

2—5 9

5—8 10

8—11 25

11—14 6

196

Глава шестнадцатая

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Статистические оценки параметров распределения

**Пусть требуется изучить количественный признак генеральной совокупности. Допустим, что из теоретичес­ких соображений удалось установить, какое именно рас­пределение имеет признак. Естественно возникает задача оценки параметров, которыми определяется это распреде­ление. Например, если наперед известно, что изучаемый признак распределен в генеральной совокупности нормаль­но, то необходимо оценить (приближенно найти) матема­тическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормаль­ное распределение; если же есть основания считать, что признак имеет, например, распределение Пуассона, то необходимо оценить параметр X, которым это распреде­ление определяется.**

**Обычно в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки, например значения количественного при­знака хх, х2, . . ., хп, полученные в результате п наблюде­ний (здесь и далее наблюдения предполагаются независимы­ми). Через эти данные и выражают оцениваемый параметр. Рассматривая х1г х2, .. ., хп как независимые случайные**

**величины Хх, Ха Х„, можно сказать, что найти**

**статистическую оценку неизвестного параметра теоретиче­ского распределения — это значит найти функцию от наблюдаемых случайных величин, которая и дает при­ближенное значение оцениваемого параметра. Например, как будет показано далее, для оценки математического ожидания нормального распределения служит функция (среднее арифметическое наблюдаемых значений признака)**

**Х = (Х**1 **+ Ха+...+Х„)/л.**

**Итак, статистической оценкой неизвестного пара­метра теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.**

197

**§ 2. Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки**

**Для того чтобы статистические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям. Ниже указаны эти требования.**

**Пусть в\*—статистическая оценка неизвестного пара­метра 0 теоретического распределения. Допустим, что по выборке объема п найдена оценка 0J. Повторим опыт, т. е. извлечем из генеральной совокупности другую вы­борку того же объема и по ее данным найдем оценку** 6**J. Повторяя опыт многократно, получим числа 01, 0J, ..., 0£, которые, вообще говоря, различны между собой. Таким образом, оценку** 0**\* можно рассматривать как случайную величину, а числа** 0**J,** 0**J, ...,** 0**\*—как ее возможные значения.**

**Представим себе, что оценка** 0**\* дает приближенное значение** 0 **с избытком; тогда каждое найденное по дан­ным выборок число** 0**\* (i —** 1**,** 2**, ..., k) больше истинного значения** 0**. Ясно, что в этом случае и математическое ожидание (среднее значение) случайной величины** 0**\* боль­ше, чем** 0**, т. е. М (**0**\*) > 0. Очевидно, что если** 0**\* дает оценку с недостатком, то М (0\*) < 0.**

**Таким образом, использование статистической оценки, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру, привело бы к систематическим •’ (одного знака) ошибкам. По этой причине естественно потребовать, чтобы математическое ожидание оценки** 0**\* было равно оценива­емому параметру. Хотя соблюдение этого требования не устранит ошибок (одни значения** 0**\* больше, а другие меньше** 0**), однако ошибки разных знаков будут встречать­ся одинаково часто. Иными словами, соблюдение требова­ний М (0\*) = 0 гарантирует от получения систематических ошибок.**

**Несмещенной называют статистическую оценку 0\*, мате­матическое ожидание которой равно оцениваемому пара­метру** 0 **при любом объеме выборки, т. е.**

**М (0\*) = 0.**

\*> В теории ошибок измерений систематическими ошибками назы­вают неслучайные ошибки, искажающие результаты измерений в одну определенную сторону Например, измерение длины растянутой рулет­кой систематически дает заниженные результаты.

198

**Смененной называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.**

**Однако было бы ошибочным считать, что несмещенная оценка всегда дает хорошее приближение оцениваемого параметра. Действительно, возможные значения 0\* могут быть сильно рассеяны вокруг своего среднего значения, т е. дисперсия D (&\*) может быть значительной. В этом случае найденная по данным одной выборки оценка, на­пример** 0**J, может оказаться весьма удаленной от среднего значения** 0**\*, а значит, и от самого оцениваемого пара­метра** 0**; приняв** 0**J в качестве приближенного значения** 0**, мы допустили бы большую ошибку. Если же потребовать, чтобы дисперсия** 0**\* была малой, то возможность допустить большую ошибку будет исключена. По этой причине к статистической оценке предъявляется требование эффек­тивности.**

**Эффективной называют статистическую оценку, которая (при заданном объеме выборки п) имеет наименьшую воз­можную дисперсию.**

**При рассмотрении выборок большого объема (п вели­ко!) к статистическим оценкам предъявляется требование состоятельности.**

**Состоятельной называют статистическую оценку, кото­рая при п—\*-оо стремится по вероятности к оцениваемому параметру. Например, если дисперсия несмещенной оценки при п—\*-оо стремится к нулю, то такая оценка оказы­вается и состоятельной.**

**§ 3. Генеральная средняя**

**Пусть изучается дискретная генеральная совокуп­ность относительно количественного признака X.**

**Генеральной средней хг называют среднее арифметичес­кое значений признака генеральной совокупности.**

**Если все значения xlt xt, ..., х^ признака генераль­ной совокупности объема N различны, то**

\*г = (\*1 + \*\*+•■■ + xn)/N.

**Если же значения признака хх, хъ xk имеют**

**соответственно частоты Nlt ..., N k, причем -f -f- N** 2 **-j- .. . \*)-• N k — N, to**

**xT = +лгаЛГ, + . .. +xkNk)/N,**

199

**т. е. генеральная средняя есть средняя взвешенная зна­чений признака с весами, равными соответствующим ча­стотам.**

Замечание. Пусть генеральная совокупность объема N со­держит объекты с различными значениями признака X, равными

xlt х2 x/f. Представим себе, что из этой совокупности наудачу

извлекается один объект. Вероятность того, что будет извлечен объект со значением признака, например хи очевидно, равна 1/N. С этой же вероятностью может быть извлечен и любой другой объект. Таким образом, величину признака X можно рассматривать как случайную величину, возможные значения которой xlt х2 хп имеют одина­ковые вероятности, равные 1/N. Найдем математическое ожидание М(Х):

М (.X) = 1 /iV 4~ х2 • 1 /N -f- ... хдг\* 1/N — (л^! —|— дг2 —|— ... 4~ дед')/N — хг.

Итак, если рассматривать обследуемый признак X генеральной совокупности как случайную величину, то математическое ожидание признака равно генеральной средней этого признака:

**М (X) =7Г.**

Этот вывод мы получили, считая, что все объекты генеральной совокупности имеют различные значения признака. Такой же итог будет получен, если допустить, что генеральная совокупность содер­жит по нескольку объектов с одинаковым значением признака.

Обобщая полученный результат на генеральную совокупность с непрерывным распределением признака X, и в этом случае опре­делим генеральную среднюю как математическое ожидание признака:

7Г = /И (X).

§ 4. Выборочная средняя

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака **X** извлечена вы­борка объема **п.**

**Выборочной средней хв** называют среднее арифмети­ческое значение признака выборочной совокупности.

Если все значения **xlf х2,** **...,** **хп** признака выборки объема **п** различны, то

**Хв** = (\*1 + **х2** + . . - + **хп)/п.**

Если же значения признака **xt, х2,** . .., **xk** имеют соот­ветственно частоты **nlt п2, пк,** причем **п1 + п2 + ...** ... + **nk = п,** то

**хв** = (ПЛ 4- **п2х2** **4-...** + л\*\*\*)/«,

или

200

**т. е. выборочная средняя есть средняя взвешенная зна­чений признака с весами, равными соответствующим ча­стотам.**

Замечание. Выборочная средняя, найденная по данным одной выборки, есть, очевидно, определенное число. Если же извлекать другие выборки того же объема из той же генеральной совокупности, то выборочная средняя будет изменяться от выборки к выборке. Таким образом, выборочную среднюю можно рассматривать как слу­чайную величину, а следовательно, можно говорить о распределениях (теоретическом и эмпирическом) выборочной средней и о числовых характеристиках этого распределения (его называют выборочным), в частности о математическом ожидании и дисперсии выборочного распределения.

**Заметим, что в теоретических рассуждениях выборочные значения xlt х2, ..., х„ признака X, полученные в итоге независимых наблюдений, также рассматривают как слу­чайные величины Хг, Х2, . . ., Хп, имеющие то же распре­деление и, следовательно, те же числовые характеристики, которые имеют X.**

**§ 5. Оценка генеральной средней по выборочной средней. Устойчивость выборочных средних**

**Пусть из генеральной совокупности (в резуль­тате независимых наблюдений над количественным при­знаком X) извлечена повторная выборка объема п со значениями признака xlt х2, . .., хп. Не уменьшая общ­ности рассуждений, будем считать эти значения признака различными. Пусть генеральная средняя хг неизвестна и требуется оценить ее по данным выборки. В каче­стве оценки генеральной средней принимают выборочную среднюю**

\*B = (\*i + \*2 + • • • +Х„)/П.

**Убедимся, что хв— несмещенная оценка, т. е. покажем, что математическое ожидание этой оценки равно хг. Будем рассматривать хв как случайную величину и xlt х2, . . ., хп как независимые, одинаково распределенные случайные величины Х1г Х2, ..., Хп. Поскольку эти величины оди­наково распределены, то они имеют одинаковые числовые характеристики, в частности одинаковое математическое ожидание, которое обозначим через а. Так как матема­тическое ожидание среднего арифметического одинаково распределенных случайных величин равно математичес-**

201

**кому ожиданию каждой из величин (см. гл. VIII, § 9), то М(Х.) = М[(Х**1 **+ Х,+ ...+Хп)/п] = а (\*)**

**Приняв во внимание, что каждая из величин Хх, Х2, . . . ..., Хп имеет то же распределение, что и генеральная совокупность (которую мы также рассматриваем как слу­чайную величину), заключаем, что и числовые характе­ристики этих величин и генеральной совокупности оди­наковы. В частности, математическсе ожидание а каждой из величин равно математическому ожиданию признака X генеральной совокупности, т. е.**

***М (Х) = хг \*=а.***

**Заменив в формуле (\*) математическое ожидание а на хт, окончательно получим**

**М (Хв) = хг.**

**Тем самым доказано, что выборочная средняя есть не­смещенная оценка генеральной средней.**

**Легко показать, что выборочная средняя является и состоятельной оценкой генеральной средней. Действи­тельно, допуская, что случайные величины Xlf Х2, ..., Хп имеют ограниченные дисперсии, мы вправе применить к этим величинам теорему Чебышева (частный случай), в силу которой при увеличении п среднее арифметическое рассматриваемых величин, т. е. Хь, стремится по веро­ятности к математическому ожиданию а каждой из вели­чин, или, что то же, к генеральной средней хг (так как хг = а).**

**Итак, при увеличении объема выборки п выборочная средняя стремится по вероятности к генеральной средней, а это и означает, что выборочная средняя есть состоятель­ная оценка генеральной средней. Из сказанного следует также, что если по нескольким выборкам достаточно боль­шого объема из одной и той же генеральной совокупности будут найдены выборочные средние, то они будут при­ближенно равны между собой. В этом и состоит свойство устойчивости выборочных средних.**

**Заметим, что если дисперсии двух одинаково распре­деленных совокупностей равны между собой, то близость выборочных средних к генеральным не зависит от отно­шения объема выборки к объему генеральной совокуп­ности. Она зависит от объема выборки: чем объем выборки**

202

**больше, тем меньше выборочная средняя отличается от генеральной. Например, если из одной совокупности ото­бран** 1 **% объектов, а из другой совокупности отобрано 4% объектов, причем объем первой выборки оказался большим, чем второй, то первая выборочная средняя бу­дет меньше отличаться от соответствующей генеральной средней, чем вторая.**

Замечание. Мы предполагали выборку повторной. Однако полученные выводы применимы и Для бесповторной выборки, если ее объем значительно меньше объема генеральной совокупности. Это по­ложение часто используется на практике.

**§ в. Групповая и общая средние**

**Допустим, что все значения количественного при­знака X совокупности, безразлично-генеральной или вы­борочной, разбиты на несколько групп. Рассматривая каждую группу как самостоятельную совокупность, можно найти ее среднюю арифметическую.**

**Групповой средней называют среднее арифметическое значений признака, принадлежащих группе.**

**Теперь целесообразно ввести специальный термин для средней всей совокупности.**

**Общей средней х называют среднее арифметическое значений признака, принадлежащих всей совокупности.**

**Зная групповые средние и объемы групп, можно найти общую среднюю: *общая средняя равна средней арифмети­ческой групповых средних*, *взвешенной по объемам групп.***

**Опуская доказательство, приведем иллюстрирующий пример.**

Пример. Найти общую среднюю совокупности, состоящей из сле­дующих двух групп:

Группа первая вторая

Значение признака ... I 6 1 5

Частота 10 15 20 30

Объем 10+15 = 25 20 + 30 = 50

Решение. Найдем групповые средние:

"х1 = (10-1 + 15• 6)/25 = 4; х, = (20-1 + 30-5)/50 = 3,4.

Найдем общую среднюю по групповым средним: х = (25 • 4 + 50 • 3,4)/(25 + 50) = 3,6.

Замечание. Для упрощения расчета общей средней совокуп­ности большого обг ема целесообразно разбить ее на несколько групп, найгн групповые средние и по ним общую среднюю.

203

§ 7. Отклонение от общей средней и его свойство

**Рассмотрим совокупность, безразлично — гене­ральную или выборочную, значений количественного при­знака X объема п:**

**значения признака . . . . х2 ... хк частоты ni** п2 **• • • nk**

***к***

**При этом** 2 **п, = п. Далее для удобства записи знак сум-**

i = i

***к***

**мы** 2 **заменен знаком** 2-

**i = i**

**Найдем общую среднюю:**

*х* ^ (2 *n,Xt)/n.*

**Отсюда**

2 **п,(\*)**

**Заметим, что поскольку х — постоянная величина, то**

2 ***п,х* =** \*2 ***п, — пх.* (\*\*)**

**Отклонением называют разность х, — х между значе­нием признака и общей средней.**

**Теорема. *Сумма произведений отклонений на соответ­ствующие частоты равна нулю:***

2 ***п, (х, — х) = 0.***

**Доказательство. Учитывая (\*) и (\*\*), получим**

2«, (\*i—\*) = 2niXi — 2П1\*==ПЛ: — пх = 0.

**Следствие. *Среднее значение отклонения равно нулю.* Действительно,**

(2 ni (х>-—\*))/22 п<= °/п = °- Пример. Дано распределение количественного признака X’. х, 12 3

п, 10 4 6

Убедиться, что сумма произведений отклонений иа соответствующие частоты равна нулю.

Р е in е и н е. Найдем общую среднюю:

х=(10-1+4-2 + 6.3)/20=1,8.

Найдем сумму произведений отклонений на соответствующие частоты-

2«i (\*< — х) = Ю(1 — 1,8)+ 4 (2— 1,8)+ 6(3— 1,8) =8 — 8 = 0.

204

§ 8. Генеральная дисперсия

**Для того чтобы охарактеризовать рассеяние зна­чений количественного признака X генеральной совокуп­ности вокруг своего среднего значения, вводят сводную характеристику — генеральную дисперсию.**

**Генеральной дисперсией Dr называют среднее арифме­тическое квадратов отклонений значений признака гене­ральной совокупности от их среднего значения хг.**

**Если все значения лгх л:а, .. ., xN признака генеральной**

**совокупности объема N различны, то**

Dr=(Jj ***(x.-x^Jn.***

**Если же значения признака xlt хг, ..., хк имеют**

**соответственно частоты Nt, Na JVft, причем +**

**+ ЛГа + ... + Nk = N, то**

**Д.==(£** л^\*,-\*г)2)/лг,

**т. е. генеральная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствую­щим частотам.**

Пример. Генеральная совокупность задана таблицей распреде­ления

Xi 2 4 5 6

Ni 8 9 10 3

Найти генеральную дисперсию.

Решение. Найдем генеральную среднюю (см. § 3):

- 8-2 + 9-4+10-5 + 36 120 8 + 9+104-3 30

Найдем генеральную дисперсию;

Dr= 8.(2--4)» + 9.(4-4)»tl0^--4)» + 3^6-4)l =54/3Q = , >g

**uU**

**Кроме дисперсии для характеристики рассеяния зна­чений признака генеральной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой— средним квадратическим отклонением.**

***Генеральным, средним квадратическим отклонением (стандартом)* называют квадратный корень из генераль­ной дисперсии:**

or = KDr.

205

§ 9. Выборочная дисперсия

**Для того чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения хв, вводят сводную характе­ристику— выборочную дисперсию.**

**Выборочной дисперсией DB называют среднее арифме­тическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения хв.**

**Если все значения х1г х2, ..х„ признака выборки объема п различны, то**

**Если же значения признака хг, х2, ..., хк имеют со­ответственно частоты пи п2, ..., пк, причем nt + n2 + ..,**

**... *+пк = п,* то**

***DB* = *nt (xt—x^jn,***

**т. e. выборочная дисперсия есть средняя взвешенная**

**квадратов отклонений с весами, равными соответствую­щим частотам.**

Пример. Выборочная совокупность задана таблицей распре­деления

xt 1 2 3 4

п, 20 15 10 5

Найти выборочную дисперсию.

Решение. Найдем выборочную среднюю (см. § 4):

- 20-1 + 15-2+10-3 + 5.4 100 „

Х\* 20+15+10 + 5 50

Найдем выборочную дисперсию:

„ 20(1—2)»+ 15-(2—2)»+ 10(3 —2)»+5-(4—2)»

в 50

= 50/50=1.

**Кроме дисперсии для характеристики рассеяния зна­чений признака выборочной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристи­кой— средним квадратическим отклонением.**

***Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом)* называют квадратный корень из выбороч­ной дисперсии:**

oB = VDB.

206

§ 10. Формула для вычисления дисперсии

**Вычисление дисперсии, безразлично—выборочной или генеральной, можно упростить, используя следую­щую теорему.**

**Теорема. *Дисперсия равна среднему квадратов значений признака минус квадрат общей средней:***

**D= х**2**—[х]2.**

**Доказательство. Справедливость теоремы выте­кает из преобразований:**

D —х)2 \_ 2] n, (xf—2xjx + [x]2) ^

***n n***

**= —2x — + [x**]2 **= x**2 **— 2x • x + [jtf**]2 **=■**

= \*2— [x]2.

**Итак,**

**D = xs—[x]2,**

**где \*=■ (**2**rt/\*/)/rt- \*a = (**2**n<x?)/rt-**

Пример. Найти дисперсию по данному распределению xi 1 2 3 4

п/ 20 15 10 5

Решение. Найдем общую среднюю:

20-1 + 15 2+ 10-3 + 5.4 100 п

Х 204-15+Ю + 5 — 50

Найдем среднюю квадратов значений признака

\*5.

-2 20 -12+ 15-22+10-32 + 5-42

50

Искомая дисперсия

D = х2 — [х]2 = 5 — 22 = 1.

**§ 11. Групповая, внутригрупповая, межгрупповая и общая дисперсии**

**Допустим, что все значения количественного признака X совокупности, безразлично—генеральной или выборочной, разбиты на k групп. Рассматривая каждую группу как самостоятельную совокупность, можно найти групповую среднюю (см. §** 6**) и дисперсию значений при­**

207

**знака, принадлежащих группе, относительно групповой средней.**

**Групповой дисперсией называют дисперсию значений признака, принадлежащих группе, относительно группо­вой средней**

°/гр = (2 п i (xi—Xj)2)/NJ,

**где п{ — частота значения х,-; /— номер группы; Xj — груп­повая средняя группы /; Nj = '£ini— объем группы /.**

Пример 1. Найти групповые дисперсии совокупности, состоящей яз следующих двух групп:

Первая группа Вторая группа

Xi щ Xi tii

2 1 3 2

1. 7 8 3
2. 2

jVi = 2«,-=1° Лга = 2]я<= 5

Решение. Найдем групповые средние:

\*i = (EittiXi= (II • 2 + 7■ 4 + 2■ 5)/10 = 4; x2=(2-3 + 3.8)/5 = 6.

Найдем искомые групповые дисперсии:

**Dirp =** (2 ***nt (\*i — \*i)2VNi* =**

= (1.(2 —4)2 + 7.(4 —4)a + 2-(5—4)2)/l0 = 0,6;

Darp = (2 • (3 — 6)2 + 3 • (8 — 6)2)/5 = 6.

**Зная дисперсию каждой группы, можно найти их среднюю арифметическую.**

**Внутригрупповой дисперсией называют среднюю ариф­метическую дисперсий, взвешенную по объемам групп:**

**^внгр =**

***(2NjDjn)/n,***

**■ k**

**где Nj — объем группы /; п =** 2 **Nj — объем всей сово-**

**/=** 1

**купности.**

Пример 2. Найти внутригрупповую дисперсию по данным при­мера 1.

Решение. Искомая внутригрупповая дисперсия равна Оннгр = (A7i Dlrp + /VaDarp)/n = (10 • 0,6 4- 5 • 6)/15 = 12/5.

**Зная групповые средние и общую среднюю, можно найти дисперсию групповых средних относительно общей средней.**

208

**Межгрупповой дисперсией называют дисперсию груп-  
повых средних относительно общей средней:**

**^межгр ~ (2 ^/ fa/ х)3)/п>  
где Xj—групповая средняя группы /; Ny— объем группы /;**

***k***

**х — общая средняя; n — ^Ny — объем всей совокупности.**

**/=** 1

Пример 3. Найти межгруппсвую дисперсию по данным при-  
мера 1.

Решение. Найдем общую среднюю:

- 2"'х'' 1-2 + 7.4 + 2.5 + 2.3 + 3.8 14

**\*** 15 **\_ з •**

Используя вычисленные выше величины x1 — At х2 = 6, найдем  
искомую межгрупповую дисперсию:

**Ni (^! — дс)а + Л^з (ха—\*)\*\_\_\_**

А

межгр•

***П***

10.(4— 14/3)2 + 5-(6— 14/3)2 8  
15 ~ 9 ‘

**Теперь целесообразно ввести специальный термин для  
дисперсии всей совокупности.**

**Обирй дисперсией называют дисперсию значений при-  
знака всей совокупности относительно общей средней:**

**А,бщ =** (2 **ni (\*.—\*)**2**)/я.**

**где П; — частота значения х,-; х — общая средняя; п — объем  
всей совокупности.**

Пример 4. Найти сбщую дисперсию по данным примера I.  
Решение. Найдем искомую общую дисперсию, учитывая, что  
общая средняя равна 14/3:

1(2— 14/3)2 + 7-(4— I4/3)2 + 2-(5— 14/3)\* ,

**А>бщ —**

15 1

2.(3—14/3)\*+3-(8—14/3)\* 148

+ 15 ~ 45 ■

Замечание. Найденная общая дисперсия равна сумме внутри­групповой и межгрупповой дисперсий:

Т^общ == 148/45;

^внгр + ТЭмежгр— 12/5 + 8/9= 148/45.

В следующем параграфе будет доказано, что такая закономерность справедлива для любой совокупности.

14 — 2730 209

§ 12. Сложение дисперсий

**Теорема. *Если совокупность состоит из несколь­ких групп*, *то общая дисперсия равна сумме внутригруп­повой и межгрупповой дисперсий:***

^общ “ ^внгр ”Ь" ^межгр-

**Доказательство. Для упрощения доказательства предположим, что вся совокупность значений количест­венного признака X разбита на две следующие группы:**

**Группа первая вторая**

**Значение признака . . . хг х**2 **хх ха**

**Частота тг т, пг п,**

**Объем группы *N1 — ml + m3 Na = n1 + ni***

**Групповая средняя . . . хх ха**

**Групповая дисперсия . . D^.р £>агр**

**Объем своей совокупности п = Nt-{- Na**

2

**Далее для удобства записи вместо знака суммы 2**

***i=i***

2

**пишется знак 2\* Например, *У\т{= '£lmi = mt + ma = Nt.***

***i=i***

**Следует также иметь в виду, что если под знаком суммы стоит постоянная величина, то ее целесообразно выносить за знак суммы. Например, 2Ш/(Л:i—\*)\*= = (Xj — х**)22 **Щ = (\*i—х)2 N%.**

**Найдем общую дисперсию:**

***Оо6щ* =** (2 ***mi {Xi—xy* +** 2 ***tii (х,—х)\*)/п.* (\*)**

**Преобразуем первое слагаемое числителя, вычтя и при­бавив xt:**

2 **т{ {Х{—х**)2 **=** 2 **Щ [(х (— хг) + —х**)]2 **==\_**

= 2 **mi (Xi—x**х)2 + 2 **(хх** — **х)** 2**(Х(—х**j) + 2m/(\*i — **x)2.**

**Так как**

2**^**1**, (ЛГ, —^i)\* = ^Arp**

**(равенство следует из соотношения £>1гр= (**2**m/(\*/—\*i)\*)/Wi) и в силу § 7**

2 **mi (х« — \*i) — °.**

210

**то первое слагаемое принимает вид**

**2^,- (х,— xj\* = NxDlr р + N1 (xt — х)\*. (\*\*)**

**Аналогично можно представить второе слагаемое чи­слителя (\*) (вычтя и прибавив х2):**

2**М\*/—\*)■ = WaDarp-f-JVa(xa— х)\*. (\*\*\*)**

**Подставим (\*\*) и (\*\*\*) в (\*):**

^общ ~ (^l^irp +^а^2гр)/^ +

**+ {Nx (хг — х)г + JVa (деа — х)\* )/n = DB„rр + DMelKrv.**

**Итак,**

^общ “ ^ввгр "4" ^межгр\*

**Пример, иллюстрирующий доказанную теорему, приведен в предыдущем параграфе.**

Замечание. Теорема имеет не только теоретическое, но и важнее практическое значение. Например, если в результате наблю­дений получены несколько групп значений признака, то для вычис­ления общей дисперсии можно группы в единую совокупность не объединять. С другой стороны, если совокупность имеет большой объем, то целесообразно разбить ее на несколько трупп. В том и другом случаях непосредственное вычисление ебщей дисперсии заме­няется вычислением дисперсий отдельных групп, что облегчает рас­четы.

§ 13. Оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной

**Пусть из генеральной совокупности в резуль­тате п независимых наблюдений над количественным при­знаком X извлечена повторная выборка объема п:**

**значения признака хх ха ... хк**

**частоты пх пг ... пк**

**При этом *п1-\-пл +* ... *+пк = п.***

**Требуется по данным выборки оценить (приближенно найти) неизвестную генеральную дисперсию Ьг. Если в ка­честве оценки генеральной дисперсии принять выборочную дисперсию, то эта оценка будет приводить к систематиче­ским ошибкам, давая заниженное значение генеральной дисперсии. Объясняется это тем, что, как можно дока­зать, выборочная дисперсия является смещенной оценкой DT, другими словами, математическое ожидание выбороч­ной дисперсии не равно оцениваемой генеральной дис-**

14\* 211

персии, а равно

**М[**0**.] = ^**0**,.**

**Легко «исправить» выборочную дисперсию так, чтобы ее математическое ожидание было равно генеральной дисперсии. Достаточно для этого умножить DB на дробь п/(п—1). Сделав это, получим исправленную дисперсию, которую обычно обозначают через sa:**

***k \_ k \_***

2 л/ (\*/ —Хв)2 2 *ni (\*i ~Х\*У* ***S2-\_H\_n - n i = l* *-Lzl***

a n — I ° ft — | n — ft — I

**Исправленная дисперсия является, конечно, несме­щенной оценкой генеральной дисперсии. Действительно,**

**Л1И = М D,] \_ М [DJ = ^ D, = D,.**

**Итак, в качестве оценки генеральной дисперсии при­нимают исправленную дисперсию**

**sa = (** ,2 **ni (\*/—\*■)\*)/(«— \*)•**

**Для оценки же среднего квадратического отклонения генеральной совокупности используют «исправленное» среднее квадратическое отклонение, которое равно квад­ратному корню из исправленной дисперсии:**

**S = ]/" ■£)■)/(«—О-**

**Подчеркнем, что s не является несмещенной оценкой; чтобы отразить этот факт, мы написали и будем писать далее так: «исправленное» среднее квадратическое откло­нение.**

Замечание. Сравнивая формулы

DB (2 nl (xi —\*в)а)/« и sa ==(2 л/ (.\*/ —\*)а)/(л — 1),

видим, что они отличаются лишь знаменателями. Очевидно, при достаточно больших значениях п объема выборки выборочная и исправ­ленная дисперсии различаются мало. На, практике пользуются исправ­ленной дисперсией, если примерно л < 30.

212

**§ 14. Точность оценки, доверительная вероятность (надежность). Доверительный интервал**

**Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Все оценки, рассмотренные выше,— точечные. При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т. е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объеме выборки следует пользоваться интер­вальными оценками.**

**Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок (смысл этих понятий выясняется ниже).**

**Пусть найденная по данным выборки статистическая характеристика** 0**\* служит оценкой неизвестного пара­метра 0. Будем считать 0 постоянным числом (0 может быть и случайной величиной). Ясно, что** 0**\* тем точнее определяет параметр** 0**, чем меньше абсолютная величина разности |**0**—**0**\* |. Другими словами, если б>0 и [0 — 0\*| < б, то чем меньше б, тем оценка точнее. Таким образом, положительное число б характеризует точность оценки.**

**Однако статистические методы не позволяют катего­рически утверждать, что оценка** 0**\* удовлетворяет нера­венству J0—0\* | < б; можно лишь говорить о вероят­ности у, с которой это неравенство осуществляется.**

**Надежностью (доверительной вероятностью) оценки** 0 **по** 0**\* называют вероятность у, с которой осуществ­ляется неравенство |0 — 0\* | < б. Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве у берут число, близкое к единице. Наиболее часто задают надеж­ность, равную 0,95; 0,99 и 0,999.**

**Пусть вероятность того, что |0—**0**\*|<**6**, равна ys**

**Р[|**0**—**0**\*| < б]==у.**

**Заменив неравенство | 0—**0**\* | < б равносильным ему двой­ным неравенством —** 6**<**0**—**0**\*<б, или** 0**\* — б <** 0 **< <**0**\* + б, имеем**

**Р [0\* — б <0<0\* + б] =** 7**- Это соотношение следует понимать так: вероятность того, что интервал (**0**\* — б,** 0**\* + б) заключает в себе (покры­вает) неизвестный параметр** 0**, равна у.**

213

**Доверительным называют интервал (**0**\* — б,** 0**\* +** 6**), который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью у.**

Замечание. Интервал (0\* — б, 0\*-|-б) имеет случайные концы (их называют доверительными границами). Действительно, в разных выборках получаются различные значения 0\*. Следова­тельно, от выборки к выборке будут изменяться н концы довери­тельного интервала, т. е. доверительные границы сами являются случайными величинами—функциями от хх, х2 хп.

Так как случайной величиной является не оцениваемый пара­метр 0, а доверительный интервал, то более правильно говорить не о вероятности попадания 0 в доверительный интервал, а о вероят­ности того, что доверительный интервал покроет 0.

**Метод доверительных интервалов разработал амери­канский статистик Ю. Нейман, исходя из идей англий­ского статистика Р. Фишера.**

§ 15. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном о

**Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение о этого распределения известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание а по выборочной средней х. Поставим своей задачей найти доверительные интервалы, покрывающие параметр а с надежностью у.**

**Будем рассматривать выборочную среднюю х как слу­чайную величину X (х изменяется от выборки к выборке) и выборочные значения признака хг, хя, ..., хп — как одинаково распределенные независимые случайные вели­чины Хх, Хя, ...,Х„ (эти числа также изменяются от выборки к выборке). Другими словами, математическое ожидание каждой из этих величин равно а и среднее квадратическое отклонение—а.**

**Примем без доказательства, что если случайная вели­чина X распределена нормально, то выборочная средняя 3(, найденная по независимым наблюдениям, также рас­пределена нормально. Параметры распределения X таковы (см. гл. VIII, § 9):**

**М (X) = а, о(Х) = о/уТ.**

214

**Потребуем, чтобы выполнялось соотношение Р(\Х-а\ <**6**) = Y,**

**где у — заданная надежность.**

**Пользуясь формулой (см. гл. XII, §** 6**)**

**Р(|Х —д| < б) = 2Ф (б/о), заменив X на X и о на о (X) = ofr^n, получим Р (| X — а | < б) = 2Ф (б Vnjo ) = 2Ф (/),**

**где *t = bVn I*о.**

**Найдя из последнего равенства б = ta[V^п , можем на­писать**

**Р (| Х—а | < to!VT) = 2Ф (О-**

**Приняв во внимание, что вероятность Р задана и равна у. окончательно имеем (чтобы получить рабочую**

**формулу, выборочную среднюю вновь обозначим через х) Р (х— tolY~n < а < х + toj]/~n) — 2Ф (t)—y.**

**Смысл полученного соотношения таков: с надежностью** Y **можно утверждать, что доверительный интервал (х—tafVn , x + fo/V^i ) покрывает неизвестный параметр а; точность оценки б = £а/|/я.**

**Итак, поставленная выше задача полностью решена. Укажем еще, что число t определяется из равенства 2Ф(/) = у. или Ф(0— 7/2; по таблице функции Лапласа (см. приложение** 2**) находят аргумент t, которому соот­ветствует значение функции Лапласа, равное у/2.**

Замечание 1. Оценку \х—а | < ta/ У п называют классиче­ской. Из формулы 6 = ta/ п, определяющей точность классической оценки, можно сделать следующие выводы:

1. при возрастании объема выборки п число б убывает и, следо­вательно, точность оценки увеличивается;
2. увеличение надежности оценки у = 2Ф(\*) приводит к увеличе­нию t (Ф (/) — возрастающая функция), следовательно, и к возраста­нию 6; другими словами, увеличение надежности классической оценки влечет за собой уменьшение ее точности.

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением о = 3. Найти дове­рительные интервалы для оценки неизвестного математического ожи­дания а по выборочным средним х, если объем выборки л = 36 и задана надежность оценки у = 0,95.

215

Решение. Найдем t. Из соотношения 2Ф(?) = 0,95 получим Ф(<) = 0,475. По таблице приложения 2 находим f=I,96.

Найдем точность оценки:

б = to/ Vn =(1,96-3)//36 = 0,98.

Доверительный интервал таков: (х—0,98; х + 0,98). Например, если х = 4,1, то доверительный интервал имеет следующие доверительные Границы:

х— 0,98 = 4,1 — 0,98 = 3,12; х + 0,98 = 4,1+ 0,98 = 5,08.

Таким образом, значения неизвестного параметра а, согласую­щиеся с данными выборки, удовлетворяют неравенству 3,12 < а < 5,08. Подчеркнем, что было бы ошибочным написать Р (3,12 <а <5,08) = 0,95. Действительно, так как а — постоянная величина, то либо она заклю­чена в найденном интервале (тогда событие 3,12 < в < 5,08 досто­верно и его вероятность равна единице), либо в нем не заключена (в этом случае событие 3,12<а<5,08 невозможно и его вероят­ность равна нулю). Другими словами, доверительную вероятность не следует связывать с оцениваемым параметром; она связана лишь с границами доверительного интервала, которые, как уже было ука­зано, изменяются от выборки к выборке.

Поясним смысл, который имеет заданная надежность. Надеж­ность у = 0,95 указывает, что если произведено достаточно большое число выборок, то 95% из них определяет такие доверительные интер­валы, в которых параметр действительно заключен; лишь в 5% слу­чаев он может выйти за границы доверительного интервала.

Замечание 2. Если требуется оценить математическое ожида­ние с наперед заданной точностью б н надежностью у, то минималь­ный объем выборки, который обеспечит эту точность, находят по формуле

п — Гао\*/ба (следствие равенства 6 = (а/ У~п).

**§ 16. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при неизвестном о**

**Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально, причем среднее квадратическое отклонение о неизвестно. Требуется оце­нить неизвестное математическое ожидание а с помощью доверительных интервалов. Разумеется, невозможно вос­пользоваться результатами предыдущего параграфа, в ко­тором о предполагалось известным.**

**Оказывается, что по данным выборки можно построить случайную величину (ее возможные значения будем обо-**

216

значать через t):

m X Cl

^sppT'

**которая имеет распределение Стьюдента с k — n—1 сте-  
пенями свободы (см. пояснение в конце параграфа); здесь  
X—выборочная средняя, S—«исправленное» среднее  
квадратическое отклонение, л—объем выборки.**

**Плотность распределения Стьюдента**

„е в =

Я Ул(п — 1)Г((л—1)/2) "

**Мы видим, что распределение Стьюдента определяется  
параметром л—объемом выборки (или, что то же, чис-  
лом степеней свободы Л = л—**1**) и не зависит от неиз-  
вестных параметров а и о; эта особенность является его  
большим достоинством. Поскольку S(t, п)—четная функ-**

**ция от t, вероятность осуществления неравенства**

**\*~а < у определяется так (см. гл. § XI, 2, замечание):**

***SIVH***

p(|J77t|<‘0=2

**Заменив неравенство в круглых скобках равносильным ему двойным неравенством, получим**

***PQt—tySlVn <a<X + tvS/Vn) = y.***

**Итак, пользуясь распределением Стьюдента, мы нашли доверительный интервал (х—tysjV~n, x+tys/plT), по­крывающий неизвестный параметр а с надежностью у.**

**Здесь случайные величины X и S заменены неслучайными величинами х и s, найденными по выборке. По таблице приложения 3 по заданным л и у можно найти tv.**

Пример. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема п = 16 найдены выбороч­ная средняя \* = 20,2 и «исправленное» среднее квадратическое откло­нение s = 0,8. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью 0,95.

Решение. Найдем ty. Пользуясь таблицей приложения 3, по у =0,95 н я = 16 находим ty =2,13.

217

Найдем доверительные границы:

7-tys/ У~п = 20,2 — 2,13 • 0,8/ ]/"Гб = 19,774.

х+ tys/Уп =20,2 + 2,13 0,8/ /Тб = 20.626.

Итак, с надежностью 0,95 неизвестный параметр а заключен в доверительном интервале 19,774 < а < 20,626.

Замечание. Из предельных соотношений

следует, что при неограниченном возрастании объема выборки п распределение Стьюдента стремится к нормальному. Поэтому прак­тически при л > 30 можно вместо распределения Стьюдента пользо­ваться нормальным распределением.

**Одиако важно подчеркнуть, что для малых выбо­рок (л < 30), в особенности для малых значений п, замена распределения нормальным приводит к грубым ошибкам, а именно к неоправданному сужению довери­тельного интервала, т. е. к повышению точности оценки. Например, если л = 5 и у «=0,99, то, пользуясь распре­делением Стьюдента, найдем ty = 4,6, а используя функ­цию Лапласа, найдем /v = 2,58, т. е. доверительный ин­тервал в последнем случае окажется более узким, чем найденный по распределению Стьюдента.**

**То обстоятельство, что распределение Стьюдента при малой выборке дает не вполне определенные результаты (широкий доверительный интервал), вовсе не свидетельст­вует о слабости метода Стьюдента, а объясняемся тем, что малая выборка, разумеется, содержит малую информацию об интересующем нас признаке.**

**Пояснение. Ранее было указано (см. гл. XII, § 14), что если Z—нормальная величина, причем M(Z)~ 0, a(Z)— 1, а V—независимая от Z величина, распределен­ная по закону х**8 **с k степенями свободы, то величина**

**распределена по закону Стьюдента с k степенями свободы.**

**Пусть количественный признак X генеральной сово­купности распределен нормально, причем М(Х) = а, а(Х) = а. Если из этой совокупности извлекать выборки объема л и по ним находить выборочные средние, то можно доказать, что выборочная средняя распределена нормально, причем (см. гл. VIII, § 9)**



***М(Хв) = а, о(Хл)=<з1Уп.***

218

**Тогда случайная величина**



**также имеет нормальное распределение как линейная функция нормального аргумента Хв (см. гл. XII, § 10, замечание), причем М (Z) — 0, a (Z) = 1.**

**Доказано, что случайные величины Z и**

**V = ((п — 1) S**2**)/aa (\*\*\*)**

**независимы (S\* — исправленная выборочная дисперсия) и что величина V распределена по закону с k — n—1 степенями свободы.**

**Следовательно, подставив (\*\*) и (\*\*\*) в (\*), получим величину**

*Т = ((хв — а) V~ii)IS,*

**которая распределена по закону Стьюдента с k — n—1 степенями свободы.**

§ 17. Оценка истинного значения измеряемой величины

**Пусть производится п независимых равноточных измерений некоторой физической величины, истинное зна­чение а которой неизвестно. Будем рассматривать резуль­таты отдельных измерений как случайные величины Xlt Xt, .... Хп. Эти величины независимы (измерения независимы), имеют одно и то же математическое ожида­ние а (истинное значение измеряемой величины), одина­ковые дисперсии о**2 **(измерения равноточны) и распреде­лены нормально (такое допущение подтверждается опы­том). Таким образом, все предположения, которые были сделаны при выводе доверительных интервалов в двух предыдущих параграфах, выполняются, и, следовательно, мы вправе использовать полученные в них формулы. Другими словами, истинное значение измеряемой вели­чины можно оценивать по среднему арифметическому результатов отдельных измерений при помощи довери­тельных интервалов. Поскольку обычно а неизвестно, следует пользоваться формулами, приведенными в § 16.**

Пример. По данным девяти независимых равноточных измерений физической величины найдены среднее арифметической результатов

219

отдельных измерений \* = 42,319 н «исправленное» среднее квадрати­ческое отклонение s = 5,0. Требуется оценить истинное значение измеряемой величины с надежностью у = 0,95.

Решение. Истинное значение измеряемой величины равно ее математическому ожиданию. Поэтому задача сводится к оценке мате­матического ожидания (при неизвестном о) при помощи доверитель­ного нитервала

*x—tyS/Yn < а < x-\-tyS/Yn ,*

покрывающего а с заданной надежностью у = 0.95.

Пользуясь таблицей приложения 3, по у = 0,95 и л = 9 находим ty — 2,31.

Найдем точность оценки:

ty (s/ Yn ) = 2,31 ■ (5/ V^sT) = 3,85.

Найдем доверительные границы:

7—tуs / Yn = 42,319 — 3,85 = 38,469;

\*+ tyS / Yn = 42,319 4- 3,85 = 46,169.

Итак, с надежностью 0,95 истинное значение измеряемой вели­чины заключено в доверительном интервале

38,469 < а < 46,169.

**§ 18. Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения о нормального распределения**

**Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. Требуется оценить неизвестное генеральное среднее квадратическое откло­нение о по «исправленному» выборочному среднему квад­ратическому отклонению** s. **Поставим перед собой задачу найти доверительные интервалы, покрывающие параметр а с заданной надежностью у.**

**Потребуем, чтобы выполнялось соотношение**

Р(|о—s|<6) = y> или ^ (s— 6<0<s + 6) = y.

**Для того чтобы можно было пользоваться готовой таблицей, преобразуем двойное неравенство**

**s—б < о < s + б в равносильное неравенство**

S (1 —б/s) < О < S (1 + б/s).

**Положив б!s=tq, получим**

**s(l— q) < a <s** (1 **+q). (\*)**

220

**Остается найти q. С этой целью введем в рассмотрение случайную величину «хи»:**

**где п—объем выборки.**

**Как было указано [см. § 16, пояснение, соотношение (\*\*\*)], величина Sa(n—1)/аа распределена по закону х\* с п**—1 **степенями свободы, поэтому квадратный корень из нее обозначают через %.**

**Плотность распределения х имеет вид (см. пояснение в конце параграфа)**

**Это распределение не зависит от оцениваемого параметра а, а зависит лишь от объема выборки п.**

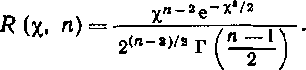
**Преобразуем неравенство (\*) так, чтобы оно приняло вид** %1 **< % < %2- Вероятность этого неравенства (см. гл. XI, §** 2**) равна заданной вероятности у, т. е.**

**Предполагая, что q < 1, перепишем неравенство (\*) так:**

**Умножив все члены неравенства на S п—**1**, получим**

**Вероятность того, что это неравенство, а следовательно, и равносильное ему неравенство (\*) будет осуществлено, равна**

**x = (S/a)** Vn— 1,



**(\*\*)**

j *R(X, n) dx — y.*

**S(l+0 < a < S(1 —** q)'

Vn— 1 ^sVn—l ^ Vn— 1 1 +q < a < 1 — ? ’

**или**



vn- l/(l -q)



Vn- 1/(1 +,)

221

**Из этого уравнения можно по заданным пну найти q. Практически для отыскания q пользуются таблицей при­ложения 4.**

**Вычислив по выборке s и найдя по таблице q, полу­чим искомый доверительный интервал (\*), покрывающий а с заданной надежностью у, т. е. интервал**

**s(l— q) <о< s(l + ?).**

Пример 1. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема п = 25 найдено «исправ­ленное» среднее квадратическое отклонение s = 0,8. Найти доверитель­ный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение а с надежностью 0,95.

Решен'ие. По таблице приложения 4 по данным у = 0,95 и я = 25 найдем ? = 0,32.

Искомый доверительный интервал (\*) таков:

0,8 (1—0,32) < а < 0,8 (1 + 0,32), или 0,544 < а < 1,056.

Замечание. Выше предполагалось, что q < 1. Если q > 1, то неравенство (\*) примет вид (учитывая, что а > 0)

0 < а < s (1-Н), или (после преобразований, аналогичных случаю q < 1)

**Уп —**1/(1 **+ ?) < % < оо.**

Следовательно, значения q > 1 могут быть найдены из уравнения

ОО

$ Ж\*. n)d% = у.

vim/u+Q)

Практически для отыскания значений q > 1, соответствующих различным заданным п и у, пользуются таблицей приложения 4.

Пример 2. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема п=10 найдено «исправ­ленное» среднее квадратическое отклонение s = 0,16. Найти довери­тельный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение а с надежностью 0,999.

Решение. По таблице приложения 4 по данным у = 0,999 и л=10 найдем <7=1,80 (q > 1). Искомый доверительный интервал таков:

0 < а < 0,16(1 + 1,80), или 0 < а < 0,448.

**Пояснение. Покажем, что плотность распределе­ния х имеет вид (\*\*).**

**Если случайная величина X распределена по закону Xs с k — n —** 1 **степенями свободы, то ее плотность рас­пределения (см. гл. XII, § 13)**

***х[к/2)-1 е~Х/2***

**или после подстановки k = n**—1

х(п-9)/а е-ж/а

**/(\*> = ■**

2**(Л-**1**)/**2**Г**

**Воспользуемся формулой (см. гл. XII, § 10)**

**£**0**/) = /[Ф**0**/)]**1**Ф' (У)|,**

**чтобы найти распределение функции х=Ф (X)=V~X(х>**0**)- Отсюда обратная функция**

**\* = Ф(х) = Ха и -ф' (х) =** 2**х- Так как % > 0, то | Ф' Сх) I — ^х» следовательно,**

/v2%(n- 8)/2 е-Х\*/2

г(х) ■-11\* (х)]■ I\*' (х) I - ^„„,^^-iy • 2х-

**Выполнив элементарные преобразования и изменив обозначения (g(x)\* заменим на R (х, п)), окончательно получим**

vn —2 е- Х\*/2

**R(Xi п) = х 5**

2<Л- S)/2 pi

**§ 10. Оценка точности измерений**

**В теории ошибок принято точность измерений (точность прибора) характеризовать с помощью среднего квадратического отклонения о случайных ошибок изме­рений. Для оценки о используют «исправленноз»среднее квадратическое отклонение s. Поскольку обычно резуль­таты измерений взаимно независимы, имеют одно и то же математическое ожидание (истинное значение измеряемой величины) и одинаковую дисперсию (в случае равноточ­ных измерений), то теория, изложенная в предыдущем параграфе, применима для оценки точности измерений.**

Пример. По 15 равноточным измерениям найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение s = 0,12. Найти точность измере­ний с надежностью 0,99.

Решение. Точность измерений характеризуется средним квад­ратическим отклонением о случайных ошибок, поэтому задача сво­дится к отысканию доверительного интервала (\*), покрывающего а с заданной надежностью 0,99 (см. § 18).

223

По таблице приложения 4 по у = 0,99 » п=15 найдем q = 0,73. Искомый доверительный интервал

0,12(1— 0,73) < а < 0,12(1+0,73), или 0,03 < а < 0,21.

**§ 20. Оценка вероятности (биномиального распределения) по относительной частоте**

**Пусть производятся независимые испытания с неизвестной вероятностью р появления события А в каждом испытании. Требуется оценить неизвестную вероятность р по относительной частоте, т. е. надо найти ее точечную и интервальную оценки.**

**А. Точечная оценка. В качестве точечной оценки не­известной вероятности р принимают относительную частоту**

***W* = *т/п,***

**где т—число появлений события А; п—число испыта­ний**

**Эта оценка несмещенная, т. е. ее математическое ожи­дание равно оцениваемой вероятности. Действительно, учитывая, что М(т) = пр (см. гл. VII, § 5), получим**

**М (W) = М [m/n] = М (т)/п = пр/п = р.**

**Найдем дисперсию оценки, приняв во внимание, что D(m) = npq (см. гл. VII, §** 6**):**

**D (W) = D [m/n] = D (т)/п**2 **= npq/n**2 **= pq/n.**

**Отсюда среднее квадратическое отклонение.**

***ow — У D* (И7) = *У pq/n.***

**Б. Интервальная оценка. Найдем доверительный ин­тервал для оценки вероятности по относительной частоте. Напомним, что ранее (см. гл. XII, §** 6**) была выведена формула, позволяющая найти вероятность того, что аб­солютная величина отклонения не превысит положитель­ного числа б:**

**Р (I X—а | < б) =** 2**Ф (б/а), (\*)**

\*> Напомним, что случайные величины обозначают прописными, а их возможные значения—строчными буквами. В различных опытах число т появлений события будет изменяться и поэтому является случайной величиной М. Однако, поскольку через М уже обозначено математическое ожидание, мы сохраним для случайного числа появ­лений события обозначение т.

224

**где X — нормальная случайная величина с математи­ческим ожиданием М(Х) — а.**

**Если п достаточно велико и вероятность р не очень близка к нулю и к единице, то можно считать, что от­носительная частота распределена приближенно нор­мально, причем, как показано в п. A, M(W) = p.**

**Таким образом, заменив в соотношении (\*) случайную величину X и ее математическое ожидание а соответ­ственно случайной величиной W и ее математическим ожиданием р, получим приближенное (так как относи­тельная частота распределена приближенно нормально) равенство**

**P(\W—р\ <** 6**) =** 2**Ф(**6**/<%). (\*\*)**

**Приступим к построению доверительного интервала (Pi, ра), который с надежностью у покрывает оцениваемый параметр р, для чего используем рассуждения, с помощью которых был построен доверительный интервал в гл. XVI, § 15. Потребуем, чтобы с надежностью у выполнялось соотношение (\*\*):**

**Р (| W—р | <** 6**) = 2Ф (б/а) = у.**

**Заменив aw через Уpq/n (см. п. А), получим**

**P(\W—р|<**6**) = 2Ф(6 Уп1У~м) = 2Ф(0 = Т,**

**где *t* = б *Y nlVРЦ•***

**Отсюда**

**б = *t V pq/n***

**и, следовательно,**

***P(\W—р \* < *t V pq/n) =* 2Ф (/) = *у.***

**Таким образом, с надежностью у выполняется нера­венство (чтобы получить рабочую формулу, случайную величину W заменим неслучайной наблюдаемой относи­тельной частотой w и подставим** 1**—р вместо q):**

***\w—p\ < t V р{\— р)/п.***

**Учитывая, что вероятность р неизвестна, решим это неравенство относительно р. Допустим, что w > р. Тогда**

***w—p* < *tyр{\— р)/п.***

15 — 2730

225

**Обе части неравенства положительны; возведя их в квад­рат, получим равносильное квадратное неравенство от­носительно р:**

[(/8/п) + 1)3 Я\* — 2 **[w** + (/\*/«)] Р + ю\* < 0.

**Дискриминант трехчлена положительный, поэтому его корни действительные и различные:**

**меньший корень**

*+ {?\*)']'* <\*\*\*>

**больший корень**

*P\* = 74-n[w+W + t Y'\*slT^1 + (-kY}-* <\*\*\*\*>

**Итак, искомый доверительный интервал рх < р < р,, где рх и ра находят по формулам (\*\*\*) и (\*\*\*\*).**

**При выводе мы предположили, что w > р; тот же ре­зультат получим при О) < р.**

Пример. Производят независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью р появления события А в каждом испыта­нии. Найти доверительный интервал для оценки вероятности р с на­дежностью 0,95, если в 80 испытаниях событие А появилось 16 раз.

Решение. По условию, я = 80, т=16, у = 0,95. Найдем от­носительную частоту появления события А:

w = m/n = 16/80 = 0,2.

Найдем / из соотношения Ф (/) = у/2 = 0,95/2 = 0,475; по таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим / = 1,96.

Подставив п = 80, о» = 0,2, / = 1,96 в формулы (\*\*\*) и (\*\*\*\*), получим соответственно рх = 0,128, рг =0,299.

Итак, искомый доверительный интервал 0,128 < р < 0,299.

Замечание 1. При больших значениях п (порядка сотен) слагаемые /8/(2я) и (//(2л))8 очень малы и множитель л/(/2 + л)=\*. 1, поэтому можно принять в качестве приближенных границ довери­тельного интервала

Pi = w—/ y"w(l — w)/n и ра=и> + / Vw(\—w)/n.

Замечание 2, Чтобы избежать расчетов концов доверитель­ных интервалов, можно использовать табл. 28 книги Я н к о Я. Математико-статистические таблицы. М., Госстатнздат, 1961.

**§ 21. Метод моментов для точечной оценки параметров распределения**

**Можно доказать, что начальные и центральные эмпирические моменты являются состоятельными оценками соответственно начальных и центральных теоретических**

226

**моментов того же порядка. На этом основан метод момен­тов, предложенный К. Пирсоном. Достоинство метода — сравнительная его простота. Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических моментов рас­сматриваемого распределения соответствующим эмпириче­ским моментам того же порядка.**

**А. Оценка одного параметра. Пусть задан вид плот­ности распределения f (х,** 0**), определяемой одним неиз­вестным параметром 0. Требуется найти точечную оценку параметра** 0**.**

**Для оценки одного параметра достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Следуя методу моментов, приравняем, например, начальный тео­ретический момент первого порядка начальному эмпири­ческому моменту первого порядка: v**1 **= M1. Учитывая, что (X) (см. гл. VIII, § 10), М1 = хв (см. гл. XVII,**

**§** 2**), получим**

**Математическое ожидание Л1 (X), как видно из соотно­шения**

**есть функция от** 0**, поэтому (\*) можно рассматривать как уравнение с одним неизвестным 0. Решив это уравнение относительно параметра** 0**, тем самым найдем его точеч­ную оценку** 0**\*. которая является функцией от выбороч­ной средней, следовательно, и от вариант выборки:**

Пример 1. Найти методом моментов по выборке xlt ха, .... х„ точечную оценку неизвестного параметра к показательного распреде­ления, плотность распределения которого f(x) = ke~ijc (х^яО).

Решение. Приравняем начальный теоретический момент пер­вого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка:

v1 = Af1. Учитывая, что v1 = Af(X), Mi=xB, получим

Приняв во внимание, что математическое ожидание показательного распределения равно 1/Л (см. гл. XIII, § 3), имеем

**М(Х) = хв.**

**(\*)**

**М (Х)= J xf (х; 0) Ле = ф (0),**

0**\* = ф *(xlt х***



*М{Х)=хв.*

1/Л=жв.

15\*

Отсюда

*k=l/xa.*

Итак, искомая точечная оценка параметра К показательного рас­пределения равна величине, обратной выборочной средней:

**Б. Оценка двух параметров. Пусть задан вид плотности распределения f (х\** 0**1(** 0**Я), определяемой неизвестными параметрами 0А и 0Я. Для отыскания двух параметров необходимы два уравнения относительно этих параметров. Следуя методу моментов, приравняем, например, началь­ный теоретический момент первого порядка начальному эмпирическому моменту первого порядка и центральный теоретический момент второго порядка центральному эм­пирическому моменту второго порядка:**

**Учитывая, что vt = М (X), ря = D (X) (см. гл. VIII, § 10), Ml = xB, mB = DB (см. гл. XVII, § 2), получим**

**Математическое ожидание и дисперсия есть функции от** 0**j н** 0**Я, поэтому (\*\*) можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными и 0Я. Решив эту систему относительно неизвестных параметров, тем самым получим их точечные оценки 0J и 0J. Эти оценки являются функциями от вариант выборки:**

Пример 2. Найти методом моментов по выборке хи ха, ..., хп точечные оценки неизвестных параметров а и о нормального рас­пределения

Решение. Приравняем начальные теоретические и эмпиричес­кие моменты первого порядка, а также центральные и эмпирические моменты второго порядка:

Учитывая, что Vi = Af(X), (1,=1)(Х), Мх=хв, mt~DB, получим



**в;=Ф**1**(хх, \*я х„),**

**0g = Фя (■\*!,** X9t **• • • ,** Хп").

vi = Af1, P2=m,.

М(Х)=хш, £>(\*)=£>..

228

Приняв во внимание, что математическое ожидание нормального рас­пределения равно параметру а, дисперсия равна оа (см. гл. XII, § 2), имеем:

**а = х**в, о2 = £>„.

Итак, искомые точечные оценки параметров нормального рас­пределения:

***а\* = хв,* о\*= *VDB.***

Замечание 1. Для оценок, неизвестных параметров можно приравнивать не только сами моменты, но и функции от моментов.

В частности, этим путем получают состоятельные оценки характе­ристик распределений, которые являются функциями теоретических моментов. Например, асимметрия теоретического распределения (см. гл. XII, § 9)

As **= И\*/03 = Из/ (** VРг)\*

есть функция от центральных моментов второго и третьего порядков. Заменив эти теоретические моменты соответствующими эмпирическими моментами, получим точечную оценку асимметрии

As = ma/( V"h)3 ■

Замечание 2. Учитывая, что У т2= V"DB = <тв, последнюю формулу можно записать в виде

*As — tnja%.*

Далее эта оценка будет принята в качестве определения асиммет­рии эмпирического распределения (см. гл. XVII, § 9).

**§ 22. Метод наибольшего правдоподобия**

**Кроме метода моментов, который изложен в пре­дыдущем параграфе, существуют и другие методы точеч­ной оценки неизвестных параметров распределения. К ним относится метод наибольшего правдоподобия, предложен­ный Р. Фишером.**

**А. Дискретные случайные величины. Пусть X —диск­ретная случайная величина, которая в результате п ис­пытаний приняла значения х,, хя> . .., хп. Допустим, что вид закона распределения величины X задан, но неиз­вестен параметр** 0**, которым определяется этот закон. Требуется найти его точечную оценку.**

**Обозначим вероятность того, что в результате испы­тания величина X примет значение** X/(i= **1, 2, ..п), через Р (\*«; е)-**

***Функцией правдоподобия дискретной случайной вели­чины X* называют функцию аргумента** 0**:**

**L(xlt хя, ..., хп\ 0) = р (х,; 0)р (хя; 0) ... р(х„; 0), где хя, хя х„—фиксированные числа.**

229

**В качестве точечной оценки параметра 0 принимают та­кое его значение** 0**\* =** 0**\*(дс1, xt, .. ., х„), при котором фун­кция правдоподобия достигает максимума. Оценку 0\* на­зывают оценкой наибольшего правдоподобия.**

**Функции L и InL достигают максимума при одном и том же значении** 0**, поэтому вместо отыскания максимума функции L ищут (что удобнее) максимум функции Гп L.**

**Логарифмической функцией правдоподобия называют функцию InL. Как известно, точку максимума функции InL аргумента 0 можно искать, например, так:**

1. **найти производную^^;**
2. **приравнять производную нулю и найти критическую точку — корень полученного уравнения (его называют уравнением правдоподобия);**

оч ***(P\nL***

1. **наити вторую производную dQi ; если вторая**

**производная при** 0 **—** 0**\* отрицательна, то** 0**\*—точка мак­симума.**

**Найденную точку максимума 0\* принимают в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра** 0**.**

**Метод наибольшего правдоподобия имеет ряд досто­инств: оценки наибольшего правдоподобия, вообще говоря, состоятельны (но они могут быть смещенными), распреде­лены асимптотически нормально (при больших значениях п приближенно нормальны) и имеют наименьшую дисперсию по сравнению с другими асимптотически нормальными оценками; если для оцениваемого параметра** 0 **существует эффективная оценка** 0**\*, то уравнение правдоподобия имеет единственное решение** 0**\*; этот метод наиболее полно ис­пользует данные выборки об оцениваемом параметре, поэтому он особенно полезен в случае малых выборок.**

**Недостаток метода состоит в том, что он часто требует сложных вычислений.**

Замечание 1. Функция правдоподобия — функция от аргу­мента 6; оценка наибольшего правдоподобия—функция от независи­мых аргументов хг,

Замечание 2. Оценка наибольшего правдоподобия не всегда совпадает с оценкой, найденной методом моментов.

Пример 1. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра А. распределения Пуассона

Рш (X = \*,)=-^j--,

где т — число произведенных испытаний, х/—число появлений собы­тия в i-м (<=1, 2 я) опыте (опыт состоит из т испытаний).

230

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что 0=Х:

L = p (\*i; Х>р ( ха; к) ... р (х„; X) =

X\*» е~х ^ Xх» е~х Х\*л-е~х Х^\*' • е~"х

лех1 \* ха1 ' ’' лг„! jcx!jca! . . x„l '

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

1пХ = (2\*,) taX—nX—In (хх'ха! ... хп\).

Найдем первую производную по X:

d In L 2\*'

~Ж~~~ X "■

Напншем уравнение правдоподобия, для чего приравняем пер­вую производную нулю:

(2\*« /X) —п = °-

Найдем критическую точку, для чего решим полученное уравне­ние относительно X:

X = *Xjjti* = *хв.*

Найдем вторую производную по X:

d2 InL 2\*'

dX2 — X2 •

Легко видеть, что при Х = х„ вторая производная отрицательна; следовательно, Х = х8— точка максимума и, значит, в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра X распределения Пуассона надо принять выборочную среднюю Х\* = х„.

Пример 2. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра р биномиального распределения

Рп(\*)=с£р‘(1-р)пЛ

если в пг независимых испытаниях событие А появилось хг = тг раз и в па независимых испытаниях событие А появилось ха = та раз.

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что 0 = р:

L = P„t (/пх) Я„, (ma)=C£«C£\*pm«+m\* (I -р)[(п‘ +

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия: lnL = ln(C”\*C”,) + (mlH-ma) In p + [(niH~na) — (/Пх + т\*)] In (1— р).

Найдем первую производную по р:

din L р»х + та (»х + па) — (ffh + fflg)

*dp ~ р 1—р*

Напишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную нулю-

тх + та («х + na) ~ i + та) 0

р 1—р

231

Найдем критическую точку, для чего решим полученное урав­нение относительно р:

p = (miH-/n2)/(n1 + na).

Найдем вторую производную по р:

**/ПхН-ОТа I (niH~n**2**) — (mi + »\*a)** dp\* р5 I" (1—Р)2

Легко убедиться, что при р = (т1-\-та)/(п1-\-па) вторая произ­водная отрицательна; следовательно, P = (»i1H-m2)/(n1-)-na)—точка максимума и, значит, ее надо принять в качестве оценки наиболь­шего правдоподобия неизвестной вероятности р биномиального рас­пределения:

Р\* = ("Ч + «12)/(Л! + ля).

**Б. Непрерывные случайные величины. Пусть X — не­прерывная случайная величина, которая в ре­зультате п испытаний приняла значения х1г ха, ..., хп. Допустим, что вид плотности распределения f (х) задан, но не известен параметр** 0**, которым определяется эта функция.**

***Функцией правдоподобия непрерывной случайной вели­чины X* называют функцию аргумента** 0**:**

**^ К,** \*2 **хп> 0)=/ (\*\*; е) f (\*«; 0) ■ • • /** 0**),**

**где хи х2, ..., хп—фиксированные числа.**

**Оценку наибольшего правдоподобия неизвестного па­раметра распределения непрерывной случайной величины ищут так же, как в случае дискретной величины.**

Пример 3. Найти методом наибольшего правдоподобия оценку параметра X показательного распределения

f (х) — (0 < х < оо),

если в результате п испытаний случайная величина X, распределен­ная по показательному закону, приняла значения хи ха хп.

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что 0 = Х:

L = f(Xu X)f(xa; X) ... /<\*„; X) = (Xe~,JC‘) (Хе"^>) ... (Хе"^\*)- Отсюда

L = X"e-X2j:/.

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

In L = nln X — X У, Х[.

Найдем первую производную по X: din L п ^

~ЗХ Т “2-

232

Напишем уравнение правдоподобия, для чего приравняем первую производную нулю:

**(лА)—** 2**j\*«' = 0-**

Найдем критическую точку, для чего решим полученное уравне­ние относительно Я,:

**\* = п**/2 **\*«• =** 1 **/( S \*'■/") =** 1 **/\*>■**

Найдем вторую производную по Я,:

*d?* InL *п* ***6.У? ~~Т\** •**

Легко видеть, что при Х = !/хв вторая производная отрицательна; следовательно, Х=1/жв— точка максимума и, значит, в качестве оценки наибольшего правдоподобия параметра X показательного рас­пределения надо принять величину, обратную выборочной средней: Х\*= 1/хв.

Замечание. Если плотность распределения /(ж) непрерывной случайной величины X определяется двумя неизвестными парамет­рами 0Х и 02, то функция правдоподобия является функцией двух независимых аргументов 0Х и 02:

L = f(x\, 01, 02) / (\*2; ®z) ••• f (хп> ^1» ®г)>

где xlt \*2, .... хп — наблюдавшиеся значения X. Далее находят ло­гарифмическую функцию правдоподобия и для отыскания ее макси­мума составляют н решают систему

д In L

**dQ1 —U’**

<МпХ д% “U\*

Пример 4. Найти методом наибольшего правдоподобия оценки параметров а и о нормального распределения

*f(x) = —* \*

***а у 2п***

если в результате п испытаний величина X приняла значения

Xli XtХП'

Решение. Составим функцию правдоподобия, учитывая, что 0! = а и 02 = а:

1 **\_ с-и.-д>Ум» l\_ c-(\*i-a)\*/,g‘**а Y 2п a Y 2п

**(жп-а)а/аа\***

Отсюда

Х а V 2л 6

: ! е - (•\*/““) а/\*а\*

***o"(V~bi)n***

233

Найдем логарифмическую функцию правдоподобия:

1 **51 (х‘ ~ а)\***

lnL\*= — п In о+1п . г •

(V 2я) 2о2

Найдем частные производные по а и по а:

d In L 5j Х|‘ —nfl . d InL п . 5](^/-fl)2

да о\* ’ да а' о®

Приравняв частные производные нулю и решив полученную си­стему двух уравнений относительно а и о2, получим:

a = 2^/n“\*B; <\*2 = (2(\*<~\*й)2)/п = £,в- Итак, искомые оценки наибольшего правдоподобия: а\* = х„; а\*= V^DB. Заметим, что первая оценка несмещенная, а вторая сме­щенная.

§ 23. Другие характеристики вариационного ряда

**Кроме выборочной средней и выборочной диспер­сии применяются и другие характеристики вариационного ряда. Укажем главные из них.**

**Модой М9 называют варианту, которая имеет наиболь­шую частоту. Например, для ряда**

**варианта . ... 1 4 7 9**

**частота .... 5 1 20** 6

**мода равна 7.**

**Медианой т9 называют варианту, которая делит ва­риационный ряд на две части, равные по числу вариант.**

**Если число вариант нечетно, т. е. ti = 2k + 1, то те = дс\*+1;**

**при четном n = 2k медиана**

'Яе = (\*А + \*л + 1)/2.

**Например, для ряда 2 3 5** 6 **7 медиана равна 5; для ряда 2 3 5** 6 **7 9 медиана равна (5 + 6)/2 = 5,5.**

**Размахом варьирования R называют разность между наибольшей и наименьшей вариантами:**

**R ~ ^ma\* ^mln\***

**Например, для ряда 1 3 4 5** 6 **10 размах равен 10—1 =9.**

**Размах является простейшей характеристикой рассея­ния вариационного ряда.**

**Средним абсолютным отклонением 0 называют среднее арифметическое абсолютных отклонений:**

е= (2п/Iх/—-\*в|)/5Х-

234

**Например, для ряда**

**хг** 1 3 6 16

**п{ 4 10 5 1**

**имеем:**

41 + 10-34-5-6+Ы6 80 ,

**хв— 4+ю + 5+1 ^** 20

А \_ 4- 11-41+Ю- I 3-4 1+5- |6-4| + 1-1 16-4| \_ „ „

20 — ’

**Среднее абсолютное отклонение служит для характерис­тики рассеяния вариационного ряда.**

**Коэффициентом вариации V называют выраженное в процентах отношение выборочного среднего квадратичес­кого отклонения к выборочной средней:**

***V — ajxt-*100%.**

**Коэффициент вариации служит для сравнения величин рассеяния по отношению к выборочной средней двух вариационных рядов: тот из рядов имеет большее рас­сеяние по отношению к выборочной средней, у которого коэффициент вариации больше. Коэффициент вариации — безразмерная величина, поэтому он пригоден для срав­нения рассеяний вариационных рядов, варианты которых имеют различную размерность, например если варианты одного ряда выражены в сантиметрах, а другого—в грам­мах.**

Замечание. Выше предполагалось, что вариационный ряд составлен по данным выборки, поэтому все описанные характерис­тики называют выборочными', если вариационный ряд составлен по данным генеральной совокупности, то характеристики называют гене­ральными.

Задачи

1. Найти групповые средние совокупности, состоящей из двух групп:

первая группа . . . Х{ 0,1 0,4 0,6

п,- 3 2 5

вторая группа . . . х,- 0,1 0,3 0,4

\_ Л/ 10 4 6

Отв. \*1 = 0,41; ха = 0,23.

1. Найти общую среднюю по данным задачи 1 двумя способами:

а) объединить обе группы в одну совокупность; б) использовать най­денные в задаче 1 групповые средние.

*Отв. х — 0,29.*

235

1. Дано распределение статистической совокупности:

ж,- 1 4 5

П[ 6 11 3

Убедиться, что сумма произведений отклонений на соответствующие частоты равна нулю.

1. Дано распределение статистической совокупности:

ж, 4 7 10 15

П[ 10 15 20 5

Найти дисперсию совокупности: а) исходя из определения диспер­сии; б) пользуясь формулой 0 = ж2— [ж]2.

Отв. D=9,84.

1. Найти внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсии совокупности, состоящей из трех групп:

первая группа . . . ж,- 1 2 8

п{ 30 15 5

вторая группа . . . ж,- 1 6

п; 10 15

третья группа , . . ж,- 3 8

п/ 20 5

Отв. Дцнгр = 4,6; Т^иежгр = 1 > ^оби = 5,6.

в. Найти внутригрупповую, межгрупповую и общую дисперсия совокупности, состоящей из двух групп: первая группа . . . ж; 2 7

п/ 6 4

вторая группа . . . ж/ 2 7

п/ 2 8

Отв. £>внгр = 5; Диежгр~1> А>бщ =6.

1. Найти выборочную и исправленную дисперсии вариационного ряда, составленного по данным выборкам:

варианта ... 1 2 5 8 9

частота ... 3 4 6 4 3

Отв: о! = 8,4; s2 = 8,84.

В задачах 8—9 даны среднее квадратическое отклонение, выбо­рочная средняя и объем выборки нормально распределенного приз­нака. Найти доверительные интервалы для оценки неизвестного мате­матического ожидания с заданной надежностью.

1. о = 2, ж„ = 5,40, п = 10, у = 0,95.

Отв. 4,16 < а < 6,64.

1. о = 3, жв = 20,12, л = 25, у = 0,99.

Отв. 18,57 < а < 21,67.

1. Найти минимальный объем выборки, при котором с надеж­ностью 0,95 точность оценки математического ожидания нормально распределенного признака по выборочной средней будет равна 0,2, если среднее квадратическое отклонение равно 2.

У Казани е. См. замечание 2, § 15.

Отв. л = 385.

В задачах 11—12 даны «исправленное» среднее квадратическое отклонение, выборочная средняя и объем малой выборки нормально распределенного признака. Найти, пользуясь распределением Стыо-

236

дента, доверительные интервалы для оценки неизвестного математи­ческого ожидания с заданной надежностью.

1. s=l,5, жв=16,8, п = 12, у — 0,95.

Отв. 15,85 < а < 17,75.

1. s = 2,4, \*в=14,2, п = 9, у = 0,99.

Отв. 11,512 < а < 16,888.

1. По данным 16 независимых равноточных измерений физичес­кой величины найдены \*„ = 23,161 и s = 0,400. Требуется оценить истинное значение а измеряемой величины и точность измерений а с надежностью 0,95.

Отв. 22,948 < а< 23,374; 0,224 < о < 0,576.

1. Найти доверительный интервал для оценки неизвестной ве­роятности р биномиального распределения с надежностью 0,95, если в 60 испытаниях событие появилось 18 раз.

Отв. 0,200 < р < 0,424.

1. Найти методом моментов точечную оценку эксцесса Ек = = т4/а4—3 теоретического распределения.

Отв. ек = т4/Ов—3.

1. Найти методом моментов точечные оценки параметров аир гамма-распре деления

**/<\*> = ■ р«+**1**Г(« +** 1) **> “«• Р>°- \*^°>-**

Указание. Сделать подстановку у=\*хф и, используя гамма- 00

функцию Г (л) = J xn~1e-xdx, найти сначала М (X) = (а + 1) р,

**о**

D (X) = (oc-f- 1) р2, а затем приравнять М(Х)=хв, D(X) = DB.

Отв. a\* = (xB/DB)— 1; р\* = £>„/\*„.

1. Найти методом наибольшего правдоподобия по выборке хи \*\*> .... хп точечную оценку неизвестного параметра р гамма-рас­пределения, если параметр а известен.

Указание. Использовать плотность гамма-распределения, приведенную в задаче 16.

Отв. р\* = хв/(а+1).

**Глава семнадцатая**

МЕТОДЫ РАСЧЕТА СВОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

ВЫБОРКИ

**§ 1. Условные варианты**

**Предположим, что варианты выборки располо­жены в возрастающем порядке, т. е. в виде вариацион­ного ряда.**

**Равноотстоящими называют варианты, которые обра­зуют арифметическую прогрессию с разностью h.**

237

**Условными называют варианты, определяемые равен­ством**

**“/ = (\*/—C)/h,**

**где С—ложный нуль (новое начало отсчета); Л—шаг, т. е. разность между любыми двумя соседними первона­чальными вариантами (новая единица масштаба).**

**Упрощенные методы расчета сводных характеристик выборки основаны на замене первоначальных вариант условными.**

**Покажем, что если вариационный ряд состоит из равно­отстоящих вариант с шагом Л, то условные варианты есть целые ч и с л а. Действительно, выберем в качестве ложного нуля произвольную варианту, например хт. Тогда**

\*/—*хт* \_ *x1 + (i—l)h — [x1 + (m—l)h] .* \_

*ui* *h* *h* *1~Ш-*

**Так как i и m—целые числа, то их разность i—т = = и{—также целое число.**

Замечание 1. В качестве ложного нуля можно принять лю­бую варианту. Максимальная простота вычислений достигается, если выбрать в качестве ложного нуля варианту, которая расположена примерно в середине вариационного ряда (часто такая варианта имеет наибольшую частоту).

Замечание 2. Варианте, которая принята в качестве лож­ного нуля, соответствует условная варианта, равная нулю.

Пример. Найти условные варианты статистического распределения: варианты . . . 23,6 28,6 33,6 38,6 43,6

частоты ... 5 20 50 15 10

Решение. Выберем в качестве ложного нуля варианту 33,6 (ата варианта расположена в середине вариационного ряда).

Найдем шаг:

Л = 28,6 — 23,6 = 5.

Найдем условную варианту:

“i = (\*i —С)/А = (23,6 — 33,6)/5= —2.

Аналогично получим: иа = —1, н3 = 0, и4=1, иь = 2. Мы видим, что условные варианты — небольшие целые числа. Разумеется, опе­рировать с ними проще, чем с первоначальными вариантами.

**§ 2. Обычные, начальные и центральные эмпирические моменты**

**Для вычисления сводных характеристик выборки удобно пользоваться эмпирическими моментами, опреде­ления которых аналогичны определениям соответствую­**

238

**щих теоретических моментов (см. гл. VIII, § 10). В от-  
личие от теоретических эмпирические моменты вычисляют  
по данным наблюдений.**

**Обычным эмпирическим моментом порядка k называют  
среднее значение fe-x степеней разностей х,—С:**

М\* = (2Х (Х; — С)к)/П,

**где Xi—наблюдаемая варианта, П/—частота варианты,  
= —объем выборки, С — произвольное постоянное**

**число (ложный нуль).**

***Начальным эмпирическим моментом порядка k* назы-  
вают обычный момент порядка *k* при *С =* 0**

Мк = (2Х\*?)/П-

**В частности,**

***М1==(%п,х1)/п==хв,***

**т. е. начальный эмпирический момент первого порядка  
равен выборочной средней.**

***Центральным эмпирическим моментом порядка k* на-  
зывают обычный момент порядка *k* при С — *хв***

***mk =* (**2**>; (\*/ — *хв)\*)/п.***

**В частности,**

***тш* =** СЕХ **<\*«• — *Хь)\*)/п*** = £>в, **(\*)**

**т. е. центральный эмпирический момент второго порядка  
равен выборочной дисперсии.**

**Легко выразить центральные моменты через обычные  
(рекомендуем читателю сделать это самостоятельно):**

***mt = M'a — (Mi)',* (\*»)**

***т3* = *—* + 2 *(М[)\***

***mt = M't — 4М3Мг* +** 6**М**2 ***(М[у —* 3 *(Mi)\*.***

§ 3. Условные эмпирические моменты. Отыскание центральных моментов по условным

**Вычисление центральных моментов требует до­вольно громоздких вычислений. Чтобы упростить рас­четы, заменяют первоначальные варианты условными.**

**Условным эмпирическим моментом порядка k называ­ют начальный момент порядка k, вычисленный для ус-**

**(\*\*\*)**

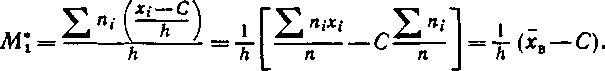
239

**ловных вариант:**

„. *Т.-(ФУ*

***\* п П***

**В частности,**



**Отсюда**

***x^MXh + C.***

**(\*)**

**Таким образом, для того чтобы найти выборочную сред­нюю, достаточно вычислить условный момент первого порядка, умножить его на А и к результату прибавить ложный нуль С.**

**Выразим обычные моменты через условные:**

**Таким образом, для того чтобы найти обычный момент порядка k, достаточно условный момент того же порядка умножить на h\*.**

**Найдя же обычные моменты, легко найти централь­ные моменты по равенствам (\*\*) и (\*\*\*) предыдущего параграфа. В итоге получим удобные для вычислений формулы, выражающие центральные моменты через ус­ловные:**

**В частности, в силу (\*\*) и соотношения (\*) предыду­щего параграфа получим формулу для вычисления выбо­рочной дисперсии по условным моментам первого и вто­рого порядков**

**Техника вычислений центральных моментов по услов­ным описана далее.**

240

д,. 1\_ \_ **М’к**

**к А\* п Л\* ’**

**Отсюда**

***M-k*** = M'khк.

*т„* = *[МХ—ЗМХМХ* + 2 (МП8] А3,  
mt = [Ml — 4MlMX+6Ml(MXY—3 (M\Y]h\*.

**(\*\*)**

**(\*\*\*)**

яв=[аг2-(м:)з]/1\*.

**(\*\*\*\*)**

§ 4. Метод произведений для вычисления

выборочных средней и дисперсии

**Метод произведений дает удобный способ вычис­ления условных моментов различных порядков вариаци­онного ряда с равноотстоящими вариантами. Зная же условные моменты, нетрудно найти интересующие нас начальные и центральные эмпирические моменты. В част­ности, методом произведений удобно вычислять выбороч­ную среднюю и выборочную дисперсию. Целесообразно пользоваться расчетной таблицей, которая составляется так:**

1. **в первый столбец таблицы записывают выборочные (первоначальные) варианты, располагая их в возрастаю­щем порядке;**
2. **во второй столбец записывают частоты вариант; складывают все частоты и их сумму (объем выборки п) помещают в нижнюю клетку столбца;**
3. **в третий столбец записывают условные варианты ц,-= (х,—C)/h, причем в качестве ложного нуля С выби­рают варианту, которая расположена примерно в сере­дине вариационного ряда, и полагают h равным разности между любыми двумя соседними вариантами; практически же третий столбец заполняется так: в клетке строки, содержащей выбранный ложный нуль, пишут** 0**; в клет­ках над нулем пишут последовательно —**1**, —**2**, —3 и т.д., а под нулем—**1**,** 2**, 3 и т.д.;**
4. **умножают частоты на условные варианты и запи­сывают их произведения ц(и,- в четвертый столбец; сло­жив все полученные числа, их сумму ^п{и( помещают в нижнюю клетку столбца;**
5. **умножают частоты на квадраты условных вариант и записывают их произведения п,и? в пятый столбец; сложив все полученные числа, их сумму** 2**n,uf поме­щают в нижнюю клетку столбца;**
6. **умножают частоты на квадраты условных вариант, увеличенных каждая на единицу, и записывают произве­дения в шестой контрольный столбец; сложив**

**все полученные числа, их сумму** 2 **ni (и/ +** 1**)а помещают в нижнюю клетку столбца.**

Замечание 1. Целесообразно отдельно складывать отрица­тельные числа четвертого столбца (их сумму Аг записывают в клет­ку строки, содержащей ложный нуль) и отдельно положительные

16 2730

241

числа (их сумму Ая записывают в предпоследнюю клетку столбца); тогда 2n/“f\*=-4i + -4 •

Замечание 2. При вычислении произведений n/Uf пятого столбца целесообразно числа П/и/ четвертого столбца умножать на ы/.

Замечание 3. Шестой столбец служит для контроля вычис­лений: если сумма '£п{(и{+1)\* окажется равной сумме 2 п1и\ + 2 2 п1и1 +п (как я Д°лжн0 быть в соответствии с тождеством = п^’ то вычисления проведены

правильно.

**После того как расчетная таблица заполнена и про­верена правильность вычислений, вычисляют условные моменты:**

**М**1 **=** (2 **«/«/)/«. =**

**Наконец, вычисляют выборочные среднюю и диспер­сию по формулам (\*) и (\*\*\*\*) § 3:**

**х**, = **M\h** + С, **DB = [Ml—**(MI)\*] Л®.

Пример. Найти методом произведений выборочные среднюю и дисперсию следующего статистического распределения: варианты 10,2 10,4 10,6 10,8 11,0 11,2 11,4 11,6 11,8 12,0 частоты 2 3 8 13 25 20 12 10 6 1

Решение. Составим расчетную таблицу, для чего:

1. запишем варианты в первый столбец;
2. запишем частоты во второй столбец; сумму частот (100) по­местим в нижиюю клетку столбца;
3. в качестве ложного нуля выберем варианту 11,0 (эта вариан­та расположена примерно в середине вариационного ряда); в клетке третьего столбца, которая принадлежит строке, содержащей выбран­ный ложный нуль, пишем 0; над нулем записываем последовательно —1, —2, —3, —4, а под нулем — 1, 2, 3, 4, 5;
4. произведения частот на условные варианты записываем в чет­вертый столбец; отдельно находим сумму (—46) отрицательных и от­дельно сумму (103) положительных чисел; сложив эти числа, их сумму (57) помещаем в иижнюю клетку столбца;

о) произведения частот на квадраты условных вариант запишем в пятый столбец; сумму чисел столбца (383) помещаем в нижнюю клетку столбца;

1. произведения частот иа квадраты условных вариант, увели­ченных на единицу, запишем в шестой контрольный столбец; сумму (597) чисел столбца помещаем в нижнюю клетку столбца.

В итоге получим расчетную табл. 7.

Контроль: 2 «/“ < + 22 «.•«; + « = 383 + 2 • 57 + 10° = 597.

2 «Г <«/ + !)\* = 597.

Вычисления произведены правильно.

242

Таблица 7

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 6 |
| \*.• | Я« |  | п(и( | niui | п/(“, + 1)а |
| 10,2 | 2 | —4 | —8 | 32 | 18 |
| 10,4 | 3 | —3 | —9 | 27 | 12 |
| 10,6 | 8 | —2 | —16 | 32 | 8 |
| 10,8 | 13 | —1 | — 13 | 13 | 0 |
| 11,0 | 25 | 0 | Аг = —46 |  | 25 |
| 11,2 | 20 | 1 | 20 | 20 | 80 |
| 11,4 | 12 | 2 | 24 | 48 | 108 |
| П.6 | 10 | 3 | 30 | 90 | 160 |
| 11,8 | 6 | 4 | 24 | 96 | 150 |
| 12,0 | 1 | 5 | 5 | 25 | 36 |
|  |  |  | Л2= 103 |  |  |
|  | п — 100 |  | 2 я/И,-= 57 | 2я,-и? = 383 | 2 "\*<“/+1)2=597 |

Вычислим условные моменты первого и второго порядков:

Mi — (2 я, и,-)/я = 57/100 = 0,57;

Ml = (2 «/«;)/« = 383/100 = 3,83.

Найдем шаг: Л =10,4—10,2 = 0,2.

Вычислим искомые выборочные среднюю и дисперсию:

хв=М{к + С = 0,57-0,2 + 11,0= 11,1;

DB = [Л1а — (Л4\*)2] Аа = [ 3,83 — (0,57)а] • 0,2а = 0,14.

§ 5. Сведение первоначальных вариант к равноотстоящим

**Выше изложена методика расчета выборочных характеристик для равноотстоящих вариант. На прак­тике, как правило, данные наблюдений не являются рав­**

16\* 243

**ноотстоящими числами. Естественно, возникает вопрос: нельзя ли соответствующей обработкой наблюдаемых значений признака свести вычисления к случаю равноот­стоящих вариант? Оказывается, можно. С этой целью интервал, в котором заключены все наблюдаемые значе­ния признака (первоначальные варианты), делят на не­сколько равных частичных интервалов. (Практически в каждый частичный интервал должно попасть не менее** 8**—10 первоначальных вариант.) Затем находят середины частичных интервалов, которые и образуют последователь­ность равноотстоящих вариант.**

**В качестве частоты каждой «новой» варианты (середины частичного интервала) принимают общее число первона­чальных вариант, попавших в соответствующий частичный интервал.**

**Ясно, что замена первоначальных вариант серединами частичных интервалов сопровождается ошибками (перво­начальные варианты левой половины частичного интер­вала будут увеличены, а варианты правой половины уменьшены), однако эти ошибки будут в основном пога­шаться, поскольку они имеют разные знаки.**

Пример. Выборочная совокупность объема п— 100 задана табл. 8.

Составить распределение равноотстоящих вариант.

Решение. Разобьем интервал 1,00—1,50, например, на сле­дующие 5 частичных интервалов.

1,00—1,10; 1,10—1,20; 1,20—1,30; 1,30—1,40; 1,40—1,50.

Таблица 8

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| \*{ | я« | \*1 | п1 | \*1 | я. |
| 1,00 | 1 | 1,19 | 2 | 1,37 | 6 |
| 1,03 | 3 | 1,20 | 4 | 1,38 | 2 |
| 1,05 | 6 | 1,23 | 4 | 1,39 | 1 |
| 1,06 | 4 | 1,25 | 8 | 1,40 | 2 |
| 1,08 | 2 | 1,26 | 4 | 1,44 | 3 |
| 1,10 | 4 | 1,29 | 4 | 1,45 | 3 |
| 1,12 | 3 | 1,30 | 6 | 1,46 | 2 |
| 1,15 | 6 | 1,32 | 4 | 1,49 | 4 |
| 1.16 | 5 | 1,33 | 5 | 1,50 | 2 |

Приняв середины частичных интервалов, в качестве новых вариант у/, получим равноотстоящие варианты: yi=l,05; yt =1,15; у3 = 1,25; 1/4 — 1,35; ул =а 1,45.

244

Найдем частоту варианты угш

,1г=1+3 + 6 + 4 + 2 + 4/2=18

(Поскольку первоначальная варианта 1,10 Одновременно является концом первого частичного интервала и началом второго, частота 4 этой варианты поровну распределена между обоими частичными ин­тервалами )

Найдем частоту варианты у2'

яа = 4/2 + 3 + 6 + 5 + 2 + 4/2 = 20.

Аналогично вычислим частоты остальных вариант: я8 = 25; п« = 22; я6 = 15.

В итоге получим следующее распределение равноотстоящих ва­риант:

yt 1,05 1,15 1,25 1,35 1,45

я/ 18 20 25 22 15

Рекомендуем читателю убедиться, что выборочные средние и дис­персии, вычисленные по первоначальным и равноотстоящим вариан­там, окажутся соответственно равными.

хв= 1,250, ув= 1,246; £>\* = 0,018; Dv=0,017.

Как видим, замена первоначальных вариант равноотстоящими не при­вела к существенным ошибкам; при этом объем вычислительной работы значительно уменьшается.

§ 6. Эмпирические и выравнивающие (теоретические) частоты

А. Дискретное распределение. **Рассмотрим дис­кретную случайную величину X, закон распределения которой неизвестен. Пусть произведено п испытаний, в которых величина X приняла пг раз значение пг раз значение х2, ..., пк раз значение хк, причем** 2**^п, = п.**

**Эмпирическими частотами называют фактически на­блюдаемые частоты п,.**

**Пусть имеются основания предположить, что изуча­емая величина X распределена по некоторому определен­ному закону. Чтобы проверить, согласуется ли это пред? положение с данными наблюдений, вычисляют частоты наблюдаемых значений, т. е. находят теоретически частоту n't каждого из наблюдаемых значений в предпо­ложении, что величина X распределена по предполагае­мому закону.**

**Выравнивающими (теоретическими) в отличие от фак­тически наблюдаемых эмпирических частот называют частоты n't, найденные теоретически (вычислением). Вы­**

245

**равнивающие частоты находят с помощью равенства**

***П{* = *пР„***

**где п — число испытаний; Р{—вероятность наблюдаемого значения х/( вычисленная при допущении, что X имеет предполагаемое распределение.**

**Итак, *выравнивающая частота наблюдаемого значения* X/ *дискретного распределения равна произведению числа испытаний на вероятность этого наблюдаемого значения.***

Пример. В результате эксперимента, состоящего из л = 520 испы­таний, в каждом из которых регистрировалось число X/ появлений некоторого события, получено следующее эмпирическое распределение: набл. значения . . X/ 0 1 2 3 4567

эмп. частота . . п/ 120 167 130 69 27 5 1 1 Найти выравнивающие частоты п'( в предположении, что случайная величина X (генеральная совокупность) распределена по закону Пуассона.

Решение. Известно, что параметр А, которым определяется распределение Пуассона, равен математическому ожиданию этого распределения. Поскольку в качестве оценки математического ожи­дания принимают выборочную среднюю (см. гл. XVI, § 5), то и в качестве оценки А можно принять выборочную среднюю хв. Легко иайти по условию, что выборочная средняя равна 1,5, следовательно, можно принять А =1,5.

Таким образом, формула Пуассона

Рв(\*) = (А\*е-\*>/А!

принимает вид

Рио <\*)=(! ,5\* e-i.?)/fe!

Пользуясь этой формулой, найдем вероятности PR20(k) при k — 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (для простоты записи индекс 520 далее опущен): Р(0) = 0,22313, Р (1) = 0.33469, Р (2) = 0,251021, Р (3) = 0,125511, Р (4) = 0,047066, Р (5) =0,014120, Р (6) = 0,003530, Р (7) =0,000755.

Найдем выравнивающие частоты (результаты умножения округ­лены до единицы):

п[ = пР (0) = 520 • 0,22313 = 116, n't = пР (1) = 520-0,33469 = 174.

Аналогично находят и остальные выравнивающие частоты. В ито­ге получим:

эмп. частота . . 123 167 130 69 27 5 1 1

выр. частота . . 116 174 131 65 25 7 2 0

Сравнительно небольшое расхождение эмпирических и выравни­вающих частот подтверждает предположение, что рассматриваемое распределение подчинено закону Пуассона.

Заметим, что если подсчитать выборочную дисперсию по данному распределению, то окажется, это она равна выборочной средней, т. е. 1,5. Это служит еще одним подтверждением сделанного предпо­ложения, поскольку для распределения Пуассона К = М (X) = D (X).

246

Сравнения эмпирических и теоретических частот «на глаз», ко­нечно, недостаточно. Чтобы сделать это более обоснованно, надо использовать, например, критерий Пирсона (см. гл. XIX, § 23). Проверка гипотезы о распределении случайной величины по закону Пуассона изложена в книге: Гмурман В. Е. Руководство к реше­нию задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1972 (см. гл. XIII, § 17).

**Б. Непрерывное распределение. В случае непрерывного распределения, вероятности отдельных возможных значе­ний равны нулю (см. гл, X, §** 2**, следствие** 2**). Поэтому весь интервал возможных значений делят на k непересе- кающихся интервалов и вычисляют вероятности Р( попа­дания X в l-й частичный интервал, а затем, как и для дискретного распределения, умножают число испытаний на эти вероятности.**

**Итак, выравнивающие частоты непрерыв­ного распределения находят по равенству**

***п\* = *пР„***

**где п—число испытаний; Pt — вероятность попадания X в (-й частичный интервал, вычисленная при допущении, что X имеет предполагаемое распределение.**

**В частности, если имеются основания предположить, что случайная величина X (генеральная совокупность) распределена нормально, то выравнивающие частоты могут быть найдены по формуле**

**nh , . ,** .

**Я, = —Я>(и,), (#)**

**ив**

**где п — число испытаний (объем выборки), h—длина час­тичного интервала, ав — выборочное среднее квадрати­ческое отклонение, ui — (xi—хв)/ов (х{—середина t-ro**

**частичного интервала),**

**ф(и) = Т**1**не~"‘/!,‘**

**Пример иа применение формулы (\*) приведен в § 7.**

**Пояснение. Поясним происхождение формулы (\*). Напишем плотность общего нормального распределения:**

**/М = -р=-е-<'-«>\*/<з<а (\*\*)**

247

При а = 0 и о=1 получим плотность нормированного

распределения:

**или, изменив обозначение аргумента,**

**Положив и—{х—а)/о, имеем**

**ф (и) =-—=г- е“ (x-eiVCae\*), (\*\*\*)**

**Сравнивая (\*\*) и (\*\*\*), заключаем, что**

/ (\*) = \ Ф (“)•

**Если математическое ожидание а и среднее квадрати­ческое отклонение о неизвестны, то в качестве оценок этих параметров принимают соответственно выборочную среднюю хв и выборочное среднее квадратическое откло­нение ав (см. гл. XVI, § 5,9). Тогда**

/(\*) = •£- Ф(«).

**иВ**

**где *и* = *(х хв)/ов.***

**Пусть хI—середина i-ro интервала (на которые раз­бита совокупность всех наблюдаемых значений нормально распределенной случайной величины X) длиной h. Тогда вероятность попадания X в этот интервал приближенно равна произведению длины интервала на значение плот­ности распределения f (х) в любой точке интервала и, в частности, при х = х, (см. гл. XI, § 5):**

***P, = hf (Х[) =h-~(p* (ы,).**

В

**Следовательно, выравнивающая частота**

**п; = пР, = ^.ф(ц.),**

**где а\* = (х,-—х„)/ов. Мы получили формулу (\*). 248**

§ 7. Построение нормальной кривой по опытным данным

**Один из способов построения нормальной кривой по данным наблюдений состоит в следующем:**

1. **находят хв и ов, например, по методу произведений;**
2. **находят ординаты у{ (выравнивающие частоты)**

**теоретической кривой по формуле у( = ф-~ <р(и,-), где п —**

**"в**

**сумма наблюдаемых частот, h — разность между двумя соседними вариантами: и( — (Х(—хв)/ав и** <р(и) **=**

= **(l/Vr**2**n)e-",/\*;**

1. **строят точки (Xj, У() в прямоугольной системе ко­ординат и соединяют их плавной кривой.**

**Близость выравнивающих частот к наблюдаемым под­тверждает правильность допущения о том, что обследуе­мый признак распределен нормально.**

Пример. Построить нормальную кривую по данному распределе­нию:

варианты ... X/ 15 20 25 30 35 40 45 50 55

частоты ... я,- 6 13 38 74 106 85 30 10 4

Решение. Пользуясь методом произведений (см. § 4), найдем хв = 34,7, о„ = 7,38.

Вычислим выравнивающие частоты (табл. 9).

Таблица 9

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | п1 | \*«-\*в | \*1- | <Р(«,-) | = 24 8-ф (и,) |
|  |
| 15 | 6 | — 19,7 | —2,67 | 0,0113 | 3 |
| 20 | 13 | -14,7 | — 1,99 | 0,0551 | 14 |
| 25 | 38 | -9.7 | -1,31 | 0,1691 | 42 |
| 30 | 74 | -4,7 | —0,63 | 0,3271 | 82 |
| 35 | 106 | 0,3 | 0,05 | 0,3984 | 99 |
| 40 | 85 | 5,3 | 0,73 | 0,3056 | 76 |
| 45 | 30 | 10,3 | 1.41 | 0,1476 | 37 |
| 50 | 10 | 15,3 | 2,09 | 0,0449 | 11 |
| 55 | 4 | 20,3 | 2,77 | 0,0086 | 2 |
|  | п=366 |  |  |  | 2 У/= 366 |

249

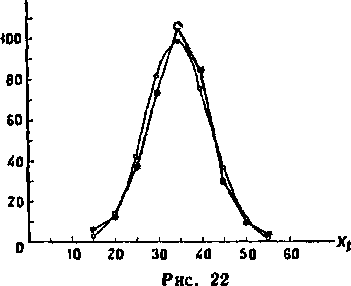
Yt

**На рис, 22 построены нормальная (теоретическая)  
кривая по выравнивающим частотам (они отмечены круж-  
ками) и полигон наблюдаемых частот (они отмечены**

**крестиками). Сравнение  
графиков наглядно по-  
казывает, что построен-  
ная теоретическая кри-  
вая удовлетворительно  
отражает данные на-  
блюдений.**

**Для того чтобы бо-  
лее уверенно считать,  
что данные наблюдений  
свидетельствуют о нор-  
мальном распределении  
признака, пользуются  
специальными правила-  
ми (их называют кри-**

**териями согласия), понятие о которых можно найти  
далее (см. гл. XIX, § 23).**



§ 8. Оценка отклонения эмпирического распределения от нормального.

Асимметрия и эксцесс

**Для оценки отклонения эмпирического распре­деления от нормального используют различные характе­ристики, к числу которых относятся асимметрия и эксцесс. Смысл этих характеристик аналогичен смыслу асимметрии и эксцесса теоретического распределения (см. гл. XII, §9).**

***Асимметрия эмпирического распределения* определяется равенством**

**a, = m„/oI,**

**где /л,— центральный эмпирический момент третьего порядка (см. §** 2**).**

***Эксцесс эмпирического распределения* определяется ра­венством**

***ek = mjal*—3,**

**где тА—центральный эмпирический момент четвертого порядка.**

**Моменты т8 и т8 удобно вычислять методом произ­ведений (см. § 4), используя формулы (\*\*\*) § 3.**

250

Пример. Найти асимметрию и эксцесс эмпирического распреде­ления:

варианта 10,2 10,4 10,6 10,8 11,0 11,2 11,4 11,6 11,8 12,0 частота 2 3 8 13 25 20 12 10 6 1

Решение. Воспользуемся методом произведений, для чего со­ставим расчетную табл. 10. Поскольку в § 4 указано, как заполня­ются столбцы 1—5 таблицы, ограничимся краткими пояснениями: для заполнения столбца 6 удобно перемножать числа каждой строки столбцов 3 и 5; для заполнения столбца 7 удобно перемножать числа каждой строки столбцов 3 и 6. Столбец 8 служит для контроля вычислений по тождеству:

2**m«,+ d\*=2 «/и?+\* 2 ntu?+6 2 niu\*+4 2 niui+п-**

Контроль: 2л/(«,+ 1)\* = 9141;

**2** nlut **+ 4 2** ni **+ 6 2л** № **+** 4 **2 л** № **+ л =**

= 4079 + 4-609 + 6-383-|-4-57-1-100 = 9141.

Таблица 10

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | S | 6 | 7 | 8 |
| Х1 | ni |  | Я1 “1 | ntuf | «Iй? | "f"? | л,-(«,.+ !)« |
| 10,2 | 2 | —4 | —8 | 32 | —128 | 512 | 162 |
| 10,4 | 3 | —3 | —9 | 27 | —81 | 243 | 48 |
| 10,6 | 8 | —2 | — 16 | 32 | —64 | 128 | 8 |
| 10,8 | 13 | —1 | —13 | 13 | — 13 | 13 | — |
| 11,0 | 25 | 0 | —46 |  | —286 |  | 25 |
| 11,2 | 20 | 1 | 20 | 20 | 20 | 20 | 320 |
| 11,4 | 12 | 2 | 24 | 48 | 96 | 192 | 972 |
| 11,6 | 10 | 3 | 30 | 90 | 270 | 810 | 2560 |
| 11,8 | 6 | 4 | 24 | 96 | 384 | 1536 | 3750 |
| 12,0 | 1 | 5 | 5 | 25 | 125 | 625 | 1296 |
|  |  |  | 103 |  | 895 |  |  |
|  | п =  = 100 |  | 2 Л|Ы| =  =57 | =383 | 2 л,ы? - =609 | 2 л,и?= =4079 | 2ni iuI + +1)«=9141 |

251

Совпадение сумм свидетельствует о том, что вычисления произведены правильно.

В примере § 4 для рассматриваемого распределения было най­дено: М1 = 0,57; м£ = 3,83; D„ = 0,14, следовательно, ов= У 0,14. Найдем условные моменты третьего и четвертого порядка:

М\ = (2 я,-и?)/я = 609/100 = 6,09; М.\= (2 я,«?)/я=4079/100 = 40,79.

Найдем центральные эмпирические моменты третьего и четвер­того порядка:

**= Ш1м1 +** 2 **(Afl)\*] Л» =**

= (6,09 — 3 • 0,57 • 3,83 -f 2 • (0,57)» ] • 0,2\* = — 0,0007; т4 = [Ml — 4M\M\*3 + 6 (Ml)2 М\—3 (Ml)4] Л4 =

= [40,79 — 4.0,57 ■ 6,09 + 6 (0,57)2 • 3,83—3 • (0.57)4] • 0.24 = 0,054.

Найдем асимметрию и эксцесс:

ал = ma/al = (—0,0007)/( VXTi)3 = —0,01; е\*= mjai— 3= (0,054/( УТШ)4 — 3= —0,24.

Замечание. В случае малых выборок к оценкам асимметрии и эксцесса следует относиться с осторожностью и определить точ­ность этих оценок (см.: Смирнов Н. В. иДунин-Барков- ский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., «Наука», 1965, с. 277).

Задачи

В задачах 1 —2 даны выборочные варианты и их частоты. Найти, пользуясь методом произведений, выборочные среднюю и дисперсию. 1.

Х{ 10,3 10,5 10,7 10,9 11,1 11,3 11,5 11,7 11,9 12,1

П| 4 7 8 10 25 15 12 10 4 5

Отв. хв = 11,19, D„ = 0,19.

2.

х{ 83 85 87 89 91 93 95 97 99 101

я/ 6 7 12 15 30 10 8 6 4 2

Отв. \*”=90,72, D„= 17,20.

1. Найти асимметрию и эксцесс эмпирического распределения

Xi 10,6 10,8 11,0 11,2 11,4 11,6 11,8

п, 5 10 17 30 20 12 6

Отв. а, = —0,0006, е\* = 0,00004.

252

**Глава восемнадцатая ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ**

§ 1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости

**Во многих задачах требуется установить и оце­нить зависимость изучаемой случайной величины У от одной или нескольких других величин. Рассмотрим сначала зависимость Y от одной случайной (или неслучайной) величины X, а затем от нескольких величин (см. § 15).**

**Две случайные величины могут быть связаны либо функциональной зависимостью (см. гл. XII, § 10), либо зависимостью другого рода, называемой статистической, либо быть независимыми.**

**Строгая функциональная зависимость реализуется ред­ко, так как обе величины или одна из них подвержены еще действию случайных факторов, причем среди них могут быть и общие для обеих величин (под «общими» здесь подразумеваются такие факторы, которые воздействуют и на У и на X). В этом случае возникает статистическая зависимость.**

**Например, если Y зависит от случайных факторов Zi( У\*.** 3 **X зависит от случайных факторов Zlt Ztl Ul, то между У и X имеется статистическая зависимость, так как среди случайных факторов есть общие, а имен­но: Zx и Z2.**

**Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распреде­ления другой. В частности, статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется среднее значение другой; в этом случае ста­тистическую зависимость называют корреляционной.**

**Приведем пример случайной величины У, которая не связана с величиной X функционально, а связана кор­реляционно. Пусть У — урожай зерна, X — количество удобрений. С одинаковых по площади участков земли при равных количествах внесенных удобрений снимают различный урожай, т. е. У не является функцией от X. Это объясняется влиянием случайных факторов (осадки, температура воздуха и др.). Вместе с тем, как показы­вает опыт, средний урожай является функцией от количе­ства удобрений, т. е. У связан с X корреляционной зависи­мостью.**

253

§ 2. Условные средние

**В качестве оценок условных математических ожиданий (см. гл. XIV, § 15) принимают условные сред­ние, которые находят поданным наблюдений (по выборке).**

**Условным средним ух называют среднее арифметиче­ское наблюдавшихся значений У, соответствующих X — х. Например, если при хг = 2 величина У приняла значе­ния уг — Ъ, у% =** 6**, Уз — Ю, то условное среднее yXi — = (5 + 6+10)/3 = 7.**

**Аналогично определяется условное среднее ху.**

**Условным средним ху называют среднее арифметическое наблюдавшихся значений X, соответствующих У = у.**

**§ 3. Выборочные уравнения регрессии**

**В гл. XIV, § 15 были введены уравнения регрес­сии У на X и X на У:**

***М{У* | \*) = /(\*), *М{Х\у) = у{у).***

**Условное математическое ожидание М (У | х) является функцией от х, следовательно, его оценка, т. е. услов­ное среднее ух, также функция от х; обозначив эту функ­цию через /•(\*), получим уравнение**

**£\* = /•(\*)•**

**Это уравнение называют *выборочным уравнением регрес­сии У на X;* функцию /\* (х) называют *выборочной регрес­сией У на X,* а ее график*—выборочной линией регрес­сии У* на *X.* Аналогично уравнение**

**= Ф\* (У)**

**называют *выборочным уравнением регрессии X* на У; функ­цию ф\* *(у)* называют *выборочной регрессией X на У,* а ее график*—выборочной линией регрессии X на У.***

**Как найти по данным наблюдений параметры функ­ций /\*(х) и ф\*(у), если вид их известен? Как оценить силу (тесноту) связи между величинами А и У и устано­вить, коррелированы ли эти величины? Ответы на эти вопросы изложены ниже.**

254

§ 4. Отыскание параметров выборочного уравнения Прямой линии среднеквадратичной регрессии по несгруппированным данным

**Пусть изучается система количественных приз­наков (X, У). В результате п независимых опытов полу­чены п пар чисел (xlt ух), (ха у„), (хп, у„).**

**Найдем по данным наблюдений выборочное уравнение прямой линии среднеквадратичной регрессии (см. гл. XIV, § 20). Для определенности будем искать уравнение**

***yx=:kx + b***

**регрессии У на X.**

**Поскольку различные значения х признака X и соот­ветствующие им значения у признака У наблюдались по одному разу, то группировать данные нет необходи­мости. Также нет надобности использовать понятие услов­ной средней, поэтому искомое уравнение можно записать так:**

***у = kx* + *Ь.***

**Угловой коэффициент прямой линии регрессии У на X называют выборочным коэффициентом регрессии У на X и обозначают через рух, он является оценкой коэффици­ента регрессии р (см. гл. XIV, § 20).**

**Итак, будем искать выборочное уравнение прямой линии регрессии У на X вида**

***Y = pyxx + b.* (\*)**

**Подберем параметры рух и Ь так, чтобы точки (xt'• Ui) (х**2**> У** г) **(х„\ уп), построенные по данным наб­людений, на плоскости хОу лежали как можно ближе К прямой (\*). Уточним смысл этого требования. Назовем отклонением разность**

***Yi—У!* (t =** 1**,** 2**, *..п),***

**где Y/ — вычисленная по уравнению (\*) ордината, соответ­ствующая наблюдаемому значению х,-; у,•— наблюдаемая ордината, соответствующая х{.**

**Подберем параметры руХ и Ь так, чтобы сумма квад­ратов отклонений была минимальной (в этом состоит сущность метода наименьших квадратов). Так как каж­дое отклонение зависит от отыскиваемых параметров, то и сумма квадратов отклонений есть функция F этих**

255

параметров (временно вместо рух будем писать р):

**/Чр, Ь)= 2 \*//)а.**

**или**

***F(P>* &) =** 2 **(Р***Xi* ***+ b—y,)\*.***

***i=*** 1

**Для отыскания минимума приравняем нулю соответству­ющие частные производные:**

**QF Л**

ф = 2 2 (Р\*.- + b — yi)Xi = 0;

**| =** 2 **S** *(pXi* ***+ b—yi) = 0. t=* l**

**Выполнив элементарные преобразования, получим си­стему двух линейных уравнений относительно р и Ь\*}:**

**(**2**x**2**)p+(**2**\*)& =** 2**-^> (**2**\*)р+"&==**20**- (\*\*)**

**Решив эту систему, найдем искомые параметры:**

Pv\* = (» 2 **ХУ**—2\* ‘ 2 **уУ(п** 2 \*а ~ (2 \*)2);

=(2 \*а • 2 у—2 \* • 2 \*у)/(п 2 \*2—(2 \*)2)- (\*\*\*)

**Аналогично можно найти выборочное уравнение пря­мой линии регрессии X на У:**

***Ху=рхух + С,***

**где рХу — выборочный коэффициент регрессии X на Y.**

Пример. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии У на X по данным п = 5 наблюдений:

х 1,00 1,50 3,00 4,50 5,00

у 1,25 1,40 1,50 1,75 2,25

Решение. Составим расчетную табл. 11.

Найдем искомые параметры, для чего подставим вычисленные по таблице суммы в соотношения (\*\*\*):

рху = (5 • 26,975 — 15 • 8,15)/(5 • 57,5 — 152) = 0,202;

6 = (57,5-8,15—15-26,975)/62,5= 1,024.

\*> Для простоты записи вместо 2 условимся писать 2 •

**f=** 1

256

Таблица 11

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| xi | У1 | xi | xi«l |
| 1,00 | 1,25 | 1,00 | 1,250 |
| 1,50 | 1,40 | 2,25 | 2,100 |
| 3,00 | 1,50 | 9,00 | 4,500 |
| 4,50 | 1,75 | 20,25 | 7,875 |
| 5,00 | 2,25 | 25,00 | 11,250 |
| М  а  н  СП | 2^1 =8Л5 | 2 4 = 57,50 | 2 ад; =26,975 |

Напишем искомое уравнение регрессии:

К = 0,202\*+1,024.

Для того чтобы получить представление, насколько хорошо вы­численные по этому уравнению значения К,- согласуются с наблюдае­мыми значениями найдем отклонения К/—щ. Результаты вычис­лений приведены в табл. 12.

Таблица 12

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| \*1 | У.  , | у,- | V.-u. , У1 |
| 1,00 | 1,226 | 1,25 | —0,024 |
| 1,50 | 1,327 | 1,40 | —0,073 |
| 3,00 | 1,630 | 1,50 | 0,130 |
| 4,50 | 1,933 | 1,75 | 0,183 |
| 5,00 | 2,034 | 2,25 | —0,216 |

Как видно из таблицы, не все отклонения достаточно малы. Это объясняется малым числом наблюдений.

§ 5. Корреляционная таблица

При большом числе наблюденйй одно и то же значение **х** может встретиться **пх** раз, одно и то же зна­чение **у**— **пу** раз, одна и та же пара чисел (**х**, **у)** может наблюдаться **пху** раз. Поэтому данные наблюдений груп­пируют, т. е. подсчитывают частоты **пх, nv, п^.** Все сгруппированные данные записывают в виде таблицы, которую называют **корреляционной.**

17 — 2730

257

**Поясним устройство корреляционной таблицы на при­мере табл. 13.**

Таблица 13

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | X |  |  |
| V | 10 | 20 | 30 | 40 | пу |
| 0,4 | 5 |  | 7 | 14 | 26 |
| 0,6 | — | 2 | 6 | 4 | 12 |
| 0,8 | 3 | 19 | — | ~ | 22 |
| я\* | 8 | 21 | 13 | 18 | л = 60 |

**В первой строке таблицы указаны наблюдаемые зна­чения (10; 20; 30; 40) признака X, а в первом столбце — наблюдаемые значения (0,4; 0,6; 0,8) признака У. На пе­ресечении строк и столбцов находятся частоты пху наблю­даемых пар значений признаков. Например, частота 5 указывает, что пара чисел (10; 0,4) наблюдалась 5 раз. Все частоты помещены в прямоугольнике, стороны кото­рого проведены жирными отрезками. Черточка означает, что соответственная пара чисел, например (20; 0,4), не наблюдалась.**

**В последнем столбце записаны суммы частот строк. Например, сумма частот первой строки «жирного\* прямо­угольника равна «„ = 5 +7 +.14 = 26; это число указы­вает, что значение признака У, равное 0,4 (в сочетании с различными значениями признака X), наблюдалось 26 раз.**

**В последней строке записаны суммы частот столбцов. Например, число** 8 **указывает, что значение призрака X, равное** 10 **(в сочетании с различными значениями при­знака У), наблюдалось** 8 **раз.**

**В клетке, расположенной в нижнем правом углу таблицы, помещена сумма всех частот (общее число всех наблюдений п). Очевидно, == 2Л» = п‘ В нашем при­мере**

**2лж =** 8 **+ 21 + 13+18 = 60 и 2л« = 26+12 + 22 = 60-**

258

§ в. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии регрессии по сгруппированным данным

**В § 4 для определения параметров уравнения  
прямой линии регрессии У на X была получена система**

**уравнений**

**(2 ха) + (2**х) ь **“ 2 \*У>**

**(2\*)Р»\*+"& = 2 У-**

**Предполагалось, что значения X и соответствующие  
им значения У наблюдались по одному разу. Теперь же  
допустим, что получено большое число данных (практи-  
чески для удовлетворительной оценки искомых парамет-  
ров должно быть хотя бы 50 наблюдений), среди них есть  
повторяющиеся, и они сгруппированы в виде корреля-  
ционной таблицы. Запишем систему (\*) так, чтобы она  
отражала данные корреляционной таблицы. Восполь-  
зуемся тождествами:**

**= (следствие из х =** 2**х/п):**

**2 У “ пУ (следствие из у = 2 У/пУ>**

2**х**2 **= «х\* (следствие из х2 =** 2**\***1**/л).**

**2Х0“2Я\*»Х0 (учтено, что пара чисел (х, у) наблюда-  
лась пЖу раз).**

**Подставив правые части тождеств в систему (\*) и со-  
кратив обе части второго уравнения на п, получим**

**(пх1) ру, + (fix) Ъ =** 2 **пху ху,**

***(х)руХ+Ь=у.***

**Решив эту систему, найдем параметры pv\* и ft и, следо­вательно, искомое уравнение**

***Ух^РухХ + Ь.***

**Однако более целесообразно, введя новую величину — выборочный коэффициент корреляции, написать уравне­ние регрессии в ином виде. Сделаем это. Найдем Ь из второго уравнения (\*\*):**

**(\*\*)**

**(\*)**

17\*

***Ь = у—рухх.***

259

**Подставив правую часть этого равенства в уравнение Ух=Рухх + Ь, получим**

***Ух—У = Рух (х — х).* (\*\*\*)**

**Найдем \*> из системы (\*) коэффициент регрессии, учи­тывая, что х\* — (х)2 — а2х (см. гл. XVI, § 10):**

2 *п\*у\*У—пхУ* S *пхуху — пху*

***Рух* '**

а

п [х1-(\*)\*] па‘х

**Умножим обе части равенства на дробь ox/oyi**

***Ъх* S *пху\*У—пху***

U г X J ли zj а . I

**Рух'^ ~** 1 **• (\*\*\*\*)**

О,, nCTjjfO'y

**Обозначим правую часть равенства через гв и назовем ее выборочным коэффициентом корреляции (см. замечание 3):**

2 *пхуху—пху*

**Подставим гв в (\*\*\*\*):**

Р ***ух°х/°у —*** *Г1*

**Отсюда**

***РуХ '■***

***:Г***

***ач***

***Ох'***

В •

**Подставив правую часть этого равенства в (\*\*\*), оконча­тельно получим выборочное уравнение прямой линии регрессии У на X вида**

***Ух—У = г* „ ^**

***Ох***

Замечание 1. Аналогично находят выборочное уравнение прямой линии регрессии X на К вида

***\*у-х = гв (у —У),***

***Оу***

где *ГвОх/Оу — рХу*

\*> В этой\* главе выборочное среднее квадратическое отклонение обозначено через о; например, ах — выборочное среднее квадратиче­ское отклонение X.

260

Замечание 2. Уравнения выборочных прямых регрессии можно записать в более симметричной форме:

Ух—У х—х Ху—х у—у

— = ,—— = гв-^— .

Оу ах ах Оу

Замечание 3. Выборочный коэффициент корреляции является оценкой коэффициента корреляции

г..\_ ***Vxv \_\_\_M(XY)-M(X).M(Y)***

ОхОу ОхОу

Действительно, используя метод моментов (см. гл. XVI, § 21), т. е. заменив числовые характеристики их оценками, получим

[(2 пху\*у)1”\ *—~\*У* 2 ПхУху ~ *п\*у~*

Гя = =-г S7T= .

охОу пахОу

§ 7. Выборочный коэффициент корреляции

**Как следует из предыдущего параграфа, выбо­рочный коэффициент корреляции определяется равенством**

***'ЕпхуХу — пху*** Гв — ~ *9*

***пахОу***

**где х, у—варианты (наблюдавшиеся значения) признаков X и К; пху—частота пары вариант (х, у); п—объем выборки (сумма всех частот); ах, ау—выборочные средние квадратические отклонения; х, у—выборочные средние.**

**Известно, что если величины Y и X независимы, то коэффициент корреляции г=0 (см. гл. XIV, § 17); если / = ±**1**,тоК и X связаны линейной функциональной зависимостью (см. гл. XIV, § 20). Отсюда следует, что коэффициент корреляции г измеряет силу (тесноту) ли­нейной связи между Y и X.**

**Выборочный коэффициент корреляции гв является оценкой коэффициента корреляции г генеральной сово­купности и поэтому также служит для измерения линей­ной связи между величинами—количественными призна­ками Y и X. Допустим, что выборочный коэффициент корреляции, найденный по выборке, оказался отличным от нуля. Так как выборка отобрана случайно, то отсюда еще нельзя заключить, что коэффициент корреляции ге­неральной совокупности также отличен от нуля. Возни­кает необходимость проверить гипотезу о значимости (существенности) выборочного коэффициента корреляции**

261

**(или, что то же, о равенстве нулю коэффициента корре­ляции генеральной совокупности). Если гипотеза о равен­стве нулю генерального коэффициента корреляции будет отвергнута, то выборочный коэффициент корреляции зна­чим, а величины X и Y коррелированы; если гипотеза принята, то выборочный коэффициент корреляции незна­чим, а величины X и Y не коррелированы.**

**Проверка гипотезы о значимости выборочного коэф­фициента корреляции для случая нормальной корреляции изложена далее (см. гл. XIX, § 21).**

**Если выборка имеет достаточно большой объем и хорошо представляет генеральную совокупность (репре­зентативна), то заключение о тесноте линейной зависимо­сти между признаками, полученное по данным выборки, в известной степени может быть распространено и на генеральную совокупность. Например, для оценки коэф­фициента корреляции гг нормально распределенной гене­ральной совокупности (при п ^ 50) можно воспользо­ваться формулой**

**гв—3 < гг < гв + 3 l±d**,

**в /л г в V п**

Замечание 1. Знак выборочного коэффициента корреляции совпадает со знаком выборочных коэффициентов регрессии,> что сле­дует из формул (см. § 6):

Рух = ra^i; рж = гв?£. (\*)

**о\* " ау**

Замечание 2. Выборочный коэффициент корреляции равен среднему геометрическому выборочных коэффициентов регрессии. Действительно, перемножив левые и правые части равенств (\*), получим

РхуРху—

Отсюда

i г ***РухРху***

Знак при радикале в соответствии с замечанием 1 должен совпадать со знаком коэффициентов регрессии.

§ 8. Методика вычисления выборочного коэффициента корреляции

**Пусть требуется по данным корреляционной таблицы вычислить выборочный коэффициент корреляции. Можно значительно упростить расчет, если перейти к**

262

**условным вариантам (при этом величина г„ не изменится)**

***ui = (xl—Cl)lhi* и**

**В этом случае выборочный коэффициент корреляции вы­числяют по формуле**

***Гв* = (2** ***nBVuv—nuv)/(noa6v).***

**Величины и, v, ои и ov можно найти методом произве­дений (см. гл. XVII, § 4), а при малом числе данных — непосредственно исходя из определений этих величин. Остается указать способ вычисления 2 navuv, где nav — частота пары условных вариант (и, v).**

**Можно доказать, что справедливы формулы (см. пояс­нение в конце параграфа):**

***]jjnavuo=\*]jjvU,* где *U=2navu,***

2«0рМУ = 2“^\* гДе ^“2n«vv-

**Для контроля целесообразно выполнить расчеты по обеим формулам и сравнить результаты; их совпадение свидетельствует о правильности вычислений.**

**Покажем на примере, как пользоваться приведенными формулами.**

Пример 1. Вычислить У, n„„uv по данным корреляционной табл. 14.

Таблица 14

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X | | | | | | п  V |
| Y | 10 | 20 | 30 | 40 | so | 60 |
| 15 | 5 | 7 | — | — | — | — | 12 |
| 25 | — | 20 | 23 | — | — | — | 43 |
| 35 | — | — | 30 | 47 | 2 | — | 79 |
| 45 | — | — | 10 | 11 | 20 | 6 | 47 |
| 55 | — | — | — | 9 | 7 | 3 | 19 |
|  | 5 | 27 | 63 | 67 | 29 | 9 | п = 200 |

263

Решение. Перейдем к условным вариантам: щ = {Х{—Ci)/Ai = вв (х,- — 40)/10 (в качестве ложного нуля Сх взята варианта х = 40, расположенная примерно в середине вариационного ряда; шаг Ах равен разности между двумя соседними вариантами: 20—10 = 10) и vj = (t/j — C2)/h2 = ({// — 35)/10 (в качестве ложного нуля С, взята варианта у = 35, расположенная в середине вариационного ряда; шаг h2 равен разности между двумя соседними вариантами: 25 — 15=10).

Составим корреляционную таблицу в условных вариантах. Прак­тически это делают так: в первом столбце вместо ложного нуля С2 (варианты 35) пишут 0; над нулем последовательно записывают —1, —2; под нулем пишут 1, 2. В первой строке вместо ложного нуля Сг (варианты 40) пишут 0; слева от нуля последовательно записывают —1, —2, —3; справа от нуля пишут 1, 2. Все остальные данные переписывают из первоначальной корреляционной таблицы. В итоге получим корреляционную табл. 15 в условных вариантах.

Таблица 15

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V |  |  | и | | | |  |
| -3 | -2 | - 1 | 0 | 1 | 2 |
| —2 | 5 | 7 | — | — | — | — | 12 |
| — 1 | — | 20 | 23 | — | — | — | 43 |
| .0 | — | — | 30 | 47 | 2 | — | 79 |
| 1 | — | — | 10 | II | 20 | 6 | 47 |
| 2 | — | — | — | 9 | 7 | 3 | 19 |
| па | 5 | 27 | 63 | 67 | 29 | 9 | л = 200 |

Теперь для вычисления искомой суммы 2jtiavuo составим рас­четную табл. 16. Пояснения к составлению табл. 16:

1. В каждой клетке, в которой частота nuv ф 0, записывают в правом верхнем углу произведение частоты па~ на варианту и. Например, в правых верхних углах клеток первой строки записаны произведения: 5-(—3) = —15; 7-(—2) = —14.
2. Складывают все числа, помещенное в правых верхних углах клеток одной строки и их сумму записывают в клетку этой же строки столбца U. Например, для первой строки U =—15 + (—14)=—29.
3. Умножают варианту v на U н полученное произведение заци- сывают в последнюю клетку той же строки, т. е, в клетку столбца vU. Например, в первой строке таблицы v — —2, U— — 29; следо­вательно, vU = (—2) ■ (—29) = 58.
4. Наконец, сложив все числа столбца vU, получают сумму

2 oU, которая равна искомой сумме 2 nar^v- Например, для табл. 16 о

имеем 2 vU = 169; следовательно, искомая сумма 2 natluv= 169.

264

**Таблица 16**

**£**

in

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| V | и | | | | | | 1 V=  i | vU |
| -3 | -2 | -l | 0 | I | 2 |
| -2 | h!L  5  -)0| | izIL  7  —14 | — | — | — | II ~29  II | | 58 |
| —1 | — | |-40 20 —20| | 1—23  23  -23 | — | — | j —63 | | 63 |
| 0 | — | \*\*\* | 1—30  30  0 | LSL  47  0 1 | 2  2  o 1 | — | | —28 | 0 |
| 1 | — | - | -10  10 10 1 | 0  11  и ! | [ 20 20 20 | | ЦЦ 22 -ir\ II | | 22 |
| 2 |  | — |  | L2\_  9  18 | | l\_L  7  14 | | зЧ 13  6 1 II | | 26 |
| v-Sw | -10 | —34 | -13 | 29 | 34 | 12 1 | | 2^ = 169  V |
| uV | 30 | 68 | 13 | 0 | 34 | 24 huV-Ш  u | | «"Контроль! |

Для контроля аналогичные вычисления производят по столбцам: произведения пЦ1,и записывают в левый нижний угол клетки, содер­жащей частоту nBV Ф 0; все числа, помещенные в левых нижних углах клеток одного столбца, складывают и их сумму записывают в строку V; далее умножают каждую варианту и на V и результат записывают в клетках последней строки.

Наконец, сложив все числа последней строки, получают сумму 2“^\* которая также равна искомой сумме 2 <^avuv- Например, для

***U***

табл. 16 имеем 2 “V = ^9; следовательно, 2 nuvuv= 169.

и

**Теперь, когда мы научились вычислять ]£natluv, при­ведем пример на отыскание выборочного коэффициента корреляции.**

Пример 2. Вычислить выборочный коэффициент корреляции Г\*\*= (2 Huvuv—лыо)/(по0о„) по данным корреляционной табл. 14.

Решение. Перейдя к условным вариантам, получим корреля­ционную табл. 15. Величины и, о, Ъа н Ъ0 можно вычислить методом произведений; однако, поскольку числа и/, V/ малы, вычислим ы и U, исходя из определения средней, а ов и о^ — используя формулы (см. гл. XVI, § 10)

*ои = Уи2—(и)2, av=yv2 — (v)2.*

Найдем и и о:

U = (2 —3)Ч-27-(—2) + 63.(—1)+29-1 +

Ч-9-2]/200 = — 0,425; v = (2 nvv)ln = 112. (—2) 4- 43 • (—1) + 47 • 1 +19 • 2]/200 = 0,09.

Вычислим вспомогательную величину и2, а затем ов:

«а = С5 п„и2)/л = (5.9 + 27.4 + 63.1 + 29-1 + 9-4)/200= 1,405;

Ъи — Уи2 — (й)\* = У 1,405 —(0,425)\*= 1,106.

Аналогично получим ог„= 1,209.

Найдем искомый выборочный коэффициент корреляции, учитывая, что ранее уже вычислена сумма 2 nuvuv== 169:

**Г, = (2 *пруих)— nuv)l{nauov)* =**

= [ 169 — 200 • (—0,425) • 0,091/(200 -1,106-1,209) = 0,603.

Итак, гв = 0,603.

Пояснение. Покажем, что 2 я„,,цр = 2 . гДе ££ = 2 nuvu•

V и

Рассмотрим корреляционную таблицу в условных вариантах (для про­стоты таблица содержит мало данных):

266

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | и |  |
| о | “t |  | “з |
|  | пи ,1'1 | nUi t»i | nttaVl |
| ”2 | па tVi |  | па,Ъж |

Найдем 2 nttVuv двумя способами: суммируй произведения частот лот на произведения соответствующих условных вариант uv по строкам и по столбцам. Для первой строки таблицы

пии>Г nUlVl' ntUVl'

(UsoJ = vt 2 naviU‘ (\*)

***u***

Для второй строки таблицы

\* (^1^2) Ч" ntttoa' 4" ‘ (“\*»\*>=fs 2 Ящ;, U. (\*\*)

**u**

Сложим (\*) и (\*\*-):

2 *n-uvuv* = »i2 *nUOln* + o2 2 *nav%u. и и*

Итак,

2 *n^uv^^vU, v*

где (/ = 2v-

***и***

Аналогично, суммируя произведения частот пт на произведения соответствующих условных вариант uv по столбцам, получим

2n0„uo = 2uV,>

и

где V = 2' nuvv-

**§ 9. Пример на отыскание выборочного уравнения прямой линии регрессии**

**Теперь, когда известно, как вычисляют г„ уме­стно привести пример на отыскание уравнения прямой линии регрессии.**

**Поскольку при нахождении гв уже вычислены и, о, а0, av, то целесообразно пользоваться формулами:**

***Ъх* = /ijO д, *о у = htav, x = uh1+c*1, *y = vh3+ct.***

**Здесь сохранены обозначения предыдущего параграфа. Рекомендуем читателю самостоятельно вывести эти фор­мулы.**

267

Пример. Найтн выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным корреляционной табл. 14 примера предыдущего параграфа.

Решение. Напишем искомое уравнение в общем виде:

Ъу

*Ух — У=гв — (х — х).* (\*)

**о\***

Коэффициент корреляции уже вычислен в предыдущем параграфе. Остается найти х. у, аж и ау:

х = uh1-\-Ci = — 0,425-10 + 40 = 35,751 у = оЛа + Са = 0,09-10 + 35 = 35,9; ож=о„Л1= 1,106-10= 11,06; о„=о„Л,= 1,209-10= 12,09. Подставив найденные величины в (\*), получим искомое уравнение

12 09

Ух — 35,9=0,603 (ж—35,75),

или окончательно

Ух — 0,659\*+12,34.

Сравним условные средние, вычисленные: а) по этому уравнению; б) по данным корреляционной табл. 14. Например, при х = 30:

а) £,о = 0.659.30+ 12,34 = 32,11;

б) у,о = (23.25 + 30-35+10-45)/63 = 32,94.

Как видим, согласование расчетного и наблюдаемого условных средних — удовлетворительное.

§ 10. Предварительные соображения к введению меры любой корреляционной связи

**Выше рассматривалась оценка тесноты линейной корреляционной связи. Как оценить тесноту любой корреляционной связи?**

**Пусть данные наблюдений над количественными при­знаками X и Y сведены в корреляционную таблицу. Можно считать, что тем самым наблюдаемые значения У раз­биты на группы; каждая группа содержит те значения Y, которые соответствуют определенному значению X. На­пример, дана корреляционная табл. 17.**

**К первой группе относятся те 10 значений Y (4 раза наблюдалось уг = 3 и** 6 **раз у2 = 5), которые соответст­вуют xt —** 8**.**

**Ко второй группе относятся те 20 значений Y (13 раз наблюдалось ух = 3 и 7 раз уг = 5), которые соответствуют \*а = 9.**

268

Таблица 17

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Y | X | |
| 3 | 9 |
| 3 | 4 | 13 |
| 5 | 6 | 7 |
|  | 10 | 20 |
| Ух | 4,2 | 3.7 |

**Условные средние теперь можно назвать групповыми средними: групповая средняя первой группы у, =**

**= (**4.36**•** 5**)/Ю = 4,2; групповая средняя второй группы**

**у9 = (13 • 3 + 7 • 5)/20 = 3,7.**

**Поскольку все значения признака У разбиты на груп­пы, можно представить общую дисперсию признака в виде суммы внутригрупповой и межгрупповой дисперсий (см. гл. XVI, § 12):**

**^общ ~ ^внгр + ^межгр' (\*)**

**Покажем справедливость следующих утверждений:**

1. **если У связан с X функциональной зависимостью,**

**то**

**^иежгр/^общ =**

1. **если У связан с X корреляционной зависимостью,**

**то**

**^иежгр/^общ** 1 **•**

**Доказательство. 1) Если У связан с X функ­циональной зависимостью, то определенному зна­чению X соответствует одно значение У. В этом случае в каждой группе содержатся равные между собой значе­ния У\*\ поэтому групповая дисперсия каждой группы равна нулю. Следовательно, средняя арифметическая**

\*> Например, если значению дсх = 3 соответствует yi = 7, причем Xi = 3 наблюдалось 5 раз, то в группе содержится 5 значений У\ = 7.

269

**групповых дисперсий (взвешенная по объемам групп), т. е. внутригрупповая дисперсия £>в„гр =** 0 **и равенство (\*), имеет вид**

А>бщ = ^иежгр\*

**Отсюда**

**^иежгр/^общ ”** 1 **•**

1. **Если У связан с X корреляционной зави­симостью, то определенному значению X соответствуют, вообще говоря, различные значения У (образующие груп­пу). В атом случае групповая дисперсия каждой группы отлична от нуля. Следовательно, средняя арифметическая групповых дисперсий (взвешенная по объемам групп) Атгр\***5**\***0**. Тогда одно положительное слагаемое УЭиежГ| меньше суммы двух положительных слагаемых DBHrp+**

**^межгр** ^общ\*

**^кежгр** ^общ\*

**Отсюда**

**■^иежгр/^общ ^**

**Уже из приведенных рассуждений видно, что чем связь между признаками ближе к функциональной, тем меньше DBirrp и, следовательно, тем больше приближается DMe>Krp к £)ойщ, а значит, отношение Г>межгр/Ообщ—к единице. Отсюда ясно, что целесообразно рассматривать в качестве меры тесноты корреляционной зависимости отношение межгрупповой дисперсии к общей, или, что то же, отно­шение межгруппового среднего квадратического отклоне­ния к общему среднему квадратическому отклонению.**

**§ 11. Выборочное корреляционное отношение**

**Для оценки тесноты линейной корреляционной связи между признаками в выборке служит выборочный коэффициент корреляции. Для оценки тесноты нелиней­ной корреляционной связи вводят новые сводные ха­рактеристики:**

**—выборочное корреляционное отношение У к X; —выборочное корреляционное отношение X к У.**

**Выборочным корреляционным отношением У к X на­зывают отношение межгруппового среднего квадратиче­ского отклонения к общему среднему квадратическому**

270

отклонению признака У:

'П ух = ®иежгр/\*^общ\*

**или в других обозначениях**

**Tto\*==**0**jrj/<V**

8**десь**

**<\*ух =** V **Dut жгр = К(2 «\*(£\*—Р)\*)/«;**

°U=V ***&o6m*** = V(2inviy—У)\*)/п,

**где п—объем выборки (сумма всех частот); пх—частота значения х признака X; пр—частота значения у признака У; у—общая средняя признака К; ух—условная средняя признака У,**

**Аналогично определяется выборочное корреляционное отношение X к Ух**

TJ,ty — o-Jox.

Пример. Найти по данным корреляционной табл. 18.

Таблица 18

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Y | X | | | |
| 10 | 20 | 30 | Пу |
| 15 | 4 | 28 | 6 | 38 |
| 25 | 6 | — | 6 | 12 |
| я\* | 10 | 28 | 12 | л=50 |
| Ух | 21 | 15 | 20 |  |

Решение. Найдем общую среднюю:

У= (2 = (38.15+12.25)/50 — 17,4.

Найдем общее среднее квадратическое отклонение:

**оу =К**(2 **rtv (У—1/)ъ)1п =**

«= V[38 (15 — 17,4)\*+12 (25- 17,4)а]/50 = 4,27.

271

Найдем межгрупповое среднее квадратическое отклонение:

***°-х*==**

= [ 10 (21 — 17,4)2 + 28 (15— 17,4)2+ 12 (20— 17.4)2]/50 = 2,73. Искомое корреляционное отношение

г\уЖ = а — /су= 2,73/4,27 = 0,64. ух

§ 12. Свойства выборочного корреляционного отношения

**Поскольку 'Пд.у обладает теми же свойствами, что и i\UXf перечислим свойства только выборочного корре­ляционного отношения х\ух, которое далее для упрощения записи будем обозначать через т) и для простоты речи называть «корреляционным отношением».**

**Свойство 1. *Корреляционное отношение удовлетво­ряет двойному неравенству***

0**<т)<**1**.**

**Доказательство. Неравенство следует из**

**того, что г) есть отношение неотрицательных чисел — средних квадратических отклонений (межгруппового к общему).**

**Для доказательства неравенства rj ^ 1 воспользуемся формулой**

**П„бщ = ПВНГр -J- Оиежгр.**

**Разделив обе части равенства на Do6m, получим**

^ ^внгр/^общ "I- ^межгр/^общ|

ИЛИ

**^ ^ВнГр/ПОЙщ 4" !)\*•**

**Так как оба слагаемых неотрицательны и сумма их равна единице, то каждое из них не превышает единицы; в част­ности, т|а< 1. Приняв во внимание, что rj^O, заключаем:**

0**<т)<**1**.**

**Свойство 2. *Если* т] = 0, *то признак Y с призна­ком X корреляционной зависимостью не связан.* Доказательство. По условию,**

Ч = е жгрЛ^общ = 0.

**Отсюда сги,жгр = 0 и, следовательно, Пиежгр = 0.**

272

**Межгрупповая дисперсия есть дисперсия условных (групповых) средних ух относительно общей средней у. Равенство нулю межгрупповой дисперсии означает, что при всех значениях X условные средние сохраняют по­стоянное значение (равное общей средней). Иными словами, при г**)=-0 **условная средняя не является функцией от X, а значит, признак У не связан корреляционной зависи­мостью с признаком X.**

Замечание 1. Можно доказать и обратное предложеине: если признак Y не связан с признаком X корреляционной зависимостью, то г) = 0.

**Свойство 3. *Если* т] = 1, *то признак Y связан с при­знаком X функциональной зависимостью.***

**Доказательство. По условию,**

**Возведя обе части равенства в квадрат, получим**

**Поскольку внутригрупповая дисперсия есть средняя арифметическая групповых дисперсий (взвешенная по объ­емам групп), то из (\*\*) следует, что дисперсия каждой группы (значений У, соответствующих определенному значению X) равна нулю. А это означает, что в группе содержатся равные значения Y, т. е. каждому значению X соответствует одно значение Y. Следовательно, при rj = 1 признак Y связан с признаком X функциональной зависимостью.**

Замечание 2. Можно доказать и обратное предположение: если признак Y связан с признаком X функциональной зависимостью, то Т)= I.

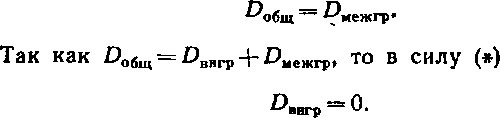
**Приведем еще два свойства, опустив доказательства.**

**Свойство 4. *Выборочное корреляционное отношение***



**Отсюда**

®общ ®кежгр



**(\*)**

**(\*\*)**

18 — 2730

273

***не меньше абсолютной величины выборочного коэффициента корреляции: г\^* | *гв* |.**

**Свойство 5. *Если выборочное корреляционное отно­шение равно абсолютной величине выборочного коэффи­циента корреляции, то имеет место точная линейная корреляционная зависимость.***

**Другими словами, если т]==|гв|, то точки (х^ ух), (х2; ух), ..., {хп\ уп) лежат на прямой линии регрессии, найденной способом наименьших квадратов.**

**§ 13. Корреляционное отношение как мера корреляционной связи. Достоинства и недостатки этой меры**

**В предыдущем параграфе установлено: прит**1 **= 0 признаки не связаны корреляционной зависимостью; при Л**=1 **имеет место функциональная зависимость.**

**Убедимся, что с возрастанием т] корреляционная связь становится более тесной. С этой целью преобразуем соот­ношение Д,бщ = £>в„грЧ-£>межгр так:**

^внгр = ^общ [ ^ (^межгр/^обиц)]\*

ИЛИ

**^внгр ~ ^общ ( ^ ^2) •**

**Если т] —► 1, то DBHrp —- 0, следовательно, стремится к нулю и каждая из групповых дисперсий. Другими словами, при возрастании г| значения Y, соответствующие опреде­ленному значению X, все меньше различаются между собой и связь Y с X становится более тесной, переходя в функциональную при т]=**1**.**

**Поскольку в рассуждениях не делалось никаких до­пущений о форме корреляционной связи, т] служит мерой тесноты связи любой, в том числе и линейной, формы. В этом состоит преимущество корреляционного отношения перед коэффициентом корреляции, который оценивает тесноту лишь линейной зависимости. Вместе с тем кор­реляционное отношение обладает недостатком: оно не позволяет судить, насколько близко расположены точки, найденные по данным наблюдений, к кривой опре­деленного вида, например к параболе, гиперболе и т. д. Это объясняется тем, что при определении корреляцион­ного отношения форма связи во внимание не принималась.**

274

**§ 14. Простейшие случаи криволинейной корреляции**

**Если график регрессии yx = f (х) или ху == ср (у) изображается кривой линией, то корреляцию называют криволинейной.**

**Например, функции регрессии К на X могут иметь вид:**

**ух = аха + Ьх + с (параболическая корреляция второго порядка);**

**ух=-ах\* + Ьхг-\-сх-+-й (параболическая корреляция третьего порядка).**

**Для определения вида функции регрессии строят точки (х; ух) и по их расположению делают заключение о при­мерном виде функции регрессии; при окончательном ре­шении принимают во внимание особенности, вытекающие из сущности решаемой задачи.**

**Теория криволинейной корреляции решает те же за-, дачи, что и теория линейной корреляции (установление формы и тесноты корреляционной связи). Неизвестные параметры уравнения регрессии ищут методом наимень­ших квадратов. Для оценки тесноты криволинейной кор­реляции служат выборочные корреляционные отношения (см. §** 11**).**

**Чтобы выяснить суть дела, ограничимся параболиче­ской корреляцией второго порядка, предположив, что данные п наблюдений (выборки) позволяют считать, что имеет место именно такая корреляция. В этом случае выборочное уравнение регрессии К на X имеет вид**

***ух = Ах\* + Вх + С,* (\*)**

**где А, В, С—неизвестные параметры.**

**Пользуясь методом наименьших квадратов, получают систему линейных уравнений относительно неизвестных параметров (вывод опущен, поскольку он не содержит ничего нового сравнительно с § 4):**

(2 **л\*\*4) А +** (2 **пхХя) в** **+** (2 **л\*х2) С =** 2 **п^ухх\*\ \** (2л^3М+(2л\*\*а)я+(2л^)с=2л\*£\*\*; **\** (\*\*)

**(2 *пхХ\*) а* + (2 *П^х) В* + *пС* = 2 *пхУх*• J**

**Найденные из этой системы параметры А, В, С подстав­ляют в (\*); в итоге получают искомое уравнение регрессии.**

18\*

275

Пример. Найти выборочное уравнение регрессии У на X вида уж= Лх2 + Вх + С по данным корреляционной табл. 19.

Таблица 19

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| У | X | | | |
| 1 | 1.1 | 1,2 | "у |
| 6 | 8 | 2 | — | 10 |
| 7 | — | 30 | — | 30 |
| 7,5 | — | 1 | 9 | 10 |
| я\* | 8 | 33 | 9 | л = 50 |
| ~Ух | 6 | 6,73 | 7,5 |  |

Составим расчетную табл. 20. Подставив числа (суммы) нижней строки табл. 20 в (\*\*), получим систему

74,98 Л +67,48 В + 60,89 С = 413,93, 1 67,48 Л+60,89 В+ 55,10 С = 373,30, \

60,89 Л+55,10 В+ 50 С = 337,59. J

Решив эту систему, найдем: Л = 1,94, В = 2,98, С =1,10. Напишем искомое уравнение регрессии:

Ух= l,94x2 + 2,98x+1,10.

Легко убедиться, что условные средние, вычисленные по этому уравнению, незначительно отличаются от условных средних корре­ляционной таблицы. Например, при хх=1 найдем: по таблице У\ = 6; по уравнению 1,94+2,98+1,10=6,02. Таким образом, найденное уравнение хорошо согласуется с данными наблюдений (выборки).

§ 15. Понятие о множественной корреляции

До настоящего параграфа рассматривалась кор­реляционная связь между двумя признаками. Если же исследуется связь между несколькими признаками, то корреляцию называют **множественной.**

276

**В простейшем слу- °**

**чае число признаков «**

**равно трем и связь меж- “**

**ду ними линейная: ч**

***z = ax-\-by-\-c.* £**

**В этом случае возни­кают задачи:**

1. **найти по данным наблюдений выборочное уравнение связи вида**

***г = Ах + Ву + С,* (\*)**

**т. е. требуется найти коэффициенты регрес­сии Л и £ и параметр С;**

1. **оценить тесноту связи между Z и обо­ими признаками X, У;**
2. **оценить тесноту связи между Z и X (при постоянном К), между Z и Y (при по­стоянном X).**

**Первая задача ре­шается методом наи­меньших квадратов, причем вместо уравне­ния (\*) удобнее искать уравнение связи вида**

***г*—*z=A (х—х)* +**

***+ В {у—у),***

**где**

*Л*

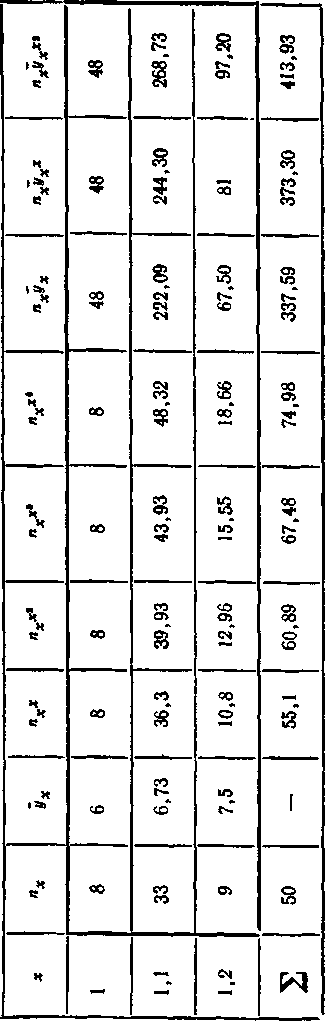
\_ *rxz ryzrxy &z*

J 2 \* t

1 — *Гху Ox*

\_ ryz тхгтху az  
*O —* —; 2 .

I — rxy Oy



277

**Здесь гХ2, ry2, rxg—коэффициенты корреляции соот­ветственно между признаками X и Z, У и Z, X и Y; ох, оу, а2—средние квадратические отклонения.**

**Теснота связи признака Z с признаками X, У оцени­вается выборочным совокупным коэффициентом корреляции**

***R***

Гхг—2г

*ху' хг’ уг*

*+* ***ri***

***уг***

1 **—*Г.***

*ху*

**причем** 1**.**

**Теснота связи между Z и X (при постоянном К), между Z и У (при постоянном X) оценивается соответ­ственно частными выборочными коэффициентами корре­ляции:**

*rxz rxyr yz т*

***XZly)~* ’**

*гуг гхугхг*

**Эти коэффициенты имеют те же свойства и тот же смысл, что и обыкновенный выборочный коэффициент корреляции, т. е. служат для оценки линейной связи между признаками.**

Задачи

В задачах 1—2 даны корреляционные табл. 21 и 22. Найти: а) гв< б) выборочные уравнения прямых регрессии; в) т)уж н т|жу.

Отв. к задаче 1. а) 0,636; б) уЛ=1,17 х +16,78, х„ = 0,345 у-\- + 1,67; в) т)„ж = 0,656, т]ж„ = 0,651.

278

Таблица 21

1.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | А | | | | | |
| Y | 5 | 10 | 15 | 20 | пу | ху |
| 10 | 2 | — | — | — | 2 | 5 |
| 20 | 5 | 4 | 1 | — | 10 | 8 |
| 30 | 3 | 8 | 6 | 3 | 20 | 12,25 |
| 40 | — | 3 | 6 | 6 | 15 | 16 |
| 50 | — | — | 2 | 1 | 3 | 16,67 |
| пх | 10 | 15 | 15 | 10 | п = 50 |  |
| Ух | 21 | 29,33 | 36 | 38 |  |  |

Таблица 22

2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| У | X | | | | | | | |
| 65 | 95 | 125 | 155 | 185 | 215 | пу |  |
| 30 | 5 |  |  |  |  |  | 5 | 65 |
| 40 | 4 | 12 | — | — | — | — | 16 | 87,5 |
| 50 | — | 8 | 5 | 4 | — | — | 17 | 101,18 |
| 60 | — | 1 | 5 | 7 | 2 | — | 15 | 145 |
| 70 | — | — | — |  | 1 | 1 | 2 | 200 |
|  | 9 | 21 | 10 | 11 | 3 | 1 | л = 55 |  |
| Ух | 34,44 | 44,76 | 55 | 56,36 | 63,33 | 70 |  |  |

279

Отв. к задаче 2. а) 0,825; б) ух = 0,23x4-21,78, ху = 2,92 у — — 27,25; в) г)„ж = 0,859, т)л„=0,875.

В задачах 3—4 найти выборочные уравнения регрессии ух = = Лх\*-1-£х-|-С по данным корреляционных табл. 23 и 24.

Таблица 23

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| У | X | | | |
| 2 | 3 | | S | "у |
| 25 | 20 | — | — | 20 |
| 45 | — | 30 | 1 | 31 |
| 110 | — | 1 | 48 | 49 |
|  | 20 | 31 | 49 | «=100 |

Отв. ух = 2,94 х2-|-7,27 х— 1,25.

Таблица 24

**4.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| У | X | | |
| 1 | 2 | пи |
| 2 | 30 | 1 | 31 |
| 6 | 1 | 18 | 19 |
| п\* | 31 | 19 | 3  II  сл о |

Отв. у\* =0,39 x\*-f2,49 \* — 0,75.

280

Глава девятнадцатая

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

§ 1. Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая, простая и сложная гипотезы

**Часто необходимо знать закон распределения генеральной совокупности. Если закон распределения неизвестен, но имеются основания предположить, что он имеет определенный вид (назовем его А), выдвигают ги­потезу: генеральная совокупность распределена по за­кону А. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о виде предполагаемого распределения.**

**Возможен случай, когда закон распределения известен, а его параметры неизвестны. Если есть основания пред­положить, что неизвестный параметр** 0 **равен определен­ному значению** 6**0, выдвигают гипотезу: 0 = 0О. Таким образом, в этой гипотезе речь идет о предполагае­мой величине параметра одного известного рас­пределения.**

**Возможны и другие гипотезы: о равенстве параметров двух или нескольких распределений, о независимости выборок и многие другие.**

**Статистической называют гипбтезу о виде неизвест­ного распределения, или о параметрах известных рас­пределений.**

**, Например, статистическими являются гипотезы:**

1. **генеральная совокупность распределена по закону Пуассона;**
2. **дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.**

**В первой гипотезе сделано предположение о виде неизвестного распределения, во второй—о параметрах двух известных распределений.**

**Гипотеза «на Марсе есть жизнь» не является статисти­ческой, поскольку в ней не идет речь ни о виде, ни о параметрах распределения.**

**Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и про­тиворечащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то имеет место противоречащая гипотеза. По этой причине эти гипотезы целесообразно различать.**

**Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу Я0.**

281

**Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу Hlt которая противоречит нулевой.**

**Например, если нулевая гипотеза состоит в предпо­ложении, что математическое ожидание а нормального распределения равно** 10**, то конкурирующая гипотеза, в частности, может состоять в предположении, чтоаф** 10**. Коротко это записывают так: Я0:а = 10; Нх\аф 10.**

**Различают гипотезы, которые содержат только одно и более одного предположений.**

**Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение. Например, если К — параметр показатель­ного распределения, то гипотеза Яв:Л = 5—простая. Ги­потеза Яв: математическое ожидание нормального рас­пределения равно 3 (а известно) — простая.**

**Сложной называют гипотезу, которая состоит из ко­нечного или бесконечного числа простых гипотез. Напри­мер, сложная гипотеза Я:А, >5 состоит из бесчисленного множества простых вида Я,; A = bh где Ь{ — любое число, большее 5. Гипотеза Я0: математическое ожидание нор­мального распределения равно 3 (о неизвестно)—сложная.**

§ 2. Ошибки первого и второго рода

**Выдвинутая гипотеза может быть правильной или неправильной, поэтому возникает необходимость ее проверки. Поскольку проверку производят статистиче­скими методами, ее называют статистической. В итоге статистической проверки гипотезы в двух случаях может быть принято неправильное решение, т. е. могут быть допущены ошибки двух родов.**

**Ошибка первого рода состоит в том, что будет отверг­нута правильная гипотеза.**

**Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.**

**Подчеркнем, что последствия этих ошибок могут ока­заться весьма различными. Например, если отвергнуто правильное решение.«продолжать строительство жилого дома», то эта ошибка первого рода повлечет материаль­ный ущерб; если же принято неправильное решение «про­должать строительство», несмотря на опасность обвала стройки, то эта ошибка второго рода может повлечь ги­бель людей. Можно привести примеры, когда ошибка первого рода влечет более тяжелые последствия, чем ошибка второго рода.**

282

Замечание 1. Правильное решение может быть принято также в двух случаях:

1. гипотеза принимается, причем и в действительности она пра­вильная;
2. гипотеза отвергается, причем и в действительности она неверна.

Замечание 2. Вероятность совершить ошибку первого рода

принято обозначать через а; ее называют уровнем значимости. Наи­более часто уровень значимости принимают равным 0,05 или 0,01. Если, например, принят уровень значимости, равный 0,05, то это означает, что в пяти случаях из ста имеется риск допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу).

§ 3. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Наблюдаемое значение критерия

**Для проверки нулевой гипотезы используют спе­циально подобранную случайную величину, точное или приближенное распределение которой известно. Эту ве­личину обозначают через U или Z, если она распределена нормально, F или о\* — по закону Фишера—Снедекора, Т—по закону Стьюдента, —по закону «хи квадрат» и т. д. Поскольку в этом параграфе вид распределения во внимание приниматься не будет, обозначим эту величи­ну в целях общности через К.**

**Статистическим критерием (или просто критерием) называют случайную величину К, которая служит для проверки нулевой гипотезы.**

**Например, если проверяют гипотезу о равенстве дис­персий двух нормальных генеральных совокупностей, то в качестве критерия /С принимают отношение исправлен­ных выборочных дисперсий:**

**F = s|/sl.**

**Эта • величина случайная, потому что в различных опытах дисперсии принимают различные, наперед неизвестные значения, и распределена по закону Фишера—Снедекора.**

**Для проверки гипотезы по данным выборок вычисляют частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают частное (наблюдаемое) значение кри­терия.**

**Наблюдаемым значением КИябх называют значение кри­терия, вычисленное по выборкам. Например, если по двум выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии sj = 20 и s| = 5, то наблюдаемое значение критерия F**

^иабл — sJ/sS = 20/5 = 4.

283

§ 4. Критическая область. Область принятия гипотезы. Критические точки

**После выбора определенного критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непере- секающихся подмножества: одно из них содержит значе­ния критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а другая — при которых она принимается.**

**Критической областью называют совокупность значе­ний критерия, при которых**

**а) нулевую гипотезу отвергают.**

***\*р Областью принятия гипо-***

**g\ . ы тезы (областью допустимых**

**' кнр о значений) называют совокуп­**

**ность значений критерия, при в) —— . которых гипотезу принима­ет/? О е??? ют.**

**Рис. 23 *Основной принцип провер­***

**ки статистических гипотез можно сформулировать так: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области—гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принад­лежит области принятия гипотезы — гипотезу принимают.**

**Поскольку критерий К—одномерная случайная вели­чина, все ее возможные значения принадлежат некоторому интервалу. Поэтому критическая область и область при­нятия гипотезы также являются интервалами и, следо­вательно, существуют точки, которые их разделяют.**

**Критическими точками (границами) йкр называют точки, отделяющие критическую область от области при­нятия гипотезы.**

**Различают одностороннюю (правостороннюю или лево­стороннюю) и двустороннюю критические области.**

**Правосторонней называют критическую область, опре­деляемую неравенством К > &кр, где &кр—положительное число (рис. 23, а).**

**Левосторонней называют критическую область, опре­деляемую неравенством К < &кр» гДе kKV—отрицательное число (рис. 23,6).**

**Односторонней называют правостороннюю или лево­стороннюю критическую область.**

**Двусторонней называют критическую область, опреде­ляемую неравенствами К < klt К> kt, где kt > kx.**

**В частности, если критические точки симметричны**

284

**относительно нуля, двусторонняя критическая область определяется неравенствами (в предположении, что/гкр>**0**): К <—Акр, К > Акр, или равносильным неравенством |/С|> > Акр (рис. 23,б).**

§ 5. Отыскание правосторонней критической области

**Как найти критическую область? Обоснованный ответ на этот вопрос требует привлечения довольно слож­ной теории. Ограничимся ее элементами. Для определен­ности начнем с нахождения правосторонней критической области, которая определяется неравенством /С > Акр, где Акр > 0. Видим, что для отыскания правосторонней кри­тической области достаточно найти критическую точку. Следовательно, возникает новый вопрос: как ее найти?**

**Для ее нахождения задаются достаточной малой ве­роятностью— уровнем значимости а. Затем ищут крити­ческую точку &кР. исходя из требования, чтобы при усло­вии справедливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий К примет значение, большее kKV, была равна принятому уровню значимости:**

**Р(К> АкР)=а.**

**Для каждого критерия имеются соответствующие таб­лицы, по которым и находят критическую точку, удов­летворяющую этому требованию.**

Замечание I. Когда критическая точка уже найдена, вычис­ляют по данным выборок наблюденное значение критерия и, если окажется, что Киабя > ^кр. то нулевую гипотезу отвергают; если же Киабл < &кр, то нет оснований, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу.

**Пояснение. Почему правосторонняя критическая область была определена исходя из требования, чтобы при справедливости нулевой гипотезы выполнялось соотно­шение**

**Р(К> Акр) = а? (\*)**

**Поскольку вероятность события К > Акр мала (а—малая вероятность), такое событие при справедливости нулевой гипотезы, в силу принципа практической невозможности маловероятных событий, в единичном испытании не должно наступить (см. гл. И, § 4). Если все же оно произошло, т. е. наблюдаемое значение критерия оказалось больше Акр, то это можно объяснить тем, что нулевая гипотеза ложна**

285

**и, следовательно, должна быть отвергнута. Таким обра­зом, требование (\*) определяет такие значения критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается, а они и со­ставляют правостороннюю критическую область.**

Замечание 2. Наблюдаемое значение критерия может ока - еаться большим ккр не потому, что нулевая гипотеза ложна, а по другим причинам (малый объем выборки, недостатки методики экспе­римента и др.). В этом случае, отвергнув правильную нулевую гипо­тезу, совершают ошибку первого рода. Вероятность этой ошибки равна уровню значимости а. Итак, пользуясь требованием (\*), мы с вероятностью а рискуем совершить ошибку первого рода.

Заметим кстати, что в книгах по контролю качества продукции вероятность признать негодной партию годных изделий называют «риском производителя», а вероятность принять негодную партию — «риском потребителя».

Замечание 3. Пусть нулевая гипотеза принята; ошибочно думать, что тем самым она доказана. Действительно, известно, что один пример, подтверждающий справедливость некоторого общего утверждения, еще не доказывает его. Поэтому более правильно гово­рить «данные наблюдений согласуются с кулевой гипотезой и, следо­вательно, не дают оснований ее отвергнуть».

На практике для большей уверенности принятия гипотезы ее проверяют другими способами или повторяют эксперимент, увеличив объем выборки.

Отвергают гипотезу более категорично, чем принимают. Действи­тельно, известно, что достаточно привести один пример, противореча­щий некоторому общему утверждению, чтобы это утверждение отверг­нуть. Если оказалось, что наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то этот факт и служит примером, противоречащим нулевой гипотезе, что позволяет ее отклонить.

§ 6. Отыскание левосторонней и двусторонней критических областей

**Отыскание левосторонней и двусторонней кри­тических областей сводится (так же, как и для право­сторонней) к нахождению соответствующих критических точек.**

**Левосторонняя критическая область определяется (см. § 4) неравенством К < kKP (kKP < 0). Критическую точку находят исходя из требования, чтобы при справед­ливости нулевой гипотезы вероятность того, что критерий примет значение, меньшее k^, была равна принятому уровню значимости:**

**Р(1С < Акр)=а.**

**Двусторонняя критическая область определяется**

**(см. § 4) неравенствами К < klt К > k2. Критические точки находят исходя из требования, чтобы при спра­**

**ведливости нулевой гипотезы сумма вероятностей того, что критерий примет значение, меньшее или большее ktt была равна принятому уровню значимости:**

***P(K<k1) + P{K>kt)=a.* (\*)**

**Ясно, что критические точки могут быть выбраны бесчис­ленным множеством способов. Если же распределение кри­терия симметрично относительно нуля и имеются основания (например, для увеличения мощности\*’) выбрать симмет­ричные относительно нуля точки — kKV и /гкр (&кр >** 0**), то**

Р (К < —/гкр) — Р {К > /гкр)\*

**Учитывая (\*), получим**

*P(K>kuv) =* а/2.

**Это соотношение и служит для отыскания критических точек двусторонней критической области.**

**Как уже было указано (см. § 5), критические точки находят по соответствующим таблицам.**

**§ 7. Дополнительные сведения о выборе критической области. Мощность критерия**

**Мы строили критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попадания в нее критерия была равна а при условии, что нулевая гипотеза спра­ведлива. Оказывается целесообразным ввести в рассмот­рение вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что нулевая гипотеза неверна и, следовательно, справедлива конкурирующая.**

**Мощностью критерия называют вероятность попада­ния критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Другими словами, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.**

**Пусть для проверки гипотезы принят определенный уровень значимости и выборка имеет фиксированный объем. Остается произвол в выборе критической области. Покажем, что ее целесообразно построить так, чтобы мощность критерия была максимальной. Предварительно убедимся, что если вероятность ошибки второго рода**

\*> Определение мощности дано в § 7.

287

**(принять неправильную гипотезу) равна р, то мощность равна 1—р. Действительно, если р — вероятность ошибки второго рода, т. е. события «принята нулевая гипотеза, причем справедлива конкурирующая», то мощность кри­терия равна** 1**—р.**

**Пусть мощность 1—р возрастает; следовательно, уменьшается вероятность р совершить ошибку второго рода. Таким образом, чем мощность больше, тем вероят­ность ошибки второго рода меньше.**

**Итак, если уровень значимости уже выбран, то кри­тическую область следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной. Выполнение этого требова­ния должно обеспечить минимальную ошибку второго рода, что, конечно, желательно.**

Замечание 1. Поскольку вероятность события «ошибка вто­рого рода допущена» равна р, то вероятность противоположного события «ошибка второго рода не допущена» равна 1—р, т. е. мощ­ности критерия. Отсюда следует, что мощность критерия есть веро­ятность того, что не будет допущена ошибка второго рода.

Замечание 2. Ясно, что чем меньше вероятности ошибок первого и второго рода, тем критическая область «лучШе». Однако при заданном объеме выборки уменьшить одновременно аир невозможно; если уменьшить а, то р будет возрастать. Например, если принять а = 0, то будут приниматься все гипотезы, в том числе и неправильные, т. е. возрастает вероятность Р ошибки второго рода.

Как же выбрать а наиболее целесообразно? Ответ на этот вопроо зависит от «тяжести последствий» ошибок для каждой конкретной задачи. Например, если ошибка первого рода повлечет большие по­тери, а второго рода—малые, то следует принять возможно меньшее а.

Если а уже выбрано, то, пользуясь теоремой Ю. Неймана и

Э. Пирсона, изложенной в более полных курсах, можно построить критическую область, для которой р будет минимальным и, следова­тельно, мощность критерия максимальной.

Замечание 3. Единственный способ одновременного уменьшения вероятностей ошибок первого и второго рода состоит в увеличении объема выборок.

**§** 8**. Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей**

**На практике задача сравнения дисперсий возни­кает, если требуется сравнить точность приборов, ин­струментов, самих методов измерений и т. д. Очевидно, предпочтительнее тот прибор, инструмент и метод, кото­рый обеспечивает наименьшее рассеяние результатов измерений, т. е. наименьшую дисперсию.**

288

**Пусть генеральные совокупности ХиК распределены нормально. По независимым выборкам с объемами, соот­ветственно равными nt и п„, извлеченным из этих сово­купностей, найдены исправленные выборочные дисперсии s\ и Sy. Требуется по исправленным дисперсиям при заданном уровне значимости а проверить нулевую гипо­тезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии рас­сматриваемых совокупностей равны между собой:**

**ff0'D (X) — D (К).**

**Учитывая, что исправленные дисперсии являются несмещенными оценками генеральных дисперсий (см. гл. XVI, § 13), т. е.**

**лфах] = П(Х), =**

**нулевую гипотезу можно записать так:**

**Я,:М[Й] = Л**1**И**

**Таким образом, требуется проверить, что математи­ческие ожидания исправленных выборочных дисперсий равны между собой. Такая задача ставится потому, что обычно исправленные дисперсии оказываются различными. Возникает вопррс: значимо (существенно) или незна­чимо различаются исправленные диспер­сии?**

**Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, т. е. генеральные дисперсии одинаковы, то различие ис­правленных дисперсий незначимо и объясняется случай­ными причинами, в частности случайным отбором объектов выборки. Например, если различие исправленных выбо­рочных дисперсий результатов измерений, выполненных двумя приборами, оказалось незначимым, то приборы имеют одинаковую точность.**

**Если нулевая гипотеза отвергнута, т. е. генеральные дисперсии неодинаковы, то различие исправленных дис­персий значимо и не может быть объяснено случайными причинами, а является следствием того, что сами генераль­ные дисперсии различны. Например, если различие исправленных выборочных дисперсий результатов изме­рений, произведенных двумя приборами, оказалось зна­чимым, то точность приборов различна.**

**В качестве критерия проверки нулевой гипотезы о равенстве генеральных дисперсий примем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей, т, е. слу-**

19 2730

289

чайную величину

**F=.S$/S‘.**

**Величина F при условии справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Фишера — Снедекора (см. гл. XII, § 15) со степенями свободы ft**1 **= n**1—1 **и kt = n2—**1**, где пх — объем выборки, по которой вычислена большая исправленная дисперсия, п2 — объем выборки, по которой найдена меньшая дисперсия. Напомним, что распределение Фишера — Снедекора зависит только от чи­сел степеней свободы и не зависит от других параметров.**

**Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.**

**Первый случай. Нулевая гипотеза H0:D(X) — D(Y). Конкурирующая гипотеза HxiD (X) > D(Y).**

**В этом случае строят одностороннюю, а именно пра­востороннюю, критическую область, исходя из требова­ния, чтобы вероятность попадания критерия F в эту область в предположении справедливости нулевой гипо­тезы была равна принятому уровню значимости:**

***P[F>FKp(a; ku* £\*)] = а.**

**Критическую точку FKP (а; klt kt) находят по таблице критических точек распределения Фишера—Снедекора (см. приложение 7), и тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством F > FKP, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством F < FKp.**

**Обозначим отношение большей исправленной диспер­сии к меньшей, вычисленное по данным наблюдений, через F„a6ji и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.**

**Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости проверить нулевую гипотезу H0:D (X) = D (Y) о равенстве генеральных дисперсий нормальных совокуп­ностей при конкурирующей гипотезе Я1:0 (X) > D (К), надо вычислить отношение большей исправленной диспер­сии к меньшей, т. е.**

Р иабл~^б/®м>

**и по таблице критических точек распределения Фишера— Снедекора, по заданному уровню значимости а и числам степеней свободы и k2 (kt—число степеней свободы большей исправленной дисперсии) найти критическую точку F„a**6**jI(a; klt kt).**

290

Если FHa(SjI < FKp— нет оснований отвергнуть нулевую

гипотезу. Если **Риа6л** > FKp— нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1. По двум независимым выборкам объемов я\*=12 и пг= 15, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии sx = 11,41 и s^, = 6,52. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу HC:D(X) = D(Y) о равенстве гениальных дисперсий при конкури­рующей гипотезе H1:D(X) > D (Y).

Решение. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

^набл — 11,41/6,52 = 1,75.

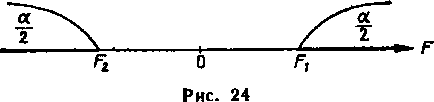
Конкурирующая гипотеза Имеет вид D (X) > D (Y), поэтому крити­ческая область — правосторонняя.

По таблице приложения 7, по уровню значимости а = 0,05 и числам степеней свободы fe1=l2 — 1 = 11 и fr2 = 15—1 = 14 находим критическую точку FKj, (0,05; 11, 14) = 2,56.

Так как Гнабл < Ркр — нет оснований отвергнуть нулевую гипо­тезу о равенстве генеральных дисперсий.

**Второй случай. Нулевая гипотеза H0\D (Х) = £>(К). Конкурирующая гипотеза H^'.D (X) фD (Y).**

**В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попа­**



**дания критерия в эту область в предположении спра­ведливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости а.**

**Как выбрать границы критической области? Оказы­вается, что наибольшая мощность (вероятность попадания критерия в критическую область при справедливости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда вероят­ность попадания критерия в каждый из двух интервалов критической области равна а/**2**.**

**Таким образом, если обозначить черег Ft левую границу критической области и через Рг — правую, то должны иметь место соотношения (рис. 24):**

**P(F<F1) = а/**2**, P(F >F„)=a/2.**

**Мы видим, что достаточно найти критические точки, чтобы найти саму критическую область: F < Flt F > F„**

19\*

291

**а также область принятия нулевой гипотезы: Ft < F < Fg. Как практически отыскать критические точки?**

**Правую критическую точку Ft = FKX>(а/2; klt k3) нахо­дят непосредственно по таблице критических точек рас­пределения Фишера — Снедекора по уровню значимости а/2 и степеням свободы kx и k3.**

**Однако левых критических точек эта таблица не со­держит и поэтому найти Fx непосредственно по таблице невозможно. Существует способ, позволяющий преодолеть это затруднение. Однако мы не будем его описывать, поскольку можно левую критическую точку и не отыски­вать. Ограничимся изложением того, как обеспечить по­падание критерия F в двустороннюю критическую область с вероятностью, равной принятому уровню значимости а.**

**Оказывается, достаточно найти правую критическую точку F**2 **при уровне значимости, вдвое меньшем заданного. Тогда не только вероятность попадания критерия в «пра­вую часть» критической области (т. е. правее Fz) равна а/2, но и вероятность попадания этого критерия в «левую часть» критической области (т. е. левее Ft) также равна а/2. Так как эти события несовместны, то вероятность попадания рассматриваемого критерия во всю двусторон­нюю критическую область будет равна а**/2 **+ а**/2 **= а.**

**Таким образом, в случае конкурирующей гипотезы H1:D(X)¥zD(Y) достаточно найти критическую точку F, = Fкр (а/2; kx, kt).**

**Правило** 2**. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости а проверить нулевую гипотезу о равенстве гене­ральных дисперсий нормально распределенных совокуп­ностей при конкурирующей гипотезе HX-.D (X) Фй (Y), надо вычислить отношение большей исправленной дис­персии к меньшей, т. е. FHa6x = sl/sll и по таблице кри­тических точек распределения Фишера—Снедекора по уровню значимости а**/2 **(вдвое меньшем заданного) и чис­лам степеней свободы кг и kt (kt—число степеней свободы большей дисперсии) найти критическую точку FKp(а/2;**

**&а)-**

**Если Р„абя < FKP—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если FHaga > FKp—нулевую гипотезу отвергают.**

Пример 2. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны n!=10 и лг=18, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выбороч­ные дисперсии s^ = l,23 и s|, = 0,41. При уровне значимости а = 0,1

292

проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе H\.D (X) ф D (Y).

Решение. Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

^набл = 1 >23/0,41 = 3.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид D(X)^D(Y), поэтому критическая область—двусторонняя.

По таблице, по уровню значимости, вдвое меньшем заданного, т. е. при а/2 = 0,1/2 = 0,05, и числам степеней свободы Л1=10—1=9, fe2=18—1 = 17 находим критическую точку FKV (0,05, 9, 17) = 2,50.

Так как ^набл > ^кр, нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий отвергаем. Другими словами, выборочные исправленные дисперсии различаются значимо. Например, если бы рассматриваемые дисперсии характеризовали точность двух методов измерений, то следует предпочесть тот метод, который имеет меньшую дисперсию (0,41).

**§ 9. Сравнение исправленной выборочной дисперсии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности**

**Пусть генеральная совокупность распределена нормально, причем генеральная дисперсия хотя и неиз­вестна, но имеются основания предполагать, что она равна гипотетическому (предполагаемому) значению ст®. На прак­тике eg устанавливается на основании предшествую­щего опыта или теоретически.**

**Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема п и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия S2 с k=\*n — 1 степенями свободы. Требуется по исправленной дисперсии при заданном уровне значи­мости проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральная дисперсия рассматриваемой совокупности равна гипотетическому значению Oq.**

**Учитывая, что S**2 **является несмещенной оценкой гене­ральной дисперсии, нулевую гипотезу можно записать**

TciK \*

***H0-.M(S\*) = ol***

**Итак, требуется проверить, что математическое ожи­дание исправленной дисперсии равно гипотетическому значению генеральной дисперсии. Другими словами, тре­буется установить, значимо или незначимо различаются исправленная выборочная и гипотетическая генеральная дисперсии.**

**На практике рассматриваемая гипотеза проверяется, если нужно проверить точность приборов, инструментов,**

293

**станков, методов исследования и устойчивость техноло­гических процессов. Например, если известна допустимая характеристика рассеяния контролируемого размера дета­лей, изготавливаемых станком-автоматом, равная а%, а найденная по выборке окажется значимо больше о§, то станок требует подналадки.**

**В качестве критерия проверки нулевой гипотезы при­мем случайную величину (п—1)5\*/о|. Эта величина слу­чайная, потому что в разных опытах S® принимает раз­личные, наперед неизвестные значения. Поскольку можно доказать, что она имеет распределение с k = n —** 1 **степенями свободы (см. гл. XII, § 13), обозначим ее через х2-**

**Итак, критерий проверки нулевой гипотезы Ха = (« — 1)5г/о?.**

**Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.**

**Первый случай. Нулевая гипотеза #**0**:аг = Оо. Конкурирующая гипотеза Я**1**:а\*>о\*.**

**В этом случае строят правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попа­дания критерия в эту область в предположении справед­ливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:**

**Р [х**2 **> ХкР (а; \*0] = а-**

**Критическую точку х\*р(а; находят по таблице кри­тических точек распределения х2 (см- приложение 5), и тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством х**2 **> Хкр> а область принятия нулевой гипо­тезы— неравенством х2 < Х\*р-**

**Обозначим значение критерия, вычисленное по данным наблюдений, через Хнабл и сформулируем правило про­верки нулевой гипотезы.**

**Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости а проверить нулевую гипотезу Н0:ог = о1 о ра­венстве неизвестной генеральной дисперсии нормальной совокупности гипотетическому значению при конкурирую­щей гипотезе Нг:о2 > а§, надо вычислить наблюдаемое значение критерия Хнабл = (п — l)S®/°o и по таблице кри­тических точек распределения х2> по заданному уровню значимости а и числу степеней свободы k — n—**1 **найти критическую точку %lP(a; k).**

294

Если Хнабл < ХкР — нет оснований отвергнуть нулевую

гипотезу. Если хИабл > Хкр—нулевую гипотезу отвергают.

Пример 1. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема л=13 и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия s2=14,6. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу //0:о2 = сг2= 12, приняв в качестве конкурирующей гипотезы Я\*: а2 > 12.

Решен и е. Найдем наблюденное значение критерия:

Хнабл ~(п 0 S2/<Jq = ((13 1 )■ 14,6)/12 = 14,6.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид а2 > 12, по­этому критическая область правосторонняя.

По таблице приложения 5, по уровню значимости 0,01 и числу степеней свободы k = n—1 = 13—1 = 12 находим критическую точку

^кр (0,01; 12) = 26,2.

Так как Хнабл Х2р—нет оснований отвергнуть нулевую гипо­тезу. Другими словами, различие между исправленной дисперсией (14,6) и гипотетической генеральной дисперсией (12) — незначимое.

**Второй случай. Нулевая гипотеза #**0**:а\* = а§. Конкурирующая гипотеза Я**1**:о**2 **Фа\.**

**В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попа­дания критерия в эту область в предположении справед­ливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости а.**

**Критические точки — левую и правую границы крити­ческой области—находят, требуя, чтобы вероятность по­падания критерия в каждой из двух интервалов крити­ческой области была равна а/**2**:**

**Р [х2 <** Хлев.кр **(а/2; &)] - а/2,**

**Р [х2** Хправ.кр **(а/2; /г)] = а/2.**

**В таблице критических точек распределения х\* Ука\* заны лишь «правые» критические точки, поэтому возни­кает кажущееся затруднение в отыскании «левой» крити­ческой точки. Это затруднение легко преодолеть, если Принять** ВО **внимание,** ЧТО **события** Х2 **<** Хлев.кр и **X**2 **> >** Хлев.кр **противоположны и, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:**

Р (Х2 ^ Хлев.кр) "4“ Р (Х2 Хлев.кр) — 1.

**Отсюда**

**Р (х**2> Хлев.кр) = **1 — Р (х**2 **<** Хлев.кр) **= 1 — (а/2).**

**Мы видим, что левую критическую точку можно искать как правую (и значит, ее можно найти по таб­**

295

**лице), исходя из требования, чтобы вероятность попада­ния критерия в интервал, расположенный правее этой точки, была равна 1 — (а/2).**

**Правило 2. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости а проверить нулевую гипотезу о равенстве не­известной генеральной дисперсии о2 нормальной сово­купности гипотетическому значению** <s% **при конкурирую­щей гипотезе Я1:о\*^=о|, надо вычислить наблюдаемое значение критерия Хнабл** = (п**—1) s2/crg и по таблице найти левую критическую точку Хкр(1—а/2; As) и правую кри­тическую точку х£**р **(ос/2; /г).**

**Если** Хлев.кр **<** Хнабл< Хправ.кр **—нет оснований отверг- нуть нулевую гипотезу.**

Если Хнабл < Хлев.кр ИЛИ Хнабл > Хправ.кр — Нулевую ГИПО-

**тезу отвергают.**

Пример 2. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема л=13 и по.ней найдена исправленная выборочная дисперсия s2=10,3. Требуется при уровне значимости 0,02 проверить нулевую гипотезу #0:а2 = а2 = 12, приняв в качестве конкурирующей гипотезы Hi'.а2 Ф 12.

Решение. Найдем наблюдавшееся значение критерия:

Ха„абл = (« - ‘) s2/cr2 = ((13 - 1). 10,3)/12= 10,3.

Так как конкурирующая гипотеза имеет вид а2 ф 12, то крити­ческая область—двусторонняя.

По таблице приложения 5 находим критические точки: левую — Хкр (1—а/2; \*) = \*• '(1-0.02/2; 12) =х2р (0,99; 12) =3,57 и правую— %2р(а/2; ft) = xjp (0,01; 12) = 26,2. Так как наблюдавшееся значение критерия принадлежит области принятия гипотезы (3,57 < 10,3 < < 26,2) — нет оснований ее отвергнуть. Другими словами, исправлен­ная выборочная дисперсия (10,3) незначимо отличается от гипотети­ческой генеральной дисперсии (12).

**Третий случай. Конкурирующая гипотеза** Н±:о\*< **о?.**

**Правило 3. При конкурирующей гипотезе Я1:о\*<о5 находят критическую точку Хкр(1—а;/г).**

**Если** Хнабл **>** Хкр **0—— нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.**

**Если Хнабл < Хкр (1 —а;** к) **— нулевую гипотезу отвер­гают.**

Замечание 1. В случае, если найдена выборочная диспер­сия DB, в качестве критерия принимают случайную величину X\* = nDB/aо, которая имеет распределение х2 с k = n—1 степенями свободы, либо переходят к s2 = [я/(я— 1)] DB.

Замечание 2. Если число степеней свободы k > 30, то кри­тическую точку можно найти приближенно по равенству Уилсона —

296

Г илферти

**Х\*р(а; \*) = Л[1-(2/9Л)Ч-\*« УЮТ]\*.**

где га определяют, используя'функцию Лапласа (см. приложение 2), по равенству Ф(га) = (1—2а)/2.

§ 10. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых известны (независимые выборки)

**Пусть генеральные совокупности X и У распре­делены нормально, причем их дисперсии известны (на­пример, из предшествующего опыта или найдены теоре­тически). По независимым выборкам, объемы которых соответственно равны пит, извлеченным из этих сово­купностей, найдены выборочные средние х и у.**

**Требуется по выборочным средним при заданном уровне значимости а проверить нулевую гипотезу, со­стоящую в том, что генеральные средние (математические ожидания) рассматриваемых совокупностей равны между собой, т. е.**

***H0iM (X) — М (Y).***

**Учитывая, что выборочные средние являются несме­щенными оценками генеральных средних (см. гл. XV, § 5), т. е. М(Х) = Л1(Х) и М (Y) = М (Y), нулевую гипотезу можно записать так:**

***Н0:М (X)* = *M(Y).***

**Таким образом, требуется проверить, что математиче­ские ожидания выборочных средних равны между собой. Такая задача ставится потому, что, как правило, выбо­рочные средние оказываются различными. Возникает вопрос: значимо или незначимо различаются выборочные средние?**

**Если окажется, что нулевая гипотеза справедлива, т. е. генеральные средние одинаковы, то различие выбо­рочных средних незначимо и объясняется случайными причинами и, в частности, случайным отбором объектов выборки.**

**Например, если физические величины А и В имеют одинаковые истинные размеры, а средние арифметиче­**

297

**ские х и у результатов измерений этих величин раз» личны, то это различие незначимое.**

**Если нулевая гипотеза отвергнута, т. е. генёральные средние неодинаковы, то различие выборочных средних значимо и не может быть объяснено случайными причи­нами, а объясняется тем, что сами генеральные средние (математические ожидания) различны. Например, если среднее арифметическое х результатов измерений физиче­ской величины А значимо отличается от среднего ариф­метического у результатов измерений физической вели­чины В, то это означает, что истийные размеры (матема­тические ожидания) этих величин различны.**

**В качестве критерия проверки нулевой гипотезы при­мем случайную величину**

^ *X—Y \_ X — Y*

*~* о *(X—Y) Yd* (*X)/n+D(Y)/m* \*

**Эта величина случайная, потому что в различных опы­тах х и у принимают различные, наперед неизвестные значения.**

**Пояснение. По определению среднего квадратиче­ского отклонения, а(Х — У) = КD(X — Y).**

**На основании свойства 4 (см. гл. VIII, § 5), D (X—У) = D(X) + D (У). \_**

**По формуле (\*) (см. гл. VIII, § 9), D(X) = D(X)/ti,**

***D* (У) = *D (Y)/m.***

**Следовательно,**

**а *(X* — У) = *VD(X)/n + D{Y)/m.***

**Критерий 2—нормированная нормальная случайная величина. Действительно, величина 2 распределена нор­мально, так как является линейной комбинацией нор­мально распределенных величин X и У; сами эти вели­чины распределены нормально как выборочные средние, найденные по выборкам, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей;** 2**—нормированная величина потому, что Af(**2**) =** 0**; при справедливости нулевой гипо­тезы о (**2**) =** 1**, поскольку выборки независимы.**

**Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.**

298

**Первый случай. Нулевая гипотеза Н„: М (X) — — М(У). Конкурирующая гипотеза Н^ М (Х)фМ(У).**

**В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попа­дания критерия в эту область в предположении справед­ливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости а.**

**Наибольшая мощность критерия (вероятность попа­дания критерия в критическую область при справедли­вости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда**

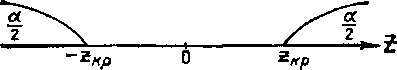


Рис. 25

**«левая» и «правая» критические точки выбраны так, что вероятность попадания критерия в каждый из двух ин­тервалов критической области равна а/**2**:**

**P(Z< глев. №) = а/2, Р (Z > гправ. кр) = а/2.**

**Поскольку Z— нормированная нормальная величина, а распределение такой величины симметрично относи­тельно нуля, критические точки симметричны относи­тельно нуля.**

**Таким образом, если обозначить правую границу дву­сторонней критической области через zKP, то левая гра­ница равна —** 2**кр (рис. 25).**

**Итак, достаточно найти правую границу, чтобы найти саму двустороннюю критическую область Z<—zKp, Z > zKP и область принятия нулевой гипотезы (—гкр, zKP).**

**Покажем, как найти zKP—правую границу двусторон­ней критической области, пользуясь функцией Лапласа Ф(г). Известно, что функция Лапласа определяет вероят­ность попадания нормированной нормальной случайной величины, например Z, в интервал (0, z):**

**Р (0 < Z < z) = Ф (z). (\*\*)**

**Так как распределение Z симметрично относительно нуля, то вероятность попадания Z в интервал (0, с») равна 1/2. Следовательно, если разбить этот интервал точкой 2**кр **на интервалы** (0, **zKP) и (гкр,** оо), **то, по теореме**

299

сложения,

**Р (0 < Z < zKP) + Р (Z > zKP) \*= 1/2, (\*\*\*)**

**В силу (\*) и (\*\*) получим**

Ф(гкр) + а/2=1/2.

**Следовательно,**

**Ф(**2**КР) = (**1**—«)/**2**.**

**Отсюда заключаем: для того чтобы найти правую гра­ницу двусторонней критической области (zKp), достаточно найти значение аргумента функции Лапласа, которому соответствует значение функции, равное (1—а)/2. Тогда двусторонняя критическая область определяется нера­венствами**

**^ <** 2**кр\*** 2 **^ ^кр»**

**или равносильным неравенством |Z| > zKP, а область при­нятия нулевой гипотезы — неравенством — гкр <** 2 **< zKP, или равносильным неравенством | Z | < zKP.**

**.Обозначим значение критерия, вычисленное поданным наблюдений, через ZHa6a и сформулируем правило про­верки нулевой гипотезы.**

**Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости а проверить нулевую гипотезу Н0: М (X) = М (У) о равенстве математических ожиданий двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями при конкурирующей гипотезе Нг: М (Х)^=М (Y), надо вычислить наблюденное значение критерия Z„a6x —**

***X* *и***

**= . и по таблице функции Лапласа найти**

*У D(X)/n + D(Y)/m \**

**критическую точку по равенству Фгкр = (**1**—а)/**2**.**

**Если |ZHa**6**a|<zKP—нет оснований отвергнуть нуле­вую гипотезу.**

**Если |2набл|>гкр—нулевую гипотезу отвергают.**

Пример 1. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны п = 60 н т = 50, извлеченным нз нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние \*=1250 и ^=1275. Генеральные дисперсии известны: D(X) = 120, D(K)=100. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу Н0: М(Х) = ~М (К), прн конкурирующей гипотезе Hi. М (X) Ф М (К).

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

7 \*~У 1250—1275 ,ое

*у D\X)/n + D (Y)!m У* 120/60+ 100/50

300

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид М (X) ф М (У), поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем правую критическую точку:

Ф (2кр) = (1 —а)/2 = (1 —0,01 )/2 = 0,495.

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим гкр = 2,58.

Так как | 2Иабл I > 2кР— нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

**Второй случай. Нулевая гипотеза Я0: М (X) — = М (У). Конкурирующая гипотеза Ht: М (X) > Л1 (К).**

**На практике такой случай имеет место, если про­фессиональные соображения позволяют предположить, что генеральная средняя од-**

**ной совокупности больше /еГ**

**генеральной средней Дру-** 1 **с. , ,**

**гой. Например, если введено ® г\*Р**

**усовершенствование техноло-** Рис. 2в

**гического процесса, то есте­ственно допустить, что оно приведет к увеличению вы­пуска продукции. В этом случае строят правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероят­ность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости (рис. 26):**

**Р (Z > гкр) = а. (\*\*\*\*)**

**Покажем, как найти критическую точку с помощью функции Лапласа. Воспользуемся соотношением (\*\*\*):**

**Р (0 < Z < гкр) + Р (Z > гкр) = 1/2.**

**В силу (\*\*) и (\*\*\*\*) имеем**

**Ф(гкр) + а= 1/2.**

**Следовательно,**

**Ф(2кр) = (1-2а)/2.**

**Отсюда заключаем: для того чтобы найти границу пра­восторонней критической области (гкр), достаточно найти значение аргумента функции Лапласа, которому соответ­ствует значение функции, равное (1—2а)/2. Тогда право­сторонняя критическая область определяется неравенст­вом Z > гкр, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством Z < гкр.**

**Правило 2. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости а проверить нулевую гипотезу Я0: М (Х) = М (К)**

301

**о равенстве математических ожиданий двух нормальных  
генеральных совокупностей с известными дисперсиями  
при конкурирующей гипотезе Нг\ М (X) > М (У), надо  
вычислить наблюдавшееся значение критерия Z„a6x ■=**

**и по таблице функции Лапласа найти**

*х—у*

**VD(X)/n + D(V)/m**

**критическую точку из равенства Ф (гкр) = (1—2а)/2.**

**Если Z„a6j[ < гкр—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.**

**Если 2набл>гкр—нулевую гипотезу отвергают.**

Пример 2. По двум независимым выборкам, объемы которых соответственно равны п =10 н т=10, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние х=14,3 и £=12,2. Генеральные дисперсии известны: D(X) — 22, Я(У)=18. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу Я0: М (X) =\* = М (У), при конкурирующей гипотезе Нг: М (X) > М (У).

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

14,3-12,2

**£набл — г ''■ \*1 ■’ ——\* ■\*" \* »w«**

У 22/10+18/10

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид М (X) > М (У), поэтому критическая область—правосторонняя.

По таблице функции Лапласа находим гкр=1,64.

Так как Z„aйл < \*кр — нет оснований отвергнуть нулевую гипо­тезу. Другими словами, выборочные средние различаются незначимо.

**Третий случай. Нулевая гипотеза Н0: М (X) «= а» М (У). Конкурирующая гипотеза Ях. М (X) < М (У).**

**В этом случае строят левостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попа-**



*г’кр* 0

Рис. 27

**дания критерия в эту область в предположении справед­ливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню 8начимости (рис. 27):**

***P(Z<z'K* р)=о.**

**Приняв во внимание, что критерий Z распределен симметрично относительно нуля, заключаем, что искомая критическая точка г'кр симметрична такой точке [zKP > 0, для которой P(Z>zKP) = а, т. е. г'р = — гкр/ Таким**

302

**Образом, для того чтобы найти точку г'кр, достаточно сначала найти «вспомогательную точку» гкр так, как описано во втором случае, а затем взять найденное значение со знаком минус. Тогда левосторонняя крити­ческая область определяется неравенством Z <—гкр, а область принятия нулевой гипотезы — неравенством Z** > 2кр.

**Правило 3. При конкурирующей гипотезе Ht: М (X) < < М (Y) надо вычислить Z„aйл и сначала по таблице функции Лапласа найти «вспомогательную точку\* гкр по равенству Ф(гкр = (1—2а)/2, а затем положить г'р«\*—**

**Если ZHa6jI >—zKP—нет оснований отвергнуть нуле­вую гипотезу.**

**Если Z„a6a < — zKp—нулевую гипотезу отвергают.**

Пример 3. По двум независимым выборкам, объемы 'которых соответственно равны п = 50 и т — 50, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены выборочные средние х—142 и у =150. Генеральные дисперсии известны: D(X) = 28,2, 0(У)з=22,8. Прн уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу Н0: М(Х)\*= — М (г), при конкурирующей гипотезе М (X) < М (К).

Решение. Подставив данные задачи в формулу для вычисле­ния наблюдаемого значения критерия, получим 2Навл =—8.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид М (X) < М (Y), поэтому критическая область — левосторонняя.

Найдем «вспомогательную точку» zKp:

Ф (\*кр) = (1 — 2а)/2 = (1 — 2 • 0,01 )/2 = 0,49.

По таблице функции Лапласа находим zKp = 2,33. Следова­тельно, ZkP = —zKp = —2,33.

Так как 2иабл <—гкр—нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочная средняя х значимо меньше выборочной сред­ней у.

**§ 11« Сравнение двух средних произвольно распределенных генеральных совокупностей (большие независимые выборки)**

**В предыдущем параграфе предполагалось, что генеральные совокупности X и Y распределены нор­мально, а их дисперсии известны. При этих предполо­жениях в случае справедливости нулевой гипотезы о равенстве средних и независимых выборках критерий Z распределен точно нормально с параметрами 0 и 1.**

303

**Если хотя бы одно из приведенных требований н^ выполняется, метод сравнения средних, описанный в § 10, неприменим.**

**Однако если независимые выборки имеют большой объем (не менее 30 каждая), то выборочные средние рас­пределены приближенно нормально, а выборочные дис­персии являются достаточно хорошими оценками гене­ральных дисперсий и в этом смысле их можно считать известными приближенно. В итоге критерий**

*у DB (X)/n + DB* (*Y)/m*

**распределен приближенно нормально с параметрами M(Z') = 0 (при условии справедливости нулевой гипо­тезы) и a(Z')=l (если выборки независимы).**

**Итак, если: 1) генеральные совокупности распреде­лены нормально, а дисперсии их неизвестны; 2) гене­ральные совокупности не распределены нормально и дис­персии их неизвестны, причем выборки имеют большой объем и независимы,— можно сравнивать средние так, как описано в § 10, заменив точный критерий Z прибли­женным критерием Z'. В этом, случае наблюдаемое зна­чение приближенного критерия таково:**

***уг х У***

*у DB (X)/n + DB(Y)/m*

Замечание. Поскольку рассматриваемый критерий — прибли­женный, к выводам, полученным по этому критерию, следует отно­ситься осторожно.

Пример. По двум независимым выборкам, объемы которых соот­ветственно равны п =100 и т=120, найдены выборочные средние х = 32,4, у == 30,1 н выборочные дисперсии DB(X) = 15,0, DB(Y) — 25,2. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу Н0\ М (X) = = М(К), при конкурирующей гипотезе Нг: M(X)^M(Y).

Решение. Подставив данные задачи в формулу для вычисле­ния наблюдаемого значения приближенного критерия, получим ^набл — 3,83.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид М (X) > М (V), поэтому критическая область — правосторонняя.

Найдем критическую точку по равенству

Ф (2КР) = (1 - 2а)/2 = (1 - 2 ■ 0,05)/2 = 0,45.

По таблице функции Лапласа находим гкр=1,64.

Так как ZHaeB > гкр — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

304

§ 12. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей, дисперсии которых неизвестны и одинаковы (малые независимые выборки)

**Пусть генеральные совокупности X и У распре­делены нормально, причем их дисперсии неизвестны. Например, по выборкам малого объема нельзя получить хорошие оценки генеральных дисперсий. По этой при­чине метод сравнения средних, изложенный в § 11, при­менить нельзя.**

**Однако если дополнительно предположить, что неиз­вестные генеральные дисперсии равны между собой, то можно построить критерий (Стью­дента) сравнения средних. Например, если сравниваются средние размеры двух партий деталей, изготовленных на одном и том же станке, то естественно допустить, что дисперсии контролируемых размеров одинаковы.**

**Если же нет оснований считать дисперсии одинако­выми, то, прежде чем сравнивать средние, сле­дует, пользуясь критерием Фишера—Снедекора (см. §8), предварительно проверить гипотезу о равенстве гене­ральных дисперсий.**

**Итак, в предположении, что генеральные дисперсии одинаковы, требуется проверить нулевую гипотезу Н0: М (X) = М (У). Другими словами, требуется установить, значимо или незначимо различаются выборочные средние х и у, найденные по независимым малым выборкам объе­мов пит.**

**В качестве критерия проверки нулевой гипотезы при­мем случайную величину**

*rp* *X* — *Y* *пт (п-\-т —* 2)

K(fl-i)s|+(«-i)s; \* п+т

**Доказано, что величина Т при справедливости нулевой гипотезы имеет ^-распределение Стьюдента с fe = n-)-m—** 2 **степенями свободы.**

**Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы.**

**Первый случай. Нулевая гипотеза Н0\ М (X) = = М (К). Конкурирующая гипотеза Нг: М(Х)ФМ(У).**

**В этом случае строят двустороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попа­**

20 - 2720

305

**дания критерия Т в эту область в предположении спра­ведливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости а.**

**Наибольшая мощность критерия (вероятность попа­дания критерия в критическую область при справедли­вости конкурирующей гипотезы) достигается тогда, когда «левая» и «правая» критические точки выбраны так, что вероятность попадания критерия в каждый из двух интер­валов двусторонней критической области равна а/2:**

**Р (Т ^лев. кр) = а/2, Р (Т > ^прав. кр) = а/2.**

**Поскольку величина Т имеет распределение Стью- дента, а оно симметрично относительно нуля, то и крити­ческие точки симметричны относительно нуля. Таким образом, если обозначить правую границу двусторонней критической области через** /двуст. **кр(а;** к), **то левая гра­ница равна —**^двуст. **кр** (®; &)• **Итак, достаточно найти правую границу двусторонней критической области, чтобы найти саму двустороннюю критическую область: Т <** <—^BjrcT. кр («I **k), Т** > /двуст. кР(«; к) **и область принятия нулевой гипотезы: [—/двуст. кр(а; k), \*двусх. кр(а; \*)].**

**Обозначим значение критерия, вычисленное по дан­ным наблюдений, через Тва6я и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.**

Правило **1. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости а проверить нулевую гипотезу Н0: М (Х) = М (У) о равенстве математических ожиданий двух нормальных совокупностей с неизвестными, но одинаковыми диспер­сиями (в случае независимых малых выборок) при кон­курирующей гипотезе Нх\ М (X) ф М (У), надо вычис­лить наблюдаемое значение критерия:**

**гр х —у —2~**

"абЛ V(n— + l)Sj? ' rt+m

**и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости а (помещенному в верх­ней строке таблицы) и числу степеней свободы k = п + m—2 найти критическую точку /двуст. кр(а1 &)■**

**Если | Гнавл | < ^двуст. кР(«; Щ—отвергнуть нулевую ги­потезу нет основании.**

**Если I Увабл I >**/двуст. кр **(а; Щ —нулевую гипотезу от­вергают.**

306

Пример. По двум независимым малым выборкам, объемы которых соответственно равны п — 5 и т = 6, извлеченным из нормальных ге­неральных совокупностей X и V, найдены выборочные средние х — 3,3, у== 2,48 и исправленные дисперсии s^= 0,^5 и Sy = 0,108. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу Нй:М (X) = М (К), при конкурирующей гипотезе Н\\М (X) Ф М (Y).

Решение. Так как выборочные дисперсии различны, проверим предварительно нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий, пользуясь критерием Фишера—Снедекора (см. § 8).

Найдем отношение большей исправленной дисперсии к меньшей:

Дисперсия значительно больше дисперсии sj., поэтому в ка­честве конкурирующей примем гипотезу Ht:D (X) > D (К). В этом случае критическая область — правосторонняя. По таблице, по уровню значимости а = 0,05 н числам степеней свободы = 5 —-1 = 4, k2 = «=6—1=5 находим критическую точку FKp (0,05; 4; 5) = 5,19.

Так как Ряа^л < FBр—нет оснований отвергнуть нулевую гипо­тезу о равенстве генеральных дисперсий.

Поскольку предположение о равенстве генеральных дисперсий выполняется, сравним средине.

Вычислим наблюдаемое значение критерия Стьюдента:

Подставив числовые значения величин, входящих в эту формулу, по­лучим Тнабл —3,27.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид М (X) Ф М (К), поэтому критическая область—двусторонняя. По уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы & = 5 + 6 — 2 = 9 находим по таблице (см. приложение 6) критическую точку /ЯВуст. кр (0-^5; Э) = 2,26.

Так как Тяябл > \*ДВуст. кр — нулевую гипотезу о равенстве гене­ральных средних отвергаем. Другими словами, выборочные средние различаются значимо.

**Второй случай. Нулевая гипотеза Н0'.М(Х) = — М (У). Конкурирующая гипотеза Ht:M (X) > М (У).**

**В этом случае строят правостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность попада- „ лия критерия Т в эту область в предположении спра­ведливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:**

**Критическую точку ^„Равост. кр k) находят по таблице, приложения 6, по уровню значимости а, помещенному в нижней строке таблицы, и по числу степеней свободы k = ti-\-m—2.**

**Если Тяа6л < /правост. кр—нет оснований отвергнуть ну­левую гипотезу.**

^вабл = 0,25/0,108 = 2,31.



***Р (Т > it***

правост. кр



20\*

307

**Если Тнабл > ^правост. кр —нулевую гипотезу отвергают.**

**Третий случай. Нулевая гипотеза Н0:М(Х)~ = М (К). Конкурирующая гипотеза Ht:M (X) < М (К).**

**В этом случае строят левостороннюю критическую область, исходя из требования, чтобы вероятность по­падания критерия в эту область в предположении спра­ведливости нулевой гипотезы была равна принятому уров­ню значимости:**

Р (Т <С ^левост. up) = а\*

В силу симметрии распределения Стьюдента относи­тельно нуля \*левост. кр = ~ \*правост. кр- ПоЭТОМу Сначала НЭ- ходят «вспомогательную» критическую точку /правост. кр так, как описано во втором случае, и полагают

^левост. кр =я ^правост. кр\*

**Если Тнабл > — Завоет, кр—отвергнуть нулевую гипо­тезу нет оснований.**

**Если Г„абл < —** ^праВост. кр—**нулевую гипотезу отвер­гают.**

§ 13. Сравнение выборочной средней с гипотетической генеральной средней нормальной совокупности

А. Дисперсия генеральной совокупности известна.

**Пусть генеральная совокупность X распределена нор­мально, причем генеральная средняя а хотя и неизвестна, но имеются основания предполагать, что она равна ги­потетическому (предполагаемому) значению а0. Например, если X—совокупность размеров х( партии деталей, изгото­вляемых станком-автоматом, то можно предположить, что генеральная средняя а этих размеров равна проектному размеру а0. Чтобы проверить это предположение, находят выборочную среднюю х и устанавливают, значимо или незначимо различаются х и а0. Если различие окажется незначимым, то станок обеспечивает в среднем проектный размер; если различие значимое, то станок требует под- наладки.**

**Предположим, что дисперсия генеральной совокуп­ности известна, например, из предшествующего опыта, или найдена теоретически, или вычислена по выборке большого объема (по большой выборке можно получить достаточно хорошую оценку дисперсии).**

308

**Итак, пусть из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема п и по ней найдена выбороч­ная средняя х, причем генеральная дисперсия <та известна. Требуется по выборочной средней при заданном уровне значимости проверить нулевую гипотезу Н0:а = а0 о ра­венстве генеральной средней а гипотетическому значе­нию а0.**

**Учитывая, что выборочная средняя является несме­щенной оценкой генеральной средней (см. гл. XVI, § 5), т. е. М(Х)=а, нулевую гипотезу можно записать так: М (Х) = а0.**

**Таким образом, требуется проверить, что математи­ческое ожидание выборочной средней равно гипотети­ческой генеральной средней. Другими словами, надо уста­новить, значимо или незначимо различаются выборочная и генеральная средние.**

**В качестве критерия проверки нулевой гипотезы при­мем случайную величину**

***U=(X-a0)/o(X) = (X-a0)VT/a,***

**которая распределена нормально, причем при справедли­вости нулевой гипотезы M(U) = 0, o(U)—l.**

**Поскольку здесь критическая область строится в за­висимости от вида конкурирующей гипотезы, так же как в § 10, ограничимся формулировкой правил проверки нулевой гипотезы, обозначив значение критерия U, вы­численное по данным наблюдений, через Vsa6n.**

**Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости а проверить нулевую гипотезу Н0:а = а0 о ра­венстве генеральной средней а нормальной совокупности с известной дисперсией а2 гипотетическому значению а0 при конкурирующей гипотезе Ht:a^a0, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:**

**^набл = (^—а0) Vn/a**

**и по таблице функции Лапласа найти критическую точку двусторонней критической области по равенству**

Ф(«кр) = (1-а)/2.

**Если |^вабл|<ыкР—нет оснований отвергнуть нуле­вую гипотезу.**

**Если |^иабл|>“кр — нулевую гипотезу отвергают.**

309

**Правило 2, При конкурирующей гипотезе Я1:а>а0 критическую точку правосторонней критической области находят по равенству**

**Ф(“кр)-(1-2а)/2.**

**Если Uиабл < ыКр—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Если С/Набл** > “кр—**нулевую гипотезу отвергают.**

**Правило 3. При конкурирующей гипотезе Я1:а<а0 сначала находят критическую точку ыкр по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области и'кр = — ыкр.**

**Если Uнабл >—“кр—нет оснований отвергнуть нуле­вую гипотезу.**

**Если UHабл <—“кр—нулевую гипотезу отвергают.**

Пример !. Из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим отклонением о = 0,36 извлечена выборка объема п = 36 и по ней найдена выборочная средняя х = 21,6. Тре­буется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу Н0:а = аа — 21, при конкурирующей гипотезе Ht:a Ф 21.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

^набл =(\* — во) К"п/о = (21,6—21) >^36/0.36 = 10.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид а ф а0, поэтому критическая область—двусторонняя.

Найдем критическую точку:

ф (ыкр) = (1 — а)/2 = (1 — 0,05)/2 = 0,475.

По таблице функции Лапласа находим икр = 1,96.

Так как 1/нав, > мкр — нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочная и гипотетическая генеральная средние разли­чаются значимо.

Пример 2. По данным примера 1 проверить нулевую гипотезу Я0:а = 21 при конкурирующей гипотезе а> 21.

Решение. Так как конкурирующая гипотеза имеет вид а > 21, критическая область — правосторонняя.

Найдем критическую точку из равенства

Ф («кр) = (I — 2«)/2 = (1 — 2• 0,05)/2 = 0,45.

По таблице функции Лапласа находим цкр=1,65.

Так как ЯИабл=10> «кр — нулевую гипотезу отвергаем; разли­чие между выборочной и гипотетической генеральной средней — значимое.

Заметим, что в примере 2 нулевую гипотезу можно было отверг­нуть сразу, поскольку она была отвергнута в примере 1 при двусто­ронней критической области; полное решение приведено в учебных целях.

**Б. Дисперсия генеральной совокупности неизвестна.**

**Если дисперсия генеральной совокупности неизвестна (например, в случае малых выборок), то в качестве кри­**

310

**терия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину**

**Т = (X—a0)]/7i/S,**

**где S—«исправленное» среднее квадратическое отклоне­ние. Величина Т имеет распределение Стьюдента с k = n — 1 степенями свободы.**

**Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей гипотезы. Поскольку это делается так, как описано выше, ограничимся правилами проверки нулевой гипотезы.**

**Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости а проверить нулевую гипотезу Н0:а = а0 о ра­венстве неизвестной генеральной средней а (нормальной совокупности с неизвестной дисперсией) гипотетическому значению а0 при конкурирующей гипотезе Нг'.афа0, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:**

***Тяа6я = (х—а0) Vnjs***

**и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости а, помещенному в верх­ней строке таблицы, и числу степеней свободы k — n—1 найти критическую точку /двуст. кр (a; k).**

**Если | Гиавл I < ^двуст.** кр**—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.**

**Если I Т'вавд I > /д8усх. „р—нулевую гипотезу отвергают.**

**Правило 2. При конкурирующей гипотезе Нх'.а >а0 по уровню значимости а, помещенному в нижней строке таблицы приложения 6, и числу степеней свободы k = rt—1 находят критическую точку** \*праВ0ст. кр (a! k) **правосто­ронней критической области.**

**Если Тнабя < \*праВ0<;Т. кр—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.**

Правило 3. При конкурирующей гипотезе Я1:а<а„, сначала находят «вспомогательную\* критическую точку ^правост. кр (а‘« Ь) и полагают границу левосторонней кри­тической ОблаСТИ ^левост. кр ^правост. кр1

**Если Гвабл> — /правост.кр—нет -оснований отвергнуть нулевую гипотезу.**

**Если Твабл < —** <„раВост. кр—**нулевую гипотезу отвер­гают.**

Пример 3. По выборке объема п = 20, извлеченной из нормаль­ной генеральной совокупности, найдены выборочная средняя \* = 16 и «исправленное» среднее квадратическое отклонение s = 4,5. Тре­

311

буется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу //0:а = а0=15, при конкурирующей гипотезе Нх\аФ 15.

Решение. Вычислим наблюдаемое значение критерия;

7\,а6л = (\*— а0) V~n/s = (16-15)- /20/4,5 = 0,99.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид а Ф а0, поэтому критическая область — двусторонняя.

По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости а = 0,05, помещенному в верхней строке таблицы, н по числу степеней свободы ft = 20—1 = 19 находим критическую точку /двуст.кр (0,05; 19) = 2,09.

Так как I Гнабл I < ^двуст. кр— нет оснований, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу; выборочная средняя незначимо отличается от ги­потетической генеральной средней.

§ 14. Связь между двусторонней критической

областью и доверительным интервалом

**Легко показать, что, отыскивая двустороннюю критическую область при уровне значимости а,, тем самым находят и соответствующий доверительный интервал с надежностью у=1—а. Например, в § 13, проверяя ну­левую гипотезу Н0:а — а0 при Я1:а=т^а0, мы требовали, чтобы вероятность попадания критерия U =(х—a)\rnla в двустороннюю критическую область была равна уровню значимости а, следовательно, вероятность попадания кри­терия в область принятия гипотезы (—икр, ыкр) равна 1 — а —у. Другими словами, с надежностью у выпол­няется неравенство**

**— «кр < (х—а) Vn/a < икр, или равносильное неравенство**

**X ^кр л/— ^ ^ X -f- tlKр ,— ,**

*V п у п*

где Ф(«кр) = у/2.

**Мы получили доверительный интервал для оценки математического ожидания а нормального распределения при известном а с надежностью у (см. гл. XVI, § 15).**

Замечание. Хотя отыскание двусторонней критической об­ласти и доверительного интервала приводит к одинаковым резуль­татам, их истолкование различно: двусторонняя критическая область определяет границы (критические точки), между которыми заключено (1—а)% числа наблюдаемых критериев, найденных при повторении опытов; доверительный же интервал определяет границы (концы ин­тервала), между которыми в у = (1 — а)% опытов заключено истин­ное значение оцениваемого параметра.

312

§ 15. Определение минимального объема выборки при сравнении выборочной и гипотетической генеральной средних

**На практике часто известна величина (точность) 6 > 0, которую не должна превышать абсолютная вели­чина разности между выборочной и гипотетической гене­ральной средними. Например, обычно требуют, чтобы средний размер изготовляемых деталей отличался от про­ектного не более чем на заданное б. Возникает вопрос: каким должен быть минимальный объем выборки, чтобы это требование с вероятностью у = 1—а (а—уровень значимости) выполнялось?**

**Поскольку задача отыскания доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального рас­пределения при известном а и задача отыскания двусто­ронней критической области для проверки гипотезы о равенстве математического ожидания (генеральной сред­ней) гипотетическому значению (см. § 13, п. А) сводятся одна к другой (см. § 14), воспользуемся формулой (см. гл. XVI, § 15)**

п = г4р<т2/б2,

**где цкР находят по равенству Ф («ир) = у/2 = (1—а)/2.**

**Если же ст неизвестно, а найдена его оценка s, то (см. § 13, п. Б)**

Я = \*двуст.кр(а; k)‘S2/б\*.

§ 16. Пример на отыскание мощности критерия

**Приведем решение примера на нахождение мощ­ности критерия.**

Пример. По выборке объема л = 25, извлеченной из нормальной генеральной совокупности с известным средним квадратическим от­клонением ст=10, найдена выборочная средняя х=18. При уровне значимости 0,05 требуется:

а) найти критическую область, если проверяется нулевая гипо­теза Н0:а = а0 = 20 о равенстве генеральной средней гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе Нх\а < 20;

б) найти мощность критерия проверки при а0=1б.

Решение, а) Так как конкурирующая гипотеза имеет вид

а < а0, критическая область—левосторонняя.

Пользуясь правилом 3 (см, § 13, п. А), найдем критическую точку: лКр = —1,65. Следовательно, левосторонняя критическая область оп-

313

ределяется неравенством U < —1,65, или подробнее (х—20) /25/10 <—1,65.

Отсюда х < 16,7.

При этих значениях выборочной средней нулевая гипотеза от­вергается; в этом смысле х=16,7 можно рассматривать как крити­ческое значение выборочной средней.

б) Для того чтобы вычислить мощность рассматриваемого кри­терия, предварительно найдем его значение при условии справедли­вости конкурирующей гипотезы (т. е. при а0=16), положив х— 16,7;

U = (х— а0) У~п1а = (16,7—16) 1^25/10 = 0,35.

Отсюда видно, что если х < 16,7, то U < 0,35. Поскольку при х < 16,7 нулевая гипотеза отвергается, то и при U < 0,35 она также отвергается (при этом конкурирующая гипотеза справедлива, так как'мы положили а0=16).

Найдем теперь, пользуясь функцией Лапласа, мощность крите­рия, т. е. вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если справедлива конкурирующая гипотеза (см. § 7):

P(U < 0,35) = Р (— оо < U < 0,35) = Р (—оо < U < 0) +

+ Я(0< U < 0,35) = 0,5+ Ф (0,35) = 0,5 + 0,1368 = 0,6368.

Итак, искомая мощность рассматриваемого критерия прибли­женно равна 0,64. Если увеличить объем выборки, то мощность увеличится.

Например, при л =64 мощность равна 0,71. Если увеличить а, то мощностц также увеличится. Например, при а = 0,1 мощность равна 0,7642.

Замечание. Зная мощность, легко найти вероятность ошибки второго рода: р=1—0,64. (Разумеется, при решении примера можно было сначала ианти р, а затем мощность, равную 1—р.)

§ 17. Сравнение двух средних нормальных генеральных совокупностей с неизвестными дисперсиями (зависимые выборки)

**В предыдущих параграфах выборки предпола­гались независимыми. Здесь рассматриваются выборки одинакового объема, варианты которых попарно зави­симы. Например, если х{ (/= 1, 2, ..п) — результаты измерений деталей первым прибором, а у{—результаты измерений этих- же деталей, произведенные в том же по­рядке вторым прибором, то х{ и У[ попарно зависимы и в этом смысле сами выборки зависимые. Поскольку, как правило, х{=Фу{, то возникает необходимость установить, значимо или незначимо различаются пары этих чисел. Аналогичная задача ставится при сравнении двух мето­дов исследования, осуществленных одной лаборатори­**

314

**ей, или если исследование произведено одним и тем же методом двумя различными лабораториями.**

**Итак, пусть генеральные совокупности X и Y рас­пределены нормально, причем их дисперсии неизвестны. Требуется при уровне значимости а проверить нулевую гипотезу Н0\М (Х) = М (У) о равенстве генеральных сред­них нормальных совокупностей с неизвестными диспер­сиями при конкурирующей гипотезе Нг:М (Х)фМ (К) по двум зависимым выборкам одинакового объема.**

**Сведем эту задачу сравнения двух средних к задаче сравнения одной выборочной средней с гипотетическим значением генеральной средней, решенной в § 13, п. Б. С этой целью введем в рассмотренные случайные вели­чины— разности Dt = Xt — Yt и их среднюю**

g\_*Hdi\_* *'EiXt-Yt)* \_ 2\*, -X

***Y.***

**Если нулевая гипотеза справедлива, т. е. М (X) = М (К), то М (X) — M(Y) = 0 и, следовательно,**

М (D)=M (X — Y)=\*M (Х) — М (Y)=Q.

**Таким образом, нулевую гипотезу Н0: М (X) =\*\* М (F) можно записать так:**

H0:M(D) = **0.**

**Тогда конкурирующая гипотеза примет вид**

***H*l: *М (D)*** *Ф* 0.

Замечание 1. Далее наблюдаемые неслучайные разности

1. у( будем обозначать через d[ в отличие от случайных разностей Di = X{ — Y{. Аналогично выборочную среднюю этих разностей У, di/n обозначим через d в отличие от случайной величины D.

Итак, задача сравнения двух средних хну сведена к задаче сравнения одной выборочной средней d с гипотетическим значением генеральной средней М (D) = а0 = 0. Эта задача решена ранее в§ 13, п. Б, поэтому приведем лишь правило проверки нулевой гипотезы и иллюстрирующий пример.

Замечание 2. Как следует из изложенного выше, а фор­муле (см. § 13, п. Б)

Т'набд ” {х ао) я/\*

315

надо положить



Тогда Тяабд — ZVn/sj.

**Правило. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости а проверить нулевую гипотезу Н0:М(Х) — = М (У) о равенстве двух средних нормальных совокуп­ностей с неизвестными дисперсиями (в случае зависимых выборок одинакового объема) при конкурирующей гипо­тезе М(Х)=фМ(У), надо вычислить наблюдаемое зна­чение критерия:**

***Tnu = d\/Hlsa***

**и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости а, помещенному в верх­ней строке таблицы, и по числу степеней свободы k = п— 1 найти критическую точку (двусх. Кр (а> &)-**

**Если | Гпавл! < ?двуст.** Кр**—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.**

**Если | Тна6л| > гдвуст.** кр **— нулевую гипотезу отвергают.**

Пример. Двумя приборами в одном и том же порядке измерены 5 деталей и получены следующие результаты (в сотых долях мил­лиметра):

\*1 = 6, х2 = 7, \*з = 8, \*4 = 5, \*6 = 7; г/i=7, г/а=6, г/3=8, у4=т, г/»=8.

При уровне значимости 0,05 установить, значимо или незначимо раз­личаются результаты измерений.

Решение. Вычитая из чисел первой строки числа второй, получим: = —1, d2=l, d3 = 0, d4 = —2, dt =—1.

Найдем выборочную среднюю:

~d =.2 di/\* = (—1 + 1+0 —2Н 1)/5 = —0,6.

Учитывая, что rf® = I + 1 + 4 + 1=7 и ^jd/ = —3, найдем «исправленное» среднее квадратическое отклонение:

**Srf=|/ e утл**

Вычислим наблюдаемое значение критерия:

7,найл = 5‘ V~nhd = -0,6 >7 5/|7TJ=\_l(i8.

По таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню виачимости ? 0,05, помещенному в верхней строке таблицы, и числу степеней свободы к = 5—1=4 находим критическую точку ^двуст. кр (0,05; 4) = 2,78.

816

Так как ^„абл! < ^двуст. кр —нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Другими словами, результаты измерений различаются незначимо.

**§ 18. Сравнение наблюдаемой относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события**

**Пусть по достаточно большому числу п незави­симых испытаний; в каждом из которых вероятность р появления события постоянна, но неизвестна, найдена относительная частота т/п. Пусть имеются основания предполагать, что неизвестная вероятность равна гипоте­тическому значению р0. Требуется при заданном уровне значимости а проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что неизвестная вероятность р равна гипотетиче­ской вероятности р0.**

**Поскольку вероятность оценивается по относительной частоте, рассматриваемую задачу можно сформулировать и так: требуется установить, значимо или незначимо раз­личаются наблюдаемая относительная частота и гипоте­тическая вероятность.**

**В качестве критерия проверки нулевой гипотезы при­мем случайную величину**

***U* = (*М/п — р0) VnlVp^l,***

**где qa = 1— р0.**

**Величина V при справедливости нулевой гипотезы распределена приближенно нормально с параметрами М (£/) = 0, o(I/) = 1.**

**Пояснение. Доказано (теорема Лапласа), что при достаточно больших значениях п относительная частота имеет приближенно нормальное распределение с матема­тическим ожиданием р и средним квадратическим откло­нением У pq/п. Нормируя относительную частоту (вычи­тая математическое ожидание и деля на среднее квад­ратическое отклонение), получим**

*U \_\_М/п—р \_(М/п—р) Vh У ря/п Уря* ’

причем М (U) — 0, a(U)— 1.

317

**При справедливости нулевой гипотезы, т. е. при р = р0,**

*II \_ (М/п*— Ро) *У~п*

***VJJTo***

Замечание 1. Далее наблюдаемая частота обозначается через т/п в отлнчие от случайной величины М/п.

**Поскольку здесь критическая область строится так же, как и в § 10, приведем лишь правила проверки нулевой гипотезы и иллюстрирующий пример.**

**Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости проверить нулевую гипотезу Я0:р = р0 о равен­стве неизвестной вероятности гипотетической вероятности при конкурирующей гипотезе Н1:р=Фр0, надо вычислить наблюдаемое значение критерия:**

**^набл = (т/п — р0) VnjV Ро9о**

**и по таблице функции Лапласа найти критическую точку ыкр по равенству Ф(цкр) = (1—а)/2.**

**Если | Uвабл I < ^кр—нет оснований отвергнуть нуле­вую гипотезу.**

**Если | Нвабл | > ыкр—нулевую гипотезу отвергают.**

**Правило 2. При конкурирующей гипотезе Я1:р>р0 находят критическую точку правосторонней критической области по равенству Ф(ывр) = (1—2а)/2.**

**Если 1/иа6л < цкр—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.**

**Если и„а6л > цкр—нулевую гипотезу отвергают.**

**Правило 3. При конкурирующей гипотезе Нх:р <Ро находят критическую точку ыкр по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области ыкр = ыв** р.

**Если £/вабл>—ыкр—нет основании отвергнуть нуле­вую гипотезу.**

**Если Явабл<— «кр—нулевую гипотезу отвергают.**

Замечание 2. Удовлетворительные результаты обеспечивает выполнение неравенства np0q0 > 9.

Пример. По 100 независимым испытаниям найдена относительная частота 0,08. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипо­тезу Яо:р = ро = 0,12 при конкурирующей гипотезе Нх’.р Ф 0,12.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

(т/я-р0)/]Лй (0,08-0,12) >П00

**найл *тш ттт~ ’***

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид р Ф р0, поэтому критическая область двусторонняя.

318

Найдем критическую точку мкр по равенству

Ф («кр) — (1 — а)/2 = (1 — 0,05)/2 = 0,475.

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим вкр=1,96.

Так как | (/„абл I < мкр —нет оснований отвергнуть нулевую ги­потезу. Другими словами, наблюдаемая относительная частота не­значимо отличается от гипотетической вероятности.

**§19. Сравнение двух вероятностей биномиальных распределений**

**Пусть в двух генеральных совокупностях про­изводятся независимые испытания; в результате каждого испытания событие А может появиться либо не появиться.**

**Обозначим неизвестную вероятность появления собы­тия А в первой совокупности через plt а во второй — через р2. Допустим, что в первой совокупности произ­ведено пг испытаний (извлечена выборка объема пх), причем событие А наблюдалось mt раз. Следовательно, относи­тельная частота появления события в первой совокупности**

***wx* (Л) *—тх1пх.***

**Допустим, что во второй совокупности произведено п% испытаний (извлечена выборка объема п2), причем собы­тие А наблюдалось т2 раз. Следовательно, относительная частота появления события во второй совокупности**

**ша (Л) = mjn2.**

**Примем наблюдавшиеся относительные частоты в ка­честве оценок неизвестных вероятностей появления собы­тия Л: ptc^w1, p2~w2. Требуется при заданном уровне значимости а проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что вероятности рг и р2 равны между собой:**

***Но'.рг^р^р.***

**Заметим, что, поскольку вероятности оцениваются по относительным частотам, рассматриваемую задачу можно сформулировать и так: требуется установить, значимо или незначимо различаются относительные частоты шх и w2.**

**В качестве критерия проверки нулевой гипотезы при­мем случайную величину**

*if* *Му/rix*—*М2/п2*

~ *V p(l-p)(l/nx+l/n2)* \* W

319

**Величина U при справедливости нулевой гипотезы распределена приближенно нормально о параметрами М (U) \*=0ио (t/) = 1 (см. далее пояснение), В формуле (\*) вероятность р неизвестна, поэтому заменим ее оценкой наибольшего правдоподобия (см. гл. XVI, § 21, пример 2);**

***р\*^{т1 + тг)/(п1 + пгу,***

**кроме того, заменим случайные величины Мг и Ма их возможными значениями тх и та, полученными в испы­таниях. В итоге получим рабочую формулу для вычис­ления наблюдаемого значения критерия:**

***U т^Пг—тъ/Пг***

■л **/** т\ + **т2** (**j mt-f-ma\** / 1 **.** 1 **\ У П\-\-Пг \ Я**1 **+ ла / \ rti пг)**

**Критическая область строится в зависимости от вида  
конкурирующей гипотезы так же, как в § 10, поэтому  
ограничимся формулировкой правил проверки нулевой  
гипотезы.**

**Правило 1« Для того чтобы при заданном уровне зна-  
чимости а проверить нулевую гипотезу Нв\рх — р2 — р  
о равенстве вероятностей появления события в двух  
генеральных совокупностях (имеющих биномиальные рас-  
пределения) при конкурирующей гипотезе Нх:рхФр2, надо  
вычислить наблюдаемое значение критерия:**

*тх/п*х— *тг/пг*

***и***

набл'

/

*тх +т2* Л *тх + т2*\ /\_1 j 1\_\

**П1~\~П2 \ я1 + я2/ \Я1 П2 )**

**и по таблице функции Лапласа найти критическую точку ыкр по равенству Ф(цкр) = (1—а)/2.**

**Если | t/набл | < wKp—нет оснований отвергнуть нуле­вую гипотезу.**

**Если | £/иайя 1> ыкр—нулевую гипотезу отвергают.**

**Правило 2. При конкурирующей гипотезе Нх:рх > Рг находят критическую точку правосторонней критической области по равенству Ф(ыкр) — (1—2а)/2.**

**Если UBa6a < «кр—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.**

**Если UBa6a > —нулевую гипотезу отвергают.**

**Правило 3, При конкурирующей гипотезе Нх:рх<р2 находят критическую точку цкр по правилу 2, а затем полагают границу левосторонней критической области**

**Нкр =\* Ицр,**

820

Если U„абл > — «кр—нет оснований отвергнуть нуле­

вую гипотезу.

Если 11»а6л<—икр — нулевую гипотезу отвергают.

Пример. Из первой партии изделий извлечена выборка объема ni=IOOO изделий, причем тх = 20 изделий оказались бракованными; из второй партии извлечена выборка объема п = 900, причем т, = 30 изделий оказались бракованными. При уровне значимости а = 0,05 проверить нулевую гипотезу Н0:рх — р2 — р о равенстве вероятностей появления брака в обеих партиях при конкурирующей гипотезе Нх' РхФ Рг-

Решение. По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид Pi Ф Рг. поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем наблюдаемое значение критерия:

*и \_ mi!nt — m2/n2*

*тх* 4- *т2* { j *гп\ -\- т2*\ / \_1 | \

V ях -}- л2 \ Пх п2 ) \ Пх п2 )

Подставив данные задачи и выполнив вычисления, получим  
^ набл = 1,81.

Найдем критическую точку:

Ф (“кр) = (1 — а)/2 = (1 — 0,05)/2 = 0,475.

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим ыкр=1,96.

Так как | и„ябя | < икр—нет оснований отвергнуть нулевую ги-  
потезу. Другими словами, вероятности получения брака в обеих  
партиях различаются незначимо.

Замечание. Для увеличения точности расчета вводят так  
называемую поправку на непрерывность, а именно вычисляют наблю-  
даемое значение критерия по формуле

[тх/пх— 1/2ях]— [т2/п2+ 1/2я2]

набл ■

*-ш/~>Пх + т2* Л *тх + т2\* /J, J\_\

V Ях-)-л2 \ л1 + л2 / \П1 ni )

В рассмотренном примере по этой формуле получим |//набл| =1,96. Поскольку и ыкр=1,96, необходимо провести дополнительные испыта­ния, причем целесообразно увеличить объем выборок.

**Пояснение. Случайные величины Мх и М2 рас­пределены по биномиальному закону; при достаточно большом объеме выборок их можно считать приближенно нормальными (практически должно выполняться неравен­ство npq~>9), следовательно, и разность U' = Л1х/лх— — М2/п2 распределена приближенно нормально.**

**Для нормирования случайной величины W надо вы­честь из нее математическое ожидание М ((/') и разделить результат на среднее квадратическое отклонение a(U').**

**Покажем, что M(U’) = 0. Действительно, А1 (Л1г) == = ПхРх (см. гл. VII, § 5, замечание); при справедливости**

21 2730 321

**нулевой гипотезы (р1 = р2 = р) М (Мг) = пгр и аналогично М (Мг) = п2р. Следовательно,**

1 1 Л

***= — niP — —n2p = 0.***

**I\* 1 »\*2**

**Покажем, что среднее квадратическое отклонение а (£/') = P)[(l/ni) + (l/«a)].**

**Действительно, дисперсия D (Afj) = n1pl (1—pt) (см. гл. VIII, § 6, замечание); при справедливости нулевой гипотезы (Pt = рг — р) D(Mt) = n1p( 1 — р) и аналогично D (М2) = пгр (1—р). Следовательно,**

**D (U') — D [^—^1 =Л^(Л\*1) + -тО(Л1|) =**

L ***п1 п2*** J ***П\ п2***

**= -r«iP (1 — *р) + -^тп2р(1-~р) = р(1~-р)* ("-L + J-'j.**

**«1 «2 \ Пх П2 /**

**Отсюда среднее квадратическое отклонение**

**о (U') = ]/> (1— р)[1/«!) + (1/«2)1.**

**Итак, случайная величина U = (u' — М(и'))/о(и') (см. формулу (\*)) нормирована и поэтому М (U) - Оно (U) — 1.**

**§ 20. Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам различного объема.**

**Критерий Бартлетта**

**Пусть генеральные совокупности Xlt Х2, ..., Хг распределены нормально Из этих совокупностей извле­чены независимые выборки, вообще говоря, различных объемов nt, rt2, . .., nt (некоторые объемы могут быть одинаковыми; если все выборки имеют одинаковый объем, то предпочтительнее пользоваться критерием Кочрена, который описан в следующем параграфе). По выборкам найдены исправленные выборочные дисперсии** sf, **s|, ...,** s

**Требуется по исправленным выборочным дисперсиям при заданном уровне значимости а проверить нулевую гипотезу, состоящую в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:**

***H0:D(X1) = D{XM)=...=D{XI).***

322

**Другими словами, требуется установить, значимо или незначимо различаются исправленные выборочные дисперсии.**

**Рассматриваемую здесь гипотезу о равенстве несколь­ких дисперсий называют гипотезой об однородности дисперсий.**

**Заметим, что числом степеней свободы дисперсии sa на­зывают число kj = П/—1, т. е. число, на единицу мень­шее объема выборки^ по которой вычислена дисперсия.**

**Обозначим через s2 среднюю арифметическую исправ­ленных дисперсий, взвешенную по числам степеней свободы:**

***г***

**где k — 2 \*/•**

i— 1

**В качестве критерия проверки нулевой гипотезы об однородности дисперсий примем критерий Бартлетта — случайную величину**

***B = V/C,***

**где**

**V = 2,303 jj^fe lg sa — lg s? j ,**

**c = 1 +Т(Г=ГТ) [Z t] •**

**Бартлетт установил, что случайная величина В при условии справедливости нулевой гипотезы распределена приближенно как ха с I—1 степенями свободы, если все kt > 2. Учитывая, что &,==«,•—1, заключаем, что п{ — — 1 > 2, или п( > 3, т. е. объем каждой из выборок должен быть не меньше 4.**

**Критическую область строят правостороннюю, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:**

**р[в >х£р(а; I— !)]=“•**

**Критическую точку х«р(а’\*—\*) находят по таблице приложения 5, по уровню значимости а и числу степеней**

323

**свободы k = I — 1, и тогда правосторонняя критическая область определяется неравенством В > х£р» а область принятия гипотезы—неравенством В < Хкр-**

**Обозначим значение критерия Бартлетта, вычисленное по данным наблюдений, через Внабл и сформулируем пра­вило проверки нулевой гипотезы.**

**Правило. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости а проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий нормальных совокупностей, надо вычислить наблюдаемое значение критерия Бартлетта B = V/C и по таблице критических точек распределения хг найти кри­тическую точку х\*р («; I—!)•**

**Если Внавл < Хкр — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.**

**Если ВНабл > Хкр—нулевую гипотезу отвергают.**

Замечание 1. Не следует тор9пнться вычислять постоян­ную С. Сначала надо найти V и сравнить с Хкр1 если окажется, что V < Хкр, то подавно (так как С > 1) B=(V/C) < Хкр н, следовательно, С вычислять не нужно.

Если же V > Хкр, то надо вычислить С и затем сравнить В с Хкр- Замечание 2. Критерий Бартлетта весьма чувствителен к отклонениям распределений от нормального, поэтому к выводам, полученным по этому критерию, надо относиться с осторожностью.

Таблица 25

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Номер  вы­  борки | Объем  вы­  борки  ni | Число  степе­  ней  сво­  боды  ki | Дис­  пер­  сии  ■? | ft.s\*  it | 'gsf | \*,• lg s. | \/k. |
| 1 | 10 | 9 | 0,25 | 2,25 | 1,3979 | 6,5811 |  |
| 2 | 13 | 12 | 0,40 | 4,80 | 1,6021 | 5,2252 |  |
| 3 | 15 | 14 | 0,36 | 5,04 | 1,5563 | 7,7822 |  |
| 4 | 16 | 15 | 0,46 | 6,90 | 1,6628 | 6,9420 |  |
| 2 |  | k — 50 |  | 18,99 |  | 22,5305 |  |

324

Пример. По четырем независимым выборкам, объемы которых соответственно равны ^=10, п2= 12, я\* = 15, п4=16, извлеченным нз нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии, соответственно равные 0,25; 0,40; 0,36; 0,46. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу об однородности дисперсий (критическая область — правосторонняя).

Решение. Составим расчетную табл. 25 (столбец 8 пока запол­нять не будем, поскольку еще неизвестно, понадобится ли вычис­лять С).

Пользуясь расчетной таблицей, найдем:

7а = (2 kiS()/k = 18,99/50 = 0,3798; lg0,3798 = П5795;

V = 2,303 [> lg sa — 2 \*/ lg \*?] = 2,303 [50.7,5795 — 22,5305] == 1,02.

По таблице приложения 5, по уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы I—1=4—1=3 находим критическую точку Х\*р (0,05; 3) = 7,8.

Так как V < Хкр. то подавно (поскольку С > 1) Bnafa = (V/C) < < Хкр и> следовательно, отвергнуть нулевую гипотезу об однородно­сти дисперсий нет оснований. Другими словами, исправленные вы­борочные дисперсии различаются незначимо.

Замечание 3. Если требуется оценить генеральную диспер­сию, то при условии однородности дисперсий целесообразно принять в качестве ее оценки среднюю арифметическую исправленных диспер­сий, взвешенную по числам степеней свободы, т. е.

sa = (2\*/s

Например, в рассмотренной задаче в качестве оценки генеральной дисперсии целесообразно принять 0,3798.

**§ 21. Сравнение нескольких дисперсий нормальных генеральных совокупностей по выборкам одинакового объема. Критерий Кочрена**

**Пусть генеральные совокупности Xlt Х2, ..., Х[ распределены нормально. Из этих совокупностей из­влечено I независимых выборок одинакового объе­ма л и по ним найдены исправленные выборочные дис­персии sa, sa s®, все с одинаковым числом степеней**

**свободы k = п — 1.**

**Требуется по исправленным дисперсиям при заданном уровне значимости а проверить нулевую гипотезу, со­стоящую в том, что генеральные дисперсии рассматрива­емых совокупностей равны между собой:**

**Я0: D (Х\) = D (Ха) =•...= D (Х{).**

**Другими словами, требуется проверить, значимо или незначимо различаются исправленные выборочные дис­персии.**

325

**В рассматриваемом случае выборок одинакового объ­ема можно по критерию Фишера—Снедекора (см. § 8). сравнить наибольшую и наименьшую дисперсии; если окажется, что различие между ними незначимо, то по­давно незначимо и различие между остальными диспер­сиями. Недостаток этого метода состоит в том, что ин­формация, которую содержат остальные дисперсии, кроме наименьшей и наибольшей, не учитывается.**

**Можно также применить критерий Бартлетта. Однако, как указано в § 20, известно лишь приближенное распределение этого критерия, поэтому предпочтительнее использовать критерий Кочрена, распределение которого найдено точно.**

**Итак, в качестве критерия проверки нулевой гипо­тезы примем критерий Кочрена—отношение максималь­ной исправленной дисперсии к сумме всех исправленных дисперсий:**

**G = SU/(Si4S?+...+S?).**

**Распределение этой случайной величины зависит только от числа степеней свободы k = п — 1 и количества выбо­рок I.**

**Критическую область строят правостороннюю, исходя из требования, чтобы вероятность попадания критерия в эту область в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости:**

**Р [G > GKp (a; k, 0] = а.**

**Критическую точку GKP(a;fe,/) находят по таблице приложения 8, и тогда правосторонняя критическая об­ласть определяется неравенством G > GKP, а область при­нятия нулевой гипотезы — неравенством G < GKp.**

**Обозначим значение критерия, вычисленное по дан­ным наблюдений, через 6вдбл и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.**

**Правило. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости а проверить гипотезу об однородности диспер­сий нормально распределенных совокупностей, надо вы­числить наблюдаемое значение критерия и по таблице найти критическую точку.**

**Если Онабл < Скр—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.**

**Если GHa6jI>GKp — нулевую гипотезу отвергают.**

326

Замечание. Если требуется оценить генеральную дисперсию, то при условии однородности дисперсий целесообразно принять в ка­честве ее оценки среднюю арифметическую исправленных выбороч­ных дисперсий.

Пример. По четырем независимым выборкам одинакового объема п = 17, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, най­дены исправленные дисперсии: 0,26; 0,36; 0,40; 0,42. Требуется:

а) при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об одно­родности генеральных дисперсий (критическая область — правосторон­няя); б) оценить генеральную дисперсию.

Решение, а) Найдем наблюдаемое значение критерия Кочре- на — отношение максимальной исправленной дисперсии к сумме всех дисперсий:

бнабл = 0,42/(0,26 + 0..36 -+- 0,40 + 0,42) = 0,2917.

Найдем по таблице приложения 8, по уровню значимости 0,05, числу степеней свободы к =17—I = 16 и числу выборок 1 = 4 критическую точку GKp(0,05; 16; 4) =0,4366.

Так как GHaвл < GKp—-нет оснований отвергнуть нулевую гипо­тезу об однородности дисперсий. Другими словами, исправленные выборочные дисперсии различаются незначимо.

б) Поскольку нулевая гипотеза справедлива, в качестве оценки генеральной дисперсии примем среднюю арифметическую исправлен­ных дисперсий:

о2 = (0,26 + 0,36+0,40 + 0,42)/4 = 0,36.

**§ 22. Проверка гипотезы о значимости**

**выборочного коэффициента корреляции**

**Пусть двумерная генеральная совокупность (X, У) распределена нормально. Из этой совокупности из­влечена выборка объема о и по ней найден выборочный коэффициент корреляции гв, который оказался отличным от нуля. Так как выборка отобрана случайно, то еще нельзя заключить, что коэффициент корреляции генераль­ной совокупности гг также отличен от нуля. В конечном счете нас интересует именно этот коэффициент, поэтому возникает необходимость при заданном уровне значи­мости а проверить нулевую гипотезу Н0:гт = 0 о равен­стве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе 7/1:гг = 0.**

**Если нулевая гипотеза отвергается, то это означает, что выборочный коэффициент корреляции значимо отли­чается от нуля (кратко говоря, значим), а X и У корре- лированы, т. е. связаны линейной зависимостью.**

**Если нулевая гипотеза будет принята, то выбо­рочный коэффициент корреляции незначим, а X и У не- коррелированы, т. е. не связаны линейной зависимостью.**

327

**В качестве критерия проверки нулевой гипотезы при­мем случайную величину**

T = ***ryW=2iVT~f%.***

**Величина Т при справедливости нулевой гипотезы имеет распределение Стьюдента с k — n— 2 степенями свободы.**

**Поскольку конкурирующая гипотеза имеет видгг=т^0, критическая область—двусторонняя; она строится так же, как в § 12 (первый случай).**

**Обозначим значение критерия, вычисленное по дан­ным наблюдений, через Т„а6в и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.**

**Правило. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости а проверить нулевую гипотезу Н0:гт — О о ра­венстве нулю генерального коэффициента корреляции нормальной двумерной случайной величины при конку­рирующей гипотезе Н1:гтФ0, надо вычислить наблюда­емое значение критерия:**

**7’набл= гУп — ilV 1—rj**

**и по таблице критических точек распределения Стьюдента, по заданному уровню значимости и числу степеней сво­боды k = n — 2 найти критическую точку tKP (a; k) для двусторонней критической области.**

**Если | Гнабл| < \*Кр—нет оснований отвергнуть нуле­вую гипотезу.**

**Если |7\,абл1>\*кр—нулевую гипотезу отвергают.**

Пример. По выборке объема л—122, извлеченной нз нормальной двумерной совокупности, найден выборочный коэффициент корреля­ции гв = 0,4. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипо­тезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе Ях:гг Ф 0.

Решение. Найдем наблюдаемое значение критерия:

Т’набл = = 0,4]/"122-2/]/"l — 0,4\* = 4,78.

По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид гг Ф 0, поэтому критическая область — двусторонняя.

По уровню значимости 0,05 и числу степеней свободы к = = 122 — 2=120 находим по таблице приложении 6 для двусторонней критической области критическую точку /кр(0,05; 120)= 1,98.

Поскольку Т’набл > ^кр—нулевую гипотезу отвергаем. Другими словами, выборочный коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, т. е. К и Y коррелированы.

328

**§ 23. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности. Критерий согласия Пирсона**

**В предыдущих параграфах закон распределения генеральной совокупности предполагается известным.**

**Если закон распределения неизвестен, но есть осно­вания предположить, что он имеет определенный вид (назовем его Л), то проверяют нулевую гипотезу: гене­ральная совокупность распределена по закону А.**

**Проверка гипотезы о предполагаемом законе неизве­стного распределения производится так же, как и про­верка гипотезы о параметрах распределения, т. е. при помощи специально подобранной случайной величины — критерия согласия.**

**Критерием согласия называют критерий проверки ги­потезы о предполагаемом законе неизвестного распреде­ления.**

**Имеется несколько критериев согласия: («хи квад­**

**рат») К. Пирсона, Колмогорова, Смирнова и др. Огра­ничимся описанием применения критерия Пирсона к про­верке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности (критерий аналогично применяется и для других распределений, в этом состоит его достоинство). С этой целью будем сравнивать эмпирические (наблюда­емые) и теоретические (вычисленные в предположении нормального распределения) частоты.**

**Обычно эмпирические и теоретические частоты раз­личаются. Например (см. гл. XVII, § 7):**

**эмп. частоты 6 13 38 74 106 85 30 10 4**

**теорет. частоты.. .3 14 42 82 99 76 37 11 2**

**Случайно ли расхождение частот? Возможно, что рас­хождение случайно (незначимо) и объясняется либо ма­лым числом наблюдений, либо способом их группировки, либо другими причинами. Возможно, что расхождение частот неслучайно (значимо) и объясняется тем, что тео­ретические частоты вычислены исходя из неверной гипо­тезы о нормальном распределении генеральной совокуп­ности.**

**Критерий Пирсона отвечает на поставленный выше вопрос. Правда, как и любой критерий, он не доказы­вает справедливость гипотезы, а лишь устанавливает на**

329

**принятом уровне значимости ее согласие или несогласие с данными наблюдений.**

**Итак, пусть по выборке объема л получено эмпири­ческое распределение:**

**Допустим, что в предположении нормального распре­деления генеральной совокупности вычислены теорети­ческие частоты n't (например, так, как в следующем па­раграфе). При уровне значимости а требуется проверить нулевую гипотезу: генеральная совокупность распреде­лена нормально.**

**В качестве критерия проверки нулевой гипотезы при­мем случайную величину**

**Эта величина случайная, так как в различных опытах она принимает различные, заранее не известные значе­ния. Ясно, что чем меньше различаются эмпирические и теоретические частоты, тем меньше величина критерия (\*), и, следовательно, он в известной степени характеризует близость Эмпирического и теоретического распределений.**

**Заметим, что возведением в квадрат разностей частот устраняют возможность взаимного погашения положи­тельных и отрицательных разностей. Делением на n't до­стигают уменьшения каждого из слагаемых; в против­ном случае сумма была бы настолько велика, что при­водила бы к отклонению нулевой гипотезы даже и тогда, когда она справедлива. Разумеется, приведенные сооб­ражения не являются обоснованием выбранного крите­рия, а лишь пояснением.**

**Доказано, что при п—►** оо **закон распределения слу­чайной величины (\*) независимо от того, какому закону распределения подчинена генеральная совокупность, стре­мится к закону распределения ck степенями свободы. Поэтому случайная величина (\*) обозначена через х2. а сам критерий называют критерием согласия «хи квадрат».**

**Число степеней свободы находят по равенству k = = s—1—г, где s — число групп (частичных интервалов) выборки; г — число параметров предполагаемого распре­деления, которые оценены по данным выборки.**

**В частности, если предполагаемое распределение — нор­мальное, то оценивают два параметра (математическое**

**варианты**

**эмп. частоты. . .**



**Х2 = 2К' — п\)Чп\.**

**(\*)**

**ззо**

**ожидание и среднее квадратическое отклонение), поэтому г — 2 и число степеней свободы k — s — 1—r=s—1—2 = = s—3.**

**Если, например, предполагают, что генеральная сово­купность распределена по закону Пуассона, то оцени­вают один параметр Я,, поэтому г = 1 и k=s — 2.**

**Поскольку односторонний критерий более «жестко» отвергает нулевую Гипотезу, чем двусторонний, построим правостороннюю критическую область, исходя из требо­вания, чтобы вероятность попадания критерия в эту об­ласть в предположении справедливости нулевой гипотезы была равна принятому уровню значимости а:**

**р [Х2 > Zip (а; \*)] = «•**

**Таким образом, правосторонняя критическая область определяется неравенством х2 > Хкр (ot; Лг), а область при­нятия нулевой гипотезы — неравенством х2 < Хкр (а’> k).**

**Обозначим значение критерия, вычисленное по дан­ным наблюдений, через** Хнабл **и сформулируем правило проверки нулевой гипотезы.**

**Правило. Для того чтобы при заданном уровне зна­чимости проверить нулевую гипотезу генеральная**

**совокупность распределена нормально, надо сначала вы­числить теоретические частоты, а затем наблюдаемое значение критерия:**

**Xia *6Ji = '2i(ni — n't)i/ni* (\*\*)**

**и по таблице критических точек распределения х2» по заданному уровню значимости а и числу степеней сво­боды k = s — 3 найти критическую точку Хкр («;&)•**

**Если Хнабл < Хкр —нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.**

**Если Хнабл > Хкр — нулевую гипотезу отвергают.**

Замечание 1. Объем выборки должен быть достаточно велик, во всяком случае ,не менее 50. Каждая группа должна содержать не менее 5—8 вариант; малочисленные группы следует объединять в од­ну, суммируя частоты.

Замечание 2. Поскольку возможны ошибки первого и вто­рого рода, в особенности если согласование теоретических и эмпи­рических частот «слишком хорошее», следует проявлять осторожность. Например, можно повторить опыт, увеличить число наблюдений, вос­пользоваться другими критериями, построить график распределения, вычислить асимметрию и эксцесс (см. гл. XVII, § 8).

Замечание 3. Для' контроля вычислений формулу (\*\*) пре­образуют к виду

Хнабл =[2Л\*/ЛП—" ”•

331

Рекомендуем читателю выполнить это преобразование самостоятельно, для чего надо в (\*\*) возвести в квадрат разность частот, сократить результат на щ и учесть, что 2ni' = n> ; ,п'1 ~п-

Пример. При уровне значимости О.Оэпровернть гипотезу о нор­мальном распределении генеральной совокупности, если известны эм­пирические и теоретические частоты:

эмп. частоты 6 13 38 74 106 85 30 14

теорет. частоты...3 14 42 82 99 76 37 13

Решение. Вычислим Хнабл, для чего составим расчетную

табл. 26.

Контроль: Хиабл = 7,19:

l^nVni]—п = 373,19— 366 = 7,19.

Вычисления произведены правильно.

Найдем число степеней свободы, учитывая, что число групп вы­борки (число различных вариант) s = 8; k — 8—3 = 5.

Т а, б л и ц а 26

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | б | 7 | 8 |
| ( | Я1 | /  ni | пГп\ | (л гп\у |  | "i | nt/ni |
| 1 | 6 | 3 | 3 | 9 | 3 | 36 | 12 |
| 2 | 13 | 14 | —1 | 1 | 0,07 | 169 | 12,07 |
| 3 | 38 | 42 | —4 | 16 | 0,38 | 1444 | 34,38 |
| 4 | 74 | 82 | —8 | 64 | 0,78 | 5476 | 66,78 |
| 5 | 106 | 99 | 7 | 49 | 0,49 | 11236 | 113,49 |
| 6 | 85 | 76 | 9 | 81 | 1,07 | 7225 | 95,07 |
| 7 | 30 | 37 | —7 | 49 | 1,32 | 900 | 24,32 |
| 8 | 14 | 13 | 1 | 1 | 0,08 | 196 | 15,08 |
| 2 | 366 | 366 |  |  | Хнабл = 7,19 |  | 373,19 |

По таблице критических точек распределения %2 (см. приложе­ние 5), по уровню аначимости а = 0,05 и числу степеней свободы к = 5 находим Хкр (0,05; 5)= 11,1.

Так как Хиабл < Хкр —нет оснований отвергнуть нулевую гипо­тезу. Другими словами, расхождение эмпирических и теоретических частот незначимое. Следовательно, данные наблюдений согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

332

§ 24. Метрдика вычисления теоретических частот нормального распределения

**Как следует из предыдущего параграфа, сущность критерия согласия Пирсона состоит в сравнении эмпири­ческих и теоретических частот. Ясно, что эмпирические частоты находят из опыта. Как найти теоретические часто­ты, если предполагается, что генеральная совокупность распределена нормально? Ниже приведен один из способов решения этой задачи.**

1. **Весь интервал наблюдаемых значений X (выборки объема п) делят на s частичных интервалов {х(, х|+1) оди­наковой длины. Находят середины частичных интервалов х] = (х,- + х,-+х)/2; в качестве частоты nt варианты х\* при­нимают число вариант, которые попали в i-й интервал. В итоге получают последовательность равноотстоящих вариант и соответствующих им частот:**

***х! х\ ... х\ пг* ... *ns***

**При этом 2rt/ = n-**

1. **Вычисляют, например методом произведений, выбо­рочную среднюю х\* и выборочное среднее квадратическое отклонение о\*.**
2. **Нормируют случайную величину X, т. е. переходят к величине Z — {X— х\*)/о\* и вычисляют концы интервалов (2/,** г1+1):

***г,* = (х, — *х\*)/а\*, zJ+i* = *{xi+i — x\*)la\*,***

**причем наименьшее значение Z, т. е. zit полагают равным** — оо, **а наибольшее, т. е. zs, полагают равным** оо.

1. **Вычисляют теоретические вероятности р,- попадания X в интервалы (х/, х/+1) по равенству (Ф(**2**)—функция Лапласа)**

***р, = Щг1+1)-Ф{г,)***

**и, наконец, находят искомые теоретические частоты п\ =пр(.**

Пример. Найти теоретические частоты по заданному интервально­му распределению выборки объема п =200, предполагая, что генераль­ная совокупность распределена нормально (табл. 27).

Решение 1. Найдем середины интервалов х\* = (х/-)-х/+1)/2. На­пример, \*J=-(4 + 6)/2 = 5. Поступая аналогично, получим последова-

333

тельиость равноотстоящих вариант и соответствующих им частот ft/: xl 5 7 9 11 13 15 17 19 21

щ 15 26 25 30 26 21 24 20 13

1. Пользуясь методом произведений, найдем выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение:

7\*= 12,63, о\* =4,695.

1. Найдем интервалы (г/, zI+1), учитывая, что х\*= 12,63, о\*= = 4,695, 1/о\*=0,213, для чего составим расчетную табл. 28.

Таблица 27

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  интер­  вала | Границы  интервала | | Ч астота | Номер  интер­  вала | Границы  интервала | | Частота |
| ( | \*/ | \*/+1 | п/ | ( | Х1 | \*1+1 | л/ |
| 1 | 4 | 6 | 15 | 6 | 14 | 16 | 21 |
| 2 | 6 | 8 | 26 | 7 | 16 | 18 | 24 |
| 3 | 8 | 10 | 25 | 8 | 18 | 20 | 20 |
| 4 | 10 | 12 | 30 | 9 | 20 | 22 | 13 |
| 5 | 12 | 14 | 26 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | л = 200 |

4. Найдем теоретические вероятности р/ и искомые теоретические частоты nj=np/, для чего составим расчетную табл. 29.

Таблица 28

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ( | Границы  интервала | | — •  Х^~Х |  | Границы интервала | |
| Х1 | xi + l | zi =  = (\*,—\* »)/о • | zi + i=  =<jt/+1-T\*)/o\* |
| 1 | 4 | 6 |  | —6,63 | 00 | — 1,41 |
| 2 | 6 | 8 | —6,63 | —4,63 | — 1,41 | —0,99 |
| 3 | 8 | 10 | —4,63 | —2,63 | —0,99 | —0,56 |
| 4 | 10 | 12 | —2,63 | —0,63 | —0,156 | —0,13 |
| 5 | 12 | 14 | —0,63 | 1,37 | —0,13 | 0,29 |
| 6 | 14 | 16 | 1,37 | 3,37 | 0,29 | 0,72 |
| 7 | 16 | 18 | 3,37 | 5,37 | 0,72 | 1,14 |
| 8 | 18 | 20 | 5,37 | 7,37 | 1.14 | 1,57 |
| 9 | 20 | 22 | 7,37 |  | 1,57 | 00 |

334

Таблица 29

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| , t | Границы  интервала | | Ф (2() | Ф(21 + 1> | Р,=Ф{21 + 1)-  — Ф (г,) | п' = пр( = 200 Р( |
| г( | г< + 1 |
| I | — 00 | — 1,41 | —0,5 | —0,4207 | 0,0793 | 15,86 |
| 2 | — 1,41 | —0,99 | —0,4207 | —0,3389 | 0,0818 | 16,36 |
| 3 | —0,99 | —0,56 | —0,3389 | —0,2123 | 0,1266 | 25,32 |
| 4 | —0,56 | —0,13 | —0,2123 | —0,0517 | 0,1606 | 32,12 |
| 5 | —0,13 | 0,29 | —0,0517 | 0,1141 | 0,1658 | 33,16 |
| 6 | 0,29 | 0,72 | 0,1141 | 0,2642 | 0,1501 | 30,02 |
| 7 | 0,72 | 1,14 | 0,2642 | 0,3729 | 0,1087 | 21,74 |
| 8 | 1,14 | 1,57 | 0,3729 | 0,4418 | 0,0689 | 13,78 |
| 9 | 1,57 | 00 | 0,4418 | 0,5 | 0,0582 | 11,64 |
|  |  |  |  |  | 2\* = i | 2 п\ = 200 |

Искомые теоретические частоты помещены в последнем столбце табл. 29.

**§ 25. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена и проверка гипотезы о его значимости**

**Допустим, что объекты генеральной совокупно­сти обладают двумя качественными признаками. Под ка­чественным подразумевается признак, который невозмож­но измерить точно, но он позволяет сравнивать объекты между собой и, следовательно, расположить их в порядке убывания или возрастания качества. Для определенности будем всегда располагать объекты в поряд­ке ухудшения качества. При таком «ранжирова­нии» на первом месте находится объект наилучшего каче­ства по сравнению с остальными; на втором месте ока­жется объект «хуже» первого, но «лучше» других, и т. д.**

**Пусть выборка объема п содержит независимые объ­екты, которые обладают двумя качественными признака­ми Л и Б. Для оценки степени связи признаков вводят, в частности, коэффициенты ранговой корреляции Спирмена (изложен в настоящем параграфе) и Кендалла (см. § 26).**

**Для практических целей использование ранговой кор­реляции весьма полезно. Например, если установлена**

335

**высокая ранговая корреляция между двумя качествен­ными признаками изделий, то достаточно контролировать изделия только по одному из признаков, что удешевляет и ускоряет контроль.**

**Расположим сначала объекты выборки в порядке ухуд­шения качества по признаку А при допущении, что все объекты умеют различное качество по обоим признакам (случай, когда это допущение не выполняет­ся, рассмотрим ниже). Припишем объекту, стоящему на х-м месте, число—ранг х,-, равный порядковому номеру объекта. Например, ранг объекта, занимающего первое место, xt = 1; объект, расположенный на втором месте, имеет ранг х2 = 2, и т. д. В итоге получим последовательность рангов по признаку А: хг=1, ха = 2, ...,х„~п.**

**Расположим теперь объекты в порядке убывания ка­чества по признаку В и припишем каждому из них ранг yit однако (для удобства сравнения рангов) индекс i при у будет по-прежнему равен порядко­вому номеру объекта по признаку А. Напри­мер, запись уг — Ъ означает, что по признаку А объект стоит на втором месте, а по признаку В — на пятом.**

**В итоге получим две последовательности рангов:**

**по признаку А ... хг, х2, ..., хп**

**по признаку В ... у1г у2, . . ., у„**

**Заметим, что в первой строке индекс i совпадает с по­рядковым номером объекта, а во второй, вообще говоря, не совпадает. Итак, в общем случае Xi=^=yt.**

**Рассмотрим два «крайних случая».**

1. **Пусть ранги по признакам Л и В совпадают при всех значениях индекса t: х4- = х/,-. В этом случае ухуд­шение качества по одному признаку влечет ухудшение**

**качества по другому. Очевидно, признаки связаны: имеет место «полная прямая зависимость».**

**> 2. Пусть ранги по признакам А и В противоположны в том смысле, что если х1=1, то у1 = п\ если хг — 2, то у2 = п—1; ..., если х„ = п, то уп = 1. В этом случае ухуд­шение качества по одному признаку влечет улучшение по другому. Очевидно, признаки связаны — имеет место «противоположная зависимость».**

**На практике чаще будет встречаться промежуточный случай, когда ухудшение качества по одному признаку влечет для некоторых объектов ухудшение, а для дру­гих— улучшение качества. Задача состоит в том, чтобы**

336

**оценить связь между признаками. Для ее решения рас­смотрим ранги xlt х2, ..., хп как возможные значения**

**случайной величины X, а уг, уг уп — как возможные**

**значения случайной величины Y. Таким образом, о связи между качественными признаками Л и В можно судить по связи между случайными величинами X и Y, для оценки которой используем коэффициент корреляции.**

**Вычислим выборочный коэффициент корреляции слу­чайных величин X и Y в условных вариантах (см. гл. XVIII, §8):**

*nuvtiv— tiuv*

**Г —**

**в *noaov***

**приняв в качестве условных вариант отклонения и,- — = х,-—х, Vj — yi — у. Каждому рангу х( соответствует только один ранг упоэтому частота любой пары ран­гов с одинаковыми индексами, а следовательно, и любой пары условных вариант с одинаковыми индексами равна единице: nu,v =1. Очевидно, что частота любой пары**

**I I**

**вариант с разными индексами равна нулю. Учитывая, кроме того, что среднее значение отклонения равно нулю (см. гл. XVI, § 7, следствие), т. е. ц = и = 0, получим более простую формулу вычисления выборочного коэф­фициента корреляции:**

2 **, х**

Г В = . (\*)

**в *nouav* ' *’***

**Таким образом, надо найти а» и**

**Выразим через известные числа — объем выбор­**

**ки л и разности рангов di = Xi—yt. Заметим, что по­скольку средние значения рангов х = (1 -J- 2 -{- ... +п)/п и I/ = (1 + 2 + ... + п)/п равны между собой, то у—х = 0. Используем последнее равенство:**

**d. = Xj — yt = xt — у( + (у —■ х) = (Xi — х) — (у,- — у) = и,— Vi. Следовательно,**

*df = (U{-Vi)\*

**Учитывая, что (см. далее пояснение)**

**S = 2 v‘ = («3 — «)/12,**

22 2720

**<\*\*)**

337

**имеем**

**2 d\*=2 («.■—w<)• e 2 uf—2 2 uivi+2 v‘ =**

**— [(n8—n)/6]—2 2 «,\*>/•**

**Отсюда**

**2u,t>/ = [(«3-n)/l2]-2<\*?/2. (\*\*\*)**

**Остается найти a„ и av. По определению выборочной дисперсии, учитывая, что и = 0, и используя (\*\*), по­лучим**

**Du = 2 (щ—и)\*/п = 2 uf/n = (л3—я)/12л (ла —1)/12. Отсюда среднее квадратическое отклонение**

**а„ = »а—1)/12.**

**Аналогично найдем**

***ov = V(na—* 1)/12.**

**Следовательно,**

**nauav= (л3— л)/12.**

**Подставив правые части этого равенства и соотно­шения (\*\*\*) в (\*), окончательно получим выборочный коэф­фициент ранговой корреляции Спирмена**

**рв= 1-~[(б2^2)/(«3—«)], (\*\*\*\*)**

**где *dt — х,-*—*уi.***

**Пояснение. Покажем, что 2ы? = (я3— л)/12. Дей­ствительно, учитывая, что**

**2 х{ = 1 + 2 + ... + п = (1 -\- п) п/2, x=2\*i/«»d + «)/2,**

**2х?= 12 + 22+... + л2 = [л(л + 1)(2л+1)]/6,**

2 =2 (\*/—х)2 —2 х?— 2х 2 \*1 + п (х)2,

**после элементарных выкладок получим**

**2 л8 = (л3 —л)/12.**

**Аналогично можно показать, что 2у\* = (яэ—л)/12.**

338

**Приведем свойства выборочного коэффициента корре­ляции Спирмена.**

**Свойство 1. *Если между качественными призна­ками А и В имеется* *«полная прямая зависимость*» *в том смысле, что ранги объектов совпадают при всех значе­ниях i, то выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен единице.***

**Действительно, подставив dj = Xj—yt — 0 в (\*\*\*\*), по­лучим**

Рв= 1.

**Свойство *2. Если между качественными признаками А и В имеется* *«противоположная зависимость*» *в том смысле, что рангу хх* = 1 *соответствует ранг ух* = п; *рангу х2 соответствует ранг у2 = п* — 1; ...; *рангу х„ = п соответствует ранг уп*** *—* 1, ***то выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена равен минус единице.***

**Действительно,**

***d1—l*—*п, d2 =* 3—*п, ..., d„ = {2n*—1)—*п.* Следовательно,**

**2d? = (l-n)\*-H3—л)8+...+[(2л — 1)-лр =**

**= [l« + 3i+ ... + (2л — I)2] —2л [1+3 + ... +(2л — 1)] + + л • л8 = [л (4л2—1)/3] — 2л • л2 + л8 — (л8—л)/3.**

**Подставив £df = (na—л)/3 в (\*\*\*\*), окончательно по­лучим**

Рв = ^ •

**Свойство 3. *Если между качественными признаками А и В нет ни* *«полной прямот, ни тротивоположнот зависимостей, то коэффициент* рв *заключен между* — 1 *и* —(- 1, *причем чем ближе к нулю его абсолютная величина, тем зависимость меньше.***

Пример 1. Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена по данным ранга объектов выборки объема я =10:

xi 123456 789 10 if; 6 4 8 1 2 5 10 3 7 9

Решение. Найдем разности рангов di — X[—ур —5,—2,—5, 3, 3, 1, 3, 5, 2, 1.

Вычислим сумму квадратов разностей рангов:

2<\*?=: 25 + 4 + 25 + 9 + 9+1+9 + 25 + 4+1 = 112.

22 \* 339

Найдем искомый коэффициент ранговой корреляции, учитывая, что п — 10:

р„= 1 — [б 2 dV(n\* — n)] = 1 — [6 -112/(1000 —10)1 =0,32.

Замечание. Если выборка содержит объекты с одинако­вым качеством, то каждому из них приписывается ранг, рав­ный среднему арифметическому порядковых номеров объектов. Напри­мер, если объекты одинакового качества по признаку А имеют порядковые номера 5 и 6, то их ранги соответственно равны: хл = = (5 + 6)/2 = 5,5; хв = 5,5.

**Приведем правило, позволяющее установить значи­мость или незначимость ранговой корреляции связи для выборок объема п^9. Если п < 9, то пользуются таб­лицами (см., например, табл. 6.10а, 6.106 в книге: Боль­шее Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965).**

**Правило. Для того чтобы при уровне значимости а проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генераль­ного коэффициента ранговой корреляции рг Спирмена при конкурирующей гипотезе Я^.рг^О, надо вычислить критическую точку:**

**T’kp^kp^ *k)Vr(l — pl)/(n — 2),***

**где п — объем выборки, р„—выборочный коэффициент ран­говой корреляции Спирмена, (кр(а; k) — критическая точка двусторонней критической области, которую находят по таблице критических точек распределения Стьюдента, по уровню значимости а и числу степеней свободы k = п—2.**

**Если | рв | < TKf>—нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу. Ранговая корреляционная связь между качест­венными признаками незначима.**

**Если |рв| > Ткр — нулевую гипотезу отвергают. Между качественными признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.**

Пример 2. При уровне значимости 0,05 проверить, является ли ранговая корреляционная связь, вычисленная в примере 1, значимой?

Решение. Найдем критическую точку двусторонней критичес- кой'области распределения Стьюдента по уровню значимости а = 0,05 и числу степеней свободы k = n—2=10—2 = 8 (см. приложение 6): \*кр (0,05; 8) = 2,31.

Найдем критическую точку:

7\,р = ?Кр<а; k)V{\ — Рв)/(я —2) .

Подставив fK„ = 2,31, л=10, рв = 0,24, получим 7\*кр = 0,79.

Итак, Гкр = 0,79, рв = 0,24.

Так как р„ < Гкр — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; ранговая корреляционная связь между признаками незначимая.

340

**§ 26. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла и проверка гипотезы о его значимости**

**Можно оценивать связь между двумя качествен­ными признаками, используя коэффициент ранговой кор­реляции Кендалла. Пусть ранги объектов выборки объема п (здесь сохранены все обозначения § 25):**

**по признаку А хи хг, ..., хп**

**по признаку В уг, у2, ..., уп**

**Допустим, что правее t/x имеется /?х рангов, больших ух\ правее у2 имеется R2 рангов, больших у2\ ... ; правее уп-х имеется /?„\_х рангов, больших уп\_х. Введем обозначение**

**суммы рангов /?,(£ = 1, 2** п**—1):**

**/? = /?!+/?\*+••• + ^п-Х-**

***Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кен­далла* определяется формулой**

тв = [4/?/л (п— 1)]— 1, (\*)

**П — 1**

**где п — объем выборки, R = 2 #«•**

**;= I**

**Убедимся, что коэффициент Кендалла имеет те же свойства, что и коэффициент Спирмена.**

1. **В случае «полной прямой зависимости» признаков**

= 1 === 2, . . - , Хп = /Т

Ух=1» *У\* =* 2 *У„ = п*

**Правее t/x имеется п—1 рангов, больших t/x, поэтому Rx = n—1. Очевидно, что R2 = n— 2 /?„\_х = 1. Следо­**

**вательно,**

**R = (п —1) + (« — 2)+ ... + 1 =п (п—1)/2. (\*\*)**

**Подставив (\*\*) в (\*), получим**

**т„= 1.**

1. **В случае «противоположной зависимости»**

**х2 = 1, х2 = 21, . . ., х п = п**

Ух = п, у2 = п 1 У„= 1

341

**Правее t/x нет рангов, больших yt; поэтому £?х = 0. Оче­видно, что R% = Ra = = 0. Следовательно,**

**R** = 0. (\*\*\*)

**Подставив (\*\*\*) в (\*), получим**

**тв = — 1.**

Замечание. При достаточно большом объеме выборки и при значениях коэффициентов ранговой корреляции, не близких к еди­нице, имеет место приближенное равенство

Рв = (3/2) тв.

Пример 1. Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла по данным рангам объектов выборки объема л=10:

по признаку А ... xi 1 23456 |7 89 10

по признаку В ... у/ 6481 25 10 37 9

Решение. Правее уг = 6 имеется 4 ранга (8, 10, 7, 9), ббль-

ших уг, поэтому 7?х = 4. Аналогично найдем. /?2 = 5, R3 =2, = 6,

Rb — 5, /?0 = 3, /?7 = 0, Re = 2, /?в = 1. Следовательно, сумма рангов Я = 28.

Найдем искомый коэффициент ранговой корреляции Кендалла, учитывая, что л = 10'

тв = [4/?/л (л— I)] — 1 =£4-28/10-91 — 1 =0,24.

**Приведем правило, позволяющее установить значи­мость или незначимость ранговой корреляционной связи Кендалла.**

**Правило. Для того чтобы при уровне значимости ос, проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю генераль­ного коэффициента ранговой корреляции тг Кендалла при конкурирующей гипотезе Нг:тг=?^0, надо вычислить критическую точку:**

Т 2(2л + 5)~

“Р “Р V 9л (л—1) ’

где п—объем выборки; zKP—критическая точка двусто­ронней критической области, которую находят по таблице функции Лапласа по равенству <D(zKP) = (l—а)/2.

**Если — нет оснований отвергнуть нулевую**

**гипотезу. Ранговая корреляционная связь между качест­венными признаками незначимая.**

**Если |тв| > Ткр—нулевую гипотезу отвергают. Между качественными признаками существует значимая ранговая корреляционная связь.**

Пример 2. При уровне значимости 0,05 проверить, является ли ранговая корреляционная связь тв = 0,24, вычисленная в примере 1, значимой?

342

Решение. Найдем критическую точку гкр:

Ф (г,р) = (I - а)/2 = (1 - 0,05)/2 = 0,475.

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим гкр=1,96

Найдем критическую точку:

. 1/' 2 (2л+ 5)

Подставив гкр=1,96 и п = 10, получим 7'кр = 0,487. В примере I тв = 0,24.

Так как тв < 7’кр — нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; ранговая корреляционная связь между признаками незначимая.

**§ 27. Критерий Вилкоксона и проверка гипотезы об однородности двух выборок**

**Критерий Вилкоксона \*’ служит для проверки однородности двух независимых выборок: хх, х2,..., хП) и ух, Уг> • • • > У„,- Достоинство этого критерия состоит в том, что он применим к случайным величинам, распределения которых неизвестны; требуется лишь, чтобы величины были непрерывными.**

**Если выборки однородны, то считают, что они извле­чены из одной и той же генеральной совокупности и, следовательно, имеют одинаковые, причем неизвестные, непрерывные функции распределения Ft(x) и ^(х).**

**Таким образом, нулевая гипотеза состоит в том, что при всех значениях аргумента (обозначим его через х) функции распределения равны между собой: Fx(x) = F2(x).**

**Конкурирующими являются следующие гипотезы: F1(x)=^F2(x), Fx (х) < Fa (х) и Ft (х) > F2 (х).**

**Заметим, что принятие конкурирующей гипотезы Нх: Fx (х) < Р2 (х) означает, что X > Y. Действительно, Неравенство Ft (х) < F3 (х) равносильно неравенству Р (X < х) < Р (Y < х). Отсюда легко получить, что Р(Х > х) > Р (К> х). Другими словами, вероятность того, что случайная величина X превзойдет фиксированное действительное число х, больше, чем вероятность слу­чайной величине У оказаться большей, чем х\ в этом смысле X > У.**

**Аналогично, если справедлива конкурирующая гипо­теза H1:FX (х) > Ра (у), то X < У.**

\*> В 1945 г. Вилкоксон опубликовал критерий сравнения двух выборок одинакового объема, в 1947 г. Манн и Уитни обобщили кри­терий иа выборки различного объема.

343

**Далее предполагается, что объем первой выборки меньше (не больше) объема второй: п1^п2\ если это не так, то выборки можно перенумеровать (поменять местами).**

**А. Проверка нулевой гипотезы в случае, если объем обеих выборок не превосходит 25. Правило 1. Для того чтобы при заданном уровне значимости а = 2Q проверить нулевую гипотезу H0-.F1 (х) = Ft (х) об однородности двух независимых выборок объемов я, и п2(п1^.п2) при конку­рирующей гипотезе Hl:F1(x) Ф Р2(х), надо:**

1. **расположить варианты обеих выборок в возрастаю­щем порядке, т. е. в виде одного вариационного ряда, и найти в этом ряду наблюдаемое значение кри­терия —сумму порядковых номеров вариант пер­вой выборки;**
2. **найти по таблице приложения 10 нижнюю крити­ческую точку и>„нжн. кр (Q: «**1**. «а), где Q — а/2;**
3. **найти верхнюю критическую точку по формуле**

**^верхи. кр = К ^а "Ь I)** ^1 **^ивжн. кр‘**

**Если W„a6x < шнижн. кр или 1Гна6л > шверхн. кр—-нулевую гипотезу отвергают.**

**Если шннжн. кр< \^„а6я<ауверхн. кр—нет оснований от­вергнуть нулевую гипотезу.**

Пример 1. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипо­тезу об однородности двух выборок. объемов п1 = 6 ил, = 8:

х; 15 23 25 26 28 29

yi 12 14 18 20 22 24 27 30

при конкурирующей гипотезе H^'.Fх (х) Ф F2(x).

Решение. Расположим варианты обеих выборок в виде одного вариационного ряда и перенумеруем их:

порядковые номера ... 1 2 3 4 5 6 7 8 9 /0 11 12 13 14

варианты ... 12 14 15 18 20 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Найдем наблюдаемое значение критерия Внлкоксона—сумму по­рядковых номеров (они набраны курсивом) вариант первой выборки:

Г„абл = 3 + 7 + 9+10+12+13 = 54.

Найдем по таблице приложения 10 нижнюю критическую точку, учитывая, что Q = а/2 = 0,05/2 = 0,025, П! = 6, п2 = 8:

И'иижн. кр (0,025; 6, 8) = 29.

Найдем верхнюю критическую точку:

®верхн. кр = (nl + na + 1 )П1 ^нижн. кр = (6 + 8 + 1)-6 29 = 61.

Так как 29 < 54 < 61, т. е. Щнижн.кр < 1^набя < ^верхн. кр>— нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу об однородности выборок.

344

**Правило 2. При конкурирующей гипотезе F, (х) > Ft (х) надо найти по таблице нижнюю критическую точку “Wh. Кр (Q; nt; ла), где Q= а.**

**Если WHa6x > шняжн. кр — нет оснований отвергнуть нуле­вую гипотезу.**

**Если №набл < “'ннжв. КР—нулевую гипотезу отвергают. Правило 3. При конкурирующей гипотезе <**

**< F2 (я) надо найти верхнюю критическую точку:**

“'верхи, кр (Qi ^xi ^2) ~ (^1 ^2 О “'нижн. np(Qi ^1\* ^2)»

**где Q = a.**

Если И^набл < “'верхи, кр Нет ОСНОВЭНИЙ ОТВврГНуТЬ

**нулевую гипотезу.**

**Если И^набл > “'верхи, кр—нулевую гипотезу отвергают.**

Замечание. Если несколько вариант только одной выборки одинаковы, то в общем вариационном ряду им припи­сывают обычные порядковые номера (совпавшие варианты нумеруют так, как если бы они были различными числами); если же совпа­дают варианты разных выборок, то всем им присваивают один и тот же порядковый номер, равный среднему арифметическому порядковых номеров, которые имели бы эти варианты до совпадения.

**Б. Проверка нулевой гипотезы в случае, если объем хотя бы одной из выборок превосходит 25. 1. При конку­рирующей гипотезе Ft (х) Ф Р2 (х) нижняя критическая точка**

**где Q = а/2; zKp находят по таблице функции Лапласа по равенству Ф(гкр) = (1—а)/2; знак [а] означает целую часть числа а.**

**В остальном правило 1, приведенное в п. А, сохра­няется.**

1. **При конкурирующих гипотезах Ft(x)> F2(x) и Ex (х) < F2** (х) **нижнюю критическую точку находят по формуле (\*), положив Q — а; соответственно zKp находят по таблице функции Лапласа по равенству Ф(**2**кр) = = (1—2а)/2. В остальном правила 2—3, приведенные в п. А, сохраняются.**

Пример -2. При уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипо­тезу об однородности двух выборок объемов nj = 30 и п2 = 50 при кон­курирующей гипотезе Я1:/?1 (х) Ф F2 (х), если известно, что в общем вариационном ряду, составленном из вариант обеих выборок, сумма порядковых номеров вариант первой выборки ИР„абл = 1600.



*(Q;* ***П***1, ***П2) =***

2



345

Решение. По условию, конкурирующая гипотеза имеет вид Fi (х) Ф F2 (х), поэтому критическая область — двусторонняя.

Найдем zKp по равенству

® (zKp) = (1 — а)/2 = (1 — 0,01 )/2 = 0,495.

По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим гкр = 2,58.

Подставив пх = 30, «2 = 50, zKp = 2,58 в формулу (\*), получим “'вИЖН. кР ~ 954.

Найдем верхнюю критическую точку:

“'верхи, кр = (^1 + «2 + 1) «1—“'нижн. кр = 2430 — 954 = 1476.

Так как 1600 > 1476, т. е. Венабл > шверх.кр — нулевая гипотеза отвергается.

Задачи

1. По двум независимым выборкам, объемы которых соот­ветственно равны «х и Пц, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии sx и sy. При уровне значимости а проверить нулевую гипотезу Н0: D(X) — D(Y) о равенстве генеральных дисперсий при конкурирую­щей гипотезе Нх: D (X) > D (К), если:

а) «1=10, «а = 16, sx=3,6, sy = 2,4, а = 0,05;

б) пх = 13, «2=18, sx =0,72, sy = 0,20, а = 0,01.

Отв. а) /•’набл= 1,5; Лер (°.05; 9; 15) = 2,59. Нет оснований отверг­нуть нулевую гипотезу; б) Л,абл = 3,6; Лр(0,0П 12; 17)=3,45. Нуле­вая гипотеза отвергается.

1. По двум независимым выборкам, объемы которых соответст­венно равны « и т, извлеченным из нормальных генеральных сово­купностей X и У, найдены выборочные средние х и у. Генеральные дисперсии D(X) и D(Y) известны. При уровне значимости а прове­рить нулевую гипотезу Н0: М (X) — М (Y) о равенстве математиче­ских ожиданий при конкурирующей гипотезе Нг:М (X) Ф М (Y), если:

а) « = 30, «1 = 20, D (Х)= 120, D(K)= 100, а = 0,05;

б) « = 50, «1 = 40, D(X) = 50, D (К) = 120, а = 0,01.

Отв. a) ZHабх=1, \*кр=1,96. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; б) Z„a6x = Ю, zKp = 2,58. Нулевая гипотеза отвергается.

1. По двум независимым выборкам, объемы которых соответст­венно равны « = 5 и «г = 6, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены выборочные средние х = 15,9, у = 14,1 и исправленные выборочные дисперсии sx = 14,76, s^ = 4,92. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу Н0:М (Х) = М (X) о равенстве математических ожиданий при конкурирующей гипотезе Ht-.MiX) Ф М (К).

Указание. Предварительно сравнить дисперсии.

Отв. 7’набл = 0,88, /кр (0,05; 9) = 2,26. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

1. Из нормальной генеральной совокупности с известным сред­ним квадратическим отклонением 0 = 2,1 извлечена выборка объема

346

п = 49 и по ней найдена выборочная средняя \* = 4,5. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу Н0: а = 3 о ра­венстве математического ожидания гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе //,: а Ф 3.

Отв. Uнабл = 5, мкр=1,96. Нулевая гипотеза огвергается.

1. По выборке объема п = 16, извлеченной из нормальной гене­ральной совокупности, найдены выборочная средняя \*=12,4 и «исправленное» среднее квадратическое отклонение s= 1,2. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу Я0: а=11,8 о равенстве математического ожидания гипотетическому значению при конкурирующей гипотезе Н^'.аф 11,8.

Отв. Твабл —2. \*кр(0,05; 15) = 2,13. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу.

в. Двумя приборами измерены 5 деталей. Получены следующие результаты (мм):

\*1 = 4, х2 = 5, \*з = 6, \*з = 7, \*5 = 8

!/i = 5, {/г = 5, Уз = 9, у 4 = 4, 0Ь = 6

При уровне значимости 0,05 проверить, значимо или незначимо раз­личаются результаты измерений.

Отв. Тнабл = Ю.54, /кр (0,05; 4) = 2,78. Различие результатов измерений значимое.

1. По 100 независимым испытаниям найдена относительная час­тота т/п = 0,15. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу Н0:р = 0,17 о равенстве относительной частоты гипотетиче­ской вероятности при конкурирующей гипотезе Нг:р Ф 0,17.

Отв. | Янабя I =0.53, ыкр=1,96. Нет оснований отвергнуть нуле­вую гипотезу.

1. Из партии картона фабрики № 1 случайно отобрано 150 листов, среди которых оказалось 12 нестандартных; из 100 листов картона фабрики № 2 обнаружено 15 нестандартных. Можно ли считать на пятипроцентном уровне значимости, что относительные частоты полу­чения нестандартного картона обеими фабриками различаются зна­чимо?

Указание. Принять в качестве конкурирующей гипотезы Hi'.Px Ф Ра-

Отв. Uнабд = —1,75; ыкр=1,96. Различие относительных частот незначимое.

1. По пяти независимым выборкам, объемы которых соответст­венно равны пх = 7, пг = 9, п3=10, п4 = 12, п5= 12, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей, найдены исправленные выбо­рочные дисперсии: 0,27; 0,32; 0,40; 0,42; 0,48. При уровне значи­мости 0,05 [проверить нулевую гипотезу об однородности дисперсий (крити ческая область — правосторонняя).

У Казани е. Использовать критерий Бартлетта (см. § 20).

Отв. У = 6,63, х«р (0,05; 4) =9,5. Нет оснований отвергнуть нуле­вую гипотезу.

1. По йетырем независимым выборкам одинакового объема п=17, извлеченным из нормальных совокупностей, найдены исправленные выборочные дисперсии: 2,12; 2,32; 3,24; 4,32. Требуется: а) при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу д равенстве генеральных дисперсий (критическая область —правосторонняя);

б) оценить генеральную дисперсию.

Указание. Использовать критерий Кочреиа (см. § 21).

347

Отв. a) GHa^ = 0,36; GKp(0,05; 16; 4) = 0,4366. Нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу; б) о = 3.

1. По выборке объема п — 62, извлеченной из двумерной нор­мальной совокупности (X, К), найден выборочный коэффициент кор­реляции г„ = 0,6. При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу #„.\*/> = 0 о равенстве нулю генерального коэффициента кор­реляции при конкурирующей гипотезе гТ ф 0.

Отв. Гнавл==5,81, /кр(0,05; 60) = 2,0. Нулевая гипотеза отвер­гается.

1. При уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о нормаль­ном распределении генеральной совокупности, если известны эмпири­ческие (приведены в первой строке) и теоретические частоты (приве­дены во второй строке):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| а) | 6 | 12 | 16 | 40 | 13 | 8 | 5 |  |  |  |
|  | 4 | И | 15 | 43 | 15 | 6 | 6 |  |  |  |
| б) | 5 | 6 | 14 | 32 | 43 | 39 | 30 | 20 | 6 | 5 |
|  | 4 | 7 | 12 | 29 | 48 | 35 | 34 | 18 | 7 | 6 |
| в) | 5 | 13 | 12 | 44 | 8 | 12 | 6 |  |  |  |
|  | 2 | 20 | 12 | 35 | 15 | 10 | 6 |  |  |  |

Отв. Хнабл =2,5, Хкр (0,05; 4) = 9,5. Нет оснований отвергнуть гипотезу; б) Хнабл = 3, Хкр(0,05; 7)= 1461. Нет оснований отверг­нуть гипотезу; в)хнабл=13, Хкр (0,05; 4) = 9,5. Гипотеза отвергается.

1. а) Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции

Спирмена по данным рангам объектов выборки объема л = 10:

Xi 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Pi 4 3 5 8 6 1 7 10 2 9

б) значима ли ранговая корреляционная связь при уровне значи­мости 0,05?

Отв. а) рв = 1/3; б) Гкр = 0,77; корреляционная ранговая связь незначима.

1. а) Найти выборочный коэффициент ранговой корреляции

Кендалла по данным рангам объектов выборки объема п = 10;

xi 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

i/,-4 3 5 8 6 1 7 10 2 9

б) значима ли ранговая корреляционная связь >при уровне значи­

мости 0,05?

Отв. а) тв = 0,29; б) Ткр = 0,96; ранговая корреляционная связь незначима.

1. Известны результаты измерения (мм) изделий двух выборок, объемы которых соответственно равны лх = 6 и ла = 6:

xt 12 10 8 15 14 11

yt 13 9 16 17 7 18

При уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу Fj (x) — F3 (х) об однородности выборок при конкурирующей гипотезе N1:F1(x) Ф

*Ф %(\*)■*

Указание. Использовать критерий Вилкоксона.

Отв. Нулевая гипотеза отвергается: ЩНижн. кр (0,025; 6; 6) =26,

**^верхи. кр = 52, В^иабл = 70.**

1. Используя критерий Вилкоксона, при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу об однородности двух выборок,

348

объемы которых соответственно равны nx = 30 и л2 = 50, при конку­рирующей гипотезе F1(x) > F2 (jc), если известно, что сумма поряд­ковых номеров вариант первой выборки в общем вариационном ряду Гнабл=1150.

Отв. Her оснований отвергнуть нулевую гипотезу:

^нижн. кр (0>05; 30, 50) = 1048, с^верхн. кр = 1382.

**Глава двадцатая**

ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

**§ 1. Сравнение нескольких средних.**

**Понятие о дисперсионном анализе**

**Пусть генеральные совокупности Xt, Xt, .. ., Хр распределены нормально и имеют одинаковую, хотя и неизвестную, дисперсию; математические ожидания также неизвестны, но могут быть различными. Требуется при заданном уровне значимости по выборочным средним проверить нулевую гипотезу Н0:М (Хх) = М (Х2) = ... — = М (Хр) о равенстве всех математических ожиданий. Другими словами, требуется установить, значимо или. незначимо различаются выборочные средние. Казалось бы, для сравнения нескольких средних (/? > 2) можно срав- нить.^их попарно. Однако с возрастанием числа средних возрастает и наибольшее различие между ними: среднее новой выборки может оказаться больше наибольшего или меньше наименьшего из средних, полученных до нового опыта. По этой причине для сравнения нескольких сред­них пользуются другим методом, который основан на сравнении дисперсий и поэтому назван дисперсионным анализом (в основном развит английским статистиком Р. Фишером).**

**На практике дисперсионный анализ применяют, чтобы установить, оказывает ли существенное влияние некото­рый качественный фактор F, который имеет р уров­ней Flf Ft, ..., Fp на изучаемую величину X. Например, если требуется выяснить, какой вид удобрений наиболее эффективен для получения наибольшего урожая, то фак­тор F — удобрение, а его уровни — виды удобрений.**

**Основная идея дисперсионного анализа состоит в срав­нении «факторной дисперсии», порождаемой воздействием фактора, и «остаточной дисперсии», обусловленной слу­чайными причинами. Если различие между этими дис-**

349

**персиями значимо, то фактор оказывает существенное влияние на Х\ в этом случае средние наблюдаемых зна­чений на каждом уровне (групповые средние) различа­ются также значимо.**

**Если уже установлено, что фактор существенно влияет на X, а требуется выяснить, какой из уровней оказы­вает наибольшее воздействие, то дополнительно произ­водят попарное сравнение средних..**

**Иногда дисперсионный анализ применяется, чтобы установить однородность нескольких совокупностей (дисперсии этих совокупностей одинаковы по предполо­жению; если дисперсионный анализ покажет, что и мате­матические ожидания одинаковы, то в этом смысле сово­купности однородны). Однородные же совокупности можно объединить в одну и тем самым получить о ней более полную информацию, следовательно, и более надежные выводы.**

**В более сложных случаях исследуют воздействие нескольких факторов на нескольких постоянных или случайных уровнях и выясняют влияние отдельных уров­ней и их комбинаций (многофакторный анализ).**

**Мы ограничимся простейшим случаем однофакторного анализа, когда на X воздействует только один фактор, который имеет р постоянных уровней.**

**§ 2. Общая факторная и остаточная суммы квадратов отклонений**

**Пусть на количественный нормально распреде­ленный признак X воздействует фактор F, который имеет р постоянных уровней. Будем предполагать, что число**

Таблица 30

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер испытания | Уровни фактора Fj | | | |
| Ft | F, | ... |  |
| 1 | \*11 | \*12 |  | Xlp |
| 2 | \*21 | \*22 |  |  |
| Я | \*gl | \*^2 | ... | Хдр |
| Групповая | — | — |  | — |
| средняя | \*гр | \*Гр2 |  | \*гр/> |

350

**наблюдений (испытаний) на каждом уровне одинаково и равно q.**

**Пусть наблюдалось n = pq значений х1} признака X, где i — номер испытания (i — 1,2, ..., q), /—номер уровня фактора (/=1, 2, Результаты наблюдений при­**

**ведены в табл. 30.**

**Введем, по определению,**

**(общая сумма квадратов отклонений наблюдаемых значе­ний от общей средней х),**

**(факторная сумма квадратов отклонений групповых сред­них от общей средней, которая характеризует рассеяние «между группами»),**

**(остаточная сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней, которая характеризует рассеяние «внутри групп»).**

**Практически остаточную сумму находят по равенству (см. § 3, следствие)**

**Элементарными преобразованиями можно получить формулы, более удобные для расчетов:**

***р о***

**^общ — 2 Sj (xtf — х)2**

***р***

1-\*факт ‘— Я 2 (-^rp J -\*)2 ; = 1

**^ост—** 2 **(-\*Tl -^rpi)2 "Н**

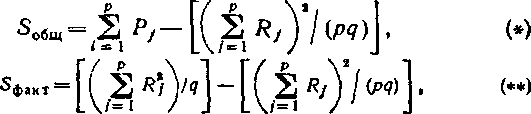
**I = 1**

Я

Я

+ 2 (х1г —\*rp2)\* + • • • + 2 (х!р — хтррУ  
t=1 7=1 г





Я

**где Pj= 2 Aj—сумма квадратов значений признака на**

**уровне Fj\ Rj— 2 xij—сумма значений признака на**



Замечание. Для упрощения вычислений вычитают из каждого наблюдаемого значения одно и то же число С, примерно равное общей средней. Если уменьшенные значения «/,/=\*,у—С, то

Sofiu. = 2 Qj ~ £ ( 2 T^j j (pq) J , (\*\*\*)

S\*aKT= 2 7> J - ^ 2 ГЛ j <W) J ’ <\*\*\*\*>

*Q*

где Q/= 2 уЬ — сУмма квадратов уменьшенных значений признака f= 1

*я*

на уровне /у; — сумма уменьшенных значений признака

t= 1

на уровне Fj.

Для вывода формул (\*\*\*) и (\*\*\*\*) достаточно подставить хп = уп-\-С

*Q q Я*

в соотношение (\*) и Яу = 2 •\*</= 2 &// + с> = ^1У//+9С^Т/ + ЯС

t= 1 »=1 <= 1

в соотношение (-\*\*).

**Пояснения. 1. Убедимся, что S^aKT характеризует воздействие фактора F. Допустим, что фактор оказывает существенное влияние на X. Тогда группа наблюдаемых значений признака на одном определенном уровне, вообще говоря, отличается от групп наблюдений на других уров­нях. Следовательно, различаются и групповые средние, причем они тем больше рассеяны вокруг общей средней, чем большим окажется воздействие фактора. Отсюда сле­дует, что для оценки воздействия фактора целесообразно составить сумму квадратов отклонений групповых сред­них от общей средней (отклонение возводят в квадрат, чтобы исключить погашение положительных и отрица­тельных отклонений). Умножив эту сумму на q, получим ■^факт- Итак, 5факх характеризует воздействие фактора.**

1. **Убедимся, что 50ст отражает влияние случайных причин. Казалось бы, наблюдения одной группы не должны различаться. Однако, поскольку на X, кроме фактора F, воздействуют и случайные причины наблюде­ния одной и той же группы, вообще говоря, различны и, значит, рассеяны вокруг своей групповой средней. Отсюда следует, что для оценки влияния случайных при­чин целесообразно составить сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений каждой группы от своей групповой средней, т. е. SOCT. Итак, 5осх характеризует воздействие случайных причин.**

352

1. **Убедимся, что 5о6щ отражает влияние и фактора и случайных причин. Будем рассматривать все наблюдения как единую совокупность. Наблюдаемые значения при­знака различны вследствие воздействия фактора и случай­ных причин. Для оценки этого воздействия целесообразно составить сумму квадратов отклонений наблюдаемых зна­чений от общей средней, т. е. So6lu.**

**Итак, So6ut характеризует влияние фактора и случай­ных причин.**

**Приведем пример, который наглядно показывает, что факторная сумма отражает влияние фактора, а остаточ­ная—влияние случайных причин.**

Пример. Двумя приборами произведены по два измерения физи­ческой величины, истинный размер которой равен х. Рассматривая в качестве фактора систематическую ошибку С, а в качестве его уровней — систематические ошибки Сг и С2 соответственно первого н второго прибора, показать, что S<j,aKX определяется систематиче­скими, a Socx — случайными ошибками измерений.

Решение. Введем обозначения: аь а2 — случайные ошибки первого и второго измерений первым прибором; рх, р2— случайные ошибки первого и второго измерений вторым прибором.

Тогда наблюдаемые значения результатов измерений соответст­венно равны (первый индекс при х указывает номер измерения, а второй — номер прибора):

**= -\*81 = \* -f" -j- Ct2; \*12 =JC-f-C2 -|- Pi, JC22 = P2.**

Средине значения измерений первым и вторым приборами соот­ветственно равны:

\*гр i = \* + Ci + l(cti-f-a2)/2)=\*-(-C1-1-a,

\*ГР 2—\*+C2-(-[(Pl+P2)/2] = \*-(-C2-(-p.

Общая средняя

\*= (\*гр 1 + \*гр г)/2 = \* + 1(Сх С2)/2] —[(ех —Р)/2], факторная сумма

5факт “ (\*rp 1 \*)2 Ф (\*гр 2 \*)2.

Подставив величины, заключенные в скобках, после элементарных преобразований получим

S^ht = [(С,- C2)\*/2J + (Ci-С2) (а-р) + [<а-P)\*/2J.

Мы видим, что 5факх определяется главным образом, первым слагаемым (поскольку случайные ошибки измерений малы) и, следо­вательно, действительно отражает влияние фактора С.

Остаточная сумма

Soct = (\*ii — \*гр i)2 + (\*21 — \*гр l)z + (\*И — \*гр г)2 (\*22 \*гр а)2\* Подставив величины, заключенные в скобках, получим

Socr = I (а, - а)\* + (а, - а)\*] + HPi - Р)2 + (Р\* - Р)2].

23 2730

353

Мы видим, что S0(;T определяется случайными ошибками измере­ний и, следовательно, действительно отражает влияние случайных причин.

Замечание. То, что Socx порождается случайными причинами, следует также из равенства (см. § 3, следствие)

**^ОСТ = ^общ 5факх.**

Действительно, S06ux является результатом воздействия фактора и случайных причин; вычитая S^aKT, мы исключаем влияние фактора. Следовательно, «оставшаяся часть» отражает влияние случайных причин.

**§ 3. Связь между общей, факторной и остаточной суммами**

**Покажем, что**

^обш = 1-\*факт Ч- $ост

**Для упрощения вывода ограничимся двумя уровнями (р = 2) и двумя испытаниями на каждом уровне** (<7 **= 2). Результаты испытаний представим в виде табл. 31.**

Таблица 31

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер  испытания | Уровни фактора | |
| i | Ft | F, |
| 1 | \*11 | \*12 |
| 2 | \*21 | \*22 |
| \*Гр/ | \*Гр 1 | \*гр 2 |

**Тогда**

^общ ~ (-^11 Ч\* (-^i ^)2 Ч- ^')2 Ч- ■^)2-

**Вычтем и прибавим к каждому наблюдаемому значению на первом уровне групповую среднюю хгр1, а на вто­ром— хгр2. Выполнив возведение в квадрат и учитывая, что сумма всех удвоенных произведений равна нулю (рекомендуем читателю убедиться в этом самостоятельно), получим**

^общ = 2 [fop 1 ■— \*)\* Ч- Ч- [(\*„ — -^р х)а Ч-

Ч~ (<^21 -^грх)2 + ^грг)2 Ч" (-^22 -^грг)2] =

**^факг Ч~ ^осг\***

354

**Следствие. Из полученного , равенства вытекает важное следствие:**

**с с с**

\*^ост общ \*-^фактв

**Отсюда видно, что нет надобности непосредственно вы­числять остаточную сумму: достаточно найти общую и факторную суммы, а затем их разность.**

**§ 4. Общая, факторная и остаточная дисперсии**

**Разделив суммы квадратов отклонений на соот­ветствующее число степеней свободы, получим общую, факторную и остаточную дисперсии:**

2 \_ ^общ \_2 ^факт СЭ ^ОСТ

so6m рд — j \* Зфакт — р \_ J » soer — р \_ jJ »

**где р—число уровней фактора; q—число наблюдений на каждом уровне; pq—1—число степеней свободы общей дисперсии; р—1—число степеней свободы факторной дисперсии; p(q—1) — число степеней свободы остаточной дисперсии.**

**Если нулевая гипотеза о равенстве средних справед­лива, то все эти дисперсии являются несмещенными оценками генеральной дисперсии. Например, учитывая, что объем выборки п = pq, заключаем, что**

2 ^общ ^общ

$общ

исправленная выборочная дисперсия, которая, как известно, являет­ся несмещенной оценкой генеральной дисперсии.

Замечание. Число степеней свободы р (q—1) остаточной дисперсии равно разности между числами степеней свободы общей и факторной дисперсий. Действительно,

(Р9— 1) — (Р— 1) =\*/>? — Р = Р{Ч— !)•

**§ 5. Сравнение нескольких средних методом**

**дисперсионного анализа**

**Вернемся к задаче, поставленной в § 1: прове­рить при заданном уровне значимости нулевую гипотезу о равенстве нескольких (р > 2) средних нормальных со­вокупностей с неизвестными, но одинаковыми дисперси­**

**ями. Покажем, что решение этой задачи сводится к срав­нению факторной и остаточной дисперсий по критерию Фишера — Снедекора (см. гл. XIX, § 8).**

1. **Пусть нулевая гипотеза о равенстве нескольких средних (далее будем называть их групповыми) пра­вильна. В этом случае факторная и остаточная дисперсии являются несмещенными оценками неизвестной генераль­ной дисперсии (см. § 4) и, следовательно, различаются незначимо. Если сравнить эти оценки по критерию F, то очевидно, критерий укажет, что нулевую гипотезу о равенстве факторной и остаточной дисперсий следует принять.**

**Таким образом, если гипотеза о равенстве групповых средних правильна, то верна и гипотеза о равенстве фак­торной и остаточной дисперсий.**

1. **Пусть нулевая гипотеза о равенстве групповых средних ложна. В этом случае с возрастанием расхожде­ния между групповыми средними увеличивается фактор­ная дисперсия, а вместе с ней и отношение F„a6a — s|aKT/s5cT. В итоге /^абл окажется больше FKp и, следовательно, гипотеза о равенстве дисперсий будет отвергнута.**

**Таким образом, если гипотеза о равенстве групповых средних ложна, то ложна и гипотеза о равенстве фак­торной и остаточной дисперсий.**

**Легко доказать от противного справедливость обрат­ных утверждений: из правильности (ложности) гипотезы о дисперсиях следует правильность (ложность) гипотезы о средних.**

**Итак, *для того чтобы проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями, достаточно проверить по критерию F нулевую гипотезу о равенстве факторной и остаточной дисперсий.* В этом и состоит метод диспер­сионного анализа.**

Замечание 1. Если факторная дисперсия окажется меньше остаточной, то уже отсюда следует справедливость гипотезы о равен­стве групповых средних и, значит, нет надобности прибегать к кри­терию F,

Замечание 2. Если нет уверенности в справедливости пред­положения о равенстве дисперсий рассматриваемых р совокупностей, То это предположение следует проверить предварительно, например по критерию Кочрена.

Пример. Произведено по 4 испытания иа каждом нз трех уров­ней. Результаты испытаний приведены в табл. 32. Методом диспер­сионного анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую

356

Таблица 32

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер  испытания | Уровни фактора Fj | | |
| i | Р, | Р. | F, |
| 1 | 51 | 52 | 42 |
| 2 | 52 | 54 | 44 |
| 3 | 56 | 56 | 50 |
| 4 | 57 | 58 | 52 |
| xrvJ | 54 | 55 | 47 |

гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями.

Решение. Для упрощения расчета вычтем С = 52 из каждого наблюдаемого значения: у/у = — 52. Составим расчетную табл. 33.

Пользуясь таблицей и учитывая, что число уровней фактора р = 3, число испытаний на каждом уровне q—4, найдем общую и факторную суммы квадратов отклонений (см. § 2, формулы (\*\*\*)

Т аблица 33

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  испытания | Уровни фактора Fj | | | | | | Итоговый  столбец |
| I | fi | Р, | | | | Р, | |
|  | Рп | у'п | Pii | Ун | Pis | Ун |
| 1  2  3  4 | — 1 0  4  5 | 1  0  16  25 | 0  2  4  6 | 0,  4  16  36 | —10  —8  —2  0 | 100  64  4  0 |  |
| 1= 1 |  | 42 |  | 56 |  | 168 | 2Q/ = 266 |
| 77-2>/, | 8 |  | 12 |  | —20 |  | 2ту=о |
| т) | 64 |  | 144 |  | 400 |  | 2 77 = 608 |

357

и (\*\*\*\*)):

йобщ = 2 Q/ - |^ (^2 T^j j (pq) J = 266 - 0 = 266;

s\*.„ = [^2 TV^ “ [( S Ts) I to) ] = (608/4) - 0= 152.

Найдем остаточную сумму квадратов отклонений:

Soct — ^факт = 266 152 =114.

Найдем факторную и остаточную дисперсии:

**^факт = 5факт/(р - 1) = 152/(3 —1) = 76;**

**sScr = SOCT/(p(<7-l))= П4/3 (4-1)= 114/9- 12,67.**

Сравним факторную и остаточную дисперсии по критерию F (см. гл. XIX, §8), для чего найдем наблюдаемое значение критерия:

/^набл = s4>aKT/soCT = 76/12,67 = 6.

Учитывая, что число степеней свободы числителя kx = 2, а зна­менателя k2 = 9 и уровень значимости а = 0,05, по таблице приложе­ния 7 находим критическую точку:

Екр(0,05; 2; 9) = 4,26.

Так как F„a6a > ^кр—нулевую гипотезу о равенстве групповых средних отвергаем. Другими словами, групповые средние «в целом» различаются ' значимо. Если требуется сравнить средние попарно, то следует воспользоваться критерием Стьюдента.

Замечание 3. Если наблюдаемые значения X{j—десятичные дроби с одним знаком после запятой, то целесообразно перейти к числам у у = Юле,у—С, где С—примерно среднее значение чисел Юле,-у. В итоге получим сравнительно небольшие целые числа. Хотя при этом факторная и остаточная дисперсия увеличиваются в 102 раз, их отношение не изменится. Например, если x11=I2,l, jc2i=12,2, хз1 = 12,6, то, приняв уц= 10-х,у— 123, получим: i/и= 121 —123 = —2, у21= 122— 123 = —1, у21= 126—123 = 3.

Аналогично поступают, если после запятой имеется k знаков:

У1/ = Ю\*х,у—С.

**§ в. Неодинаковое число испытаний на различных уровнях**

**Выше число испытаний на различных уровнях предполагалось одинаковым. Пусть число испытаний на различных уровнях, вообще говоря, различно, а именно: произведено qx испытаний на уровне Flt q2 испытаний — на уровне Fit испытаний — на уровне Fp. В этом**

358

**случае общую сумму квадратов отклонений находят по формуле**

\*50бщ = [Pi + Р\* + • • • + PJ— [(/?i + Р2 + • • • **+RpYln],**

***Qi***

**где Рх = 2** **ха—сумма квадратов наблюдавшихся значе-**

**i= 1**

**ннй признака на уровне Ft\**

**Р2=\*^,) х}%—сумма квадратов наблюдавшихся значе-**

***i=i***

**ний признака на уровне Р4;**

**Рр = 2 xtp—сумма квадратов наблюдавшихся значе­ний признака на уровне Fp;**

***д***

*д%* „ *д\* р*

**Ri = 2 хи> Rt = 2  Rp = ZtxtP—суммы**

**наблюдавшихся значений признака соответственно на уров­нях Ра, ..., Fp\**

**rt = q’1-i-<**7**g+ ... +ЯР—общее число испытаний (объем выборки).**

**Если для упрощения вычислений из каждого наблю­давшегося значения Хц вычитали одно и то же число С**

И ПрИНЯЛИ yij=X[j — С, то

^общ — [Qi + Q\* + • • • — [(Pi + P»+ • • • **+TP) /п\>**

**где Qj = ^2 yfi, Qj = 21 » Qp~ 2^; Pi^ 2Уii>**

**% 4p тs = 2 уI»»• • • • pp ~ 21 yip’**

**Факторную сумму квадратов отклонений находят по .формуле**

■Зфакт — [(P\*/<7i) + (Pa/<7\*)+ • ■ • **~Y(Rp/4p)]~~**

**—[Р\*+\*, + •••+Я,)\*/л];**

**если значения признака были уменьшены = —С), то**

***S^Kt = [(TVq1) + (TVq2)+ .. .***

**• • • *+(ТУя,)\-[(Тх + Тл+* ... +7,)\*/«].**

369

**Остальные вычисления производят, как и в случае**

**одинакового числа испытаний:**

с с с

‘-'ост — '-'общ ‘-'факт\*

^факт ~ ^факт/{.Р ^)» ^ост ~ S0CT/(rt р).

Пример. Произведено 10 испытаний, из них 4 на первом уровне фактора, 4—на втором и 2—на третьем. Результаты испытаний при­ведены в табл. 34. Методом дисперсионного анализа при уровне зна­чимости 0,01 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями.

Таблица 34

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер испытания | ■ Уровни факторе | | Г/ |
| i | F, | F, | F, |
| 1 | 40 | 62 | 92 |
| 2 | 44 | 80 | 76 |
| 3 | 48 | 71 |  |
| 4 | 36 | 91 |  |
| \*гр / | 42 | 76 | 84 |

Решение. Для упрощения расчета вычтем С = 64 из каждого наблюдаемого значения: у,т/=ху — 64. Составим расчетную табл. 35.

Используя табл. 35, найдем общую и факторную суммы квадратов отклонений:

So6ul = S Q/~ [(2 TV)3/"] =3253— [(-27)2/Ю] =

= 3253 — 72,9 = 3180,1;

Зфакт = [(Т1/Я1) + (Tlfg,) + (7l/<?s)J - [(2 T,)2/n] =

= (7744/4) + (441/4) + (1600/2)l — 72,90 = 2846,25— 72,90 = 2773,35.

Найдем остаточную сумму квадратов отклонений:

Soct = So6w—вфакх = 3180,10 — 2773,35 = 406,75.

Найдем факторную и остаточную дисперсии:

Скт^ФактКр— 1) = 2773,35/(3 - 0 = 2773,35/2 = 1387; slcr = SOCT/(n—р) = 406,75/( 10 — 3) = 406,75/7 = 58.

Сравним факторную и остаточную дисперсии по критерию F (см. гл. XIX, § 8), для чего найдем наблюдаемое значение критерия:

рнаб\* = \*факт/ soct = 1387/58 = 23,9.

360

Таблица 35

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  испытания | Уровни фактора Fj | | | | | | Итоговый  столбец |
| ( | F, | | 7 |  | 7 |  |
| У И | yfi | Уц | у\ | Ус з | у?з |
| 1  2  3  4 | * 24 —20 * 16 —28 | 576  400  256  784 | —2  16 | 4  256  49 | 28  12 | 784  144 |
| «/=2»г, |  | 2016 |  | 309 |  | 928 | 2<Э/ = 3253 |
| 77 = 2 «II | —88 |  | 21 |  | 40 |  | 2Г/=-27 |
| 1 j | 7744 |  | 441 |  | 1600 |  |  |

Учитывая, что число степеней свободы числителя Ai = 2, а зна­менателя Ag = 7 и уровень значимости а = 0,01, по таблице приложе­ния 7 находим критическую точку: /'кр(0,01; 2; 7) = 9,55.

Так как /^айл > ^кр—нулевую гипотезу о равенстве групповых средних отвергаем. Другими словами, групповые средние различаются значимо.

Задачи

В задачах 1—3 требуется при уровне значимости 0,05 про­верить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предпо­лагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с оди­наковыми генеральными дисперсиями.

**1.**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер испытания | Уровни фактора Fj | | | | |
| С | F, | F, | г, |  | F. |
| 1 | 42 | 66 | 35 | 64 | 70 |
| 2 | 55 | 91 | 50 | 70 | 79 |
| 3 | 67 | 96 | 60 | 79 | 88 |
| 4 | 67 | 98 | 69 | 81 | 90 |
| хгр/ | 57,75 | 87,75 | 53,50 | 73,50 | 81,75 |

Отв. /гнабл = 6,13; FKp (0,05; 4; 15) =3,06. Нулевая гипотеза отвергается.

361

2.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Ноиер испытанна | Уроанн-фактора Pf | | | |
| С | Pi | Ft | Pt | P. |
| 1 | 6 | 6 | 9 | 7 |
| 2 | 7 | 7 | 12 | 9 |
| 3 | 8 | 11 | 13 | 10 |
| 4 | 11 | 12 | 14 | 10 |
| \*ГР i | 8 | 9 | 12 | 9 |

Отв. /гиаб\* = 2,4; FKV (0,05; 3; 12) = 3,49. Нет оснований отверг­нуть нулевую гипотезу.

**3.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер испытания | Уровни фактора Fj | | |
| I | Pi | Ft | Ft |
| 1 | 37 | 60 | 69 |
| 2 | 47 | 86 | 100 |
| 3 | 40 | 67 | 98 |
| 4 | 60 | 92 |  |
| 5 |  | 95 |  |
| 6 |  | 98 |  |
| хгр/ | 46 | 83 | 89 |

Отв. Рпабж — 9.92; FKр (0,05; 2; 10) = 4,10. Нуле­вая гипотеза отвергается.

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

**МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО. ЦЕПИ МАРКОВА**

**Глава двадцать первая**

МОДЕЛИРОВАНИЕ (РАЗЫГРЫВАНИЕ)СЛУЧАЙНЫ X

ВЕЛИЧИН МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

**§ 1. Предмет метода Монте — Карло**

**Датой рождения метода Монте — Карло принято считать 1949 г., когда американские ученые Н. Метропо- лис и С. Улам опубликовали статью «Метод Монте — Карло», в которой систематически его изложили. Назва­ние метода связано с названием города Монте—Карло, где в игорных домах (казино) играют в рулетку — одно из простейших устройств для получения случайных чисел, на использовании которых основан этот метод.**

**ЭВМ позволяют легко получать так называемые псев­дослучайные числа (при решении задач их применяют вместо случайных чисел); это привело к широкому внедре­нию метода во многие области науки и техники (статисти­ческая физика, теория массового обслуживания, теория игр и др.). Метод Монте—Карло используют для вычис­ления интегралов, в особенности многомерных, для реше­ния систем алгебраических уравнений высокого порядка, для исследования различного рода сложных систем (автоматического управления, экономических, биологи­ческих и т. д.).**

**Сущность метода Монте — Карло состоит в следующем: требуется найти значение а некоторой изу­чаемой величины. Для этого выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно а:**

***М* (*Х) = а.***

**Практически же поступают так: производят п испы­таний, в результате которых получают п возможных зна­чений Х\ вычисляют их среднее арифметическое**

\* = (2 xt)ln

363

**и принимают х в качестве оценки (приближенного значе­ния) а\* искомого числа а:**

**а ~ а\* = х.**

**Поскольку метод Монте — Карло требует проведения большого числа испытаний, его часто называют методом статистических испытаний. Теория этого метода указы­вает, как наиболее целесообразно выбрать случайную величину X, как найти ее возможные значения. В част­ности, разрабатываются способы уменьшения дисперсии используемых случайных величин, в результате чего уменьшается ошибка, допускаемая при замене искомого математического ожидания а его оценкой а\*.**

**Отыскание возможных значений случайной величины X (моделирование) называют «разыгрыванием случайной ве­личины». Изложим лишь некоторые способы разыгрывания случайных величин и укажем, как оценить допускаемую при этом ошибку.**

**§ 2. Оценка погрешности метода Монте—Карло**

**Пусть для получения оценки а\* математического ожидания а случайной величины X было произведено п независимых испытаний (разыграно п возможных значе­ний X) и по ним была найдена выборочная средняя х, ко­торая принята в качестве искомой оценки: а\* = х.**

**Ясно, что если повторить опыт, то будут получены дру­гие возможные значения X, следовательно, другая сред­няя, а значит, и другая оценка а\*. Уже отсюда следует, что получить точную оценку математического ожидания невозможно. Естественно, возникает вопрос о величине допускаемой ошибки. Ограничимся отысканием лишь верхней границы б допускаемой ошибки с заданной ве­роятностью (надежностью) у:**

**Р(\Х—а|<6) = у.**

**Интересующая нас верхняя граница ошибки б есть не что иное, как «точность оценки» математического ожидания по выборочной средней при помощи доверительных ин­тервалов, о которой уже шла речь в гл. XVI. Поэтому воспользуемся результатами, полученными ранее, и рас­смотрим следующие три случая.**

1. **Случайная величина X распределена нормально и ее среднее квадратическое**

364

**отклонение о известно. В этом случае с надеж­ностью у верхняя граница ошибки (см. гл. XVI, § 15)**

**б = to / уц, (\*)**

**где п—число испытаний (разыгранных значений X)', t — значение аргумента функции Лапласа, при котором Ф(/) = у/2, о — известное среднее квадратическое откло­нение X.**

Пример I. С надежностью у = 0.95 найти верхнюю границу ошибки б, если для оценки математического ожидания нормальной величины X с известным средним квадратическим отклонением, равным 0,5, было разыграно 100 возможных значений X.

Решение. По условию, я=100, 0 = 0,5, Ф(0 = 0,95/2 = 0,475. По таблице функции Лапласа (см. приложение 2) находим /=1,96. Искомая верхняя граница ошибки б = 1,96-0,5/ У 100 = 0,098.

1. **Случайная величина X распределена нормально, причем ее среднее квадрати­ческое отклонение а неизвестно. В этом слу­чае с надежностью у верхняя граница ошибки (см. гл. XVI, § 16)**

***б = tys !У~п*, (\*\*)**

**где п — число испытаний; s — «исправленное» среднее квад­ратическое отклонение, ty находят по таблице приложе­ния 3.**

Пример 2. С надежностью у = 0,95 найти верхнюю границу ошибки б, если для оценки математического ожидания нормальной величины X было разыграно 100 ее возможных значений и по ним найдено «исправленное» среднее квадратическое отклонение s = 0,5.

Решение По условию, я =100, s = 0,5 Используя таблицу приложения 3, по у = 0,95, я=100 находим ty = 1,984. Искомая верхняя граница ошибки 6 = 1,984 0,5/}^100 = 0,099.

1. **Случайная величина X распределена по закону, отличному от н о р м а л ь н о г о. В этом случае при достаточно большом числе испытаний («>30) с надежностью, приближенно равной у, верхняя граница ошибки может быть вычислена по формуле (\*), если среднее квадратическое отклонение а случайной ве­личины X известно; если же а неизвестно, то можно подставить в формулу (\*) его оценку s — «исправленное» среднее квадратическое отклонение либо воспользоваться формулой (\*\*). Заметим, что чем больше п, тем меньше различие между результатами, которые дают обе формулы. Это объясняется тем, что при п —► оо распределение**

365

**Стьюдента стремится к нормальному (см. гл. XVI, § 16, замечание). В частности (примеры 1 и 2), при /г = 100, у = 0,95 верхняя граница ошибки равна 0,098 по формуле (\*) и 0,099 по формуле (\*\*). Как видим, результаты раз­личаются незначительно.**

Замечание. Для того чтобы найти наименьшее число испы­таний, которые обеспечат наперед заданную верхнюю границу ошибки б, надо выразить п из формул (\*) и (\*\*)'■

п = /2о2/62, п = tySa/62.

Например, если 6 = 0,098, /=1,96, <т = 0,5, то минимальное число испытаний, при которых ошибка не превысит 0,098, равно

п = 1,962 0,52/0,0982 = 100.

§ 3. Случайные числа

**Ранее было указано, что метод Монте—Карло основан на применении случайных чисел; дадим опреде­ление этих чисел. Обозначим через R непрерывную слу­чайную величину, распределенную равномерно в интер­вале (0, 1).**

**Случайными числами называют возможные значения г непрерывной случайной величины R, распределенной равномерно в интервале (0, 1).**

**В действительности пользуются не равномерно рас­пределенной случайной величиной R, возможные значе­ния которой, вообще говоря, имеют бесконечное число десятичных знаков, а квазиравномерной случайной величиной R\*, возможные значения которой имеют к о- нечное число знаков. В результате замены R на R\* разыгрываемая величина имеет не точно, а прибли­женно заданное распределение. В приложении 9 при­ведена таблица случайных чисел, заимствованная из книги: Большее JI. Н., Смирнов Н. В. Таблицы**

**математической статистики. М., «Наука», 1965, с. 428.**

§ 4. Разыгрывание дискретной случайной

величины

**Пусть требуется разыграть дискретную случай­ную величину X, т. е. получить последовательность ее возможных значений X; (i — 1, 2, ..., п), зная закон рас­пределения X:**

X хг х2 ... хп-

Р Pi Р\* Рп

366

Обозначим через R непрерывную случайную величину, распределенную равномерно в интервале (О, 1), а через г j (/ = 1,2, ...)—ее возможные значения, т. е. случайные числа.

Разобьем интервал 0 < R < 1 на оси Or точками

с координатами р1§ рх + р,, Рх + Р. + Р, Р,+Р,+ ...

•••+Рл-1 на п частичных интервалов Alt А„ . ..,ДЯ:

Дл. Дх = Рх—0 = Рх,

Дл. Д»= (Рх + Р%)—Р\ — P»t

Дл. Дя= 1 —(Pi + P\*+• •.+ря-х)==ря.

Видим, что длина частичного интервала с индексом i равна вероятности с тем же индексом:

Дл. Д/«р/. (#)

**Теорема. *Если каждому случайному числу г{* (0 < ry < 1), *которое попало е интервал*** А/, ***ставить* а *соответствие возможное значение х(, то разыгрываемая величина будет иметь заданный закон распределения:***

***X хг xt ... хя***

Р Pi Р» • \* • Ря

Доказательство. Так как при попадании слу\* чайного числа rf в частичный интервал А/ разыгрываемая величина принимает возможное значение х{, а таких интервалов всего п, то разыгрываемая величина имеет те же возможные значения, что и X, а именнох1( xt, ..., х„.

Вероятность попадания случайной величины R в ин­тервал А/ равна его длине (см. гл. XI, § 6, замечание), а в силу (») Дл. А, = р/. Таким образом, вероятность попадания R в интервал А\* равна р,. Следова­тельно, вероятность того, что разыгрываемая величина примет возможное значение xif также равна р, (поскольку мы условились в случае попадания случайного числа rt в интервал А/ считать, что разыгрываемая величина при­няла возможное значение X/). Итак, разыгрываемая ве­личина имеет заданный закон распределения.

Правило. Для того чтобы разыграть дискретную слу­чайную величину, заданную законом распределения

***X xt xt ... х„***

*Р Pi Pt* • • • *Рп*

367

**надо: 1) разбить интервал (0, 1) оси Or на п частичных интервалов: рг), А2 — (р1\ рг +р2), . .Ап — (р1 +**

**+ р2 + • • • + Pn-i> 0;**

**2) выбрать (например, из таблицы случайных чисел)**

**случайное число Гу.**

**Если Гу попало в частичный интервал Д;, то разыг­рываемая дискретная случайная величина приняла воз­можное значение х,-.**

Пример. Разыграть 8 значений дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан в виде таблицы

X 3 11 24

р 0,25 0,16 0,59

Решение. 1. Разобьем интервал (0,1) оси Or точками с коор­динатами 0,25; 0,254 0,16 = 0,41 на 3 частичных интервала: Aj — — (0; 0,25), А2 —(0,25; 0,41), А3 — (0,41; 1).

1. Выпишем из таблицы приложения 9 восемь случайных чисел, например: 0,10; 0,37; 0,08; 0,99; 0,12; 0,66; 0,31; 0,85.

Случайное число гг — 0,10 принадлежит частичному интервалу Дь поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла воз­можное значение Xi = 3. Случайное число г2 = 0,37 принадлежит частичному интервалу А2, поэтому разыгрываемая величина приняла возможное значение х2=11. Аналогично получим остальные возмож­ные значения. (

Итак, разыгранные возможные значения X таковы' 3; 11; 3; 24; 3; 24; 11; 24.

Замечание. Далее будет показано, что разыгрывание собы­тий можно свести к разыгрыванию дискретной случайной величины. Сначала рассмотрим полную группу, состоящую из двух событий (см. § 5), а затем из п событий (см. § 6). Разумеется, полная группа из двух событий является частным случаем полной группы п событий. Однако исходя из методических соображений этот частный случай намерено выделен в самостоятельный параграф—§5.

§ 5. Разыгрывание противоположных событий

**Пусть требуется разыграть испытания, в каждом из которых событие А появляется с известной вероят­ностью р и, следовательно, не появляется с вероятностью**

**1 *— р.***

**Введем в рассмотрение дискретную случайную вели­чину X с двумя возможными значениями (для определен­ности примем хг=1, х2 = 0) и соответствующими .им ве­роятностями рг —р, p2 = q. Условимся считать, что если в испытании величина X приняла возможное значение лс,= 1, то событие А наступило; если Х = х2 = 0, то собы­**

368

**тие А не наступило, т. е. появилось противоположное событие А.**

**Таким образом, разыгрывание противоположных собы­тий А и А сведено к разыгрыванию дискретной случай­ной величины X с заданным законом распределения:**

**X 1 О**

***Р Р Я***

**Для разыгрывания X надо (по правилу § 4) интервал (О, 1) разбить точкой р на два частичных интервала:** Aj — **(0, р) и Л2** — (/?, **1). Затем выбирают случайное число** Гу. **Если Гу попадает в интервал Лг, то X = xt (наступило событие Л); если Гу попадает в интервал Д2, то Х = ха = 0 (событие А не наступило).**

Правило. **Для того чтобы разыграть испытания, в каж­дом из которых вероятность появления события равна р и, следовательно, вероятность наступления противополож­ного события А равна 1—р, надо выбрать (например, из таблицы случайных чисел) случайное число** Гу(/=1, **2, .. .); если гу < р, то событие А наступило; если Гу^р, то появилось противоположное событие А.**

Пример. Разыграть 6 испытаний, в каждом из которых событие А появляется с вероятностью р = 0,35.

Решение. Выберем нз таблицы приложения 9 шесть случайных чисел, например: 0,10; 0,36; 0,08; 0,99; 0,12; 0,06. Считая, что при гу < 0,35 событие А появилось, а при гу Зг 0,35 наступило противо­положное событие А, получим искомую последовательность событий: А, А, А, А, А, А.

§ 6. Разыгрывание полной группы событий

**Разыгрывание полной группы п** (п **> 2) несов­местных событий Аи А2, ...,А„, вероятности которых plt р2, . . ., рп известны, можно свести к разыгрыванию дискретной случайной величины X со следующим законом распределения (для определенности примем хг= 1, ха = 2,** .... хп = п):

*X* 1 2 *... п*

*Р Pi Р\*--- Рп*

**Действительно, достаточно считать, что если в испы­тании величина** X **приняла значение** X; = t (i — 1, 2, . . ., я), **то наступило событие А,-. Справедливость этого утвержде­ния следует из того, что число п возможных значений X**

24 274) 369

**равно числу событий полной группы и вероятности воз­можных значений х( н соответствующих им событий А( одинаковы: P(X — xl) = P(Ai)=^pi. Таким образом, появ­ление в испытании события А равносильно событию, состоящему в том, что дискретная случайная величина X приняла возможное значение х,.**

**Правило. Для того чтобы разыграть испытания, в каж­дом из которых наступает одно из событий Alt At Ап**

**полной группы, вероятности которых рг, р, р„ из­вестны, достаточно разыграть (по правилу § 4) дискретную случайную величину X со следующим законом распреде­ления:**

**XI 2 ... п**

Р Pi Р» • • • Рт

**Если в испытании величина X приняла возможное зна­чение \*/ = \*, то наступило событие Л,.**

Пример 1. Заданы вероятности четырех событий, образующих полную группу: р4=Р (А1)=0,19, р,=Р (А.) =0,21, р. =Р (А,)=0,34, р4 = Р (А4)=0,26. Разыграть 5 испытаний, в каждом из которых появляется одно из четырех заданных событий.

Решение. В соответствии с правилом, приведенным в настоящем параграфе, надо разыграть дискретную случайную величину'X, закон распределения которой

X 1 2 3 4

р 0,19 0,21 0,34 0,26

По правилу § 4 разобьем интервал (0,1) иа четыре частичных интервала: Дх — (0; 0,19), Д\*—(0,19; 0,40), Д\*—(0,40; 0,74), Д4— (0,74; 1). Выберем из таблицы приложения 9 пять случайных чисел, например: 0,66; 0,31; 0,85; 0,63; 0,73. Так как случайное число ^ = 0,66 принадлежит интервалу Д», то Х=3, следовательно, наступило собы­тие А\*. Аналогично найдем остальные события.

Итак, искомая последовательность событий такова:

А\*, Д|, А4, Л|, А\*.

Пример 2. События А н В независимы н совместны. Разыграть 6 испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,6, а вероятность появления события В равна 0,2.

решение. Возможны 4 исхода нспытаиня:

Ai\*=AB, причем в силу независимости событий Р(АВ) = =Р (А)-Р (В) = 0,6-0,2 = 0,12;

А,» АД, причем Р (А5)=0,6-0,8=0,48;

А\*=АВ, причем Р (АВ) = 0,4\*0,2 = 0,08;

А4=АВ, причем Р (АВ) = 0,4\*0,8 = 0,32.

Таким образом, задача сведена к разыгрыванию полной группы четырех событий: Ах с вероятностью р, = 0,12, Аш с вероятностью р\* = 0,48, А3 с вероятностью р« = 0,08 н А4 с вероятностью р4 = 0,32.

870

В свою очередь, в соответствии с правилом настоящего пара­графа эта задача сводится к разыгрыванию дискретной случайной величины X, закон распределения которой

АТ I 2 3 4

р 0,12 0,48 0,08 0,32

Используем правило § 4. Выберем 6 случайных чисел, например: 0,45; 0,65; 0,06; 0,59; 0,33^ 0,70. Построим частичные интервалы: Л1-(0; 0,12), Д2 — (0,12; 0,60); Д8 —(0,60; 0,68), Д4-(0,68; 1). Слу­чайное число /1 = 0,45 принадлежит интервалу Д2, поэтому наступило событие А% — АВ. Аналогично найдем исходы остальных испытаний.

Итак, искомая последовательность исходов разыгранных испыта­ний такова: АВ, АВ, АВ, АВ, АВ, AS.

Пример 3. События А к В зависимы н совместны. Разыграть 4 испытания, в каждом из которых заданы вероятности Р(/4)=0,8, Р(В) = 0,6, Р (АВ) = 0,5,

Решение. Возможны 4 исхода испытания:

Аг = АВ, причем, по условию, Р(/4В) = 0,5;

Л2 — АВ, примем Р (АВ) = Р {А)—Р(/4В)=0,8 — 0,5 = 0,3;

Аг — АВ, причем Р (АВ) = Р (В) — Р(ЛВ)=0,6—0,5 = 0,1;

Аа = АВ, причем Р(ЛВ)=1— [P(/41) + P(/42) + P(Aj)]=1 — — (0,5 + 0,3 + 0,1) —0,1-

Таким образом, задача сведена к разыгрыванию полной группы четырех событий: Ая с вероятностью 0,5, Ая с вероятностью 0,3, Аа с вероятностью 0,1 и л4 с вероятностью 0,1 и А4 с вероятно­стью 0,1.

Рекомендуем закончить решение самостоятельно, считая для определенности, что выбраны случайные числа:\_0,65; 0,06; 0,59; 0,33.

Для контроля приводим ответ: АВ, АВ, АВ, АВ.

Пояснение. Так как A—AB-j-AB, то Р (А)=Р (AB)-j-P (АВ). Отсюда

*Р (АВ) = Р(А) — Р(АВ).*

Аналогично получим, что

*Р(АВ) = Р(В) — Р(АВ).*

**§ 7. Разыгрывание непрерывной случайной величины. Метод обратных функций**

**Пусть требуется разыграть непрерывную случай­ную величину X, т. е. получить последовательность ее возможных значений xt(i= 1, 2, ...), зная функцию распределения F (х).**

**Теорема. *Если rt—случайное число, то возможное зна­чение Х[ разыгрываемой непрерывной случайной величины X с заданной функцией распределения F* (х), *соответ­***

371

***ствующее г h является корнем уравнения***

***F{xt) = rt.***

**(\*)**

**Доказательство. Пусть выбрано случайное число Г/(0^г;< 1). Так как в интервале всех возможных зна­чений X функция распределения F (х) монотонно возра­стает от 0 до 1, то в этом интервале существует, причем только одно, такое значение аргумента х,, при котором функция распределения примет значение г(. Другими словами, уравнение (\*) имеет единственное решение**

***x, = F-4ri).***

**где F~l—функция, обратная функции y = F(x).**

**Докажем теперь, что корень х, уравнения (\*) есть возможное значение такой непрерывной случайной вели­чины (временно обозначим ее через а потом убедимся, что | = Х). С этой целью докажем, что вероятность попа­дания | в интервал, например (с, d), принадлежащий интервалу всех возможных значений X, равна прираще­нию функции распределения F (х) на этом интервале:**

***P(c<l<d) = F(d) — F(c).***

**Действительно, так как F (х) — монотонно возрастаю­щая функция в интервале всех возможных значений X, то в этом интервале большим значениям аргумента соот­ветствуют большие значения функции, и обратно. Поэтому, если с < х{ < d, то F (с) < Г; < F (d), и обратно [учтено, что в силу (\*) F(xl) = r,\.**

**Из этих неравенств следует, что если случайная величина £ заключена в интервале**

**с < | < d, (\*\*)**

**то случайная величина R заключена в интервале**

**F (с) < R < F (d), (\*\*\*)**

**и обратно. Таким образом, неравенства (\*\*) и (\*\*\*) рав­носильны, а, значит, и равновероятны:**

***Р (с < I < d) = P[F (с) < R < F* (d)]. (\*\*\*\*)**

**Так как величина R распределена равномерно в ин­тервале (0, 1), то вероятность попадания R в некоторый интервал, принадлежащий интервалу (0, 1), равна его длине (см. гл. XI, § 6, замечание). В частности,**

***Р [F (с) < R < F* (d)] *= F(d)-F (с).***

372

**Следовательно, соотношение (\*\*\*\*) можно записать в виде Р (с < I < d) = F (d) — F** **(с).**

**Итак, вероятность попадания | в интервал (с, d) равна приращению функции распределения F** **(х) на этом интер­вале, а это означает, что £ = Другими словами, числа хопределяемые формулой (\*), есть возможные значения величины X** **с заданной функцией распределения F** **(х), что и требовалось доказать.**

**Правило 1. Для того чтобы найти возможное значение х,- непрерывной случайной величины X, зная ее функцию распределения F (х), надо выбрать случайное число гit приравнять его функции распределения и решить отно­сительно х, полученное уравнение**

***F (xi)* = *г[.***

Замечание 1. Если решить это уравнение в явном виде не удается, то прибегают к графическим илн численным методам.

Пример I. Разыграть 3 возможных значения непрерывной слу­чайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2, 10).

Решение. Напишем функцию распределения величины Л, рас­пределенной равномерно в интервале (а, Ь) (см. гл. XI, § 3, пример):

F **(х) =** (х **—** а)/(Ь **—** а).

По условию, а = 2, Ь = 10, следовательно,

/Дх) = (х — 2)/8.

Используя правило настоящего параграфа, напишем уравнение для отыскания возможных значений х/, для чего приравняем функцию распределения случайному числу:

(х,—2)/8 = /-,-.

Отсюда х/ = 8г,- + 2.

Выберем 3 случайных числа, например, г1 = 0,11, /-а — 0,17, /•3 = 0,66. Подставим эти числа в уравнение, разрешенное относительно xf, в итоге получим соответствующие возможные значения X: Х! = 8-0,11+2 = 2,88; х2=1,36; х, = 7.28.

Пример 2. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному функцией распределения (параметр Я > 0 известен)

F(x)=l— **e-Xjt** (х **>** 0).

Требуется найти явную формулу для разыгрывания возможных зна­чений X.

Решение. Используя правило настоящего параграфа, напишем уравнение

1 — Ах •

1 — е 1 = г;.

Решим это уравнение относительно х/:

**— Ajt ■**

е ' = 1— г(, или —А.х, = In (I — г,).

373

Отсюда

\*/=— yln(l — п).

Случайное число г/ заключено в интервале (0, 1); следовательно, число 1—г,-также случайное и принадлежит интервалу (0,1). Дру­гими словами, величины R и 1—R распределены одинаково. Поэтому для отыскания х/ можно воспользоваться более простой формулой

1 .

\*/= — ^1п О- Замечание 2. Известно, что (см. гл. XI, § 3)

***х***

**Д(\*)= 5 ^wdx-**

— CD

В частности,

***xl***

*F (\*/)* = J *f(x)dx.*

— 0D

Отсюда следует, что если известна плотность вероятности /(дс), то для разыгрывания X можно вместо уравнений /'(дс1-) = г/ решить относительно дс/ уравнение

*xi*

^ *f(x)dx=rt.*

— CD

**Правило 2. Для того чтобы найти возможное значение Xi непрерывной случайной величины X, зная ее плот­ность вероятности f (х), надо выбрать случайное число гi и решить относительно xt уравнение**

***xi***

**J *f (х) dx — rh***

— 0D

**или уравнение**

***Х1***

**J *f(x) dx = r*t,**

*а*

**где а—наименьшее конечное возможное значение X.**

Пример 3. Задана плотность вероятности непрерывной случайной величины X f (х) = к (\—кх/2) в интервале (0; 2/к); вне этого интер­вала /(лс) = 0. Требуется найти явную формулу для разыгрывания возможных значений X.

374

Решение, Напишем в соответствии с правилом 2 уравнение xi

*X* ^ (1 —*Хх/2) dx= Г{.* о

Выполнив интегрирование и решив полученное квадратное уравнение относительно дс/, окончательно получим

**х, = 2(1- VT^TiVX.**

**§ 8. Метод суперпозиции**

**Пусть функция распределения разыгрываемой случайной величины X может быть представлена в виде линейной комбинации двух функций распределения:**

***F (х) = ClF1 (х)* + *CaFa* (*х)* (Ct >0, *Са>* 0).**

При **х**—► оо каждая из функций распределения стремится к единице, поэтому 1.

Введем вспомогательную дискретную случайную вели­чину **Z** с законом распределения

**Z** 1 2

*Р*

Мы видим, что

P(Z = l) = Clf **Р (Z — 2)~ Са.** (\*)

**Выберем два независимых случайных числа гг и г2. По числу разыгрываем возможное значение Z (см. § 4). Если окажется, что Z=l, то ищут искомое возможное значение X из уравнения F1(x) = ra; если Z — 2, то ре­шают относительно х уравнение Fa{x)~ га.**

**Докажем, что функция распределения разыгрываемой случайной величины равна заданной функции распреде­ления. Воспользуемся формулой полной вероятности (см. гл. IV, § 2)**

***Р{А) = Р* (*В*х) *PBl (А)* + *Р* (*Ва*) Рв, *(А).***

**Обозначим через А событие X < х; тогда**

Р (Л) = Р **(X** < **х) = F (х).** (\*\*)

**Рассмотрим гипотезы В1: Z=1 и Вй: Z — 2. Вероятности этих гипотез в силу (\*):**

**P(B1) = P(Z=1) =** C1 **и Р (Ва) = Р (Z = 2) = С2. (\*\*\*)**

375

**Условные вероятности появления события А соответ­ственно равны:**

***Pb,(A) = Pb,(X<x) = F****1****(x)*** **и**

***Рв, (А)* = *Рв, (X* < *х) = Fa*** *(х).* ***(\*\*\*\*)***

**Подставив (\*\*), (\*\*\*) и (\*\*\*\*) в формулу полной вероят­ности, окончательно получим**

***F(x)^C1FJ (x) + C2F,(x).***

**что и требовалось доказать.**

Замечание. Метод суперпозиции обобщается на п слагаемых функций распределения.

**Правило. Для того чтобы разыграть возможное зна­чение случайной величины X, функция распределения которой**

***F (х)* = С,/7, *(х)* + *CaFa (х*),**

**где Cj > 0, Са > 0 и Cj + Са = 1, надо выбрать два неза­висимых случайных числа гх и га** **и по случайному числу разыграть возможное значение вспомогательной дискрет­ной случайной величины Z (по правилу § 4):**

**Z 1 2**

Р ^2

**Если окажется, что Z=l, то решают относительно\* уравнение F1(x) = ra; если Z = 2, то решают уравнение F2 (х) = Га.**

Пример. Найти явные формулы для разыгрывания 'непрерывной случайной величины X, заданной функцией распределения

F(x)= 1 — 0,25(е-2\* + Зе-\*), 0 < х < оо.

Решение. Воспользуемся методом суперпозиции, для чего представим заданную функцию в виде

F (х) = 0,25 (1 —е-2ж) + 0,75 (1 — е~\*).

Таким образом, можно принять:

Ft (х) = 1 —е-2\*, ^2(х)=1— е~\* С1 = 0,25, Cg = 0,75.

Введем в рассмотрение вспомогательную дискретную случайную величину Z с законом распределения

Z 1 2

р 0,25 0,75

Выберем независимые случайные числа гх н га. Разыграем Z по случайному числу гх, для чего по правилу § 4 построим частичные

976

интервалы Д!— (0; 0,25) и Д2 — (0,25; 1). Если гг < 0,25, то 7. — 1, если rj ^5 0,25, то Z = 2.

Итак, возможное значение X находят, решая относительно х уравнение

1—е~г\* = г2, если тх < 0,25,

или

1—е-\* = г2, если ri^O.25.

Используя решение примера 2 (см. § 7), в котором была найдена явная формула х ——(1/Я) In г для разыгрывания возможных значений показательного распределения с заданным параметром Я, окончательно получим:

х=—(1/2) 1пг2, если rt < 0,25; х——In rg, если г10,25.

**§ 9. Приближенное разыгрывание нормальной случайной величины**

**Напомним предварительно, что если случайная величина R распределена равномерно в интервале (0, 1), то ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны (см. гл. XII, § 1, замечание 3):**

**М (R)** = 1/2, (\*)

D (Я) **=1/12.** (\*\*)

Составим сумму **п** независимых, распределенных рав­номерно в интервале (0, 1) случайных величин **—**

**2 *п):***

***П***

^2 **Rj-** (\*\*\*)

**Для нормирования этой суммы найдем предварительно ее математическое ожидание и дисперсию.**

**Известно, что математическое ожидание суммы слу­чайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых. Сумма (\*\*\*) содержит п слагаемых, матема­тическое ожидание каждого из которых в силу (\*) равно 1/2; следовательно, математическое ожидание суммы (\*\*\*)**

М [Д/?у] = л/2.

**Известно, что дисперсия суммы независимых случай­ных величин равна сумме дисперсий слагаемых. Сумма (\*\*\*) содержит п независимых слагаемых, дисперсия каж­дого из которых в силу (\*\*) равна 1/12; следовательно.**

377

дисперсия суммы (#\*#)

Я,] = п/12.

**Отсюда среднее квадратическое отклонение суммы (\*\*\*)**

**as = 1Лг/12.**

**Пронормируем рассматриваемую сумму, для чего выч­тем математическое ожидание и разделим результат на среднее квадратическое отклонение:**

2 Л/-(я/2)

***У~пП2* \***

**В силу центральной предельной теоремы при п—»-оо распределение этой нормированной случайной величины стремится к нормальному с параметрами <2 = 0 и о— 1. При конечном п распределение прибли­женно нормальное. В частности, при п — 12 получим достаточно хорошее и удобное для расчета приближение**

12

**2 *Rj-*6.**

**/= 1**

**Правило. Для того чтобы разыграть возможное зна­чение х( нормальной случайной величины X с парамет­рами а = 0 и о=1, надо сложить 12 независимых слу­чайных чисел и из полученной суммы вычесть 6:**

12

**X/ = 2 г/—6 = 5/—6.**

**/«=t**

Пример, а) Разыграть 100 возможных значений нормальной вели­чины X с параметрами а = 0 и о = 1; б) оценить параметры разыг­ранной величины.

Решение, а) Выберем 12 случайных чисел из первой строки таблицы \*>, сложим их и из полученной суммы вычтем 6; в итоге имеем

х1 = (0,10 + 0,09 + ...+0,67) —6 = —0,99.

Аналогично, выбирая из каждой следующей строки таблицы пер­вые 12 чисел, найдем остальные возможные значения X.

\*) См.: Большее Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы матема­тической статистики. М., «Наука», 1965, с, 428—429.

378

б) Выполнив расчеты, получим искомые оценки: а\* = хв^-—0,05, а\* = 1,04.

Оценки удовлетворительный: а\* близко к нулю, о\* мало отличается от единицы.

Замечание. Если требуется разыграть возможное значение г,- нормальной случайной величины Z с математическим ожиданием а и средним квадратическим отклонением в, то, разыграв по пра­вилу настоящего параграфа возможное значение Х{, находят искомое возможное значение по формуле

2/ *=ох{-\-а.*

Эта формула получена нз соотношения (г/ — а)/о — Х[.

Задачи

1. Разыграть 6 значений дискретной случайной величины X, закон распределения которой задан в виде таблицы

X 2 3,2 10

р 0,18 0,24 0,58

Указание. Для определенности принять, что выбраны слу­чайные числа: 0,73; 0,75; 0,54; 0,08; 0,28; 0,53.

Отв. 10; 10; 10; 2; 3; 22; 10.

1. Разыграть 4 испытания, в каждом нз которых вероятность появления события А равна 0,52.

Указание. Для определенности принять, что выбраны слу­чайные числш 0,28; \_0,53; 0,91; 0,89.

*Отв. А, А, А, А.*

1. Заданы вероятности трех событий, образующих полную группу: Р Mi) = 0,20, Р(А2) = 0,32, P(AS) = 0,48. Разыграть 6 испытаний, в каждом из которых появляется одно нз заданных событий.

Указание. Для определенности принять, что выбраны слу­чайные числа: 0,77; 0,19; 0,21; Д),51; 0,99; 0,33.

*Отв. А3, А\,* А2, *А2, А9г* А2.

1. События А и В независимы н совместны. Разыграть 5 испы­таний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,5, а события В—0,8.

Указание. Составить полную группу событий: AX = AB,

Аг — АВ, А9=АВ, At — AB\ для определенности принять случайные числа: 0,34; 0,41; 0,48; 0,21; 0,57.

*Отв. Аи* Ag, *А*,, *Alt Аэ.*

1. События А, В, С независимы и совместны. Разыграть 4 испы­тания, в каждом нз которых вероятности появления событий заданы: Р (А) = 0,4, Р(В) = 0,6, Р (С) = 0,5.

Указание. Составить полную группу событий: А^ — АВС, Аа= АЙС, Д8= АЙС, А4=АВС, А# = АВС, А„ = АВС, Д7 = АВС, А8=АВС; для определенности принять, что выбраны случайные числа: 0,075; 0,907; 0,401; 0,344.

Отв. Аи А8, Л4, А4.

1. События А и В зависимы и совместны. Разыграть 4 испыта­ния,'в каждом нз которых заданы вероятности; Р(А)=0,7, Р(В) = 0,6, Р(АВ) =0,4.

379

У казанн е. Составить полную группу событий: Аг = АВ,

Аа = АВ, А3 = АВ, А4 = АВ\ для определенности принять случайные числа: 0,28; 0,53; 0,91; 0,89.

*Отв. Аг, А2, А4, А3.*

1. Разыграть 3 возможных значения непрерывной случайной величины X, которая распределена по показательному закону и задана функцией распределения F(x)=l—е-10\*.

У казани е. Для определенности принять, что выбраны слу­чайные числа: 0,67; 0,79; 0,91.

Отв. 0,04; 0,02; 0,009.

1. Разыграть 4 возможных значения непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (6, 14).

У казани е. Для определенности принять, что выбраны слу­чайные числа: 0,11: 0,04; 0,61; 0,93.

Отв. 6,88; 6,32; 10,88; 13,44.

1. Найти методом суперпозиции явные формулы для разыгрыва­ния непрерывной случайной величины X, заданной функцией рас­пределения

F(x) = 1 — (1/3)(2е-2\* + е-»\*), 0 < х < оо.

Отв. х =—(1/2) 1п г2, если гг < 2/3;\*=—(1/3) In та, если rt^s 2/3.

1. Найти явную формулу для разыгрывания непрерывной слу­чайной величины X, заданной плотностью вероятности /(\*)== — Ь/(\-\-ах)л в интервале 0<\*^1 !Ф—а); вне этого интервала /(\*) = 0.

*Отв. Х{=*—*Г[/(Ь — аг{).*

1. Разыграть 2 возможных значения нормальной случайной величины с параметрами: а) а — 0, о = 1; б) а — 2, о = 3.

Указание. Для определенности принять случайные числа (далее указано число сотых долей; например, числу 74 соответствует слу­чайное число г! = 0,74): 74, 10, 88, 82, 22, 88, 57, 07, 40, 15, 25, 70; 62, 88, 08, 78, 73, 95, 16, 05, 92, 21, 22, 30.

Отв. a) Xj = —0,22, ха = —0,10; б) Zi = l,34, za = 2,70.

**Глава двадцать вторая**

ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЦЕПЯХ МАРКОВА

**§ 1. Цепь Маркова**

**Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий Alt At, ..., Ak полной группы, причем условная вероятность Ру(в) того, что в s-м испы­тании наступит событие Ax(j= 1, 2, при усло­**

**вии, что в (s—1)-м испытании наступило событие At(i = 1,2, ...,/г), не зависит от результатов предшест­вующих испытаний.**

**Например, если последовательность испытаний обра­зует цепь Маркова и полная группа состоит из четырех несовместных событий Аг, Аа, Л9, А4, причем известно, что в шестом испытании появилось событие Аа, то услов­**

380

**ная вероятность того, что в седьмом испытании насту­пит событие Л4, не зависит от того, какие события поя­вились в первом, втором, ..., пятом испытаниях.**

**Заметим, что независимые испытания являются част­ным случаем цепи Маркова. Действительно, если испы­тания независимы, от появление некоторого определенного события в любом испытании не зависит от результатов ранее произведенных испытаний. Отсюда следует, что понятие цепи Маркова является обобщением понятия независимых испытаний.**

**Далее используется терминология, которая принята при изложении цепей Маркова. Пусть некоторая система в каждый момент времени находится в одном из k состоя­ний: первом, втором, ..., fe-м. В отдельные моменты времени в результате испытания состояние системы изме­няется, т. е. система переходит из одного состояния, например i, в другое, например /. В частности, после испытания система может остаться в том же состоянии («перейти» из состояния i в состояние / = i).**

**Таким образом, события называют *состояниями си­стемы,* а испытания — *изменениями ее состояний.***

**Дадим теперь определение цепи Маркова, используя новую терминологию.**

**Цепью Маркова называют последовательность испы­таний, в каждом из которых система принимает только одно из k состояний полной группы, причем условная вероятность p,y(s) того, что в s-м испытании система будет находиться в состоянии /, при условии, что после (s—1)-го испытания она находилась в состоянии t, не зависит от результатов остальных, ранее произведенных испытаний.**

**Цепью Маркова с дискретным временем называют цепь, изменение состояний которой происходит в опре­деленные фиксированные моменты времени.**

**Цепью Маркова с непрерывным временем называют цепь, изменение состояний которой происходит в любые случайные возможные моменты времени.**

**§ 2. Однородная цепь Маркова. Переходные вероятности. Матрица перехода**

**Однородной называют цепь Маркова, если услов­ная вероятность p,j(s) (перехода из состояния i в состоя­ние /) не зависит от номера испытания. Поэтому вместо p,y{s) пишут просто Ptj.**

38!

Пример. Случайное блуждание. Пусть на прямой Ох в точке с целочисленной координатой х = п находится материальная частица. В определенные моменты времени tlt t2, ta, ... частица испытывает толчки. Под действием толчка частица с вероятностью р смещается на единицу вправо и с вероятностью 1 — р — иа единицу влево. Ясно, что положение (координата) частицы после толчка зави­сит от того, где находилась частица после непосредственно предшест­вующего толчка, и не зависит от того, как она двигалась под дейст­вием остальных предшествующих толчков.

Таким образом, случайное блуждание — пример однородной цепи Маркова с дискретным временем.

**Далее ограничимся элементами теории конечных одно­родных цепей Маркова.**

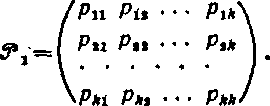
**Переходной вероятностью р1} называют условную вероятность того, что из состояния i (в котором система оказалась в результате некоторого испытания, безраз­лично какого номера) в итоге следующего испытания система перейдет в состояние /.**

**Таким образом, в обозначении pi{ первый индекс ука­зывает номер предшествующего, а второй—номер после­дующего состояния. Например, рп — вероятность «пере­хода» из первого состояния в первое; р2Э — вероятность перехода из второго состояния в третье.**

**Пусть число состояний конечно и равно k.**

**Матрицей перехода системы называют матрицу, ко­торая содержит все переходные вероятности этой сис­темы:**

**Так как в каждой строке матрицы помещены вероят­ности событий (перехода из одного и того же состояния i в любое возможное состояние /), которые образуют полную группу, то сумма вероятностей этих событий равна единице. Другими словами, сумма переходных вероятностей каждой строки матрицы перехода равна единице:**



2 **Pt/=l** **(/=1,2 k).**

382

**Приведем пример матрицы перехода системы, которая может находиться в трех состояниях:**

/0,5 0,2 0,3\

0,4 0,5 0,1 .

\0,6 0,3 0,1/

**Здесь р11 = 0,5— вероятность перехода из состояния** 1 **= 1 в это же состояние /==1; ргх — 0,4 — вероятность перехода из состояния i — 2 в состояние } — 1. Анало­гичный смысл имеют остальные элементы матрицы.**

**§ 3. Равенство Маркова**

**Обозначим через P,j(n) вероятность того, что в результате п шагов (испытаний) система перейдет из состояния i в состояние /. Например, />25(10) — вероят­ность перехода за 10 шагов из второго состояния в пятое.**

**Подчеркнем, что при п = 1 получим переходные веро­ятности**

***Рц(\) = Ри-***

**Поставим перед собой задачу: зиая переходные веро­ятности pij, найти вероятности Я,/(п) перехода системы из состояния i в состояние j за п шагов. С этой целью введем в рассмотрение промежуточное (между i и /) состояние г. Другими словами, будем считать, что из первоначального состояния i за т шагов система перей­дет в промежуточное состояние г с вероятностью Pir(m), после чего за оставшиеся п—т шагов из промежуточного состояния г она перейдет в конечное состояние / с веро­ятностью Рг){п — т).**

**По формуле полной вероятности,**

***k***

***Ри* (п) = 2 *Pir (т) prj (п—т).* (\*)**

Г — 1

**Эту формулу называют равенством Маркова.**

**Пояснение. Введем обозначения: А — интересую­щее нас событие (за п шагов система перейдет из началь­ного состояния i в конечное состояние /), следовательно, Р (А) = Pjj (n); Вг (г — 1, 2, . .., k)—гипотезы (за т шагов система перейдет из первоначального состояния i в про­межуточное состояние г), следовательно, Р (Br) = Plr (т);**

383

**Рв (A)— условная вероятность наступления А при усло­вии, что имела место гипотеза Вг (за п — т шагов система перейдет из промежуточного состояния г в конечное состояние /), следовательно, PBr(A) = Prj(n — т).**

**По формуле полной вероятности,**

**Р(Д)= 2 *Р(Вг)РВг(А),***

Т — 1

**или в принятых нами обозначениях**

***k***

***Рц* (я) = 2 *Pi*** *г* **(*m) Рг}* *(п — т*),**

**что совпадает с формулой (\*) Маркова.**

**Покажем, что, зная все переходные вероятности Pij— — Pij( 1), т. е. зная матрицу перехода из состояния в состояние за один шаг, можно найти вероятности PtJ (2) перехода из состояния в состояние за два шага, следо­вательно, и саму матрицу перехода по известной**

**матрице можно найти матрицу 5\*3 перехода из состоя­ния в состояние за 3 шага, и т. д.**

**Действительно, положив п — 2, т = 1 в равенстве Маркова**

***к***

**Рц** («) = 2 **Pir (т) Рг)** (я —т),

***Г —* 1**

**получим**

***ри{*2)= S *Pir(\)Рг/(2*— 1),**

**Г = 1**

ИЛИ

***к***

**Рц (2)=2Р,>Р„. (\*\*)**

***Г—*** **)**

**Таким образом, по формуле (\*\*) можно найти все вероятности Ри (2), следовательно, и саму матрицу 5\*2. Поскольку непосредственное использование формулы (\*\*) оказывается утомительным, а матричное исчисление ведет к цели быстрее, напишем вытекающее из (\*\*) соотноше­ние в матричной форме:**

5», = 9\*tPt = 5\*?.

**Положив п — 3, /и = 2 в (\*), аналогично получим**

5\*в = 5\*t5iJ = 9\*г9\*\ = 5\*i.

384

**В общем случае**

**9\*п = 5\*?.**

Пример. Задана матрица перехода 5\ = (о’з 0 7) ' ^а®ти мат'

рицу перехода ^3=(£“gj j) .

Решение. Воспользуемся формулой 5\* а = 5>1-

„/0,4 0,64 /0,4 0,64

З'\*-V0.3 0,7/ Vo,3 0,7; •

Перемножив матрицы, окончательно получим

„ /0,34 0,664

3 2 ~\.0,33 0,67; •

Задачи

I 0 2 0 8\

1. Задана матрица перехода 5)1 = ( q’у о’д) • Найти мат­рицу перехода

as /0.60 0,404

Отв. 5\*2— (^0,35 0,65/ "

1. Задана матрица перехода 0,9^ Найти матрицу

перехода 5V

л™ «. -/0,244 0,7564 Отв. 5\*3-^0,252 0,748/ \*

25 - 2730

ЧАСТЬ ПЯТАЯ

**СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ**

**Глава двадцать третья**

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

**§ 1. Основные задачи**

**Можно выделить два основных вида задач, ре­шение которых требует использования теории случайных функций.**

**Прямая задача (анализ): заданы параметры неко­торого устройства и его вероятностные характеристики (математические ожидания, корреляционные функции, законы распределения) поступающей на его «вход» функ­ции (сигнала, процесса); требуется определить характе­ристики на «выходе» устройства (по ним судят о «каче­стве» работы устройства).**

**Обратная задача (синтез): заданы вероятностные характеристики «входной» и «выходной» функций; тре­буется спроектировать оптимальное устройство (найти его параметры), осуществляющее преобразование заданной входной функции в такую выходную функцию, которая имеет заданные характеристики. Решение этой задачи требует кроме аппарата случайных функций привлечения и других дисциплин и в настоящей книге не рассматри­вается.**

**§ 2, Определение случайной функции**

**Случайной функцией называют функцию неслу­чайного аргумента t, которая при каждом фиксированном значении аргумента является случайной величиной. Слу­чайные функции аргумента t обозначают прописными буквами X (t), Y (t) и т. д.**

**Например, если U — случайная величина, то функция X(t) = t\*U — случайная. Действительно, при каждом фик­**

386

**сированном значении аргумента эта функция является случайной величиной: при tt — 2 получим случайную величину Xt = 4U, при ts= 1,5—случайную величину Xt = 2,2bU и т. д.**

**Для краткости дальнейшего изложения введем понятие сечения.**

**Сечением случайной функции называют случайную величину, соответствующую фиксированному значению аргумента случайной функции. Например, для случайной функции X(t) — t\*U, приведенной выше, при значениях аргумента tx = 2 и t2 = 1,5 были получены соответственно случайные величины Х,=4U и X2 = 2,25U, которые и являются сечениями заданной случайной функции.**

**Итак, случайную функцию можно рассмат­ривать как совокупность случайных вели­чин {X (ОУ» зависящих от параметра t. Воз­можно и другое истолкование случайной функции, если ввести понятие ее реализации.**

**Реализацией (траекторией, выборочной функцией) слу­чайной функции X (t) называют неслучайную функцию аргумента t, равной которой может оказаться случайная функция в результате испытания.**

**Таким образом, если в опыте наблюдают случайную функцию, то в действительности наблюдают одну из воз­можных ее реализаций; очевидно, при повторении опыта будет наблюдаться другая реализация.**

**Реализации функции X (t) обозначают строчными бук­вами xt (t), х2 (t) и т. д., где индекс указывает номер испытания. Например, если X(t) — U sin t, где U — непре­рывная случайная величина, которая в первом испытании приняла возможное значение их — 3, а во втором испы­тании ыа = 4,6, то реализациями X (t) являются соответ­ственно неслучайные функции хх (f) = 3 sin t н xt (<) = = 4,6 sin /.**

**Итак, случайную функцию можно рассмат­ривать как совокупность ее возможных реализаций.**

**Случайным (стохастическим) процессом называют слу­чайную функцию аргумента t, который истолковывается как время. Например, если самолет должен лететь с за­данной постоянной скоростью, то в действительности вследствие воздействия случайных факторов (колебание температуры, изменение силы ветра и др.), учесть влияние которых заранее нельзя, скорость изменяется. В этом**

387

**примере скорость самолета — случайная функция от не­прерывно изменяющегося аргумента (времени), т. е. скорость есть случайный процесс.**

**Заметим, что если аргумент случайной функции изме­няется дискретно, то соответствующие ему значения случайной функции (случайные величины) образуют слу­чайную последовательность.**

**Аргументом случайной функции может быть не только время. Например, если измеряется диаметр ткацкой нити вдоль ее длины, то вследствие воздействия случайных факторов диаметр нити изменяется. В этом примере диаметр—случайная функция от непрерывно изменяюще­гося аргумента (длины нити).**

**Очевидно, задать случайную функцию аналитически (формулой), вообще говоря, невозможно. В частных слу­чаях, если вид случайной функции известен, а опреде­ляющие ее параметры — случайные величины, задать ее аналитически можно. Например, случайными являются функции:**

**X(/) = sinQ/, где Q —случайная величина,**

**X (/) = £/sin/, где U —случайная величина,**

**X (/) = U sin £3/, где Q и V—случайные величины.**

**§ 3. Корреляционная теория случайных функций**

**Как известно, при фиксированном значении ар­гумента случайная функция является случайной величи­ной. Для задания этой величины достаточно задать закон ее распределения, в частности одномерную плотность вероятности. Например, случайную величину X1 — X(tl) можно задать плотностью вероятности f (xj; в теории случайных функций ее обозначают через fx (xt\ /х); здесь индекс 1 при f указывает, что плотность вероятности одномерная, tx—фиксированное значение аргумента /, х,—возможное значение случайной величины Х1 = Х(/1). Аналогично, через fx (х4; /4), /, (х4; /4) и т. д. обозначают одномерные плотности вероятности сечений Х4 = X (/4), X, = X (/,) и т. д. Одномерную плотность вероятности любого сечения обозначают через /, (х; /), подразумевая, что аргумент / принимает все допустимые значения. Например, если случайная функция X (/) распределена нормально с параметрами mx(t)~ 4, (/) == 3, то**

**Хотя функция /, (х; t) полностью характеризует каж­дое отдельно взятое сечение, нельзя сказать, что она полностью описывает и саму случайную функцию. (Ис­ключением является случай, когда любой набор сечений образует систему независимых случайных величии.) Например, зная лишь одномерную функцию распределения сечения, невозможно выполнять над случайной функцией операции, требующие совместного рассмотрения совокуп­ности сечений.**

**В простейшем случае совместно рассматривают два сечения: Хг~ X и Хг~ X(t2), т. е. изучают систему двух случайных величин (Xlt Хг). Известно, что эту систему можно задать двумерным законом распределения, в частности двумерной плотностью вероятности / (хи х2). В теории случайных функций ее обозначают через х»; tlt t2)\ здесь индекс 2 при f указывает, что плотность вероятности двумерная; и tt — значения ар­гумента /; хи х2—возможные значения случайных вели­чин, соответственно X1 = X{t1) и Х2~Х{1г).**

**Хотя двумерный закон распределения описывает слу­чайную функцию более полно, чем одномерный (по из­вестному двумерному можно найти одномерный закон), он не характеризует случайную функцию исчерпывающим образом (исключением являются случаи, когда случайная функция распределена нормально или представляет собой марковский случайный процесс).**

**Аналогично обстоит дело и при переходе к трехмер­ным, четырехмерным распределениям и т. д. Поскольку такой способ изучения случайных функций является, вообще говоря, громоздким, часто идут по другому пути, не требующему знания многомерных законов распределе­ния, а именно изучают моменты, причем ограничиваются моментами первых двух порядков.**

**Корреляционной теорией случайных функций называют теорию, основанную на изучении моментов первого и второго порядка. Эта теория оказывается достаточной для решения многих задач практики.**

**В отличие от случайных величин, для которых моменты являются числами и поэтому их называют числовыми характеристиками, моменты случайной функции явля­ются неслучайными функциями (их называют характеристиками случайной функции).**

**Ниже рассматриваются следующие характеристики случайной функции: математическое ожидание (начальный**

389

**момент первого порядка), дисперсия (центральный момент второго порядка), корреляционная функция (корреля­ционный момент),**

**§ 4. Математическое ожидание случайной функции**

**Рассмотрим случайную функцию X (t). При фиксированном значении аргумента, например при t = tt, получим сечение—случайную величину X (tx) с матема­тическим ожиданием М [X (ft)]. (Полагаем, что математи­ческое ожидание любого сечения существует.) Таким образом, каждое фиксированное значение аргумента опре­деляет сечение—случайную величину, а каждой слу­чайной величине соответствует ее математическое ожи­дание. Отсюда следует, что каждому фиксированному значению аргумента t соответствует определенное мате­матическое ожидание; это означает, что математическое ожидание случайной функции есть функция (неслучайная) от аргумента ее обозначают через mx(t). В частном случае функция тх (t) может сохранять постоянное зна­чение при всех допустимых значениях аргумента. Дадим теперь определение математического ожидания.**

**Математическим ожиданием случайной функции X (t) называют неслучайную функцию mx(t), значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно математическому ожиданию сечения, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента:**

**т\*(0 = Л\*[\*(0].**

**Геометрически математическое ожидание случайной функции можно истолковать как «среднюю кривую», около которой расположены другие кривые—реализации; при фиксированном значении аргумента математическое ожи­дание есть среднее значение сечения («средняя ордината»), вокруг которого расположены его возможные значения (ординаты).**

**§ 5. Свойства математического ожидания случайной функции**

**Используя свойства математического ожидания случайной величины, легко получить свойства математи­ческого ожидания случайной функции.**

390

**Свойство 1. *Математическое ожидание неслучай­ной функции* ф (0 *равно самой неслучайной функции:***

**Л\*[ф (0] = ф(0-**

**Свойство 2. *Неслучайный множитель* ф *(t) можно выносить за знак математического ожидания*:**

**м** [ф (о л: (о] - Ф (0 **М [X** (/)] = ф (0 **rnx** (**t**).

**Свойство 3. *Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожида­ний слагаемых*:**

**М [X (0 + Y (0] = тх (0 + ти (t).**

**Следствие. *Для того чтобы найти математическое ожидание суммы случайной и неслучайной функций, доста­точно к математическому ожиданию случайной функции прибавить неслучайную функцию:***

**М [X (0 + ф (t)] = тх (0 + ф (t).**

**Рекомендуем самостоятельно доказать приведенные свойства, учитывая, что при любом фиксированном зна­чении аргумента случайная функция является случай­ной величиной, а неслучайная функция — постоянной величиной. Например, свойство 3 доказывается так: при фиксированном значении аргумента случайные функции X (0 и Y (0 являются случайными величинами, для которых математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых.**

Пример. Найти математическое ожидание случайной функции X (/) = U cos t, где U — случайная величина, причем M(U)= 2.

Решение. Найдем математическое ожидание, учитывая, что неслучайный множитель cos i можно вынести за знак математического ожидания:

М [X (<)l = M [U cos <] = cos tM ((/) = 2 cos t.

Итак, искомое математическое ожидание тх (/) = 3 cos t.

**§ 6. Дисперсия случайной функции**

**Рассмотрим случайную функцию X (t). При фиксированном значении аргумента, например при t — tu получим сечение — случайную величину X (tj с диспер­сией Z)[X 0 (предполагается, что дисперсия любого**

**сечения существует). Таким образом, каждое фиксирован­**

391

**ное значение аргумента определяет сечение — случайную величину, а каждой случайной величине соответствует ее дисперсия. Отсюда следует, что каждому фиксирован­ному значению аргумента t соответствует определенная дисперсия; это означает, что дисперсия случайной функ­ции есть функция (неслучайная, причем неотрицательная) от аргумента t\ ее обозначают через Dx (t). В частном случае Dx (t) может сохранять постоянное значение при всех допустимых значениях аргумента. Дадим теперь определение дисперсии.**

**Дисперсией случайной функции X (t) называют неслу- чайную[неотрицательнуюфункциюDx(t), значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно дисперсии сечения, соответствующего этому же фиксиро­ванному значению аргумента:**

***Dx(t) = D[X* (0].**

**Дисперсия характеризует степень рассеяния возмож­ных реализаций (кривых) вокруг математического ожи­дания случайной функции («средней кривой»). При фик­сированном значении аргумента дисперсия характеризует степень рассеяния возможных значений (ординат) сечения вокруг математического ожидания сечения («средней ординаты»).**

**Часто вместо дисперсии рассматривают среднее квад­ратическое отклонение случайной функции, которое определяют по аналогии со средним квадратическим отклонением случайной величины.**

***Средним квадратическим отклонением случайной функ­ции* называют квадратный корень из дисперсии:**

§ 7. Свойства дисперсии случайной функции

**Используя свойства дисперсии случайной вели­чины, легко получить свойства дисперсии случайной функции.**

**Свойство 1. *Дисперсия неслучайной функции* <р (\*) *равна нулю:***

°[ф (0] = о.

**Свойство 2. *Дисперсия суммы случайной функции X* (*t) и неслучайной функции* ф *(t) равна дисперсии слу-***

392

чайной функции:

***D[X(t) + q>)t)] = Dx(t).***

**Свойство 3. *Дисперсия произведения случайной функции X* (0 *на неслучайную функцию* <p *(t) равна про­изведению квадрата неслучайного множителя на диспер­сию случайной функции:***

**D [X (0ф(0] = ф\*(0АЛ0.**

**Рекомендуем самостоятельно доказать приведенные свойства, учитывая, что при любом фиксированном зна­чении аргумента случайная функция является случай­ной величиной, а неслучайная функция — постоянной величиной.**

Пример. Найти дисперсию случайной функции X(0 = t/siiW, где U — случайная величина, причем D(U) — 6.

Решение. Найдем дисперсию, приняв во внимание, что неслу­чайный множитель sin t можно вынести за знак дисперсии, возведя его в квадрат:

D [X (/)] = £>[U sin /{ = sin\* tD (U) = 6 sin\* t.

Итак, искомая дисперсия Dx (t) = 6 sin\* /.

**§ 8. Целесообразность введения корреляционной функции**

**Математическое ожидание и дисперсия характе­ризуют случайную функцию далеко не полно. Можно привести примеры двух случайных функций, которые имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии, но поведение которых различно. Зная лишь эти две характеристики, в частности, ничего нельзя сказать о степени зависимости двух сечений. Для оценки этой зависимости вводят новую характеристику — корреляци­онную функцию. Далее покажем, что, зная корреляцион­ную функцию, можно найти и дисперсию; поэтому знать закон распределения для отыскания дисперсии нет необ­ходимости. Уже это обстоятельство указывает на целе­сообразность введения корреляционной функции.**

**Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, введем понятие центрированной случайной функции по аналогии с понятием центрированной случайной величины (центри­рованной случайной величиной называют разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием: \* = Х— тх).**

393

**Центрированной случайной функцией называют раз­ность между случайной функцией и ее математическим ожиданием:**

**\*(0 = Х(0—/МО-**

§ 9. Корреляционная функция случайной функции

**Рассмотрим случайную функцию X (t). При двух фиксированных значениях аргумента, например при/ = /1 и t = t3, получим два сечения — систему двух случайных величин X (fj и X (t2) с корреляционным моментом М [\*(<,) \*(\*,)], где**

**и *X(ts) = X(t2)-mx{t3).***

**Таким образом, каждая пара чисел tt и t2 определяет систему двух случайных величин, а каждой такой системе соответствует ее корреляционный момент. Отсюда сле­дует, что каждой паре фиксированных значений и t% соответствует определенный корреляционный момент; это означает, что корреляционный момент случайной функ­ции есть функция (неслучайная) двух независимых аргу­ментов <г и t2\ ее обозначают через Кх (<г, t2). В частном случае значения обоих аргументов могут быть равны между собой.**

**Приведем теперь определение корреляционной функции.**

**Корреляционной функцией случайной функции X (t) называют неслучайную функцию Кх (tJt t2) двух незави­симых аргументов tt и t2, значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корре­ляционному моменту сечений, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:**

**кл\*и g=M[x(^)xад.**

Замечание. *При равных между собой значениях аргументов — — t корреляционная функция случайной функции равна дис­*

*персии этой функции:*

Kx(t, t)=\*Dx(t).

Действительно, учитывая, что

Dx (0 = М [X (О - тх </)12 = М [Л (01\*.

получим

*Kx(t, t) = M [k (t) X (t)] = M* [X (/)!• =/5, (/).

394

**Таким образом, достаточно знать корреляционную функцию, чтобы найти дисперсию случайной функции.**

Пример. Задана случайная функция X(t) = Ut, где U — случай­ная величина, причем М (U)— 4, D (U)— 10. Найти: а) корреляцион­ную функцию; б) дисперсию заданной случайной функции. Решение, а) Найдем математическое ожидание:

*mx(t) = MlX(t)] = M (Ut) = tM* (t/) = 4/.

Найдем центрированную функцию:

*k(t) = X* (/)—*тх* (О *= Ut—4t = (U~4) t.*

Отсюда

*к —* — 4) *ti, k{t2) = (U-4)t2.*

Найдем корреляционную функцию:

Кх (/ь ta) — M [Л (П) к (/\*)] = М l(U- 4) tx (U -4) /t] =

= *txt*, *M* *[(U — 4)2]* = *1*1/4 *D (U)* = 1 *Oirft.*

Итак, искомая корреляционная функция

**KxVi, \*,)=ЮП/,.**

б) Найдем дисперсию, для чего положим t2—t2 — ti Dx(t) = Kx(t, /)\*Юit.

Итак, искомая дисперсия

О\* (0=10/\*.

§ 10. Свойства корреляционной функции

**Свойство 1. *При перестановке аргументов корреляционная функция не изменяется (свойство сим- метрии):***

***Kx{tlt t2)=Kx(t2, tj.***

**Доказательство. По определению корреляционной функции,**

**Kx(tlt \*,) = А4 [\*(<,) \*(\*,)],**

***Kx{t2, tt) = M[X{t2)X(tt)].***

**Правые части этих равенств равны (математическое ожи­дание произведения не зависит от порядка сомножителей), следовательно, равны и левые части. Итак,**

***Кx(tlf t2) = Kx{t2. tt).***

Замечание 1. Прибавление к случайной функции X (t) не­случайного слагаемого ф (/) ие изменяет ее центрированной функции:

395

если

К(0 = Х(0+ф(0.

то

Действительно, математическое ожидание функции У (/)

**\*\*у (\*) = "»\* (0 + ф(0-**

Следовательно,

f (t)~Y (t) ту (/) = [Х(/) + Ф(0]-[«\* (0 + ф(0] =

**=х (/)-\*!\*(/)=;\*</).**

Итак,

**Свойство 2. *П рибавление к случайной функции X (t) неслучайного слагаемого* ф (/) *не изменяет ее корреляцион­ной функции: если***

**К(0“Х(0 + ф(0.**

***то***

**\*„(\*.. '.)»\*\*<\*!. t%).**

**Доказательство. В силу замечания 1 К(0 = \*(0.**

**Отсюда ^ \* (fj и Y(tt) = X(t%). Следовательно,**

***Ml\*Vi)?(tt)] = M[A* (\*,)\*</,)].**

**Итак,**

\*.)•

Замечание 2. При умножении случайной функции X (t) на неслучайный множитель m (/) ее центрированная функция умножается на этот же множитель: если

П0 = Х(0 9(0.

то

?(/)«>\* <0ф(0- Действительно, математическое ожидание функции К (/)

Щ(0 = М(Х (09(01 = 9(0 п\* по­следовательно,

^ (0 = У (О — mv (0 = (Х (О Ф (0J-("Ь, (О Ф (01 =

“<Р (0IX «)-«\* <01—ф (0 \* (о-

396

Итак,

**^(О = Л(Оф(0.**

**Свойство 3. *При умножении случайной функции X* (*t) на неслучайный множитель* <р (0 *ее корреляционная функция умножается на произведение* ф(^)ф(/,): *если***

**П0 = Х(0ч>(0.**

***то***

Kv{tu tt)=Kx(t„ <,)ф(Мф(\*,).

**Доказательство. В силу замечания 2 К(0 = Х(0.**

**Следовательно,**

Kv (tlt tt)=M [К (\*,) Y (f а)]=М {[X (tj ф <\*,)] [X (tt) Ф (/\*)]}.

**Вынесем неслучайные множители за знак математического ожидания:**

Ку (tlt /,) = Ф (\*г) Ф (/,) М [X (\*\*) Я (#,)]«ф (/\*) чУшЖЛ\*» \*.>• Итак,

Ky(tt, /,) = \*\*(<„ \*ш)Ч>(\*г)9(\*ш)-

**Свойство 4. *Абсолютная величина корреляционной функции не превышает среднего геометрического дисперсий соответствующих сечений:***

\KAtu tt)\<VDx(tt)Dx(t,).

**Доказательство. Известно, что для модуля кор­реляционного момента двух случайных величин справед­ливо неравенство (см. гл. XIV, § 17, теорема 2)**

1и\*„ К **VDXDU.** (#)

**При фиксированных значениях аргументов** tt **и** tt **значе­ние корреляционной функции равно корреляционному моменту соответствующих сечений—случайных величин X (fj) и X (<а). Поэтому неравенство^) можно записать так:**

It,)\<V/Dx(tl)Dx(tt).

397

§11. Нормированная корреляционная функция

**Известно, что для оценки степени линейной за-  
висимости двух случайных величин пользуются коэффи-  
циентом корреляции (см. гл. XIV, § 17, соотношение (\*))**

**гху = Р\*в/(а\*0у)-**

**В теории случайных функций аналогом этой характери-  
стики служит нормированная корреляционная функция.**

**Очевидно, что каждой паре фиксированных значений  
/j и t3 аргумента случайной функции X (t) соответствует  
определенный коэффициент корреляции Kx(tlt fa)/<M\*i)0(\*\*)  
соответствующих сечений — случайных величин X (t2) и  
X (/,); это означает, что коэффициент корреляции слу-  
чайной функции есть функция (неслучайная) двух неза-  
висимых аргументов tt и t2; ее обозначают через рх (tlt t2).**

**Дадим теперь определение нормированной корреля-  
ционной функции.**

**Нормированной корреляционной функцией случайной  
функции X (0 называют неслучайную функцию двух неза-  
висимых переменных и t2, значение которой при каж-  
дой паре фиксированных значений аргументов равно ко-  
эффициенту корреляции сечений, соответствующих этим  
же фиксированным значениям аргументов:**

**Учитывая, что *ox(tJ) = V Dx{t1) = yrKx(t1, tt)* и *ox(t3) =  
= VKx(t„ t,),* получим**

\*,)- (\*\*)

**Таким образом, зная корреляционную функцию, можно  
найти нормированную корреляционную функцию.**

Пример. Найти нормированную корреляционную функцию слу-  
чайной функции X (t) по ее известной корреляционной функции  
Кх «1. <^=5 cos (t2—t1).

Решение. Искомая нормированная корреляционная функция

**п а \* ч Кх (^l. tа)**

\*’ 2 **Vкh) VКх** (\*,. /а)

5 cos (t2 — (г) \_ ..

398

**г -'х еи ч/ г \*2/**

**— (<,\_<,).**

*У* 5 cos *(tj — tx)* 5 cos *(t2—12)*

**Нормированная корреляционная функция имеет те же свойства, что и корреляционная функция (см. § 10), при­чем свойство 4 заменяется на следующее: абсолютная величина нормированной корреляционной функции не превышает единицы:**

**Это свойство следует из того, что при фиксированных значениях аргументов значение нормированной корреля­ционной функции равно коэффициенту корреляции двух случайных величин — соответствующих сечений, а абсо­лютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы (см. гл. XIV, § 17, замечание 3).**

**Легко видеть из (\*) или (\*\*), что при равных значе­ниях аргументов нормированная корреляционная функция равна единице: px(f, f)~l-**

**Очевидно, нормированная корреляционная функция имеет тот же вероятностный смысл, что и коэффициент корреляции: чем ближе модуль этой функции к единице, тем линейная связь между сечениями сильнее; чем ближе модуль этой функции к нулю, тем эта связь слабее.**

§ 12. Взаимная корреляционная функция

**Для того чтобы оценить степень зависимости сечений двух случайных функций, вводят характери­стику— взаимную корреляционную функцию.**

**Рассмотрим две случайные функции X (t) и Y(t). При фиксированных значениях аргумента, например t = tl и t = t2, получим два сечения — систему двух случайных величин X (fj и К (t2) с корреляционным моментом Л1 У" (^а)]- Таким образе»\*, каждая пара чисел**

**и t2 определяет систему двух случайных величин, а каж­дой такой системе соответствует ее корреляционный мо­мент. Отсюда следует, что каждой паре фиксированных значений tx и t2 соответствует определенный корреляци­онный момент; это означает, что взаимная корреляцион­ная функция двух случайных функций есть функция (не­случайная) двух независимых аргументов tx и t2; ее обозначают через Rxy(tt, t2). Дадим теперь определение взаимной корреляционной функции.**

**Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций X (() и Y (t) называют неслучайную функцию Rxy{tj, t2) двух независимых аргументов f, и t2, значе-**

399

**ние которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корреляционному моменту сечений обеих функций, соответствующих этим же фиксированным зна­чениям аргументов:**

***Rxv(t„ и) = м[Х(Ц?уш)1***

**Коррелированными называют две случайные функции, если их взаимная корреляционная функция не равна тождественно нулю.**

**Некоррелированными называют две случайные функции, взаимная корреляционная функция которых тождественно равна нулю.**

Пример. Найти взаимную корреляционную функцию двух слу­чайных функций X (t) = tU и К (t) = t2U, где {/—случайная величина, причем £)({/) = 3.

Решение. Найдем математические ожидания:

*тх (t) = M(tU) = tma, ту* (<) = *М (t2U) = t\*ma.*

Найдем центрированные функции:

*k(t) = X (t)—mx(t)—tU — tma = t(U — mu),*

*Y(t) = Y(t)-my(t) = t2U-t\*ma = t2(U-ma).*

Найдем взаимную корреляционную функцию:

Rxv ('ь h) = M[k (\*,) 9 (/,)] = М {[ft (U—m„)] [/1 (U - Ц|„)]} =

*= txtl М [(U* — *та)а]= t{t\ D(U) — 3t1tl.*

Итак, искомая взаимная корреляционная функция

Rxy(th =

**§ 13. Свойства взаимной корреляционной функции**

**Свойство 1. *При одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не изменяется:***

**Rxy (^i> /\*) == RyX (/»» ^l)-**

**Свойство 2. *Прибавление к случайным функциям X(t) и Y (t) неслучайных слагаемых, соответственно* q> *(t) и* ф ({), *не изменяет их взаимной корреляционной функции-.***

***если***

*хло-хщ + чУ)* И

***то***

Rx,yt(tu /\*)= RXy(^1» /\*)•

400

**Свойство 3. *При умножении случайных функций X* (f) *и У (t) на неслучайные множители, соответственно* ср (О *и* ф (О. *взаимная корреляционная функция умно­жается на произведение* ф Ч\* (^а):**

***если***

**Xt{t) = X{t)v{t) и К1(/)=1'(0Ч>(0.**

***то***

**= и <а) Ф (^i)“4F <<■)-**

**Свойство 4. *Абсолютная величина взаимной корре­ляционной функции двух случайных функций не превы­шает среднего геометрического их дисперсий:***

*\RxyVx,*

**Доказательства этих свойств аналогичны доказатель­ствам свойств корреляционной функции.**

**§ 14. Нормированная взаимная корреляционная функция**

**Наряду с взаимной корреляционной функцией для оценки степени зависимости сечений двух случайных функций пользуются характеристикой — нормированной взаимной корреляционной функцией.**

**Нормированной взаимной корреляционной функцией двух случайных функций X (I) и У (<) называют неслучай­ную функцию двух независимых аргументов и tz:**

,4 *R\*yV*i’ *Rxy Vi, t2)*

w *VKX (tu h) VKv* (f„ \*,) *YDx(tx)Dv(h)* '

**Нормированная взаимная корреляционная функция имеет те же свойства, что и взаимная корреляционная функция (см. § 13), причем свойство 4 заменяется сле­дующим свойством: абсолютная величина нормированной взаимной корреляционной функции не превышает единицы:**

**|р\*„(<!, <■) |<1.**

Пример. Найти нормированную взаимную корреляционную функ­цию двух случайных функций X(t) = t(J и Y (t)\*=(2U, где U—слу­чайная величина, причем D(U) = 3.

Решение. Ранее при решении примера (см. § 12), в котором заданы те же функции, что и в настоящем примере, были найдены функции:

Я\*„(/ь '2) = 3/х;1, k(t) = t(U-mu), К(/) = ^((У-от0).

26 2740 401

Пользуясь этими результатами, легко найдем корреляционные функции:

*к At и Kv(ti,* /,)=»М

и нормированную функцию:

n *„ RxyVut,)* *3tA*

р\*»(/ь " V^hVWl '

Итак, искомая нормированная взаимная корреляционная функция Рху Ui, tt)=i-

Заметим, что функция Y (/) связана с X (/) линейной функци­ональной зависимостью:

У (/) = /21/ =/ (tU) = tX (/).

**§ 15. Характеристики суммы случайных функций**

**Пусть X (/) и К(/)—случайные функции. Найдем характеристики суммы этих функций по известным ха­рактеристикам слагаемых.**

**Теорема 1. *Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожи­даний слагаемых: если***

***Z(t) = X(t)+Y(t),***

***то***

mz(t)~mx (<) + «„ (1).

**Эта теорема уже была приведена ранее (см. § 5, свой­ство 3); здесь она помещена для систематизации изло­жения. Методом математической индукции теорему можно обобщить на п слагаемых.**

**Следствие. *Математическое ожидание суммы слу­чайной функции X (t) и случайной величины Y равно сумме их математических ожиданий; если***

**г** (о = Х(<)+к,

***то***

mz{t) = mx (/)+m„.

Замечание 1. Центрированная функция суммы случайных функций равна сумме центрированных слагаемых: если

*Z(t) = X(i)+Y(i),*

то

i **(/> =** к 0) + ***Г(0.***

402

Действ ите льно,

Z (/) = Z (/)- тх (/) = [X (/) + У (01 -1тх (/) + (/)] - = [X (/) - я., (01 + [У (0 - ту (01.

Отсюда

2(0 = \*(0 + К(0-

**Теорема 2. *Корреляционная функция суммы двух кор­релированных случайных функций равна сумме корреля­ционных функций слагаемых и взаимной корреляционной функции, которая прибавляется дважды (с разным по­рядком следования аргументов): если***

**г** (0 = х(0 + к(\*),

***то***

***к Ah.* <■)=\*\*(/„ *t2)+Ky(tlt t2)+Rxy(tt, t2)+Rxv(t2,* /,).**

**Доказательство. По определению корреляцион­ной функции,**

**К Ah,** /,) **=** Af[2(<1)2(/1)].

**В силу замечания 1**

**4 (f)=\*(0+ ?(<)•**

**Следовательно,**

2 ***(h) t* *(#,)=[х* (о*)+у т [х* (/,)+? (<,)].**

**Выполнив умножение, приравняем математические ожи­дания обеих частей равенства:**

**М [Z (/,) Z (/,)] = M[X(h)X (/,)] + м [К (/О К (/,)] +**

**+м [X (0) У (<,)]+М [Г (0) X (<,)].**

**По определению корреляционной и взаимной корреля­ционной функций имеем**

***К At г, t2) = KAh, t,) + KAti> t,) + RxV(ti, tJ + RttX(t lt t2).***

**Учитывая, что Ryx(tlf t2) = Rxy(t2, tj (см. §13, свой­ство 1), окончательно получим**

***КAh. h)=Kx(t*г, \*■)+\*„(/lf *t2)+RXy(h, t2)+RXy(t2, tt).* (\*)**

**Методом математической индукции теорему можно обобщить на п попарно коррелированных случайных функций:**

**если**

Z(f)=Sx,<0,

(=1

**то**

***Ka{tlttt)=* 2 *Kx.(tu* \*,) + 2 *Rxp.Vv* \*.)>**

**(=1 ‘ i¥\*/ 1 ‘**

**где индексы /, / второго слагаемого есть размещения чисел 1,2, п, взятых по два.**

**Следствие 1. *Корреляционная функция суммы двух некоррелированных случайных функций равна сумме кор­реляционных функций слагаемых: если***

Z(0 = X(0+F(0.

***то***

***К.(\*„ U)+Ky(t„ tt).***

**Доказательство. Так как функции X (t) и Y (t) не коррелированы, то их взаимные корреляционные функ­ции равны нулю. Следовательно, соотношение (\*) при­мет вид**

КАК, <,)=\*\*(<i, \*■)+\*„(/,. \*•>■

**Методом математической индукции следствие можно обобщить на п попарно некоррелированных функций.**

Замечание 2. В частности, при равных значениях аргумен­тов i1 = t2=t получим Кг (t, t) — Kx{t, t)+Kv{t, t), или

*Dz(t) = Dx(t) + Dv(t).*

Итак, дисперсия суммы двух некоррелирован­ных случайных функций равна сумме дисперсий слагаемых.

**Следствие 2. *Корреляционная функция случайной функции X (t) и некоррелированной с ней случайной вели­чины Y равна сумме корреляционной функции случайной функции и дисперсии случайной величины: если***

***Z(t) = X(t) + Y,***

***то***

***ti)=Kx(t1, t»)*4-*Dv.***

**Пояснение. Случайную величину Y можно считать случайной функцией, не изменяющейся прн изменении**

404

**аргумента t:Y {t) = Y при всех значениях t. Тогда У (0=^ и, следовательно,**

***Ку* (/lf *t2) = M[?Y] = M* [У2] = *Dy.***

Пример. Заданы случайные функции X(t) — tU, Н (/) = /\*{/, где U и V—некоррелированные случайные величины, причем М (1/) = 3, М (V)=6, D(u) = 0,2, D(V)~ 5. Найти: а) математическое ожида­ние; б) корреляционную функцию; в) дисперсию суммы Z П) = Х(/) +

**+ У (0-**

Решение, а) Найдем математическое ожидание суммы задан­ных функций. По теореме 1

тг (0 = тх (О + ту (/)= М {tU) + M (t2V)=tM (U) + t\*M (Р) = 3t + 6i\*.

б) Найдем корреляционную функцию суммы Z (/). Так как слу­чайные величины 0 и V не коррелированы, то их корреляционный момент равен нулю:

M[(U — 3) (Р —6)]=0.

Следовательно, взаимная корреляционная функция

<i) = M [X (/t) У\* (/,)! \*=tyt\M [(f/ —3) (V-6)] =0,

а значит, функции X (/) и У (t) не коррелированы. Поэтому искомая корреляционная функция в силу следствия 1

\*,</!. *ta) + Ky(t*I. *t2).*

Выполнив выкладки, окончательно получим

Кt(ti, \*•>«■ 0,2Л/а+б/!<5.

в) Найдем искомую дисперсию:

D,(t) = Ka(t, /)=0,2<2 + 5/4.

**§ 16. Производная случайной функции и ее характеристики**

**При изучении случайных величин встречалось понятие сходимости по вероятности, Для изучения слу­чайных функций необходимо ввести среднеквадратичную сходимость.**

**Говорят, что последовательность случайных величин Xt, Х2, ..., Х„, . . . сходится в среднеквадратичном к слу­чайной величине X, если математическое ожидание квад­рата разности Хп — X стремится к нулю при п—**►оо:

***М[(Хп-ХУ} =* 0.**

**Случайную величину X называют пределом в среднеквад­ратичном последовательности случайных величин Xlf Х3, ..., Х„, ... и пишут**

**X = l.i.m.X,,.**

405

**Заметим, что из среднеквадратичной сходимости еле\* дует сходимость по вероятности; обратное утверждение, вообще говоря, неверно.**

**Случайную функцию X (0 называют дифференцируе­мой, если существует такая функция X' (t) (ее называют производной), что**

**lim М Гх (t+А<) Х — X’{t) I8 = 0. д<-п> I J**

**Итак, производной случайной функции X(t) называют среднеквадратичный предел отношения приращения функ­ции к приращению аргумента Д/ прн Дt—►О:**

A (I) —1.1.m. дТ”

**д/—о**

**Пусть известны характеристики случайной функции. Как найти характеристики ее производной? Ответ на этот вопрос дают теоремы, приведенные ниже, причем рас­сматриваются только среднеквадратично дифференцируемые случайные функции.**

**Теорема 1. *Математическое ожидание производной X'(t) = x от случайной функции* X *(t) равно производной от ее математического ожидания:***

**тк (0 = тИ0-**

**Доказательство. По определению производной,**

*ХЧ\*\-* lim *X(t + At)-X(t)*

**X (г) — l.i.m.**

**д<-\*о**

**Приравняем математические ожидания обеих частей ра­венства, а затем изменим порядок нахождения матема­тического ожидания и предела (законность изменения по­рядка этих операций примем без доказательства):**

**Используя свойства математического ожидания, получим М [X' (01 = Нш Шх (<+Aa0~ot'4 -- = т'х (t).**

д<—о ш

**Итак, *mi{t) = mx{t).***

406

Замечание 1. По существу доказано, что *для среднеквадра­тически дифференцируемых случайных функций операции нахождения математического ожидания и дифференцирования можно менять ме­стами.* Действительно, запишем доказанную теорему так:

Мы видим, что в левой части равенства сначала находят производ­ную, а затем математическое ожидание; в правой части — наоборот.

Пример 1. Зная математическое ожидание тх (/) = f2+ t случай­ной функции X (<), найти математическое ожидание ее производной. Решение. Искомое математическое ожидание

Замечание 2. Если первая производная дифференцируема, то производную от первой производной называют второй производной и обозначают через X” (/). Аналогично определяют производные более высоких порядков.

Замечание 3. Теорему 1 можно обобщить: математическое ожидание производной порядка п равно производной этого же по­рядка от математического ожидания случайной функции.

**Теорема 2. *Корреляционная функция производной от случайной функции X* (*t) равна второй смешанной произ­водной от ее корреляционной функции:***

**Доказательство. По определению корреляцией ной функции,**

**Представим произведение производных как вторую смешанную частную производную:**

**Изменив порядок операций нахождения математического ожидания и дифференцирования (на основании замеча­ния 1), окончательно получим**

**яь(0 = л£(0 = [<\*+<]'=2/ +1.**

**Kiitи \*,) =**

**д-Кх (/ж, <«)**dtxdtt



**Следовательно,**



**Kk(tlt /,) =**

д\*м [X (М х (/,)] \_ д\*кх (tu /2)  
<3/i<3/2 dt1dt2

**Итак,**

*д2Кх Уг, t2) dt* i*dt2* \*

407

Пример 2. Зная корреляционную функцию Кх (\*ь /») = 2/ЛИЛ/а случайной функции X найти корреляционную функцию ее произ­водной.

Решение. Найдем частную производную от заданной корре­ляционной функции по ti-.

*dKx(tx,t2) d(2txta + tlti)*

**= 2/,+ 2/^2.**

*dtx dtx*

Найдем частную производную от полученного результата по t2\

дгКх (/ь /,) a(2/, + 2/1/J) „ , „ ,

■ -dtxdi2  55 2+4/Л.

Искомая корреляционная функция

^ (/i. /s)==2-f-4/1/j.

**Теорема 3. *Взаимная корреляционная функция случай­ной функции X (t) и ее производной X'* (*t*) *= & равна част­ной производной от корреляционной функции по соот­ветствующему аргументу [если индекс X при R записан на первом (втором) месте*, *то дифференцируют по пер­вому (второму) аргументу*]:**

6) **1.) = дк<$f**

**Доказательство.**

**а) По определению взаимной корреляционной функ­ции двух функций X (t) и X’(t)=x,**

**R (М.) = М Ik «,) X' (1,)] =■ М [х <\*,) -т^-] =**

**Изменим порядок операций дифференцирования и нахождения математического ожидания:**

**„ „ , ч <Ш {\*(/,) \*(/,)] dKxVi. '\*>**

д/2 — дГ2 \*

**Итак, искомая взаимная корреляционная функция**

**D if f \ &Кх (^1» /а)**

***\*<xkKlilt)— д(г***

**б) Доказывается аналогично.**

408

Пример 3. Задана корреляционная функция Кх (\*i, \*\*) = +

случайной функции X (/). Найти взаимную корреляционную функ­цию R . (/ь /2).

*XX*

Решение. Воспользуемся формулой

R .(/i, 12) = дКФ' /г)-

**ж\***

Выполнив дифференцирование заданной корреляционной функции по <2, получим

Итак, искомая взаимная корреляционная функция

**§ 17. Интеграл от случайной функции и его характеристики**

**Интегралом от случайной функции X (/) по отрезку [0, <] называют предел в среднеквадратическом интегральной суммы при стремлении к нулю частичного интервала Дs,- максимальной длины (переменная интегри­рования обозначена через s, чтобы отличить ее от пре­дела интегрирования t):**

***t***

**У (f) = l.Lrn. 2^(s/)Asi — $ X (s)ds.**

**As** i **0 0**

**Пусть известны характеристики случайной функции. Как найти характеристики интеграла от случайной функ­ции? Ответ на этот вопрос дают теоремы, приведенные ниже.**

**Теорема 1. *Математическое ожидание интеграла от случайной функции равно интегралу от ее математи­ческого ожидания: если***

**Y (t) = S X (s) ds,**

***о***

***то***

***t***

mv (0= Jm\* **(s)ds.**

*о*

**Доказательство. По определению интеграла, У (t) = l.i.m. 2 X (s/) As,-.**

409

**Приравняем математические ожидания обеих частей ра­венства:**

**М [Y (0] = М 2 X (st) As/j.**

**Изменим порядок нахождения математического ожи­дания и предела (законность изменения порядка этих операций примем без доказательства):**

**Л\*[Г(0]= ton [М 2 X (s^ As,-].**

As^-\*0

**Воспользуемся теоремой сложения математических ожиданий:**

**M[Y (t)]=** lim **У\тх** (s,)AS/.

As,--\* 0

**Учитывая, что 2mx(s/)^s/—интегральная сумма функции тх (s), окончательно получим**

***ту* (*t) =\тх (s) ds.***

Замечание. По существу доказано, что *операции нахождения  
математического ожидания и среднеквадратичного интегрирования  
можно менять местами.* Действительно, запишем доказанную тео-  
рему так:

Г t

***М***

5 x(S)dsl=5  
о Jo

М [X (s)] ds.

Видим, что в левой части равенства сначала находят интеграл, а затем математическое ожидание; в правой части — наоборот.

Пример 1. Зная математическое ожидание /л\*(/) = 2/+1 случай­ной функции X (/), найти математическое ожидание интеграла

*t*

**y(0=Jx(s)\*.**

**о**

Решение. Искомое математическое ожидание t i

«\*(<)=$ mx(s)ds— J (2s+l)ds= /2 + /.

**0 0**

**Теорема 2. *Корреляционная функция интеграла от случайной функции X* (0 *равна двойному интегралу от ее корреляционной функции:***

410

*если*

Г (f)=$ X(s)ds,

*то*

Ky(h, ^»)== J J Кх (^1» sa)dstdst. о о

**Доказательство. По определению корреляцион­ной функции,**

**Kv(t» /,) = М[^(/1) \* (/,)].**

**Центрированная случайная функция**

**< i**

У (t) = Y (\*)—m„(0 = $X(s)ds—$/nx(s)ds =

**о о**

*t*

**= J[X (s)—m\*(s)]ds, о**

**или**

*t*

*t(t)* ***= lx(s)ds.* (\*)**

**0**

**Поскольку под знаком определенного интеграла перемен­ную интегрирования можно обозначать любой буквой, обозначим переменную интегрирования в одном интеграле через Sl а в другом—через st (чтобы отличить перемен­ные интегрирования и пределы интегрирования):**

V **<\*,) = 5** к **(Sl)** dslt **Y** (U) **=» S** X **(s.) dsa.**

о 0

Следовательно,

\*1 \*\* ^1

\*4\*1)? (<.) = S X (Sj dst S X (s,) dst = S S X (sx) X («,) dst dst.

a о oo

**Приравняем математические ожидания обеих частей ра­**

**венства:**

**Изменив порядок операций нахождения математичес­кого ожидания и интегрирования, окончательно получим**

***i,***

***Ку (tlt* \*.) \*=** S S ***К\* (Slt st) dsx dsa.* (\*\*)**

**о 0**

Пример 2. Зная корреляционную функцию Кх \*») = 4\*1\*2 ■+ -f- 9/?/\* случайной функции X (/)> найти корреляционную функцию

интеграла У (t) = ^ X (s) ds.

**О**

Решение. Используя формулу (\*\*), найдем f 1

Ky(tu \*2)=$ $ + si)

**о о**

Выполнив интегрирование, получим искомую корреляционную функ­цию:

*Ky(tu ta) — t]t\* (1 + \*i\*s)-

**Теорема 3. *Взаимная корреляционная cf/ункция случай-***

***-I***

***ной функции X* (/) *и интеграла Y* (0 = $ *X* (s) *ds равна***

**о**

***интегралу от корреляционной функции случайной функ­ции X* (*t):***

***t,***

**а) Rxv(tlt t')=5Kx(tt. s) ds;**

о **t.**

**б) *RyAti, t2) = $Kx(s, ta) ds.***

**0**

**Доказательство, а) По определению взаимной корреляционной функции,**

***Rxyit'i, t\*) = M[k(tt)9(tt)].* (\*\*\*)**

**В силу соотношения (\*) центрированная функция**

**<**

**fr(0 = $\*(«)\*,**

**о**

**следовательно,**

**f«**

**\*«,)=$ *\*{s)ds.* о**

412

**Подставим правую часть этого равенства в (\*\*\*):**

**Rxv(ti> /.) = Af**

**к (/t) j X (s) ds j = M X (/t) X (s) ds**

**Операции нахождения математического ожидания и интегрирования можно менять местами (см. § 17, заме­чание), поэтому**

*RtyVi,* ***ti)=\M[X(t1)X(s)]ds,***

**или окончательно**

**RxyU** 1**» ^\*) — §Kx(tir s) ds.**

**о**

**б) Доказывается аналогично.**

Пример 3. Задана корреляционная функция Kx(ti> =

случайной функции X (/). Найти взаимную корреляционную функцию

Rxy (\*ь случайной функции X (/) и У (t) — J X (s) ds.

***о***

Решение. Используя формулу

**f \***

*Rxy(ti, tt)=* J *Kx{h. s)ds,* о

получим искомую корреляционную функцию:

**f я**

RXy(fii f\*) = 3/i J s ds\*=(3/2)

**§ 18. Комплексные случайные величины и их числовые характеристики**

**В дальнейшем кроме действительных рассматри­ваются и комплексные случайные функции. Эти функции и их характеристики определяют по аналогии с комплекс­ными случайными величина мл, поэтому начнем изло­жение с комплексных величин.**

**Комплексной случайной величиной называют величину Z = X + Yi, где X и Y—действительные случайные ве­личины.**

413

**Сопряженной случайной\_ величине Z\*=X-\-Yi назы­вают случайную величину Z = X—Yi.**

**Обобщим определения математического ожидания и дисперсии на комплексные случайные величины так, чтобы, в частности, при F = 0 эти характеристики совпали с ра­нее введенными характеристиками действительных слу­чайных величин, т. е. чтобы выполнялись требования:**

***Математическим ожиданием комплексной случайной величины* Z = *X + Yi* называют комплексное число**

**В частности, при у = 0 получим тг = тх, т. е требо­вание (\*) выполняется.**

**Дисперсией комплексной случайной величины Z назы­вают математическое ожидание квадрата модуля центри­рованной величины Z:**

**В частности, при Y = 0 получим Dg — Л1 [(X)2] =\*= Z?\*, т. е, требование (\*\*) выполняется.**

**Учитывая, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, имеем**

**D, = М [ | Z |\*] - М [(X)2 + (У)2] = М [(Х)21 + М [(F)2] -**

**Итак, *дисперсия комплексной случайной величины равна сумме дисперсий ее действительной U мнимой частей*:**

**Известно, что корреляционный момент двух равных случайных величин Xj^ = Хг = X равен дисперсии Dx — положительному действительному числу. Обобщим опре­деление корреляционного момента так, чтобы, в частности, корреляционный момент двух равных комплексных слу­чайных величин Zj = Z2 = Z был равен дисперсии Dg — положительному действительному числу, т. е. чтобы вы­полнялось требование**



**(\*)**

**(\*\*)**

***mz = mx + myi.***

***Dz = M[\°Z\'l***

**■= Дг + Д»**

**Д— Д + Д.**

**— *Dz,***

**(\*\*\*)**

414

**Корреляционным моментом двух комплексных случай­ных величин называют математическое ожидание произ­ведения отклонения одной из величин на сопряженное отклонение другой:**

**И,.,. = *М [(Zy* — *mZi)* - *M[Zy Zt].***

**В частности, при Z1 = Z1 = Z, учитывая, что произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату их мо­дуля, получим**

**Н-и = Л1 [ZZ] \*= Л! [ | Z |2] = Dtt**

**т. е. требование (\*\*\*) выполняется.**

**Корреляционный момент комплексных случайных ве­личин Zj — Xy + Yyi и Zt — Xt-\-Yai выражается через**

**корреляционные моменты действительных и мнимых ча­стей этих величин следующей формулой:**

И**\*,\*,=** !\*\*,„, + **ря,У1** + (»\*\*,\*, — P\*t„,) **I** • (\*\*\*\*)

**Рекомендуем вывести эту формулу самостоятельно.**

§ 19. Комплексные случайные функции и их характеристики

***Комплексной случайной функцией* называют**

**функцию**

***Z(t) = X(t) + Y(t)i,***

**где X (t) и Y (t)—действительные случайные функции действительного аргумента t.**

**Обобщим определения математического ожидания и дисперсии на комплексные случайные функции так, чтобы, в частности, при К = 0 эти характеристики совпали с ра­нее введенными характеристиками для действительных случайных функций, т. е. чтобы выполнялись требования:**

***mz (t)* = *тх (t),* (\*)**

***Dt(t) = Dx(t).* (\*\*)**

***Математическим ожиданием комплексной случайной функции Z(t)* = *X* (*t)* + *Y* (0 *i* называют комплексную функцию (неслучайную)**

**(0** = тх **(**t) + my **(**t)i**.**

415

**В частности, при У = 0 получим тг (t) = тх (t), т. е. тре­бование (\*) выполняется.**

**Дисперсией комплексной случайной функции Z (t) на­зывают математическое ожидание квадрата модуля центри­рованной функции Z(t):**

***Dg(t) = M[\Z* (/) |2].**

**В частности, при У=0 получим Dz (/) = М [X (О]2 = = Dx(t), т. е. требование (\*\*) выполняется.**

**Учитывая, что математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий слагаемых, имеем**

**Dz (t) = М [ IZ (0 /■] = М {[X (О]2 + [Y (О]1} =**

**= М [X (/)]’ + м [У (0]а = Dx (0 + Dy (t).**

**Итак, *дисперсия комплексной случайной функции равна сумме дисперсий ее действительной и мнимой частей:***

***Dz(t) = Dx(t) + Dy* (/).**

**Известно, что корреляционная функция действитель­ной случайной функции X (t) при разных значениях аргу­ментов равна дисперсии Dx{t). Обобщим определение корреляционной функции на комплексные случайные**

**функции Z(t) так, чтобы при равных значениях аргу­**

**ментов t1 = ti = t корреляционная функция Kz(t, t) была равна дисперсии Dx (/), т. е. чтобы выполнялось требо­вание**

***Kz(t, t) = Dz(t).* (\*\*\*)**

***Корреляционной функцией комплексной случайной***

**функции Z(t) называют корреляционный момент сечений**

**£(/,) и**

***Кг(\*г> t,) = M[Z(tt)2(tf)].***

**В частности, при равных значениях аргументов**

***Kz(t, t) = M[z(t)Tyj\ = M[\i\\*\=D,(t)t***

**т. е. требование (\*\*\*) выполняется.**

**Если действительные случайные функции X (/) и У (t) коррелированы, то**

***Kz(tlt tt) = KAt» t2) + Ky{tx,* \*,) + [*Rxy(tM, tj]-***

416

**если X (t) и Y (0 не коррелированы, то**

Кж(\*г> t,) + Ky(tlt t2).

**Рекомендуем убедиться в справедливости этих формул, используя соотношение (\*\*\*\*) предыдущего параграфа.**

**Обобщим определение взаимной корреляционной функ­ции на комплексные случайные функции Z1(t) = Xi{t) + -f Yt (/) i и Z2 (i) = X2 (\*) + Y2 (t) i так, чтобы, в частности, при Y2 — Yt — 0 выполнялось требование**

**(^1\* ~ *$х,хя (^г< ^2).* (\*\*\*\*)**

***Взаимной корреляционной функцией двух комплексных случайных функций* называют функцию (неслучайную)**

\*,,«,(\*1. t2)^Miz.it,)гг(/,)].

**В частности, при У1 = У2 = 0 получим**

**т. е. требование (\*\*\*\*) выполняется.**

**Взаимная кЪрреляционная функция двух комплексных случайных функций выражается через взаимные корре­ляционные функции их действительных и мнимых частей следующей формулой:**

[^\*2у. ^2’ Л) “^\*| уа(^и **Рекомендуем вывести эту формулу самостоятельно.**

Задачи

1. Найти математическое ожидание случайных функций:
2. X(t) = Ut2, где U — случайная величина, причем M(U) = 5;

б) X (/) = U cos 2/-f Vt, где (J и V—случайные величины, причем М (U) — 3, М (У) = 4.

Отв. а) тх(/) = 5/\*; б) тх (()— 3cos2<-f4f.

1. Задана корреляционная функция Kx (tlt t2) случайной функ­ции X (<). Найти корреляционные функции случайных функций- а) Y (t) — X (0 + f. б) У(/) = (/ + 1)Х</); в) Y{t) = AX(t).

Отв. a) Ky(tu ^2) — Xx(t\, t2); б) Ky(t 1, f\*) = (^1+1) (1%-h 1)X

72)l B) KyUl, 72)= 16/Сдс (tl, 12)-

1. Задана дисперсия Dx (/) случайной - функции X (1). Найти дисперсию случайных функций: a) Y (t) = X (/) + е<; б) Y (t) = tX (t).

*Отв.* a) *L>y{t) = Dx* (7); б) *Dy (t) = t2Dx (()■*

1. Найти: а) математическое ожидание; б) корреляционную функ­цию; в) дисперсию случайной функции X (7) = {У sin 2/, где U — слу­чайная величина, цричем M(U) — 3, D(U) = 6.

27 2770 417

Отв. а) тх (0 = 3 sin 2/; б) Kx(ty, /\*) = в sin 2/\* sin 2/2;

в) Dx (/) =6 sin\* 2/.

1. Найти нормированную корреляционную функцию случайной функции X (/), зная ее корреляционную функцию Кх {tlt <\*) = -в 3 cos (tt — <i).

Отв. Pjc(/г, /2) = cos (/t—/х).

в. Найти: а) взаимную корреляционную функцию; б) нормирован­ную взаимную корреляционную функцию двух случайных функций X (/) = (/-)-1) U и У (/> = (/\*4-1) О, где (/—случайная величина, причем D ((/) = 7.

Отв. a) Rxy(tu <,) «7 (<!+!)(#!-И); б) рxy(tu /») = 1.

1. Заданы случайные функции Л (/) = (/— 1) U и К (/) = /\*£/, где U к V — некоррелированные случайные величины, причем M(U)=2, M(V) = 3, D(U) = 4, D(\0 = 5. Найтн: а) математическое ожидание; б) корреляционную функцию; в) дисперсию суммы Z(/) = ~X(t) + Y(t).

Указание. Убедиться, что взаимная корреляционная функция заданных случайных функций равна нулю и, следовательно, X (/) и У (/) не коррелированы.

Отв. а) тг (<)=2(<-1) + 3/\*; б) K,(tu /») = 4(О-1)(/,- 1) 4- + 6/?/2; в) />\*(/) = 4 (/-])\*+6/\*.

1. Задано математическое ожидание тх (/)=/\* 4-1 случайной функции X (/). Найти математическое ожидание ее производной.

Отв. ль (/) = 2/.

1. Задано математическое ожидание т\*(/)=/\*+3 случайной функции X (О- Найти математическое ожидание случайной функции У (/) = /Л\* +

Отв. ту (/) = /\*(/ 4-2).

1. Задана корреляционная функция Кх (О, /2) = e-«»-fi>\* слу­чайной функции л (/). Найти корреляционную функцию ее произ­водной.

Отв. X. (О. <s) = 2e-‘<.-V\*[l-2«l-/1)\*l.

1. Задана корреляционная функция Kx(ti, /2) = e~<(»-\*i>s слу­чайной функции X (/). Найти взаимные корреляционные функции: a) Rxi(tu <\*): б) Rix(h, /,)•

Отв. а) ^(/ь \*,) —2 (#,-#!> е-«.-\*.>\*; б) /?^«ь /.) =

“2(/\*—<1)е-«.-<Л

1. Задано математическое ожидание т\*(/) = 4/\* случайной функ-

*t*

цнн Л (/). Найти математическое ожидание интеграла К (/) = ^ X (s) ds.

о

Отв. ту (/) = /\*.

1. Задана случайная функция X (/)=»£/ cos\*/, где (/—случай­ная величина, причем М(0) — 2. Найти математическое ожидание

**/**

случайной функции К (/) = (/\*-f-l) ^ Л (s)rfs.

о

От\*. ту (/) = (/\* 4-1) (/ 4- (sin 2/)/2].

418

1. Задана корреляционная функция Kx(ti, t2) = cos со cos a>t2 случайной функции X (/). Найти: а) корреляционную функцию;

15\*. Задана случайная функция X (t) — Uezt cos 2t. где U — слу­чайная величина, причем M(U) = 5, D(U)=l. Найти: а) математи­ческое ожидание, б) корреляционную функцию, в) дисперсию интег-

*Отв.* а) *тх (t) — 5eat* cos *2t\*

6) Kv (tu <s) = (1/169) [е\*<» (2 sin 2^ + 3 cos 2/0 — 3][es\*» (2 sin 2/a-f  
+ 3 cos 2t2 — 3]; в) Dy(t) = (l/\69) [e3< (2 sin 2t + 3 cos 2t) — 3]2.

16. Задана корреляционная функция Kx(tu <2) — /О\* случайной  
функции X (/). Найти взаимные корреляционные функции: a) Rxy (tlt tt);

б) Ryx {h, t2) случайных функций X (<) и У (/) — ^ X (s) ds.

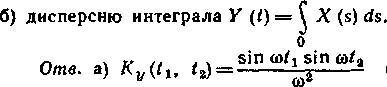
Отв. a) Rxv(/lt /t) = #i<S/3; б) Ryx(tlf tz)=t\t\l2.

Глава двадцать четвертая СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ

**§ 1. Определение стационарной случайной функции**

**Среди случайных функций целесообразно выде­лить класс функций, математические ожидания которых сохраняют одно и то же постоянное значение при всех значениях аргумента t и корреляционные функции кото­рых зависят только от разности аргументов t2 — tt. Ясно, что для таких функций начало отсчета аргумента может быть выбрано произвольно. Такие случайные функции называют «стационарными в широком смысле» в отличие от случайных функций, «стационарных в узком смысле» (все характеристики этих функций не зависят от самих значений аргументов, но зависят от их взаимного рас­положения на оси О-**

**Из стационарности в узком смысле следует стацио­нарность в широком смысле; обратное утверждение не­верно.**



; б) Dy (/) = (sin2 <й<)/со\*.



**о**

**о**

27-

419

**Поскольку мы ограничиваемся корреляционной тео­рией, которая использует только две характеристики (математическое ожидание и корреляционную функцию), далее рассмотрим случайные функции, стационарные в широком смысле, причем будем их называть просто ста­ционарными. р**

**Стационарной называют случайную функцию X (t), математическое ожидание которой постоянно при всех значениях аргумента t и корреляционная функция кото­рой зависит только от разности аргументов t2—tt. Из этого определения следует, что:**

1. **корреляционная функция стационарной случайной функции есть функция одного аргумента т — tt — tt, т. е.**

\*\*(\*1. \*\*) = **М\*2—=** (\*)

1. **дисперсия стационарной случайной функции по­стоянна при всех значениях аргумента t и равна значе­нию ее корреляционной функции в начале координат** (т **= 0), т. е.**

***Dx(t) = Kx{t, t) = kx(t-t)=kx(*0). (\*\*)**

Пример. Задана случайная функция X (t) = cos (/ 4-<р), где <р — случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0, 2я). Доказать, что X (/)— стационарная случайная функция.

Решение. Найдем математическое ожидание:

тх (t) — M [cos (t —<р)J = М [cos t cos ф—sin t sin ф]=соз tM (cos ф)—

— sin tM (sin ф).

Используя формулы (\*\*) нз гл. XII, § 11 н (\*) из гл. XI, § 6, по­лучим:

2л

М (cos ф) = J cos ф <1ф = 0 и М (sin ф) = 0. о

Следовательно, mx(t) = 0.

Найдем корреляционную функцию, учитывая, что центрирован­ная функция Ус (t) = X (/) — тх (t)=X (t) = cos (^+ф):

KxVb = (to к (/a)] = M [cos (^Ч-ф) cos (/.-[-Ф)1 =

— cos (t% tj) -f-cos (\*2 + <1 + 2ф) j cos (tj—ti)

(Легко убедиться, что M [cos (\*\* + /1 + 2ф)1 = 0.)

Итак, математическое ожидание случайной функции X (/) по­стоянно при всех значениях аргумента и ее корреляционная функ­ция зависит только от разности аргументов. Следовательно, X (/) — стационарная случайная функция.

420

Заметим, что, положив tl — t2 = t в корреляционной функции, найдем дисперсию Dx(t) — Kx(t, f) = [cos (< — 01/2=1/2. Таким обра­зом, дисперсия сохраняет постоянное значение при всех значениях аргумента, как и должно быть для стационарной случайной функции,

**§ 2. Свойства корреляционной функции стационарной случайной функции**

**Свойство 1. *Корреляционная функция ста­ционарной случайной функции есть четная функция:***

kx(x) = kx(—T).

**Доказательство. Корреляционная функция лю­бой случайной функции при перестановке аргументов не изменяется (см. гл. XXIII, § 10, свойство 1). В частно­сти, для стационарной функции**

bx(t2 — ti) = kx{t1 — ti).

**Положив Т = ts — tx, получим**

kx (%) = kx{— **т).**

**Свойство 2. *Абсолютная величина корреляционной функции стационарной случайной функции не превышает ее значения в начале координат:***

**\ЬХ (т)|</гх (0).**

**Доказательство. Для любой случайной функции (см. гл. XXIII, § 10, свойство 4)**

**1 *t2)\^VDx(tl)Dx(t2).***

**В частности, для стационарной функции**

**Kx(t„ ti) = kx(x) и Dx (/,) = Dx (t3) = kx (0). Следовательно,**

I**К** (т) I < **v kx** (**0**) **kx** (**0**) = **kx** (**0**).

**§ 3. Нормированная корреляционная функция стационарной случайной функции**

**Кроме корреляционной функции для оценки сте­пени зависимости сечений стационарной случайной функ­ции используют еще идну характеристику — нормирован­ную корреляционную функцию.**

421

**Ранее нормированная корреляционная функция была определена так (см. гл. XXIII, § 11):**

р<\*>

**В частности, для стационарной функции числитель и зна­менатель этой дроби имеют вид (см. § 1, соотношения (\*) и (\*\*)) Kx(tt, tt)=kx{т), ох (t) = У Dx (t) = Vkx (0). Следо­вательно, для стационарной функции правая часть (\*) равна kx(x)/kx(0) и является функцией одного аргу­мента т; очевидно, и левая часть (\*) — функция от т.**

***Нормированной корреляционной функцией стационар­ной случайной функции* называют неслучайную функцию аргумента т:**

***Pxi\*) = kx (x)/kx* (0).**

**Абсолютная величина нормированной корреляционной функции стационарной случайной функции не превышает единицы. Справедливость этого свойства уже была дока­зана ранее для любой случайной функции (см. гл. XXIII, § 11). В учебных целях докажем его непосредственно для стационарной функции.**

**Приняв во внимание, что абсолютная величина част­ного равна частному абсолютных величин, получим**

**I Р\* СО IЧ К Шх (0) I - I kx (т) |/| kx (0) |.**

**Учитывая, что | kx (т) | ^ kx (0) (см. § 2, свойство 2), окончательно имеем**

**|р\*(т)|<1.**

Замечание. При т —0 нормированная корреляционная функ­ция равна единице. Действительно,

Р\*(0) = \*х (0)/ftx(0)=l.

Пример. Задана корреляционная функция kx (т) =(1/2) cos т ста­ционарной случайной функции X (/). Найти нормированную корреля­ционную функцию.

Решение. Воспользуемся определением нормированной корреля­ционной функции:

о (x)-k\* **(т)-(1/2) cos т- соз т** ftx(0) (1/2) cos 0

Итак, искомая нормированная корреляционная функция

Р\*(т) = соз т.

Заметим, что рх (0) = 1, как и должно быть в соответствии с за­мечанием, приведенным в атом параграфе,

§ 4, Стационарно связанные случайные функции

**Стационарно связанными называют две случай­ные функции X (/) и У (/), если их взаимная корреля­ционная функция зависит только от разности аргумен­тов х = tt—**

***Rxy* (^1» *?») ~ ?ху* (т)-**

**Взаимная корреляционная функция стационарно свя­занных случайных функций обладает следующим свой­ством:**

**г\*у М = гух (— т).**

**Это равенство следует из свойства 1 взаимной корреля­ционной функции (при одновременной перестановке ин­дексов и аргументов взаимная корреляционная функция не изменяется):**

***rxy(t% — ti) = ryx(ti—tt),* или *гХу*(т) = *г*уХ(— т).**

**Геометрически свойство можно истолковать так: гра­фик кривой гух (— т) симметричен графику кривой гху (т) относительно оси ординат.**

**Заметим, что если каждая из двух случайных функ­ций стационарна, то отсюда еще нельзя заключить, что их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов.**

**Стационарными и стационарно связанными называют две стационарные случайные функции X (t) и У (/), взаим­ная корреляционная функция которых зависит только от разности аргументов т =\*tt — tlt**

Пример. Заданы две стационарные случайные функции X (/) =а = cos (/-|-ф) и Y (0 = sln (/+ф), где <р — случайная величина, рас­пределенная равномерно в интервале (0,2п). Доказать, что заданные стационарные функции стационарно связаны.

Решение. Ранее было найдено, что ш\* (/) = 0 (см. § I, пример); аналогично можно получить, что my(t)=0. Запишем центрированные функции:

*% Н) = Х (t) — mx (t) = X* (0 = cos (/ + ф),

*?* (*t)=\*Y (t) — my(t) — Y(t)=\*s*\n (/ + Ф).

Найдем взаимную корреляционную функцию:

Rxv Их. i^M[k{fx)^ М [cos Цх+Я>) sin (itt +Ф)] -

\_\_M sin (/, — /!>-f-sin (/! + <, +2ф) ' \_\_

sin (tt— tt) | j~sin + 2<P)~

423

Легко убедиться, что математическое ожидание второго слагае­мого равно нулю (см. § 1, пример), поэтому

RxV(ti, \*2) = (1/2) sin (/\*—<!).

Итак, взаимная корреляционная функция заданных стационар­ных случайных функций зависит только от разности аргументов; следовательно, эти функции стационарно связаны.

**§ 5. Корреляционная функция производной стационарной случайной функции**

**Теорема. *Корреляционная функция производной X'(t) = it дифференцируемой стационарной случайной функции X* (*t*) *равна второй производной от ее корреля­ционной функции, взятой со знаком минус:***

**\*;(т) = — Л;(т).**

**Доказательство. Известно, что корреляционная функция производной любой дифференцируемой случай­ной функции равна второй смешанной производной от ее корреляционной функции (см. гл. XXIII, § 16, теорема 2):**

***JC (t j* ) *— д\*К\** (\*\*.<»)**

**Л\* (tu г\*) dtidit .**

**По условию, X (/)—стационарная функция, поэтому ее корреляционная функция зависит только от разности аргументов:**

**К Ah.** \*.) = Мт).

**Из соотношения т==^, — следует, что**

*дх* , „ *дх . .* .

dt1~~ 1 ' W

Учитывая равенства (\*), получим

ff(j. *+ \ йгкх* (т) д Гdkx (т) 1 д [dkx (т) дх 1

dhdtt -dti **L** dtt **J** -dti **L Si** 577**J 5=3**

=**ж=-■к** **<т>■** <-1 >=- •

**Видим, что искомая корреляционная функция зависит только от т, поэтому Ki(tlt t,) = ki(т).**

**Итак,**

**Мт) = ~ (\*)■**

424

Пример. Задана корреляционная функция kx (т) = 2е\_0,6т\* ста­ционарной случайной функции X (/). Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию производной X' (t) = x.

Решение, а) Продифференцировав дважды заданную корреля­ционную функцию и изменив знак результата на противоположный, найдем искомую корреляционную функцию:

б) Положив т = 0, по.лучим искомую дисперсию:

D.=\*.(0) = 2.

§ 6. Взаимная корреляционная функция стационарной случайной функции и ее производной

**Теорема. *Взаимная корреляционная функция диф­ференцируемой стационарной случайной функции X* (/) *и ее производной X'* (*t*) = *х равна первой производной от корреляционной функции kx(***т), ***взятой со своим (проти­воположным) знаком, если индекс х стоит на втором (первом) по порядку месте:***

**а) гхк(т) = &(\*); б) rix(т) = —\*;(т).**

***Предполагается, что x — t%*—*tt.***

**Доказательство, а) По определению взаимной корреляционной функции,**

; ('»>'.) **= м[к (tt) х**'«,)] = **м** {|.

**Операции нахождения математического ожидания и диф­ференцирования можно переставить (см. гл. XXIII, § 16, замечание 1), поэтому**

„ „ dM[\*(/i) \*(/,)] dKx(tut2)

**?xiy** 5**^ -**

**Так как X (t) — стационарная функция, то ее корреля­ционная функция зависит только от разности аргументов:**

**Кх Ни-\*\*) =^к-х(т), где т = и, следовательно, 1.**

***ot%***

**Таким образом,**

^ (т> • I - М.

425

**Правая часть равенства зависит только от т; следова-  
тельно, и левая часть есть функция от т. Обозначив ее  
через гх'х (т), окончательно получим**

**гхх (т) —^(т)\***

**б) Доказывается аналогично.**

**Заметим, что поскольку взаимная корреляционная  
функция гх - (т) зависит только от т, то стационарная  
случайная функция и ее производная стационарно свя-  
заны (см. § 4).**

Пример. Задана корреляционная функция kx (т) = е-|х1 (I +| т |)  
стационарной случайной функции X (О\* Найти взаимную корреля-  
ционную функцию, г(т) заданной случайной функции и ее произ-  
водной.

Решение. Воспользуемся формулой

*rxi(T)~k’x(x).*

а) Пусть т^0. Тогда |т|=т, Ах(т) = е~т(1 +т), А',(т)=е-Тх  
XI — (1+т)е-т = —те--1. Таким образом, при

г . (т) = —те- х.

*XX '*

б) Пусть т < 0. Тогда |т|=—т, Лх(т) = ет (1—т), кх(х) =—е-1 +  
4- (1—т)ет = — тет . Таким образом, при т< 0

г . (т)=—тет .

***хх* ' *’***

Итак, искомая взаимная корреляционная функция

1ри тг\*0,

. (т) =/ « т щ

“ \ - ‘.те1 щ

***т***

хх ( —‘те'1 при т < 0.

**§ 7. Корреляционная функция интеграла от стационарной случайной функции**

**Теорема. *Корреляционная функция интеграла***

***У* (О = $ *X* (s) *ds от стационарной случайной функции* о**

***равна***

Kyiiu **\*») = S** (tt—r)kx(T)dT— **J** (tt — t^ — x)kx(x)dx + о **0**

**<>**

**+ S(\*»—■(\*) 0**

426

Доказательство. Известно, что корреляционная

**функция интеграла** К(/) = $-X (s)ds **от случайной функ-**

**о**

**ции X (t) равна двойному интегралу от ее корреляцион­ной функции (см. гл. XXIII, § 17, теорема 2):**

л

**Ку** (0> 0) ~ $ 5 **Кх** (^1» ^\*) dsj.

**о о**

**Принимая во внимание, что корреляционная функция стационарной случайной функции зависит только от раз­ности аргументов, т. е. Kx(slt st) = kx(st— st), получим**

**<i**

**о о**

**Вычисление этого интег-  
рала весьма громоздко, по-  
этому ограничимся указани-  
ями: перейти к новым пере-  
менным** X = Ss — Sj, | = Ss-|- SjJ  
**начертить новую область ин-  
тегрирования, ограниченную  
прямыми т = |, т = —**

**т = £ — 2/х, т = —1 + 2/2, и Ж 'ллУУХ 6**

**выполнить интегрирование  
по |. Двойной интеграл по  
области OABD можно вычис-  
лить как разность двойных  
интегралов по областям ОЛС  
и BDC. При интегрирова-  
нии по области ODE переста-**

**вить пределы интегрирования по т и перейти к новой  
переменной х'—— т (рис. 28).**

**Следствие. *Дисперсия интеграла Y (t) =* § *X* (s) *ds***

**о**

***от стационарной случайной функции равна***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (s2 — Sj)dstdst. | |  |
| Т |  |  |
| til | х? У | Кр' |
| \Л \*\*  \ \ |  | У  %\с |
| А | У |  |

Рис. 28

**Dy (/) = 2 $ (/ — т) kx (т) dx.**

**(\*\*)**

427

**Действительно, положив = / в формуле (•), полу чим**

**После приведения подобных членов окончательно имеем**

Пример. Задана корреляционная функция (т) = **1**/(**1**+т\*) ста­ционарной случайной функции X (/). Найти дисперсию интеграла

Заметим, что функция Y (/) не стационарна, так как ее дисперсия не постоянна, а зависит от аргумента /.

§ 8. Определение характеристик эргодических стационарных случайных функций из опыта

**Среди стационарных случайных функций можно выделите класс функции, оценка характеристик которых путем усреднения множества реализаций равносильна усреднению по времени только одной реализации доста­точно большой длительности.**

**Стационарную случайную функцию X (t) называют араодической, если ее характеристики, найденные усред­нением множества реализаций, совладают с соот­ветствующими характеристиками, полученными усредне­нием по времени одной реалйзации \*(/), которая**

428

**/ о**

**Ку (/, о = J «-Г) kx (т) dx** j **(t-t-x) dx +**

***i***

**+ j(\* — \*)\*\* (T)rfT.**





**Решение.** Воспользуемся формулой (\*\*):

i t



**(/—t)<ft l+T\***



Выполнив интегрирование, получим искомую дисперсию: Dv (О « 21 arctg / — In (1 + /\*).

**наблюдалась на интервале (О, Т) достаточно большой длительности.**

**Достаточное условие эргодичности стационарной слу­чайной функции X (О относительно математи­ческого ожидания состоит в том, что ее корреля­ционная функция kx(x) при т—►** оо **стремится к нулю:**

**lim kx (т) = 0.**

Т-\* оо

**Достаточное условие эргодичности стационарной слу­чайной функции X (0 относительно корреляци­онной функции состоит в том, что корреляцион­ная функция ky (т) при т —••** оо **стремится к нулю:**

**lim ky (т) = 0,**

Т—

**где Y (/, т) = X (() X (t + т).**

**В качестве оценки математического ожидания эргоди- ческой стационарной случайной функции X (t) по наблю­давшейся на интервале (0, Т) реализации x(t) принимают среднее по времени ее значение:**

**г**

**= (\*)**

**Известно, что корреляционная функция стационарной случайной функции**

кх(т ) = М[к (f)\*(f + **T)].**

**Таким образом, оценить kx(т) означает оценить мате­матическое ожидание функции к (f) X (f + т), поэтому можно воспользоваться соотношением (\*), учи­тывая, что функция ^(/ + т) определена при / + т^Г и, следовательно, t —т.**

**Итак, в качестве оценки корреляционной функции эргодической стационарной случайной функции принимают**

Г-Т

**= J \*(0x(t + x)dt (\*\*)**

**о**

**либо, что равносильно,**

Г-т

***k\*\*(x)=TZ^*** J ***x(t)x(t+x)dt—*** [my\*. (\*\*\*)

429

**Практически интегралы вычисляют приближенно, на-  
пример по формуле прямоугольников. С этой целью делят  
интервал (О, Т) на п частичных интервалов длиной  
At = Т/п\ в каждом частичном i-м интервале выбирают  
одну точку, например его середину В итоге оценка (\*)  
принимает вид**

***П***

**тп\*х =4'[>(i1) At + x(f2) At + ... +x(i„) Ai] = -y- \*(/,•).**

i= 1

**Учитывая, что At —Т/п, окончательно получим**

**J]**

**Аналогично приближенно вычисляют интеграл (\*\*), полагая, что т принимает значения At, 2At, ..., (п— 1) At, или, что то же, Т/п, 2Т/п, ЗТ/п, (п—\)Т/п. В итоге оценки корреляционной функции (\*\*•) и (\*•\*•\*•) принимают соответственно вид:**

*п—1*

К (l S X Vi) X Vi + l),

' *i=l*

n — l

k\(l = \*('<)\* (\*/+/)—M\*.

**где I = 1, 2, ..., n— 1.**

Замечание. Можно показать, что оценка (\*) — несмещенная, т. е. M\m\*^\ — mx\ оценка (\*\*) — асимптотически несмещенная, т. е.

**lim М [/£(т)] = /гх(т). т —► ® —**

Задачи

1. Является ли стационарной случайная функция X (?) = = t\*U, где U—случайная величина, причем: а) таФ О, б) тв = 0?

Отв. а) Нет: тх (t) Ф const; б) Нет: корреляционная функция зависит не от разности аргументов, а от каждого нз ннх.

1. Стационарна ли случайная функция ЛГ (/) = sin (i -|- q>), где Ф — случайная величина, распределенная равномерно в интервале (О, 2я)?

*Отв.* Да: *тх* (<) = 0 = const, *Кх (ix, fa) = 0,5* cos *(f3*—*ix).*

1. Известно, что если ф — случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0, 2п), то случайная функция X (t) = = ein (^ —f-ф) — стационарная. Можно ли отсюда непосредственно Заключить, что случайная функция У (<)=cos (<-Ьф) также стацио­нарна?

Отв. Можно: изменив начало отсчета аргумента, например на яУ2, стационарной функции X (/), получим функцию У (t).



430

1. Задана случайная функция X (<)= < + U eln <+ V cos t, где U и V—случайные величины, причем М (U) — M (V)=0, D (U)=D (V)—5, M (UV)=0. Доказать, что: а) X (() — нестационарная функция; б) X (t) — стационарная функция.

Отв. а) тх (t)Фconst; б) /я. (/) = const, Кх (tlt /,) = 5cos (/2 — tt).

1. Известна корреляционная функция kx (т) = 3е-\*т" стационар­ной случайной функции X (/). Найти корреляционную функцию слу­чайной функции У (О— БХ (I).

*Отв. kv(x)=75e~ix'.*

в. Задана корреляционная функция kx (т) = 2е-\*х\* стационарной случайной функции X (<)• Найти нормированную корреляционную функцию.

Отв. рх(т) = е-х\

1. Заданы две стационарные случайные функции X (/)=соз (2/-)-ф) и У (<)== sin (2/ + ф), где ф—случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0, 2л). Доказать, что заданные функции стационарно связаны.

Отв. Rxv(ti, f,) = 0,5sin 2 (/\*—<i).

1. Задана корреляционная функция kx (т) = 6е~®’\*х стационарной случайной функции X (<)• Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию производной X' (t) = x.

Отв. а) \*. (т) = 0124e-0•\*г, (1 — 0,4т\*); б) = 0,24.

**а**

1. Задана корреляционная функция Ая(т) = е-Х стационарной случайной функции X (t). Найти взаимные корреляционные функции случайной функции X (/) н ее производной.

Отв. г . (т) =—2те-х\*; т. (т) = 2те-х\

***XX XX* ' '**

1. Задана корреляционная функция йЛ(т) = е“'х' стационарной

***t***

случайной функции X (<). Найти дисперсию интеграла У (0=^ X (s)ds.

о

Отв. D„(0 = 2(< + e-f—1).

**Глава двадцать пятая**

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Представление стационарной случайной функции в виде гармонических колебаний со случайными амплитудами и случайными фазами

**В этой главе вводится новая характеристика стационарной случайной функции—спектральная плот­ность, которая упрощает теоретические и практические**

431

**расчеты. В частности, используя ее, можно найти ха­рактеристики выходной функции стационарной линейной динамической системы по известным характеристикам входной функции (см. § 8).**

**Далее будет показано, что стационарную случайную функцию, вообще говоря, можно представить в виде гар­монических колебаний со случайными амплитудами и случайными фазами.**

1. **Рассмотрим случайную функцию вида**

**Z (t) = U cosa>t + V sin<ot, (\*)**

**где о) — постоянное действительное число; U и V—некор­релированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и одинаковыми дисперсиями: та ~ mv — 0, Da = Dv = D.**

**Преобразуем правую часть соотношения {\*):**

**Z (t) = V cos at sin <otJ.**

**Положив U/V — tg ф и выполнив элементарные выкладки, получим**

**Z (О = Vu\* + V\* sin (at + ф),**

**где ф = arctg (U/V).**

**Отсюда следует, что случайную функцию Z (t) — — U cosat -f-V sin at можно истолковать как гармониче­ское колебание со случайной амплитудой V и2 + V2, случайной фазой to\* + arctg (U/V) и ча­стотой (О.**

**Заметим, что, по допущению, ma = mv = 0, поэтому U и V — центрированные случайные величины: U = U и V—V.**

**Легко убедиться, что mz(t) = 0. Следовательно, Z(t) — центрированная случайная функция:**

***Z(t)^Z(t).***

**Покажем, что Z(t) — U costotf+V sintot— стационарная случайная функция. Действительно, математическое ожи­дание mz(t) — 0, т. е. постоянно при всех значениях аргу­мента. Найдем корреляционную функцию, приняв во внимание, что Z(t) — Z(t):**

***Кг (tt,* /,) = *м* f*Z (U) 1* (/,)] *= M[Z (tt) Z (t,)] =***

**= M [(17 costo^ -f V sin at x) (U cos at2 + V sin <ott)].**

432

**Выполнив элементарные выкладки \*\ получим Kz(tx, t2) = Dcos(t2 — tj.**

**Итак, корреляционная функция случайной функции Z (t) зависит только от разности аргументов, а ее мате­матическое ожидание постоянно. Следовательно, Z (t) — стационарная случайная функция, что и тре­бовалось доказать.**

1. **Рассмотрим теперь случайную функцию X (/), ко­торая является суммой конечного числа слагаемых вида (\*):**

***П***

**х (о = 21 [^icos + v i s>n (\*•\*)**

**IS 1**

**где случайные величины Ux и V,- не коррелированы, их математические ожидания равны нулю и дисперсии вели­чин с одинаковыми индексами равны между собой: D (U,) = D (V/) = D.**

**Заметим, что X (t)— центрированная функция, т. е. X (t) = X ((). Действительно, математическое ожидание каждого слагаемого суммы (\*\*) равно нулю; следова­тельно, математическое ожидание mx(t) этой суммы также равно нулю и, значит,**

***X.{t) = Xit) — mx(t) = X{t).***

**Докажем, что функция X (t) вида (\*\*) — стационар­ная. Действительно, математическое ожидание mx(t) = О при всех значениях аргумента, т. е. постоянно. Кроме того, слагаемые суммы (\*\*) попарно не коррелированы (см. далее пояснение), поэтому корреляционная функция этой суммы равна сумме корреляционных функций сла­гаемых (см. гл. XXIII, § 15, следствие 1 из теоремы 2). В п. 1 доказано, что корреляционная функция каждого слагаемого (\*\*•) зависит только от разности аргументов t2 — Следовательно, корреляционная функция сум­мы (\*\*) также зависит только от разности аргументов:**

***П***

\*t) = До, cos (О, **(tt—** Ох.

\*> При выкладках следует учесть, что, по условию, М (0а) = = М (V2) — D, а так как U — U, V— V, то М (U2) — М (Р2) = D. Слу­чайные величины U и Р не коррелированы, поэтому их корреляци­онный момент = (UV) = M (UV) = 0.

28 2\_,И>

433

**или**

**л**

Мт)=2я, COS ft>(T, (\*#\*)

**(= 1**

**где т = /4—tt.**

**Т аким образом, случайная функция X (t) вида (\*\*) есть стационарная функция (разумеется, должны выполняться условия, указанные в п. 2). Принимая во внимание, что (см, п. 1)**

X, (0 = УЩ + Щsin (о,./ + <р,),

**где ф; — arctg (С/,/К/), заключаем, что сумму (\*\*) можно записать в виде**

**X (0 = gyV} + V\ sin (©,.< + q>,).**

**Итак, *если случайная функция X* (*t*) *может быть пред• ставлена в виде суммы гармоник различных частот со случайными амплитудами и случайными фазами,* то X (t)— *стационарная функция.***

**Спектральным разложением стационарной случайной функции называют представление этой функции в виде суммы гармонических колебаний различных частот со случайными амплитудами и случайными фазами.**

**Пояснение. Покажем, что слагаемые суммы (\*\*) попарно не коррелированы. Для простоты, не теряя общ­ности доказательства, ограничимся двумя слагаемыми:**

**Хг (t) = Ut cos g>i/ + Vt sin и Xt (t) = Ut cos + Vt sin <att.**

**Убедимся, что их взаимная корреляционная функция равна нулю и, следовательно, они не коррелированы (см. гл. XXIII, § 12):**

**(\*lf \*,) = М [X, (tx) X, (\*,)] - М [X, (tj X, (/,)] =**

**= М [(C/1cosco1<1 + V,1sinco1<1) (С/2соз<й^, + У4$тсо,^)].**

**Выполнив умножение и вынеся неслучайные множители за знак математического ожидания, найдем**

**\*« (^i\* ^«) ~ cos ш1^1cos ш»\*\***

***M{UlU2) +***

**+ sin «Vi cos ,М (f/aV,1) + sin <»2/g cos (t/^,) -j- + sin sin g)jttM (V^Vj).**

434

**Случайные величины Ult U2, Vlt Vt попарно не корре- лированы, поэтому их корреляционные моменты равны нулю; отсюда следует, что все математические ожидания парных произведений этих величин равны нулю. Напри­мер, корреляционный момент величин иг и Ut равен нулю: PulUj = М (и** 1**#2) = 0; так как эти величины центрирован­ные (см. п. 1), то М — 0.**

**Итак, взаимная корреляционная функция RXtx,{tlt tг) = = 0, что н требовалось доказать.**

**§ 2. Дискретный спектр стационарной случайной**

**функции**

**А. Частоты — произвольные числа, количество их конечно. Пусть стационарная случайная функция X (t) может быть представлена в виде спектрального разло­жения**

*п п*

**X(t)=** **2\*»(0** = Stf/fCoso^ + ^.sin©,.\*], (\*)

t=i i=i

**причем сохраняются допущения, указанные в начале п. 2 (см. § 1). Найдем дисперсию одной гармоники X,- (/), учитывая, что случайные величины Ut и Vt не коррели­рованы и дисперсии величин с одинаковыми индексами равны между собой: D ((/,•) = D (Vf) = £>,■:**

**D [X, «)] = D [Ui cos (d;t + Vi sin (o,<] = D [{/,• cos to^] -f- -j- D [К,- sin а)(Л] = cos2 toftD (Ui) + sin2 <off D (1Л) =**

**= (cos2 (Hit + sin2 io(/) £>,- =**

**Итак,**

**O[Xf(0]** = O,.. (\*\*)

**Таким образом, дисперсия t'-й гармоники спектраль­ного разложения (\*) равна дисперсии случайной вели­чины Uit или, что то же, дисперсии случайной величины К,-.**

**Найдем теперь дисперсию стационарной случайной функции X (/), приняв во внимание, что слагаемые X, (t) не коррелированы (см. § 1) и поэтому дисперсия их суммы равна сумме дисперсий слагаемых (см. гл. XXIII, § 15, замечание 2):**

**D [X (0] = D Г S X,. (о1 =ЕО[Х; (\*)].**

L\* = 1 J i = l

435

**Используя (\*\*), окончательно получим**

D [\*(/)] =2 д..

**Итак, дисперсия стационарной случайной функции, которая может быть представлена в виде суммы конеч­ного числа гармоник с произвольными частотами, равна сумме дисперсий составляющих ее гармоник.**

**Дискретным спектром стационарной случайной функ­ции X (t) вида (\*•) называют совокупность дисперсий всех составляющих ее гармоник.**

**Заметим, что поскольку каждой частоте со,- можно поставить в соответствие дисперсию Д, то спектр можно изобразить графически: на горизонтальной оси отклады­вают частоты со,-, а в качестве соответствующих ординат (их называют спектральными линиями) строят диспер­сии Д. Этот дискретный спектр называют линейчатым.**

Пример. Построить дискретный спектр стационарной случайной функции

*X (t) = [Ul* cos *2t + Vi* sin *2/]-\-[Uz cos 3/* -j- *Vt* sin -f- *[Ua* cos *At* + *Va* sin 4/],

если случайные величины Ui, U2, Ua\ Vt, Va, Va не коррелировакы, их математические ожидания равны нулю и заданы дисперсии: D(U1) = D(V1) = 5, D(Ua) = D(Va) = 6, D (Ua) = D (Va) = 4.

Решение. Отложив на горизонтальной оси частоты <ot = 2, й»з = 3, и3 = 4, а на вертикальной оси — соответствующие им ординаты Д = 5, Da — 6, Da = 4. получим график искомого спектра.

**Б. Равноотстоящие частоты, множество их бесконеч­ное (счетное). В предыдущем пункте предполагалось, что число частот в спектральном разложении (\*) конечно, а сами частоты—произвольные числа. Теперь рассмотрим спектральное разложение вида**

**00**

**X (t)— 2 [ Д cos+ V{ s'n**

**(= i**

**в котором число частот бесконечно (счетно), они**

**равноотстоящие, причем разность любых двух «со­седних» частот**

**Дсо = со,-+1—о>,- = п/Т (t = 1,2,...),**

**где Т —действительное положительное число.**

**Таким образом,**

п 2л Л(

«■>1 **"j-** 1 **®i г ’ ■ ■ ■ \* т ' " ’ ’**

436

**Напишем корреляционную функцию [см. § 1, фор­мула (\*•\*\*)] рассматриваемой стационарной случайной функции X (/), положив to,’ = ni/T, п = оо:**

СО

k\* (t) = 2,D,cos-^-t. (\*)

**При т = 0, учитывая, что kx(0) = DX, получим**

**А<= 2 А- (\*\*)**

**1= 1**

**Итак, дисперсия стационарной случайной функции, которая может быть представлена в виде суммы беско­нечного (счетного) множества гармоник с равноотстоя­щими частотами, равна сумме дисперсий слагаемых гармоник (если сумма существует, т. е. ряд (\*\*) сходится).**

**Заметим, что соотношение (\*) можно рассматривать**

**как разложение корреляционной функции в ряд Фурье**

**по косинусам. Из (\*•) видно, что kx (т) — периодическая функция с периодом 2Т, поэтому коэффициенты Фурье**

***т***

**Dt = ~ ^ kx (т) cos Цг т dx,**

**или, учитывая, что (о,= ш'/Т и подынтегральная функ­ция— четная,**

**>г**

***Dj = y- ^ kx* (т) cos (**0**/т *dx.* о**

**Если каждой частоте o>; — ni/T (t = l, 2, ...) ставить в соответствие дисперсию D,-, то получим, как и в случае конечного числа произвольных частот, дискретный линейчатый спектр, причем число спектральных линий (ординат D,) бесконечно (счетно) и они равно­отстоящие (соседние спектральные линии находятся одна от другой на одном и том же расстоянии Ды — я/Т).**

**§ 3. Непрерывный спектр стационарной случайной функции. Спектральная плотность**

**Среди стационарных случайных функций есть такие функции, корреляционные функции которых нельзя представить в виде**

**kx (т) = 2 A cos №/т (А > 0),**

437

**где число слагаемых конечно или счетно. Спектр этих функций не дискретный, а непрерывный. Для рассмот­рения стационарных случайных функций с непрерывным спектром необходимо ввести понятие спектральной плот­ности.**

**Выше, когда частоты гармоник спектрального разло­жения стационарной случайной функции были дискрет­ными и равноотстоящими, был получен дискретный ли­нейчатый спектр, причем соседние частоты отличались на величину Дсо = п/Т. Пусть Т—►оо, тогда До»—\*-0. Ясно, что при этом частота изменяется непрерывно (по­этому обозначим ее через со без индекса), соседние ординаты спектра сближаются и в пределе вместо дискретного спектра мы получим непрерывный спектр, т. е. каж­дой частоте <о (о) ^ 0) соответствует ордината, которую обозначим через s\*x (со).**

**Хотя отрицательные частоты физического смысла не имеют, для упрощения вычислений целесообразно считать, что частоты изменяются в интервале (—оо, оо), и вместо функции sj(co) рассматривать функцию, которая имеет вдвое меньшие ординаты:**

**Спектральной плотностью стационарной случайной функции X (/) называют функцию ях(со), которая связана с корреляционной функцией kx(r) взаимно обратными преобразованиями Фурье:**

**Эти формулы называют формулами Винера — Хинчина. В действительной форме они представляют собой взаимно обратные косинус-преобразования Фурье:**

**s\*(co) = s\*(co)/2.**



— 00

**00**

\*\*(\*) = S sx (со) eim/dco.

**(\*\*)**

— **00**

**00**



**00**



**(\*\*•\*\*•)**

438

**Важное значение спектральной плотности состоит в том, что, зная ее, можно найти корреляционную функ­цию, и обратно (в этом смысле спектральная плотность и корреляционная функция эквивалентны); кроме того, как уже было указано, использование спектральной плот­ности в ряде случаев значительно упрощает теоретические и практические расчеты.**

**Подчеркнем, что, как следует из формулы (\*\*\*), спек­тральная плотность—четная функция:**

**«\*(—(й) = 5\* (ю).**

**Выясним вероятностный смысл функции sx(co). Поло­жив т = Ов соотношении (\*\*\*\*•) и учитывая, что kx(Q)~Dx, sx(<a) — четная функция, получим**

**со оо**

**Dx = 2 J sx (ю) dio = ^ sx(co)da>.**

О — оо

**Видим, что дисперсия стационарной случайной функ­ции X (t) представляет собой «сумму» элементарных дис­персий sx (ю) dct> = sx (ю) Дю; каждая элементарная диспер­сия соответствует частичному интервалу частот Дю. В частности, частичному интервалу Дю —<ой—юЛ соответ­ствует дисперсия**

**А\*= $ sx(co)d<o.**

**По теореме о среднем,**

**&\*= (<\*ь—“«) (“\*) = Д“5Х (юе),**

**где юа < юе < ю6.**

**Отсюда**

**sx (юс) = £>Х/Дю.**

**Из этой формулы заключаем:**

**а) величину sx (юс) можно истолковать как среднюю плотность дисперсии на частичном интервале Дю, содержащем частоту юс;**

**б) при Дю —>- 0 естественно считать, что sx (юс) — плот­ность дисперсии в точке юе. Поскольку никаких ограничений на частоту юс наложено не было, получен­ный результат справедлив для любой частоты.**

439

**Итак,** спектральная плотность описывает распределе­ние дисперсий стационарной случайной функции по не­прерывно изменяющейся частоте. **Из вероятностного смысла спектральной функции сле­дует, что спектральная плотность — неотрица­тельная фуНКЦИЯ**

Пример 1. Найти спектральную плотность стационарной случай­ной функции X (/), зная ее корреляционную функцию

Интегрируя по частям, окончательно получим искомую спектраль­ную плотность:

sx (ш) = sin2 <о/(пи>2).

Пример 2. Найти спектральную плотность стационарной случай­ной функции X (/), зная ее корреляционную функцию kx (т) = De~“ 1 т1, а > 0.

Решение. Используем формулу

Учитывая, что |т| = — т при т < 0, |т|=т при т^О, получим kx(i)=Deax при т < 0, kx(x) — De~ax при тЭ=0. Следовательно,

Выполнив интегрирование, найдем искомую спектральную плот­ность:



при |т|<2, при |т| >2.

Решение. Используя формулу

**СО**



н учитывая, что |т| = т в интервале (0, 2), имеем

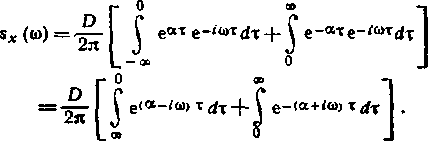
2



оо



— 00



\*\* ^ **я** (а\* а»\*) ‘

440

Пример 3. Найти корреляционную функцию стационарной случай­ной функции X (t), зная ее спектральную плотность

в интервале —

вне этого интервала.

Решение. Используя формулу

kx (т) = 2 ^ sx (ю) cos сот dx

***о***

и учитывая, что sx(co) —со0 в интервале (0, со0). имеем

кх (т) = 2s0 ^ cos сот dx. о

Выполнив интегрирование, получим искомую корреляционную функцию:

kx (т) =2s„ sin со0т/т.

**§ 4. Нормированная спектральная плотность**

**Наряду со спектральной плотностью часто исполь­зуют нормированную спектральную плотность. Нормированной спектральной плотностью стационар­ной случайной функции X (t) называют отношение спек­тральной плотности к дисперсии случайной функции:**

**00**

норм (®) = ~ \*\* (®)| ^ d(a-

— 00

Пример. Задана спектральная плотность sK (ю) = 5/(я (1 стационарной случайной функции X (t). Найти нормированную спек­тральную плотность.

Решение. Найдем дисперсию:

о„\_ ] ■.<»)\*•=-!■ ] ттг?=1-—5-

— ао — оо

Найдем искомую нормированную спектральную плотность, для чего разделим заданную спектральную плотность на дисперсию Dx =5; в итоге получим

\*\* .ори (Ш) = 1/(я (1 +0»\*)).

**Нормированная спектральная плотность представима в виде косинус-преобразования Фурье нормированной корреляционной функции:**

**со**

S\* норм (се) = — у рж (т) COS сот dr.

441

**Действительно, чтобы получить эту формулу, достаточно разделить на Dx обе части соотношения (\*\*\*) (см. § 3).**

**В свою очередь, нормированная корреляционная функ­ция выражается через нормированную спектральную плот­ность при помощи обратного преобразования Фурье:**

00

**Р\* СО = 2 5 s\* норн (а>) cos сот dco.**

**О**

**В частности, положив т = 0 и учитывая, что рх(0)=1, получим**

Ф 00

2 ^ норм 1» ИЛИ ^ $х норм (®) = 1 •

О — 00

**Геометрически этот результат означает, что площадь, ограниченная снизу осью Осо и сверху кривой sXHOpM(co), равна единице.**

§ 5. Взаимная спектральная плотность стационарных и стационарно связанных случайных функций

**Пусть X (t) и У (0—стационарные и стационарно связанные случайные функции со взаимной корреляцион­ной функцией rxv(т).**

**Взаимной спектральной плотностью двух стационар­ных и стационарно связанных случайных функций X (t) и Y (0 называют функцию sxu( со), определяемую преобра­зованием Фурье:**

**AD**

**s\*v (“) =“ i J r\*v we\_iwt dx\***

— Ф

**В свою очередь, взаимная корреляционная функция выражается через взаимную спектральную плотность с помощью обратного преобразования Фурье:**

**00**

***г\*и(г)=* S *sxu(a>)e‘«”d<o.***

— CD

Пример. Задана корреляционная функция kx (т) стационарной случайной функции Х(1). Найти: а) взаимную корреляционную функ­цию; 6) взаимную спектральную плотность случайных функций X (/)

**иГ(0=Х(\* + /о).**

442

Решение, а) Легко убедиться, что Y (t) — стационарная функ-  
ция. Найдем взаимную корреляционную функцию:

Rxy = M [X (/J (/\*)] = M [X (tt) X (\*, + /,)] =

— kx [(\*l + ^o) — ^ll —kx (t + /q).

Отсюда видно, что стационарные функции X (t) и Y (/) стационарно  
связаны (их взаимная корреляционная функция зависит только от  
разности аргументов т).

б) Найдем взаимную спектральную плотность:

00

**sxy(u>)=~~ £ Мт-Ио)в-;т^т =**

— 00

CD

= e'®,\*J- ^ \*x(T + fo)e-,'“(T+'\*)d(T + /0> = e;,B'\* sx(<\*).

— <30

Итак, искомая взаимная спектральная плотность  
sxy (со) = е1С0(» sx (со).

§ 6. Дельта-функция

**Дельта-функция 6 (/) является примером обобщен-  
ной функции (обобщенная функция—предел последова-  
тельности однопараметрического семейства непрерывных  
функций). Дельта-функцию определяют тем условием, что  
она ставит в соответствие всякой непрерывной функции  
f(t) ее значение при \* = 0:**

00

S 8(0/(0<И = /<0).

— се

**Правую часть равенства можно представить в виде пре-  
дела:**

а 8 <30

1!3?я J f<o\*=ljS S \*•«)/«)\* <«>о).

**—е -ао**

**где**

Г **\ 1/**

**при|^|>е,**

**JeK4 • 1/(2е) при |<|<в.**

**Таким образом, дельта-функцию можно рассматривать как предел последовательности функций 6е (t) при е—»-0. Учитывая, что б8 (()—\*-0 при 1фЬ, 6e(t)—\*oo при**

Г 1 ,

**t—\*-0 и }** 2**ъ™=**1**, Условн° пишут**

**0 при t=**

**оо при t = 0.**

**( 0 при 1ф 0,**

**«(ОН**

**( ос**

443

**Физически дельта-функцию можно истолковать как плотность единичной массы, сосредоточенной в нуле.**

**Можно- доказать, что дельта-функция представима ин­тегралом Фурье:**

CD

**6 (0 =**2**^ ^ e“»'dco.**

* оо

**Отсюда**

**со**

**J е1й>'dco = 2я 6 (\*). (\*)**

— ао

Замечание. В приложениях часто используют соотношение 00

5 /(/> **в(\*-л,)=/('<>).**

— 00

которое вытекает из сказанного выше.

**§ 7. Стационарный белый шум**

**Стационарным белым шумом называют стацио­нарную случайную функцию X (t), спектральная плотность которой постоянна:**

**sx (со) — s = const.**

**Найдем корреляционную функцию белого шума. Исполь­зуя формулу (\*\*) (см. § 3)**

00

**\*\*(т) = § sx(co) e'®Tdco,**

— 00

**получим**

00

**kx (т) = s § el<BTcfco.**

* CD

**Приняв во внимание, что [см. § 6, соотношение (\*)]** 00

**§ eland<o = 2я6 (т),**

— 00

**окончательно имеем**

**kx (т) = 2я®б (т). (\*\*)**

**Таким образом, корреляционная функция стационар­ного белого шума пропорциональна дельта-функции; коэф­фициент пропорциональности 2л® называют интенсив­ностью стационарного белого шума.**

444

**Дельта-функция равна нулю при всех значениях т^О, поэтому и корреляционная функция kx(r) также равна нулю при этих же значениях т [это видно из формулы (\*\*)]. Равенство же нулю корреляционной функции стационар­ного белого шума означает некоррелированность любых двух его сечений—случайных величин X (t J и X (tt) Благодаря этой особенности белый шум находит широ­кое применение в теории случайных функций и ее при­ложениях. Однако эта же особенность указывает на то, что осуществить белый шум невозможно, так как в дей­ствительности при очень близких значениях tt и tt соот­ветствующие случайные величины X (ft) и X (tt) в извест­ной степени коррелированы.**

**Таким образом, стационарный белый шум — математи­ческая абстракция, полезная для теории случайных функ­ций и ее приложений. В частности, белый шум исполь­зуют для моделирования случайных процессов, которые имеют постоянную спектральную плотность в опреде­ленном диапазоне частот, причем поведение спектральной плотности вне его исследователя не инте­ресует.**

Пример. Спектральная плотность стационарной случайной функ­ции X (О постоянна в диапазоне частот (— ю0> u>0), а вне его равна нулю:

Найти: а) корреляционную функцию; 6) дисперсию случайной функ­ции X (О-

Решение, а) Найдем искомую корреляционную функцию:



kx (т) = V s cos ondci> = 2s \ cos mda>

2s sin {р„т т

**0**

Итак,

**^w=2£sirLca2T**

б) Найдем искомую дисперсию:

DK = lim kx (t) = lim 2s ain ~2s«>, lim

Л \ •/ ——в

г-\*# г-\*\* T t-»

**т-e авт**

**l.m^^**

=2so»e.

Итак,

Dx =2 sa»0.

445

**§ 8. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой**

**Стационарной линейной динамической системой называют устройство, которое описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффи­циентами вида**

**а0К‘"> (0 + (0 + ... + anY (t) =**

**= *Ь„Х™ (t)* + *ЬгХ^-" (t)* + ... + *bmX (t),* (\*)**

**где X (t) — входная стационарная случайная функ­ция (воздействие, возмущение), У (t) — выходная случай­ная функция (реакция, отклик).**

**Если динамическая система устойчива, то при доста­точно больших значениях t, т. е. по окончании переход­ного процесса, функцию Y (t) можно считать стационарной. Подчеркнем, что при дальнейшем изложении предпола­гается, что X(t)nY(t) — стационарные случайные функции.**

**Поставим перед собой задачу найти характеристики выходной функции по известным характеристикам вход­ной функции.**

**Найдем математическое ожидание ту, зная тх, для чего приравняем математические ожидания левой и правой частей уравнения (\*). Учитывая, что X(t) и Y (t) — ста­ционарные случайные функции, а значит, математические ожидания производных этих функций равны нулю, по­лучим**

апту **=** Ь™тх- **Отсюда искомое математическое ожидание**

***ту — Ьттх/ап.* (\*\*)**

Пример 1. На вход линейной 'Динамической системы, описываемой уравнением

*Y\* (()* + *2Y (()* = *5Х‘ (О* + *6Х ((),*

подается стационарная случайная функция X (t) с математическим ожиданием тх — 10. Найти математическое ожидание случайной функ­ции Y (t) на выходе системы в установившемся режиме (после зату­хания переходного процесса).

Решение. Используя формулу (\*\*), получим

ту — Ьттх/ап = (6/2) • 10 = 30.

**Введем понятия передаточной функции и частотной характеристики, которые понадобятся далее. Предвари­**

446

**тельно запишем уравнение (\*) в операторной форме, обо­значив оператор дифференцирования через р, ^ — через р\* и т. д. В итоге уравнение (\*) примет вид {а0рп + а1рп~1 + ...+а„) У (t)=.**

***= (bapm+biPm-'+...+bm)X{t). {\*\*\*)***

**«Решим» это уравнение относительно Y (/):**

*Ь0р’\* + Ь1рт-'+ ... +Ьт* у *,,,* /\*\*\*\*\

*r V>- а0р“ + а1Р«-\*-+* ... +ал *1)ш ( \**

**Передаточной функцией линейной динамической си­стемы называют отношение многочлена относительно р при X (t) к многочлену при Y (t) в операторном уравне­нии (\*\*\*):**

ГгЛ *b0pm+bj.pm-l+*... *+ЬМ ^УР>- а0рп+а1рп-1+...+ап* •

**Из соотношения (\*\*\*\*) следует, что выходная и вход­ная функции связаны равенством**

**к(0 = Ф(р)Х(0.**

**Частотной характеристикой линейной динамической системы называют функцию, которая получается заменой аргумента р в передаточной функции на аргумент ico (со—действительное число):**

**а,(/«\*)» + «!(/©)"-!+... +а„ \***

**Доказано, что спектральные плотности выходной и входной функций связаны равенством**

s „(о>) = **s**\* (со) | Ф **(id))** |\*.

**Отсюда заключаем: *для того чтобы найти спектраль­ную плотность выходной функции, надо умножить спект­ральную плотность входной функции на квадрат модуля частотной характеристики.***

**Зная же спектральную плотность выходной функции, можно найти ее корреляционную функцию [§3, форму­ла (\*\*)]:**

**00**

Мт)= S Sy (ю) е'<"сйй,

**— 00**

447

а следовательно, и дисперсию:

00

Dy = kv (°) = S sy (“)

— 00

Пример 2. На вход линейной стационарной динамической систе­мы, описываемой уравнением

ЗУ"(/) + У<0 = 4\*'(/) + \*(/),

подается стационарная случайная функция X (I) с корреляционной функцией kx (т) = 6е~ 2 I т I. Найти дисперсию случайной функции К (/) на выходе системы в установившемся режиме.

Решение 1. Найдем спектральную плотность выходной функ­ции. Используя решение примера 2 (см. § 4) при Р — 6 и а = 2, получим

Ра 6-2 12

sx (® я (со2 + а2) я(со2+4) я(со2+4)‘

1. Найдем передаточную функцию, для чего напишем заданное уравнение в операторной форме:

(Зр + 1) К (/) = (4р+!)\*(/).

Отсюда

**|'<'>=5+т-х<'>-**

Следовательно, передаточная функция

1. Найдем частотную характеристику, для чего заменим в пере­даточной функции аргумент р на ш:

**Ф(4т)= «“±!\_. v** ' **3«со+1**

1. Найдем спектральную плотность выходной функции, для чего умножим спектральную плотность входной функции на квадрат мо­дуля частотной характеристики:

, , , 42 12 14\*0» Н-1 |“ 12 16о)24~ 1

**«1,(®)-«\*(®)|Ф('®)1 —я({02 + 4) |3,щ+1 |2 я(ш2 + 4) ‘ 9й)2+1 •**

1. Найдем искомую дисперсию:

Г- J2 С (16<o2+l)d(o 24 Г (16o)2+I)do)

Ру— j Sj,(co)dco— п J (ш\* + 4)(9со2+1) — п J (й)2 + 4)(9{02+1) •

**— ОО — 00 О**

Представим подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей:

24 Г 81 Г da> 1 Г do> J **L5^0)2+4 5s9+,J**

448

Выполнив интегрирование, получим искомую дисперсию:

*Dy —96,4.*

Задачи

1. Найти дисперсию стационарной случайной функции X(t),

, , 6

аная ее спектральную плотность s,(со) =—-гг—,—sr.

\* ' я(1 + со2)

*Отв. Dx—6.*

1. Найти спектральную плотность стационарной случайной функ-  
   ции X (/), зная ее корреляционную функцию

**1**

= 1 3 Iх' "Р" **1х1<3-**

I 0 при | т | >3.

\_ 2 sin\* (Зсо/2)

Отв. 5ж(ш) = у,\*' а •

\* Злсо2

1. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции  
   Х(/), зиая ее корреляционную функцию <г\*(х)=5е-81т1.

Отв. s\* (со) =10/(я (4 +со2)).

1. Задана спектральная плотность s\* (со) = 6/(л (1 + со\*)) стацио-  
   нарной случайной функции X (/). Найти нормированную спектральную  
   плотность.

Отв. sx „орм (®) = I /(я (1 + и\*)).

1. Найти корреляционную функцию стационарной случайной  
   функции X (/), зная ее спектральную плотность

8Х (СО) = •/

I О вие этих интервалов.

s0 в интервалах (—4со0, —2о»0) и (2ш0, 4со0),

ви<

2 s„

Отв. kx(i) — sin со0х (2 cos 2со0х— I).

в. Спектральная плотность стационарной случайной функции X (/) постоянна в диапазоне частот (соь со2), а вие его равна нулю:

**I о**

при СО < C0t

\*\*(<»)={ \* при С0,< <0 < со„

при со > со,.

Найти: а) корреляционную функцию; б) дисперсию; в) нормированную корреляционную функцию случайной функции X (/).

п , . , , , ein со3т —sin со.т

б) Dx = s((o2 — 01); в) рх (х) = —т (щ йх) '

1. На вход линейной стационарной динамической системы, опи­сываемой уравнением

К1 (0 + 3У (0 = \*' (0 + 4X(t),

подается стационарная случайная функция X (I) с математическим ожиданием тя = 6 и корреляционной функцией \*х(х) = 5е-2 Найти

29- 2730 449

математическое ожидание и дисперсию случайной функции У (/) иа выходе системы в установившемся режиме.

*Отв.* т„ = 8; *Dy — 22/3.*

1. На вход линейной стационарной динамической системы, описы­ваемой уравнением

Y'(t) *+* bY‘ (<)+6Г (0 = \*й *(l)* + X(t),

подается стационарная случайная функция X (t) с математическим ожиданием тх = 4 и корреляционной функцией kx (т) = е“,т'. Найти математическое ожидание и спектральную плотность случайной функции К (<) на выходе системы в установившемся режиме.

**/О 2 / ч 1 1**

Отв. ту— 3 , sy(о) — я 25ш2 + (6 —ш2)2'

9\*. На вход линейной стационарной динамической системы, описы­ваемой уравнением

У‘“ (0 + GY\* (04- ЧУ' (0 + 6У (0 = ТХ'" (0 + 5Х(0,

подается стационарная случайная функция X (t) с известной корре­ляционной функцией kx (т) = 2e“l't I (I +| т |). Найти спектральную

плотность случайной функции Y (t) на выходе системы в установив­

шемся режиме.

Указание. Разложить иа линейные множители знаменатель передаточной функции: р3+6р2+ 1 lp + 6 = (p+ I) (р + 2) (р + 3).

Отв. sv (со) = 4 (49сов + 25)/(я (со2 + 1 )3 (со2 + 4) (со2 + 9)).

1. На вход линейной стационарной динамической системы, опи­сываемой уравнением Yl (t)-\-Y (t) — X (t), поступает случайная функ­ция X (/) с постоянной спектральной плотностью s0 (стационарный белый шум). Найти дисперсию случайной функции У (/) на выходе системы в установившемся режиме.

*Отв. D — s0n.*

ДОПОЛНЕНИЕ

А. Пример расчета многоканальной системы массового обслуживания с отказами методом Монте—Карло

**Пусть в систему массового обслуживания с отка­зами (заявка покидает такую систему, если все каналы заняты), состоящую из N каналов, поступает простейший поток заявок (см. гл. VI, § 6), причем плотность распре­деления промежутка времени между двумя последова­тельными заявками задана:**

/ (Т) = Ье-к (\ > О, О < т < оо).

**Каждая заявка поступает в первый канал. Если пррвый канал свободен, то он обслуживает заявку; если первый канал занят, то заявка поступает во второй канал, обслу­живается им (если канал свободен) или передается в тре­тий канал (если первый и второй каналы заняты) и т. д.**

**В случае, если в момент поступления заявки все ка­налы заняты, наступает отказ, т. е. поступившая заявка не обслуживается и из дальнейшего рассмотрения исклю­чается.**

**Ведется подсчет числа обслуженных заявок и числа отказов. Если заявка обслужена, то в «счетчик обслу­женных заявок» добавляют единицу; при отказе единицу добавляют в «счетчик отказов».**

**Ставится задача: найти математические ожидания**

**числа обслуженных заявок и числа отказов за заданное время Т. Для решения этой задачи производят п испы­таний, каждое длительностью Т, и определяют в каждом испытании число обслуженных заявок н число отказов.**

**Введем обозначения:**

**\*обсл—длительность обслуживания заявки каналом; ti—момент освобождения i-ro канала;**

**Tk — момент поступления k-й заявки; тА—длительность времени между поступлениями &-й и (/г + 1)-й заявок; Tk+x — Tk + ik—момент поступления (&+1)-й заявки, п — число испытаний.**

**Пусть первая заявка поступила в момент 7\ = 0, когда все каналы свободны. Эта заявка поступит в первый**

29\*

451

**канал и будет им обслужена за время /обсд. В счетчик обслуженных заявок надо записать единицу.**

**Разыграем момент 7% поступления второй заявки, для чего выберем случайное число г, и разыграем Tj (учиты­вая, что т распределено по показательному закону) по формуле (см. гл. XXI, § 7, пример 2)**

Tt = — **(1Д)1пг1.**

**Следовательно, вторая заявка поступит в момент времени Г, — ^,1 + т1 = 0 + т1 = т1.**

**Если окажется, что t1^Ti (вторая заявка поступила . после того, как первый канал освободился), то вторая заявка будет обслужена первым каналом и в счетчик обслуженных заявок надо добавить единицу.**

**Если же окажется, что tt > Tt, то первый канал занят, и заявка поступит во второй канал и будет им обслужена, поскольку расчет начат в предположении, что все каналы свободны; в счетчик обслуженных заявок надо добавить единицу.**

**Дальнейший расчет производится аналогично. Если в некоторый момент времени поступления очередной заявки все каналы заняты, то наступает отказ и в счетчик отказов надо добавить единицу.**

**Испытание заканчивается, если очередная заявка по­ступит в момент времени, превышающий момент окончания испытания, т. е. если Тк+1>Т.**

**В итоге i-ro испытания в счетчиках окажутся соот­ветственно число обслуженных заявок** Mio6**сл и число отказов MiorK.**

**Пусть произведено всего п испытаний, каждое длитель­ностью Т, причем & i-м испытании зарегистрировано ж,обсл обслуженных заявок и л10тк отказов. В качестве оценок искомых математических ожиданий принимают выборочные средние:**

2 **м< обед** 2 **м‘ <**

—. M\*E\*OTJ= —

**Для вычисления наименьшего числа испытаний, кото­рые с надежностью у обеспечат наперед заданную верхнюю**

452

**границу ошибки 6, можно использовать формулу (см. гл. XVI, $ 16, аамечание 2)**

**/\*и\***

**П"“”8Г»**

**где / находят по равенству Ф (/) = у/2, о =\* 1А (см. гл. XIII, § 3).**

**Пусть, например, известны среднее квадратическое от­клонение о -= 4 и у\* 0,95, 6 «\* 0,7. Тогда Ф (/) = 0,95/2 «=\* -0,475 и /«1,96.**

**Минимальное число испытаний**

\_ <\*о» 1,96». 4»

n~‘~Sr ~oJr~ 126-

**Предполагалось, что время обслуживания — неслучай­ная величина; если время обслуживания случайно, то расчет производится аналогично. Разумеется для разы­грывания случайного времени обслуживания надо задать законы его распределения для каждого канала.**

**На практике расчет производят ЭВМ.**

Б. Применение метода Монте — Карло к вычислению определенных интегралов

**Приведем один из способов вычисления опре­деленных интегралов методом Монте—Карло—способ усреднения подынтегральной функции.**

**Требуется найти оценку определенного интеграла**

**/ \*= J <р (x)dx. Рассмотрим случайную величину X, распре-**

Я

**деленную равномерно в интервале интегрирования (а, b) с плотностью f (х) = 1/(6—а). Тогда математическое ожи­дание**

**» »**

**М [<р (X)] = j ц> (х) / (х) dx « j ч> (х) dx.**

а я

**Отсюда**

**$ ф (х) dx = (6—о) • М [ф (х)].**

**Заменим математическое ожидание М [ф (X)] его оцеи-**

463

**кой—выборочной средней, получим оценку** II **искомого интеграла:**

2 я> (\*«■>

***П = ф-а)-^-п*** ,

**где Xt—возможные значения случайной величины X. Так как величина X распределена равномерно в интер­вале (о, Ь) с плотностью /(х)=1/(6—а), то х,- разыгры-**

ъ

**вают по формулеdx = г{ (см. гл. XXI, § 7, пра-**

***а***

**вило 2). Отсюда *xt — a + {b—а) г,-.***

Пример. Найти;-, а) оценку /\* определенного интеграла I =

з

= ^ (х+1) dx\ б) абсолютную погрешность |/ — /I |; в) минимальное I

число испытаний, которые с надежностью у = 0,95 обеспечат верхнюю границу ошибки 6=0,1.

Решение. Используем формулу

2 (\*<)

***1\^ф-а).^~*** .

По условию а=1, Ь = 3, «р (х) = х-J-1. Примем для простоты число испытаний о=10. Тогда оценка

**Ю 10**

**2 (\*/+') 2<х«-+1>**

**/;=<—=2\*-^то—•**

Результаты 10 испытаний приведены в табл. 36. Случайные числа взяты из приложения 9 с тремя зиакамн после запятой.

Таблица 36

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер ис­пытания i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Г{ | 0,100 | 0,973 | 0,253 | 0,376 | 0,520 | 0,135 | 0,863 | 0,467 | 0,354 | 0,876 |
| 2 г{ | 0,200 | 1,946 | 0,506 | 0,752 | 1,040 | 0,270 | 1,726 | 0,934 | 0,708 | 1,752 |
| \*1 = 1 + + 2 п | 1,200 | 2,946 | 1,506 | 1,752 | 2,040 | 1,270 | 2,726 | 1,934 | 1,708 | 2,752 |
| ф(\*/) = =х,+ 1 | 2,200 | 3,946 | 2,506 | 2,752 | 3,040 | 2,270 | 3,726 | 2,934 | 2,708 | 3.752 |

Сложив числа последней строки таблицы, находим У, ф (х,) =29,834.

454

Искомая оценка интеграла

/’ = 2 ■ (29,834/10) = 5,967.

б) Найдем абсолютную погрешность, приняв во внимание, что 3

**/= ^ (\* + 1)Ле = 6:**

| / — /Г | = 6 — 5,967 = 0,033.

в) Найдем дисперсию усредняемой функции <р (X) = Х+ 1, учи-  
тывая, что случайная ьеличина X в интервале интегрирования (1,3)  
распределена равномерно и ее дисперсия D(X) = (3—1)\*/12=1/3  
(см. гл. XII, § 1, пример 2):

o\*=D(X-f l) = D(X) = l/3.

г) Найдем минимальное число испытаний, которые с надеж-  
ностью 0,95 обеспечат верхнюю границу ошибки 6 = 0,1. Из равен-  
ства Ф (/) =0,95/2 = 0,475 по таблице приложения 2 находим \* = 1,96.  
Искомое минимальное число испытаний

/аоа 1,96®. (1/3)

**6а . 0,1а**

128.

В. Примеры случайных процессов

1. **Процесс Пуассона. Рассмотрим простейший поток случайных событий, наступающих в интервале времени (0, t). Напомним свойства простейшего потока (см. гл. VI, § 6):**
2. **стационарность (вероятность появления k событий за время t зависит только от А и /);**
3. **отсутствие последействия (вероятность появления k событий в течение промежутка времени (Т, T-\-t) не зависит от того, сколько событий и как появлялось до момента Ту,**
4. **ординарность (вероятность появления более одного события за малый промежуток времени At есть бесконечно малая более высокого порядка, чем At, т. е.**

***Pk>1(At) = o(At),* где lim 2^ = 0.**

**д/ -\*• о**

**Поставим своей задачей найти вероятность Рк (t) по­явления k событий за время длительности t. Для упро­щения вывода используем следствие, которое можно по­лучить из приведенных выше свойств:**

1. **вероятность того, что за малое время At наступит ровно одно событие, пропорциональна At с точностью до бесконечно малой высшего порядка относительно At:**

***Pi(At) = KAt + o(At)* (Х>0). (\*)**

455

**а) Найдем вероятность Р„ (t) того, что за время длительности t не наступит ни одного со­бытия. Для этого примем во внимание, что на проме­жутке / + At не наступит ни одного события, если на каждом из двух промежутков t и At не появится ни одного события.**

**В силу свойств 1 и 2, по теореме умножения,**

***P0{t + At) = P0(t)P0(At).* (#\*)**

**События «за время Д/ не появилось ни одного собы­тия», «появилось одно событие», «появилось более одного события» образуют полную группу, поэтому сумма ве­роятностей этих событий равна единице:**

Р, (ДО + Рх (ДО + Рк> 1 (ДО - 1 •

**Учитывая, что Рь>\ (At) = о (At) (свойство 3), Px(At)— = kAt+o(At) (свойство 4), имеем**

**Рв(Д0=1 — ХА/— о (ДО- (\*\*\*)**

**Заметим, что, перейдя к пределу при At—►О, найдем**

**Рв (0)= 1. (\*\*\*\*)**

**Подставим (•\*\*) в (\*\*):**

**Рв (t + Д 0 = Р. (0 [ 1 - Ш—о (Д 01-**

**Отсюда**

**Р0 (/ + ДО- Р. (0 = — ЬР\* (О А/ —о (АО Л (0-**

**Разделив обе части равенства на At и перейдя к пределу при At—\*-0, получим дифференциальное уравнение**

**р;(0=—ьр.(0,**

**общее решение которого**

**Рв(0=Се~»**

**Используя (\*\*\*\*), найдем, что С — 1 и, следовательно, Р\* (0 = e~w.**

**Итак, вероятность того, что за время t не появится ни одного события, найдена.**

**б) Найдем вероятность Px(t) появления за вре­мя t ровно одного события. Для этого опреде­лим вероятность того, что за время / 4- At событие по­явится один раз. Так будет в двух несовместных случаях:**

466

1. **событие наступит за время / и не наступит за время At,**
2. **событие не наступит за время t и наступит за время Дt.**

**По формуле полной вероятности,**

**Р1 и + ДО = Рх (0** Р„ (ДО **+ р„** (О **Pi** (ДО.

**Заменим Рх (ДО и Р0 (At) соответственно по формулам (\*) и (\*\*\*), перенесем Рх (0 в левую часть равенства, разделим обе его части на At и перейдем к пределу при At—►О. В итоге получим линейное неоднородное уравнение пер­вого порядка**

***Р\ (t) + \Pt* (0 = be-w.**

**Учитывая начальные условия, найдем С — 0 и, следова­тельно,**

Р, (О = (W) e-w. (\*\*\*\*#)

**Итак, вероятность .того, что за время t появится ровно одно событие, найдена.**

**в) Найдем вероятность Р,(0 появления за время t ровно двух событий. Для этого опреде­лим вероятность того, что за время / + Д/ событие по­явится два раза. Так будет в трех несовместных случаях: 1) событие наступит 2 раза за время / и не наступит за время At, 2) событие наступит 1 раз за время t и 1 раз за время At, 3) событие не наступит за время t и наступит 2 раза за время At.**

**По формуле полной вероятности,**

**р, (t + At) = Pt (О Рв (ДО + Рх (/) Рх (ДО + р. (О Р, (ДО.**

**Заменим Рв (Д/), Pt(At) и Pt(t) соответственно по фор­мулам (\*\*\*), (\*) и (\*\*\*\*»); примем во внимание условие 4; перенесем Р, (t) в левую часть равенства, разделим обе его части на At и перейдем к пределу при At —► 0. В итоге получим дифференциальное уравнение**

***P’%(t) + \P%(t) = \4e-k'.'***

**Решив это уравнение, найдем вероятность того, что за время t появится ровно два события:**

**Аналогично можно получить вероятность того, что за время i наступит k событий:**

Р / п — (^)\* е ц

**\* I \* “ и**

457

**Таким образом, если события, наступающие в случай­ные моменты времени, удовлетворяют указанным выше условиям, то число событий, наступающих за фиксиро­ванное время t, распределено по закону Пуассона с па­раметром Xt. Другими словами, если X (0 — число событий простейшего потока, наступивших за время t, то при фиксированном t функция X (t) есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром Xt. Функцию X (0 называют случайным процессом Пуассона. Очевидно, каждая реализация X (t) есть неубывающая ступенчатая функция.**

**Процесс Пуассона широко используется при решении многих задач практики и особенно в теории массового обслуживания.**

**Замечание. Длительность времени между появле­ниями двух последовательных событий простейшего потока (случайная величина Т) распределена по показательному закону. Действительно, убедимся, что функция распре­деления случайной величины Т имеет вид**

***F(t) =* 1— *е~к1.***

**События Т < / и Т ^ t противоположны, поэтому Р(Т < t) + P(T^>t)=it**

**или**

F(t) + P(T^t)=l.

**Отсюда.**

**F** (0 = 1 — **Р(Т^ /).**

**Р (Т ^ t) есть вероятность того, что за время длительно­сти t не появится ни одного события потока; эта вероят­ность, как показано выше, равна е~и.**

**Итак,**

F(0 = 1— **е~м,**

**что и требовалось доказать.**

1. **Винеровский процесс. Известно, что если в жидкость погрузить маленькую частицу, то она под влиянием уда­ров молекул жидкости будет двигаться по ломаной линии со случайными направлениями звеньев. Это явление на­зывают броуновским движением по имени английского ботаника Р. Броуна, который в 1827 г. открыл явление, но не объяснил его. Лишь в 1905 г. А. Эйнштейн описал броуновское движение математически. В 1918 г. и в по­следующие годы американский ученый Н. Винер построил**

458

**математическую модель, более точно описывающую броу­новское движение. По этой причине процесс броуновского движения называют винеровским процессом.**

**Прежде чем определить винеровский процесс, введем предварительно понятия нормального процесса и процесса с независимыми приращениями.**

**Случайный процесс X (/) называют нормальным (гаус­совым), если совместное распределение X (/,), X (/,), ..., X (/ft) является нормальным для каждого k и всех // (/= 1, 2 к). Нормальный процесс полностью опре­**

**деляется его характеристиками: математическим ожида­нием и корреляционной функцией.**

**Случайный процесс X (/) называют процессом с неза­висимыми приращениями, если его приращения на непе- рекрывающихся интервалах взаимно независимы, т. е. случайные величины X (/,)—X (tt), X (/,)—X (/,), .... Х(/\*)—Х (/\*\_!> для tt </,<... < /, взаимно незави­симы. Процесс с независимыми приращениями определяется распределением приращений X (/) — X (s) для произволь­ных t и s. Если приращение X (/)—X (s) зависит только от разности t—s, то процесс называют процессом со стационарными приращениями.**

**Винеровским процессом (процессом броуновского дви­жения) называют нормальный случайный процесс X (/) с независимыми стационарными приращениями, для ко­торого Х(0) = 0, М [X (/)] =0, М [X (/)\*] =о\*/ для всех / > 0.**

**Важное значение винеровского процесса состоит в том, что ои используется при изучении многих других слу­чайных процессов.**

1. **Марковский случайный процесс. Используем терми­нологию, введенную в гл. XXII, § 1. Пусть в каждый момент времени некоторая система может находиться в одном из состояний £,, Ег, ... (число состояний ко­нечно или счетио). Если система случайно переходит из одного состояния, например в другое, например Е}, то говорят, что в системе происходит случайный процесс. Если при этом вероятность перехода из состояния Е{ в состояние Е/ зависит только от состояния Е,- и не за­висит от того, ногда и как система пришла в это состоя­ние, то случайный процесс X (/) называют марковским. Другими словами, если для каждого момента времени /в протекание случайного процесса X (/) в будущем (при / > /„) определяется его настоящим (значением X (/,)) и**

459

**не зависит от прошлого (от значений X (t) при t < tt), то X (t) — марковский случайный процесс.**

**Различают марковские процессы с дискретным мно­жеством состояний (число состояний конечно или счетно, переходы из состояния в состояние происходят скачком) и с непрерывным множеством состояний, а также разли­чают процессы с дискретным временем (моменты переходов фиксированны) и с непрерывным временем (моменты пе­реходов случайны).**

**В качестве примера рассмотрим процесс обслуживания простейшего потока заявок системой массового обслужи­вания с ожиданием (в такой системе заявка «становится в очередь», если все каналы заняты) и показательным временем обслуживания; покажем, что этот процесс является марковским.**

**Допустим, что в момент времени tB система находи­лась в некотором определенном состоянии (обслуживается некоторое число заявок, причем обслуживание каждой из них уже длилось определенное время). Назовем условно «будущим обслуживанием» обслуживание для моментов времени t > t0, которое определяется;**

**а) длительностью оставшегося времени обслуживания заявок, поступивших до момента ta;**

**б) числом заявок, которые поступят после момента**

**в) длительностью обслуживания этих заявок.**

**Убедимся, что будущее обслуживание не зависит от**

**того, как происходило обслуживание до момента i0. Действительно:**

**а) длительность оставшегося времени обслуживания заявок, которые уже обслуживались в момент /0, не за­висит от времени обслуживания в силу характеристи­ческого свойства показательного распределения;**

**б) число заявок, которые поступят после момента /0, не зависит от числа заявок, которые поступили до мо­мента f0, в силу свойства отсутствия последействия про­стейшего потока;**

**в) длительность обслуживания заявок, поступивших после момента очевидно, не зависит ни от числа заявок, которые поступили до момента t„, ни от длительности обслуживания каждой из них.**

**Итак, будущий процесс обслуживания (при t > t0) за­висит только от состояния системы в момент t0 и не зависит от того, как протекала работа системы до момента /0. Дру­гими словами, процесс обслуживания простейшего потока заявок системой с ожиданием и показательным законом времени обслуживания является марковским процессом.**

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений функции <р(х)\*\*— р~\*1|/2

У2л

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | в | 7 | 8 | 9 |
| 0,0 | 0,3989 | 3989 | 3989 | 3988 | 3986 | 3984 | 3982 | 3980 | 3977 | 3973 |
| 0,1 | 3970 | 3965 | 3961 | 3956 | 3951 | 3945 | 3939 | 3932 | 3925 | 3918 |
| 0,2 | 3910 | 3902 | 3894 | 3885 | 3876 | 3867 | 3857 | 3847 | 3836 | 3825 |
| 0.3 | 3814 | 3802 | 3790 | 3778 | 3765 | 3752 | 3739 | 3726 | 3712 | 3697 |
| 0.4 | 3683 | 3668 | 3652 | 3637 | 3621 | 3605 | 3589 | 3572 | 3555 | 3538 |
| 0,5 | 3521 | 3503 | 3485 | 3467 | 3448 | 3429 | 3410 | 3391 | 3372 | 3352 |
| 0,6 | 3332 | 3312 | 3292 | 3271 | 3251 | 3230 | 3209 | 3187 | 3166 | 3144 |
| 0,7 | 3123 | 3101 | 3079 | 3056 | 3034 | 3011 | 2989 | 2966 | 2943 | 2920 |
| 0,8 | 2897 | 2874 | 2850 | 2827 | 2803 | 2780 | 2756 | 2732 | 2709 | 2685 |
| 0,9 | 2661 | 2637 | 2613 | 2589 | 2565 | 2541 | 2516 | 2492 | 2468 | 2444 |
| 1,0 | 0,2420 | 2396 | 2371 | 2347 | 2323 | 2299 | 2275 | 2251 | 2227 | 2203 |
| 1.1 | 2179 | 2155 | 2131 | 2107 | 2083 | 2059 | 2036 | 2012 | 1989 | 1965 |
| 1.2 | 1942 | 1919 | 1895 | 1872 | 1849 | 1826 | 1804 | 1781 | 1758 | 1736 |
| 1.3 | '1714 | 1691 | 1669 | 1647 | 1626 | 1604 | 1582 | 1561 | 1539 | 1518 |
| 1,4 | 1497 | 1476 | 1456 | 1435 | 1415 | 1394 | 1374 | 1354 | 1334 | 1315 |
| 1,5 | 1295 | 1276 | 1257 | 1238 | 1219 | 1200 | 1182 | 1163 | 1145 | 1127 |
| 1,6 | 1109 | 1092 | 1074 | 1057 | 1040 | 1023 | 1006 | 0989 | 0973 | 0957 |
| 1.7 | 0940 | 0925 | 0909 | 0893 | 0878 | 0863 | 0848 | 0833 | 0818 | 0804 |
| 1.8 | 0790 | 0775 | 0761 | 0748 | 0734 | 0721 | 0707 | 0694 | 0681 | 0669 |
| 1.9 | 0656 | 0644 | 0632 | 0620 | 0608 | 0596 | 0584 | 0573 | 0562 | 0551 |
| 2.0 | 0,0540 | 0529 | 0519 | 0508 | 0498 | 0488 | 0478 | 0468 | 0459 | 0449 |
| 2,1 | 0440 | 0431 | 0422 | 0413 | 0404 | 0396 | 0387 | 0379 | 0371 | 0363 |
| 2.2 | 0355 | 0347 | 0339 | 0332 | 0325 | 0317 | 0310 | 0303 | 0297 | 0290 |
| 2,3 | 0283 | 0277 | 0270 | 0264 | 0258 | 0252 | 0246 | 0241 | 0235 | 0229 |
| 2.4 | 0224 | 0219 | 0213 | 0208 | 0203 | 0198 | 0194 | 0189 | 0184 | 0180 |
| 2.5 | 0175 | 0171 | 0167 | 0163 | 0158 | 0154 | 0151 | 0147 | 0143 | 0139 |
| 2,6 | 0136 | 0132 | 0129 | 0126 | 0122 | 0119 | 0116 | 0113 | 0110 | 0107 |
| 2,7 | 0104 | 0101 | 0099 | 0096 | 0093 | 0091 | 0088 | 0086 | 0084 | 0081 |
| 2,8 | 0079 | 0077 | 0075 | 0073 | 0071 | 0069 | 0067 | 0065 | 0063 | 0061 |
| 2.9 | 0060 | 0058 | 0056 | 0055 | 0053 | 0051 | 0050 | 0048 | 0047 | 0046 |
| 3,0 | 0,0044 | 0043 | 0042 | 0040 | 0039 | 0038 | 0037 | 0036 | 0035 | 0034 |
| 3.1 | 0033 | 0032 | 0031 | 0030 | 0029 | 0028 | 0027 | 0026 | 0025 | 0025 |
| 3,2 | 0024 | 0023 | 0022 | 0022 | 0021 | 0020 | 0020 | 0019 | 0018 | 0018 |
| 3,3 | 0017 | 0017 | 0016 | 0016 | 0015 | 0015 | 0014 | 0014 | 0013 | 0013 |

461

***Продолжение при лож. 1***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | б | 7 | 8 | 9 |
| 3,4 | 0012 | 0012 | 0012 | ООП | ООП | 0010 | 0010 | 0010 | 0009 | 0009 |
| 3,5 | 0009 | 0008 | 0008 | 0008 | 0008 | 0007 | 0007 | 0007 | 0007 | 0006 |
| 3.6 | 0006 | 0006 | 0006 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0005 | 0004 |
| 3,7 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0004 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 |
| 3,8 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0003 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 |
| 3,9 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0002 | 0001 | 0001 |

Приложение 2

***X***

Таблица значений функции Ф (х) = —Г е~г\*/2 dz

К 2л J о

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | ♦ U) | \* | Ф(х) | X | Фи) | X | Ф U) |
| 0,00 | 0,0000 | 0,24 | 0,0948 | 0,48 | 0,1844 | 0,72 | 0,2642 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,25 | 0,0987 | 0,49 | 0,1879 | 0,73 | 0,2673 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,26 | 0,1026 | 0,50 | 0.1915 | 0,74 | 0,2703 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,27 | 0,1064 | 0,51 | 0,1950 | 0,75 | 0,2734 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,28 | 0,1103 | 0,52 | 0,1985 | 0,76 | 0,2764 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,29 | 0,1141 | 0,53 | 0,2019 | 0,77 | 0,2794 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,30 | 0,1179 | 0,54 | 0,2054 | 0,78 | 0,2823 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,31 | 0,1217 | 0,55 | 0,2088 | 0,79 | 0,2852 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,32 | 0,1255 | 0,56 | 0,2123 | 0,80 | 0,2881 |
| 0,09 | 0.0359 | 0,33 | 0,1293 | 0,57 | 0,2157 | 0,81 | 0,2910 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,34 | 0,1331 | 0,58 | 0,2190 | 0,82 | 0,2939 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,35 | 0,1368 | 0,59 | 0,2224 | 0,83 | 0,2967 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,36 | 0,1406 | 0,60 | 0,2257 | 0,84 | 0,2995 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,37 | 0,1443 | 0,61 | 0,2291 | 0,85 | 0,3023 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,38 | 0,1480 | 0,62 | 0,2324 | 0,86 | 0,3051 |
| 0.15 | 0,0596 | 0,39 | 0,1517 | 0,63 | 0,2357 | 0,87 | 0,3078 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,40 | 0,1554 | 0,64 | 0,2389 | 0.88 | 0,3106 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,41 | 0,1591 | 0,65 | 0,2422 | 0,89 | 0,3133 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,42 | 0,1628 | 0,66 | 0,2454 | 0,90 | 0,3159 |
| 0,19 | 0,0753 | 0,43 | 0.1664 | 0,67 | 0,2486 | 0,91 | 0,3186 |
| 0,20 | 0.0793 | 0,44 | 0,1700 | 0,68 | 0,2517 | 0,92 | 0,3212 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,45 | 0,1736 | 0,69 | 0,2549 | 0,93 | 0,3238 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,46 | 0,1772 | 0,70 | 0,2580 | 0,94 | 0,3264 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,47 | 0,1808 | 0,71 | 0,2611 | 0,95 | 0,3289 |

462

Продолжение прилож. 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| д | Ф Ut | к | Ф (ДГ) | 1 | Ф (О |  | Ф(х) | |
| 0,96 | 0,3315 | 1,37 | 0,4147 | 1,78 | 0,4625 | 2,36 | 0 | 4909 |
| 0,97 | 0,3340 | 1 ,38 | 0,4162 | 1,79 | 0,4633 | 2,38 | 0 | 4913 |
| 0,98 | 0,3365 | 1,39 | 0,4177 | 1,80 | 0,4641 | 2,40 | 0 | 4918 |
| 0,99 | 0,3389 | 1,40 | 0,4192 | 1,81 | 0,4649 | 2,42 | 0 | 4922 |
| 1,00 | 0,3413 | 1 .41 | 0,4207 | 1,82 | 0,4656 | 2,44 | 0 | 4927 |
| 1,01 | 0,3438 | 1 ,42 | 0,4222 | 1,83 | 0,4664 | 2,46 | 0 | 4931 |
| 1,02 | 0,3461 | 1,43 | 0,4235 | 1,84 | 0,4671 | 2,48 | 0 | 4934 |
| 1,03 | 0,3485 | 1 ,44 | 0,4251 | i 1,85 | 0.4678 | 2,50 | 0 | 4938 |
| 1,04 | 0,3508 | 1,45 | 0,4265 | j 1,85 | 0,4686 | 2,52 | 0 | 4941 |
| 1,05 | 0,3531 | 1 ,46 | 0,4279 | 1 1,87 | 0,4693 | 2,54 | 0 | 4945 |
| 1,06 | 0,3554 | 1,47 | 0,4292 | 1,8'! | 0,4699 | 2,56 | 0 | 4948 |
| 1,07 | 0,3577 | 1,48 | 0,4306 | 1 ,89 | 0,4706 | 2,58 | 0 | 4951 |
| 1,08 | 0,3599 | 1,49 | 0,4319 | 1,90 | 0,4713 | 2,60 | 0 | 4953 |
| 1,09 | 0,3621 | 1,50 | 0,4332 | 1,91 | 0,4719 | 2,62 | 0 | 4956 |
| 1,10 | 0,3643 | 1,51 | 0.4345 | 1,92 | 0,4726 | 2,64 | 0 | 4959 |
| 1,11 | 0,3665 | 1,52 | 0,4357 | 1,93 | 0,4732 | 2,66 | 0 | 4961 |
| 1,12 | 0,3686 | 1,53 | 0,4370 | 1 1,94 | 0,4738 | 2,68 | 0 | 4963 |
| 1,13 | 0,3708 | 1,54 | 0,4382 | 1 1,95 | 0,4744 | 2,70 | 0 | 4965 |
| 1 ,14 | 0,3729 | 1,55 | 0,4394 | 1,96 | 0,4750 | 2,72 | 0 | 4967 |
| 1,15 | 0,3749 | 1,56 | 0,4406 | 1,97 | 0,4756 | 2,74 | 0 | 4969 |
| 1,16 | 0,3770 | 1,57 | 0,4418 | 1 ,98 | 0,4761 | 2,76 | 0 | 4971 |
| 1,17 | 0,3790 | 1,58 | 0,4429 | 1,99 | 0,4767 | 2,78 | 0 | 4973 |
| 1,18 | 0,3810 | 1,59 | 0,4441 | 2,00 | 0,4772 | 2,80 | 0 | 4974 |
| 1,19 | 0,3830 | 1 ,60 | 0,4452 | 2,02 | 0,4783 | 2,82 | 0 | 4976 |
| 1,20 | 0,3849 | 1,61 | 0,4463 | 2,04 | 0,4793 | 2,84 | 0 | 4977 |
| 1,21 | 0,3869 | 1,62 | 0,4474 | 2,06 | 0,4803 | 2,86 | 0 | 4979 |
| 1,22 | 0,3883 | 1,63 | 0,4484 | 2,08 | 0,4812 | 2,88 | 0 | 4980 |
| 1,23 | 0,3907 | 1,64 | 0,4495 | i 2,10 | 0,4821 | 2,90 | 0 | 4981 |
| 1,24 | 0,3925 | 1,65 | 0,4505 | 2,12 | 0,4830 | 2,92 | 0 | 4982 |
| 1,25 | 0,3944 | 1,66 | 0,4515 | 2,14 | 0,4838 | 2,94 | 0 | 4984 |
| 1,26 | 0,3962 | 1,67 | 0,4525 | ! 2,16 | 0,4846 | 2,96 | 0 | 4985 |
| 1,27 | 0,3980 | 1,68 | 0,4535 | 2,18 | 0,4854 | 2,98 | 0 | 4985 |
| 1,28 | 0,3997 | 1,69 | 0,4545 | 2,20 | 0,4861 | 3,00 | 0 | 49865 |
| 1,29 | 0,4015 | 1,70 | 0,4554 | 2,22 | 0,4868 | 3,20 | 0 | 49931 |
| 1,30 | 0,4032 | 1,71 | 0,4564 | 2,24 | 0,4875 | 3,40 | 0 | 49966 |
| 1,31 | 0,4049 | 1 ,72 | 0,4573 | ! 2,26 | 0,4881 | 3,60 | 0 | 499841 |
| 1 ,32 | 0,4066 | 1,73 | 0,4582 | j 2,28 | 0,4887 | 3,80 | 0 | 499928 |
| 1,33 | 0,4082 | 1,74 | 0,4591 | 2,30 | 0,4893 | 1 4,00 | 0 | 499968 |
| 1,34 | 0,4099 | 1 ,75 | 0,4599 | 1 2,32 | 0,4898 | i 4,50 | 0 | 499997 |
| 1,35 | 0,4115 | 1,76 | 0,4608 | j 2,34 | 0,4904 | 5,00 | 0 | 499997 |
| 1,36 | 0,4131 | 1.77 | 0,4616 |  |  |  |  |

463

Пр и л о ж е н и е 3

Таблица значений /у = / (у, п)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| п | V | | | п | V | | |
| 0.95 | 0,99 | 0,999 | 0,95 | 0,99 | 0.999 |
| 5 | 2.78 | 4,60 | 8,61 | 20 | 2,093 | 2,861 | 3,883 |
| 6 | 2,57 | 4,03 | 6,86 | 25 | 2,064 | 2,797 | 3.745 |
| 7 | 2,45 | 3,71 | 5,96 | 30 | 2,045 | 2,756 | 3,659 |
| 8 | 2,37 | 3,50 | 5,41 | 35 | 2,032 | 2,720 | 3,600 |
| 9 | 2,31 | 3,36 | 5,04 | 40 | 2,023 | 2,708 | 3,558 |
| 10 | 2,26 | 3,25 | 4,78 | 45 | 2,016 | 2,692 | 3,527 |
| 11 | 2,23 | 3,17 | 4,59 | 50 | 2,009 | 2,679 | 3,502 |
| 12 | 2,20 | 3,11 | 4,44 | 60 | 2,001 | 2,662 | 3,464 |
| 13 | 2,18 | 3,06 | 4,32 | 70 | 1,996 | 2,649 | 3,439 |
| 14 | 2,16 | 3,01 | 4,22 | 80 | 1,001 | 2,640 | 3,418 |
| 15 | 2,15 | 2,98 | 4,14 | 90 | 1,987 | 2,633 | 3,403 |
| 16 | 2,13 | 2,95 | 4,07 | 100 | 1,984 | 2,627 | 3,392 |
| 17 | 2,12 | 2,92 | 4,02 | 120 | 1,980 | 2.617 | 3,374 |
| 18 | 2,11 | 2,90 | 3,97 | оо | 1,960 | 2,576 | 3,291 |
| 19 | 2,10 | 2,88 | 3,92 |  |  |  |  |

Пр иложеиие 4

Таблица значений Ч — Ч(у, л)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| н | У | | | п | У | | |
| 0.95 | 0.99 | 0,999 | 0.95 | 0,99 | 0,999 |
| 5 | 1,37 | 2,67 | 5,64 | 20 | 0,37 | 0,58 | 0,88 |
| 6 | 1,09 | 2,01 | 3,88 | 25 | 0,32 | 0,49 | 0,73 |
| 7 | 0,92 | 1,62 | 2,98 | 30 | 0,28 | 0,43 | 0,63 |
| 8 | 0,80 | 1,38 | 2,42 | 35 | 0,26 | 0,38 | 0,56 |
| 9 | 0,71 | 1,20 | 2,06 | 40 | 0,24 | 0,35 | 0,50 |
| 10 | 0,65 | 1,08 | 1,80 | 45 | 0,22 | 0,32 | 0,46 |
| и | 0,59 | 0,98 | 1,60 | 50 | 0,21 | 0,30 | 0,43 |
| 12 | 0,55 | 0,90 | 1,45 | 60 | 0,188 | 0,269 | 0,38 |
| 13 | 0,52 | 0,83 | 1,33 | 70 | 0,174 | 0,245 | 0,34 |
| 14 | 0,48 | 0,78 | 1,23 | 80 | 0,161 | 0,226 | 0,31 |
| 15 | 0,46 | 0,73 | 1,15 | 90 | 0,151 | 0,211 | 0,29 |
| 16 | 0,44 | 0.70 | 1,07 | 100 | 0,143 | 0,198 | 0,27 |
| 17 | 0,42 | 0,66 | 1,01 | 150 | 0,115 | 0,160 | 0,211 |
| 18 | 0,40 | 0,63 | 0,96 | 200 | 0,099 | 0,136 | 0,185 |
| 19 | 0,39 | 0,60 | 0,92 | 250 | 0,089 | 0,120 | 0,162 |

464

П р вложение Б

Критические точки распределения х\*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число степеней свободы \* |  |  | Уровень значимости о | |  |  |
| 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0,95 | 0,975 | 0,59 |
| 1 | 6.6 | 5,0 | 3.8 | 0,0039 | 0,00098 | 0.00016 |
| 2 | 9,2 | 7.4 | 6,0 | 0,103 | 0,051 | 0,020 |
| 3 | 11,3 | 9.4 | 7,8 | 0,352 | 0,216 | 0,115 |
| 4 | 13,3 | 11,1 | 9,5 | 0,711 | 0,484 | 0,297 |
| 5 | 15,1 | 12,8 | 11,1 | 1,15 | 0,831 | 0,554 |
| 6 | 16,8 | 14.4 | 12,6 | 1,64 | 1,24 | 0,872 |
| 7 | 18,5 | 16,0 | 14.1 | 2,17 | 1,69 | 1.24 |
| 8 | 20,1 | 17,5 | 15,5 | 2,73 | 2,18 | 1,65 |
| 9 | 21,7 | 19,0 | 16,9 | 3,33 | 2,70 | 2,09 |
| 10 | 23,2 | 20,5 | 18,3 | 3,94 | 3,25 | 2,56 |
| 11 | 24,7 | 21,9 | 19,7 | 4,57 | 3,82 | 3,05 |
| 12 | 26,2 | 23,3 | 21,0 | 5,23 | 4,40 | 3,57 |
| 13 | 27,7 | 24,7 | 22,4 | 5,89 | 5,01 | 4,11 |
| 14 | 29,1 | 26,1 | 23,7 | 6,57 | 5,63 | 4.66 |
| 15 | 30,6 | 27,5 | 25,0 | 7,26 | 6,26 | 5,23 |
| 16 | 32,0 | 28,8 | 26,3 | 7,96 | 6,91 | 5,81 |
| 17 | 33,4 | 30,2 | 27,6 | 8,67 | 7,56 | 6,41 |
| 18 | 34,8 | 31,5 | 28,9 | 9,39 | 8,23 | 7,01 |
| 19 | 36,2 | 32,9 | 30,1 | 10,1 | 8,91 | 7,63 |
| 20 | 37,6 | 34,2 | 31,4 | 10,9 | 9.59 | 8,26 |
| 21 | 38,9 | 35,5 | 32,7 | 11,6 | 10,3 | 8,90 |
| 22 | 40,3 | 36,8 | 33,9 | 12,3 | 11,0 | 9.54 |
| 23 | 41,6 | 38,1 | 35,2 | 13,1 | П.7 | 10,2 |
| 1 24 | 43,0 | 39,4 | 36,4 | 13,8 | 12.4 | 10,9 |
| 25 | 44,3 | 40,6 | 37,7 | 14,6 | 13,1 | 11,5 |
| 26 | 45,6 | 41,9 | 38,9 | 15,4 | 13,8 | 12,2 |
| 27 | 47,0 | 43,2 | 40,1 | 16,2 | 14,6 | 12,9 |
| 28 | 48,3 | 44,5 | 41,3 | 16,9 | 15,3 | 13,6 |
| 29 | 49,6 | 45,7 | 42,6 | 17,7 | 16,0 | 14,3 |
| 30 | 50,9 | 47,0 | 43,8 | 18.5 | 16.8 | 15,0 |

30 — 2730

Приложение 6

Критические точки распределения Стьюдента

Уровень значимость а (двусторонняя критическая область)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| степеней  свободы  к | 0. 10 | 0,05 | 0.02 | 0,01 | 0,002 | 0,001 |
| I | 6,31 | 12,7 | 31,82 | 63,7 | 318,3 | 637,0 |
| 2 | 2,92 | 4,30 | 6,97 | 9,92 | 22,33 | 31,6 |
| 3 | 2,35 | 3,18 | 4,54 | 5,84 | 10,22 | 12,9 |
| 4 | 2,13 | 2,78 | 3,75 | 4,60 | 7,17 | 8,61 |
| 5 | 2,01 | 2,57 | 3,37 | 4,03 | 5,89 | 6,86 |
| 6 | 1,94 | 2,45 | 3,14 | 3,71 | 5,21 | 5,96 |
| 7 | 1,89 | 2,36 | 3,00 | 3,50 | 4,79 | 5,40 |
| 8 | 1,86 | 2,31 | 2,90 | 3,36 | 4,50 | 5,04 |
| 9 | 1,83 | 2,26 | 2,82 | 3,25 | 4,30 | 4,78 |
| 10 | 1,81 | 2,23 | 2,76 | 3,17 | 4,14 | 4,59 |
| 11 | 1,80 | 2,20 | 2,72 | 3,11 | 4,03 | 4,44 |
| 12 | 1,78 | 2,18 | 2,68 | 3,05 | 3,93 | 4,32 |
| 13 | 1,77 | 2,16 | 2,65 | 3,01 | 3,85 | 4,22 |
| 14 | 1,76 | 2,14 | 2,62 | 2,98 | 3,79 | 4,14 |
| 15 | 1,75 | 2,13 | 2,60 | 2,95 | 3,73 | 4,07 |
| 16 | 1,75 | 2,12 | 2,58 | 2,92 | 3,69 | 4,01 |
| 17 | 1,74 | 2,11 | 2,57 | 2,90 | 3,65 | 3,96 |
| 18 | 1,73 | 2,10 | 2,55 | 2,88 | 3,61 | 3,92 |
| 19 | 1,73 | 2,09 | 2,54 | 2,86 | 3,58 | 3,88 |
| 20 | 1,73 | 2,09 | 2,53 | 2,85 | 3,55 | 3,85 |
| 21 | 1,72 | 2,08 | 2,52 | 2,83 | 3,53 | 3,82 |
| 22 | 1,72 | 2,07 | 2,51 | 2,82 | 3,51 | 3,79 |
| 23 | 1,71 | 2,07 | 2,50 | 2,81 | 3,49 | 3,77 |
| 24 | 1,7! | 2,06 | 2,49 | 2,80 | 3,47 | 3,74 |
| 25 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,79 | 3,45 | 3,72 |
| 26 | 1,71 | 2,06 | 2,48 | 2,78 | 3,44 | 3,71 |
| 27 | 1.71 | 2,05 | 2,47 | 2,77 | 3,42 | 3,69 |
| 28 | 1,70 | 2,05 | 2,46 | 2,76 | 3,40 | 3,66 |
| 29 | 1,70 | 2,05 | 2,46 | 2,76 | 3,40 | 3,66 |
| 30 | 1,70 | 2,04 | 2,46 | 2,75 | 3,39 | 3,65 |
| 40 | 1,68 | 2,02 | 2,42 | 2,70 | 3,31 | 3,55 |
| 60 | 1,67 | 2,00 | 2,39 | 2,66 | 3,23 | 3,46 |
| 120 | 1,66 | 1,98 | 2,36 | 2,62 | 3,17 | 3,37 |
| оо | 1,64 | 1,96 | 2,33 | 2,58 | 3,09 | 3,29 |
|  | 0.05 | 0.025 | 0,01 | 0,005 | 0.001 | 0,0005 |

Уровень значимости а (односторонняя критическая об­ласть)

466

Приложение 7

Критические точки распределения F Фишера — Снедекора

(kj, — чнсло степеней свободы большей дисперсии, kt — число степеней свободы меньшей дисперсии)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | Уровень значимости а= | | | | =0,01 |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | А | 1 |  |  |  |  |  |
|  | 1 | 2 | . 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | II | 12 |
| 1 | 4052 | 4999 | 5403 | 5625 | 5764 | 5889 | 5928 | 5981 | 6022 | 6056 | 6082 | 6106 |
| 2 | 98.49 | 99,01 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99.33 | 99,34 | 99,36 | 99,38 | 99,40 | 99,41 | 99,42 |
| 3 | 34,12 | 30,81 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 | 27,34 | 27,23 | 27,13 | 27,05 |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15.21 | 14,98 | 14,80 | 14,66 | 14,54 | 14,45 | 14.37 |
| 5 | 16,26 | 13^27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 1<\45 | 10427 | 10,15 | 10,05 | 9,96 | 9,89  7,72 |
| 6 | 13,74 | 10.92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 | 7,87 | 7.79 |
| 7 | 12,25 | 9.55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 7,00 | 6,84 | 6,71 | 6,62 | 6,54 | 6,47 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,19 | 6,03 | 5,91 | 5,82 | 5,74 | 5,67 |
| 9 | 10,56 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6.06 | 5,80 | 5,62 | 5,47 | 5,35 | 5,26 | 5,18 | 5,11 |
| 10 | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5421 | 5.06 | 4,95 | 4,85 | 4,78 | 4,71 |
| 11 | 9,86 | 7420 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,88 | 4,74 | 4,63 | 4,54 | 4,46 | 4.40 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5.06 | 4,82 | 4,65 | 4,50 | 4,39 | 4,30 | 4,22 | 4,16 |
| 13 | 9,07 | 6,70 | 5,74 | 5420 | 4,86 | 4,62 | 4,44 | 4,30 | 4,19 | 4,10 | 4,02 | 3,96 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,03 | 4,69 | 4,46 | 4428 | 4,14 | 4.03 | 3,94 | 3.86 | 3,80 |
| 15 | 8,68 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4.32 | 4.14 | 4,00 | 3,89 | 3,80 | 3,73 | 3,67 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4420 | 4,03 | 3,89 | 3,78 | 3,69 | 3,61 | 3,55 |
| 17 | 8,40 | 6,11 | 5,18 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,93 | 3,79 | 3,68 | 3,59 | 3,52 | 3,45 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | Уровень значимости а= | | | | 0.0S |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | А | ■ |  |  |  |  |  |
| ^1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 161 | 200 | 216 | 225 | 230 | 234 | 237 | 239 | 241 | 242 | 243 | 244 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,36 | 19.37 | 19,38 | 19.39 | 19.40 | 19,41 |
| 3 | 10.13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8.94 | 8,88 | 8,84 | 8,81 | 8,78 | 8,76 | 8,74 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,93 | 5.91 |
| 5 | 6,61 | 5.79 | 5.41 | 5.19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4.78 | 4,74 | 4,70 | 4,68 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4.06 | 4,03 | 4,00 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,63 | 3.60 | 3,57 |
| 8 | 5.32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,34 | 3,31 | 3,28 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3.29 | 3,23 | 3,18 | 3,13 | 3,10 | 3,07 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3.02 | 2,97 | 2,94 | 2,91 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,86 | 2,82 | 2,79 |
| 12 | 4,75 | 3,88 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,92 | 2,85 | 2,80 | 2,76 | 2,72 | 2,69 |
| 13 | 4,67 | 3,80 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,92 | 2,84 | 2,77 | 2,72 | 2,67 | 2,63 | 2,60 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,77 | 2,70 | 2,65 | 2,60 | 2,56 | 2,53 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 270 | 2,64 | 2,59 | 2,55 | 2,51 | 2,48 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2.54 | 2,49 | 2,45 | 2,42 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,62 | 2.55 | 2,50 | 2,45 | 2,41 | 2,38 |

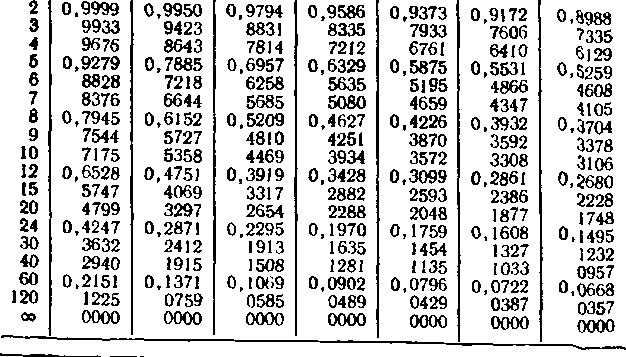
30\*

467

Приложение 8 Критические точки распределения Кочрена

(А— число степеней свободы, /—количество выборок)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | Уровень | | значимости | | а «=0,01 |  |  |
| t | к | | | | | | | | |
| 1 | 2 | | 3 | | 4 | 1 5 | ё | У |



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Уровень значимости ос«х0,0! | | | |  | ■ |
| I |  |  |  | к |  |  |  |
| 8 | 9 | 10 | 16 | 36 | 144 | 0D |
| 2  з | 0,8823 | 0,8674 | 0,8539 | 0,7949 | 0,7067 | 0,0002 | 0,5000 |
| 4 | 7107 | 6912 | 6743 | С059 | 5153 | 4230 | 3333 |
| 5 | 5897 | 5702 | 5536 | 4884 | 4057 | 3251 | 2500 |
| 6 | 0,5037 | 0,4854 | 0,4697 | 0,4094 | 0,3351 | 0,2644 | 0,2000 |
| 7 | 4401 | 4229 | 4084 | 3529 | 2858 | 2229 | 1667 |
| 8 | 3911 | 3751 | 3616 | 3105 | 2494 | 1929 | 1429 |
| 9 | 0,3522 | 0,3373 | 0,3248 | 0,2779 | 0,2214 | 0,1700 | 0, |250 |
| 10 | 3207 | 3067 | 2950 | 2514 | 1992 | 1521 | 1111 |
| 12 | 2945 | 2813 | 2704 | 2297 | 1811 | 1376 | 1000 |
| 15 | 0,2535 | 0,2419 | 0,2320 | 0,1961 | 0,1535 | 0,1157 | 0,0833 |
| 20 | 2104 | 2002 | 1918 | 1612 | 1251 | 0934 | 0667 |
| 24 | 1646 | 1567 | 1501 | 1248 | 09G0 | 0709 | 0500 |
| 30 | 0,1406 | 0,1338 | 0,1283 | 0,1060 | 0,0810 | 0,0595 | 0,0417 |
| 40 | 1157 | 1100 | 1054 | 0867 | 0658 | 0480 | 0333 |
| 60 | 0898 | 0853 | 0816 | 0668 | 0503 | 0363 | 0250 |
| 120 | 0,0625 | 0,0594 | 0,0567 | 0,0461 | 0,0344 | 0,0245 | 0,0167 |
| 00 | 0334 | 0316 | 0302 | 0242 | 0178 | 0125 | 0083 |
| 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |

468

***Продолжение прилож. Я***

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Уровень значимости а=0,05 | | | |  |  |
| 1 |  |  |  | к |  |  |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 0,9985 | 0,9750 | 0,9392 | 0,9057 | 0,8772 | 0,8534 | 0,8332 |
| 3 | 9669 | 8709 | 7977 | 7457 | 7071 | 6771 | 6530 |
| 4 | 9065 | 7679 | 6841 | 6287 | 5895 | 0,5598 | 5365 |
| 5 | 0,8412 | 0,6338 | 0,5981 | 0,5440 | 0,5063 | 4783 | 0,4564 |
| 6 | 7808 | 6161 | 5321 | 4803 | 4447 | 4184 | 3980 |
| 7 | 7271 | 5612 | 4800 | 4307 | 3974 | 3726 | 3535 |
| 8 | 0,6798 | 0,5157 | 0,4377 | 0,3910 | 0,3595 | 0,3362 | 0,3185 |
| 9 | 6385 | 4775 | 4027 | 3584 | 3286 | 3067 | 2901 |
| 10 | 6020 | 4450 | 3733 | 3311 | 3029 | 2823 | 2666 |
| 12 | 0,5410 | 0,3924 | 0,3624 | 0,2880 | 0,2624 | 0,2439 | 0,2299 |
| 15 | 4709 | 3346 | 2758 | 2419 | 2195 | 2034 | 1911 |
| 20 | 3894 | 2705 | 2205 | 1921 | 1735 | 1602 | 1501 |
| 24 | 0,3434 | 0,2354 | 0,1907 | 0,1656 | 0,1493 | 0,1374 | 0,1286 |
| 30 | 2929 | 1980 | 1593 | 1377 | 1237 | 1137 | (061 |
| 40 | 2370 | 1576 | 1259 | 1082 | 0968 | 0887 | 0827 |
| 60 | 0,1737 | 0,1131 | 0,0895 | 0,0765 | 0,0682 | 0,0623 | 0,0583 |
| 120 | 0998 | 0632 | 0495 | 0419 | 0371 | 0337 | 0312 |
| 00 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Уровень значимости а = 0,05 | | | |  |  |
|  |  |  |  | к |  |  |  |
| 1 | 8 | 9 | 10 | 16 | 36 | 144 | ао |
| 2 | 0,8159 | 0,8010 | 0,7880 | 0,7341 | 0,6602 | 0,5813 | 0,5000 |
| 3 | 6333 | 6167 | 6025 | 5466 | 4748 | 4031 | 3333 |
| 4 | 5175 | 5017 | 4884 | 4366 | 3720 | 3093 | 2500 |
| 5 | 0,4387 | 0,4241 | 0,4118 | 0,3645 | 0,3066 | 0,2013 | 0,2000 |
| 6 | 3817 | 3682 | 3568 | 3135 | 2612 | 2119 | 1667 |
| 7 | 3384 | 3259 | 3154 | 2756 | 2278 | 1833 | 1429 |
| 8 | 0,3043 | 0,2926 | 0,2829 | 0,2462 | 0,2022 | 0,1616 | 0,1250 |
| 9 | 2768 | 2659 | 2568 | 2226 | 1820 | 1446 | 1111 |
| 10 | 2541 | 2439 | 2353 | 2032 | 1655 | 1308 | 1000 |
| 12 | 0,2187 | 0,2098 | 0,2020 | 0,1737 | 0,1403 | 0,1100 | 0,0833 |
| 15 | 1815 | 1736 | 1671 | 1429 | 1144 | 0889 | 0667 |
| 20 | 1422 | 1357 | 1303 | 1108 | 0879 | 0675 | 0500 |
| 24 | 0,1216 | 0,1160 | 0,1113 | 0,0942 | 0,0743 | 0,0567 | 0,0417 |
| 30 | 1002 | 0958 | 0921 | 0771 | 0604 | 0457 | 0333 |
| 40 | 0780 | 0745 | 0713 | 0595 | 0462 | 0347 | 0250 |
| 60 | 0,0552 | 0,0520 | 0,0497 | 0,0411 | 0,0316 | 0.0234 | 0,0167 |
| 120 | 0292 | 0279 | 0266 | 0218 | 0165 | 0120 | 0083 |
| 09 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 |

469

Приложение 9

Равномерно распределенные случайные числа

1009 7325 33 37 54 20 48 05 08 42 26 89 53 99 01 90 2529 12 80 79 99 70

76 52 01 35 86 64 89 47 42 96 1964 509303 09 37 67 07 15 80 15 7361 47

34 67 35 48 76 24 80 52 40 37 2320 902560 38 31 13 11 65 64 032366 53

80959091 17 206361 0402 15 95 3347 64 8867 67 4397 98 95 11 68 77

66 06 57 47 17 31 0601 0805 85 26 97 76 02 63 57 3321 35 73 79 64 57 53

34 07 27 68 50 45 57 18 24 06

1. 05 16 56 92 05 32 54 70 48
2. 52 96 47 78

36 69 73 61 70 353034 26 14 68 66 57 48 18 90 55 35 7548 35 80 83 42 82

6581 3398 85 86 7990 74 39 73 0538 52 47 28 45 82 87 09 60 93 52 03 44

98 52 01 77 67 11805054 31 83452996 34 8868 5402 00 995946 7348

1490 56 8607 3980 82 77 32 0628 89 8083

1. 50 75 84 01
2. 51 76 49 69

22 1094 05 58 50 72 56 82 48 13 74 67 00 78 36 7666 79 51 91 82 60 89 28

6097 093433 29 4052 42 01 18 47 54 06 10 90 36 47 64 93 93 78 56 1368

65 48 11 76 74 8012 43 56 35 7435099817 6991 62 6803 0989 320505

1746 850950 17 72 70 80 15 77 40 27 72 14 66 25 22 91 48 14 22 5685 14

58 04 77 69 74 45 31 82 23 74 43236002 10 36 93 68 72 03 48 42 7567 88

73 03 95 71 86 21 II 57 82 53 45 52 16 42 37 7662 11 39 90 96 29 77 8822

91 49 91 45 23 80 33 69 4598 44 1048 1949 12 55 07 37 42 63 60 64 93 29

68 47 92 76 86 26 94 03 68 58 85 15 74 79 54 11 100020 40 16 50 53 44 84

46 16 28 35 54 70 29 7341 35 32 97 92 65 75 12 86 07 46 97 40 21 95 25 63

94 75 08 99 23 53 14 03 33 40 57 60 04 0881 96 64 48 94 39 43 65 17 70 82

61 19 69 04 46 1547 44 5266 94 55 72 85 73 42 48 11 62 13 23 52 37 83 17

26 45 74 77 74 9527 0799 53 67 89 75 43 87 97 34 40 87 21 73 20 88 98 37

51 92 43 3729 59 36 78 38 48 54 62 24 44 31 1686 84 87 67 68 93 59 14 16

653945 9593 82 3961 01 18 91 19 04 25 92 03 07 11 20 59 26 25 22 96 63

04 49 35 24 94 00 54 99 76 54 35 96 31 53 07 59 80808391 46 0588 52 36

7524 63 38 24 64 05 1881 59 26 89 80 93 54 45 42 72 68 42 01 39 09 22 86

45 86 25 10 25 96 11 96 38 96 33 35 13 54 62 83 6094 97 00 77 28 14 40 77

61 96 27 93 35 54 69 28 2391 7797 4500 24 13 02 12 48 92 93 91 08 36 47

470

***Продолжение прилож. 9***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 32 | 17 | 90 | 05 | 97 | 87 | 37 | 92 | 52 | 41 | 05 | 56 | 70 | 70 | 07 | 86 | 74 | 31 | 71 | 57 |
| 69 | 23 | 46 | 14 | 06 | 20 | И | 74 | 52 | 04 | 15 | 95 | 66 | 00 | 00 | 18 | 74 | 39 | 24 | 23 |
| 19 | 56 | 54 | 14 | 30 | 01 | 75 | 87 | 53 | 79 | 40 | 41 | 92 | 15 | 85 | 66 | 67 | 43 | 68 | 06 |
| 45 | 15 | 51 | 49 | 38 | 19 | 47 | 60 | 72 | 46 | 43 | 66 | 79 | 45 | 43 | 59 | 04 | 79 | 00 | 33 |
| 94 | 86 | 43 | 19 | 94 | 36 | 16 | 81 | 08 | 51 | 34 | 88 | 88 | 15 | 53 | 01 | 54 | 03 | 54 | 56 |
| 98 | 08 | 62 | 48 | 26 | 45 | 24 | 02 | 84 | 04 | 44 | 99 | 90 | 88 | 96 | 39 | 09 | 47 | 34 | 07 |
| 33 | 18 | 51 | 62 | 32 | 41 | 94 | 15 | 09 | 49 | 89 | 43 | 54 | 85 | 81 | 88 | 69 | 54 | 19 | 94 |
| 80 | 95 | 10 | 04 | 06 | 96 | 38 | 27 | 07 | 74 | 20 | 15 | 12 | 33 | 87 | 25 | 01 | 62 | 52 | 98 |
| 79 | 75 | 24 | 91 | 40 | 71 | 96 | 12 | 82 | 96 | 69 | 86 | 10 | 25 | 91 | 74 | 85 | 22 | 05 | 39 |
| 18 | 63 | 33 | 25 | 37 | 98 | 14 | 50 | 65 | 71 | 31 | 01 | 02 | 46 | 74 | 05 | 45 | 56 | 14 | 27 |
| 74 | 02 | 94 | 39 | 02 | 77 | 55 | 73 | 22 | 70 | 97 | 79 | 01 | 71 | 19 | 52 | 52 | 75 | 80 | 21 |
| 54 | 17 | 84 | 56 | 11 | 80 | 99 | 33 | 71 | 43 | 05 | 33 | 51 | 29 | 69 | 56 | 12 | 71 | 92 | 55 |
| II | 66 | 44 | 98 | 83 | 52 | 07 | 98 | 48 | 27 | 59 | 38 | 17 | 15 | 39 | 09 | 97 | 33 | 34 | 40 |
| 48 | 32 | 47 | 79 | 28 | 31 | 24 | 66 | 47 | 10 | 02 | 29 | 53 | 68 | 70 | 32 | 30 | 75 | 75 | 46 |
| 69 | 07 | 49 | 41 | 38 | 87 | 63 | 79 | 19 | 76 | 35 | 58 | 40 | 44 | 01 | 10 | 51 | 82 | 16 | 15 |

Приложение 10

Критические точки критерия Вилкоксоиа

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Объемы  выборок | | Q | | | | Объемы  выборок | | Q | | | |
| «1 |  | 0,005 | 0,01 | 0,025 | 0,05 | "г | "i | 0.005 | 0.0 1 | 0 ,025 | 0,05 |
| 6 | 6 | 23 | 24 | 26 | 28 | 7 | 7 | 32 | 34 | 36 | 39 |
|  | 7 | 24 | 25 | 27 | 30 |  | 8 | 34 | 35 | 38 | 41 |
|  | 8 | 25 | 27 | 29 | 31 |  | 9 | 35 | 37 | 40 | 43 |
|  | 9 | 26 | 28 | 31 | 33 |  | 10 | 37 | 39 | 42 | 45 |
|  | 10 | 27 | 29 | 32 | 35 |  | 11 | 38 | 40 | 44 | 47 |
|  | 11 | 28 | 30 | 34 | 37 |  | 12 | 40 | 42 | 46 | 49 |
|  | 12 | 30 | 32 | 35 | 38 |  | 13 | 41 | 44 | 48 | 52 |
|  | 13 | 31 | 33 | 37 | 40 |  | 14 | 43 | 45 | 50 | 54 |
|  | 14 | 32 | 34 | 38 | 42 |  | 15 | 44 | 47 | 52 | 56 |
|  | 15 | 33 | 36 | 40 | 44 |  | 16 | 46 | 49 | 54 | 58 |
|  | 16 | 34 | 37 | 42 | 46 |  | 17- | 47 | 51 | 56 | 61 |
|  | 17 | 36 | 39 | 43 | 47 |  | 18 | 49 | 52 | 58 | 63 |
|  | 18 | 37 | 40 | 45 | 49 |  | 19 | 50 | 54 | 60 | 65 |
|  | 19 | 38 | 41 | 46 | 51 |  | 20 | 52 | 56 | 62 | 67 |
|  | 20 | 39 | 43 | 48 | 53 |  | 21 | 53 | 58 | 64 | 69 |
|  | 21 | 40 | 44 | 50 | 55 |  | 22 | 55 | 59 | 66 | 72 |
|  | 22 | 42 | 45 | 51 | 57 |  | 23 | 57 | 61 | 68 | 74 |
|  | 23 | 43 | 47 | 53 | 58 |  | 24 | 58 | 63 | 70 | 76 |
|  | 24 | 44 | 48 | 54 | 60 |  | 25 | 60 | 64 | 72 | 78 |
|  | 25 | 45 | 50 | 56 | 62 |  |  |  |  |  |  |

471

***Продолжение прилож. 10***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Объемы | |  |  | 3 |  | Объемы | |  |  | з |  |
| выборок | |  |  |  |  | выборок | |  |  |  |  |
|  | П. | 0.005 | 0,01 | 0.025 | 0.05 | «1 |  | 0,005 | 0.01 | 0.025 | 0.05 |
| 8 | 8 | 43 | 45 | 49 | 51 |  | 18 | 92 | 96 | 103 | 1 10 |
|  | 9 | 45 | 47 | 51 | 54 |  | 19 | 94 | 99 | 107 | 113 |
|  | 10 | 47 | 49 | '53 | 56 |  | 20 | 97 | 102 | 110 | 117 |
|  | 11 | 49 | 51 | 55 | 59 |  | 21 | 99 | 105 | 113 | 120 |
|  | 12 | 51 | 53 | 58 | 62 |  | 22 | 102 | 108 | 116 | 123 |
|  | 13 | 53 | 56 | 60 | 64 |  | 23 | 105 | 110 | 119 | 127 |
|  | 14 | 54 | 58 | 62 | 67 |  | 24 | 107 | 113 | 122 | 130 |
|  | 15 | 56 | 60 | 65 | 69 |  | 25 | 110 | 116 | 126 | 134 |
|  | 16  17  18  19   1. 21 22   23  24  25 | 58  60  62  64  66  68  70   1. 73 75 | 62  64  66  68  70  72  74  76  78  81 | 67  70  72  74  77  79  81  84  86  89 | 72  75  77  80  83  85  88  90  93  96 | 11 | 11  12  13  14  15  16  17  18  19  20 | 87  90  93  96  99  102  105  108  111  114 | ■- 91 94 97 100 Гоз  W7  ПО  113  !16 119 | 96  99  103  106  НО  113  117  121  124  128 | 100  104  108  112  116  120  123  127  131  135 |
| 9 | 9 | 56 | 59 | 62 | 66 |  | 21 | 117 | 123 | 131 | 139 |
|  | 10 | 58 | ■ 61 | 65 | 69 |  | 22 | 120 | 126 | 135 | 143 |
|  | 11 | 61 | 63 | 68 | 72 |  | 23 | 123 | 129 | 139 | 147 |
|  | 12 | 63 | 66 | 71 | 75 |  | 24 | 126 | 132 | 142 | 151 |
|  | 13 | 65 | 68 | 73 | 78 |  | 25 | 129 | 136 | 146 | 155 |
|  | 14  15  16  17  18  19   1. 21 22   23  24  25 | 67  69  72  74  76  78  81  83  85  88  90  92 | 71  73  76  78  81  83  85  88  90  93  95  98 | 76  79  82  84  87  90  93  95  98  101  104  107 | 81  84  87  90  93  96  99  102  105  108  111  114 | 12 | 12  13  14  15  16  17  18  19   1. '21 22 23 | 105  109  112  115  119  122  125  129  132  136  139  142 | 109  113  116  120  124  127  131  134  138  142  145  149 | 115  119  123  127  131  135  139  143  147  151  155  159 | 120  125  129  133  138  142  146  150  155  159  163  168 |
| 10 | 10 | 71 | 74 | 78 | 82 |  | 24 | 146 | 153 | 163 | 172 |
|  | 11 | 73 | 77 | 81 | 86 |  | 25 | 149 | 156 | 167 | 176 |
|  | 12  13  14  15   1. 17 | 76  79  81  84  86  89 | 79  82  85  88  91  93 | 84  88  91  94  97  100 | 89  92  96  99  103  106 | 13 | 13  14  15  16  17  18 | 125  129  133  136  140  144 | 130  134  138  142  146  150 | 136  141  145  150  154  158 | 142  147  152  156  161  166 |

472

***Продолжение прилож. 10***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Объемы  выборок | | Q | | | | Объемы  выборок | | Q | | | |
| «1 | «• | 0.0Q5 | 0.01 | 0.025 | 0.05 | «» |  | 0,005 | 0.01 | 0,025 | 0.05 |
|  | 19 | 148 | 154 | 163 | 171 |  | 20 | 239 | 246 | 258 | 268 |
|  | 20 | 151 | 158 | 167 | 175 |  | 21 | 244 | 252 | 264 | 274 |
|  | 21 | 155 | 162 | 171 | 180 |  | 22 | 249 | 258 | 270 | 281 |
|  | 22 | 159 | 166 | 176 | 185 |  | 23 | 255 | 263 | 276 | 287 |
|  | 23 | 163 | 170 | 180 | 189 |  | 24 | 260 | 269 | 282 | 294 |
|  | 24 | 166 | 174 | 185 | 194 |  | 25 | 265 | 275 | 288 | 300 |
|  | 25 | 170 | 178 | 189 | 199 | 18 | 18 | 252 | 259 |  |
|  |  | 270 | 280 |
| 14 | 14 | 147 | 152 | 160 | 166 |  | 19 | 258 | 265 | 277 | 287 |
|  | 15 | 151 | 156 | 164 | 171 |  | 20 | 263 | 271 | 283 | 294 |
|  | 16 | 155 | 161 | 169 | 176 |  | 21 | 269 | 277 | 290 | 301 |
|  | 17 | 159 | 165 | 174 | 182 |  | 22 | 275 | 283 | 296 | 307 |
|  | 18 | 163 | .170 | 179 | 187 |  | 23 | 280 | 289 | 303 | 314 |
|  | 19 | 168 | 174 | 183 | 192 |  | 24 | 286 | 295 | 309 | 321 |
|  | 20 | 172 | 178 | 188 | 197 |  | 25 | 292 | 301 | 316 | 328 |
|  | 21 | 176 | 183 | 193 | 202 | 19 | 19 | 283 | 291 |  |
|  | 22 | 180 | 187 | 198 | 207 | 303 | 313 |
|  | 23 | 184 | 192 | 203 | 212 |  | 20 | 289 | 297 | 309 | 320 |
|  | 24 | 188 | 196 | 207 | 218 |  | 21 | 295 | 303 | 316 | 328 |
|  | 25 | 192 | 200 | 212 | 223 |  | 22 | 301 | 310 | 323 | 335 |
|  | 15 |  | 23 | 307 | 316 | 330 | 342 |
| 15 | 171 | 176 | 184 | 192 |  | 24 | 313 | 323 | 337 | 350 |
|  | 16 | 175 | 181 | 190 | 197 | j | 25 | 319 | 329 | 344 | 357 |
|  | 17 | 180 | 186 | 195 | 203 | 20 | 20 | 315 | 324 | 337 |  |
|  | 18 | 184 | 190 | 200 | 208 | 348 |
|  | 19 | 189 | 195 | 205 | 214 |  | 21 | 322 | 331 | 344 | 356 |
|  | 20 | 193 | 200 | 210 | 220 |  | 22 | 328 | 337 | 351 | 364 |
|  | 21 | 198 | 205 | 216 | 225 |  | 23 | 335 | 344 | 359 | 371 |
|  | 22 | 202 | 210 | 221 | 231 |  | 24 | 341 | 351 | 366 | 379 |
|  | 23 | 207 | 214 | 226 | 236 |  | 25 | 348 | 358 | 373 | 387 |
|  | 24 | 211 | 219 | 231 | 242 | 21 | 21 | 349 | 359 | 373 | 385 |
|  | 25 | 216 | 224 | 237 | 248 |  | 22 | 356 | 366 | 381 | 393 |
| 16 | 16 | 196 | 202 | 211 | 219 |  | 23 | 363 | 373 | 388 | 401 |
| 17 | 201 | 207 | 217 | 225 |  | 24 | 370 | 381 | 396 | 410 |
|  | 18 | 206 | 212 | 222 | 231 |  | 25 | 377 | 388 | 404 | 418 |
|  | 19 | 210 | 218 | 228 | 237 | 22 | 22 | 386 | 396 | 411 | 424 |
|  | 20 | 215 | 223 | 234 | 243 |  | 23 | 393 | 403 | 419 | 432 |
|  | 21 | 220 | 228 | 239 | 249 |  | 24 | 400 | 411 | 427 | 441 |
|  | 22 | 225 | 233 | 245 | 255 |  | 25 | 408 | 419 | 435 | 450 |
|  | 23  24 | 230  235 | 238  244 | 251  256 | 261  267 | 23 | 23 | 424 | 434 | 451 | 465 |
|  | 25 | 240 | 249 | 262 | 273 | 24 | 431 | 443 | 469 | 474 |
| 17 |  |  | 25 | 439 | 451 | 468 | 483 |
| 17 | 223 | 230 | 240 | 249 | 24 | 24 | 464 | 475 | 492 | 507 |
|  | 18 | 228 | габ | 246 | 255 |
|  | 19 | 234 | 241 | 252 | 262 |  | 25 | 4/2 | 484 | 501 | 517 |
|  |  |  |  |  | 1 25 | 25 | 505 | 517 | 536 | 552 |

473

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Асимметрия 137, 138, 229, 250 Асимптотическое приближение 57

Варианта 192

Варианты равноотстоящие 237

* условные 238 Вариационный ряд 192 Величина случайная 64

двумерная 156

дискретная 65

комплексная 413

непрерывная 65, 111

одномерная 155

* — центрированная 87 Величины случайные взаимно не­зависимые 79

зависимые 79

* — коррелированные 179

независимые 79, 176

некоррелированные 179

Вероятность безусловная 37

* доверительная (надежность) 213
* заданного отклонения нормаль­

ной случайной величины 133 —, определение аксиоматическое 21

—, — геометрическое 27 —, — классическое 19, 20 —, — статистическое 26

* отклонения относительной ча­

стоты от вероятности в не­зависимых испытаниях 61, 62

■— переходная 382

* попадания в заданный интервал

непрерывной случайной ве­личины 117 нормальной слу­чайной величины 133

* — — показательно рас­

пределенной случайной ве­личины 150

* — случайной точки в полу­

плоскость 161 произвольную об­ласть 166

— — — прямоугольник 162

* условная 37, 38

Выборка 188

* бесповторная 189
* повторная 189
* репрезентативная 189 Выборочное корреляционное от­ношение 270, 271

, свойства 272—274

Гамма-функция 146 Гипотеза 52

* конкурирующая (альтерна­

тивная) 282

* нулевая (основная) 281
* простая 282
* сложная 282
* статистическая 281 Гистограмма 195, 196

Дельта-функция 443, 444 Дисперсионный анализ 349 Дисперсия 87

* внутригрупповая 208 —■ выборочная 206
* генеральная 205
* групповая 208
* дискретной случайной вели­

чины 88 , свойства 90—92

* исправленная 212
* комплексной случайной вели­

чины 414 — функции 416

* межгрупповая 209
* непрерывной случайной вели­

чины 125, 126

* общая 209, 355
* остаточная 183, 355
* случайной функции 392

— , свойства 392, 393

* факторная 355 Доверительный интервал 214
* — для математического ожи­

дания нормального распре­деления при известном о 215, 312

* — — неиз­

вестном о 217

474

— среднего квадратическо­

го отклонения нормального распределения 222

Зависимость корреляционная 253 линейная 184

* статистическая 253
* функциональная 139 Закон больших чисел 108
* надежности показательный

153—155

* распределения вероятностей

66, 122

двумерной случайной ве­личины 156, 157

условный 170, 172

устойчивый 144

Интеграл от случайной функции 409

Интенсивность потока 70

* стационарного белого шума 444 Испытание 17

Исход благоприятствующий 19

* элементарный 19

Качественный признак 335 Композиция 144

Корреляционная теория случай­ных функций 389

* функция, см. Функция Корреляция криволинейная 275
* линейная 270
* множественная 276
* ранговая 335 Коэффициент вариации 235
* корреляции 178, 179
* — выборочный 261—263

Кендалла 341, 342

совокупный 278

* Спирмена 339, 340

частный 278

* регрессии 183 выборочный 255

Кривая нормальная (кривая Гаус­са) 130, 131

* —, построение по опытным

данным 249, 250

* нормированная 132 Критерий Бартлетта 323, 324
* Вилкоксоиа 343—345
* Кочрена 326
* Пирсона 329—331
* согласия 329
* статистический 283 Критические точки 284

См. также Таблица значений кри­тических точек

Линин регрессии выборочные 254

* спектральные 436 Ложный нуль 238

Математическое ожидание 75 дискретной случайной ве­личины 76

, вероятностный

смысл 77, 78

свойства 78—82

комплексной случайной ве­личины 414

функции 415

непрерывной случайной ве­личины 125

случайной функции 390

свойства 391

условное 173

функции одного случайного

аргумента 141, 142 Матрица перехода системы 382 Медиана 234

Метод наибольшего правдоподо­бия 229. 230

* Монте — Карло 363, 364 , применение к вычисле

иию определенных интег­ралов 453—455 , расчету многоканаль­ной системы массового об­служивания с отказами 451—453

* моментов 227, 228
* обратных функций 371—374
* произведений 241, 242
* суперпозиции 375, 376 Многоугольник распределения 66 Мода 138, 234

Момент корреляционный 176, 177 двух случайных комплекс­ных величин 415

* начальный теоретический 99 эмпирический 239
* обычный эмпирический 239,240
* условный эмпирический 239,

240

* центральный теоретический 99

эмпирический 239, 240

Мощность критерия 287

Наблюдаемое значение критерия 283

475

Надежность 213 Независимые испытания 55 Неравенство Чебышева 102, 103

Область критическая 284

* принятия гипотезы 284 Объем выборки минимальный 216,

313

* совокупности 188 Отбор механический 191
* простой случайный 190
* типический 191 Отклонение 86, 204

См. также Среднее квадратиче­ское отклонение Отыскание критических обла­стей 285—287

* параметров прямой регрессии

по несгруппированным дан­ным 255, 256

сгруппированным

данным 259, 260 Оценка вероятности биномиально­го распределения по относи­тельной частоте 224, 226

* генеральной дисперсии по ис­

правленной выборочной 212

* интервальная 213, см. также

Доверительный интервал

* истинного значения измеряе­

мой величины 219

* классическая 215
* наибольшего правдоподобия

230

* несмещенная 198
* погрешности метода Монте —

Карло 364—366

* смещенная 199
* состоятельная 199
* тесноты корреляционной свя­

зи 269, 270

* точечная 213
* точности измерений 223
* эффективная 199 Ошибка второго рода 282
* первого рода 282

Перестановки 22

Плотность спектральная 438—440

* — взаимная 442

нормированная 441, 442

* распределения 116

, вероятностный смысл 121,

122

, свойства 119, 120

* —, связь с функцией распре­

деления 118

двумерная 163

, вероятностный смысл

164, 165

, свойства 167

составляющих двумерной

случайной величины 169

; условная 171, 172

Поверхность распределения 163 Полигон 194, 195 Полная группа событий 17, 18 Поправка на непрерывность 321 Правила проверки нулевой гипо­тезы 290—292, 294—296, 300—303, 306, 309—311,

316, 318, 320, 321, 324, 326, 328, 331, 340, 342, 344, 345

* разыгрывания непрерывной

случайной величины 373, 374

Правило произведения 23

* разыгрывания дискретной слу­

чайной величины 367, 368 нормальной случайной ве­личины 378 полной группы событий 370

* — противоположных событий

369

случайной величины, функ­ция распределения которой имеет вид F (x)^=CxFl(x)-\r +CгF2(x) 376

* суммы 23
* трех сигм 134, 135

Предел в среднеквадратичном 405 Поток событий 69

* — простейший (пуассоиов-

ский) 70 Принцип практической невозмож­ности маловероятных собы­тий 35

Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции 327, 328

* — — — — — ранговой кор­

реляции Кендалла 342

мена 340

— нормальном распреде­

лении генеральной сово­купности 329—331 об однородности двух вы­борок 343—345

476

Произведение независимых слу­чайных величин 79

* событий 37

Производная случайной функции 406

Пространство элементарных собы­тий 21

Процесс винеровскнй 459

* марковский 459, 460
* нормальный (гауссов) 459
* Пуассона 457, 458
* случайный (стохастический) 387
* с независимыми приращениями

459

* со случайными приращениями

459

Прямая среднеквадратической ре­грессии 183

Равенство Маркова 383

* Уилсона — Гилферти 297 Размах варьирования 234 Размещения 22

Разыгрывание, см. соотв. правила Распределение биномиальное 66, 67

* выборки статистическое 192
* выборочное 201
* геометрическое 72, 73
* гипергеометрическое 73, 74
* нормальное 127, 128
* — на плоскости 181
* — нормированное 128, 129 общее 12£, 129
* показательное (экспоненци­

альное) 149—151

* Пуассона 68, 69
* равномерное 122
* Стьюдента 146
* теоретическое 137
* условное 170
* Фишера — Снедкора 147
* «хи квадрат» 145, 146
* эмпирическое 137 Реализация 387 Регрессия выборочная 254
* средняя квадратическая 182

Свойство ординарности 70

* отсутствия последействия 70
* стационарности 69, 70
* устойчивости выборочных

средних 202 Сечение 387

Случайная последовательность 388

* функция, см. Функция Случайные числа 367 Событие достоверное 14
* невозможное 14
* простое 55
* сложное 55
* случайное 14 События зависимые 41
* независимые 41

в совокупности 42

попарно 41

* несовместные 17
* противоположные 34
* равновозможные 18
* совместные 48
* элементарные 20 Совокупность выборочная 188
* генеральная 188 Состояние системы 381 Сочетания 22

Спектр стационарной случайной функции 436, 438 Спектральное разложение стацио­нарной случайной функции 432—435 Способ усреднения подынтеграль­ной функции 453, 454 Сравнение выборочной средней с гипотетической генераль­ной средней нормальной совокупности 308—311

* двух вероятностей биномиаль­

ного распределения 319— 322

* — дисперсий нормальных ге­

неральных совокупностей 288—292

* — средних нормальных гене­

ральных совокупностей с известными дисперсиями 297—303

* — — — — — — неизвест­

ными дисперсиями 314— 316

* — — — — — —' — одина­

ковыми дисперсиями 305— 308

* — — произвольно распреде­

ленных генеральных сово­купностей 303, 304

* исправленной выборочной дис­

персии с гипотетической генеральной дисперсией нормальной совокупности 293—296

477

Сравнеиие наблюдаемой относи­тельной частоты с гипоте­тической вероятностью со­бытия 317, 318

* нескольких дисперсий нормаль­

ных генеральных совокуп­ностей по выборкам одина­кового объема 325—327 различ­ного объема 322—324 средних методом диспер­сионного анализа 355, 356, 358—360

Среднее абсолютное отклонение 234

* квадратическое отклонение 04,

126

— выборочное 206

генеральное 205

исправленное 212

случайной функции 392

* условное 254

Средняя выборочная 200—202

* генеральная 199, 201
* групповая 203
* общая 203 Стандарт 205, 206 Стационарная линейная динами­ческая система 446

Стационарный белый шум 444, 445 Сумма общая 351—355

* остаточная 351, 352, 354, 355
* случайных величин 81
* событий 31
* факторная 351, 352, 354, 355 Сходимость в среднеквадратич­ном 405
* по вероятности 110

Таблица значений критических точек критерия Вилкоксо-

на 471—473

— распределения Коч-

рена 468, 469

— Стьюдента 466

— Фишера — Снед-

кора 467

**— — уЛ 465**

* — равномерно распределен­

ных случайных чисел 470, 471

функции q>(\*)= -у~(Гх1/2

461, 462

478

**1 ■\***

ф (\*)= -—— С е“г\*/2 dz

|^2яо

462, 463

п) 464

q=q (у, п) 464

* корреляционная 257, 258 Теорема Бернулли 108—110.
* Лапласа интегральная 59, 61 локальная 57, 58
* Ляпунова (центральная пре­

дельная теорема) 135, 136

* о вероятности попадания не­

прерывной случайной ве­личины в заданный интер­вал 116, 117 появления хотя бы од­ного события 45

* — дисперсии числа появлений

события в п независимых испытаниях 92, 93

линейной корреляции 184,

185

математическом ожидании

числа появлений события в п независимых испытаниях 83, 84

* — независимости двух слу­

чайных величин 174, 175

* об общей дисперсии 211, 212
* сложения вероятностей несов­

местных событий 32

* — — совместных событий 49
* умножения вероятностей 38,

39

* Чебышева 103—108 Теоремы о корреляционных мо­ментах 177—179
* — — функциях 424—427
* — характеристиках интегра­

ла от случайной функции 409—413 — производной от случай­ной функции 406—408

— суммы случайных функ­

ций 402, 403

числовых характеристиках

среднего арифметического одинаково распределенных случайных величин 96, 97 Точность оценки 213

Уравнение правдоподобия 230 Уравнения регрессии 173 выборочные 254

Уровень значимости 35, 36, 282 Уровне Ляпунова 136

Формула Вернул пи 5о

* для вычисления дисперсии 89,

207

* полной вероятысгн ЬО
* Пуассона 69 Формулы Бейеса 53
* Винера -- Хиичина 438 Функции коррелированные 400
* некоррелированные 400
* стационарно связанные 423
* стационарные и стационарно

связанные 423 Функция двух случайных аргу­ментов 143, 144

* корреляционная 394 -39/, 416,

1. 421

* -- взаимная 399—401, 417
* -- нормированная 398, 399,

1. 422

-- - — взаимная 401

* Лапласа 60

■— надежное гк 1ЬЗ

* обобщенная 443
* одного случайного ар;умента

139, 140

* передаточная 447
* правдоподобия 229, 232
* — логарифмическая 230
* распределения вероятностей

111—114

* — выборки (эмпирическая

функция распределения) 193, 194

* — генеральной совокупности

(теоретическая функция распределения) 193

* — двумерной случайной ве­

личины 158—161

* регрессии 173
* случайная 386
* — дифференцируемая 406 комплексная 415
* — стационарная 420
* — эр годи чес ка я 428, 429 центрированная 394
* характеристическая 136, 137

Характеристика выборочная 235

* генеральная 235
* случайной функции 389
* числовая 389
* частотная 447

Центр совместного распределения

183

Цепь Маркова 380, 381

однородная 381

с дискретным временем 381

непрерывным временем

381

Частота 192

* выравнивающая (теоретиче­

ская) 245—247

* относительная 24, 192
* эмпирическая 245

Эксцесс 138, 250

Учебное издание Гмурман Владимир Ефимович ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Художник К Э Семеиков Технический редактор Л А Овчинникова Корректор Г И Kotmpuhoea

Лицензия ИД 06236 от 09 11 01

Изд ФМ-228 Подп в печать 14 02 03 Формат 60 х 88'/16 Бумага газетн Гарнитура литературная Печать офсетная Объем 29,40 уел печ л 29,40 уст кр-отт 22 76 уч-изд л Тираж 20 000 экз Заказ J4° 2730

ФГУП «Издательство «Высшая школа», 127994 Москва, ГСП-4 Нсглинная ул д 29/14

Тел (095) 200-04-56 Е mail info(g,v-shkola ru http //www v-shkola ru

Отдеч респизации (095) 200-07-69 200-59-39, факс (095) 200-03-01 F-mail sales(o)v-shkola ru

Отдеч «Книга почтой» (095) 200-33-36 E-mail bookpost@v-shkoIa ru

Отпечатано в соответствии с качешвом предоставленных диапозитивов в ФГУП ордена «Знак Почета»

Смоленской областной типографии им В И Смирнова 214000, г Смоленск, пр-т им Ю Гагарина, 2

ISBN 5-06-004214-6

9

**785060**

**042146**

9785060042146

Этот файл был взят с сайта

<http://all-ebooks.com>

Данный файл представлен исключительно в ознакомительных целях. После ознакомления с содержанием данного файла Вам следует его незамедлительно удалить. Сохраняя данный файл вы несете ответственность в соответствии с законодательством.

Любое коммерческое и иное использование кроме предварительного ознакомления запрещено.

Публикация данного документа не преследует за собой никакой коммерческой выгоды.

Эта книга способствует профессиональному росту читателей и является рекламой бумажных изданий.

Все авторские права принадлежат их уважаемым владельцам. Если Вы являетесь автором данной книги и её распространение ущемляет Ваши авторские права или если Вы хотите внести изменения в данный документ или опубликовать новую книгу свяжитесь с нами по email.